CURSO METÓDICO

DE

DIBUJO LINEAL

CON APLICACIONES Á LAS ARTES, Á LA INDUSTRIA
Y Á LA AGRIMENSURA

PARTE PRIMERA

que comprende la geometría, el trazado ó dibujo geométrico, el dibujo de imitación, el de adorno, lavado y agrimensura.

Se vende esta obra en los puntos y librerías siguientes:

MADRID.	HERNANDO, calle del Arenal, núm. 11.
BARCELONA. . .	BASTINOS, calle de Pelayo, núms. 52 y 54. VIUDA BARTUMEUS, calle de Fernando VII. NIUBÓ, calle de la Espasería. CAMÍ, calle de la Unión.
PARÍS.	CH. BOURET.
SEVILLA. . . .	IZQUIERDO Y SOBRINO.
BILBAO.	SALVADOR.
CORUÑA. . . .	VILLARDEFRANCOS.
GERONA. . . .	TORRES.
PALMA DE MALLORCA.	GUASP, AMENGUAL Y MUNTANER, GELABERT Y PUIGAREDÓN.
TARRAGONA. . .	GUAL Y AGUADÉ.
VALLADOLID. . .	SANTARÉN.
VALENCIA. . . .	ORTEGA, SAMPERE, P. AGUILAR, F. AGUILAR, MARTÍ Y VILLALBA.
REUS.	VIUDA TORROJA.

En los demás puntos de España y Ultramar, en las principales librerías.

También se hallarán en las citadas librerías los ELEMENTOS DE GEOMETRÍA, *acompañados de algunos ejercicios prácticos*, por don A. Giró y D. I. R. Miró. Obrita aprobada por el Gobierno de S. M. para las escuelas de instrucción primaria.

NOTA.

A esta primera parte acompaña un *Atlas* para los ejercicios á ojo y á pulso, dividido en tres secciones. Las láminas de la primera comprenden las formas geométricas aplicadas al dibujo de imitación; las de la segunda, formas vegetales y dibujo de adorno, y las de la tercera, lavados en tinta de China. Cada una de dichas secciones se vende separadamente, á fin de facilitar su adquisición á los alumnos.

La *segunda parte* de esta obra, que comprende el estudio de las proyecciones, secciones de los cuerpos, penetraciones de los mismos, hélices, desarrollos de superficies, órdenes de arquitectura y principios de construcción, trazado geométrico de las sombras y perspectiva lineal, se vende separadamente de la *primera*, con el mismo objeto de facilitar su adquisición, y tiene también su correspondiente *Atlas*.

Es propiedad de Eyra Perales Diez

CURSO METODICO
DE
DIBUJO LINEAL

CON APLICACIONES

Á LAS ARTES, Á LA INDUSTRIA Y Á LA AGRIMENSURA

PARTE PRIMERA

QUE COMPRENDE EL TRAZADO Ó DIBUJO GEOMÉTRICO,
EL DIBUJO DE IMITACIÓN,
DE ADORNO, LAVADO Y AGRIMENSURA

POR

D. ANDRÉS GIRÓ Y ARANOLS

INGENIERO INDUSTRIAL,
individuo de varias corporaciones científicas,
económicas y literarias; catedrático de Dibujo excedente de la Escuela
superior Industrial de Barcelona,
y profesor numerario de la Escuela de Bellas Artes
y Artes y Oficios de la misma.

SÉPTIMA EDICIÓN

BARCELONA
LIBRERÍA DE JUAN Y ANTONIO BASTINOS, EDITORES
CALLE DE PELAYO, NÚMS. 52 Y 54
1888

El Dibujo es el lenguaje más á propósito en las Artes para expresar ideas de lo figurado; así puede decirse que es necesario á toda clase de personas.

Isaac Villanueva.
(*Curso de Dibujo industrial.*)

Con la ayuda del lápiz ó del tiralíneas es como las altas combinaciones de las Ciencias se revelan á los talleres del cerrajero, carpintero, mecánico, etc.; de manera que el Dibujo sirve de medio de comunicación entre el *científico* y el *obrero*, al mismo tiempo que es para los artistas una lengua universal. Su estudio es de primera necesidad en toda educación liberal, y debe ser introducido como ramo esencial en la *instrucción* de los muchachos del pueblo.

C. Boutereau.

Imprenta de Jaime Jepús, calle del Notariado, número 9.

AL SEÑOR

DON MANUEL MARÍA DE AZOFRA

Director del Real Instituto Industrial.

¿A quién mejor que á V., cuyos desvelos por los adelantos industriales son bien conocidos, puedo dedicar esta obra que tiene por objeto coadyuvar á la instrucción de la clase industrial y artesana? Al tributar á V. este sencillo y humilde homenaje, no me he propuesto otra cosa que manifestar á V. cuánto agradece sus bondades su atento y afectísimo servidor

Q. B. S. M.

Andrés Giró y Aranols.

INTRODUCCIÓN

El Dibujo es seguramente la primera y más importante de todas las bellas artes: es la que presta luces y perfecciones á todas las artes liberales, y aun á los ejercicios mecánicos. De él nacen, como de una raíz común, la Arquitectura, la Pintura, la Escultura y el Grabado, siendo todas, por decirlo así, aplicaciones diferentes del dibujo. Mas no se crea por esto que tan sólo sea útil este arte encantador á los demás artes y oficios, sino que también extiende su auxilio hasta á las ciencias mismas. Y si no, dígase: la Geometría, la Mecánica, la Geografía y otras varias ciencias, ¿no reclaman continuamente el indispensable concurso del Dibujo?

Su estudio no consiste solamente en aprender á copiar ó reproducir la Naturaleza en sus más brillantes formas, sino que nos pone ó nosotros mismos en estado de crear, de rectificar nuestra manera de ver por medio de continuas comparaciones; y así, fijando nuestra atención sobre puntos determinados, es como sabemos reproducir, á favor de algunas líneas ó contornos, nuestros pensamientos y recuerdos.

Las altas concepciones del arquitecto, del ingeniero, del pintor, escultor y mecánico son siempre dadas á conocer por medio de simples líneas, y con el auxilio de estos primeros diseños es como han llegado á crearse esos monumentos del genio que honran los siglos que los han visto nacer y atestiguan á las edades venideras la inteligencia y el poder de la especie humana.

Pero aunque el Dibujo es el manantial de todo lo que el genio puede crear de más grande y más rico, y de cuanto puede imaginar de más admirable y sublime, no por esto deja de recibir una aplicación más modesta, no menos útil y más general, prestando su auxilio á un grande número de artes industriales que le deben su regularidad y su perfección. Esta parte elemental del arte del Dibujo, que se conoce con el nombre de Dibujo lineal, es la que hemos procurado presentar en esta obra con aquella sencillez y claridad que demanda el talento juvenil. Esta quizá es la sola parte del dilatado arte del Dibujo que sea posible enseñar de una manera positiva; porque el resto se halla enteramente bajo el dominio del gusto y no conoce otras reglas que las de la inspiración ni otros límites que los del genio.

Así es que todos los hombres pensadores y que desean el bien de su país, conocen cada día más y más la necesidad que hay de dar á conocer desde la infancia los elementos del Dibujo lineal, por el poderoso auxilio que puede prestar á las artes, á las ciencias, á la industria y hasta á la vida privada. He ahí por qué el célebre é inmortal Jovellanos, en las *Bases* que dió para la formación de un plan general de instrucción pública á la Junta especial de este Ramo, dice que después de acreditado por los jóvenes en riguroso examen haber alcanzado todos los conocimientos que pertenecen al arte de hablar, recibirán:

«1.º La enseñanza del dibujo natural, que es tan recomendable, no sólo por la excelencia de este talento, aplicado á las bellas artes, sino también por las grandes ventajas que ofrece su aplicación á las artes industriosas y á todos los usos de la vida civil.

»2.º La enseñanza del dibujo científico, que se deberá dar con los principios de la geometría práctica, y que, perfeccionado con las gracias del dibujo natural, hará que los profesores de las ciencias físicas puedan aplicar este talento á la demostración de planos, máquinas, obras é invenciones que pertenecen el ejercicio práctico de estas ciencias.»

Convencidos de esta verdad, publicamos en 1846 el *Curso metódico de Dibujo lineal y de Geometría práctica*, creyendo con ello prestar un servicio á la enseñanza primaria superior, á la que principalmente se dirigía nuestro trabajo; y cúponos la satisfacción de que, no solamente la adoptaron muchos colegios y escuelas de merecida reputación, y aun algunas Normales, sino también de que S. M. la Reina, de acuerdo con el Real Consejo de Instrucción pública, la señalara en 1848 para servir de texto en las escuelas del Reino.

Agotada la primera edición, creímos conveniente hacer alguna modificación en la obra, dividiéndola al efecto en dos partes; pero conservando, poco más ó menos, el plan de la anterior. Publicóse la *primera parte*, y como causas independientes de nuestra voluntad retardaron la *segunda*, no por esto fué aquélla menos estimada, nada desmereció la doctrina en ella contenida ni el método con que venía propuesta; seis ediciones consecutivamente agotadas dan á conocer que el público cree sacar de nuestro libro algún provecho. Mas si la acogida es suficiente para recompensar nuestros desvelos, con todo jamás podrá alucinarnos hasta el punto de creer que hemos sabido dar cumplida cima á tan provechosa tarea. El actual plan de estudios ha llamado particularmente nuestra atención, y deseando que de nuestra obra puedan utilizarse, no tan sólo las Escuelas Normales y de segunda enseñanza, sino también la clase artesana, la hemos nuevamente refundido y puesto en armonía con las disposiciones del Reglamento vigente.

El éxito antes obtenido nos hace prometer acierto en el trabajo que presentamos completo, confiados de que por él se iniciarán fácilmente los alumnos en un arte que, á más de contribuir de un modo eficaz á la perfección de todos los demás en general, sirve al propio tiempo de recreo útil para el hombre estudioso, de pasatiempo agradable para el hombre rico y de un recurso más para el pobre que no tiene para vivir más que su laboriosidad, su saber y su inteligencia.

ADVERTENCIA

No es nuestro intento prescribir á los profesores reglas fijas é invariables para la enseñanza del Dibujo lineal; mas no obstante, amaestrados con la experiencia adquirida en la práctica de su enseñanza, nos tomaremos la libertad de poner algunas observaciones que podrán servir quizás de utilidad á nuestros dignos comprofesores.

Para facilitar la enseñanza del Dibujo lineal en una clase de niños de menor edad, conviene dividir á éstos en cuatro secciones: los de la primera, ó sean los principiantes, se colocarán alrededor de un tablero ó encerado en el que estarán trazadas las figuras cuyo conocimiento se crea más necesario, é irán nombrando estas figuras á medida que se les vayan señalando.

Cuando sepan ya distinguir las figuras y estén enterados de su nomenclatura, pasarán á la segunda sección, en donde se les hará recitar la definición de estas mismas figuras. Los de la tercera trazarán estas mismas, sin instrumentos, sobre el tablero ó cuaderno, y por turno las figuras que le serán pedidas por el maestro ó corrector, explicando en seguida los principales caracteres de ellas.

Durante estos ejercicios, los de la cuarta sección se ocuparán, bajo la vigilancia del maestro ó corrector, en trazar con los instrumentos las figuras de la lección semanal, debiendo contestar en seguida á todas las preguntas que se hallan al frente de cada artículo (*a*).

Si se quiere que los de la segunda y tercera sección

(*a*) Al fin de este volumen se encuentran las preguntas para cada una de las clases ó secciones.

dibujen con cuadernos, podrán los de la segunda copiar las *cinco* primeras láminas del atlas, y los de la tercera copiarán las mismas y las siguientes hasta la lámina *diez* ó *doce*.

Los primeros ejercicios deben hacerse en escala mayor, con resolución y soltura; para esto se servirán de papel común en pliego entero, ó bien de pizarrillas ó tableros pintados de negro al óleo.

En clase de adultos sólo habrá una sección; y como en estas clases los ejercicios con instrumentos deben ser en mayor número que en las escuelas de instrucción primaria, se pueden destinar tres días de la semana para dibujar á ojo y á pulso y otros tres para los ejercicios gráficos. En lo demás pueden guiarse por el texto de la obra.

AVISO Á LOS ALUMNOS.

1.° Un número dentro de un paréntesis denota que la operación ó proposición en que se funda la que se está efectuando se halla en el párrafo que indica dicho número.

2.° Los principales signos y abreviaciones de que haremos uso en este tratado, son:

$=$	que significa igual.
$>$	mayor.
$<$	menor.
$+$	más ó aumentado en.....
$-$	menos ó restado de.....
$\times$	multiplicado por.....
:	dividido ó partido por.....
fig.	figura.
prob.	problema.
res.	resolución.
dem.	demostración.
p. ejemp.	por ejemplo.
L. Q. D. D.	lo que debía demostrar.

3.° Lo que los alumnos deben aprender de memoria y al pie de la letra son las definiciones y reglas que vayan de letra bastardilla.

4.° Los útiles que necesitan los alumnos de la clase de dibujo natural, son:

Un estuche que contenga: un compás llamado de piezas, otro de puntas fijas y otro de balustre; un tiralíneas bueno (*b*); un transportador ó semicírculo graduado, de latón ó talco, y una regla con medida métrica de 15 á 20 centímetros de largo.

Dos cartabones: uno isósceles y otro escaleno.

Tres lápiz plomo: uno del núm. 2, otro del núm. 3 y otro muy delgadito para el portalápiz de los compases.

Un lapicero de latón, para llevar el lápiz-plomo cuando ya sea algo corto.

Un pedazo de goma elástica de superior calidad y otro pedazo de goma elástica vulcanizada.

Papel de marca mayor para el dibujo de imitación y ornato.

Papel marquilla para los ejercicios gráficos en el Dibujo geométrico.

Una barrita de tinta de China y un par de platitos de loza ó porcelana para desleirla.

Un pincel ordinario para poner la tinta de China en el tiralíneas.

Un cortaplumas y algunas plumas metálicas propias para el dibujo.

Una cartera de cartón, de un tamaño conveniente, para guardar los dibujos.

Nota. En la sección relativa á lavados (núm. 553), no solamente se explica lo que necesita el alumno para lavar con tinta de China, sepia, bistre, etc., sino también las buenas y malas cualidades de los materiales que para ello se requieren.

Instrumentos de que debe estar provista una clase para la enseñauza del Dibujo lineal.

1.° Un tablero de madera pintado de negro al óleo, que no sea menor de 25 decímetros de largo y 17 de ancho.

(*b*) Mejor aún si hubiese dos; porque entonces el uno sirve para las líneas finas y el otro para las gruesas.

2.º Dos reglas: una del largo de la pizarra y otra que sea algo más corta.

3.º Una vara dividida en pies y pulgadas.

4.º Un metro con una cara dividida en décimos y la otra en décimos, centésimos y milésimos.

5.º Una medida provincial, donde la hubiere, teniendo en una cara las divisiones usuales y en la otra los décimos y centésimos.

6.º Un gramil fijo y otro movible: la regla del primero será de dos metros y su cruceta de ocho decímetros; la regla del segundo bastará que tenga ocho decímetros y su cruceta cuatro.

7.º Un cartabón isósceles de seis decímetros de cateto.

8.º Un nivel de albañil de seis decímetros de base.

9.º Una plomada de dos metros de largo.

10. Un transportador ó semicírculo graduado de latón, cartón ó madera, de seis decímetros de diámetro.

11. Un compás de madera, como de seis decímetros de largo, con una punta de hierro en una pierna y en la otra un portalápiz para colocar la punta del yeso ó clarión.

12. Otro compás con puntas de hierro, como de unos seis decímetros de largo.

13. Una colección de pequeños modelos de hojalata, cartón ó madera, para poder manifestar á los discípulos las principales propiedades de las rectas en combinación con los planos y de los planos entre sí.

14. Una colección de cuerpos geométricos con una ó más secciones en cada uno de ellos.

15. Una colección de penetraciones de cuerpos.

16. Convendría que tuvieran además los instrumentos que se vayan mencionando en los ejercicios de agrimensura.

CURSO METODICO

DE

DIBUJO LINEAL

Y DE GEOMETRÍA PRÁCTICA

Nociones preliminares.

1. A qué se llama Dibujo en general?—2. Qué se entiende por dibujo lineal? Cuál es su principal objeto?—3. Cuál es la base del dibujo lineal? Qué entendemos por trazado geométrico?—4. Qué es dibujo geométrico?—5. Cuántas especies de ejercicios hay en el dibujo geométrico y lineal?—En qué consiste el dibujo lineal á ojo? En qué consiste el dibujo lineal gráfico?—6. Por qué se empieza dando á los alumnos conocimientos de la geometría?—7. Qué es geometría?—8. Qué se entiende por extensión?—9. A que se llama espacio?—10. Qué se entiende por cuerpo?—11. La extensión de un cuerpo, en cuántos sentidos se puede considerar? Qué se entiende por longitud? Qué por latitud? Qué por profundidad ó grueso?—12. Puede existir cuerpo alguno que no tenga estas tres dimensiones juntas?—Cómo es, pues, que se consideran muchas veces por separado?—13. Cuántas especies de extensión distinguiremos?

1. Se llama Dibujo, en general, *el arte que enseña á representar sobre una superficie todos los cuerpos de la Naturaleza, tales como se presentan á nuestra vista desde un punto determinado*, causando tal ilusión por medio de las sombras, claros y medias tintas, combinadas entre sí, que llegan á hacer creer á

la vista que unas partes tienen más ó menos relieve que otras, como sucede en la Naturaleza.

2. Por DIBUJO LINEAL *entendemos el arte que enseña á representar tales como son los contornos de los cuerpos y sus diferentes partes.*

El dibujo lineal, útil á casi todas las profesiones, tiene por fin principal *el representar los diferentes objetos que sirven para la construcción de los edificios, aparatos, máquinas, muebles, etc., es decir, todas las producciones de las artes industriales.*

3. La base del dibujo lineal *es el trazado y dibujo geométrico.*

Entendemos por TRAZADO GEOMÉTRICO *la parte de la geometría que enseña el uso de la regla y el compás y nos suministra métodos para la descripción, división y medida de las líneas, superficies y cuerpos.*

4. DIBUJO GEOMÉTRICO *es el arte que enseña á representar los puntos, líneas y superficies que considera aisladamente la geometría, sin atender á posición determinada.*

5. Hay dos especies de *ejercicios* en el dibujo geométrico y lineal: *á ojo* y *á pulso,* y *gráficos* ó con *instrumentos.*

El dibujo que se hace á PULSO *consiste en representar los objetos con una precisión no matemática, sino aproximativa, que en muchos casos es suficiente.*

La práctica del dibujo *á ojo* da exactitud de vista, seguridad de pulso, soltura á los dedos y gracia á los contornos, circunstancias muy necesarias al dibujante.

El DIBUJO GRÁFICO *consiste en representar los objetos con una exactitud rigurosa*, empleando para ello ciertos instrumentos geométricos.

6. Siendo el *trazado y dibujo geométrico* (3) la base del dibujo lineal, empezaremos dando á conocer los elementos de la ciencia llamada *geometría.*

La geometría se divide en lineal plana y de los cuerpos sólidos según que estudie las extensiones en una dos ó tres dimensiones

7. La GEOMETRÍA *es una ciencia que tiene por objeto la medida de la extensión en todas sus propiedades.*

8. Llámase EXTENSIÓN GEOMÉTRICA *el espacio que ocupa un cuerpo en la Naturaleza.*

9. Se llama ESPACIO *esa extensión inmensa en que están colocados todos los cuerpos del universo.*

10. El CUERPO, considerado geométricamente, *es todo lo que ocupa un lugar en el espacio.*

dimensiones

11. La extensión de un cuerpo se considera en tres sentidos llamados *dimensiones*, que se conocen con los nombres de *longitud*, *latitud* y *profundidad* ó *grueso.*

Generalmente hablando, entendemos por LONGITUD *la dimensión que constituye lo largo de un cuerpo por la parte en que lo miramos;* por LATITUD, *la que constituye lo ancho*, y por PROFUNDIDAD Ó GRUESO, *lo que forma su altura ó espesor* (A).

12. *No puede existir cuerpo alguno que no tenga estas tres dimensiones juntas.* Pues por pequeño y tenue que sea un cuerpo, siempre tendrá algo de largo, de ancho y de profundo ó grueso.

Sin embargo, por la *abstracción* prescindimos de una ó más dimensiones; así, cuando hablamos de la profundidad de un río, por ejemplo, no atendemos á lo que coge de largo ni de ancho.

13. Distinguiremos, pues, tres especies de EXTENSIÓN: *la extensión en sola longitud*, que se llama LÍNEA; *la extensión en longitud y latitud solamente*, que se llama SUPERFICIE, *y la extensión en longitud, latitud y profundidad*, que se llama CUERPO SÓLIDO Ó VOLUMEN GEOMÉTRICO.

(A) Esta última dimensión se la suele nombrar *altura, profundidad ó grueso*, según sea el objeto á que se aplica; si éste fuese, por ejemplo, un árbol, un edificio, un monte, etc., diríamos su *altura*; si un río, un estanque, un foso, etc., su *profundidad;* si un libro, madero, ladrillo, etc., su *grueso ó espesor.*

SECCION PRIMERA

DE LAS LÍNEAS

CAPÍTULO PRIMERO

DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

14. Qué es punto? Los dibujantes, cómo lo representan?—15. Qué es línea? Cuántas especies hay de líneas?—16. Qué es línea recta? Consecuencia de esta definición.—17. Qué es línea curva?—18. Cuántas especies hay de líneas rectas? Cuántas de curvas? Si desde un punto á otro se tira una recta y una curva, cuál de las dos será la más corta?—19. Cuándo se dice de una recta que es indeterminada? Cuándo es determinada?—20. Cuándo una línea se llama quebrada ó poligonal?—21. Qué es línea mixta?—22. Qué se entiende por línea ondulada?—23. A qué se llama punto de concurso ó de intersección?—24. Cuándo se dice que dos líneas son comensurables?—25. Qué se entiende por plano ó superficie plana y qué por curva?—26. Cómo se traza la línea recta?

14. El PUNTO, considerado geométricamente, *es una cosa que no tiene dimensión alguna; tal es la extremidad de una línea.*

Por eso se dice que el punto tiene posición; pero no dimensión en longitud, latitud y profundidad.

En el Dibujo se podrá definir el punto diciendo *ser la menor señal que con la punta de un lápiz ó pluma se puede hacer.*

15. La LÍNEA, geométricamente hablando, *es la extensión en sola longitud* (13); mas en el Dibujo se llama línea á la señal ó trazo que un lápiz, ú otra materia que señale, deja pasándolo de un punto á otro sobre el papel ó tablero.

Distinguiremos dos especies de líneas: *recta* y *curva*.

16. LÍNEA RECTA *es la que tiene todos sus puntos en una misma dirección*; tal es AB (fig. 1).

Esta es la más corta que se puede tirar de un punto á otro; por lo mismo, la línea recta es la que mide exactamente la distancia que hay entre dos puntos.

17. LÍNEA CURVA *es aquella cuyos puntos cambian continuamente de dirección*; tal es CDE (fig. 1).

18. Como no hay más que un camino directo para ir de un punto á otro, se sigue *que sólo habrá una especie de líneas rectas.*

La que es de curvas puede haber una infinidad; porque cuanta más vuelta y rodeo se dé para ir de un punto á otro, mayor será la curva que resulte; las curvas CDE, CNE (fig. 1), lo demuestran bien.

De lo dicho se deduce:

1.° *Que si de un punto á otro se tira una recta y una curva, la recta es más corta que la curva.*

2.° *Que desde un punto á otro sólo puede tirarse una línea recta, pero sí tantas curvas como se quiera*; la fig. 1 demuestra que desde el punto C al punto E no se puede tirar más que la recta CE, pero sí muchas líneas curvas.

19. Se dice que una recta es INDETERMINADA, *cuando no se conoce más que uno de los puntos por donde ha de pasar*; porque por un mismo punto pueden pasar muchas líneas rectas. Mírese la fig. 2, donde se ve que por el punto O pasan una porcion de líneas rectas en arbitrarios sentidos.

Y se dice que es DETERMINADA, *cuando se conocen dos de los puntos por donde ha de pasar la recta*; pues entonces se sabe la dirección de la línea entera.

20. Llámase LÍNEA QUEBRADA Ó POLIGONAL *la línea que se compone de varias rectas que no siguen una misma dirección*, como FG (fig. 1).

21. Se suele llamar LÍNEA MIXTA *la combinación de la línea recta con la curva*; tal es C′ (fig. 12).

22. Se denomina LÍNEA ONDULADA Ó SERPENTINA *una línea curva que forma giros ó vueltas en figura de eses*, como, por ejemplo, la HI (fig. 2).

23. Llámase punto de CONCURSO, de ENCUENTRO Ó de INTERSECCIÓN *el punto en que dos ó más líneas se cortan ó se encuentran*; tal es O (fig. 2).

24. Se dice de dos líneas que son COMENSURABLES, ó que tienen una COMÚN MEDIDA, *cuando ambas contienen á una tercera de su misma especie un número exacto de veces*.

Y se dice que son INCOMENSURABLES *cuando no se les puede encontrar una medida común*.

25. Entendemos por SUPERFICIE PLANA ó simplemente PLANO, *aquella superficie sobre la cual puede aplicarse una línea recta en todos sentidos*. Tal viene á ser la superficie de una mesa muy lisa, etc.

Llámase SUPERFICIE CURVA *la que no tiene ninguna porción apreciable que sea plana*; tal es, por ejemplo, la superficie de una vasija, llamándose *convexidad* la curvatura exterior y *concavidad* la interior.

APLICACIONES DE LAS RECTAS Á LAS ARTES INDUSTRIALES.

26. Son infinitas las aplicaciones de la línea recta. Para trazarla nos valemos de la regla, instrumento tan conocido que tenemos por superfluo representarle; pero como si la regla está mal hecha, también lo estará la línea que con ella se trace, será muy útil saber comprobar una regla.

Para averiguar si está bien hecha, se debe tirar una línea á lo largo de su arista con una punta muy sutil; aplíquese sobre la línea que se tiró un hilo bien tirante, y si se ajustare bien con la línea, será señal de que es buena la regla.

Hay ocasiones en que las rectas exigen tal longitud, que su trazado no se puede verificar con la regla. Los carpinteros, aserradores y pintores de edificios la trazan aplicando sobre las maderas ó paredes un cordel ó bramante impregnado con polvos de carbón, yeso ó almagre, que poniéndolo tirante por los extremos y pinzándolo de enmedio, se estampa de un lado á otro y queda trazada la línea.

ARTÍCULO PRIMERO

Una línea recta.

VERTICAL, HORIZONTAL, INCLINADA.

27. Cómo se llama la recta, según la posición que tiene en el espacio?—28. Qué es línea vertical?—29. Qué es línea horizontal?—30. Cuál es la inclinada?—31. Por un punto del espacio, cuántas rectas verticales, horizontales é inclinadas pueden pasar?—32. Ejemplos de líneas verticales y horizontales, en la Naturaleza y en las artes.

27. La línea recta, según la posición que tiene en el espacio, recibe diferentes nombres: llámase *vertical, horizontal* é *inclinada*, que son las tres principales posiciones que puede tener una recta, considerada aisladamente.

28. Se da el nombre de LÍNEA VERTICAL *á la señalada por la dirección de un hilo que suspende un cuerpo grave*; tal es AB (fig. 3).

Esta recta, que desde cualquier punto que se tire *se halla siempre en dirección al centro de la tierra*, se la conoce también con el nombre de *línea de á plomo*, por ser de este metal el peso que se pone ordinariamente al extremo inferior del hilo que la determina. A este aparato en las artes le llaman *plomada*.

29. LÍNEA HORIZONTAL *es la que, comparada con la vertical, no se inclina más á un lado que á otro*; tal es AB (fig. 1). Así, toda línea que siga la dirección de las aguas, cuando están en quietud ó calma, es una línea horizontal (*a*).

(*a*) En los dibujos tomaremos como á *línea vertical* la que sigue la dirección de los bordes laterales del papel, y como á *horizontal* la que siga la dirección de los bordes superior é inferior. Así, diremos que CD (fig. 3) representa una vertical, y AB (fig. 1) una horizontal.

30. Llámase LÍNEA INCLINADA *á la recta que no es vertical ni horizontal*, como AB y DE (fig. 4).

Como la inclinación de esta línea puede ser mayor ó menor, resulta que su posición puede variar casi al infinito, y se las distingue solamente con los nombres de *inclinadas de derecha á izquierda*, como AB, ó *inclinadas de izquierda á derecha*, como DE.

31. De la definición de estas líneas se deduce: que por un punto del espacio puede sólo pasar una recta vertical, pero horizontales é inclinadas pueden pasar varias.

EJEMPLOS DE LÍNEAS VERTICALES Y HORIZONTALES EN LA NATURALEZA Y EN LAS ARTES.

32. Todo cuerpo grave ó pesante, abandonado á sí mismo en el espacio, sigue en su descenso una línea vertical; también nos describe la misma línea el agua que asciende por el tubo de un pozo artesiano; los hierros de una barandilla, de una verja, etc., tienen también la posición vertical, así como la barra metálica de un pararrayos, etc.

El agua, y en general todos los líquidos, trazan líneas horizontales en las paredes ó lados que les sirven de límites; las hiladas de ladrillos ó de piedra labrada en una pared bien construída, los travesaños de las ventanas, las maderas ó listones que forman la persiana, el pasamanos de un balcón, los bordes del sobre de una mesa, etc., nos ofrecen repetidos ejemplos de líneas de nivel ú horizontales.

ARTÍCULO 2.º

NOCIONES INDISPENSABLES PARA ANTES DE PASAR Á LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

33. Cuáles son las propiedades de los cuerpos que interesan al dibujante? Qué es figurabilidad de un cuerpo?—34. Qué es posición de un cuerpo?—35. Qué se entiende por magnitud de un cuerpo?—36. A qué se debe atender cuando se ha de representar un objeto cualquiera? Ejemplo de lo dicho.—37. A qué se da el nombre de problema?—38. Qué son datos de un problema ó ejercicio.—39. Qué entendemos por construcción? Cuándo á las líneas se las llama de construcción y cuándo auxiliares?—40. A qué se llama solución? A qué resultado?—41. En los ejercicios gráficos, cómo se indican los puntos, las líneas de dato, las de construcción y las de resultado?

33. Entre las muchas propiedades de que está

dotado un cuerpo, las que interesan al dibujante son la *figurabilidad*, la *posición* y la *magnitud*.

Se entiende por FIGURABILIDAD de un cuerpo *la forma bajo la cual se presenta á nuestra vista*. Por lo que la figura de una bala es redonda, la de un dado cuadrada, etc.

34. Se llama POSICIÓN de un cuerpo *la manera determinada bajo la cual ocupa una parte del espacio*. La posición de un libro, por ejemplo, cuando está abierto es distinta de la que tiene cuando está cerrado.

35. Por MAGNITUD de un cuerpo se entiende *la porción de espacio que ocupa*. Así, la magnitud de un pliego de papel es mayor que la de una cuartilla, porque el primero ocupa más espacio que la última.

36. De donde se deduce que cuando se quiere representar un objeto cualquiera, se ha de atender indispensablemente á su figura, á su posición y á su magnitud; pues de lo contrario, la representación no se parecería al objeto que nos ocupa; por ejemplo, si se dijese á uno que trazara una línea, lo primero á que debe atender es á la *figura* que ha de darle, si recta ó curva; luego á su *posición*, porque una recta puede tener tres posiciones principales (27); sabida la figura y la posición, debe atender á su *magnitud*, puesto que es susceptible de ser más ó menos larga, á pesar de tener la misma figura y posición que se hubiese pedido.

37. Se da el nombre de PROBLEMA *á toda cuestión en la que es preciso operar para que se encuentre la posición de ciertos puntos ó líneas con la ayuda de otros que se conocen y que tienen con aquéllos una relación expresada en el enunciado de la cuestión*.

38. Llámanse DATOS de un problema ó ejercicio *los puntos, líneas y figuras cuya posición y magnitud son conocidas*.

39. Se da el nombre de CONSTRUCCIÓN *á las ope-*

raciones que es preciso hacer para descubrir las partes desconocidas; y por lo mismo, las líneas que se han de tirar para llegar fácilmente al resultado se las llama *líneas de construcción*, cuando el ejercicio se hace con instrumentos, y se les da el nombre de *auxiliares* cuando se opera á ojo.

40. Se llama SOLUCIÓN del problema ó ejercicio *el conjunto de las operaciones ó el modo particular de obtener lo que en él se pide*, y se llama RESULTADO *lo que se obtiene por medio de la solución*.

41. Al delinear los puntos, líneas y figuras que entran en los problemas ó ejercicios gráficos del DIBUJO GEOMÉTRICO, es convenio generalmente establecido indicar los *puntos* por medio de dos pequeñas rayitas que se cortan, ó bien por medio de un punto que lleva cuatro rayitas en su derredor, como se ve en A (fig. 2); las *líneas* ó *figuras de dato* se trazan lo más finas ó delgadas que sea posible; las de resultado, un poco más visibles ó gruesas, y las de *construcción* con rayitas finas interrumpidas á cortos intervalos, pudiendo poner uno ó más puntos en cada uno de ellos, cuando en un mismo problema hayan de entrar varias líneas de esta clase.

Así, en la fig. 6, por ejemplo, las línas r, r' y r'', que son de *dato*, se han dibujado delgaditas; la ACDE, que es de *resultado*, se ha trazado algo más gruesa, y la EB, que es de *construcción*, se ha indicado con rayitas entrecortadas. De esta manera los dibujos se hacen mucho más inteligibles al que los examina.

DIBUJO Á OJO Y Á PULSO.

42. En el dibujo á pulso pueden hacerse dos clases de ejercicios: los *primeros*, en el encerado ó bien en papel ordinario, á fin de que los dibujantes se ejerciten en formar á pulso las líneas y figuras defi-

nidas en la geometría; pues este ejercicio les proporcionará en breve trazar fácilmente las figuras más complicadas, haciéndoles conseguir además cierto desembarazo en los dedos que les facilita el uso del compás, la regla y demás instrumentos matemáticos.

Los *segundos* consistirán en ir copiando en el papel las láminas del Atlas, á fin de que vayan adquiriendo exactitud de vista, seguridad de pulso y soltura en los dedos, para luego saber dar á los contornos aquella gracia y simetría que no se adquiere sino con la práctica del dibujo á pulso.

A los primeros ejercicios les daremos el nombre de *Ejercicios en el encerado*, y á los segundos los denominaremos *Dibujos del atlas*; recomendamos á los discípulos que, siempre que uno de estos ejercicios no les salga con la debida exactitud, vuelvan á repetirlo hasta que lo consigan debidamente.

EJERCICIOS EN EL ENCERADO.

43. *Trazar una horizontal.*—Lo único que debe procurarse es que todos sus puntos estén en una misma altura, pues siempre que un extremo de la línea suba ó baje más que el otro, dejará de ser horizontal.

Ya hemos dicho que esta línea ha de tener iguales las distancias que median entre sus extremos y el borde superior ó inferior del papel. Mas si la horizontal estuviese trazada en un plano vertical, puede también servir para su comprobación el nivel de albañil.

44. *Trazar una línea vertical.*—Su trazado suele ofrecer más dificultad que el de la horizontal, á causa del hábito que tenemos en dar á la escritura cierta inclinación de derecha á izquierda. Para trazar, pues, esta recta, debemos tener presente que los extremos C y D de una vertical (fig. 3) deben encontrarse á igual distancia de los bordes laterales del tablero (C).

Para comprobar la línea vertical en el encerado se hará uso de la plomada.

45. *Dividir una línea horizontal y otra vertical en dos partes iguales.*—Trazadas éstas sobre el tablero, márquese á ojo el punto que corresponda enmedio de la línea.

(C) Con el nombre de tablero designaremos en adelante el plano, sea cual fuese, sobre el que se dibuje.

Para su comprobación válganse del compás ó de la regla dividida.

46. *Dividir una línea vertical y otra horizontal en tres partes iguales.*—Se tomará á ojo la tercera parte de la línea por ambos extremos; si la operación está bien ejecutada, los dos puntos situados á igual distancia de las extremidades de la línea conservarán entre sí y la del centro la misma distancia.

Con el compás podrán asegurarse de su exactitud.

47. *Dividir una línea en cuatro partes iguales.*—Primeramente se dividirá la línea en dos partes iguales, marcando el punto del centro; después divídase por mitad cada una de estas partes.

48. *Dividir una línea en mas de cuatro partes iguales.*—Este ejercicio presenta más dificultad á medida que las divisiones van siendo en mayor número; pero al mismo tiempo advertiremos que en muchos casos la operación puede simplificarse con bastante sencillez. Si se quiere, p. ejemp., *dividir una línea en seis partes iguales*, después de haberse dividido en dos partes iguales, subdivídase cada una de éstas en tres y quedará dividida la recta en las seis partes que se piden.

Basta un poco de atención y cuidado para conocer en qué casos se puede recurrir á una simplificación análoga.

49. Las verticales y horizontales sirven de grande auxilio para tomar las distancias que guardan entre sí las partes del objeto que se copia. Conviene, por lo mismo, que los alumnos hagan mucha práctica de las verticales y horizontales á pulso, pues facilitando éstas la comparación de las proporciones, hace que el dibujo salga más exacto y fiel. Estas líneas, llamadas *auxiliares* (39), ó se tiran mentalmente con la vista, ó bien se señalan muy flojas y delicadas, á fin de que después puedan borrarse.

El siguiente ejercicio demuestra la utilidad de lo que acabamos de exponer.

50. *Copiar la recta inclinada* AB (fig. 4), *haciendo que tenga la misma longitud é inclinación que la recta dada.*—Para ver la verdadera inclinación de la recta AB, bájese desde el punto A, extremo superior de la línea, la vertical AC, y desde el punto B, extremo inferior, concíbase la horizontal BC; tírense estas dos líneas, y procúrese que tengan la misma longitud que las que concebimos ó vemos en el modelo, y nos determinarán los puntos A y B, y como dos puntos fijan la posición de una recta, basta tirar una línea del punto A al punto B, la cual tendrá la misma inclinación y longitud que la recta dada.

Copiar la recta inclinada BE (fig. 4), *con la misma longitud é inclinación que la recta dada.*—Para su ejecución, atiéndase á lo que hemos indicado en el ejercicio anterior.

51. *Trazar una línea recta desde un punto á otro determinado.*—Fijados sobre el tablero dos puntos D y C (fig. 14), colóquese el yeso ó lápiz sobre D y diríjase hacia C, sin jamás perder de vista este punto ni la línea que se traza. Con la regla se comprobará si la línea obtenida es perfectamente recta.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 1.ª (D).

52. 1.° *Dibujar las figs. I y II.*—Cada una de ellas se compone de cuatro rectas horizontales y equidistantes, dividiéndose la segunda en 2, 4, 3, 6 partes iguales.

2.° *Copiar la fig. III.*—Se compone de seis verticales equidistantes, siendo las cuatro exteriores de igual longitud y las interiores iguales á su tercera parte.

3.° *Representar la* PLOMADA *fig IV.*—La recta *ab*, que se llama LINEA DE FE, divide en dos partes iguales la cara del instrumento.

4.° *Copiar la fig. V.*—Se compone de una línea inclinada de derecha á izquierda y otra de izquierda á derecha. En el párrafo 30 se explicó el modo de imitarlas.

5.° *Figurar la pared de* SILLARES *iguales fig. VI.*—A más de ser equidistantes todas las horizontales, debe procurarse que las verticales formadas por las junturas de las piedras ó sillares vengan en una misma plomada.

6.° *Copiar la* GRECA *fig. VII.*—Este adorno, compuesto de horizontales y verticales, tiene iguales todos los recuadros que le forman.

7.° *Dibujar la* ESCUADRA *fig. VIII.*—Se compone de dos rectas verticales y otras dos horizontales, respectivamente iguales.

8.° *Representar un* BALCÓN DE HIERRO *fig. IX.*—Hágase que el pasamanos y la repisa sean bien horizontales, así como los hierros verticales de la baranda estén á igual distancia el uno del otro.

9.° *Diseñar el* ALMOHADILLADO *de la fig. X.*—Procúrese que los sillares tengan todos una misma altura y que estén á igual distancia uno de otro, á fin de que los rehundidos ó canales resulten también iguales.

(D) En los ejercicios que se hagan á ojo y á pulso sobre el papel, se procurará que los alumnos no se sirvan de ninguna especie de instrumento, á fin de que se acostumbren á ejercitar el ojo y la mano, de manera que puedan adquirir un buen golpe de vista; de este modo, en aquellos casos que no se requiere una rigurosa exactitud geométrica, podrán trazarlas sin necesidad de compás ni otro instrumento alguno, y la mano se acostumbrará á saber delinear el objeto que se propongan, ya sea representando lo que tengan á la vista, ya lo que la imaginación les sugiere. Al efecto, el maestro privará rigurosamente el uso de tiras de papel á los discípulos; pues la experiencia nos ha hecho conocer que les sirven de regla y de compás.

También procurará que no sigan la costumbre de inclinar el papel ó tablero en que dibujen, como suele hacerse en la escritura; pues de lo contrario, cuando hubiesen de dibujar sobre un objeto que no les fuese posible inclinarlo, según la costumbre que hubiesen adquirido, se verían en dificultad para dibujar con el debido acierto.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

53. Estos ejercicios con instrumentos se hacen primero con el lápiz-plomo, y después de estar cerciorados de que se han trazado debidamente, se pasan las líneas con tinta de China, por medio del instrumento llamado tiralíneas, procurando siempre que las líneas de dato queden lo más finas y delgadas que sea posible, y las de resultado un poco más gruesas (E).

PROBLEMAS:

I. *Trazar una recta igual á la suma de varias rectas dadas* r, r′, r″.... (fig. 6).

Sobre una recta indefinida AB, póngase la r de A á C, la r' de C á D, la r'' de D á E, y la AE será la recta pedida; porque $AE=AC+CD+DE=r+r'+r''$.

II. *Hacer una recta un cierto número de veces, por ejemplo, 3, mayor que otra recta dada* n (fig. 6).

Sobre una indefinida LP póngase n de L á F, de F á G y de G á H, esto es, tres veces como se pide; la recta buscada es la LH. Dem. $LH=LF+FG+GH=n+n+n=3n$.

III. *Hallar una recta igual á la diferencia de dos rectas dadas* r y r′ (fig. 7).

Póngase la recta mayor r de N á Q, sobre la indefinida NQ, y la r' en sentido contrario de Q á P; la NP es la diferencia pedida. Dem. $NP=NQ-QP=r-r'$.

IV. *Hallar la relación numérica ó mayor común medida* (24) *entre dos rectas comensurables*, n, n′ (fig. 7).

Tómese una distancia igual á la menor n y colóquese tantas veces como se pueda sobre la mayor n',

(E) No nos detenemos en explicar el manejo de la regla y el compás, porque se hará más con una simple explicación del profesor que con cuantas descripciones pusiéramos. Por lo mismo que llevamos expuesto, tampoco decimos nada del modo de cortar el lápiz-plomo para el trazado de las rectas y curvas, así como del modo de usar el tiralíneas, etc.

que serán dos de A á E; el residuo EB colóquese sobre la n tantas veces como se pudiere, que serán dos de C á F; el residuo FD póngase sobre EB tantas veces como quepa, y como lo contiene dos veces exactamente, FD es la común medida de las rectas n, n'. Dem. n'=AE+EB=2n+EB; n=CF+FD=2EB+FD; EB=2FD. Luego sustituyendo, se tiene: n=4FD+FD =5FD; n=10FE+2FD=12FD. Por lo que vemos que la común medida FD está contenida doce veces en la n' y cinco en la n; de aquí se sigue que n' y n tienen entre sí la relación de 12 á 5 (G).

V. *Construir la escala de partes iguales con indicación de una medida de longitud* (fig. 8).

Supongamos que sea n la unidad de medida á que se quieren referir todas las líneas: se repetirá diez veces seguidas, desde cero hacia la izquierda, hasta 10; tómese luego una distancia igual á estas diez unidades, y se irá colocando, desde cero á la derecha, en 10, 20, 30, etc., y con esto se tendrá construída la escala, la que se numerará del modo que está en la figura.

ARTÍCULO 3.º

MEDICIÓN DE RECTAS. DISTANCIAS.

54. Qué se entiende por medida?—55. Las líneas cómo se miden?—56. La unidad de medida es siempre de una misma longitud?—57. Qué es un metro?—58. Múltiplos y submúltiplos del metro. Tabla comparativa del metro con las medidas lineales españolas.—59. Qué se entiende por distancia de dos puntos?

54 Se da el nombre de MEDIDA *á un tipo convencional autorizado por el uso ó por la ley*. Sirve para

---

(G) Como este procedimiento es algo largo, se ha ideado el referir todas las líneas á una, que se elige á arbitrio y se repite cierto número de veces en otra línea, que es lo que se llaman *escalas ó pitipiés*, y cuya construcción vamos á ver en el siguiente problema.

apreciar en su justa cantidad ó dimensión los demás objetos de su misma especie.

55. *Las líneas se miden con otras líneas; pero en general la medida común de las líneas es la recta.* Medir una línea recta ó curva, ó medir una distancia cualquiera, es buscar cuántas veces dicha línea ó distancia contiene á una línea recta conocida y determinada, que se toma por unidad; por ejemplo, sea *n* (fig. 6) el término de comparación ó la unidad de medida, la longitud de la recta LP será determinada cuando se conozca cuántas veces contiene á la línea *n*.

56. La longitud de la *unidad de medida* es muy varia. El capricho ó tal vez la necesidad de las circunstancias locales fué seguramente quien presidió las más de las veces á determinar la unidad de medida, y de ahí ha resultado el que cada pueblo tenga una diferente. Las personas ilustradas y que desean el bien de la nación han suspirado mucho tiempo por la *reducción general de medidas* á una sola y común, que seguida de todas las de las demás naciones, facilitará inmensamente la comunicación del comercio, de la industria y de las artes.

57. Este sistema razonado de medidas ha tomado su base en la misma Naturaleza. El *metro* es el nombre de la unidad de las medidas de longitud, el cual *es igual á la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano, desde el polo Norte al Ecuador*, y se divide en diez partes iguales, llamadas *decímetros*; cada decímetro en diez partes, llamadas *centímetros*, y cada centímetro en otras diez, llamadas *milímetros*.

58. A continuación ponemos una tabla de los múltiplos y submúltiplos del metro, así como también de las correspondencias que tiene con las diferentes medidas lineales usadas en España hasta ahora.

MÚLTIPLOS DEL METRO.

Decámetro =á diez metros.
Hectómetro=á cien metros.
Kilómetro =á mil metros.
Miriámetro=á diez mil metros.

SUBMÚLTIPLOS DEL METRO.

Decímetro =á un décimo de metro (F).
Centímetro=á un centésimo de metro.
Milímetro =á un milésimo de metro.

TABLA COMPARATIVA DEL METRO CON LAS ANTIGUAS MEDIDAS LINEALES ESPAÑOLAS, SEGÚN LOS DATOS PUBLICADOS POR EL GOBIERNO.

1 metro es equivalente á

1'196308 de vara.	de Castilla.
1 vara, 7 pulg., 0'805 lín. . .	de Castilla.
1 vara, 7 pulg., 0'129 lín. . .	de Albacete.
1 vara, 3 pulg., 5'684 lín. . .	de Alicante.
1 vara, 7 pulg., 2'607 lín. . .	de Almería.
5 palmos, 15 milésimas de palmo	de Baleares (Palma)
5 palmos, 145 milésimas de palmo	de Barcelona.
1 vara, 6 pulg., 9'064 lín. . .	de Canarias.
1 vara, 3 pulg., 8'821 lín. . .	de Castellón.
1 vara, 6 pulg., 10'899 lín. . .	de Ciudad Real.
1 vara, 6 pulg., 8'456 lín. . .	de Coruña.
5 palmos, 0'526 cuartos. . . .	de Gerona.
1 vara, 0'886 tercia.	de Huesca.
1 vara, 6 pulg., 10'899 lín. . .	de Jaén.
5 palmos, 141 milésimas de palmo	de Lérida.

(F) La segunda escala que hay en la fig. 8 tiene un decímetro exacto de longitud, y está dividida en centímetros y milímetros.

1 vara, 6'105 pulgadas. . . .	de Lugo.
1 vara, 6 pulg., 8'456 lín. . .	de Madrid.
1 vara, 9 pulg., 10'318 lín. . .	de Pamplona.
5 palmos, 128 milésimas de palmo	de Tarragona.
1 vara, 302 milésimas de vara. .	de Teruel.
1 vara, 3 pulg., 8'821 lín. . .	de Valencia.
1 vara, 1'66 de cuarta.	de Valencia.
1 vara, 10 pulg., 7'585 lín. . .	de Zaragoza.

La misma relación que hay entre el metro y la vara de *Castilla*, existe con la de las provincias siguientes:

Álava.	Guadalajara.	Pontevedra.
Avila.	Huelva.	Salamanca.
Badajoz.	León.	Santander.
Burgos.	Málaga.	Sevilla.
Cáceres.	Murcia.	Soria.
Cádiz.	Orense.	Valladolid.
Córdoba.	Oviedo.	Vizcaya.
Cuenca.	Palencia.	Zamora.
Granada.		

La misma correspondencia que hay entre el metro y la vara de *Albacete*, existe también con la de las siguientes provincias:

Guipúzcoa.	Segovia.
Logroño.	Toledo.

59. Por DISTANCIA de dos puntos *se entiende la longitud de la recta tirada entre ellos.* Para medir y trazar en el papel líneas que contengan cierto número de partes de una línea determinada, úsanse comúnmente las escalas ó pitipiés cuya construcción vimos en el problema V del párrafo 53.

Cuando ocurra tomar en esta escala un número determinado de partes, por ejemplo 25, se pondrá una de las puntas del compás sobre las decenas, v. g., en 20, y la otra sobre las unidades, en 5, y esta abertura cogerá 25 partes.

EJERCICIOS EN EL ENCERADO.

60. Se trazarán líneas horizontales, verticales é inclinadas, iguales á 1, 2, 3... 10 decímetros.

Para su comprobación sírvanse del metro dividido en decímetros.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

61. *Delinear un* DECÍMETRO *dividido en centímetros y milímetros* (fig. 8).

Tírense cuatro horizontales de la longitud de un decímetro, y que la distancia de una á otra sea poco más ó menos las que hay en la figura; de la horizontal superior bájense verticales á la inferior para marcar los centímetros; desde la segunda á la más baja márquense los semicentímetros, y desde la tercera abajo señálense los milímetros.

ARTÍCULO 4.°

DIVISIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.

62. Qué es circunferencia? Qué es círculo?—63. A qué se da el nombre de arco? Qué es semicircunferencia? Qué es cuadrante, sextante y octante?—64. Qué es radio?—65. Qué se entiende por cuerda? Qué es diámetro?—66. Cómo dividen generalmente los geómetras la circunferencia de un círculo cualquiera? Todas las circunferencias son susceptibles de esta misma división? El grado es una magnitud absoluta?—67. Cómo se señalan los grados, minutos, etc.? Cómo se escribirá un arco de 18 grados, 24 minutos, 32 segundos?—68. Cuál es la utilidad de la división de la circunferencia? Para qué sirve en particular?—69. Los radios y diámetros de un mismo círculo son iguales? El diámetro, cómo divide al círculo y á la circunferencia?

62. Se entiende por CIRCUNFERENCIA *una curva cerrada que tiene todos sus puntos á igual distancia*

de otro llamado CENTRO, *situado en el mismo plano que la curva*; tal es ABCD (fig. 9).

CÍRCULO *es la porción de plano limitado por la circunferencia.*

63. Se da el nombre de ARCO *á una porción cualquiera de la circunferencia*; tal es AB, BC, etc. (fig. 9). Cuando el arco abraza la mitad de la circunferencia, toma el nombre de *semicircunferencia*; tal es ABC. Se llama *cuadrante*, cuando es la cuarta parte de la circunferencia, como AD; *sextante*, cuando es la sexta parte, como AB, y *octante*, cuando es la octava parte, como CF y FD.

64. Llámase RADIO *á toda recta tirada desde el centro á la circunferencia*; tales son OA, OD, etc. (fig. 9).

65. CUERDA *es una recta que une dos puntos de la circunferencia*; tal es AB (fig. 9).

DIÁMETRO *es una cuerda que pasa por el centro del círculo*, como AOC.

66. La circunferencia de un círculo cualquiera se considera dividida generalmente en 360 partes iguales, que se llaman *grados*; cada grado en 60 partes iguales, llamadas *minutos*; cada minuto en 60 *minutos segundos*; etc. (H).

Todas las circunferencias, ya grandes ó pequeñas, son susceptibles de esta misma división; la circunferencia que tenga mayor radio tendrá el grado mayor; pero siempre los grados de la una serán proporcio-

---

(H) Desde que se estableció en Francia el sistema métrico, la circunferencia se divide también en 400 grados. Cada grado se subdivide en 100 minutos, cada minuto en 100 segundos, y así sucesivamente; á esta nueva división la llaman *centesimal* ó de *centesimales*, para distinguirla de la de los antiguos minutos y segundos, á la que se le da el nombre de *sexagesimal*. Nosotros seguiremos la antigua división, por ser la única que por ahora se usa, á causa de estar construídos según esta división los instrumentos de agrimensura, náutica, astronomía, etc.

nales á los de la otra, por ser partes semejantes de sus todos respectivos. Así, la semicircunferencia *abcd* (fig. 10) tiene los mismos grados que la ABCD, que es más grande.

Por lo dicho vemos que un grado no tiene una magnitud absoluta, pero sí relativa á su respectiva circunferencia; por esto se dice que el grado es $^1/_{360}$ de la circunferencia.

67. Los grados se indican colocando un pequeño cero á la parte superior de la derecha del número, los minutos con una coma, los segundos con dos, etc. Así, un arco de 18 grados, 24 minutos, 32 segundos, se escribirá 18° 24′ 32″.

68. La división de la circunferencia es la *base* del cálculo geométrico y el *fundamento* de todas las demostraciones de esta ciencia, y sirve también en particular para medir los ángulos y determinar su valor.

69. De las definiciones dadas se deduce:

1.° *Que los radios de un mismo círculo son iguales*, porque miden las distancias del centro á cada uno de los puntos de la circunferencia.

2.° *Que los diámetros* de un mismo círculo *son también iguales*, porque el diámetro no es otra cosa que la reunión de dos radios opuestos.

3.° *Que el diámetro es la mayor de todas las cuerdas, y divide al círculo y á la circunferencia en dos semicírculos y dos semicircunferencias iguales.*

ARTÍCULO 5.°

Combinación de dos líneas.

DE LOS ÁNGULOS, SU MEDIDA Y MODO DE DETERMINAR SU VALOR.

70. Qué es ángulo? Qué son lados del ángulo?—71. Qué nombre toma el ángulo, según la naturaleza de las líneas que lo forman?—72. Cómo

se nombran ó leen los ángulos?—73. Qué es medida de un ángulo? La medida de un ángulo, depende de la longitud de sus lados?—74. Los ángulos, según la abertura de sus lados, qué nombre toman? Qué es ángulo recto, agudo y obtuso?—75. De qué instrumento se sirven para determinar la medida de un ángulo?—76. Cómo se llaman dos líneas que se cortan? Cuántos ángulos forman?—77. Qué son ángulos contiguos ó adyacentes?—78. Cuánto vale la suma de los dos ángulos formados por una recta al encontrarse con otra? Consecuencia de lo que se acaba de demostrar.—79. Qué son ángulos opuestos por el vértice?—80. Cuándo un ángulo es complemento de otro?—81. Y suplemento? Qué se deduce de esto?—82. Qué entendemos por bisectriz de un ángulo?

70. Se llama ÁNGULO *á una abertura indefinida formada por dos líneas que concurren en un mismo punto, llamado* VÉRTICE *del ángulo*; tal es (fig. 11) la abertura indefinida que forman las líneas AB y BC; el punto B es el vértice.

Las líneas que por su concurrencia forman el ángulo, se llaman *lados del ángulo*

71. Según la naturaleza de las líneas que forman los lados, el ángulo puede ser rectilíneo, curvilíneo y mixtilíneo: ÁNGULO RECTILÍNEO *es el que está formado por líneas rectas* (fig. 11); CURVILÍNEO, *el que consta de líneas curvas*, como A, A′ (fig. 12), y MIXTILÍNEO, *el que está formado por una línea recta y otra curva*, como C, C′.

72. Para designar un ángulo basta nombrar la letra del vértice; pero cuando dos ó más ángulos tienen su vértice en el mismo punto, es preciso leer las tres letras poniendo en segundo lugar la del vértice.

73. La MEDIDA *de un ángulo es el número de grados, minutos y segundos de un arco comprendido entre sus lados y descrito desde el vértice como á centro.* Así es que el ángulo AOD (fig 9) tiene 90 grados por medida; porque el arco AD comprendido entre sus lados es la cuarta parte de la circunferencia.

Por lo dicho vemos que la MAGNITUD *de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de la abertura ó inclinación de ellos.* Así es que el ángulo

BOA (fig. 10) es igual con el *boa*, á pesar de tener menos longitud los lados de este último, porque ambos abrazan la cuarta parte de su respectiva circunferencia, y por consiguiente tienen la misma medida.

74. Los ángulos, según la abertura de sus lados, se dividen en *rectos* y *oblicuos*; éstos se subdividen en agudos y obtusos.

Angulo recto *es el que comprende entre sus lados un arco de* 90°, ó lo que es lo mismo, la cuarta parte de la circunferencia; tal es AOB (fig. 10) (1).

Angulo obtuso *es el que tiene por medida un arco mayor que el de* 90°; tal es AOC (fig. 10).

Angulo agudo *es el que comprende un arco menor que el de* 90°, y por lo mismo es menor que un recto; tal es BOC y COD (fig. 10).

75. Para determinar la *magnitud* ó *medida* de un ángulo, se sirven de un instrumento llamado *transportador*, que consiste en un semicírculo de latón, talco ó asta, dividido en grados y minutos (66), como se ve en la fig. 10. A este instrumento también se le da el nombre de *semicírculo graduado*.

Para determinar el *valor de un ángulo* por medio del transportador, *se coloca su centro* O *en el vértice del ángulo que se quiere medir y su diámetro sobre uno de los lados; el número de grados, minutos, etc., que tiene el arco comprendido entre los lados del ángulo determina su valor.*

76. *Cuando dos líneas se cortan, se llama* secante *la una de la otra*; formando entonces cuatro ángulos, que serán rectos, si dichas líneas se cortan sin inclinarse la una respecto de la otra, y oblicuos si se inclinan.

---

(1) En el sistema *centesimal* el ángulo recto comprende un arco de 100 grados, de los 400 que se divide la circunferencia bajo dicho sistema.

77. Se llaman *ángulos* CONTIGUOS Ó ADYACENTES *los dos ángulos formados por una recta que se encuentra con otra*; tales son los ECD y DCF (fig. 14).

78. *La suma de los dos ángulos que forma una recta al encontrarse con otra es igual á 180° ó á dos ángulos rectos*; porque la medida de aquéllos abrazará una semicircunferencia descrita desde su vértice; luego el valor de los dos ángulos será igual á 180°, ó lo que es lo mismo, á dos rectos.

De lo que se acaba de demostrar se sigue: *que la suma de todos los ángulos consecutivos que se pueden formar en un punto y á un mismo lado de una línea, equivalen á dos ángulos rectos, y la suma de todos los ángulos consecutivos que se pueden formar alrededor de un punto en todas direcciones, es igual á cuatro ángulos rectos ó 360°.*

79. Se llaman *ángulos* OPUESTOS POR EL VÉRTICE *los ángulos no adyacentes formados por dos rectas que se cruzan*; tales son los EOA, COD (fig. 15). Así es que en los ángulos opuestos por el vértice, los lados del uno son siempre prolongación de los lados del otro.

80. Se dice que *un ángulo es* COMPLEMENTO *de otro, cuando es lo que le falta ó sobra para valer un recto*; así, el ángulo DOF (fig. 9) es el complemento de cada uno de los ángulos AOF y FOC, del primero por exceso y del segundo por defecto.

81 Llámase SUPLEMENTO de un ángulo *al que es igual á lo que le falta para valer dos rectos*; así, el ángulo COD (fig 15) es suplemento del ángulo DOE, y el AOE lo es también del mismo ángulo DOE.

De lo dicho se deduce que *dos ángulos opuestos por el vértice son iguales*; porque los ángulos COD y AOE no pueden ser el uno y el otro suplemento del ángulo DOE sin ser iguales entre sí, y como ellos son también opuestos por el vértice, se sigue L. Q. D. D.

82. Se llama BISECTRIZ *de un ángulo la recta que lo divide en dos partes iguales*, y por lo mismo forma dos ángulos iguales; tal es AD (fig. 16).

EJERCICIOS EN EL ENCERADO.

83. 1.° Dados varios ángulos, determinar los rectilíneos, curvilíneos y mixtilíneos.

2.° Dados diferentes ángulos rectilíneos, indicar cuáles son los rectos, cuáles los agudos y cuáles los obtusos.

3.° Trazar un ángulo recto con un lado horizontal y otro vertical.

4.° El mismo ejercicio con rectas inclinadas.

5.° Buscar ángulos en los objetos de la sala donde haya la clase é indicar la especie á que pertenecen, ya por la naturaleza de sus lados, ya por su abertura.

6.° Dados varios ángulos oblicuos, determinar el número de grados que sus lados abrazan.

Comprob. Los ejercicios 2.°, 3.° y 4.° se comprobarán con el cartabón; los demás con el transportador.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

84. PROBLEMAS.

I. *Dada una recta* AB, *formar en su extremo* B *un ángulo igual á otro dado* abc (fig. 11).

Haciendo centro en *b*, descríbase entre los lados del ángulo dado, y con un radio arbitrario, el arco *ca*; con el mismo radio, haciendo centro en B, descríbase el arco indefinido *mn*, y llevando la distancia *ac* de *m* á *n*, tírese la recta B*n* prolongada y se tendrá el ángulo ABC = *abc*, porque ambos tienen por medida (73) el arco *ac*.

II. *Hacer un ángulo en el punto* A *de la recta* AB, *igual á la suma de dos ángulos dados* abc *y* def (figura 17).

Desde los vértices *b* y *e* de los ángulos dados, descríbanse con un mismo radio los arcos *st*, *mn*, y desde el punto A de la recta AB el arco indefinido *s′z*; tómense sobre éste las partes *s′t′*, *t′z*, respectivamente iguales á *st* y *mn*; tírese la recta A*z*C, y el ángulo CAB será igual á la suma de los dos ángulos dados.

Observ. 1.ª En este problema la línea de puntos *bxh* no sirve.

Observ. 2.ª Si el ángulo que se ha construído debiese ser igual á la suma de tres ó más ángulos, el procedimiento sería el mismo.

III. *Dado un ángulo* abc (fig. 13), *hacer otro que sea un número de veces mayor*, p. ejemp., tres.

Con un radio cualquiera, por ejemp., *ba*, trácese el arco *ac*, y con igual radio, haciendo centro en B, descríbase el arco indefinido AC; tómense sobre este arco tres partes iguales á *ac*; tírense por el último punto de división C la recta BC, y se tendrá el ángulo ABC $=3abc$.

20 IV. *Construir un ángulo igual á la diferencia de dos ángulos dados* abc, def (fig. 17).

Después de haber descrito desde sus respectivos vértices y con un mismo radio los arcos *st* y *mn*, tómese en el arco del ángulo mayor, desde uno de sus extremos, v. g., *t*, un arco $tx = mn$; por el punto *x* tírese la recta *bh*, y el ángulo *hbc* es la diferencia pedida.

Observ. Como esta figura sirve para dos ó más problemas, el alumno comprenderá que la línea *bh*, aunque sea de puntos, se habrá de trazar llena, por ser de resultado.

20 V. *Dividir un ángulo en dos partes iguales* (figura 16).

Del vértice A como á centro, y con un radio arbitrario, descríbase el arco BC, y de sus extremos trácense dos nuevos arcos que se cortarán en D; por este punto y el vértice A tírese la recta AD, y se tendrá BAD $=$ DAC, por abrazar los lados de ambos ángulos igual porción de arco.

VI. *Dividir un ángulo que no se le conozca el vértice en dos partes iguales* (fig. 22).

Tírese una recta cualquiera *ef*, comprendida entre los lados del ángulo; divídanse en dos partes iguales cada uno de los cuatro ángulos que forma la *ef* con dichos lados, y la recta que pase por los puntos de intersección *n* y *m*, de las cuatro bisectrices, dividirá en dos partes iguales al ángulo.

Segundo modo (fig. 30). Tírense dos líneas *mr*, *ns*, paralelas entre sí y comprendidas entre los lados del ángulo; en los ángulos que aquellas rectas forman con las dadas, trácense, en los de un mismo lado, las bisectrices, y por los puntos de intersección *u* y *t* tírese la recta *tu*, la cual dividirá al ángulo en dos partes exactamente iguales.

VII. *Dividir un ángulo en ciertas partes iguales cuyo número sea producto del dos multiplicado una ó más veces por sí mismo* (fig. 16).

Después de haber dividido el ángulo propuesto BAC en dos ángulos iguales, BAD y DAC, divídase cada uno de éstos en otros dos iguales, y se tendrá dividido el primitivo en 4, y haciendo la misma operación con cada uno de éstos, resultará dividido en 8, y así sucesivamente en 16, etc.

Observ. Así, sabiendo construir un ángulo recto ó de 90°, se saben construir los ángulos siguientes: 90°, 45°, 22° 30′, 11° 15′, 5° 37′ 30″, etc.

Sabiendo construir un ángulo de 60°, pueden encontrarse geométricamente los ángulos de 60°, 30°, 15°, 7° 30′, 3° 45′, 1° 52′ 30″, 0° 56′ 15″, etc.

VIII. *Dividir un ángulo recto* ABC (fig. 18) *en tres partes iguales.*

Haciendo centro en el vértice B, trácese con una abertura de compás arbitraria el arco AC; con el mismo radio que se ha descrito el arco, señálese desde A el punto *d* y desde C el punto *f*; por B y por los pun-

Hacer un ángulo de 15 grados

tos *d*, *f*, tírense las B*d*, B*f*, que dividirán en tres partes iguales el ángulo recto ABC (J).

IX. *De un determinado número de grados hacer un ángulo.*

Se construye por medio del transportador.

X. *Calcular el suplemento de un ángulo dado.*

Regla general. Réstese de 180° el ángulo propuesto, y la diferencia será el suplemento pedido (81). Así, valiendo el ángulo propuesto 63° 22′, el suplemento suyo será 180°—63° 22′=116° 38′.

XI. *Dado un ángulo oblicuo, calcular su* COMPLEMENTO.

Réstese de 90° el valor del ángulo dado: la diferencia será el complemento; por exceso, si el ángulo propuesto es obtuso, y por defecto, si es agudo.

APLICACIONES DE LOS ÁNGULOS Á LAS ARTES INDUSTRIALES

Son muy comunes los ángulos en las artes, pues tienen lugar en la arquitectura, la jardinería, la agrimensura, la carpintería, la hojalatería, el arte de trabajar el cartón, etc.

ARTÍCULO 6.°

De las rectas, consideradas según su posición relativa.

PERPENDICULARES, OBLICUAS, CONVERGENTES Y DIVERGENTES, PARALELAS Y ÁNGULOS CONSIDERADOS CON RELACIÓN Á ESTAS ÚLTIMAS.

85. Comparadas entre sí las líneas rectas, de cuántas maneras pueden ser?—86. Qué es línea perpendicular? A qué se llama pie de la

(J) Si el ángulo, en vez de ser recto, fuese oblicuo, no se podría dividir geométricamente en tres partes iguales en todos los casos; sin embargo, el apreciable profesor y arquitecto *D. Manuel María de Azofra*, en su Curso de Geometría aplicada á las artes, establece un método para resolver dicho problema, que no tiene más inconveniente que no dar el resultado en el mismo ángulo; dicho método es el que seguimos nosotros en el *prob. XIX del párrafo* 125.

perpendicular?—87. Qué es línea oblicua?—88. Si desde un punto fuera de una recta se le tira una perpendicular y diferentes oblicuas, qué se verifica? Qué se deduce de esto?—89. Las oblicuas que distan igualmente del pie de la perpendicular, son iguales? Qué se deduce de esto? — 90. La oblicua que más se separa de la perpendicular, es la más larga? — 91. Qué son líneas convergentes y divergentes?—92. Qué son líneas paralelas? Qué propiedades se deducen de la definición de las paralelas?—93. Cuando dos paralelas son cortadas por una secante, cuántos ángulos forman?—94. Qué son ángulos alternos internos?—95. Cuáles son los alternos externos?—96. Cuáles son los correspondientes?—97. Respecto de estos ángulos, cuáles son las propiedades que interesan al dibujante?—*Dem*. Que los ángulos alternos internos son iguales, así como lo son también los alternos externos.—*Dem*. Que los dos ángulos internos de un mismo lado de la secante, tomados juntos, valen dos rectos ó 180°, así como los dos ángulos externos del mismo lado de la secante.

85. Comparadas entre sí las líneas rectas, pueden ser de cuatro maneras: *perpendiculares*, *oblicuas*, *convergentes* ó *divergentes* y *paralelas*.

86. LÍNEA PERPENDICULAR *es la que cae ó se levanta sobre otra recta, sin inclinársele á lado alguno;* por lo mismo forma con ella ángulos iguales y rectos; tal es CD (fig. 19), respecto de AB, y recíprocamente.

87. Se llama LÍNEA OBLICUA *la que se inclina más á un lado que á otro de la recta con que se compara;* así, la DC (fig. 14) es una línea oblicua respecto de EF, y recíprocamente.

88. Si desde un punto fuera de una recta (fig. 20) se tira á ésta una perpendicular y diferentes oblicuas, se verifica: *que la perpendicular será más corta que cualquiera de las oblicuas;* porque si del punto C, con un radio igual á CD, se describe el arco *ef*, todos sus radios serán iguales (69); pero el radio tomado sobre la perpendicular es el solo que llega á la recta AB, sin tener que prolongarlo; luego la CD es más corta que las oblicuas CA y CB.

De aquí se sigue:

1.° *Que la perpendicular es la que mide la verdadera distancia que hay de un punto á una recta.*

2.° Que desde un mismo punto no se puede tirar más que una sola perpendicular á una recta.

89. *Las oblicuas que distan igualmente del pie de la perpendicular son iguales;* porque si en la fig. 21 se tiran las líneas DE, DF, de modo que nE=nF, y por el punto D, con un radio DE, se traza el arco hEF, se tendrá que DE=DF por radios de un mismo círculo.

De esto se deduce: *que toda perpendicular,* por ejemp. Dn, *tiene todos sus puntos á igual distancia de otros dos* E *y* F *de la recta sobre que cae, equidistantes del pie de la perpendicular.*

90. *La oblicua que mas se separa de la perpendicular es la más larga;* porque Dh+hC=DC (fig. 21), pero Dh=DE por radios de un mismo círculo; luego DE=DC−Ch; de donde se sigue que DE menor que DC.

91. Se llaman líneas CONVERGENTES Ó DIVERGENTES *dos rectas que, estando trazadas sobre un mismo plano, no guardan una igual distancia en toda su extensión;* tal es AB y CD (fig. 22); se dice que son *convergentes* hacia la parte por donde se van acercando, de modo que, si se las prolongara, llegarían á formar un ángulo, y se llaman *divergentes* por aquella parte por donde se van separando.

92. Se da el nombre de PARALELAS *á dos ó más rectas que, hallándose en un mismo plano, no pueden encontrarse por más que se las prolongue, á causa de tener todos sus puntos relativos á igual distancia;* tales son CD, EF (fig. 23).

De la definición de las paralelas se deducen algunas propiedades que en muchos casos pueden auxiliar las operaciones del dibujante; tales son las siguientes:

1.ª *Que las paralelas, aun cuando se las prolongue infinitamente, no se pueden encontrar;* pues han de correr por su naturaleza siempre á igual distancia la una de la otra.

2.ª *Que las líneas* CE, gh (fig. 23), *tiradas desde una de las paralelas perpendicularmente á la otra, son iguales;* pues estas perpendiculares miden la distancia que hay entre las dos paralelas, cuya distancia es siempre una misma (88, 1.º).

3.ª De lo dicho se deduce: que como dos líneas paralelas tienen todos sus puntos relativos á igual distancia, *las partes de las paralelas interceptadas entre paralelas son iguales entre sí.*

De aquí se sigue: *que las oblicuas* En, hD (fig. 23), *igualmente inclinadas entre paralelas, son iguales.*

4.ª *Que si dos líneas fueren paralelas, la tercera que lo sea á la una lo será también á la otra;* porque no puede estar en todos sus puntos á igual distancia de la una sin estarlo también con la otra.

93. Cuando dos líneas paralelas (fig. 24) son cortadas por una secante, forman *ocho ángulos, cuatro en la parte exterior de las paralelas, llamados* EXTERNOS, *como los* e, h, o, p, *y cuatro en la parte interior, llamados* INTERNOS, *tales son* z, m, n, u.

Estos ángulos, según su posición relativa, toman diferentes nombres.

94. Llámanse ALTERNOS INTERNOS *los interiores formados á distinto lado de la secante, uno en cada paralela*, como *z*, *u* y *m*, *n*.

95. Se llaman ALTERNOS EXTERNOS *los dos ángulos exteriores formados á diferente lado de la secante, uno en cada paralela;* tales son los *e*, *p* y *h*, *o*.

96. Se da el nombre de CORRESPONDIENTES *á los que están situados á un mismo lado de la secante, uno interno y otro externo y uno en cada paralela;* tales son los *e* y *n*, *z* y *o*, *h* y *u*, *m* y *p*.

Por ser las paralelas equidistantes en todos sus puntos, ambas tienen la misma inclinación hacia la secante que las corta; de donde se sigue *que los ángulos correspondientes* e *y* n, z *y* o, *etc.*, *son respectivamente iguales.*

97. Respecto de estos ángulos, hay que advertir algunas propiedades muy interesantes, á saber:

1.ª *Que los ángulos alternos internos son iguales,* porque $z=h$, por opuestos al vértice (81); pero $h=u$, por correspondientes (96); luego $z=u$; lo mismo se demostraría de m y de n.

2.ª *Que los ángulos alternos externos son también iguales;* porque $p=m$, por correspondientes, y $m=e$, por opuestos al vértice; luego $p=e$; del mismo modo se demostraría que $h=o$.

3.ª *Que los dos ángulos internos del mismo lado de la secante, tomados juntos, valen dos rectos ó* 180°; porque $m+h=180°$ (78); pero $h=u$, por correspondientes; luego $m+u=180°$, y por lo mismo m es suplemento de u; lo mismo se demostraría respecto de z y de n.

4.ª *Que dos ángulos externos del mismo lado de la secante, tomados juntos, valen también dos rectos ó* 180°; porque siendo $p+u=180°$, *resulta que por ser* $u=h$, se tendrá $p+h=180°$, y por lo mismo h es suplemento de p; lo mismo se podría demostrar con e y o.

5.ª Del mismo modo se prueba *que dos líneas son paralelas cuando tienen alguna de las propiedades sobredichas.*

EJERCICIOS EN EL ENCERADO.

98. 1.° Bajar una perpendicular á una recta desde un punto fuera de ella.

2.° Levantar una perpendicular al centro de una horizontal.

3.° El mismo ejercicio en un punto dado de una recta vertical.

4.° Levantar una perpendicular en un punto de una línea inclinada de izquierda á derecha.

5.° Igual ejercicio con una recta inclinada de derecha á izquierda.

6.° Levantar perpendiculares al extremo de una vertical, de una horizontal y de varias inclinadas.

Comprob. El 2.° ejercicio se comprobará con la escuadra y el compás, los cinco restantes con el gramil ó la escuadra.

7.° Dadas varias rectas en distintas posiciones, determinar las que son paralelas.

8.° Tirar por un punto dado una línea paralela á otra.

9.° Buscar rectas paralelas en los muebles y demás objetos de la clase.

10. Trazar paralelas equidistantes: 1.°, horizontales; 2.° inclinadas de derecha á izquierda; 3.°, verticales, y 4.°, inclinadas de izquierda á derecha.

Comprob. Examínese con el compás si las dos líneas son equidistantes en toda su longitud.

DIBUJOS DEL ATLAS.

Lámina 1.ª

99. 1.° *Copiar la fachada de un* ORATORIO, *fig. XI.*—Se ha de procurar que las antas A, á más de distar igualmente del centro, tengan un mismo ancho y sean bien verticales; que las líneas del cornisamento B sean horizontales, y las dos rectas que cierran el frontón U que sean iguales y se unan en la línea del centro.

2.° *Dibujar la gradería* c, *la peana* b *y la cruz* a, *fig. XII.*—Después de dibujada la gradería haciendo que todos los escalones tengan una misma altura y una misma huella, debe procurarse que la peana venga enmedio de la grada superior, así como la cruz enmedio de la peana.

3.° *Figurar una* ESCALERA DE MANO, *fig. XIII.*—Los largueros *n* deben ser un poco convergentes por la parte superior y tener todos sus puntos relativos á igual distancia del eje ó línea del centro. Los travesaños ó escalones han de ser paralelos, equidistantes y de un mismo grueso.

4.° *Diseñar un* ENREJADO *ó* VARASCETO *para puerta de jardín, figura XIV.*—Una vez dibujadas las pilastras, se dividirá por mitad la distancia que media entre ellas, y señalando en cada mitad los intervalos de los palos, se procurará que éstos sean bien iguales y verticales.

5.° *Dibujar la* PUERTA *de la fig. XV.*—Trácense verticalmente las jambas *a*, haciendo que sean perpendiculares con el dintel *c*; la cornisa está representada por rectas horizontales, y forma con el frontón *b* líneas oblicuas.

EJERCICIOS GRAFICOS.

100. Problemas.

Al tirar una perpendicular á una recta, pueden ocurrir cuatro casos: que el punto por donde ha de pasar la perpendicular sea enmedio de una línea, en un punto cualquiera de ella, en uno de sus extremos ó, en fin, fuera de la recta.

I. *Levantar una perpendicular enmedio de una recta dada* AB (fig. 25).

Desde sus extremos, y con una abertura de compás mayor que la mitad de la línea, descríbanse dos arcos con un mismo radio, los que se cortarán en D y en C; tírese la recta CD, y será la perpendicular pedida (89).

II. *Levantar una perpendicular en un punto cualquiera de una recta*, p. ejemp., en C (fig. 19).

Desde el punto dado C, y con una misma abertura de compás, descríbanse los arcos *n* y *s*; desde estos puntos, y con un radio mayor que *n*C, descríbanse dos arcos que se corten en D; la recta tirada desde el punto de intersección E el punto C será la perpendicular pedida.

III. *Levantar una perpendicular al extremo de una línea que no pueda prolongarse* (fig. 26).

Sea A, p. ejemp., el extremo propuesto; haciendo centro en un punto cualquiera fuera de la línea, v. g., en O, trácese una circunferencia que pase por A y que además corte á dicha recta en otro punto cualquiera C; tírese el diámetro COD, y la recta AD será la perpendicular pedida (K).

De otro modo: Haciendo centro en el punto A (figura 27), y con una abertura de compás arbitraria, descríbase el arco CD, y del punto C, con el mismo radio, el arco DA; tírese una recta indefinida que pase por los puntos C y D, haciendo que DE sea igual á DC; tírese por E y A la recta AE, que será perpendicular con la AB.

(K) La demostración de este problema y el siguiente se verá al tratar de los ángulos considerados en el círculo (pár. 253, 3. °).

IV. *Por un punto* D, *fuera de la recta* AB, *tirar una perpendicular á dicha recta* (fig. 28).

Haciendo centro en el punto D, y con una abertura de compás que corte á la recta, descríbase un arco que determine los puntos *mn;* desde estos nuevos puntos, tomados como á centros, trácense dos arcos de círculo, que se cortarán en C; tírese la recta DC, prolongada hasta O, la cual será perpendicular con la AB (89).

V. *Dada una recta* AB (fig. 30), *prolongarla indefinidamente.*

Desde el punto B, y con un radio cualquiera, descríbase el arco *nop,* y desde *o,* con el mismo radio, el arco *n*B*p;* desde los puntos de intersección *n*, *p*, y con el mayor radio posible, descríbanse dos arcos de círculo, que se cortarán en C; únanse los puntos C y B, y esta línea CB será prolongación de la AB, formando una sola y misma recta (88, 1.ª y 2.ª).

VI. *Por un punto dado* C (fig. 31), *tirar una paralela á una recta propuesta* AB.

Del punto C, y con el mayor radio posible, trácese el arco indefinido BD; luego del punto B, y con la misma abertura de compás, descríbase el arco AC; tómese sobre el primer arco una parte BD igual á AC; tírese una recta que pase por los puntos C y D, y ésta será paralela con AB.

Porque si tiramos la línea CB, es claro que los ángulos alternos B y C son iguales (97, 1.ª).

VII. *Por un punto* C (fig. 32), *fuera de la línea* AB, *tirar una recta que forme con la propuesta un ángulo igual á otro dado* cab.

Tírese por el punto C una recta DE, paralela con AB; en el punto C fórmese el ángulo DCA=*cab*, y como el ángulo CAB es igual á DCA por alternos internos, y éste es igual por construcción al ángulo dado *cab*, resulta que CAB=*cab* (97, 1.ª).

Observ. Este problema tiene dos soluciones, porque si, al formar el ángulo, en vez de inclinar la recta CA desde C á la izquierda se la inclinara hacia la derecha, como CB, resultaría la misma figura colocada inversamente.

Segundo modo (fig. 33). En un punto cualquiera de la AB, p. ejemp. A, hágase el ángulo DAB=*cab*, y por C tírese la CE paralela á DA; el ángulo CEB es igual al DAB, por correspondientes (96).

VIII. *Dividir una recta dada* AB *en dos partes iguales* (fig. 25)

Desde sus extremos, y con una abertura de compás mayor que la mitad de la línea, descríbanse dos arcos con un mismo radio, los que se cortarán en D y en C; tírese la recta CD, la cual dividirá en dos partes iguales á la propuesta.

IX. *Dividir una recta* LN *en un número de partes iguales cualquiera*, p. ejemp., en cinco (figura 34) (L).

En un extremo L de la línea fórmese un ángulo agudo cualquiera PLN, y en el otro extremo N el ángulo RNL, igual al anterior; póngase sobre LP y sobre NR tantas partes iguales cuantos sean los segmentos en que ha de dividirse la línea dada, que aquí serán cinco; tírense por último las rectas *aa'*, *bb'*, *cc'*, *ss'*, y dividirán á la LN en las partes iguales pedidas.

De otro modo: Tírese únicamente la LP, y después de haberle colocado las cinco distancias iguales, únase el punto P con el N por medio de la recta PN; ahora, con la regla y la escuadra tírense por los pun-

(L) Según el rigorismo matemático, este problema debiera estar en las líneas proporcionales, párrafo 188; mas como antes de llegar á dichas líneas será preciso, para la resolución de ciertos problemas, tener conocimiento del presente, nos ha parecido útil colocarlo en este lugar.

tos s', c', b', a' líneas paralelas á la PN, las cuales dividirán á la recta dada en cinco partes iguales.

X. *Dada una recta, dividirla en un número cualquiera de partes iguales,* por ejemplo en cinco, *sin hacer uso del compás* (fig. 5).

Sea AB la recta dada; en sus extremos levántese, por medio de la regla y la escuadra, las líneas indefinidas A*c*, B*d*, paralelas entre sí; por B tírese la B*e* que forme un ángulo agudo cualquiera con la línea dada, y por el punto *e* trácese la recta *ef* paralela con AB; repítase ahora igual operación, tirando la *fg* paralela con B*e* y la *gh* paralela con AB, y así siguiendo hasta que se hayan trazado tantas paralelas á la recta dadas cuantas sean las partes en que se ha de dividir; tírese ahora la recta *d*A, y por los puntos *l*, *j*, *h*, *f*, trácense paralelas á dicha recta; las líneas *lm*, *jn*, *ho* y *fp* dividirán á la AB en cinco partes iguales.

ADVERTENCIA.

101. Debemos advertir á los alumnos que en las operaciones ordinarias se suele emplear para trazar paralelas la regla y la escuadra, cuyo método es muy breve y facilita las operaciones en el dibujo. Para esto apóyese un lado de la escuadra al canto de la regla y hágase que el otro lado coincida exactamente con la línea dada, y teniendo con la mano izquierda sujeta la regla, córrase la escuadra hasta el punto por donde se quiere trazar la paralela.

Por ejemp., supongamos que se quiere (fig. 29) trazar por los puntos *u*, *n*, *x* las líneas AB, CD, EF, paralelas á la línea dada GH; para esto apóyese el lado IJ de la escuadra sobre la línea GH, y hágase que el canto de la regla LM coincida exactamente con el otro lado IK de la escuadra, y teniendo fija la regla, córrase la escuadra hasta que el lado IJ pase sucesivamente por los puntos u, n, x, pudiendo entonces trazar las rectas AB, CD, EF, que se prolongarán con la regla, si la escuadra no fuese suficientemente grande.

Si se quisiéra tirar otra paralela á GH por un punto que estuviese más bajo que la regla, tal como z, se tendría la escuadra firme y se haría bajar la regla arrimada al mismo lado en que estaba en contacto con la escuadra, hasta que permitiese el poder bajar hasta el punto z (M).

Suele también haber en algunos estuches un instrumento por cuyo medio se traza fácilmente una línea paralela á otra. Se compone éste (fig. 35) de dos *reglas paralelas* A y B, unidas con dos hojas de latón C, D, iguales y paralelas, por cuyo medio las dos reglas A y B se pueden unir ó separar la una de la otra, quedando siempre paralelas entre sí.

APLICACIONES DE PERPENDICULARES Y PARALELAS Á LAS ARTES INDUSTRIALES.

102. Los arquitectos, carpinteros, albañiles, pintores, maquinistas, etcétera, trazan con frecuencia rectas perpendiculares, conforme á los métodos expuestos anteriormente.

TAMBIÉN SON INNUMERABLES LAS APLICACIONES DE LAS PARALELAS.

Los carpinteros hacen uso de ellas todos los días en la construcción de puertas, ventanas y persianas; los albañiles, en la disposición de las piedras labradas, en las hiladas de ladrillos, etc.; los cerrajeros, en los hierros de una baranda, de una verja, etc.; el labrador forma también los surcos en líneas paralelas; el grabador, cuando quiere representar superficies planas en que una parte se aleje del espectador, emplea también plumadas rectas paralelas; la música se sirve

---

(M) La práctica y el profesor enseñarán al alumno el modo de poner los dedos de la mano izquierda sobre la regla y la escuadra, á fin de correr ésta á su voluntad y mantener fija aquélla.

igualmente de las mismas para poner las notas de que se vale; los calígrafos emplean también líneas paralelas para el rayado de los cartapacios, pautas ó cuadrículas; en los caminos de hierro están también dispuestas paralelamente las fajas ó carriles sobre los cuales giran las ruedas de los carruajes que transitan por dichas vías; etc., etcétera.

CAPÍTULO II

COMBINACIÓN DE RECTAS CERRANDO ESPACIO.

ARTÍCULO PRIMERO

DE LAS FIGURAS PLANAS. POLÍGONOS.

103. Qué se entiende por figura?—104. Qué es superficie de una figura? Qué es contorno? A qué se da el nombre de perímetro?—105. Las figuras, según las líneas que forman su contorno, cómo se llaman?—106. Cuándo dos figuras se llaman isoperímetras, equivalentes ó iguales?—107. Qué se entiende por polígono? Qué diagonal? A qué se llama base?—108. Qué es ángulo externo de un polígono?—109. Para limitar un plano, cuál es el menor número de rectas que se necesita?—Los polígonos, no se denominan de diferente manera según el número de lados que tienen?—110. Cuándo un polígono es equilátero, equiangular, regular é irregular?

103. Llámase FIGURA *el espacio terminado por una ó más líneas; un plano puede limitarse con una línea, con dos y con más de dos.* Con una circunferencia se cierra espacio; con dos curvas, ó bien con una recta y una curva que tengan comunes sus extremos, se cierra igualmente; con tres ó más líneas, rectas ó curvas, fácil es conseguir lo mismo.

104. Lo primero que se observa en toda figura *es el espacio cerrado*, que se llama SUPERFICIE DE LA FIGURA, y *la línea ó líneas que cierran la figura*, que se llama CONTORNO.

Se da el nombre de PERÍMETRO *á la recta equivalente en longitud al contorno;* así, un hilo envuelto alrededor de una figura, puesto en línea recta, da el perímetro de la figura; luego tenemos que *contorno ó perímetro* no expresan una misma idea, pues que el uno es la medida del otro.

105. *Las figuras terminadas por rectas se llaman* RECTILÍNEAS; *las formadas por una ó más curvas,* CURVILÍNEAS, *y las por líneas rectas y curvas,* MIXTILÍNEAS.

106. *Cuando dos figuras tienen sus perímetros de igual extensión,* se llaman ISOPERÍMETRAS; *cuando tienen igual superficie y figura diferente,* se dice que son EQUIVALENTES, *y cuando son tales que superpuesta la una á la otra se confunden exactamente,* se denominan IGUALES.

107. Llámase POLÍGONO *la figura terminada por más de dos rectas que se cortan dos á dos; las rectas que forman el polígono* se llaman LADOS *del polígono; sus puntos de intersección,* VÉRTICES, *y sus ángulos,* ÁNGULOS DEL POLÍGONO.

Entendemos por DIAGONALES *las rectas que desde uno de los vértices van á parar á otro que no sea su adyacente;* tales son AD, AC (fig. 36).

Se llama BASE *el lado sobre que se considera insistiendo,* y ALTURA *la perpendicular bajada desde el punto más distante de la base á la misma ó á su prolongación;* así, los lados AB, GH (figs. 36 y 37), son las bases, y las líneas EF, *nm*, son la altura.

108. Se llama ÁNGULO EXTERNO de un polígono, *el formado por un lado y la prolongación de otro contiguo;* tal es el ángulo EAF (fig. 36), formado por el lado AE y la prolongación del BA.

109. Para limitar un plano son necesarias por lo menos tres rectas; *así es que un polígono no puede tener menos de tres lados.*

Los polígonos toman diferentes nombres, según el número de lados de que se componen; en la siguiente tabla se verá su nomenclatura:

Polígono de	3 lados se llama.		triángulo.
	de 4.	. . . . . .	cuadrilátero.
	de 5.	. . . . . .	pentágono.
	de 6.	. . . . . .	exágono.
	de 7.	. . . . . .	eptágono.
	de 8.	. . . . . .	octágono.
	de 9.	. . . . . .	eneágono.
	de 10.	. . . . . .	decágono.
	de 11.	. . . . . .	endecágono.
	de 12.	. . . . . .	dodecágono.
	de 15.	. . . . . .	pentedecágono.

y para expresar un polígono de otro número de lados, se dice polígono de 13, 16, 20, etc., lados.

110. Un polígono se llama EQUILATERAL, *cuando tiene iguales todos sus lados;* EQUIANGULAR, *cuando tiene iguales todos sus ángulos;* REGULAR, *cuando tiene iguales todos sus ángulos y lados,* é IRREGULAR, *cuando le falta alguna de* estas dos circunstancias.

ARTÍCULO 2.°

DE LOS TRIÁNGULOS.

111. Cuál es el polígono más sencillo de todos?—112. De cuántos modos podemos considerar un triángulo? Qué es triángulo rectángulo, obtusángulo, acutángulo? Los lados del triángulo rectángulo, qué nombre toman? Qué es triángulo equilátero, isósceles, escaleno?—113. Condición fundamental del triángulo.—114. La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos ó á 180°. Consecuencias de este teorema.—115. A qué es igual el ángulo externo de un triángulo?—116. En todo triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.—*Dem.* Consecuencias que se deducen de esto.—118. Cuándo son iguales dos triángulos?—119. Algunas propiedades del triángulo interesantes al dibujante.

111. El TRIÁNGULO RECTILÍNEO *es el polígono más sencillo de todos: se compone de tres lados y tres ángulos;* tal es ABC (fig. 40).

112. De dos modos podemos considerar el trián-

gulo: 1.°, según la relación del valor de sus ángulos; 2.°, según la magnitud relativa de sus lados

Un triángulo se dice RECTÁNGULO, *cuando tiene un ángulo recto, y* OBLICUÁNGULO, *cuando no tiene ninguno que lo sea.* Este se llama OBTUSÁNGULO, *cuando tiene un ángulo obtuso*, como DEF (fig. 39), y ACUTÁNGULO, *cuando sus tres ángulos son agudos;* tal es ABC (figs. 40 y 41).

En todo triángulo rectángulo *el lado opuesto al ángulo recto* se llama HIPOTENUSA, *y los lados que forman el ángulo recto* reciben el nombre de CATETOS. Así, en el triángulo rectángulo LGH (fig. 38), LH es la hipotenusa y los lados LG, GH, los catetos.

Llámase EQUILÁTERO (110) *el triángulo que tiene iguales sus tres lados*, como ABC (fig. 40); ISÓSCELES *es el que sólo tiene dos lados iguales* (fig. 45), y ESCALENO *es el que tiene desiguales sus tres lados* (figs. 38 y 39).

En el triángulo isósceles se llama BASE *el lado desigual*, y LADOS de este triángulo *los dos lados iguales.*

PROPIEDADES RESPECTO Á LOS TRIÁNGULOS EN GENERAL.

113. Siendo la recta la línea más corta que de un punto á otro podemos tirar, *cualquiera de los lados de un triángulo será menor que la suma de los otros dos.*

114. *La suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera* ABC (fig. 32) *es igual á dos ángulos rectos.*

Dem. Si por un vértice cualquiera C del triángulo se tira una línea DE, paralela con el lado opuesto AB, resultará el éngulo CAB=DCA, por alternos internos, y el CBA=BCE por lo mismo; de donde BAC + ACB + CBA = DCA + ACB + BCE = 2 rectos ó 180° (78).

De aquí se sigue:

1.º *Que en un triángulo no puede haber más que un ángulo recto ú obtuso;* porque si hubiese dos, ellos solos valdrían los 180º que deben valer los tres.

2.º *En un triángulo, si se conocen dos ángulos, se puede fácilmente conocer el tercero;* porque éste es siempre el suplemento de los otros dos

3.º *En todo triángulo rectángulo la suma de los dos ángulos agudos vale* 90º ó, lo que es lo mismo, *son complemento uno de otro.*

4.º Por tener el triángulo equilátero iguales los ángulos, *cada uno de éstos será* de 60º, que es el tercio de 180º, valor de la suma.

115. *El ángulo externo de un triángulo es igual á la suma de los dos interiores opuestos* (fig. 41).

Dem. Prolongando uno de los lados AB, resultará el ángulo externo CBD; en este ángulo tírese la recta BE paralela á AC, cuya construcción dará CBE=ACB, por alternos internos, y EBD=CAB, por correspondientes; y como CBD=CBE+EBD, sustituyendo se tendrá CBD=ACB+CAB.

116 *En todo triángulo isósceles ó equilátero á lados iguales se oponen ángulos iguales ó viceversa* (fig. 37).

Dem. Sobre el punto medio *m* de la base levántese una perpendicular. Como los dos lados G*n*, H*n* son iguales y distan igualmente del pie de la perpendicular, ésta pasará por el vértice *n*, formando dos triángulos G*mn*, H*mn*, los cuales se confundirán exactamente si doblamos la figura por la perpendicular *mn*, ajustándose en esta sobreposición el lado *n*G con el *n*H y el *m*G con el *m*H; de donde resulta la igualdad de los dos ángulos G y H, opuestos á los lados iguales *n*H, *n*G, y viceversa. Lo mismo se demostraría si el triángulo fuese equilátero.

De lo dicho se deduce:

1.° Que un triángulo equilátero es equiángulo y al contrario.

2.° Que los ángulos adyacentes á la base de un triángulo isósceles son iguales.

117. *En todo triángulo, al mayor ángulo se opone el mayor lado, y viceversa* (fig. 42).

Dem. Si en el triángulo ABC se supone que el ángulo CAB>C, formando el ángulo CAD=C, se tendrá AD=CD por lados del triángulo isósceles ADC; como en todo triángulo la suma de dos lados es siempre mayor que el tercero (111), se verifica que AD+DB>AB, y poniendo en vez de AD su igual DC, será BC>BA.

118. *Dos triángulos son iguales:*

1.° Cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.

2.° Cuando tienen respectivamente iguales dos lados é igual el ángulo comprendido.

3.° Cuando tienen un lado igual, adyacente á dos ángulos respectivamente iguales.

Dem. Si recurrimos á la superposición, se verá: que dos triángulos que reunan las circunstancias antes dichas, se confundirán exactamente, de lo que resulta la igualdad.

119. *Las tres perpendiculares que dividen por mitad los lados de un triángulo se encuentran todas en un mismo punto, igualmente distante de los tres vértices.*

Dem. Sea el triángulo LNP (fig. 43). Si se dividen los lados LN, NP, en dos partes iguales por medio de las perpendiculares RO y OS, el punto O, por pertenecer á ambas perpendiculares, estará á igual distancia de los tres puntos L, N, P; luego las tres distancias OL, ON, OP, son iguales.

120. *Las tres bisectrices de un triángulo se en-*

cuentran en un mismo punto equidistante de los tres lados del mismo.

Dem. Sea el triángulo ABC (fig. 44), en el que tirando las tres bisectrices se encontrarán en el punto O; desde este punto bájense perpendiculares á los lados, y se tendrá el ángulo FOB=OBE por construcción, y el ángulo en F=E por rectos, de donde resulta que el tercer ángulo EOB del triángulo EOB será igual al tercero FOB del BOF (114, 2.°), y como estos triángulos, á más de tener iguales los ángulos, tienen un lado BO común, serán iguales (118, 3.°); por lo que se tendrá EO=OF. Como por la misma razón son iguales los triángulos COF y COD, se tiene FO=OD; de donde resulta EO=OF=OD.

121. *Observación.* La comparación de los triángulos puede presentar tres casos diferentes: de *igualdad*, de *semejanza* y de *equivalencia*. Por ahora nos hemos concretado á la igualdad.

APLICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS.

122. Los triángulos tienen una aplicación muy importante en la agrimensura, como lo veremos en la medición de superficies, en la de alturas y líneas inaccesibles, y en el levantamiento de planos.

Son también de una grande aplicación en las artes las escuadras ó cartabones de que se sirven los ingenieros, arquitectos, mecánicos, carpinteros, etc., las cuales son triángulos rectángulos isósceles ó escalenos. Los niveles de albañil son también triángulos isósceles y generalmente rectángulos. Los frontones de arquitectura, y muchas de las armaduras de las cubiertas de los edificios, tienen también la forma triangular, etc.

EJERCICIOS EN EL ENCERADO.

123. 1.° *Dibujar un triángulo obtusángulo.*

2.° *Hacer un triángulo acutángulo.*

3.° *Trazar un triángulo isósceles* (fig. 37).

Primeramente dibújese la base GH, y en su punto medio levántese una perpendicular indefinida *mn*; desde un punto *n* de esta recta tírense las *n*G, *n*H, á los extremos de la base, y el triángulo G*n*H será isósceles por tener iguales los lados G*n*, *n*H (89).

4.° *Trazar un triángulo rectángulo isósceles que tenga un ca-*

teto horizontal, y luego otro que tenga la hipotenusa en esta misma posición.

Para el primero tírese una línea horizontal; en uno de sus extremos levántese una perpendicular cuya longitud sea igual á la de la línea anterior; únanse los extremos por medio de otra recta, la cual será la hipotenusa del triángulo pedido.

Para el segundo dibújese la horizontal RF (fig. 45), que será la hipotenusa, y en su punto medio levántese una perpendicular nH=En, mitad de la base; desde el punto H tírense las rectas HE, HF, y quedará resuelto el problema.

5.° *Diseñar un triángulo equilátero* (fig. 40).

Tírese para base una horizontal AB, y en su punto medio D levántese una perpendicular DC indefinida; en esta perpendicular búsquese un punto, tal como C, que la distancia de este punto á los extremos A ó B de la base sea igual á esta misma; tírense las líneas AC, CB, y el triángulo obtenido será equilátero.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 2.ª

124. 1.° *Figurar el* CARTABÓN ESCALENO *fig. XVI.*—Se compone de un triángulo rectángulo cuyos catetos son desiguales, siendo horizontal el uno y, por consiguiente, vertical el otro.

2.° *Representar* el CARTABÓN ISÓSCELES *fig. XVII.*—Se compone de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales (N).

3.° *Dibujar la* CARA DE UNA PIRÁMIDE *fig. XVIII.*—Es un triángulo isósceles colocado sobre el basamento A.

4.° *Diseñar la fig. XIX.*—Forma un triángulo equilátero, dentro del cual hay otro en el que hay tiradas las tres bisectrices.

5.° *Dibujar la fig, XX.*—En su totalidad forma un triángulo equilátero, dentro del cual hay otro *abc* que tiene los vértices de sus ángulos en el punto medio del triángulo total.

6.° *Figurar el* NIVEL DE ALBAÑIL TRIANGULAR *fig. XXI.*—A representa una regla; B, B son los brazos del nivel, los cuales deben ser iguales y formar lo mismo con el travesaño C como con la regla A triángulos rectángulos isósceles; la *plomada mn* pasa por el punto medio del travesaño, y la altura del triángulo es igual á la mitad de la base.

(N) En el dibujo lineal, para denotar en los objetos corpóreos las partes ó superficies que tienen mayor salida respecto de sus inmediatas, se ha convenido en trazar algo más gruesas y oscuras las líneas que se hallan á la sombra del objeto en cuestión, suponiéndolo iluminado por el sol, colocado á los 45°, de izquierda á derecha.

EJERCICIOS GRAFICOS.

125. Problemas.

I. *Trazar un triángulo equilátero, cuyos lados sean iguales á una recta dada* AB (fig. 40).

Desde A y B, con un radio AB, descríbanse dos arcos de círculo que se crucen en C; tírense las líneas AC, CB, y el triángulo ACB será el pedido (116).

II. *Construir un triángulo isósceles cuya base sea igual á una recta dada* r *y los lados iguales á* r′ (figura 37).

Hágase GH $= r$, y desde G y H, con un radio igual á r', trácense dos arcos que determinen el punto de intersección n. Las rectas nG, nH, darán con la base GH el triángulo isósceles pedido (116).

III. *Dadas tres rectas* r, r′, r″, *formar con ellas un triángulo* (fig. 39).

Tírese la línea DE$=r$, y desde E, con un radio$=r'$, descríbase un arco que pasará por F; del punto D, y con un radio$=r''$, trácese otro arco que corte al anterior, y del punto de intersección F tírense las líneas FD, FE, y el triángulo DEF será el pedido (113).

IV. *Construir un triángulo rectángulo cuyos catetos sean respectivamente iguales á dos rectas dadas* r, r′ (fig. 38).

Tómese la línea GL$=r$, y en su extremo G levántese la perpendicular GH$=r'$; la recta HL terminará el triángulo pedido.

V. *Trazar un triángulo isósceles que sus lados tengan la longitud de la recta* r′ *y el ángulo formado por los mismos que sea igual al dado* a (fig. 37).

Tírese una recta G$n=r'$, y en su extremo n fórmese el ángulo GnH$=a$; hágase nH$=n$G, únanse los puntos G y H, y está resuelto el problema.

Observ. Si se quiere que la base GH resulte en posición horizontal, debe resolverse el problema de la manera siguiente: Tírese la vertical mn, y después de haber dividido el ángulo dado a en dos partes iguales, se construirá en n el ángulo $Gnm = mnH = {}^1/_2 a$; por lo que $GnH = a$; hágase ahora $nG = nH = r'$, y el triángulo que resulte será el pedido.

VI. *Hacer un triángulo rectángulo que tenga su hipotenusa igual á* r″ *y uno de los catetos igual á* r (fig. 38).

Hágase $LG = r$, y en G levántese la perpendicular indefinida GH; haciendo centro en L, y con una abertura de compás igual á la recta r'', descríbase un arco que cortará á la perpendicular GH en el punto H; tírese la recta HL, y quedará concluído el triángulo.

VII. *Construir un triángulo rectángulo isósceles en el que la base sea hipotenusa y tenga la longitud de la recta* r (fig. 45).

Hágase $EF = r$, y divídase en dos partes iguales; en su punto medio n levántese la perpendicular $nH = nE$; el triángulo EFH será el pedido.

VIII. *Trazar un triángulo conociendo dos lados* r, r′, *y el ángulo* a *que ellos deben formar* (fig. 47).

Tírese $AB = r$; en uno de sus extremos, v. g., A, fórmese un ángulo $= a$, haciendo que AC tenga la misma longitud que r'; únanse los puntos C, B, y el triángulo ACB será el pedido.

IX. *Formar un triángulo conociendo un lado* r *y los dos ángulos* a *y* b *que deben formarse en sus extremos* (fig 48).

Tírese $DE = r$; en su extremo D hágase un ángulo $= a$, y en E otro igual á b; las rectas DE, EF se cortarán en un punto F, quedando construído el triángulo pedido.

X. *Hacer un triángulo, dados dos ángulos* a *y* b *y un lado* r *opuesto á uno de dichos ángulos* (fig. 49).

Tómese HG $= r$, y en uno de sus extremos, por ejemplo, G, fórmese el ángulo $mGn = a + b$; en el punto H trácese un ángulo GHJ igual á cualquiera de los dados (en este es igual á b); prolónguese el lado que resulte de la formación de este ángulo hasta que encuentre al otro lado, que lo verificará en J, y tendremos que el triángulo HGJ será el pedido, por tener el ángulo H $= b$ y el ángulo J, opuesto al lado dado r, igual á a (115).

Este problema se puede también construir del modo siguiente:

Tírese una recta CD $= r$, y en C trácese un ángulo $= b$; en un punto cualquiera n del lado CE fórmese un ángulo $Cnm = a$; por D tírese la línea DE, paralela con mn, y quedará formado el triángulo (96).

XI. *Conocidos dos lados* r, r′ *y un ángulo* z *opuesto á uno ellos, formar un triángulo* (fig. 50).

Pueden suceder dos casos: que el ángulo dado esté opuesto al lado menor r ó al mayor r'. Si lo suponemos opuesto al lado mayor, hágase AB $= r$ y en su extremo A fórmese un ángulo CAB $= z$; del punto B, y con un radio $= r'$, córtese en C el lado AC, y ACB es el triángulo que se busca.

Si suponemos el ángulo dado opuesto al lado menor r, *el problema puede tener dos soluciones, una y ninguna*; pues haciendo DE $= r'$, y formando en el punto D un ángulo $= z$, dejando indefinida la recta DF, y desde E, con un radio $= r$, se determinan las dos intersecciones F y G, resultarán dos triángulos DEG, DEF, que ambos satisfarán las condiciones del problema.

Si EG hubiese salido perpendicular á DF, no habría sino una solución, y ninguna si EG fuese menor que dicha perpendicular.

XII. *Dado un triángulo* DEF (fig. 39), *construir otro que le sea igual.*

Para construir un triángulo igual á otro, téngase presente lo manifestado en el párrafo 118.

XIII. *Sobre una recta* AB, *dada como base, formar un triángulo isósceles y que cada uno de los lados tenga los tres cuartos de la base* (fig. 51).

Divídase la recta AB en cuatro partes iguales, y desde los puntos A y B, con un radio igual á las tres cuartas partes, trácense dos arcos que se cortarán en C; las líneas AC, CB, determinarán el triángulo pedido.

XIV. *Dada una línea* r *como á lado, formar un triángulo isósceles que la base sea igual á los dos tercios del lado* (fig. 52).

Tírese CB$=r$, y divídase en tres partes iguales; las dos AB tómense por base, y desde sus extremos A, B, y con un radio$=r$, descríbanse dos arcos que determinarán el punto D; el triángulo ADB será el pedido.

XV. *Sobre una recta* r, *dada como base, formar un triángulo de modo que sus tres lados estén en igual relación que los números dos, tres y cuatro* (fig. 53).

Tómese AB$=r$, y divídase en cuatro partes iguales; desde A, con un radio igual á las tres cuartas partes, trácese un arco que se cortará en el punto C, con otro que se describirá desde B con un radio igual á las dos cuartas partes, y se obtendrá el triángulo ACB, teniendo los lados BC, CA y AB igual relación que los números 2, 3 y 4.

XVI. *Construir un triángulo rectángulo haciendo que uno de los catetos sea igual á* r *y el perímetro á* r′ (fig. 54).

Tómese AB$=r$, y en su extremo B levántese una perpendicular BD$=r'-r$; únase el punto A con el D, y dará el triángulo ADB; en el punto A fórmese el ángulo DAC$=$ADC, y resultarán dos triángulos: el isósceles DCA, y el rectángulo ABC, que es el pedido; efectivamente, como AB$=r$ y AD$=r'-r$, se tiene

$AB + BC + CD = r'$; pero como $CD = CA$ por lados del triángulo isósceles ACD, sustituyendo será $AB + BC + CA = r'$.

XVII. *Trazar un triángulo rectángulo, dado un cateto* r *y su ángulo opuesto* a (fig. 56).

Hágase $FB = r$, y en B tírese la perpendicular BC indefinida; en un punto cualquiera n de esta recta, trácese el ángulo $mnB = a$, y desde F tírese la recta FC paralela con mn, y el triángulo BFC será el pedido.

XVIII. *Hacer un triángulo que tenga un ángulo de 51°, otro de 73° y el lado comprendido igual á una recta dada.*

Para la construcción de los ángulos dados pueden servirse del transportador.

XIX. *Dividir un ángulo en tres partes iguales* (fig. 55).

Sea ABC el ángulo propuesto; prolónguese el lado AB por la parte del vértice, y desde éste, con un radio arbitrario, descríbase la semicircunferencia ACEL; sobre el borde de una regla ó sobre una tira de papel fuerte señálese la longitud DE, igual al radio del círculo, y colóquese después de manera que el punto D coincida con la prolongación de AB, el E con la circunferencia, y el canto de la regla que pase por el punto C, en que el lado BC encuentra á la circunferencia, y el ángulo D será un tercio del CBA, por lo que la cuerda EL cabrá tres veces exactas en el arco AC.

Dem. Por ser el ángulo CBA externo del triángulo CBD, será igual á $C + D$ (115); pero si se tira el radio BE, se obtiene el triángulo isósceles CBE, que da $C = CEB$, por lo que si sustituímos será $CBA = CEB + D$; pero como CEB es ángulo externo del triángulo isósceles BED, tendremos $CEB = EBD + D$; luego continuando la sustitución, se tendrá $CBA = EBD + D +$

D, y como EBD = D, se obtiene CBA = D + D + D = 3D, ó D = $^1/_3$ CBA.

Nota. Debemos advertir que cuando el ángulo dado es muy obtuso, es menester dividirlo primero en dos partes iguales y operar en una de sus mitades tal como lo hemos practicado en este; como la mitad quedará entonces dividida en tres partes iguales, el ángulo total lo quedará en seis; por lo que tomando dos sextas partes se obtiene el mismo resultado.

ARTÍCULO 3.º

DE LOS CUADRILÁTEROS.

126. Qué es cuadrilátero?—127. Trapezoide?—128. Trapecio? Cuándo un trapecio se llama isósceles, escaleno y rectángulo?—129. Qué es paralelogramo? Los paralelogramos no se dividen en rectángulos y oblicuángulos?—Qué es cuadrilongo, cuadrado, romboide y rombo?—130. Valor de los ángulos de un cuadrilátero.—La diagonal, cómo divide el paralelogramo?—Propiedades de las diagonales en los paralelogramos y en los trapecios.

126. Se llama CUADRILÁTERO *un polígono de cuatro lados* (109). Los cuadriláteros se dividen en *trapezoides*, *trapecios* y *paralelogramos*.

127. El TRAPEZOIDE *es un cuadrilátero que no tiene lados paralelos entre sí*; tal es ABCD (fig. 57).

128. El TRAPECIO *es el que tiene dos lados paralelos, pero desiguales*; tal es el EFGH (fig. 58), en el que FG y EH son paralelos. Los dos lados paralelos se llaman *bases del trapecio*, y la perpendicular *nm*, común á las dos bases, es la altura.

Los trapecios se subdividen en *isósceles*, *escalenos* y *rectángulos*. Llámase *trapecio isósceles* ó *simétrico* cuando tiene iguales los dos lados no paralelos (figura 58): se llama *trapecio escaleno* cuando los lados no paralelos son desiguales, y *trapecio rectángulo* cuando tiene dos ángulos rectos (fig. 59).

129. Llámanse PARALELOGRAMOS *los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos dos á dos* (figs. 60, 61, 62 y 63).

Los paralelogramos se denominan RECTÁNGULOS, *cuando tienen los ángulos rectos*, y OBLICUÁNGULOS *cuando los tienen oblicuos*. En los primeros se cuenta el *cuadrilongo* y el *cuadrado*, y en los segundos el *romboide* y el *rombo*.

El CUADRILONGO *es un paralelogramo que tiene rectos los ángulos y desiguales los lados que forman un mismo ángulo*, como MNRP (fig. 60). A éste algunos le denominan simplemente *rectángulo*. El CUADRADO es *el que, á más de tener los ángulos rectos, tiene iguales también los lados*, como QRST (fig. 61).

El ROMBO *es un paralelogramo que tiene iguales los lados y desiguales los ángulos adyacentes á un lado*, como ABCD (fig. 62). El ROMBOIDE *se diferencia del anterior en que tiene desiguales los lados consecutivos*; tal es TUXZ (fig. 63).

L. 16. 130. PROPIEDADES que tocante á los CUADRILÁTEROS interesan al dibujante:

1.ª *La suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual á cuatro rectos*; porque si tiramos una diagonal al cuadrilátero, nos quedará éste dividido en dos triángulos; y como los tres ángulos juntos de un triángulo valen dos rectos (114), tenemos que la suma de los ángulos de los dos triángulos, idéntica á la suma de los ángulos del cuadrilátero, es igual á cuatro rectos.

2.ª *La diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos iguales*. Esta igualdad se conocerá tan pronto como reparemos en q e los triángulos tienen iguales respectivamente sus ángulos y sus lados.

3.ª *Las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente por mitad; así, como las diagonales de un cuadrado y de un rombo se cruzan perpen-*

dicularmente (89), siendo al propio tiempo bisectrices de los ángulos de donde parten.

4.ª Los cuadrados y cuadrilongos tienen iguales sus diagonales, y el punto donde éstas se cortan dista igualmente de los cuatro vértices.

131. *Respecto á los trapecios hay también que advertir:*

1.º Las diagonales de un trapecio escaleno son desiguales y se cortan en un punto de la recta que une los puntos medios de las bases.

2.º La recta que une los puntos medios de las dos bases del trapecio isósceles es perpendicular á estas bases.

3.º Las diagonales de dicho trapecio son iguales y se cortan en un punto de aquella perpendicular.

APLICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS.

132. Los cuadriláteros, y en particular los paralelogramos, tienen una aplicación tan grande en los productos de las artes, que difícil sería, si no imposible, quererlas enumerar; las hojas de papel, los cristales para espejos, marcos y vidrieras, las puertas y ventanas, los sobres de las mesas y cómodas, los solares de una gran parte de edificios, las piedras de sillería, las caras de la mayor parte de cajas de cartón y de madera, estuches de matemáticas, ladrillos, reglas, etcétera, tienen la forma rectangular cuadrilonga. Tienen la forma cuadrada muchas baldosas de mármol ú ordinarias, las caras de un dado de jugar, los tableros de damas y de ajedrez, los cuales se dividen en otros 64 cuadrados iguales entre sí, etc. Los rombos se emplean también con mucha frecuencia en los embaldosados, en las vidrieras de labor, en los jardines, en los adornos de muchos muebles, utensilios y artefactos, en las puertas, en los enverjados de hierro, etc.

Las caras de algunos cuerpos obtenidos por cristalización adoptan la figura rectangular ó rombal. Son generalmente trapecios las caras exteriores de las piedras de sillería en los arcos adintelados, formando un trapecio isósceles la clave de dicho arco.

EJERCICIOS EN EL ENCERADO.

133. 1.º Dados varios cuadriláteros, clasificarlos en orden á su especie.

2.° Buscar ejemplos de cuadriláteros, en los objetos de la sala donde se tenga la clase, indicando á qué especie pertenecen.

3.° Dibujar un trapecio rectángulo (fig. 59) y otros isósceles (figura 58).

Para el 1.°, tírense dos paralelas ML, JK, y córtense por una perpendicular MJ y una oblicua LK.

Para el 2.°, dibújese primero la recta EH, y en su punto medio *m* levántese la perpendicular *mn*; por *n* tírese la recta EC paralela á EH, y tomando F*n*=*n*G, dibújense las oblicuas FE, GH.

4.° Hacer un cuadrilongo que tenga la base y la altura de una longitud determinada.

5.° Dibujar un cuadrado, primero que tenga dos lados horizontales y los otros dos verticales, y luego otro que tenga una diagonal horizontal y otra vertical.

Para el primero tírese una recta horizontal TS (fig. 61), y en sus extremos las perpendiculares TQ, SR; haciendo que cada una de éstas sea igual á ST; tírese por último la QR, y quedará formado el cuadrado.

Para el segundo tírese la horizontal EG (fig. 64), y en su punto medio O la perpendicular FH, procurando que FO=OH=OE=OG; tírense los lados EF, FG, etc., hasta estar formado el cuadrado.

6.° Diseñar un rombo que tenga la base horizontal, y luego otro que tenga una diagonal vertical y otra horizontal.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 2.ª

134. 1.° *Dibujar el* NIVEL DE ALBAÑIL, RECTANGULAR, *fig. XXII.*—Consta de un rectángulo que la línea de fe *nm* lo divide en dos partes iguales.

2.° *Diseñar una* BARANDA DE MADERA, *fig. XXIII.*—Está formada por tres cuadrados, siendo los lados de los dos primeros paralelos, y los del tercero ó interior perpendiculares con los barrotes diagonales del cuadrado exterior.

3.° *Hacer el dibujo de una* PIRÁMIDE TRUNCADA, *fig. XXIV.*—Dibújese el basamento B, representado por un cuadrilongo de lados horizontales y verticales; cópiese en seguida la pirámide A, la cual se compone de un trapecio isósceles colocado sobre dicho basamento.

4.° *Dibujar una* BARANDA DE HIERRO, *fig. XXV.*—En su totalidad forma un cuadrilongo, con otro de interior, cuyos lados, paralelos al primero, forman por su prolongación los cuatro cuadrados *a*; los puntos medios de los lados del segundo cuadrilongo son comunes con los vértices del rombo *b, c, d, e*, y los lados del rombo menor son paralelos y equidistantes, tanto del rombo anterior, como de las diagonales del rectángulo.

5.° *Copiar la fig. XXVI.*—Tírense primeramente las tres horizontales que pasan por los vértices de los cuadrados, y en seguida las verticales que, pasando también por dichos vértices, forman cuadrados perfectos. Estos cuadrados auxiliares sirven para luego ir dibujando los otros cuadrados que forman el dibujo.

6.° *Dibujar una* PUERTA *de tres recuadros, que el del centro sea desigual de los otros dos, fig. XXVII.*—Levántese sobre la base, tanto las verticales que deben formar el marco de la abertura, como los recuadros de la puerta; determínese la altura de ésta, y dibújense los tableros *a, b, c*, observando que el primero y último forman un cuadrado exacto.

7.° *Diseñar una* VENTANA *cuya vidriera sea de ocho cristales, fig. XXVIII.*—Después de haber trazado el bastidor *a*, dibújense las vidrieras, procurando que los cuadrilongos que forman queden iguales.

8.° *Hacer el dibujo de un* PAVIMENTO DE MADERA, *fig. XXIX.*—Dibújese un cuadrado y divídase en cuatro iguales por medio de la vertical *ab* y la horizontal *cd*; dentro cada uno de estos cuadrados se traza otro que tenga sus lados paralelos con el primero, y luego se dibujan los travesaños, empezando por los que corresponden á los ángulos de los cuadrados y continuando por los que dividen á los lados de éstos en dos partes iguales.

9.° *Dibujar una* PUERTA *de seis tableros iguales, fig. XXX.*—Esta puerta consta de dos hojas, estando cada una de ellas adornada con tres recuadros y sus correspondientes molduras. El listón *ab*, colocado en el centro de la abertura, tapa la línea de unión de las dos hojas.

10. *Hacer el dibujo de una* PUERTA *de dos hojas y de recuadros desiguales, fig. XXXI.*—Después de dibujado el rectángulo total de la puerta, se dibuja el listón *nm* de modo que lo divida en dos partes exactamente iguales; luego se dibujan los recuadros *a*, en seguida los recuadros *c* y se concluye por los otros recuadros *b*.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

135. PROBLEMAS.

I. *Hacer un trapecio rectángulo cuyas bases sean iguales á las rectas* r, r″, *y la altura igual á* r′ (figura 59).

Tómese LM$=r$, y en su extremo M levántese una perpendicular MJ$=r'$; tírese por J la JK$=r''$, y paralela á ML, y la recta KL cerrará el trapecio pedido.

II. *Trazar un trapecio isósceles cuyas bases sean iguales á las rectas* r′, rr″, *y la altura igual á* r′ (figura 58).

Tírese EH$=r$, y en su punto medio levántese la perpendicular $mn=r'$; por n tírese la FG, paralela á

EH, haciendo que las distancias F*n*, *n*G, sea cada una de ellas igual á un medio r'', y se obtendrá el trapecio EHGF.

III. *Construir un cuadrado que tenga sus lados iguales á la recta* r (fig. 61).

Tómese TS=*r*, y en uno de sus extremos, p. ejemplo T, levántese la perpendicular TQ=*r*; de los puntos S, Q, y con una abertura de compás igual á la recta *r*, descríbanse dos arcos que se cortarán en R; las QR, RS, completarán el cuadrado.

Este problema puede también resolverse de la manera siguiente (fig. 65). Tómese AB=*r*, y desde sus extremos, con un radio igual á esta recta, trácense los arcos A*e*D*m*, B*e*C; desde el punto de intersección *e*, y con el mismo radio, córtese el arco A*em* en *m;* tírese la recta A*m*, que dividirá en dos partes iguales al arco B*e;* hágase *e*C=*en*=*e*D, y ABDC serán los vértices del cuadrado que se busca (P).

IV. *Formar un cuadrado cuya diagonal sea igual á la recta* r (fig. 64).

Hágase EG=*r*, y divídase en dos partes iguales por medio de la perpendicular HF; hágase OF=OH=OE, y los cuatro vértices de los ángulos del cuadrado quedarán determinados (130, 3.ª).

Observ. Si se quiere que la base del cuadrado resulte horizontal, tiene que resolverse el problema del modo siguiente (fig. 61).

Tírese una recta indefinida TS, en sentido horizontal, y en su extremo T levántese una perpendicular TQ; divídase el ángulo QTS en dos partes iguales, y hágase TR=*r;* pártase dicha bisectriz perpendicu-

---

(P) La demostración de este problema consiste: en que el arco B*e* =60°, por ser la medida del ángulo A del triángulo equilátero *e*AB (114, 4.°); *e*C=30°, por ser igual á *en*, mitad de *e*B; luego el arco CB, que es la medida del ángulo CAB=90°, y AB=BD=AC por radios de un mismo círculo.

larmente y por mitad, y quedarán determinados los puntos Q y S; tírense las rectas QR, RS, y se tendrá formado el cuadrado.

V. *Delinear un cuadrado no conociendo sino la diferencia* P *de la diagonal al lado* (fig. 61).

En el extremo T de la recta TS, levántese una perpendicular TQ y divídase el ángulo T en dos partes iguales; sobre la bisectriz indefinida TR, llévese la diferencia dada P, de T en U, de U en X y de X en S; la recta TS será el lado del cuadrado.

VI. *Trazar un cuadrilongo conociendo los lados adyacentes* r, r′ (fig. 60).

Tómese MP$=r$, y en su extremo M levántese una perpendicular MN$=r'$; del punto N, con un radio$=r$, trácese un arco que se cortará en R con otro que se describirá desde el punto P con un radio$=r'$; las líneas NR, RP, completarán el cuadrilongo pedido.

VII. *Hacer un cuadrilongo que sus diagonales tengan la longitud de la recta* d, *y el ángulo que ellas formen igual con el dado* z (fig. 60).

Tírense dos rectas MR, NP, que se crucen de manera que el ángulo ROP sea igual al dado z; hágase OR $=$ON$=$OM$=$OP$={}^1/_2 d$, y el cuadrilongo MPRN será el pedido.

Observ. Si se quiere que los lados del rectángulo resulten verticales los unos y horizontales los otros, entonces debe operarse del siguiente modo (fig. 66).

Tírese la horizontal indefinida ab; en un punto o de esta recta fórmese un ángulo E$oa$$=$$a$$oH={}^1/_2 z$, y el ángulo H$o$E resultará igual al dado z; prolónguense los lados del primer ángulo, formando su opuesto por el vértice, y hágase oH$=$$oE=$$oF=$$oG={}^1/_2 d$, y los puntos H, E, F, G, serán los vértices del cuadrilongo.

VIII. *Formar un rectángulo no conociendo sino las diagonales* d *y un lado* r′ (fig. 60).

Tómese RP$=r'$, y en su extremo P tírese una perpendicular PM indefinida; del punto R, y con un radio$=d$, trácese un arco que corte á la recta MP en M; complétese el rectángulo MNRP, que será el pedido.

IX. *Construir un rombo cuyos lados sean iguales á* r *y una de las diagonales á* r′ (fig. 62).

Tómese AB$=r$, y desde A, con un radio$=r'$, trácese un arco que se corte en el punto C con otro que desde B se describirá con un radio$=r$; desde A y C, con este último radio, trácense dos arcos que se corten en D, y el paralelogramo ABCD será el rombo pedido.

X. *Dibujar un rombo cuyas diagonales sean iguales á* r *y* r′ (fig. 67).

Tírese EF$=r$, y divídase por mitad por medio de la perpendicular GH; hágase OG$=$OH$={}^1/_2 r'$, y los puntos E, G, F, H, serán los vértices del rombo que se busca.

XI. *Delinear un rombo cuyos lados sean iguales á la recta* r, *y el ángulo formado por dos lados adyacentes igual al dado* z (fig. 62).

Háganse AB y AD$=r$, haciendo que el ángulo DAB sea igual al dado z; complétese el paralelogramo ABCD (IX), y él será el rombo pedido.

XII. *Hacer un romboide cuyos lados inmediatos sean iguales á las rectas* r, r′, *y una de las diagonales tenga la longitud de la recta* r″ (fig. 63).

Tírese ZX$=r'$, y del punto X, con un radio$=r$, trácese un arco que se corte en el punto U con otro que desde Z se describa con un radio$=r''$; complétese el paralelogramo ZXUT (IX), y se tendrá el rombo pedido.

XIII. *Trazar un cuadrilátero igual al propuesto* ABCD (fig. 57).

Tómese $ab=$AB, y desde a, con un radio AD, trácese un arco que se cortará en el punto d con otro que desde b se describirá con una abertura de compás$=$BD; de los puntos a, b, con los radios AC y BC, trácense otros dos arcos que se corten en c, y los puntos a, b, c, d, serán los vértices de los ángulos del cuadrilátero que se busca.

ARTÍCULO 4.º

DE LOS POLÍGONOS DE CUALQUIER NÚMERO DE LADOS.

137. Qué es ángulo entrante de un polígono? Ángulo saliente.—138. Cuántos ángulos entrantes puede tener un polígono regular? Cuántos el irregular?—139. A qué se llama centro del polígono regular? Qué es radio oblicuo? Qué radio recto? Qué es sajita?—140. Qué hay que advertir sobre los radios oblicuos y los radios rectos?—141. Cuándo un ángulo se llama central?—142. Cuándo dos ó más polígonos regulares se dice que son concéntricos?—143. Cuántas diagonales pueden tirarse en un polígono?—144. Cómo se halla el valor del ángulo central en un polígono regular?—145. Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera? Cómo se determina el valor de un ángulo de polígono regular?—147. El ángulo externo de un polígono regular, no es igual al ángulo del centro?

136. Hemos examinado los polígonos de tres y de cuatro lados: ahora pasaremos á considerar los polígonos en general. En el párrafo 107 dijimos lo que se entiende por polígono, y desde dicho párrafo al 110 dejamos sentado cuándo se llama regular, irregular, equiángulo, equilateral, lo que se entiende por ángulo externo, etc., por lo que pasaremos á las consideraciones siguientes.

137. En un polígono puede haber ángulos entrantes y ángulos salientes. Se llama ÁNGULO ENTRANTE *aquel que tiene su vértice en la parte interior de la figura*; tal es el E (fig 68); y ÁNGULO SALIENTE *es el que tiene su vértice en la parte exterior*, como A, B, etc.; de modo que el ángulo entrante *ha de ser siempre mayor que dos rectos ó* 180°, y el saliente *no puede nunca llegar á valer dos ángulos rectos.*

138. En un polígono regular no puede haber ningún ángulo entrante; pero en los irregulares, si el polígono es de número par de lados, *puede haber tan-*

tos como mitad de lados haya en el polígono, y si es de número impar, *puede tener un número igual á la mitad de lados que haya en el polígono inmediato inferior.* Se exceptúan de esta regla el triángulo, que no puede tener ningún ángulo entrante, y el cuadrilátero, que no puede tener más que uno.

139. Se llama CENTRO del polígono regular *un punto equidistante de los vértices de sus ángulos*; tal es el O (fig. 69).

Las rectas OA, OB, etc., *que desde el centro del polígono regular van á cada uno de los vértices de sus ángulos*, se llaman RADIOS OBLICUOS; *las* oh, on, etc., *tiradas del centro perpendicularmente al punto medio de los lados*, se llaman RADIOS RECTOS, *y la diferencia que va del radio oblicuo al radio recto*, se llama SAJITA del polígono.

140. Debe advertirse que en todo polígono regular los radios oblicuos son iguales entre sí y dividen por mitad los ángulos del polígono, así como dividen también á éste en tantos triángulos iguales como lados tenga, y todos ellos isósceles, excepto en el exágono, que son equiláteros. Y que los radios rectos son también iguales y dividen por mitad el lado sobre al cual caen.

141. Llámase ÁNGULO CENTRAL *el que tiene el vértice en el centro y está formado por dos radios oblicuos inmediatos*, como AOF (fig. 69).

142. Cuando dos ó más polígonos regulares *tienen un mismo centro y paralelos sus lados*, se dice que son CONCÉNTRICOS; tales son los ABCDEF, *abcdef* (fig. 70).

143. *Propiedades relativas á los polígonos, y que todo dibujante debe saber.*

Si observamos un polígono cualquiera, veremos que de cada vértice de sus ángulos pueden tirarse tantas diagonales como lados tiene el polígono, menos tres; así es que del vértice del ángulo de un triángulo no se puede tirar ninguna diagonal, del de un cuadrilátero no más que una, del de un pentágono dos, del de un exágono tres y así sucesivamente, y como cada diagonal es común á dos vértices, resulta: *que en un polígono de un número* n *de lados se pueden tirar* tantas diagonales como lados tiene el polígono menos

$$\frac{n(n-3)}{2} \textit{diagonales.}$$

~~4~~ 3

144. Si consideramos que todos los triángulos formados por los radios oblicuos y lados del polígono regular son iguales, como lo manifiesta la igualdad respectiva de los lados de los triángulos, conoceremos que todos los ángulos del centro son iguales entre sí. *Luego para hallar el valor del ángulo central de un polígono regular, dividiremos por el número de lados del polígono los cuatro rectos ó* 360°, *valor de todos los ángulos que alrededor de un punto se pueden formar.*

Si se quiere, p. ejemp., hallar el ángulo central en el pentágono regular, procederemos del modo siguiente: ángulo del centro$=\frac{360°}{5}=72°$.

145. *La suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera vale tantas veces dos rectos, ó sean* 180°, *como lados tiene el polígono menos dos.*

Esto se funda en que, si desde un ángulo de un polígono cualquiera se tiran diagonales á los demás, quedará dividido el polígono en tantos triángulos como lados tiene, menos dos, y como la suma de los ángulos de estos triángulos será tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono, menos dos, y esta suma es idéntica á la de los ángulos del polígono; se evidencia L. Q. Q. D.

Luego tendremos que en un polígono de un número-

ro n *de lados, la suma de sus ángulos es igual á* $(n-2)\times 180°$.

De donde se deduce que, para hallar el valor del ángulo de un polígono regular, se dividirá el valor de todos los ángulos, que es $(n-2)\times 180°$, por n, que es también el número de lados, por lo que tendremos la fórmula siguiente:

$$\textit{Ángulo del polígono regular} = \frac{(n-2)\times 180°}{n}$$

146. El ángulo externo de un polígono regular *es suplemento del ángulo del polígono*; es decir, el ángulo CBP (fig. 69) es suplemento del CBA.

De aquí se sigue: *que los ángulos externos de un polígono regular son iguales á los del centro*, porque los ángulos CBP+CBA=180°, y los COB+OCB+CBO =180°. Pero como los ángulos de un polígono regular son iguales y el radio oblicuo los divide por mitad, tendremos que OCB=OBA; luego el valor de OCB+CBO puede sustituirse con el de CBA, y dará COB+CBA=180°; de donde CBP=COB.

147. Por medio de esta fórmula y las dos anteriores se han calculado los ángulos de la siguiente tabla:

lados	Polígonos regulares.	Sumas de los ángulos del polígono.	Ángulo del polígono.	Ángulo central y externo.
3	Triángulo. . . .	180°.	60°. . . .	120°.
4	Cuadrado. . . .	360°.	90°. . . .	90°.
5	Pentágono. . . .	540°.	108°. . . .	72°.
6	Exágono. . . .	720°.	120°. . . .	60°.
7	Eptágono. . . .	900°.	128° $^3/_7$ . .	51 $^3/_7$.
8	Octágono. . . .	1080°.	135°. . . .	45°.
9	Eneágono. . . .	1260°.	140°. . . .	40°.
10	Decágono. . . .	1440°.	144°. . . .	36°.
11	Endecágono. . .	1620°.	147° $^3/_{11}$ . .	32° $^8/_{11}$.
12	Dodecágono. . .	1800°.	150°. . . .	30°.

APLICACIÓN DE LOS POLÍGONOS.

148. En los mosaicos, en las labores del ebanista, del bordador, del vidriero, de los que hacen cajas, del hojalatero, del adornista, del lapidario, etc., se ven con frecuencia polígonos regulares combinados con adornos.

La ciudadela de Barcelona y la mayor parte de las fortalezas modernas vienen á tener la figura de un pentágono regular.

No solamente se encuentran los polígonos regulares en los productos de las artes industriales, sino también en objetos producidos por la Naturaleza; tales son las caras de algunos cuerpos obtenidos por cristalización, las cuales adoptan la forma de un triángulo equilátero, de un cuadrado ó de un pentágono regular. Las celdillas que labran las abejas tienen la forma de un exágono regular perfecto.

Los terrenos cultivados tienen ordinariamente la forma rectangular, la trapecial ó la de polígonos irregulares.

DIBUJOS DEL ÁTLAS.

LÁMINA 3.ª

149. 1.° *Copiar el pentágono regular fig. XXXI.*—Las líneas auxiliares les facilitará el trazar la figura.

2.° *Dibujar un exágono regular, fig. XXXII.*—Fórmese el triángulo equilátero *abo*, y por el punto *o* tírese la *fe* paralela con *ab*, formando los otros dos triángulos equiláteros *foa*, *cob*; así continuando, se dibujará la otra mitad *adef* del exágono.

3.° *Diseñar el pentágono regular fig. XXXIII.*—Después de trazada la base y las líneas auxiliares, les será fácil determinar los puntos de los vértices del polígono.

4.° *Copiar dos octágonos regulares, figs. XXXIV y XXXV.*—Para el primero tírense las líneas *ae*, *cg*, que se corten perpendicularmente y por mitad; divídase cada uno de los ángulos rectos, que forman dichas líneas, en dos partes iguales por medio de *bf* y *dh*; hágase $oa = ob = oc$, etc., y uniendo por medio de rectas los puntos *abc...h*, se tendrá formada la figura.

Para el segundo las líneas auxiliares indican lo que se debe hacer.

5.° *Hacer el dibujo de la fig. XXXVI.*—Para su ejecución obsérvese lo que se dijo en el párrafo 50.

6.° *Dibujar dos escudos de los que usaban los antiguos guerreros, figs. XXXVII y XXXVIII.*—El primero forma un polígono de ocho lados, y el segundo otro de diez, con dos ángulos centrales.

EJERCICIOS GRÁFICOS Y DE CÁLCULO.

150. PROBLEMAS.

I. *Calcular en expresión de grados la suma de los* *ángulos de los polígonos comprendidos desde el triángulo al dodecágono, ambos inclusive, y el número de grados del ángulo de cada uno de los polígonos regulares mencionados, así como también el valor del ángulo central y del ángulo externo de los mismos.*

Para la resolución de este problema y los dos siguientes, consúltense los párrafos 145 y 146, presentando el cálculo como se manifiesta en la *Tabla* del párrafo 147.

II. *Sobre una recta* AB, *dada como á lado, formar un pentágono regular* (fig. 71).

En el extremo A levántese la perpendicular An= AB; divídase en dos partes iguales la recta dada AB, y del punto de división m, con el radio mn, trácese el arco nr hasta cortar en r el lado AB prolongado. Desde A y B, con el radio Br, descríbanse dos arcos que determinarán el punto F, desde cuyo punto, con un radio AB, trácense dos arcos que se crucen en los puntos E y G con otros dos descritos con igual radio desde A y B; tírense las rectas BE, EF, FG, GA, y quedará construído el pentágono.

Segundo modo (fig. 72). Divídase la AB en dos partes iguales por medio de la perpendicular rn = AB; tírese la Bn prolongada hasta m, de modo que $nm = \frac{1}{2}$ AB; haciendo centro en A y B, y con un radio = Bm, fórmese la intersección D, desde cuyo punto, con un radio AB, trácense dos arcos que se cortarán en los puntos E y C con otros dos descritos desde A y B con igual radio; los puntos CDE determinarán con los AB el pentágono regular pedido.

III *Construir un exágono regular cuyos lados sean iguales á la recta* AB (fig. 69).

Desde los extremos A y B de la recta dada, y con un radio igual á ella misma, trácense dos arcos que se cortarán en O; desde O, y con el mismo radio, descríbase la circunferencia ABC.... y colocando el lado AB como á cuerda las veces que se pueda, que serán seis, se tendrá el exágono pedido.

IV. *Trazar un octágono regular cuyos lados sean iguales á la recta* AB (fig. 73).

Divídase la AB en dos partes iguales por la perpendicular indefinida *n*O; desde el punto *n*, con un radio igual á *n*B, trácese el cuadrante *r*B, y haciendo centro en *r*, descríbase, con un radio *r*B, el arco BO. Este punto O será el centro de un círculo cuya circunferencia se trazará con el radio OB; colóquese en ella el lado AB como á cuerda, que le cabrá ocho veces y formará el octágono que se pide.

V. *Sobre una recta* AB, *dada como á lado, construir un eneágono regular* (fig. 46).

Por constar el ángulo del eneágono de 140°, su suplemento será de 40°; luego lo primero que se debe hacer es formar el ángulo CAE de 40°. Para eso se prolongará la línea dada AB, y con un radio igual á dicha AB, se describirá desde A la semicircunferencia CDB; con la misma abertura de compás se trazará desde C un arco que corte á la semicircunferencia en un punto D, y el ángulo CAD será de 60°. Ahora, siguiendo lo expuesto en 225, XIX, se dividirá el ángulo CAD en tres partes iguales, y se obtendrá el ángulo CAE de 40°; por consiguiente, la recta AE será lado del eneágono que se busca; si se hace el ángulo IBH igual á CAE, la línea BI será también otro lado del polígono. Si ahora se dividen los lados AB y BI en dos partes iguales por medio de perpendiculares, el punto donde éstas se cortan será el centro del polígono; luego si, haciendo centro en O, se describe una circunferencia con el radio OE ú OA, y se le coloca sucesivamente la recta AB como á cuerda, le cabrá *nueve* veces exactamente y quedará formado el eneágono regular.

VI. *Sobre una recta* AB, *dada como á lado, delinear un decágono regular* (fig. 74).

En el extremo A de la recta dada levántese la perpendicular AC $= \frac{1}{2}$ AB; tírese la recta BCD haciendo que CD $=$ CA; con el radio BD, descríbanse desde A y B arcos que se cortarán en O; desde O, con un radio OA ú OB, trácese una circunferencia, y colocando en ella el lado AB como á cuerda, le cabrá *diez* veces exactas.

VII. *Sobre una recta* AB, *dada como á lado, formar un dodecágono regular* (fig. 75).

Enmedio de AB levántese la perpendicular CO, y desde A, con un radio igual á la recta propuesta, descríbase el arco BD, y desde D el otro arco BO; el punto O será el centro de un círculo á cuya circunferencia, trazada con el radio OA ú OB, se le colocará *doce* veces como á cuerda la recta AB, que son las que cabe exactamente.

VIII. *Sobre una recta* AB, *dada como á lado* (figura 77), *formar un polígono regular desde el de seis lados hasta el de doce inclusive* (Q).

Enmedio de la recta propuesta AB, levántese la perpendicular indefinida CD; haciendo centro en B, y con un radio igual al lado, descríbase el arco AO y divídase dicho arco en seis partes iguales (R). Ahora, si se quiere construir, p. ejemp., un eptágono, como la diferencia de seis á siete es uno, se toma la dis-

---

(Q) Los resultados obtenidos por los procedimientos indicados en este problema y el que sigue, no tienen una rigurosa exactitud matemática; pero sí *aproximada lo suficiente* para que en la práctica den el resultado apetecido.

(R) Para dividir dicho arco en seis partes iguales, se puede dividir primero en tres (125, XIX), luego cada una de éstas en dos. Si dicho arco se hubiese de dividir en doce partes iguales, como sucede en el del problema que sigue, se subdiviría cada una de estas últimas partes en otras dos iguales, y así sucesivamente, si se quisieran, en 24, etcétera.

tancia O1, y haciendo centro en O, se traza el arco 1,7 y el punto 7 será el centro de un círculo que, trazada su circunferencia con el radio 7A ó 7B, y colocándole consecutivamente como á cuerda la recta propuesta AB, se obtendrá el eptágono regular.

Para la formación del octágono, como la diferencia de seis á ocho es dos, se trasladará la distancia O2 de O á 8, y el punto 8 será el centro de una circunferencia que, trazada con el radio 8A ú 8B, y colocándole la recta AB como á cuerda, dará el octágono. Así prosiguiendo, el punto 9 será el centro del eneágono, el 10 del decágono, el 11 del endecágono y el 12 del dodecágono.

IX. *Construir sobre una recta* AB *un polígono regular desde el de doce lados hasta veinticuatro inclusive* (fig. 78).

Enmedio de AB levántese la perpendicular indefinida CN; del punto B, y con un radio BA, descríbase el arco AO y divídase dicho arco en doce partes iguales. Ahora, si se quiere un polígono de trece lados, como la diferencia de doce á trece es uno, se toma la distancia O1 y se traslada de O á 1′, y haciendo centro en este punto con un radio 1′A ó 1′B, se traza el arco A13; este punto 13 será el centro de un círculo que, descrita su circunferencia con el radio 13A ó 13B, y colocándole la recta AB como á cuerda, se obtendrá el polígono pedido.

Si se hubiese querido, p. ejemp., un polígono de 18 lados, como la diferencia de doce á diez y ocho es seis, se tomaría la distancia O6 y se trasladaría de O á 6′, y haciendo centro en 6′, con un radio 6′A, se describiría el arco A18, y este punto 18 sería el centro de una circunferencia que, trazada con el radio 18A ó 18B, y colocándole el lado AB como á cuerda, resultaría el polígono deseado.

Procediendo de esto modo, se obtendrían los demás polígonos, desde el de 12 lados, hasta el de 24, inclusive.

X. *Dado un polígono regular, determinar su centro* (fig. 69).

Divídanse en dos partes iguales dos lados no paralelos, p. ejemp. AB y CD, por medio de las perpendiculares *h*O, *n*O, y el punto O donde se encuentra será el centro del polígono.

XI. *Dado un polígono regular, p. ejemp., el exágono* ABCDEF (fig. 70), *trazar otro concéntrico, cuyos lados sean iguales á la recta* r.

Después de tirados los radios oblicuos, divídase por mitad el lado AF y hágase $nu = {}^1/_2 r$; en *u* levántese la perpendicular *uf* hasta que corte al radio oblicuo inmediato *o*F; hágase *oa*, *ob*, etc. respectivamente iguales á *of*, y los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, serán los vértices del polígono regular concéntrico que nos hemos propuesto.

Observ. Si en vez de la recta r *se hubiese dado la* r′, *es decir, una recta mayor que el lado del polígono propuesto*, entonces se hubiera prolongado el lado AF hasta *n′*, haciendo $nn' = {}^1/_2 r'$; en *n′* se hubiera levantado la perpendicular *n′x* hasta encontrar el radio oblicuo inmediato en *x*, y prolongando los demás radios oblicuos hasta que cada uno de ellos fuese igual al radio *ox*, se acabaría de operar como en el anterior.

XII. *Dado un polígono cualquiera*, ABCDEFG (fig. 76), *dibujar otro que le sea igual.*

Desde los vértices C, D, E, F, del polígono, bájense perpendiculares C*g*, C*h*, E*m*, F*n*, á la base BA ó á su prolongación. Tírese aparte la indefinida *ag′*, y tómese en ella $an' = An$, $n'm' = nm$, $m'h' = mh$, $h'b' = hB$, $b'g' = Bg$; por estos puntos levántense otras tantas perpendiculares y hágase que $n'f = nF$, $m'e = mE$, $h'd = hD$, $g'c = gC$. Los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, serán los vértices del polígono pedido.

Segundo modo (fig. 76). La resolución por este medio es, en la práctica, más ventajosa que por el primero. Tómese $ab = Ab$, y de los extremos a y b como á centros, y con los radios AC y BC, trácense dos arcos que se cortarán en c; de los mismos puntos b y a, y con los radios BD, AD, descríbanse otros dos arcos que se cruzarán en d; luego, con los radios BE, AE, se trazarán otros dos que se cortarán en e; en seguida, con los radios BF, AF, otros dos que se crucen en f, y los puntos a, b, c, d, e, f, serán los vértices del nuevo polígono.

ARTÍCULO 5.º

COMBINACIÓN DE POLÍGONOS.

151. Cuáles son los polígonos regulares que solos ó en combinación pueden servir para cubrir una superficie plana?—152. Dem. de lo dicho.—153. Sirven también los polígonos irregulares para cubrir un plano?—154. Cuándo se trata de ejecutar un pavimento, sea de ladrillos ó de mármoles, no hay algo que advertir?—155. La combinacion de los polígonos, sean ó no regulares, para qué suele servir?

151. Difícil sería enumerar las diferentes combinaciones que pueden hacerse con los polígonos; pero tratando de que todos los que entran en la composición sean regulares, la cuestión se limita mucho; pues sólo pueden emplearse los *triángulos equiláteros, los cuadrados, los exágonos, los octágonos* y *los dodecágonos.*

152. Los demás polígonos regulares no se pueden combinar de ningun modo, como vamos á manifestarlo. Demostramos en el párrafo 78 que la suma de todos los ángulos consecutivos que pueden formarse alrededor de un punto, sobre un plano, valen cuatro rectos, ó lo que es lo mismo. 360°. Luego es preciso

que valga este número de grados la suma de los ángulos de los diferentes polígonos que tienen su vértice en un mismo punto. En efecto; como al menos se han de emplear tres ángulos, si calculamos los triángulos equiláteros cuyos vértices rematan seis en un mismo punto (fig. 79), tendremos $6 \times 60^\circ = 360^\circ$; los cuadrados cuyos vértices terminan cuatro en un mismo punto (figs. 85 y 86) valen $90^\circ \times 4 = 360^\circ$; los exágonos que rematan tres en un mismo punto (fig. 83) darán $3 \times 120 = 360^\circ$.

Los pentágonos no se pueden combinar; porque valiendo su ángulo 108°, tres hacen 324° y cuatro 432°, de modo que ó no llegan á los 360° ó pasan. Tres ángulos de los demás polígonos regulares siempre dan más de 360°, por lo que no se pueden emplear.

Pueden combinarse también dos ángulos de triángulo equilátero y dos de exágono regular (figs. 81 y 82); porque $120^\circ + 120^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 360^\circ$; también pueden emplearse los dodecágonos y triángulos que se unen tres en un mismo punto, dos del dodecágono y uno del triángulo, que dan $150^\circ + 150^\circ + 60^\circ = 360^\circ$; lo mismo se conseguiría con octágonos y cuadrados cuyos vértices terminan tres en un mismo punto, dos del octágono y uno del cuadrado (fig. 89), los cuales valen $135^\circ + 135^\circ + 90^\circ = 360^\circ$.

Por lo dicho, vemos que con los polígonos mencionados puede cubrirse una superficie plana. Con ángulos de los demás polígonos regulares, combínense como se quiera, nunca es posible hacer la suma de 360°.

153. Con polígonos irregulares se pueden formar también hermosos y variados dibujos, ya sea combinándolos entre sí ó ya con otros regulares. Las figuras 84 y 87 presentan dibujos compuestos de polígonos irregulares, y la fig. 81 otro compuesto con regulares é irregulares.

154. Cuando se trata de ejecutar un pavimento, sea de ladrillos ó de mármoles, cuantos menos vértices se reunan en un mismo punto más solidez ofrecerá; porque poniendo sobre este punto el pie ú otro objeto pesado, se rompería fácilmente; por esto casi nunca se emplean las combinaciones de los triángulos, y aun los cuadrados convendría colocarlos de modo que no concurriesen los vértices cuatro á cuatro en un mismo punto; pero generalmente se colocan así por causar más buen efecto á la vista.

APLICACIÓN DE LA COMBINACIÓN DE POLÍGONOS.

155. La combinación de los polígonos, sean ó no regulares, suele servir cuando se trata de ejecutar un pavimento, ora sea de baldosa común ó de mármoles, ora sea de maderas. También se emplean en las vidrieras llamadas comúnmente de *labor*, las cuales, con los diferentes colores que les dan, hacen un efecto hermoso y delicado.

Las abejas, al labrar sus celdillas exagonales, las combinan del mismo modo que nosotros lo hacemos para cubrir con exágonos regulares una superficie plana.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

156. Problemas.

I. *Determinar por medio del cálculo los polígonos regulares que, solos ó en combinación, pueden servir para cubrir una superficie plana.*

Para su resolución véase el párrafo 152.

II. *Sobre un cuadrado dado* ABCD, *trazar un octágono regular, de modo que el radio recto del cuadrado sirva también de radio recto al octágono* (figura 88).

Desde los vértices, y con una abertura de compás igual al radio oblicuo del cuadrado, descríbanse arcos que terminen en los lados del mismo; es decir, desde A trácese el arco *com*, desde B el *nop*, desde C el *roq* y desde D el *sot*, y resultará el octágono regular *tnmqpsre*, que su radio recto lo será también del cuadrado.

III. *Delinear un* EMBALDOSADO *compuesto de triángulos equiláteros* (figs. 78 y 80).

Trácese un ángulo recto *pbn*; tómese una distancia *bc*, igual á la longitud que han de tener los lados de los triángulos, y póngase de *b* á *c*, á *d*, á *e*, á *f*, á *h*... *n*, y en este punto levántese la perpendicular indefida *nr*; ahora, tomando el mayor número posible de las partes señaladas sobre la recta *bn*, fórmense en sus extremos los triángulos equiláteros *bfg* y *nhm*; por los vértices *g* y *m* tírese una recta prolongada, y llévese la distancia *bc*, todas las veces que se pueda, de *g* á *p* y *m*, y de *m* á *r*; ahora, por los puntos correspondientes señalados en las líneas *pr* y *bn*, tírense rectas paralelas á los lados *bg*, *hm* y *gf*, *mn*; por los puntos donde estas líneas se cruzan, tírense paralelas á la *bn*, tales como *st*, *zu*, y quedará delineado el embaldosado pedido.

Observ. Si se quieren lavar los triángulos dejando uno blanco y otro de media tinta, pueden dejarse como en la fig. 79, y si se quiere que cada dos blancos y cada dos negros formen un rombo, se puede disponer como en la fig. 80.

IV. *Trazar un* TABLERO *del juego de damas ó del de ajedrez* (fig. 85).

Fórmese un cuadrado y divídase cada uno de sus lados en ocho partes iguales, y tirando rectos por los punto de división, paralelos á sus respectivos lados, quedarán trazados los 64 cuadrados de que se compone dicho tablero, como se ve en la figura.

V. *Trazar un* EMBALDOSADO *compuesto de cuadrados* (fig. 86).

Después de haber delineado un rectángulo, tírese en uno de sus ángulos *a* la bisectriz *ab*; llévese una distancia *ac*, igual á la diagonal que han de tener los cuadrados, de *a* á *c*, á *e*, á *i*, etc., y de *a* á *d*, á *f*, etc. Tírese la recta *cd*, y por los puntos *c*, *e*, *i*... *d*, *f*, etc., tírense paralelas á *cd* y *ab*, y quedará trazado el embaldosado de cuadrados.

Observ. En vez de haber combinado los cuadrados del modo que lo hemos hecho, se podían haber dispuesto como en el tablero de damas; mas en los embaldosados se disponen así porque presentan más buen golpe de vista.

VI. *Dibujar un* PAVIMENTO *compuesto de rombos cuyos lados sean iguales á la recta* r (figs. 80 y 87).

La misma construcción que para el prob. III, si se quieren los rombos combinados como en la fig. 80, y si se quieren dispuestos como en la fig. 87, también es la misma; pero con la diferencia de que en vez de ser las bases de los triángulos sobre el lado *bc*, estarán en el lado adyacente *ba*.

VII. *Diseñar el* ENLADRILLADO *compuesto de exágonos regulares* (fig 83).

La misma construcción del prob. III sirve para la resolución del presente. Como alrededor de cada punto de intersección se tienen seis triángulos equiláteros, tales como *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, que forman un exágono regular, se pasarán de tinta no más que las rectas que forman los exágonos y se borrarán las demás que en la figura están representadas por puntos, y que son radios oblicuos de los exágonos.

VIII. *Delinear un* EMBALDOSADO *compuesto de rombos y exágonos regulares, que los lados de ambas figuras sean iguales á la recta* r (fig. 81).

Trácense los triángulos equiláteros como en el problema III, haciendo que sus lados sean iguales á la recta *r*, y al pasar de tinta las rectas, procúrese que cada dos exágonos tengan común un vértice y un lado en sentido horizontal, dejando los dos triángulos que forman el rombo como se ve en la figura.

IX. *Representar un* SOLADO *compuesto de exágonos y triángulos equiláteros formando estrellas* (figura 82).

La construcción es la misma que para el prob. III, solamente que, una vez delineados los triángulos, se dejan sin pasar de tinta los lados de éstos que forman los radios oblicuos de los exágonos.

X. *Dibujar un* ENLADRILLADO *compuesto de rombos combinados de modo que cada tres formen un exágono regular* (fig. 84).

Constrúyanse los exágonos regulares como en el prob. VII, y de los seis triángulos equiláteros que resultan dentro de cada exágono, hágase de cada dos un rombo, como se ve en la figura.

XI. *Delinear el* ENLADRILLADO *compuesto de cuadrados y octágonos regulares* (fig. 89).

En el rectángulo que se quiera dibujar el enladrillado, se trazan unos cuadrados que su radio recto sea igual al radio recto del octágono que haya de servir para el solado, y luego se practica en cada uno de dichos cuadrados lo mismo que se hizo en el cuadrado de la fig. 88, probl. II.

ARTÍCULO 6.º

DE LOS POLÍGONOS EN FORMA DE ESTRELLA.

158. A qué se llama estrella poligonal?—159. Qué son puntas de la estrella? Según el número de puntas que tiene la estrella, cómo se denomina?—160. Cuándo una estrella es regular? Cuándo irregular?—161. Para que una estrella sea regular, basta el que reuna dos de las tres circunstancias prescritas?—162. Las estrellas poligonales regulares, no se deducen ordinariamente de los polígonos regulares?—163. Cuál es la regla para el trazado de las estrellas regulares, por reducción y extensión?—164. La estrella triangular y la cuadrangular, pueden trazarse por dicha regla? Cuál es la regla general para trazar una estrella regular sin emplear los medios de reducción ó extensión?

—165. Cuántas estrellas pueden deducirse de un polígono regular por los métodos de reducción y extensión?—166. Aplicación de las estrellas poligonales.

158. Se da el nombre de ESTRELLA POLIGONAL Ó POLÍGONO ESTRELLADO *á un polígono compuesto de ángulos entrantes y salientes alternados de modo que entre cada dos de los unos haya uno de los otros;* tal es la fig. 90.

Los ángulos salientes, denominados *puntos de la estrella*, son los que determinan el nombre de ésta, llamándose TRIANGULAR *cuando tiene tres puntas*, CUADRANGULAR, *cuando cuatro;* PENTAGONAL, *cuando cinco*, y así sucesivamente.

160. Las estrellas poligonales pueden ser *regulares é irregulares.*

Se llama REGULAR *cuando tiene iguales todos sus ángulos salientes, todos los entrantes y todos sus lados*, é IRREGULAR *cuando no reuna estas tres circunstancias.* La fig. 90 es una estrella regular, y la fig. 91 una irregular.

161. Creemos deber advertir á los alumnos que, para que una estrella sea regular, no basta que reuna dos de las tres circunstancias prescritas en el párrafo anterior; *pues el que reuna dos de aquellos requisitos no arguye que deba reunir también el tercero*, como lo demuestran las estrellas de las figuras 91 y 92; pues la primera tiene iguales todas sus puntas y todos sus ángulos entrantes, y sin embargo, tiene desiguales los lados, y la segunda, á pesar de tener iguales todos sus ángulos salientes y los lados, tiene los ángulos entrantes A, B, C, D, rectos y los demás obtusos.

162. Las estrellas poligonales regulares se deducen ordinariamente de los polígonos regulares ó *por reducción* ó *por extensión.*

Si consideramos el polígono regular ABCDEF (figura 90), y tiramos diagonales uniendo cada uno de sus vértices con el SEGUNDO de los que siguen, resultará la estrella que vemos allí trazada; este método se llama de REDUCCIÓN, y las estrellas por él obtenidas son siempre menores que el polígono primitivo. Si en el polígono *mnorst* (fig. 90) prolongamos sus lados en ambos sentidos, éstos se cruzarán en los puntos A, B, C.... y formarán la estrella regular A*t*, B*s*, C*r*, D*o*, E*n*, F*m*; este método se llama de EXTENSIÓN, y las estrellas que por él se obtienen son siempre mayores que el polígono del cual se deduce aquélla.

163. Luego podemos deducir fácilmente una regla para el trazado de las estrellas poligonales regulares, cuando se quieran delinear por los métodos de reducción y extensión.

Para el de reducción, *trácese un polígono regular que tenga tantos lados como puntas ha de tener la estrella, y por medio de una recta únase cada vértice con el segundo de los que siguen ó con el que ocupe el lugar de otro orden, con tal que la diagonal no pase por el centro.*

Para el de extensión, *después de trazado el polígono regular, prolónguense todos sus lados hasta que se encuentre cada uno con la prolongación del segundo de los que siguen ó con la prolongación del lado que ocupe el lugar de otro orden, con tal que no sea su paralelo.*

164. Como por estos métodos no puede trazarse la estrella triangular y la cuadrangular, se ha escogido otro general y aplicable á todas las estrellas regulares, mayormente cuando se quiere que las puntas sean más ó menos agudas de lo que resultarían empleando los medios de reduccion ó extensión.

Dicha regla general es la siguiente:

Trácese un polígono regular que tenga tantos lados como puntas ha de tener la estrella; tírense los radios rectos, y señálese en ellos un punto á arbitrio, equi-

distante del centro; tírense desde dichos puntos rectas á los vértices inmediatos del polígono, y quedará delineada la estrella. Las estrellas de las figs. 93, 94 y 95 están trazadas conforme á esta regla.

PROPIEDADES RELATIVAS Á LAS ESTRELLAS POLIGONALES.

165. Si expresamos por n el número de lados de un polígono regular, cuando éste sea de un número *impar de lados* se podrán deducir por los métodos de extensión y reducción $\frac{n-3}{2}$ de estrellas regulares, y si fuese de número *par de lados* $\frac{n-4}{2}$. Así, del pentágono no se podrá deducir más de una estrella regular, porque $\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$, y del decágono tres, porque $\frac{10-4}{2}=\frac{6}{2}=3$.

APLICACIÓN DE LAS ESTRELLAS POLIGONALES Á LAS ARTES.

166. Las estrellas poligonales se ven con frecuencia en las labores del ebanista, en las taraceas, en los mosaicos, en los bordados, en la pirotecnia, en las insignias llamadas cruces de honor, en la jardinería, en los adornos de muebles, edificios, iluminaciones públicas, etcétera, etc.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 3.ª

167. 1.° *Dibujar la estrella pentagonal regular fig. XXXIX.* —Primeramente se ha de dibujar un pentágono regular; luego se trazarán las diagonales, y desde el punto de intersección se tirarán rectas al centro del polígono.

2.° *Diseñar la estrella exagonal regular de la fig. XL.*—Dibújese un exágono regular, y en seguida tírense las diagonales que forman la estrella; hecho esto, fácilmente se dibujará lo demás.

3.° *Copiar la estrella de la fig. XLI.*—Son dos estrellas regulares concéntricas, y por lo mismo los lados de la estrella interior se ha de procurar que sean paralelos y equidistantes con los respectivos lados de la estrella exterior.

4.° *Dibujar la rosa náutica, fig. XLII.*—Esta estrella sirve para señalar los vientos, y se valen de ella los navegantes para conocer el rumbo que llevan mediante la aguja tocada al imán. Para dibujarla trácese primero la estrella cuadrangular *abcd* y luego la *efgh*, haciendo que las dos formen una estrella regular octagonal. Síguese dibujando las demás puntas como se ven en la figura, procurando que las distancias del centro de la estrella á los vértices de dichas puntas sean todos iguales.

5.° *Copiar la estrella de la fig. XLIII.*—En su totalidad forma una estrella regular octagonal, con otras dos concéntricas y cuadrangulares en su interior.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

168. PROBLEMAS.

I. *Dibujar una estrella regular de tres puntas* (fig. 93).

Aplicando la regla explicada en el párrafo 164, después de trazado el triángulo equilátero ABC, tírense los radios rectos y señálese en ellos un punto á arbitrio, haciendo $os = on = or$, y los puntos A*s*, B*r*, C*n*, serán los vértices de la estrella pedida.

II. *Dibujar una estrella regular que tenga cuatro puntas* (fig. 94).

Haciendo uso de la regla anterior, trácese el cuadrado *abcd* y tírense los radios rectos; en seguida tómese $on = or = of = oe$, y las rectas *an*, *nd*, *de*, etcétera, determinarán la estrella.

III. *Trazar una estrella eptagonal regular que no sea por los métodos de extensión ni de reducción* (fig. 95).

Después de trazado el eptágono regular *abcdefg*, tírense los radios rectos y córtense en el punto que se quiera por medio de una circunferencia descrita desde el centro del polígono; desde los puntos donde la circunferencia corta á los radios rectos, tírense rectas á los vértices inmediatos del polígono, y quedará formada la estrella eptagonal regular.

IV. *Construir por el método de reducción una estrella poligonal regular de un número de puntas dadas;* seis, p. ejemp. (fig. 90).

Aplicando la regla dada en el párrafo 163, se trazará primeramente un exágono regular ABCDEF, y luego se unirá el vértice A con el E y el C, el B con D y el F, el C con el E y el D con el F, y quedará formada la estrella.

V. *Delinear por el método de extensión una estrella poligonal regular de seis puntas* (fig. 90).

Haciendo uso de la regla dada (163), después de trazado el oxágono regular *mnorst*, se prolongará cada uno de sus lados en ambos sentidos, haciendo que se encuentren el *tm* con el *on* y el *rs*, el *ts* con el *nm* y el *or*, el *sr* con el *no*, y el *ro* con *mn*, y se obtendrá la estrella A*t*, B*s*, C*r*, D*o*, E*n*, F*m*, que es la pedida.

VI. *Construir por reducción las estrellas poligonales regulares que puedan salir de un decágono regular.*

Dejamos sin resolver este problema, á fin de ver si el alumno se ha enterado de las reglas prescritas y de las propiedades expresadas en el párrafo 165.

ARTÍCULO 7.º

POLÍGONOS SIMÉTRICOS.

169. Qué es eje de simetría de una figura?—170. Qué es polígono simétrico? Cuándo se dice que un polígono es simétrico en uno ó más sentidos?—171. Qué es centro de simetría?—172. Todo eje de simetría, cómo divide á la figura que á él corresponde?—173. Cuáles son los triángulos simétricos y cuáles sus ejes de simetría?—174. El trapezoide,

puede tener algún eje de simetría? Cuáles son los trapecios simétricos? Cuántos ejes de simetría se pueden tirar en el cuadrado y en el cuadrilongo? Cuáles son los ejes de simetría del rombo? Cuáles son los cuadriláteros que tienen centro de simetría?—175. Qué son ejes de simetría en los polígonos regulares?—176. Puede haber polígonos irregulares simétricos?—177. Las estrellas regulares son simétricas? Hay estrellas irregulares simétricas?

169. Se llama EJE DE SIMETRÍA *la recta que divide á una figura en dos partes, tales que, doblándola por dicha recta, se sobreponen la una á la otra, coincidiendo exactamente* (fig. 64, FH, EG; fig. 94, *er*, *nf*).

170. *Todo polígono que tiene ó puede tener uno ó más ejes de simetría*, se llama POLÍGONO SIMÉTRICO (figs. 64, 70, etc.).

Cuando tiene un solo eje de simetría se llama simétrico en *un sentido*, y se dice que es simétrico en dos ó más sentidos cuando tiene dos ó más ejes de simetría.

171. *El punto donde se cruzan perpendicularmente dos ejes de simetría de una figura*, se llama CENTRO DE SIMETRÍA; tal es el punto O (figs. 67 y 69).

PROPIEDADES.

172. Todo eje de simetría divide siempre á la figura á que él corresponde en dos partes exactamente iguales.

Si se unen por medio de una recta dos puntos correspondientes de las dos mitades de un polígono simétrico, dicha recta será perpendicular al eje de simetría.

173. LOS TRIÁNGULOS SIMÉTRICOS son el *isósceles* y el *equilátero*; el primero tiene sólo un eje de simetría, y es la recta que une el punto medio de la base con el vértice del ángulo opuesto; el segundo tiene

tres ejes de simetría, y son las rectas que unen cada vértice con el punto medio de su opuesto.

174. En los CUADRILÁTEROS, el *trapezoide*, según tenga combinados sus lados, puede tener un eje de simetría (fig. 94, *aron* y *brof*).

El *trapecio isósceles* tiene un eje de simetría, y es la recta que une el punto medio de las bases (fig. 58, *nm*); el trapecio escaleno no puede ser simétrico.

El *cuadrado* tiene cuatro ejes de simetría, que son las dos rectas que unen los puntos medios de sus lados opuestos y las dos diagonales; el *cuadrilongo* tiene dos ejes de simetría, que son las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos.

El *rombo* tiene también dos ejes de simetría, que son sus diagonales; este cuadrilátero, el cuadrado y el cuadrilongo tienen centro de simetría; el romboide no puede ser simétrico en ningún sentido.

175. Los POLÍGONOS REGULARES son todos simétricos y tienen tantos ejes de simetría como lados.

Cuando el polígono es de número *impar* de lados, son ejes de simetría las rectas que, saliendo de cada vértice, terminan en el punto medio de los lados opuestos; y en el de número *par*, las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos y las diagonales que pasan por el centro del polígono.

176. Puede también haber *polígonos irregulares* simétricos en número infinito, y cada uno de ellos puede serlo en uno ó más sentidos. Las figs. 67, 92, 96 y otras que pudiéramos mencionar, son polígonos irregulares simétricos.

177. Las *estrellas poligonales regulares* son también simétricas y tienen los mismos ejes de simetría que los polígonos regulares, de los cuales se derivan.

También puede haber *estrellas irregulares* simétricas en número infinito: las estrellas de las figs. 91 y 92 son unas de tantas.

APLICACIÓN DE LAS FIGURAS SIMÉTRICAS Á LAS ARTES INDUSTRIALES.

178. Son tantas y tan repetidas las aplicaciones de las figuras simétricas á las artes, que sería nunca acabar si se hubiesen de enumerar una por una; pues la mayor parte de los dibujos que presentan los trabajos y labores del platero, hojalatero, ebanista, tornero, alfarero, bordador, carpintero, sillero, mosaiquista, cerrajero, vidriero, tejedor de velos, latonero, sombrerero, sastre, cestero, guarnicionero, etc., etc., nos ofrecen ejemplos de figuras simétricas en uno ó más sentidos.

EJERCICIOS EN EL ENCERADO.

179. A pesar de lo muy interesante que es el dibujo de las figuras simétricas, dejamos de continuar ejemplos de ellas, por ser muchas las que se han copiado ya en las láminas que nos han ocupado hasta ahora.

No obstante, creemos que no será por demás el que los alumnos dibujen á ojo y á pulso los mismos ejercicios que con instrumentos siguen.

EJERCICIOS GRAFICOS.

180. PROBLEMAS.

I. *Figurar de magnitud arbitraria los triángulos simétricos y en cada uno de ellos sus ejes de simetría.* Para la resolución de este problema véase lo expuesto en el párrafo 173.

II. *Delinear los cuadriláteros simétricos* (174) *trazando los ejes de simetría en cada uno de ellos.* En el trapezoide simétrico se delineará uno que tenga salientes todos sus ángulos, y luego otro que tenga un ángulo entrante.

III. *Construir un polígono regular de número impar de lados y otro de número par, trazando sus ejes de simetría* (175).

IV. *Construir un polígono irregular simétrico en dos sentidos y de un número arbitrario de lados, por ejemp.* 12 (fig. 96).

Trácense los dos ejes de simetría AA′, BB′, de modo que se crucen perpendicularmente; por los puntos *n*, *m*, tomados á arbitrio sobre el eje AA′ y á un mismo lado del punto O, centro de simetría, tírense las *cc′*, *pp′*, paralelas á BB′; tómese ahora $nc = nc'$, $mp = mp'$, y los puntos A, *p* y *p′*, *c* y *c′*, serán otros tantos vértices de la mitad del polígono pedido. Ejecútese la misma operación por el otro lado del eje BB′, y los puntos *rr′*, *ss′* y A′ serán los vértices que acabarán de completar la figura.

Observ. Como son infinitas las formas que se pueden dar á un polígono irregular simétrico en dos sentidos, podrán los alumnos trazar otro de distinta forma y de un número arbitrario de lados.

ARTÍCULO 8.°

LÍNEAS PROPORCIONALES.

181. Qué son líneas proporcionales?—182. Cuándo cuatro líneas forman una proporción?—183. Qué se entiende por cuarta proporcional geométrica? Qué por tercera proporcional? Cuándo una recta es media proporcional?—184. Cuándo se dice que una recta está dividida en media y extrema razón?—185. Cuándo dos rectas se cortan en partes inversa y recíprocamente proporcionales?—186. Si en un lado de un ángulo se toma un número de partes iguales ó desiguales, y por los puntos de división se tiran paralelas que encuentren al otro lado, qué se verifica? Si por un punto del lado de un triángulo, se tira una paralela á la base, qué sucede? Las líneas proporcionales, para qué sirven?

181. Se llaman LÍNEAS PROPORCIONALES *aquellas cuyas longitudes, comparadas entre sí, pueden formar una proporción* (S).

(S) En el cálculo se llama *razón* la comparación de dos cantidades; la cantidad que se compara se llama *antecedente*; aquélla con que se compara *consecuente;* los dos juntos se llaman *términos de la razón.*

La razón se divide en aritmética y geometría; *razón geométrica* es

182. *Cuatro líneas forman proporción, siempre que la razón de la primera á la segunda sea la misma que la de la tercera á la cuarta*. Así, las rectas A, B, C, D (fig. 97), son proporcionales, porque la misma proporción que hay entre las rectas A y B existe entre la C y D; es decir, que B es una tercera parte mayor que A, así como D es una tercera parte mayor que C, como se puede ver por las divisiones que en sí tienen: luego forman una proporción que se puede expresar de este modo: A : B :: C : D.

Si se da á las líneas los valores que indican sus divisiones, se tiene con toda exactitud 2 : 3 :: 4 : 6, ó lo que es lo mismo, 2 : 4 :: 3 : 6.

183. En la práctica se da el nombre de CUARTA PROPORCIONAL GEOMÉTRICA *á la recta que ha de formar proporción con otras tres dadas*.

TERCERA PROPORCIONAL, *á la que, ocupando un solo término, ha de formar proporción con dos líneas que ocuparán los otros restantes*.

MEDIA PROPORCIONAL, *á la que, guardando proporción con dos líneas dadas, forma los medios ó extremos de aquélla*.

---

la relación que hay entre dos números que se dividen, y se escribe separando los términos con dos puntos; v. gr. 12 : 4, que se lee 12 es á 4

Se llama *proporción*, á la igualdad de dos razones de una misma especie; así, *proporción geométrica* es la igualdad de dos razones geométricas. La proporción geométrica se escribe interponiendo cuatro puntos entre las dos razones, p. ejemp.

5 : 3 : : 10 : 6,

que se lee diciendo: 5 *es á* 3, *como* 10 *es á* 6.

Los nombres que se dan á los términos de una proporción son *extremos* y *medios*; el primero y el último son extremos; el segundo y tercero son medios. Cuando los medios de una proporción son diferentes, como en la anterior, la proporción se llama *discreta*, y cuando son iguales se llama *continua*; tal es la proporción 2 : 4 : : 4 : 8.

La propriedad fundamental de toda proporción geométrica, ó sea la relación que tienen los extremos con los medios, es que *el producto de los extremos es igual al producto de los medios*.

184. Se dice que una recta está dividida en MEDIA Y EXTREMA RAZÓN, *cuando está cortada en dos partes tales que el segmento mayor es media proporcional entre la línea entera y el segmento menor.*

185. Dos rectas se cortan en partes INVERSA Ó RECÍPROCAMENTE PROPORCIONALES, *cuando los segmentos de la una, ó bien ella entera y una parte, forman los extremos ó medios de una proporción, y los segmentos de la otra, ó bien ella entera y una parte suya, forman los medios ó extremos de la misma.* Así, dos rectas de 11 metros la una y 9 la otra, cortadas de modo que los segmentos de la primera valgan 2 y 9 metros y los de la segunda 6 y 3 metros, se cortan en partes recíprocamente proporcionales; pues se tiene 2 : 6 :: 3 : 9.

PROPIEDADES.

186. 1.ª Si en un lado de ángulo cualquiera se toma un número de partes iguales, y por los puntos de división se tiran rectas paralelas entre sí y que encuentren al otro lado, se verifica: *que las partes de este último lado son proporcionales á las del primero.*

Es decir, que si en el ángulo XAZ (fig. 89) es uno de sus lados AX, se toma la parte AB, BC, CD, y por los puntos de división se tiran las BE, CF, DG, paralelas entre sí, se verifica: que AB : BC : CD :: AE : EF : FG, ó bien AB : AE :: AC : AF, ó bien AB : AE :: BC : EF :: CD : FG.

2.ª Si por un punto del lado de un triángulo se tira una paralela á su base, *los lados de dicho triángulo quedan divididos en partes proporcionales, verificándose además que la paralela á la base es proporcional con la misma base*; de manera que se tiene AB : AD :: BE : DG :: AE : AG.

3.ª Las líneas proporcionales sirven *para hallar la longitud de una recta no conocida por el conocimiento que tenemos de las otras que forman la proporción*. Así es que por medios geométricos se pueden hallar cuartas, terceras y medias proporcionales con tanta y tal vez más exactitud que por aritmética ó álgebra.

APLICACIÓN DE LAS LÍNEAS PROPORCIONALES.

187. Dichas líneas tienen una grande aplicación en la geometría, astronomía, arquitectura, maquinaria, pintura, etc.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

188. PROBLEMAS.

I. *Hallar una cuarta proporcional geométrica á tres rectas dadas* r, r′, r″ (fig. 99).

Fórmese un ángulo arbitrario VAZ, y á partir del vértice A tómese en uno de sus lados una parte AB $=r$, y en el otro una parte AC$=r'$; únase el punto B con el C, y en el primer lado tómese AD$=r''$; por D tírese la DE paralela con BC, y AE será la cuarta proporcional que se busca. Porque AB : AC :: AD : AE, ó bien $r : r' :: r''$: AE.

II. *A dos rectas dadas* r, r′, *hallarles una tercera proporcional geométrica* (fig. 100).

Fórmese un ángulo cualquiera, y en uno de sus lados tómese una parte FG$=r$; póngase ahora, en el otro lado una distancia FH$=r'$, y tírese la recta GH; tómese en el primer lado FP$=r'$, y por el punto P tírese la PL paralela con GH; la FL es la tercera proporcional pedida. De modo que FG : FH :: FP : FL, y como FH$=$FP$=r'$, tendremos $r : r' :: r'$: FL.

III. *Hallar una media proporcional geométrica entre las dos rectas* r, r′ (fig. 101).

Tírese una línea indefinida y tómese una parte AB

$=r$, y á continuación otra $BC=r'$; sobre la suma AC de las dos, como diámetro, descríbase una semicircunferencia ADC, y por el punto de unión B levántese la perpendicular BD, que termine en la circunferencia, y se tendrá en ella la media proporcional; será pues $AB : BD :: BD : BC$, ó bien $r : BD :: BD : r'$ (T).

IV. *Canocida una línea* AB, *dividirla en dos partes que guarden entre sí una razón dada; la de 3 á 5, por ejemplo* (fig. 102).

Tírense en los extremos de dicha línea, por medio de dos ángulos iguales, las rectas MO, NP; desde M hacia O pónganse tres distancias iguales de una medida arbitraria, y desde N hacia P cinco distancias de la misma medida; desde el punto 3 de MO al punto 5 de NP, tírese una recta, y dividirá la línea dada en U, de modo que $MU : UN :: 3 : 5$; esto es, MU tendrá tres partes de las cinco en que se divida á la UN.

V. *Dividir en media extrema y razón una recta propuesta* AB (fig. 103).

En uno de sus extremos levántese una perpendicular BD igual á la mitad de la línea dada, y únanse los puntos A y D por medio de una recta; del punto D como á centro, y con un radio DB, descríbase una circunferencia que cortará en E á la recta AD; por último, llévese AE de A en C, y este punto C es el que divide á la línea AB en media y extrema razón; será pues, $AB : AC :: AC : CB$, ó bien $CB : AC :: AC : AB$.

VI. *Conocidas tres ó más rectas de desigual longitud*, r, r', r'', *dividirlas en un mismo número de partes iguales, p. ejemp., en cinco, con una sola operación* (fig. 104).

Sobre una línea indefinida AB, y á partir de A, pón-

(T) La solución de este problemas y la del V se funda en lo que se demuestra al tratar de las líneas proporcionales consideradas con relación al círculo; la demostración del primero está en el párrafo 238, y la del último en el 240.

ganse cinco distancias de una magnitud arbitraria, pero iguales entre sí; tomando como á lado la línea AB que resulta, trácese un triángulo equilátero ABC, y del vértice C tírense rectas á los puntos de división de dicha línea AB; ahora hágase CD=CE=r, CF=CG=r', CH=CI=r'', y tirando las rectas DE, FG, HI, resultarán iguales á las propuestas, quedando al propio tiempo divididas en cinco partes iguales.

VII. *Por un punto dado en el interior de dos rectas convergentes que no pueden prolongarse, hacer pasar otra recta que concurra en el mismo punto de intersección que concurririan las dos primeras.*

Sean *ab*, *cd* (fig. 105), las rectas propuestas y *e* el punto dado. Por este punto tírense las rectas *ea* y *ec*, que formen un ángulo arbitrario, y únanse los puntos *a* y *c* por medio de una recta *ac*; en otro punto cualquiera de las líneas dadas, p. ejemp. *b*, trácese una recta *bd* paralela con *ac*, y por sus extremos tírense las líneas *bf*, *df*, respectivamente paralelas con *ae* y *ec*; por el punto de intersección *f* y el punto dado *e* tírese la recta *ef*, que es la pedida.

VIII. *Por un punto* E *dado en la parte exterior de dos rectas convergentes* AB. CD, *que no pueden prolongarse, hacer pasar otra recta que concurra en el mismo punto de intersección que las dos propuestas* (fig. 105).

Tírense las rectas AC, BD, paralelas entre sí; únase el punto E con el A por medio de una recta, y por B tírese la BF paralela con AE; ahora hágase BF igual en longitud en una cuarta proporcional á las tres rectas AC, BD, AE, y la recta que desde E se haga pasar por F será la pedida.

ARTÍCULO 9.º

Polígonos semejantes.

REDUCCIÓN DE FIGURAS.

189. Qué son polígonos semejantes? Qué son polígonos desemejantes?—190. Qué son vértices homólogos en los polígonos semejantes? Qué se entiende por lados y diagonales homólogas?—191. Con las líneas homólogas, se puede formar siempre una serie de razones iguales? Qué relación hay entre los perímetros de dos polígonos semejantes?—192. Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á uno de los otros dos lados, qué sucede? Cuándo dos triángulos son semejantes?—193. Bastando la igualdad de los ángulos ó la proporcionalidad de los lados para constituir la semejanza de los triángulos, sucede lo mismo en los demás polígonos?—194. Respecto á la semejanza de los polígonos en general, qué se debe saber?

189. Se llaman POLÍGONOS SEMEJANTES *aquellos que tienen respectivamente iguales sus ángulos y proporcionales sus lados*, y DESEMEJANTES *aquellos á que falta alguna de estas dos circunstancias*. Así, el polígono ABCDE (fig. 107) es semejante con el *abcde* por tener el ángulo $A = a$, $B = b$, $C = c$... etc., y el lado AB proporcional con el *ab*, el BC con *bc*, y así sucesivamente.

190. En los polígonos semejantes se llaman VÉRTICES HOMÓLOGOS *á los vértices de los ángulos iguales formados por lados proporcionales*; así, A es homólogo á *a*, B á *b*, etc.

LADOS Y DIAGONALES HOMÓLOGAS *son los lados y diagonales que unen dos vértices homólogos*; así, los lados AB y *ab* son homólogos; lo mismo podríamos decir de BC y *bc*, de AD y *ad*, etc.

191. Como las líneas homólogas han de ser precisamente proporcionales entre sí, resulta que se puede formar con ellas una serie de razones iguales, con tal que los *antecedentes* de éstas sean siempre las

líneas homólogas de un polígono ó puedan serlo por simple alternación, y los *consecuentes* las homólogas correspondientes del otro polígono. Así, se pondrá con propiedad AB : BC : CD : DE :: *ab* : *bc* : *cd* : *de*, ó bien AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd*, etc.

De lo dicho se deduce que AB + BC + CD + DE : *ab* + *bc* + *cd* + *de* :: AB : *ab* :: AC : *ac*; lo que nos dice: *que el perímetro del primer polígono es al perímetro del polígono semejante, como un lado ó diagonal del primero es á un lado ó diagonal homóloga del segundo.*

PROPIEDADES.

192. *Respecto á los triángulos, debe saberse:*

Que si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á uno de los otros lados, se originará un triángulo semejante al primero (186, 2.º).

Con esto probaremos que dos triángulos son semejantes: 1.º, cuando tienen sus tres ángulos respectivamente iguales; 2.º, cuando tienen sus tres lados respectivamente proporcionales, 3.º, cuando tienen un ángulo igual formado por dos lados proporcionales; 4.º, cuando tienen respectivamente iguales dos de sus ángulos; 5.º, cuando tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares.

193. En los triángulos hemos observado que la igualdad de ángulos ó la proporcionalidad de lados bastan para constituir semejanza; pero no sucede así en los demás polígonos, pues pueden los ángulos de uno ser iguales á los de otro, sin que los lados del primero sean proporcionales á los del segundo, como lo demuestran el cuadrado y el cuadrilongo, y pueden también ser proporcionales los lados de dos polígonos, sin que sean iguales los ángulos, como lo prueban el cuadrado y el rombo.

194. *Propiedades pertenecientes á los polígonos semejantes en general.*

1.ª Todos los polígonos regulares de un mismo número de lados y de diferente magnitud, son semejantes.

2.ª Las diagonales homólogas de los polígonos semejantes, los dividen en igual número de triángulos, ú otra clase de figuras, respectivamente semejantes.

3.ª *De lo dicho se sigue*: que los polígonos que se compongan de un mismo número de triángulos semejantes, y del mismo modo colocados en cada uno, serán semejantes.

4.ª Que dos polígonos semejantes á un tercero son semejantes entre sí.

APLICACIONES DE LAS FIGURAS SEMEJANTES.

Como no es posible formar en el papel una figura igual á una máquina, á un edificio, á una huerta, etc., para enterarse de sus dimensiones, se ha acudido al artificio de imitar en pequeño las figuras cuyas dimensiones se quieren expresar. Siendo la figura pequeña semejante á la propuesta, se da idea cabal de los ángulos y dimensiones de la primera, en virtud de las condiciones en que estriba la semejanza de las figuras.

El levantamiento de planos topográficos y geográficos está fundado en la teoría de los polígonos semejantes. Así, el agrimensor que levanta el plano de una pieza de tierra no hace más que dibujar sobre un papel una figura semejante á la del terreno.

Los diseños de edificios, máquinas, muebles, retratos y otros objetos que se dibujan de diferente magnitud que el original, no son otra cosa que figuras semejantes á los objetos naturales ó artificiales que aquéllos representan.

EJERCICIOS EN EL ENCERADO.

195. Toda la dificultad del dibujo de las figuras semejantes consiste en saber reducir ó alargar proporcionalmente las líneas homólogas de la figura y en trazar los ángulos homólogos respectivamente iguales. Así, el dibujante que sepa reducir ó prolongar proporcionalmente una línea á su voluntad, no encontrará mayor dificultad en reducir ó aumentar un polígono que en copiarlo exactamente igual.

1.° *Dibujar dos triángulos semejantes.*—Trácese un triángulo cualquiera; luego dibújese otro que tenga sus tres ángulos respectivamente iguales á los del primero y que los lados sean de diferente magnitud.

2.° El mismo ejercicio, reduciendo los lados homólogos á la mitad de los del triángulo propuesto.

3.° Otro ejercicio análogo reduciendo los lados á una tercera parte.

4.° Aumentar los lados de la copia una cuarta parte de los del modelo.

5.° Aumentándolos de la mitad.

Para la comprobación de los lados podrán servirse del metro dividido en décimos y centésimos; para la de los ángulos, del transportador.

6.° Copiar un polígono propuesto, por ejemplo el ABCDE (fig. 107), primero reduciendo sus lados á la mitad; segundo, aumentándolos de una tercera parte (U).

Para su trazado téngase presente lo dicho en el párrafo 194, 2.ª y 3.ª

EJERCICIOS GRÁFICOS.

196. PROBLEMAS.

I. *Sobre una recta* ab, *propuesta como á lado homólogo de* AB, *construir un triángulo semejante al* ABC (fig. 106).

En los extremos *a* y *b* de la recta propuesta fórmense ángulos respectivamente iguales á los A y B, y el triángulo resultante será el pedido (192, 4.ª).

II. *Sobre* ab, *como lado homólogo á* AB (fig. 107), *construir un polígono semejante al* ABCDE.

Primer modo. Tírese una recta indefinida FG, y del extremo G, con un radio igual á AB, *lado homólogo del polígono propuesto*, trácese el arco FH, y con un radio igual á *ab*, *recta dada para formar el polígono*, córtese dicho arco en H; tírese la recta GH, y el ángulo FGH, llamado *ángulo de reducción*, servirá para determinar las longitudes proporcionales en la relación de AB : *ab*, de la manera siguiente:

Desde G, con los radios AC, BC, trácense los arcos

(U) Si el profesor lo cree conveniente, puede hacerles copiar del Atlas las figuras que le parezcan más á propósito, haciendo que las reduzcan ó aumenten bajo una razón dada.

c', *c'*, *c''*, *c''*, y con las cuerdas de estos arcos descríbanse desde *a* y *b* otros dos arcos, que se cruzarán en *c*, y el lado *bc* será homólogo de BC; para determinar el lado *cd*, homólogo de CD, trácense desde G los arcos *d'*, *d'*, *d''*, *d''*, cuyos radios sean respectivamente iguales á AD, BD, y con sus cuerdas descríbanse desde *a* y *b* otros dos arcos, que se cortarán en *d*; así continuando, se determinará el otro vértice *e*, y el polígono *abcde* será semejante con el ABCDE.

Observ. Si el polígono que se ha de construir ha de ser mayor que el propuesto, entonces el *ángulo de reducción* se construye como se verá en el siguiente problema (V).

III. *Sobre la recta* AB, *como lado homólogo de* ab (fig. 107), *construir un polígono semejante con el* abcde.

Tírese una recta indefinida OP, y del extremo O, con un radio igual á *ab*, *lado homólogo del polígono propuesto*, descríbase el arco ZX; del punto Z, y con un radio igual á AB, *recta dada para formar el polígono*, córtese dicho arco en X, tírese la línea OX y el ángulo POX servirá para encontrar las longitudes proporcionales en la relación de *ab* : AB.

Ahora, desde O, con los radios *ac*, *bc*, trácense los arcos *n'*, *n'*, *n''*, *n''*, y con las cuerdas de estos arcos descríbanse desde A y B otros dos arcos, que se cortarán en C, y el lado BC será homólogo de *bc*; continúese haciendo lo mismo con los demás vértices, y se obtendrá el polígono ABCDE, como se pedía.

Segundo modo. Sea el polígono dado ABCDE (figura 118), *y que sobre* ab, *como á lado homólogo de* AB, *se ha de construir un polígono semejante.*

(V) Obsérvese que el arco que sirve de medida para construir el ángulo de reducción, tiene siempre por *radio* el lado homólogo del polígono propuesto, y por *cuerda* la recta sobre la cual se ha de formar el polígono semejante.

Se toma á arbitrio un punto O que esté hacia el centro del polígono, y se tiran desde dicho punto rectas á cada uno de los vértices A, B, C, D, E. Se señala ahora sobre el papel un punto *o*, destinado á ser el homólogo de O, y se forman en dicho punto los ángulos *aob*, *boc*, *cod* y *doe*, respectivamente iguales á AOB, BOC, COD y DOE.

En seguida se forma el ángulo de reducción FGH (fig. 107), y con una abertura de compás igual á OA, p. ejemp., se traza desde el vértice G un arco de círculo, y la cuerda de dicho arco dará la longitud *oa*. Determinando del mismo modo las longitudes *ob*, *oc*, *od*, *oe*, se unirán con rectas los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, y resultará un polígono semejante con el ABCDE reducido á la proporción de AB : *ab*.

Observ. Los procedimientos indicados en los tres problemas anteriores son aplicables á toda clase de figuras, por irregulares que sean, y lo mismo sirven para reducir que para construir de menor á mayor; sin embargo, advertiremos que cuando las líneas homólogas de la figura grande llegan á ser dobles de las de la pequeña, no se puede construir el ángulo de reducción, por lo que es menester echar mano de otro procedimiento que es el que vamos á explicar en el problema siguiente.

Tercer modo. Sobre una recta ab, *como homóloga de* AB, *construir un polígono semejante con el* ABCDE (fig. 107).

Divídase el polígono en triángulos por medio de las diagonales AC, AD; sobre el lado AB tómese una distancia A*b'*, igual á *ab*, y por el punto *b'* tírese la *b'*, *c'*, paralela con BC; por *c'* tírese la *c'd'*, paralela con CE, y por *d'* la *d'e'*, paralela con DE. Constrúyase ahora sobre *ab* un polígono igual con el A*b'c'd'e'*, el cual será semejante con el propuesto.

Observ. Si el polígono que se ha de construir hubiese de ser más grande que el propuesto, se prolongarían las diagonales de éste lo conveniente para poder tirar los lados homólogos paralelos de la nueva figura por la parte exterior.

IV. *Dados varios polígonos semejantes, por ejemplo tres, que llamaremos A, B, C, construir otro cuyo perímetro sea igual á la suma del de los propuestos.*

Sean *a*, *b*, *c*, lados homólogos de los polígonos propuestos A, B, C; súmense dichos lados, y tomando la suma como á lado homólogo, se construye un polígono semejante á uno de los lados, y su perímetro equivaldrá á la suma de los perímetros de los polígonos A, B, C (191 y 194, 4.ª).

V. *Conocidos dos polígonos semejantes, hallar otro semejante á ellos y que su perímetro sea igual á la diferencia del de los propuestos.*

Búsquese la diferencia entre dos lados homólogos de los polígonos, y tomando la línea que resulte por lado homólogo, se construirá un polígono semejante á uno de los propuestos, el cual tendrá su perímetro igual á la diferencia del de los dos conocidos (191).

VI. *Delinear dos polígonos semejantes cuyos perímetros guarden entre sí una razón dada, la de 4 : 7 por ejemplo.*

Hágase que las dos rectas homólogas que han de servir de base para la construcción de los polígonos guarden dicha proporción, y los polígonos que resultarán tendrán los perímetros en la relación pedida (191).

ARTÍCULO 10.

DEL PANTÓMETRA, CONSIDERADO COMO UN ÁNGULO DE REDUCCIÓN; DEL COMPÁS DE PROPORCIÓN, DE LAS ESCALAS Y DE LA CUADRÍCULA.

197. Qué instrumento es el que se conoce con el nombre de pantómetra? Como se sirven de dicho instrumento?—198. Podrá servir para construir figuras semejantes en una razón cualquiera?—199. Qué es compás de proporción?—200. Cómo se usa dicho compás?—201. A qué se llama escala de proporción? En qué se funda su construc-

cion?—202. Para qué sirven dichas escalas?—203. Cómo se cuentan las distancias en la escala llamada de mil partes?—204. En la formación de las escalas se suele establecer alguna relación entre sus magnitudes lineales y las verdaderas?—205. A qué se llama cuadrícula?—206. Cuando se quiere dibujar por medio de la cuadrícula una figura igual ó semejante á otra, qué se debe hacer?—207. Qué hay que advertir respecto á la cuadrícula?

197. Se llama PANTÓMETRA, y también COMPÁS DE REDUCCIÓN, un instrumento compuesto de dos reglas de metal ajustadas y unidas por un extremo, de modo que puedan abrirse y cerrarse, por medio de una charnela, como un compás (fig. 110). Cada una de estas reglas tiene una recta que, partiendo del centro común A, forma una especie de ángulo de reducción; dichas reclas están divididas en un mismo número de partes iguales, indicando los guarismos sobre cada línea el orden de las divisiones.

Cuando se quiere reducir líneas en una relación dada, p. ejemp., la de M á m, se toma con un compás ordinario una distancia igual á uno de los lados de A á B; después se toma una abertura de compás igual á la otra recta m, y poniendo una punta en B, se va abriendo el pantómetra hasta que la otra punta del compás caiga exactamente, en la otra regla, sobre el punto de la línea que lleva el mismo número que el punto B, que en nuestro caso será el C; de este modo se tiene el instrumento preparado para tomar en él cualquiera recta reducida Así, si se toma una distancia y se coloca de A á b, y después se cierra el compás para que ambas puntas caigan exactamente, en cada una de las reglas, en partes que tengan igual número, esta distancia será la longitud buscada; de manera que se tendrá AB : BC :: Ab : bc, ó bien, M : m :: Ab : bc.

198. Es fácil de observar que como este procedimiento está fundado, lo mismo que el del ángulo de reducción, en la semejanza de triángulos, siempre que

se quiera aumentar una línea que llegue á ser doble de la homóloga, no podrá servir este instrumento, por lo que daremos á conocer el compás de proporción, el cual puede servir en todos casos.

199. El COMPÁS DE PROPORCIÓN es muy cómodo cuando se quiere sacar una copia mayor ó menor que el modelo, con tal que la relación en que han de entrar las dos figuras quepa en las dimensiones con que está construído el instrumento. Se compone éste de dos piernas A*a*, B*b* (fig. 111), iguales en longitud y pudiendo formar un ángulo más ó menos abierto, alrededor de su punto de intersección C, á favor de un tornillo de presión que hay en dicho punto; con la ayuda de divisiones trazadas sobre las dos piernas y de muescas practicadas en el espesor de cada una de ellas, se puede colocar el punto C de intersección, de modo que establezca entre AC y C*a* la relación que debe existir entre las líneas homólogas de la figura grande y las de la pequeña; en este caso, la distancia AB de dos puntos A y B es á la distancia *ab*, de dos otros puntos, en la razón de la línea AC á la línea C*a*. De modo que tendríamos AC : C*a* :: AB : *ba*, ó bien *a*C : AC :: *ab* : AB.

De aquí deduciremos que para reducir una línea se fija sobre sus extremos los puntos A y B, y se obtiene la línea reducida por la distancia *ab*.

Al contrario, cuando se quiere aumentar una figura, entonces se miden las líneas con los dos puntos *a* y *b*, y la separación AB nos da á conocer la línea aumentada.

200. Cuando la posición del punto C, que conviene á la relación que se quiere establecer entre las dos líneas, se ha encontrado por medio de las divisiones de las piernas ó por un tanteo necesario algunas veces, se hace esta posición del punto C invariable por medio de un tornillo de presión fácil de mover,

y que deja abrir y cerrar el compás lo conveniente para tomar las medidas.

201. También son de grande auxilio para trazar figuras semejantes las escalas de proporción.

Se llama ESCALA DE PROPORCIÓN *una línea dividida en partes iguales, representando cada una de estas partes la longitud que se le quiere atribuir* (fig. 8).

Su construcción se funda en la proporcionalidad de las líneas; de modo que la figura que representa un objeto, ha de estar en relación con la escala, como lo estaría el objeto mismo con la medida real.

202. Las divisiones de una escala sirven para construir figuras semejantes á otras de las cuales conocemos sus dimensiones; pero que no se pueden representar en sus magnitudes reales á causa de que no cabrían en el papel.

Así, el arquitecto que quiera dibujar un edificio del cual él conoce sus dimensiones, p. ejemp., en metros, toma para representar el metro una línea de corta magnitud, á fin de que el edificio que quiere representar quepa sobre el papel que se ha propuesto, y esta línea la divide del mismo modo que se divide el metro. Después no hace más que dar á las líneas de su dibujo las dimensiones que él conoce, tomándolas sobre la escala que ha formado.

Muchas veces se hace también uso de las escalas para dibujar los *detalles* en una magnitud más grande de la que ellos son, á fin de poder observar mejor sus partes. Así, el maquinista, el relojero, etc., que quiere combinar ruedas muy pequeñas, tomará para representar las dimensiones de sus ruedas, piñones, etcétera, líneas más grandes que las reales, obteniendo de este modo figuras semejantes de una mayor magnitud, que podrán facilitarle sus combinaciones y simplificar su trabajo.

La escala primera de la fig. 8 representa una longitud de 50 metros, ó bien de 5 decámetros, en el que solamente el primero está dividido de metro en metro.

La segunda representa una escala de cien metros ó de un hectómetro dividido en decámetros, semidecámetros y metros.

También podría la primera de las arriba citadas representar una escala de cinco metros, estando dividido el primer metro en decímetros, y la segunda podría representar una longitud de un metro dividido en decímetros y centímetros.

203. La fig. 109 representa la escala llamada de *mil partes*; para servirse de esta escala es menester observar que las *centenas* se cuentan desde la vertical *cero* á la derecha, las *decenas* desde dicha vertical á la izquierda y las *unidades* en el punto que indican los números desde 1 hacia abajo.

Así, entre las dos estrellas de la parte superior hay 280 partes; la distancia marcada por las dos estrellas de la horizontal 2, es de 342 partes, y la señalada por las de la horizontal 6, es de 116 partes.

204. Aunque estas partes pueden representar metros, pies, palmos ú otra cualquier medida de longitud, sin embargo, en la construcción de las escalas suele establecerse una relación conocida entre las longitudes representadas en ella y las longitudes reales. Así, si la segunda escala de la fig. 8 representa una longitud de cien metros, sus magnitudes lineales estarán reducidas á una milésima parte, porque un centímetro representa en dicha escala 10 metros. En este caso se dice que la escala está en relación de uno por mil.

205. También se pueden hacer con mucha facilidad figuras iguales ó semejantes por medio de la cuadrícula. Se da el nombre de CUADRÍCULA *á un conjunto de cuadrados, más ó menos grandes* (fig. 112), *que sirve para copiar con suma facilidad, y de igual,*

mayor ó menor magnitud, el dibujo de una máquina, de un edificio, de un terreno, de un cuadro, etc.

206. Cuando se quiere construir por medio de la cuadrícula una figura *igual á otra propuesta*, por ejemp., á la del rectángulo ABCD, se divide el original en cuadrados pequeños y luego, para hacer la copia, se traza otra cuadrícula *abcd* igual á la primera; después se señalan en los puntos de los cuadrados correspondientes á los de la figura propuesta las líneas que forman el dibujo, el cual es fácil concluir después.

Cuando por medio de la cuadrícula se quiere dibujar una figura *semejante á otra*, se ha de procurar que los lados de los cuadrados que forman las dos cuadrículas tengan la misma relación que ha de haber entre los dos dibujos.

207. *Respecto á la cuadrícula advertiremos tres cosas*:

1.ª Que cuanto más pequeños sean los cuadrados, es tanto más fácil la operación y el dibujo sale más exacto.

2.ª Que cuando en un dibujo hay muchos detalles y quieran sacarse con toda exactitud, pueden dividirse los cuadrados que fuere menester en triángulos por medio de diagonales.

3.ª Que para no echar á perder el dibujo original, se puede hacer la cuadrícula con hebras de seda ó hilo puestas bien tirantes y fijadas sobre una tabla por medio de puntas ó cera. También se puede trazar la cuadrícula sobre un papel trasparente, llamado *papel vegetal de calcar*, y aplicarlo después sobre el modelo.

DIBUJOS DEL ÁTLAS.

1.° Copiar el paisaje de la figura XLIV, por medio de la cuadrícula.

2.° Copiar el mismo paisaje anterior con una cuadrícula mayor que la del modelo.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

208. PROBLEMAS.

I. *Construir la escala de mil partes* (fig. 109).

Tírense 11 horizontales que dejen las diez distancias 1, 2, 3... 10, bien iguales entre sí, aunque de una longitud arbitraria. Divídase la horizontal superior en partes iguales que representen 100 metros cada una, y por los puntos de división tírense las perpendiculares 100, 200, 300.... 1000. Divídase luego el primer hectómetro de la horizontal superior é inferior en diez partes iguales, que representarán 10 metros cada una, y se tirará una recta oblicua que una el 9.° punto de la división superior con el 10.° de la inferior; otra que una el 8.° superior con el 9.° inferior, y así siguiendo hasta que se una el *cero* superior con el 1.° inferior, con lo cual quedará construída la escala.

Observ. Si se quisiera dar á la escala una relación con la medida real, consúltese lo dicho en los párrafos 203 y 204.

En el párrafo 61 se explicó el modo de delinear un decímetro dividido en centímetros y milímetros, y por lo dicho en el 202 se puede deducir el modo de dibujar otras escalas que tengan una razón dada.

II. *Delinear dos escalas equivalentes, la una en pies y la otra en metros.*

Se toma una distancia arbitraria que represente 1 pie, y se forma una escala; se divide uno de dichos pies en 12 partes iguales que representen pulgadas, y si la escala es de una magnitud que permita dividir á una pulgada en otras 12 partes, entoncés se tendrán líneas; se toma en seguida una distancia igual á 3 *pies*, 7 *pulg.*, 805 *milésimas lín.* (58, *tabla comparativa*) y dicha distancia representará un metro y será la unidad de una escala equivalente á la otra de pies.

Observ. Como 805 milésimas de línea es aproximadamente igual á 8 décimas de línea, podrá tomarse, poco más ó menos, esta última magnitud, siempre que las escalas no permitan, por ser muy diminutas, hacerlo con la exactitud debida.

CAPÍTULO III.

DE LAS FIGURAS CURVILÍNEAS Y MIXTILÍNEAS.

209. Cuál es la curva que considera la geometría elemental? Además de la circunferencia, no hay otras curvas que por sus muchas aplicaciones interesan á las artes?—210. Cuándo una curva es simétrica?

209. La geometría elemental sólo considera una curva, y es la *circunferencia de círculo*; nosotros, á más de ésta, consideraremos el *óvalo*, la *elipse*, la *espiral*, la *evoluta* y algunas otras, por el mucho interés y aplicación que ofrecen á la industria y á las artes.

210. Una curva es SIMÉTRICA *cuando tiene uno ó más ejes de simetría*; tal es la circunferencia y algunas otras que iremos dando á conocer. En el círculo son ejes de simetría todos los diámetros.

ARTÍCULO 1.º

RECTAS EN EL CÍRCULO.

211. Cuándo una curva circular es indeterminada? Qué se sigue de esto?—212. Cuándo es determinada?—213. Qué es sector de círculo? Cuando los radios que forman el sector son perpendiculares, qué nombre toma?—214. Qué es segmento del círculo? Cuando la cuerda pasa por el centro del círculo, qué nombre toma el segmento?—215. A qué se llama sajita?—216. Qué es secante de un círculo?—217. Qué es tangente del círculo. Qué se entiende por punto de tangencia ó de contacto?—218. En cuántos puntos se puede cortar una recta y una circunferencia? A una perpendicular elevada enmedio de una cuerda, qué le sucede? Dos perpendiculares elevadas enmedio de dos cuerdas, dónde tienen su intersección?—219. Qué hay que saber respecto á las tangentes?—220. Dos arcos interceptados entre paralelas, son iguales?

211. Se dice que una curva circular es INDETERMINADA *cuando no se conoce más que uno ó dos puntos por donde ha de pasar;* porque es evidente que por dos puntos pueden pasar muchas líneas curvas, como lo demuestran las que pasan por los puntos D y B (figura 113).

De esto se sigue: *que el arco determina la cuerda, pero la cuerda no determina el arco*; porque una misma cuerda puede corresponder á diversos arcos tirados desde centros diferentes con distintos radios, como lo demuestra la cuerda BA, la cual corresponde á los arcos D*n*B, D*c*B y D*a*B.

212. Se dice que una curva es DETERMINADA: 1.º, *cuando se conocen tres de los puntos por donde ha de pasar*; 2.º, *cuando se conoce su radio y dos de los puntos por donde ha de pasar*; 3.º, *cuando se conoce su centro y uno de los puntos por donde ha de pasar la curva.*

En los párrafos 62 hasta el 79 dejamos explicado lo que se entiende por circunferencia, círculo, radio, diámetro, arco y cuerda, así como también la división de la circunferencia en grados, minutos, etc. Ahora pasaremos á hacer algunas consideraciones respecto á las propiedades de algunas de estas líneas y de otras que pasaremos á definir.

213. SECTOR DE CÍRCULO *es la porción de superficie circular comprendida entre dos radios y el arco correspondiente*; tal es IOH (fig. 116).

Cuando los radios que determinan el sector son perpendiculares, como los OK, OJ, el sector se llama *cuadrante de círculo.*

214. Toda cuerda divide al círculo en dos partes, llamadas segmentos de círculo; así diremos: *que* SEGMENTO DE CÍRCULO *es la porción de plano comprendida entre un arco y su cuerda.*

Cuando la cuerda pasa por el centro del círculo, entonces el segmento toma el nombre particular de *semicírculo*.

215. Se da el nombre de SAJITA *á la parte de radio interceptada entre el punto medio de la cuerda y el arco*; tal es AE (fig. 114).

216. Llámase SECANTE *una cuerda prolongada por uno ó ambos extremos;* tal es BC (fig. 114).

217. TANGENTE *es la recta que, estando fuera del círculo y situada en el mismo plano que éste, aunque se la prolongue cuanto se quiera, no toca sino en un solo punto á la circunferencia, sin que jamás pueda cortarla*; tal es DGF (fig. 114).

El punto G, común con la recta y la circunferencia, se llama *punto de tangencia* ó de *contacto*.

218. Además de las propiedades expuestas en el párrafo 69, deben conocerse las siguientes:

1.ª *Una recta y una circunferencia no se pueden cortar en más de dos puntos.*

2.ª *Una perpendicular elevada en el medio de una cuerda, pasa por el centro del círculo y por la mitad del arco que esta cuerda subtende* (fig. 117).

Dem. Una perpendicular elevada enmedio de la cuerda CD, debe pasar por todos los puntos equidistantes de C y de D; pero el centro del círculo está necesariamente á igual distancia de estos dos puntos: luego ha de pasar por el centro. Pasará también por el medio del arco, porque este punto del medio está á igual distancia de C y de D.

De aquí se sigue: que si una perpendicular pasa por uno de estos tres puntos, el centro, el medio de la cuerda ó el medio del arco, de precisión pasará por los dos restantes.

3.ª *Dos perpendiculares* RO *y* SO (fig. 115), *elevadas enmedio de dos cuerdas* LN, NP, *tienen su punto de intersección en el centro del círculo.*

Esto se deduce de la demostración anterior; porque el punto O de la perpendicular OS está á igual distancia de N y de P; pero el punto O pertenece también á la perpendicular OR: luego estará también á igual distancia de L que de N; por lo que vemos que los tres puntos LNP están á igual distancia de la intersección O; éste es, pues, su centro, y por consiguiente el de la circunferencia que pasa por dichos tres puntos.

219. *Respecto á las tangentes, deben saberse las propiedades siguientes:*

1.ª Toda tangente es perpendicular al radio que termina en el punto de contacto.

2.ª Por un punto de una circunferencia no se puede trazar más que una tangente á esta curva; porque no se pueden tirar dos perpendiculares al extremo de un radio, sin que las dos se confundan en una sola.

3.ª Por un punto fuera de un círculo se le pueden tirar dos tangentes iguales, que formarán un ángulo cuya bisectriz pasará por el centro del círculo y será perpendicular á la cuerda que una los puntos de contacto de dichas tangentes (fig. 118).

220. Dos paralelas que tocan ó cortan á un círculo, interceptan en la circunferencia arcos iguales; es decir, que si las UZ, BC, DF (fig. 114), son paralelas, se verifica que el arco UB es igual con el ZC, el BG con el GC y el total UG con el GZ.

APLICACIONES DEL CÍRCULO Y DE LAS TANGENTES Á LAS ARTES.

221. El círculo encuentra en las artes una aplicación continua. Las ruedas de los carruajes, las de las máquinas, las muelas de los molinos, los relojes, los cuadrantes de los péndulos, las monedas, etc., ofrecen aplicaciones del círculo.

Las cazuelas, los barreños, los cubos, los toneles, los vasos, las botellas, las jícaras, los cubiletes, etc., etc., tienen sus aberturas circulares.

Una cuerda que pase por la muesca ó garganta de una polea, ofrece la aplicación de la tangente á una circunferencia. También la ofrece una barra que engrane con una rueda.

Cuando una piedra está agitada circularmente por medio de una honda y se abandona uno de los extremos de la cuerda, la piedra se escapa de la circunferencia siguiendo la tangente á ésta.

EJERCICIOS EN EL ENCERADO.

222. 1.° *Dibujar un cuadrante* (fig. 119).—Constrúyase un cuadrado ABCD; tírese la diagonal BD, y señálese sobre esta recta una longitud BE = BA. Márquense á ojo dos puntos F y G, que estén á la misma distancia del centro B que los tres puntos AEC; ahora trácese la curva haciendo que pase por los puntos C, G, E, F, A, procurando que no forme ningún *garrote* (X).

2.° *El mismo ejercicio, dibujando los arcos como los representados por las figuras* H, N, J (fig. 119).

3.° *Dibujar dos semicircunferencias que tengan sus diámetros verticales* (fig. 120).

4.° *El mismo ejercicio con los diámetros horizontales.*

5.° *Diseñar una circunferencia entera* (fig. 121).—Primeramente se dibujará sirviéndose del cuadrado y sus diagonales; luego de sus dos diámetros AC y BD solamente, y por último, del centro O y de los cuatro puntos A, B, C, D. Estos cuatro puntos, que se deben colocar á ojo, han de estar á una distancia del centro igual al radio del círculo que se quiere trazar.

DIBUJOS DEL ATLAS.

Lámina 4.ª

223. 1.° *Copiar sucesivamente las figs. XLV, XLVI, XLVII, XLVIII, XLIX, L y LI.*—Las mismas reglas que se han dado para anteriores ejercicios pueden servir en los presentes.

2.° *Dibujar la fig. LII.*—Después de trazada la circunferencia, se dividirá ésta en seis partes iguales, y luego se trazarán los arcos como se ven en la figura.

3.° *Copiar la* FLECHA *de la fig. LIII.*—Luego de trazado el eje de simetría, se dibujará el triángulo isósceles que tiene sus vértices comunes con las puntas de la flecha, y en seguida se dibujarán los arcos que componen á ésta.

(X) Comúnmente se llaman GARROTES ó RECODOS los ángulos curvilíneos que suelen formar las curvas cuando no siguen la *ley de continuidad*, tan agradable en dichas líneas; también se da dicho nombre al ángulo que forma una recta y una curva cuando no son tangentes.

4.° *Dibujar el* ESCUDO *de la fig. LIV.*- Después de trazado el eje de simetría y demás rectas auxiliares, será muy fácil dibujar los arcos de círculo que forman el escudo.

5.° *Dibujar la curva de* CORAZÓN *fig. LV.*—Trácese el eje de simetría; en seguida las demás líneas auxiliares que se ven en la figura, y luego los arcos que la componen.

6.° *Dibujar el* JARRO *de la fig. LVI.*—Después de dibujado el eje y líneas auxiliares, será fácil diseñar los demás.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

224. PROBLEMAS.

I. *Trazar muchos arcos de círculo*, p. ejemplo, *tres* (fig. 113), *que pasen por dos puntos dados* D *y* B, *y que el primer arco tenga su radio igual á* r, *el segundo á* r′ *y el tercero á* r″.

Tírese la recta BD, y divídase en dos partes iguales por la perpendicular indefinida *a*N; de uno de los puntos dados, p. ejemp. D, y con un radio=*r*, trácese un arco que corte á la perpendicular *a*N en A, y haciendo centro en dicho punto, con una abertura de compás igual á DA, trácese el arco D*a*B; después, con un radio=*r′*, descríbase desde D ó B el punto C, y desde éste, con un radio igual á CD, trácese el arco D*c*B; ahora, con un radio=*r″*, señálese desde D el punto N, el cual será el centro del arco D*n*B.

II. *Hacer pasar una circunferencia por tres puntos* L, N, P, *no situados en línea recta* (fig. 115).

Únanse los tres puntos con las rectas LN, NP; divídanse éstas en dos partes iguales por las perpendiculares RO, OS, y el punto de intersección O será el centro de una circunferencia, cuyo radio será OL, ON ú OP.

III. *Hallar el centro de una circunferencia* LNP *ó de un arco suyo* (fig. 115).

Sobre la circunferencia ó arco dado, señálense tres puntos á arbitrio, L, N, P, y operando como en el problema anterior, se hallará el centro O como se pide.

IV. *A un círculo propuesto tirarle un diámetro y determinar su centro* (fig. 117).

Tírese una cuerda cualquiera, v. g. CD, y divídase por mitad por medio de la perpendicular EF, la cual determinará el diámetro. Si ahora se divide EF en dos partes iguales, se obtendrá el punto P, centro del círculo.

V. *Trazar una tangente que pase por un punto dado* F *en una circunferencia* (fig. 117).

Tírese el radio PF; levántese en su extremo la perpendicular AB, y será la tangente pedida.

VI. *Por un punto* A, *dado fuera del círculo, tirar una ó dos tangentes á la circunferencia* (fig. 118).

Unase el punto dado y el centro del círculo por medio de la recta OA; sobre esta recta, como á diámetro, descríbase una circunferencia que cortará al círculo dado en dos puntos, tales como B, C; tírense las rectas AB y AC que serán las tangentes pedidas.

VII. *Dadas dos paralelas* AB, CD, *y el punto de contacto* E, *trazar una circunferencia que sea tangente á dichas rectas* (fig. 122).

Del punto E bájese la perpendicular EF; divídase en dos partes iguales, y resultará el punto O; de este punto como á centro, y con un radio OE, descríbase una circunferencia, la cual será tangente con las dos paralelas.

VIII. *Dada una recta* JH, *trazar una circunferencia que le sea tangente en* I *y pase por otro punto* L, *dado fuera de la línea* (fig. 123).

En I levántese una perpendicular IO; únase el punto I con el dado L; divídase la IL por mitad por medio de la perpendicular NO, y el punto de intersección O será el centro de un círculo cuya circunferencia, trazada con el radio OI ú OL, será tangente en I y pasará por el punto L.

IX. *Conocida una recta* AB *y dos puntos* C *y* D *fuera de ella, trazar una circunferencia que pase por dichos puntos y sea tangente á la recta dada.*

Pueden suceder dos casos: que los dos puntos C y D, dados fuera de la recta, sean paralelos con ésta ó dejen de serlo.

En el primer caso (fig. 117), tírese la recta CD y divídase por mitad por medio de la perpendicular EF, y F será un tercer punto de la circunferencia que se busca. Ahora hágase pasar por los puntos C, D, F (224, *prob. II*), una circunferencia, que será la pedida.

En el segundo caso (fig. 125), tírese la recta CD, prolongada hasta encontrar la línea propuesta en A; búsquese una media proporcional entre CD y DA, y se obtendrá el punto E; desde A, y con un radio AE, descríbase el arco EF, y F será el punto de tangencia de la curva. Hágase, pues, pasar una circunferencia por los dos puntos propuestos C, D y por el buscado F, y quedará resuelto el problema.

X. *Trazar dos rectas que sean tangentes á dos círculos excéntricos no tangentes, exterior el uno al otro y de radios desiguales* (figs. 126 y 127).

Primer caso. Cuando las tangentes han de pasar entre los dos círculos (fig. 126), únase el centro A con el centro C y tírense dos radios AB, CD, paralelos, pero dirigidos en sentido inverso; por los extremos de dichos radios tírese la recta DB, y se obtendrá el punto O; de este punto tírense al círculo C *(prob. VI)* las tangentes OT, OT′, las cuales serán también tangentes al círculo A.

Segundo caso. Si las tangentes no han de pasar entre los dos círculos (fig. 127), tírese la recta indefinida AE, que pase por los centros de los dos círculos; trácense en ambos radios paralelos en un mismo sentido, AC, BD, y por sus extremos tírese la recta CD, prolongándola hasta que corte á la AB en un punto E; si por este punto se tiran dos tangentes á una de las circunferencias (*prob. VI*), lo serán también á la otra.

Tercer caso. Cuando la línea que pasa por los centros y la que pasa por los extremos de los radios paralelos se encuentran á una distancia muy larga, se puede recurrir al medio siguiente (fig. 128):

Tírese la línea de los centros AB, y tómese sobre el radio de la circunferencia mayor una distancia CD igual al radio del círculo menor; haciendo centro en A, descríbase una circunferencia cuyo radio sea igual á la diferencia AD; por el punto B tírense á este círculo (*prob. VI*) las tangentes BE, BF; al punto de contacto de estas tangentes tírense los radios AE, AF, prolongándolos hasta G y H; en B tírense los radios BI, BJ, paralelos respectivamente con los anteriores, y tirando por los extremos de los radios las líneas GI, HJ, serán las tangentes que se buscan.

ARTÍCULO 2.º

DE LOS ÁNGULOS Y LÍNEAS PROPORCIONALES CON RELACIÓN AL CÍRCULO.

225. Qué se entiende por ángulo central en un círculo?—226. Qué es ángulo inscrito?—227. Qué es ángulo excéntrico?—228. Qué es ángulo circunscrito?—229. Cuándo se dice que un segmento ó arco son capaces de un ángulo dado?—231. Cuál es la medida de un ángulo central?—232. Cuál la de un ángulo inscrito? Qué se deduce de la medida del ángulo central?—233. Cuál es la medida del ángulo formado por una cuerda y la prolongación de otra?—234. El ángulo formado por una tangente y una cuerda, qué medida tiene?—235 Cuál es la medida de un ángulo excéntrico interior al círculo.—236. La medida de un ángulo excéntrico exterior al círculo formado por dos secantes, cuál es? Si el ángulo está formado por una secante y una tangente ó bien por dos tangentes, qué medida tiene?—237. Las cuerdas que cortan dentro de un círculo, cómo se dividen?—238. Qué se deduce de la propiedad anterior?—239. Qué relación guardan dos secantes que se encuentran fuera del círculo?—240. Si desde un punto fuera de un círculo se le tira una tangente y una secante, qué relación guarda aquélla con ésta? Qué se deduce de esta propiedad?

Un ángulo considerado con relación á un círculo, puede tener su vértice dentro del círculo, ó en la circunferencia ó fuera de ella.

225. *El ángulo que tiene su vértice en el centro del círculo* se llama ÁNGULO CENTRAL; tal es el ACF (fig. 129).

226. Llámase ÁNGULO INSCRITO *al que tiene su vértice en la circunferencia y está formado por el concurso de dos cuerdas;* tal es el ABD (fig. 129).

227. Se llama ÁNGULO EXCÉNTRICO *el que no es central ni inscrito.*

Cuando el vértice está fuera del círculo, como el JLM (fig. 131), se dice que es *exterior* al círculo, y si está dentro como el EFG (fig. 130), se dice que es *interior* al círculo.

228. ANGULO CIRCUNSCRITO *es el ángulo excéntrico exterior que sus lados son tangentes del círculo;* tal es el GHI (fig. 135).

229. Se dice que un segmento ó arco son CAPACES de un ángulo dado, *cuando forman parte de un círculo ó circunferencia, que todos los ángulos que se inscriban y abracen el arco de dicho segmento sean iguales al ángulo propuesto.* Así, el segmento ó arco ANB (fig. 132) es capaz del ángulo AGB ó AIB.

230. PROPIEDADES: son de mucho interés para el dibujante las siguientes:

231. *La medida de un ángulo central es el arco que sus lados abrazan* (73).

232. *La medida del ángulo inscrito es igual á la mitad del arco interceptado por sus lados.*

Supongamos que el lado AB del ángulo ABD (figura 129) pasa por el centro; tirando por este centro la línea EF paralela al otro lado BD, resultará ACF= ABD por correspondientes, y como la medida del ángulo ACF es el arco AF, resulta que este mismo arco

AF es puntualmente la mitad del AFD, como vamos á manifestar.

El ángulo ACF=ECB por opuestos al vértice, y el arco EB=FD por interceptados entre paralelas.

Si ninguno de los lados pasa por el centro del círculo, se tirará por el vértice una línea que pase por dicho centro; y en tal caso se tendrán dos ángulos cuya suma ó diferencia estará en el caso precedente, por lo que no será difícil aplicar la demostración.

De esto se sigue:

1.° Que todo ángulo inscrito es igual á la mitad del ángulo central que abraza el mismo arco que aquél.

2.° Que todos los ángulos inscritos que abrazan un mismo arco son iguales.

3.° Que un ángulo inscrito cuyos lados insistan en los extremos de un diámetro es recto (Y); que si sus lados abrazan un arco mayor que la semicircunferencia, es obtuso, y si abrazan un arco menor que la semicircunferencia, es agudo.

233. *El ángulo formado por una cuerda y la prolongación de otra, tiene por medida la semisuma de los arcos correspondientes á dichas cuerdas.*

Sea el ángulo ABD (fig. 133) formado por la cuerda AB y la prolongación de la CB, y se tendrá que ABD+ABC valdrán juntos la semicircunferencia, y como el ABC, por ser inscrito, tiene por medida la mitad del arco AC, el otro será la mitad de lo que quede, esto es, de CEB+BFA.

234. *El ángulo formado por una tangente y una cuerda tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*

Sea el ángulo CAD, formado por la tangente CB y

(Y) En esta propiedad está fundado el prob. I del párrafo 100 y los VI y VII del párrafo 125.

una cuerda D*a* (fig. 134). Tírese el diámetro AO, y resultará el ángulo CAO=CAD+DAO; y como CAO es un ángulo recto, tendrá por medida la mitad del arco AD, más la mitad del arco DO; por consiguiente, CAD+DAO, tomados juntos, tienen por medida la mitad del arco AD y DO; pero DAO, por ser un ángulo inscrito, tiene por medida la mitad del arco DO; luego CAD tiene por medida la mitad del arco AD.

Lo que decimos del ángulo agudo CAD se puede aplicar al obtuso BAD.

235. *Un ángulo excéntrico interior al círculo, tiene por medida la semisuma de los arcos abrazados por dicho ángulo y por su opuesto al vértice.*

Sea el ángulo EFG (fig. 130); es menester probar que tiene por medida la mitad de EG, más la mitad de HJ.

Del punto H tírese HI paralela á EF. El ángulo EFG es igual con el ángulo inscrito IHG, que tiene por medida la semisuma de los arcos EG, EI; pero EI=JH por arcos interceptados entre paralelas; luego este ángulo, y por consiguiente el EFG, tiene por medida la semisuma de los arcos EG, HJ.

336. *El ángulo excéntrico exterior al círculo* (lo mismo si es formado por dos secantes, como por una secante y una tangente, como por dos tangentes), *tiene siempre por medida la mitad de la diferencia de los arcos interceptados por sus lados.*

Se ha de probar que el ángulo JLM (fig. 131) tiene por medida la mitad de la diferencia de los arcos PN, JM.

Tirando la cuerda NO paralela á la secante LM, resultará el ángulo inscrito ONJ que tiene por medida la mitad del arco JO; pero JO=MJ—MO; luego su medida será la mitad de la diferencia de los arcos MJ, MO, ó lo que es lo mismo, la mitad de la diferencia de los arcos interceptados MJ, PN. Porque PN=MO.

Observ. Lo mismo se demostraría del ángulo ABC (fig. 135), formado por una secante y una tangente; porque si del punto de tangencia D se tira la cuerda DE paralela al otro lado AB, resultará el ángulo EDC=ABC, y como EDC tiene por medida (234) el arco $\frac{DEA-AE}{2}$, y AE es igual á FD por arcos interceptados entre paralelas, sustituyendo, será ABC= $\frac{AED-FD}{2}$.

De la misma manera se demostraría cuando estuviera formado por dos tangentes como el GHI.

237. *Las cuerdas que se cortan dentro de un círculo se dividen en partes recíprocamente proporcionales.*

Dem. Sean las cuerdas CD, FE (fig. 136), que se cortan en el punto O; es menester probar que OC : OE :: OF : OD.

Para convencernos de esta verdad tiraremos las cuerdas ED, CF, cuya construcción nos dará el ángulo C=E, porque ambos tienen por medida la mitad del arco FD; el ángulo F=D, porque los dos tienen la mitad del arco CE por medida, y los ángulos en O iguales por opuestos al vértice; luego los dos triángulos FCO, DEO, son semejantes y dan OC : OE :: OF : OD, ó bien OE : OC :: OD : OF.

238. De aquí se sigue: *que una perpendicular tirada de la circunferencia sobre el diámetro, es* MEDIA PROPORCIONAL *entre los dos segmentos del diámetro.*

Porque si una de las cuerdas EF es diámetro (fig. 117) y la otra le es perpendicular, se tendrá EO : DO :: OD : OF, porque en este caso EO=OC.

En esto se funda el modo de buscar una media proporcional entre dos rectas dadas (188, *prob. III*).

239. *Dos secantes que se encuentran fuera del círculo, son* INVERSAMENTE *proporcionales con sus partes exteriores.*

Sean las secantes AB, BC (fig. 137); si se tiran las cuerdas AE, DC, resultarán dos triángulos CDB y EAB, los cuales son semejantes, porque los ángulos A y C son iguales, por tener ambos por medida la mitad del arco DE y el ángulo B común; luego se puede formar la proporción CB : AB :: DB : EB.

En esta propiedad se funda lo expuesto en el párrafo 185.

240. Si desde un punto fuera de un círculo se tira á éste una tangente y una secante, *la tangente es media proporcional entre la secante entera y su parte externa.*

Sea la tangente AB y la secante BC (fig. 138); tirando las cuerdas CE, DE, se tendrán dos triángulos CEB y EDB semejantes, porque los ángulos C y E iguales por tener ambos por medida la mitad del arco ED y el ángulo B común; luego comparando los lados homólogos se tiene CB : EB :: EB : DB.

En esto se funda la práctica de dividir una recta en media y extrema razón (188, *prob. V*).

Porque aplicando esto mismo en dicha construcción (fig. 103) se tiene AF : AB :: AB : AE, ó bien

$$AF-AB : AB :: AB-AE : AE;$$

y como AB es igual por construcción á $2BD=EF$, se tiene que $AF-AB=AF-EF=AE=AC$, y $AB-AE=AB-AC=CB$; sustituyendo dará AC : AB :: CB : AC, é invirtiendo la proporción se convierte en AB : AC :: AC : CB.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

241. PROBLEMAS.

I. *Sin más auxilio que la regla y el compás, averiguar si un triángulo es rectángulo, acutángulo ó obtusángulo* (fig. 139).

Como sabemos que en todo triángulo á mayor lado se opone mayor ángulo, y éste es el que determina la especie á que pertenece un triángulo con relación á sus ángulos, y sabemos también que el ángulo inscrito cuyos lados insistan en los extremos del diámetro es recto, para ver un triángulo á qué clase pertenece no hay más que tomar como á diámetro el lado mayor AB y describir una semicircunferencia ADB, y si el vértice opuesto al lado mayor, que nos sirve de diámetro, toca á la circunferencia, el ángulo será recto y el triángulo rectángulo; tal es ADB. Si el vértice no llega á la circunferencia, el ángulo será obtuso y el triángulo obtusángulo, como ACB, y si el vértice sale fuera de la circunferencia, el ángulo será agudo y el triángulo acutángulo; tal es AEB (232, 3.º).

II. *Dada una recta* AB, *determinar un arco ó un segmento* CAPAZ *del ángulo propuesto* cbd (fig. 132).

Al extremo B de la recta dada, fórmese el ángulo ABE=*cdb;* tírese la BO perpendicular á DE, y la HO perpendicular á AB en su punto medio; del punto de intersección O de las dos perpendiculares, y con un radio OB descríbase una circunferencia y ANB será el segmento pedido.

En efecto, el ángulo *cbd*=ABE; éste, como formado por una cuerda y una tangente, tiene por medida la mitad del arco ANB, y como ésta es la medida de todos los ángulos AGB, AIB, etc., inscritos, tenemos que ANB es el segmento que se busca.

ARTÍCULO 3.º

CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS, SECANTES Y TANGENTES.

242. Qué son circunferencias concéntricas?—243. Qué se entiende por anillo ó corona circular? Qué es grueso del anillo ó corona?—244. Qué son circunferencias excéntricas?—245. Qué son circunferen-

cias secantes?—246. Qué son circunferencias tangentes? Cuándo dos circunferencias son tangentes interiormente?—247. Qué es línea de los centros?—248. Propiedades.—249. Aplicación de circunferencias concéntricas y tangentes á las artes.

242. *Cuando dos ó más circunferencias están trazadas desde un mismo centro y en un mismo plano*, se denominan CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS; tales son las GCH, EDF (fig. 128).

243. *La porción de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas* se llama CORONA Ó ANILLO CIRCULAR.

La parte de radio comprendida entre dos circunferencias concéntricas se llama GRUESO del anillo ó corona; tal es DC (fig. 128).

244. Se llaman CIRCUNFERENCIAS EXCÉNTRICAS *las que, estando trazadas en el mismo plano, tienen diferente centro*, como las AB, CD (fig. 126).

245. *Cuando dos circunferencias se cortan en dos puntos*, como las de la fig. 118, se llaman CIRCUNFERENCIAS SECANTES.

246. Se llaman CIRCUNFERENCIAS TANGENTES dos ó más circunferencias *que, estando trazadas sobre un mismo plano, no se tocan sino en un solo punto*, llamado PUNTO DE TANGENCIA ó de CONTACTO; tales son las de las figs. 140 y 141.

Cuando las dos circunferencias tangentes son exterior la una á la otra, como sucede con los círculos C y F (fig. 140), se dice que son *tangentes exteriormente*, y cuando es interior la una á la otra, como se verifica con las que tienen su centro en B y D (figura 141), se llaman *tangentes interiormente*.

247. Llámase LÍNEA DE LOS CENTROS *la recta que pasa por los centros de dos ó más circunferencias trazadas sobre un mismo plano*; tal es CA (fig. 126).

248. PROPIEDADES.

1.ª Dos circunferencias concéntricas están igualmente separadas en todos sus puntos; así es que dos circunferencias tangentes ó secantes han de ser precisamente excéntricas.

2.ª El punto de contacto de dos circunferencias tangentes se halla necesariamente en la línea de los centros.

Cuando las circunferencias son tangentes exteriormente, el punto donde la línea de los centros las corta es el punto de contacto, y si son tangentes interiormente, la línea de los centros es el radio de la circunferencia mayor, pasando por el centro de la menor (figs. 140 y 141).

3.ª Si dos circunferencias son secantes, la línea de los centros es perpendicular y divide por mitad á la recta que une los puntos de intersección de dichas curvas (fig. 118).

4.ª Las tangentes comunes á dos circunferencias de radios desiguales se encuentran en un punto de la línea de los centros, siendo esta línea bisectriz del ángulo formado por las tangentes (figs. 126 y 127).

APLICACIÓN DE CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS Y TANGENTES Á LAS ARTES.

249. Las curvas trazadas en los relojes, en las orlas de las monedas, en el limbo del transportador, del grafómetro y de otros instrumentos geométricos, náuticos y geodésicos, son arcos ó circunferencias concéntricas.

Las circunferencias tangentes tienen su principal aplicación en la construcción y dibujo de las ruedas dentadas que engranan con los dientes de otras ruedas ó con las alas de un piñón, con los husillos de una linterna, etc.

DIBUJOS DEL ATLAS.

Lámina 4.ª

250 1.° *Dibujar la* MEDIA LUNA *formada por tres arcos del círculo, fig. LVII.*—Dichos arcos forman parte de tres circunferencias secantes que se cortan en los puntos *n* y *m*.

2.° *Dibujar el* ENTRELAZADO *de la fig. LVIII.*—Después de tirada la línea de los centros, señálense en ella los puntos *a* y *e*, centro de las dos circunferencias mayores; divídase la distancia *ac* en dos partes iguales, y el punto *n* será el centro de la circunferencia menor; luego se tiran los diámetros verticales y se trazan las circunferencias concéntricas, haciendo que sean respectivamente tangentes, como se ve en la figura.

3.° *Diseñar el* ERTRELAZADO *de la fig. LIX.*—Se compone de cuatro circunferencias concéntricas y tangenres en la línea de los centros.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

251. PROBLEMAS.

I. *Con un radio igual á la recta* z, *trazar una circunferencia que sea* TANGENTE EXTERIORMENTE *en* A *á la dada* AC (fig. 140).

Tírese el radio CA prolongado, y sobre su prolongación póngase la recta *z* de A á F; el punto F será el centro de la circunferencia pedida.

II. *Con un radio igual á la recta* r *describir una circunferencia que sea* TANGENTE INTERIORMENTE *en* F *á la dada* FD (fig. 141).

Tírese el radio DF; póngase sobre dicha línea, de F hacia D, la recta *r*, y el punto hallado C será el centro de la circunferencia pedida.

III. *Dado el punto de contacto* A *en la circunferencia* CA, *buscar el centro de otra que le sea tangente en dicho punto y pase por otro dado* B *fuera del círculo* (fig. 140).

Tírese el radio CA prolongado; únase el punto A y B por medio de una recta, y divídase ésta en dos partes iguales por la perpendicular DF; el punto de intersección F es el centro de la circunferencia que se busca.

IV. *Buscar el centro de una circunferencia que pase por un punto* P, *dado dentro de un círculo, y que sea al propio tiempo tangente á la circunferencia de dicho círculo en un punto* F (fig. 141).

Tírese un radio al punto de contacto F; únase el punto dado P y el F por medio de una recta, y divídase á ésta en dos partes iguales por la perpendicular NC; el punto de intersección C es el centro de la circunferencia.

V. *Dadas dos líneas convergentes*, AB, CD, *trazar dos ó más circunferencias que, sobre ser tangentes exteriormente entre sí, lo sean también á las rectas propuestas* (fig. 294).

Tírese la línea de los centros EF, de modo que sea bisectriz del ángulo que forman las dos rectas dadas, si se prolongasen lo conveniente (84, VI); en un punto O de esta línea levántese la OG perpendicular á la recta dada CD; haciendo centro en O, y con el radio OG descríbase la circunferencia GH; en el punto H levántese la HI perpendicular á la línea de los centros, y desde I, con el radio IH, trácese el arco HJ, tirando al propio tiempo la recta IO′, bisectriz del ángulo HIJ; haciendo ahora centro en O′, y con el radio O′H ú O′J, señálese la circunferencia HJL, y en el punto L levántese la perpendicular LM; repitiendo ahora la misma operación, se obtendrá el punto O″, centro de la circunferencia LNE, y así siguiendo se irán trazando tantas circunferencias como sean necesarias.

ARTÍCULO 4.°

INSCRIPCIÓN Y CIRCUNSCRIPCIÓN DE POLÍGONOS AL CÍRCULO Y DIVISIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN PARTES IGUALES.

252. Qué es polígono inscrito en el círculo?—253. Qué es polígono circunscrito?—254. Qué es círculo circunscrito á un polígono?—255. Qué es círculo inscrito?—257. El radio de un círculo inscrito ó circunscrito á un polígono regular, á qué es igual? Los polígonos regulares se pueden inscribir y circunscribir al círculo?—258. Los triángulos son inscribibles y circunscribibles?—259. En qué caso los cuadriláteros se pueden inscribir y circunscribir al círculo?—260. Los

polígonos irregulares que son inscribibles al círculo, son también circunscribibles y viceversa?—261. Los vértices ó los puntos de contacto de un polígono regular inscrito ó circunscrito, cómo dividen á la circunferencia?

252. Entiéndese por POLÍGONO INSCRITO en un círculo *el que tiene todos los vértices de sus ángulos en la circunferencia*; tal es ABCDEF (fig. 142).

253. POLÍGONO CIRCUNSCRITO á un círculo *es el que todos sus lados son tangentes á la circunferencia*; tal es el cuadro ABCD (fig. 143).

254. CÍRCULO CIRCUNSCRITO á un polígono *es el que su circunferencia pasa por todos los vértices del polígono.*

De manera que polígono inscrito en un círculo y círculo circunscrito á un polígono expresan la misma idea.

255. CÍRCULO INSCRITO en un polígono *es el que tiene su circunferencia tangente á todos los lados del polígono.*

De modo que se verifica también que polígono circunscrito á un círculo ó círculo inscrito á un polígono son una misma cosa.

256. La inscripción y circunscripción de polígonos regulares al círculo, supone la división de la circunferencia en tantas partes iguales cuantos sean los lados del polígono que se inscribe ó circunscribe.

PROPIEDADES.

257. *El radio del círculo circunscrito á un polígono regular es igual al radio oblicuo de éste, y el del inscrito igual al lado recto de dicho polígono.*

De lo dicho se deduce: *que todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir al círculo.*

258. Los triángulos *son también inscriptibles y circunscriptibles al círculo*, por las propiedades demostradas en los párrafos 119 y 120.

259. Los cuadriláteros sólo se pueden INSCRIBIR al círculo *cuando la suma de dos de sus ángulos opuestos vale* 180°, como sucede con el cuadrado, el cuadrilongo y el trapecio isósceles; y son CIRCUNSCRIPTIBLES *cuando, sumados de dos en dos sus lados opuestos, se obtienen sumas iguales*, como se verifica con el cuadrado, el rombo y el trapezoide simétrico.

260. Los polígonos irregulares que son inscriptibles al círculo, no son circunscriptibles, y viceversa, excepto los triángulos.

261. Los vértices de un polígono regular inscrito en el círculo, ó los puntos de contacto de uno circunscrito, dividen á la circunferencia en tantos arcos iguales como lados tiene el polígono.

APLICACIÓN DE LA DIVISIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN PARTES IGUALES.

262. Aunque son muchas é interesantes las aplicaciones de la división de la circunferencia á las artes, á fin de ser breves no citaremos más que algunas.

Las ruedas dentadas, los cajones y paletas de una rueda hidráulica, los husillos de una linterna, las alas de un piñón, etc., son circunferencias divididas en tantas partes iguales como dientes, paletas, etc., han de tener dichas ruedas ó cilindros.

El limbo del transportador, del grafómetro, de la brújula y de otros instrumentos que sirven para la agrimensura, navegación y astronomía, son arcos ó circunferencias divididas en partes iguales.

La circunferencia de un reloj está dividida en 60 partes iguales, llamadas minutos.

La inscripción y circunscripción de polígonos regulares en el círculo se funda en la división de la circunferencia en partes iguales.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 5.ª

263. 1.° *Dibujar las figs. LX, LXI, LXII y LXIII.*—La primera es un triángulo equilátero inscrito á un círculo y circunscrito á otro.

La segunda es un cuadrado circunscrito al círculo interior é inscrito al exterior.

La tercera es un pentágono regular inscrito y circunscrito á dos círculos.

La cuarta es un exágono inscrito á un círculo y circunscrito á un triángulo equilátero; en el triángulo hay inscrita otra circunferencia.

2.° *Copiar las* RUEDAS DENTADAS *de la fig. LXIV.*—Este dibujo consiste en una barra guarnecida de dientes en una de sus caras, los cuales engranan con los dientes de una rueda, que también engrana á su vez con otra mayor que ella. La circunferencia de la rueda menor está dividida en 24 partes, cuya mitad ocupan sus dientes; la mayor tiene veinte dientes, y por lo mismo su circunferencia se encuentra dividida en 40 partes iguales.

3.° *Dibujar la* RUEDA *de un torno, fig. LXV.*—Se compone de ocho rayos que dividen en ocho partes iguales á la circunferencia; cada una de estas partes se subdivide en otras tres, también iguales.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

264. PROBLEMAS.

I. *Dado un polígono regular, circunscribirle un círculo* (142).

Hállese su centro O (159, prob. XII), y tírese un radio oblicuo OA; este radio será el del círculo pedido.

II. *Inscribir un círculo en un triángulo cualquiera* (fig. 44).

Tírense las bisectrices de sus ángulos (84, V), las cuales en su intersección determinarán el centro O; de este punto bájese una perpendicular á uno de los lados, p. ejemp. OE, y esta recta será el radio del círculo (120).

III. *Circunscribir una circunferencia á un triángulo dado* (fig. 43).

Hágase pasar una circunferencia por sus tres vértices (224, II), y quedará resuelto el problema.

Observ. Si el triángulo fuese rectángulo, el centro del círculo sería el punto medio de la hipotenusa (232, 3.°).

IV. *A un rectángulo propuesto circunscribirle un círculo* (fig. 144).

Tírense las dos diagonales; su punto de intersección O será el centro del círculo pedido, y una de las semidiagonales el radio.

V. *Conocido un trapecio isósceles, circunscribirle una circunferencia* (fig. 145).

Divídanse las bases y uno de los lados en dos partes iguales, por medio de perpendiculares, y el punto de intersección O será el centro del círculo pedido.

VI. *A un rombo dado inscribirle un círculo* (figura 146).

Tírense las dos diagonales, y el punto de intersección O será el centro del círculo; ahora desde O tírese una perpendicular Oз á cualquiera de los lados, y esta perpendicular será el radio.

VII. *Inscribir un círculo á un trapezoide simétrico* (fig. 147).

Tírese el eje de simetría AB y la bisectriz CO de uno de los ángulos; la intersección O será el centro del círculo; para determinar el radio tírese desde O una perpendicular OD á cualquiera de los lados.

VIII. *Dado un círculo, inscribirle un triángulo equilátero* (fig. 148).

Tírese un diámetro AB, y de su extremo B, con un radio igual al del círculo, trácese el arco COD; la cuerda CD, colocada consecutivamente, cabrá tres veces exactas.

IX. *Inscribir un cuadrado en un círculo* (fig. 143).

Tírese el diámetro *ac*, y divídase en dos partes iguales por medio del otro diámetro perpendicular *bd*; los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, serán los vértices del cuadrado inscrito.

X. *En un círculo dado inscribirle un pentágono regular* (fig. 149).

Enmedio del diámetro AB levántese el radio perpendicular OC; divídase el radio OB en dos partes iguales, y de su punto medio *e*, y con un radio *e*C, trácese el arco Cn; la cuerda Cn de este arco es el lado del pentágono que se busca; de manera que si del punto C se describe el arco nD, CD será la quinta parte de la circunferencia.

XI. *A un círculo propuesto inscribirle un exágono regular* (fig. 142).

El radio OA, colocado sucesivamente como á cuerda, dividirá á la circunferencia en seis partes iguales.

XII. *Inscribir un eptágono regular en un círculo dado* (fig. 148).

Practíquese lo mismo que para inscribir el triángulo equilátero: la recta Cn ó nD es aproximadamente el lado del eptágono pedido (Z).

XIII. *Conocido un círculo, inscribirle un octágono regular* (fig. 150).

Tírense los diámetros perpendiculares FG, HI; divídase el ángulo HOG por mitad, y la cuerda HJ ó JG es el lado del octágono regular.

XIV. *En un círculo propuesto, inscribirle un eneágono regular* (fig. 151).

Tírense dos diámetros AB y ED, que se corten perpendicularmente; del punto D, con un radio igual al del círculo, córtese la circunferencia en F, y del punto E, con un radio EF, descríbase el arco FG, que corte á la prolongación del diámetro en G; de este punto trácese el arco DCE, y el segmento CB, colocado como

---

(Z) Los resultados que se obtienen por los procedimientos indicados en este problema, el XIV, XVI y XVIII, *segundo modo*, no tienen una rigurosa exactitud matemática. Así es que si considerásemos á esta obrita como un tratado de *matemáticas puras*, nos habríamos tal vez abstenido de continuarlos; pero no así en una obra de dibujo lineal, en consideración á que podrán ser de alguna utilidad para muchos artesanos, ahorrándoles en la práctica una *infinidad de tanteos*, siempre engorrosos de sí. Tal ha sido nuestro objeto, y este quizá fué también el que impulsó al jesuíta P. T. Cerdá para ponerlos en sus *Elementos generales de Geometría*, así como á M. Lamotte, L. Constantin, etc., en sus *Elementos ó Cursos de dibujo lineal*.

á cuerda, dividirá aproximadamente á la circunferencia en nueve partes iguales.

XV. *Inscribir un decágono regular en un círculo dado* (fig. 149).

Practíquese lo mismo que para inscribir el pentágono, y el segmento de línea *n*O será el lado del decágono.

XVI. *Conocido un círculo, inscribirle un endecágono regular* (fig. 152).

Trácense dos diámetros perpendiculares AB, CD, y llévese el radio del círculo desde C á E y desde A á F; del punto E, con un radio EF, descríbase el arco FG; su cuerda será el lado del endecágono.

XVII. *Dada una circunferencia inscribirle un dodecágono regular*, (fig. 142).

Determínese el lado AB del exágono inscrito; divídase en dos partes iguales por la perpendicular OI, y el arco AI ó IB será la dozava parte de la circunferencia.

XVIII. *Inscribir en un círculo un polígono regular de cualquier número de lados.*

Primer modo. Calcúlese el valor del ángulo central del polígono (144), y por medio del transportador fórmese dicho ángulo en el centro del círculo; la cuerda del arco que abrace dicho ángulo será el lado del polígono que se ha de inscribir.

Segundo modo. Divídase el diámetro (fig. 153) en tantas partes iguales como lados ha de tener el polígono que se quiere inscribir; de los extremos A y B del diámetro, y con un radio igual á él mismo, trácense dos arcos que por su intersección determinarán el punto C; de este punto tírese la recta CD que pase por el segundo punto *n* de la división del diámetro, y la cuerda del arco AD será aproximadamente el lado del polígono pedido.

Como en esta construcción se ha dividido el diámetro en nueve partes, el arco AD es aproximadamente la novena parte de la circunferencia.

XIX. *Dado un polígono regular inscrito en un círculo, inscribirle otro de duplo número de lados.*

Divídanse por mitad, por medio de perpendiculares, los lados del polígono inscrito, y los vértices de este polígono, junto con los puntos de intersección de las perpendiculares con la circunferencia serán los vértices del polígono de duplo número de lados que se quiere inscribir.

ARTÍCULO 5.º

RECTIFICACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA Y RELACIÓN DE ÉSTA CON EL DIÁMETRO.

265. Qué es rectificar una curva?—266. En qué consiste la determinación del perímetro del círculo? Se puede rectificar una circunferencia ó un arco suyo con toda exactitud?—267. El perímetro de un exágono regular inscrito en el círculo, á qué es igual? Y de esto qué se infiere?—268. El perímetro de un cuadrado circunscrito á un círculo, á qué es igual? De todo lo dicho no se deduce aproximadamente la longitud de la circunferencia en valores del diámetro?—269. Si en un círculo se inscribe y circunscribe un polígono regular cualquiera y luego otro de duplo número de lados, y así sucesivamente, qué se verifica? De esto qué se deduce? Qué relación guardan entre sí las circunferencias de los círculos?—270. Cuáles son las relaciones aproximadas del diámetro á la circunferencia que están en uso?

265. *Rectificar una curva es hallar su longitud puesta en línea recta.* Así, rectificar una circunferencia es hallar una recta cuyo largo sea exactamente el de esta curva; tal sería un hilo envuelto alrededor del círculo y después puesto en línea recta.

266. La determinación del perímetro del círculo consiste *en hallar una línea recta, igual en longitud á la circunferencia, para poderla comparar con el radio ó con el diámetro.*

Mucho se ha discurrido para hallar una fórmula que nos diese la longitud de una circunferencia cualquiera, conocido que fuese su radio; mas su exacta determinación no se ha resuelto por ahora, ni es probable que se resuelva en lo sucesivo, pues el célebre Lambert ha demostrado con razonamientos muy largos de explicar que la relación del diámetro á la circunferencia es incomensurable; pero que es fácil, tanto por cálculo, como gráficamente, obtener valores tan aproximados que casi equivalgan á la misma exactitud.

267. Si consideramos un círculo circunscrito á un exágono regular (fig. 142), veremos que por ser el lado del exágono igual al radio del círculo, su perímetro será igual á seis radios ó tres diámetros del círculo circunscrito.

De donde se infiere que, siendo la circunferencia mayor què el polígono inscrito, *toda circunferencia será mayor que tres diámetros.*

268. Si se observa un cuadrado circunscrito á un círculo (fig. 143), á primera vista se percibe que el perímetro de este cuadrado es igual á cuatro diámetros; porque AB=RM, BC=EN, etc.

De lo que resulta que, siendo el polígono circunscrito mayor que la circunferencia inscrita, *el valor de ésta no llegará á cuatro diámetros.*

Luego la longitud de la circunferencia es menor que cuatro diámetros y mayor que tres, ó está entre tres y cuatro diámetros, es decir, *es igual á tres diámetros y un quebrado decimal.*

269. Según lo expuesto, es fácil concebir: que si en un círculo se inscribe y circunscribe un polígono regular cualquiera, y luego otro de duplo número de lados, y así sucesivamente, *la diferencia entre el perímetro del inscrito y el del circunscrito llegará á ser menor que cualquiera cantidad, por pequeña que se imagine.* Y como la circunferencia es mayor que el perímetro del polígono inscrito y menor que el

del circunscrito, se tendrá que la diferencia entre la circunferencia y cualquiera de estos perímetros será aún con más razón mucho menor que cualquier cantidad, por pequeña que sea, y por lo mismo *se podrá tomar la circunferencia por un polígono regular de un número considerable de lados,* sin que de ello resulte error apreciable.

Y como los perímetros de los polígonos regulares (191) son proporcionales con sus líneas homólogas, se deduce *que las circunferencias de los círculos guardan entre sí la relación de sus radios ó diámetros.* Así es que se puede calcular fácilmente una circunferencia cuyo diámetro sea conocido, y viceversa, por medio de esta proporción: *el diámetro de la relación es á la circunferencia de la misma, como el diámetro dado es á la circunferencia buscada.*

270. Las relaciones del diámetro á la circunferencia, de que se hace uso en la práctica, son: la de *Arquímedes,* que es la de 7 : 22; la de 113 : 355, que halló *Adriano Mecio,* y la de los *modernos,* que es 1 : 3'14159265358979324, etc., que llega hasta 140 decimales; mas en la práctica se suele simplificar poniendo no más que cuatro decimales y añadiendo en la última cifra una unidad, como 1 : 3'1416. Si 1 expresa el diámetro, 3'1416 expresará la circunferencia, y si 1 expresa el radio, 3'1416 expresará la semicircunferencia (A').

271. La relación de los modernos es la más ventajosa, por ser la más aproximada, mayormente si se toma un número considerable de notas decimales; pues con sólo tomar 17, de las 140 que hay calculadas, se supone á la circunferencia igual al perí-

(A') Los matemáticos representan el valor de la circunferencia por la letra griega siguiente π, llamada *pi*. Así, este signo π denotará la circunferencia de la relación, cualquiera que sea la que se siga.

metro de un polígono regular inscrito ó circunscrito de 3.221.225.472 lados. Lo que da una idea de que la aproximación, si se quiere, puede llegar á equivaler, como hemos dicho antes, á la misma exactitud.

Como la relación de la circunferencia con el diámetro es de un uso tan frecuente en la práctica, para las aplicaciones más usuales se suele hacer uso de la de Arquímedes, cuya relación, convertida en decimales, produce 3'142, etc., y conviene con la anterior hasta centésimas inclusive.

La encontrada por Mecio, que es muy fácil de retener en la memoria, por componerse de los tres primeros números impares repetidos dos veces, 11, 33, 55, es más aproximada que la de Arquímedes, porque da $\pi = {}^{355}/_{113} = 3'1415929$, que se diferencia del verdadero en menos de una millonésima parte y supone á la circunferencia igual al perímetro de un polígono circunscrito de 16.228 lados.

En esta relación se ha calculado, dice Terquem, que en un diámetro de un millón de metros, el perímetro de la circunferencia resulta 1 metro más largo de lo que debiera ser; error despreciable en una longitud de cerca de 250 leguas.

APLICACIONES DE LA RELACIÓN DEL DIÁMETRO Á LA CIRCUNFERENCIA.

272. Los cálculos que se hacen por medio de la relación del diámetro á la circunferencia son de muchísima utilidad, no tan sólo para la resolución de los varios problemas que vamos á ver y otros análogos, sino también para la medición de superficies de columnas, caños, tubos, pozos, bóvedas, depósitos circulares para líquidos, etc.

EJERCICIOS GRÁFICOS Y DE CÁLCULO.

273. PROBLEMAS.

I. *Calcular la longitud de una circunferencia cuyo radio ó diámetro es conocido.*

La longitud pedida será el cuarto término de esta proporción.

El duplo del radio ó el diámetro de la relación es á su circunferencia, como el diámetro dado es á la circunferencia que se busca (B').

Para su relación, supóngase 3'1416=π, el diámetro=D, la circunferencia=C, y se tendrá $1 : \pi :: D : C$; de donde sale la siguiente fórmula : $C=\pi\times D$.

Ejemp. 1.° Cuántos metros corresponden á una circunferencia cuyo diámetro es de 9?—*Resultado*, 28'2744 metros.

Ejemp. 2.° En un estanque de forma circular, y cuyo radio es de 10 metros, se ha de poner una barandilla de hierro; qué longitud tendrá el pasamanos de dicha barandilla?—*Result.*, 62'832 metros.

Ejemp. 3.° La rueda de un coche tiene 2 pies 8 pulgadas 10 lín. de radio, y en un viaje ha dado 24.682 vueltas; cuánto camino ha andado dicho coche?—*Result.*, 141.440 varas 1 pie 5 pulg. 1'5808 líneas.—O lo que es lo mismo, 21'216071 leguas, de 20.000 pies una.

II. *Hallar el radio ó el diámetro de un círculo cuya circunferencia rectificada es conocida.*

El cuarto término de la siguiente proporción dará el radio ó diámetro que se busca.

La circunferencia de la relación es al diámetro de la misma, como la circunferencia dada es al duplo de su radio ó sea su diámetro. De manera que tendremos $\pi : 1 :: C : D$, lo que nos da las siguientes fórmulas:

$$D=\frac{C}{\pi}; \qquad R=\frac{C}{2\pi}.$$

(B') En todos los problemas que siguen emplearemos la relación de 1 : 3'1416, donde el diámetro será 1 y la circunferencia de la relación 3'1416.

Ejemp. 1.° La circunferencia de un estanque circular es de 37'6992 metros; cuál es la distancia que hay desde un punto de la circunferencia á un Neptuno que hay colocado en el centro de dicho estanque? *Result.*, 6 metros.

Ejemp. 2.° Para ceñir las paredes de un circo se necesitan 82 varas 2 pies 4 pulg. de cuerda; cuánto tendrá el diámetro de dicho circo?—*Result.*, 26 varas 1 pie 0'5612 pulgadas.

III. *Conocido el radio y el número de grados de un arco, calcular su longitud.*

Calcúlese por la regla dada (*prob. I*) la longitud de la circunferencia á que pertenece el arco dado, y el cuarto término de la siguiente proporción será la longitud pedida del arco.

360° *es á la longitud de la circunferencia, como el número de grados del arco dado es á la longitud de este arco.*

Ejemp. En un ángulo de 95° que hay en una sala de forma irregular, se ha de construir una rinconera cuyo radio es de tres decímetros; qué longitud tendrá un filete de metal que ha de abrazar el arco de dicha rinconera?—*Result.*, 4'9742 decímetros.

IV. *Determinar el número de grados de un arco cuya longitud y radio son conocidos.*

Por la regla dada (*probl. I*) calcúlese la longitud de la circunferencia cuyo radio es el propuesto, y el cuarto término de la siguiente proporción dará el número de grados pedido.

La longitud de la circunferencia es á 360°, *como la longitud dada del arco es al número de grados del mismo arco.*

Ejemp. Una plaza circular cuyo radio es de 25 metros, en un incendio que ha sufrido ha quedado arruinado un trozo de muro que, puesta en línea recta la cuerda que lo circuía, tiene de longitud 33'48 metros; cuántos grados coge dicho muro?—*Resultado*, 76'73 grados.

V. *Conocidas dos líneas homólogas de dos círculos, determinar la relación de las demás líneas homólogas de los mismos círculos.*

Con las líneas conocidas fórmese una razón, y esta será la de las demás líneas homólogas de los círculos propuestos.

Ejemp. 1.º Una rueda de 3 pies 10 pulg. de diámetro tiene 40 dientes, y se ha de construir otra que engrane con ella y tenga 24 dientes; qué diámetro tendrá esta rueda?—*Result.*, 2 pies 3 pulg. 7'2 líneas.

VI. *Hallar gráficamente una recta aproximadamente igual á la longitud de una circunferencia propuesta* (fig. 154).

Tírese por un punto A una tangente indefinida DE; tómese el arco AC de 30 grados; por el punto C, tírese el radio OC prolongado hasta D; colóquese sobre la tangente, desde D á la derecha, la magnitud DE igual á tres veces el radio. Desde el punto E tírese al extremo B del diámetro la recta BE, y ésta será igual en longitud á la circunferencia aproximada hasta más de 10 milésimas. La circunferencia será igual al duplo de BE.

VII. *Describir una circunferencia próximamente igual á una recta dada.*

Divídase esta recta en 22 partes iguales, y trazando una circunferencia cuyo diámetro sea igual á 7 de dichas 22 partes, se tendrá resuelto el problema según la relación de Arquímedes.

ARTÍCULO 6.º

CONJUNCIÓN DE LÍNEAS.

274. Qué se entiende por conjunción de líneas?—275. Qué es punto de inflexión?—276. Para que una ó dos rectas conjunten con una cur-

va, qué se ha de tener presente?—277. Cuando la conjunción se ha de hacer sólo con dos líneas curvas, qué se ha de procurar?—179. Ejercicios gráficos.

274. Llámase CONJUNCIÓN DE LÍNEAS *el arte de unir las líneas rectas con las curvas ó las curvas entre sí, de manera que no formen garrotes ó recodos* (222, nota X) *en sus puntos de unión.*

275. *Cuando una línea curva es tangente por uno y otro lado á una recta, el punto común con la recta y la curva se llama* PUNTO DE INFLEXIÓN; tal es, por ejemplo, el punto A (figs. 162 y 163). También se conoce con este nombre *el punto de tangencia de una recta y una curva que forman una sola línea,* como, por ejemplo, los dos puntos A y B (fig. 160).

PROPIEDADES.

276. Para que una ó dos rectas conjunten con una curva, es necesario *que el centro de ésta esté en una línea perpendicular á la real con que ha de verificar la conjunción* (219, 1.ª).

277. En la conjunción de líneas curvas se ha de tener presente:

1.° *Que el punto de contacto de dos circunferencias tangentes se halla constantemente en la línea de los centros* (248, 2.ª).

2.° *Que el centro de dos arcos inmediatos y su punto de unión han de estar en una misma recta.*

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 4.ª

278. *Dibujar la* PLANTILLA DE CURVAS *de la fig. LXVI.*—Este instrumento, que sirve para trazar las curvas mecánicas en los diseños, puede copiarse por medio de la cuadrícula.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

279. Problemas.

I. *Dada una recta* BE (fig. 159), *describir una curva que conjunte con dicha recta en su extremo* E.

En el punto E levántese la perpendicular EP, y haciendo centro en un punto cualquiera de esta perpendicular, por ejemplo en P, se abre el compás hasta E y se traza el arco EIH.

Observ. A primera vista se conoce que este problema es indeterminado por lo dicho (211).

II. *Conocido un punto* A *y una recta* BE, *trazar una curva que pase por dicho punto y conjunte con una recta dada en su extremo* (fig. 159).

Unase el punta A y el extremo de la línea por medio de la recta AB; divídase á ésta en dos partes iguales por la perpendicular CD, y en B, extremo de la recta dada, levántese la perpendicular BO; el punto de intersección O, formado por las dos perpendiculares CD, BO, es el centro de la curva BCA, trazada con un radio OB ú OA.

Observ. Este problema es determinado, porque el centro de la curva es conocido por la intersección de las dos perpendiculares.

III. *Dado un arco de círculo* HIE, *hacer que conjunte con una línea recta* (fig. 159).

En el punto E de la curva que se quiere unir, tírese á su centro P la recta PE, y la perpendicular EB, levantada en el punto E sobre el radio EP, es la recta que conjunta con el arco.

IV. *Trazar una curva que conjunte con los extremos de una recta propuesta* AB (fig. 157).

Tírese la FJ, paralela con AB, á una distancia arbitraria, y de los extremos de la recta dada levántese la perpendicular AD, BC; de los puntos de intersección

D y C trácense, con un radio DA, los arcos AF, BJ; divídase FJ en dos partes iguales, y de su punto medio E descríbase la circunferencia FLJ y se tendrá resuelto el problema.

Observ. Este problema es indeterminado, porque cuanto más diste de AB la línea de los centros FJ, mayor será la curva de conjunción.

V. *Dadas dos rectas convergentes, trazar un arco de círculo que conjunte con dichas líneas* (fig. 158).

Tírese la bisectriz al ángulo A que formarían las dos rectas prolongadas, ya sea figurando su prolongación ó sirviéndose de la regla dada (84, VI); levántese una perpendicular BC al extremo B de una de las dos rectas, y el punto de intersección O que forma con la bisectriz es el centro de la curva BD que une las rectas dadas. Para determinar el punto D, se tirará desde O la línea OD perpendicular á la DE.

Observ. Si la conjunción se hubiese de hacer por la parte divergente de las líneas, se operaría de la misma manera, como lo indica la figura.

VI. *Hacer conjuntar dos líneas paralelas por medio de una curva* (fig. 160).

Primer caso. Que la recta LH, *que une los extremos de las paralelas, les sea perpendicular.*

Tírese la recta HL, y de su punto medio O, con un radio OL, trácese la semicircunferencia LJH, la cual une las dos paralelas propuestas.

Segundo caso. Que la recta AB *forme ángulos oblicuos con las paralelas.*

De los puntos A y B levántense las perpendiculares AI, EB, indefinidas; tírese la DJ paralela con las rectas dadas y equidistantes de las mismas; únanse los puntos A y B, y llévese la distancia AC de C á D; de este punto tírese la DE perpendicular á AB; el punto I será el centro del arco AD, y el punto E del arco DB.

VII. *Conocido un arco* AF, *hacer que conjunte con otro que ha de pasar por un punto* B *dado por la parte interior de aquél* (fig. 161).

Del extremo A de la curva dada, tírese una recta AE que pase por el centro C, el cual se habrá de determinar en caso de no conocerse (224, III); únase el punto A con el dado B por medio de la recta AB, y divídase á ésta en dos partes iguales por la perpendicular DE; el punto de intersección E, que hace esta recta con la AC, es el centro de la curva que se busca ADB.

VIII. *Dada una curva* AF (fig. 162), *hacer que conjunte con otra que ha de pasar por el punto* B, *propuesto en la parte exterior de aquélla.*

Tírese una recta CD que pase por el centro C y el extremo de conjunción A; tírese la AB y divídase en dos partes iguales por medio de la perpendicular PE; el punto de intersección E, que esta recta hace con la DC, es el centro de la curva que se busca.

Observ. Si la perpendicular levantada en el punto medio de AB, en vez de ser convergente con la CD, resultase paralela, como sucede en la fig. 163, se haría AE $= \frac{1}{2}$ AB, y el punto E sería el centro de la curva AD y el punto A el de la curva BD.

Lo mismo se practicaría si dichas dos líneas resultaren divergentes.

ARTÍCULO 7.º

ÓVALOS, HUEVOS Y SU RECTIFICACIÓN.

280. A qué se llama óvalo? Qué son ejes del óvalo? Qué es centro del óvalo?—281. Qué son diámetros del óvalo?—282. A qué curva se da el nombre de huevo? A qué se llama eje y diámetro en el huevo?—283. La curva del óvalo y del huevo pueden rectificarse? El óvalo cómo se rectifica?—284. Para que la curva de un óvalo y de un huevo se presente graciosa y no forme garrotes, qué se ha de procurar?—285.

Respecto del óvalo, qué más se debe saber?—286. El eje del huevo lo es de simetría?—287. Aplicaciones de las precedentes curvas á las artes.

280. Se da el nombre de ÓVALO *á una curva cerrada, simétrica en dos sentidos y compuesta de cuatro ó más arcos de círculo trazados de dos en dos con radios diferentes* (figs. 164 y 165).

Se llaman EJES del óvalo *las dos rectas perpendiculares entre sí que determinan el largo y ancho de la superficie limitada por dicha curva*, como AB, CD (fig. 166).

El eje AB, *que determina el largo*, se llama EJE MAYOR, y el CD, *que determina el ancho*, EJE MENOR.

El punto de intersección de los dos ejes se llama CENTRO.

281. En el óvalo se llaman DIÁMETROS *las rectas que pasan por su centro y terminan por ambos extremos en la curva*, como QOR (fig. 168).

CUERDAS *son las rectas que sin pasar por el centro van de un punto á otro de la curva*; tales son NL, MP (fig. 168).

282. Entiéndese por HUEVO *una curva cerrada simétrica en el sentido de su ancho y más angosta de un extremo que de otro* (169 y 170).

La recta AB, *que determina lo largo de la curva*, toma el nombre de EJE, *y la* EE', *que señala lo ancho*, se llama DIÁMETRO.

283. Por componerse el óvalo y el huevo de arcos de círculo iguales dos á dos, tenemos que, rectificando sus arcos, la suma de ellos dará la rectificación de dichas curvas aproximada, de la misma manera que se obtiene la de una circunferencia.

El óvalo se rectifica también aproximadamente, en valores de los ejes, por medio de la siguiente regla: *súmese el eje menor y su séptimo con el duplo del eje mayor*, y la suma será la longitud de dicha curva rectificada.

PROPIEDADES.

284. Para que la curva de un óvalo y de un huevo se presente graciosa á la vista y no forme garrotes, se ha de procurar:

1.° *Que la suma de los arcos de que se compongan dichas curvas valgan exactamente* 360°.

2.° *Que el centro de dos arcos inmediatos y su punto de unión estén en una misma recta* (277, 2.°).

3.° *Que en los óvalos, el eje menor no sea más corto que el semieje mayor.*

285. Respecto del óvalo en particular, diremos:

1.° El eje mayor es el mayor diámetro que se puede considerar, así como el eje menor es el más corto de todos.

2.° Los ejes y centro lo son de simetría, y todo diámetro que no sea un eje lo divide en dos partes iguales no simétricas.

3.° Toda recta que pase por el centro de dos cuerdas paralelas será un diámetro, y si á más de pasar por su punto medio les fuese perpendicular, será un eje.

286. En el huevo el eje lo es también de simetría, pero no el diámetro.

APLICACIÓN DE LAS PRECEDENTES CURVAS Á LAS ARTES.

287. Algunos utensilios, como mesas, cestas, canastas, fuentes, azafates, comportas, aportadoras, etc., tienen la formal oval.

También es empleada esta curva por los arquitectos en los arcos llamados *carpaneles*, ora sean rebajados ó peraltados. Igualmente se emplea para las ventanas ó aberturas llamadas ovales, y también para marcos de cuadros, etc.

Esta curva, aunque no es tan perfecta como otra que pronto daremos á conocer, llamada *elipse*, suele tener los mismos usos. Los artesanos suelen preferirla por la facilidad de poderse trazar con arcos de círculo.

Los cuerpos de muchos vasos y jarros de porcelana, plata, etc., afectan regularmente la forma del huevo. La cabeza humana vista de frente presenta la misma curva. También se usan los huevos en el ornato y en la arquitectura para adornar los cuartos boceles, para remate de ciertas figuras, para pies de cómodas y otros muebles, etc.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 5.ª

288. 1.° *Dibujar el* HUEVO *de la fig. LXVII.*—Procúrese que la parte superior sea un semicírculo, y que los demás arcos conjunten sin que formen garrote ó recodo.

2.° *Copiar los* JARROS *de las figs. LXVIII, LXIX y LXX.*—Los cuerpos de los tres jarros tienen la forma de huevo, y como todos son simétricos en sentido vertical, el eje facilitará en gran manera su dibujo.

3.° *Dibujar el* ÓVALO *de la fig. LXXI.*—Después de trazado el rectángulo que lo circunscribe y los dos ejes de simetría, dibújese la curva exterior del óvalo y luego las otras curvas que forman óvalos concéntricos.

4.° *Diseñar el* ADORNO *de la fig. LXXII.*—Este dibujo es simétrico y se compone de un huevo colocado en los cascarones *a a'*, separados por unas hojas de agua *c c'*. El adorno *d d'* que está debajo representa unos granos en forma de perlas ovales.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

289. PROBLEMAS.

I. *Trazar un* ÓVALO *cuyo eje mayor sea igual á la recta* AA' (fig. 164).

Primer modo. Divídase dicha recta en tres partes iguales A*n*, *nm*, *m*A'; sobre la parte del centro *nm* fórmense los triángulos equiláteros *nrm*, *nsm*, prolongando sus lados, y de los puntos *n* y *m*, como á centros, trácense los arcos DAC, D'A'C'; finalmente, desde los puntos *s* y *r*, con un radio igual á *s*C, descríbanse los arcos CB'C', DBD', que completarán el óvalo.

Segundo modo. Divídase el eje AA' (fig. 165) en cuatro partes iguales, y con un radio igual á una de estas partes trácense circunferencias desde los puntos obtenidos *n*, *c*, *e*; por los puntos *n* y *e*, donde la circunferencia del centro corta al eje propuesto, tírense las rectas *ds*, *gh* y *ds'*, *gh'*, de modo que pasen respectivamente por los puntos de intersección de dicha circunferencia con las dos extremas; desde n descríbase el arco sAh y desde g el hh', y se tendrá la mitad del óvalo. Teniendo una mitad, fácil es construir la otra.

II. *Construir un* ÓVALO *cuyos dos ejes sean iguales á las rectas dadas* AB, CD (fig. 166).

Primer modo. Después de trazadas las dos rectas AB, CD, de modo que se corten perpendicularmente y por mitad, se delinea sobre el semieje mayor el triángulo equilátero AOE; sobre el lado OE se toma una distancia On igual á OD y se tira la recta Dn prolongada hasta a; con la distancia Aa se determina el punto e y se tira la recta ae, prolongada hasta encontrar al eje menor ó á su prolongación, y determinará el punto F.

Los puntos e y F serán los centros desde donde se trazarán los arcos zAa, aDm; si se traslada el punto e en e' y el F en F′, se tendrán los otros dos centros para acabar de trazar la curva.

Segundo modo (fig. 167). Colóquese la distancia OD desde A á E y divídase el segmento EO en tres partes iguales; trasládese una de estas partes de E á I, y con el radio IA, haciendo centro en sus extremos, descríbanse los arcos GAF, FIG; hágase igual construcción en B, y desde los puntos GG′, FF′, con un radio igual á GG′, se determinarán las intersecciones H′, H; desde estos puntos como á centros descríbanse los arcos GDG′, FCF′, y quedará trazado el óvalo.

III. *A un óvalo propuesto determinarle el centro y trazar sus ejes* (fig. 168).

Tírense dos cuerdas paralelas LN, MP, y divídanse por mitad en v, s. La recta QOR que pasa por v y por s será un diámetro que, dividido por mitad, dará el centro pedido O. Para trazar los ejes descríbase desde O, con un radio arbitrario, pero de manera que pueda cortar á la curva del óvalo, una circunferencia, la cual determinará los puntos T y U; por estos puntos tírese la recta TU y divídase en dos partes iguales por la perpendicular AB, la cual será el eje mayor; para obtener el menor, divídase la AB en dos partes iguales por medio de una perpendicular, ó bien tírese por el punto O una paralela á la línea TU.

IV. *Hallar una recta próximamente igual á la longitud de la curva de un óvalo propuesto.*

Divídase el eje menor en siete partes iguales y trácese una recta cuya longitud sea igual al eje menor y su séptimo, más el duplo del eje mayor; dicha recta será la que se busca (283).

V. *Conocido el eje del* HUEVO, *trazar su curva.*

Primer modo. Divídase el eje AB (fig. 170) en tres partes iguales, y por el punto O, tercera parte de AB, tírese la perpendicular DD′; desde O, con el radio OA, trácese el semicírculo EAE′, y colóquese una distancia igual á dicho radio desde E á D y de E′ á D′; estos dos puntos D, D′, serán los centros para trazar los arcos E′C′ y EC; el punto J, mitad de IB, tercera parte del eje, será el centro del arco CBC′, y las líneas DC′, D′C, determinarán los puntos en donde conjuntan los arcos.

Segundo modo. Divídase el eje AB (fig. 169) en media y extrema razón (188, V) y quedará determinado el punto C; en dicho punto levántese una perpendicular EE′, y con un radio CA descríbase la circunferencia EAE′D; tírense las rectas ED, E′D prolongadas, y de los puntos E y E′ trácense los arcos E′F′, EF; de la intersección D descríbase el arco FBF′, y quedará trazada la curva del huevo (A′).

(A′) Ponemos ambas construcciones, porque el huevo trazado por la primera resulta más largo que éste casi en una cuarta parte del ancho.

VI. *Dado el diámetro* EE′ *del* HUEVO, *trazar su curva.*

Primer modo (fig. 170). Divídase EE′ por mitad en O, y la distancia OE será igual á ED=OA=OI=IB. Conociendo el eje AB, se operará como en el *prob. V, primer modo.*

Segundo modo (fig. 169). Divídase EE′ en dos partes iguales por medio de la perpendicular AB; desde C trácese el semicírculo EAE′, y señálese con el mismo radio el punto D; ahora continúese como en el *prob. V, segundo modo.*

VII. *Dibujar un vaso oval* (fig. 171) (B′).

Después de trazada la parte baja del cuerpo por uno de los métodos anteriores, se divide el ancho EE′ en cuatro partes iguales, y haciendo centro en los puntos O, O′, se describen, con un radio OE, los cuadrantes EC, E′C′; tírese en seguida la recta CC′ y quedará dibujado el cuerpo del vaso.

ARTÍCULO 8.º

ARCO CARPANEL, ARCO OJIVAL, ARCO ESCARZANO, ARCO DESCENDENTE Y ARCO DE HERRADURA.

290. Qué es arco carpanel? Cuándo este arco toma el nombre de rebajado y peraltado? Cuál es la curva llamada asa de cesta?—291. Qué son puntos de arranque en un arco? Qué se entiende por abertura ó luz del arco? Qué es montea de un arco?—292. Cuál es el arco puntiagudo ú ojival?—293. Cuál es el que se denomina escarzano?—294. Qué es arco descendente?—295. Qué es arco de herradura?—296. Aplicación de los susodichos arcos á las artes.

290. Cuando la curva de la mitad del óvalo sirve para las artes de construcción, se da á dicha curva

(B′) Como en los cuerpos ovales conviene muchas veces que la parte superior no suba tanto como el medio círculo, á causa de los diversos cuellos que se les ponen, como se puede observar en la figura 171 y la LXIX del *atlas*, establece D. Juan de Arphe, en su libro de la *Varia comensuración*, el presente procedimiento.

el nombre de ARCO CARPANEL, y á veces el de arco apainelado.

Cuando la abertura ó base del arco es el eje mayor del óvalo, como el de la fig. 172, se llama arco carpanel *rebajado*; y cuando es el eje menor, como el de la fig. 173, se denomina carpanel *peraltado*.

El arco carpanel rebajado es la misma curva conocida también por algunos con el nombre de *asa de cesta*.

291. Los dos puntos A y B en que empieza el arco se llaman *puntos de arranque*.

Lo mismo en el arco carpanel, que en los demás arcos que sirven en la construcción de los edificios, se llama ABERTURA ó LUZ del arco *la distancia* AB *que hay entre los puntos de arranque;* y se entiende por MONTEA *la línea* DC *bajada perpendicularmente desde su punto medio á la recta* AB *que une los arranques del arco.*

292. Se llama ARCO OJIVAL, GÓTICO Ó APUNTADO *el que está compuesto de dos arcos de círculo que se cortan formando un ángulo curvilíneo*; tal es el ADB (fig. 174).

293. Se denomina ARCO ESCARZANO *el arco circular que no llega á valer* 180°, como el ADB (fig. 175).

294. Por ARCO DESCENDENTE ó de ARRANQUES DESIGUALES se entiende *una curva* AEB (fig. 180 bis) *que tiene sus arranques en una recta inclinada* AB, llamada LÍNEA DE RAMPA.

En este arco se llama LÍNEA DEL VÉRTICE *á la recta* DC *tangente en su punto de unión á las dos curvas que constituyen dicho arco.*

295. Se llama ARCO DE HERRADURA *una curva abierta, simétrica en un sentido y compuesta de varios arcos de círculo;* tal es la curva JABA'J' (fig. 180).

La recta BC, *que divide el arco en dos partes iguales, se denomina* EJE; *y la línea* AA', *que determina lo ancho, se llama* DIÁMETRO.

APLICACIÓN DE LOS SUSODICHOS ARCOS Á LAS ARTES.

296. El arco carpanel se emplea con frecuencia en la construcción de las bóvedas y arcos rebajados y peraltados.

El arco ojival ó puntiagudo se ve en casi todos los arcos de los edificios llamados góticos. Dicho arco es el que se considera de más solidez, y por consiguiente susceptible de poder sustentar más peso.

El arco escarzano se emplea también para la construcción de bóvedas; pero su principal aplicación es en los arcos de las puertas y en las bovedillas de los techos.

El arco descendente tiene mucha aplicación en las bóvedas de las escaleras, en los botareles ó estribos de los arcos, etc.

La platea de los teatros suele tener la forma de un arco de herradura, colocando el palco escénico en la abertura de la curva.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

297. PROBLEMAS.

I. *Conocida la base* AB *y la altura* CD, *trazar un* ARCO CARPANEL REBAJADO, *ó sea la curva llamada por algunos* ASA DE CESTA (fig. 172).

Después de haber trazado las dos perpendiculares AB, CD, largo y alto de la curva, tírense las rectas AD, DB, y llévese la distancia CD de C á F y á F′; la diferencia AF póngase de D á n y á n'; divídanse An y Bn' en dos partes iguales por medio de las perpendiculares EG, EG′, las cuales se encontrarán en el punto E, dejando determinados los puntos I, I′, en la intersección de la recta que une los puntos de arranque. El punto E será el centro del arco GDG′, descrito con el radio ED, y los puntos I, I′, los centros de los arcos GA, G′B trazados con el radio IA.

Observ. Este procedimiento sirve también para construir un óvalo cuyos ejes sean dados.

II. *Dada la abertura* AB *de un* ARCO PERALTADO *y su montea* CD, *trazar la curva de dicho arco* (figura 173).

La misma construcción del problema anterior, hecha inversamente.

III. *Trazar un* ARCO OJIVAL Ó APUNTADO *cuya base sea la recta* AB *y tenga por altura la línea* CD (figura 174).

Después de hacer que la altura CD sea perpendicular á la AB y la divida en dos partes iguales, se unirá el punto D con los A y B por medio de rectas; se dividirán éstas perpendicularmente y por mitad por medio de las mn', $m'n$, y los puntos n, n', en que estas perpendiculares encuentran á la AB ó á su prolongación, serán los centros desde donde, con un radio nD, se trazarán los arcos BD y DA.

IV. *Conocida la línea de luz* AB *y la de montea* CD, *trazar un* ARCO ESCARZANO (fig. 175).

En el punto medio de la AB levántese la perpendicular DC indefinida; tírese la recta AD y divídase en dos partes iguales por medio de la perpendicular mn, y el punto de intersección n será el centro desde donde se describirá el arco ADB.

V. *Trazar por puntos un* ARCO DESCENDENTE, *siendo* AB *la línea de rampa* (fig. 155).

Por los extremos A y B de la línea de rampa, tírense las paralelas Aa, Bb, en sentido vertical, las cuales representarán los pies derechos que han de sostener el arco; tírese la ab perpendicular á dichas líneas, y haciendo centro en su punto medio o, descríbase con el radio oa una semicircunferencia; divídase á ésta en un número de partes iguales, por ejemplo, en 6 (264, XVII), y por los puntos de división 1, 2, 3, 4, 5, tírense rectas perpendiculares á la ab y hágase 1'C=1c, 2'D=2d, y así sucesivamente; luego por los puntos A, 1', 2', etc., hágase pasar una curva á pulso y quedará trazado el arco pedido.

VI. *Dada la línea del vértice* DC *de un arco descendente y el punto de contacto* E, *trazar dicha curva* (fig. 180 bis).

Por los puntos D y C trácense dos líneas verticales

DA, CB, de modo que DA sea igual á DE y CB á CE; únase el punto A con el B, y la recta AB, será la línea de rampa. Por el punto dado E tírese la EO′, perpendicular á la DC, y por A y B las rectas AO, BO′, respectivamente perpendiculares á las DA y CB; estas rectas cortarán en O y O′ la línea EO′ y serán los centros desde donde con los radios OA, O′B, se describirán los arcos AE, EB, que forman el arco pedido.

VII. *Conocida la línea de rampa* AB *de un arco descendente y la inclinación de la línea del vértice, trazar dicha curva* (fig. 156).

Por los extremos de la línea de rampa trácense las verticales AC, BD, y en un punto cualquiera de estas rectas tírese la CD de modo que tenga la inclinación dada para la línea del vértice. Ahora, desde C y D, con los radios CA, DB, descríbanse los arcos AE, BF; tírense las cuerdas á estos arcos, y por el punto de intersección I trácese la LN paralela á CD, la cual será la línea del vértice y el punto I el de contacto Siguiendo ahora lo expuesto en el anterior problema, desde O se describirá el arco AI, y desde O′ el IB, y el arco AIB que resulta será el pedido.

VIII *Dado el diámetro* AA′ *de un arco de herradura, trazar dicho arco* (fig 180).

Divídase AA′ en dos partes iguales por la perpendicular BC, y del punto de intersección D descríbase la circunferencia ABA′E; con la misma abertura de compás, y haciendo centro en F, mitad del radio, trácese otra circunferencia *nrn′*C; por el centro F y los puntos de intersección *n*, *n′*, tírense las F*n*, F*n′*, prolongadas hasta que encuentren en I, I′, á la continuación del diámetro AA′; y estos puntos I′, I, serán los centros desde donde se trazarán los arcos AJ, A′J′.

ARTÍCULO 9.º

DE LA ELIPSE Y SU RECTIFICACIÓN.

298. Qué es elipse? Qué son ejes de las elipses? Qué es centro de la elipse?—299. Qué son focos de la elipse y cómo se determinan?—300. Qué son radios vectores? A qué se llama excentricidad de la elipse?—301. Qué son diámetros de la elipse?—302. Cuerda de la elipse, qué es?—303. Qué es tangente de la elipse?—304. A qué se llama normal en la elipse?—305. Propiedades.—306. Modo de rectificar la curva de la elipse.

298. Llámase ELIPSE *una curva cerrada, simétrica en dos sentidos como el óvalo y tal que la suma de las distancias de uno cualquiera de sus puntos á otros dos llamados* FOCOS, *situados sobre el eje mayor, es siempre igual á dicho eje mayor* (figs. 177 y 178).

EJES de la elipse *son las dos rectas, perpendiculares entre sí, que determinan el largo y ancho de la superficie limitada por dicha curva*, como AB, CD (fig. 177). *El punto de intersección* O *de los ejes se llama* CENTRO *de la elipse.*

299. Si con el semieje mayor AO ú OB, desde C, extremo del eje menor, se traza el arco FJF′, cortará en F y F′ al eje mayor de la curva, y estos puntos serán sus focos.

Así diremos que FOCOS de la elipse *son dos puntos equidistantes del centro y situados sobre el eje mayor de manera que la suma de las dos rectas tiradas desde dichos puntos á cualquiera otro de la curva es igual al mismo eje mayor.* De modo que FC+F′C =AB.

300. *Las rectas que desde los focos se tiran á un mismo punto de la elipse* se llaman RADIOS VECTORES; tales son FR, F′R (fig. 178).

Se llama EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE *la distan-*

cia del centro á uno de los focos; tal es OF, OF′ (figura 177).

301. En la elipse se llaman DIÁMETROS *las rectas que pasan por su centro y terminan por ambos extremos en la curva*, como *vv′* (fig. 178).

302. CUERDA *es la recta que, sin pasar por el centro, termina por ambos extremos en la curva*; tal es NL, PM (fig. 168).

303. Se llama TANGENTE de la elipse *á una recta* SP (fig. 178) *que sólo puede tocar a la curva en un punto* R, *y tiene la propiedad de ser perpendicular á la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores, tirados al punto de contacto.*

304. Toma el nombre de NORMAL *la parte de perpendicular á la tangente, en el punto de contacto, comprendida entre esta recta y el eje mayor de la elipse*, como RT (fig. 178).

305 PROPIEDADES. En la elipse el eje mayor es el mayor diámetro que se puede considerar, así como el eje menor es el más corto de todos.

Los ejes de la elipse son ejes de simetría y su centro lo es también, y todo diámetro que no sea un eje, divide en dos partes iguales no simétricas á dicha curva y á la superficie que ella limita.

La curva de la elipse puede considerarse como una circunferencia achatada; porque cuanto más se aproximan los focos al centro, más se redondea la curva y más se acerca á la circunferencia; de manera que cuando los focos lleguen á confundirse en el centro, los ejes serán iguales y se habrán convertido en una circunferencia verdadera.

306. La curva de la elipse se rectifica aproximadamente, como la del óvalo, por medio de la siguiente regla: *Súmese el eje menor y su séptimo con el duplo del eje mayor*, y la suma será la longitud de la elipse en cuestión.

APLICACIÓN DE LA PRECEDENTE CURVA Á LAS ARTES.

307. Muchos utensilios, como cajas, azafates, cestas, mesas, etc., tienen la forma elíptica. También tiene la misma forma la planta de muchos odeones y teatros.

La curva de la elipse es también empleada por los arquitectos en las bovedas rebajadas y peraltadas. Los jardineros suelen también servirse de ella en los dibujos y adornos de los jardines, construyéndola por medio de un cordel.

Finalmente, la curva de la elipse tiene los mismos usos que la del óvalo, prefiriéndola en muchos casos á esta última, á causa de su mayor regularidad, belleza y perfección.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 5.ª

308. *Dibujar el* ADORNO *de la fig. LXXIII.*—Se compone de dos elipses tangentes, habiendo en cada una de ellas otras concéntricas, adornadas con rosetones. Las líneas auxiliares facilitarán su dibujo.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

309. PROBLEMAS.

I. *Dados los dos ejes* AB, CD, *de una* ELIPSE, *trazar esta curva* (fig. 176).

Tírense lo primero dos líneas perpendiculares AB, CD, iguales á las dadas para ejes y de manera que se corten mutuamente por mitad; ahora hay varios modos de trazar la curva, pero nosotros sólo explicaremos los que por su sencillez puedan ser más útiles.

Primer modo. Buscando los puntos con el compás (fig. 176). Determínense los *focos* (299), y valiéndose de la propiedad de que el eje mayor es igual á la suma de los radios vectores, se determinan los puntos de la curva del modo que sigue: Se toma sobre el eje mayor una distancia cualquiera, p. ejemp. Ax, y desde F, con el radio Ax, se traza un arco que pase por E′, e', y desde F′ otro que pase por E, e;

ahora desde los focos F, F′, y con un radio igual á Bx, se describen otros arcos de círculo que cortarán á los anteriores en E, e y E′, e', siendo dichos puntos de intersección otros tantos puntos de la curva. Para hallar nuevos puntos, se toma una distancia arbitraria, p. ejem. Az, y de los focos F, F′, se describen arcos de círculo que se cortarán en H, h y H′, h', con otros que desde los mismos focos se trazarán con un radio zB; así continuando se irán obteniendo tantos puntos como se quieran, y haciendo pasar por ellos una curva que se traza á pulso ó por medio de la *plantilla de curvas*, se tendrá la elipse pedida.

Segundo modó (fig. 124). Desde el punto O, intersección de los ejes de la elipse, descríbase con un radio igual al semieje mayor una circunferencia ACBD, y con un radio igual al semieje menor otra circunferencia $efgh$ concéntrica con la primera. Ahora se divide la circunferencia mayor en un número arbitrario de partes iguales, y de los puntos de división se tiran los respectivos radios, así como las correspondientes cuerdas paralelas al diámetro CD. Por los puntos donde dichos radios cortan á la circunferencia menor, se trazan paralelas al eje mayor AB, y los puntos de intersección con las antedichas cuerdas son otros tantos puntos de la elipse; así, si por los puntos n, r, z, etc., se hace pasar una curva á pulso, se tendrá dibujada una cuarta parte de la elipse. Hágase otro tanto á los otros cuadrantes del círculo, y quedará formada la elipse.

Adviértase que en cuantas más partes se divida á la circunferencia, más puntos se obtendrán de la elipse.

Tercer modo. Determinando los puntos con una tira de papel (fig. 177). Sobre el borde de una regla LE, ó mejor aún sobre una tira de papel fuerte, señálense las longitudes de los semiejes HJ, HI, partiendo de un punto cualquiera H, de modo que HJ igual á OC, teniendo entonces sobre la tira de papel los puntos H, I, J. Si se coloca la tira de manera que el punto I se halle sobre un punto cualquiera del eje mayor AB, al mismo tiempo que el punto J esté sobre un punto del eje menor CD, el punto H dará un punto de la elipse que se busca. Volviendo la tira ó la regla en todas direcciones, y procurando que en todas ellas se verifique la condición enunciada de estar los puntos I, J, respectivamente sobre los ejes AB y CD, el punto H irá dando tantos puntos de la curva como se deseen. Después se hace pasar por ellos una curva que se traza á pulso, y es la elipse pedida.

Observ. Para el que tenga la mano un poco diestra y ejercitada, este es seguramente el método más ventajoso para trazar elipses sobre el papel.

Cuarto modo. Describiendo la curva con un hilo (fig. 177). Determínense los focos F, F′ (299); cogiendo un cordel cuyo largo sea el del eje mayor AB, fíjense sus extremos en dichos focos, y poniéndolo bien tirante por medio de un *punzón* ó *lapicero*, hágase girar la punta de este instrumento sobre el plano, el cual dejará en su movimiento una curva que será la elipse buscada. En este caso el hilo hace el oficio de los radios vectores.

Observ. A este modo de trazar elipses suelen llamar de *jardinero*, á causa de que los jardineros, y también los albañiles, acostumbran construirlas por medio del cordel.

II. *Trazar una* TANGENTE *que pase por un punto* R *dado en la curva de una elipse* (fig 178).

Después de determinados los focos F, F′, y tirado los radios vectores al punto dado R, se dividirá el ángulo FRF′ en dos partes iguales por medio de la bisectriz RT; al extremo R de dicha bisectriz levantese una perpendicular SP, la cual será tangente á la elipse en el punto R.

III. *Rectificar aproximadamente una elipse cuyos ejes sean conocidos.*

Trácese una recta cuya longitud sea igual al eje menor y su séptimo sumado con el duplo del eje mayor (306).

IV. *Dada una elipse, determinar su centro y trazar sus ejes.*

Practíquese lo mismo que se ha dicho (289, III) para la determinación del centro y ejes del óvalo.

ARTÍCULO 10.

ESPIRALES, EVOLVENTES Y EVOLUTAS (C').

310. Qué es línea espiral? En dicha línea, á qué se llama punto de origen? Qué es módulo de la espiral?—311. Qué es evolvente? Qué es evoluta? Cómo puede ser trazada la evolvente?

310. Se da el nombre de ESPIRAL *á una línea curva reentrante en sí misma, que dando vueltas alrededor del punto donde empieza, va separándose progresivamente del mismo* (figs. 179 y 181).

El punto donde empieza la curva se llama PUNTO DE ORIGEN, y se suele en esta curva dar el nombre de MÓDULO *á la diferencia entre los radios de dos arcos consecutivos.*

311. Se llama EVOLVENTE *una especie de espiral que ocasiona el desarrollo del contorno de un círculo ó de un polígono regular, que toman el nombre de* EVOLUTAS (figs. 182 y 183).

La *evolvente* es suceptible de ser trazada con arcos

(C') Hay otra especie de espiral, denominada *voluta,* la cual daremos á conocer al tratar de los órdenes de arquitectura, que es donde tiene su aplicación.

de círculo ó puntos; también puede trazarse por un movimiento continuo, si se supone un hilo arrollado al polígono ó círculo que ha de servir de *evoluta*, como lo veremos en su trazado.

APLICACIÓN DE DICHAS CURVAS Á LAS ARTES.

312. La línea espiral se ve en los resortes metálicos que se emplean en los asientos de sillas y de sofaes, en los carruajes, relojes y otras máquinas.

También afecta la misma línea la curva de un caracol.

Una de las aplicaciones que tiene la evolvente de un círculo es el uso que se hace de esta curva en la figura de los dientes de un piñón que debe llevar á una barra dentada.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 5.ª

313. 1.° *Dibujar la* DOBLE ESPIRAL *de la fig. LXXIV.*—Para su dibujo obsérvese que la curva está compuesta de semicircunferencias que se unen en un punto de la recta HK, siendo concéntricas dichas semicircunferencias en los lados respectivos de la indicada recta.

2.° *Dibujar la* ESPIRAL DE CARACOL, *fig. LXXV.*—Tírense las rectas que salen del punto de origen de la espiral, y luego se dibujan las curvas onduladas que forman dicha espiral.

3.° *Copiar la* CARTELA *de la fig. LXXVI.*—En su totalidad forma una especie de espiral.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

314 PROBLEMAS.

I. *Trazar una* ESPIRAL *cuyo módulo sea la recta* r (fig. 179).

Por M tírese la recta QR indefinida y hágase MO= *r;* desde O, con el radio OM, trácese la semicircunferencia MN; ahora hágase centro en M, y con el radio MN descríbase otra semicircunferencia P*x*N. Vuélvase á hacer centro en O, y con el radio OP trácese la semicircunferencia P*z*S; y así alternando de centro en M y O, y abriendo el compás hasta donde la última semicircunferencia es cortada por la recta QR, se podrá ir continuando hasta tener el número de vueltas que se quiera.

II. *Trazar por puntos la espiral llamada de Arquímedes* (fig. 181).

Se describe una circunferencia cuyo radio esté dividido en un número de partes iguales, en 12, por ejemplo, y se divide la circunferencia en el mismo número de partes iguales que se ha dividido el radio; por los puntos de división del radio se trazan arcos ó circunferencias concéntricas con la primera, y los puntos de intersección de estos arcos con los radios respectivos serán lo puntos por donde ha de pasar la espiral; así, si se hace pasar por los puntos 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, etc., una curva á pulso, se tendrá determinada una espiral; si ahora se prolongan los radios haciéndolos duplos de lo que son y se divide la nueva parte del radio prolongado en otras 12 partes iguales y se repite otra operación analoga á la primera, se tendrá una segunda espiral; y así sucesivamente pueden irse trazando tantas como se quieran.

III. *Describir la espiral llamada* EVOLVENTE, *siendo su evoluta el cuadrado* ABC (fig. 192 bis).

Prolónguense en un mismo sentido los lados AB, BC, CD y DA del cuadrado; A será el centro del primer arco B*e*, D será centro del arco *ef*, C del arco *fg* y B del arco *gh*. Si se da una segunda revolución, A volverá á ser centro del arco *hm*, D del *mn*, etc.

IV. *Trazar la* EVOLVENTE *del círculo, siendo el diámetro de su* EVOLUTA *la línea* 4 8 (fig. 82).

Después de trazada la circunferencia, divídase á ésta en un número cualquiera de partes iguales, p ejemp. en 8, y en los puntos de división 1, 2, 3, 4, etc., tírense tangentes indefinidas; rectifíquese la circunferencia de la evoluta, y haciendo la recta AC igual á la longitud encontrada, se dividirá en 8 partes iguales, como se ha hecho con la circunferencia. Tómese ahora una parte de las ocho en que se ha dividido á la AB, y póngase de 1 á 1′ en la tangente, cuyo punto de contacto es en 1; tómense luego dos partes y pónganse de 2 á 2′, y así sucesivamente se irán poniendo tres partes de 3 á 3′, cuatro partes de 4 á 4′, cinco de 5 á 5′, y así siguiendo hasta que se pongan ocho partes de 8 á 8′. Por los puntos unidos 8, 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′ y 8′ hágase pasar una curva á pulso, que será la evolvente pedida.

ARTÍCULO 11.

CICLOIDE. — EPICICLOIDE. — EXCÉNTRICOS.

315. Cuál es la curva llamada cicloide? Cómo se considera engendrada? Qué es círculo generador de la cicloide? Qué se entiende por base y eje en dicha curva?—317. Cuáles son las principales propiedades de la cicloide?—318. Cuál es la curva llamada epicicloide? Cuándo se llama epicicloide exterior ó interior?—319. Al girar la circunferencia movible sobre de la fija, cuántas epicicloides producirá?—320. Cuáles son las curvas llamadas excéntricas?—321. Aplicaciones de las precedentes curvas á las artes.—322. Ejercicios gráficos.

315. Llámase CICLOIDE *una curva abierta y simétrica en un sentido, engendrada por la revolución de un punto de la circunferencia de un circulo que gira sobre una recta sin resbalar*; tal es la fig. AA^6B (fig. 184).

El círculo C que gira sobre la recta se llama *círculo generador;* la recta AB, que une los extremos de la curva, se llama *base*, y la recta A^6E, perpendicular á la base en su punto medio, se denomina *eje*.

316. Esta curva se atribuye generalmente al *Padre Mersenne*, religioso mínimo y célebre geómetra, quien notando en 1615, en una de las calles de Nevers, un clavo de una forma singular en la rueda de un carruaje, observó la curva que iba describiendo

dicho clavo en su carrera y se aplicó en buscar su naturaleza.

317. Como el eje de la cicloide es igual al diámetro de su círculo generador y la base es igual á la circunferencia rectificada de dicho círculo, resulta que la relación de la base á la altura es la misma que la de la circunferencia al diámetro, es decir, $\frac{22}{7}$, ó más exactamente 3'1416 : 1.

La cicloide rectificada es igual á cuatro veces su altura ó eje.

318. La EPICICLOIDE *es una curva simétrica en un sentido, que puede ser descrita por un punto de la circunferencia de un círculo que gira sobre la circunferencia de otro fijo, situado en el mismo plano*; tal es la curva *defgb* (fig. 189).

La epicicloide se llama *exterior* ó *interior*, según que el círculo generador que la ha producido haya girado por la parte exterior ó interior de la circunferencia del círculo fijo.

319. Al girar la circunferencia del círculo generador en la circunferencia del círculo fijo, producirá tantos arcos ó epicicloides como unidades haya en el denominador de la relación que existe entre la circunferencia movible y la circunferencia fija, ó bien entre sus diámetros, estando reducida la relación á su expresión más simple. Si, por ejemplo, la circunferencia movible es igual á $^1/_5$ de la circunferencia fija, resultarán cinco arcos ó epicicloides iguales.

320. Se da el nombre de EXCÉNTRICOS, en general, *á toda curva que no tiene sus puntos equidistantes del centro*; tal es, por ejemplo, la elipse y la curva llamada de *corazón*; el círculo mismo se convierte en un excéntrico cuando el eje que le imprime un movimiento de rotación no pasa por su centro.

Los *excéntricos* de que nosotros nos ocuparemos son unas curvas (figs. 190, 191 y 194) que sirven en la maquinaria para transformar un movimiento de rotación en otro alternativo, ya circular, ya rectilíneo. También sirven para procurar el reposo al objeto movido, cuando pasa éste por ciertos puntos más ó menos distantes del eje de los mismos excéntricos.

APLICACIÓN DE DICHAS CURVAS Á LAS ARTES.

321. En la arquitectura se emplea la *cicloide*, con alguna ventaja, en los arcos de bóveda muy rebajada, á causa de que las bóvedas de vuelta cicloidal ejercen menos fuerza ó empuje sobre sus pies derechos que los arcos correspondientes de forma elíptica. Pero en este caso es menester que la relación del ancho del arco á la altura sea precisamente la que se ha indicado anteriormente (317).

En la mecánica tiene también esta curva muchas aplicaciones; así, los dientes de una barra ó cremallera destinada á mover un piñón, deben tener la curva de una cicloide, engendrada por un círculo que tenga por diámetro el radio de la circunferencio concéntrica al piñón y tangente á la barra de la cremallera.

Cuando un cuerpo debe descender de cierta altura y en el menor tiempo posible, sin que lo verifique verticalmente, es menester que lo haga resbalando ó rodando sobre un arco de cicloide que pase por el punto de partida y por el término de la carrera, *pues la cicloide es la curva de más pronto descenso.*

La curva de la *epicicloide* es la que deben tener los dientes de las ruedas que se engranan, para que no haya choques ni embarazos en su movimiento.

Se encuentran aplicaciones de los *excéntricos* en los bombas y la mayor parte de las máquinas hidráulicas, en las prensas, en las llaves ó válvulas de las máquinas de vapor, en las máquinas de hilar, etcétera.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

322. Problemas.

I. *Dada la base* AB *de una cicloide, trazar por puntos esta curva* (fig. 185).

Por ser la base de la cicloide igual á la circunferencia del círculo generador, si se divide la AB en 22 partes iguales y se levanta en su punto medio una perpendicular CD igual á 7 de dichas partes, esta recta será el diámetro del círculo generador y también el eje de la cicloide pedida. Trazada, pues, la CD y sobre ella, como á diámetro, la circunferencia DECF, se dividirá esta curva en 22 partes iguales (D'), empezando la división por el punto D. Tírense por cada uno de estos puntos paralelas indefinidas á la AB, tales como $1a$, $1a'$, $2b$, $2b'$, etc.; así, ahora se hace $1a = 1a' = A1$, $2b = 2b' = A2$, $3c = 3c' = A3$, y así sucesivamente se irán obteniendo los puntos $a, b, c \ldots a', b', c' \ldots$ que determinan la cicloide que se busca.

Observ. 1.ª Si no se hubiese conocido sino el eje ó montea DC de la cicloide, entonces se hubiera levantado en su extremo C una perpendicular AB, y partiendo la DC en siete partes iguales, se pondrían once de ellas de C á A y otras once de C á B. En lo demás se operaría del mismo modo.

Observ. 2.ª Con tal que la recta ACB, que sirve de base á la cicloide, sea igual á la circunferencia rectificada del círculo generador, no hay necesidad que el número de partes iguales en que se ha dividido á la circunferencia y á la base sea de 22', como se ha hecho, sino que puede ser cualquier otro número, con tal que sea igual el número de divisiones de la circunferencia al de la base.

II. *Trazar la cicloide conociendo el círculo generador* (fig. 184).

Al girar el círculo generador sobre la línea AB, es claro que su centro C estará siempre en la recta CC^6, paralela á la base AB; dividiendo, pues, la circunferencia en un número arbitrario de partes iguales, p. ejemp. en doce, y llevando una de estas partes rectificada sobre la base AB tantas veces cuantas sean las divisiones de la circunferencia, haciendo lo mis-

---

(D') Para dividir la circunferencia en 22 partes iguales, divídase primero en once (264, XVI), y luego se puede dividir por mitad cada una de estas partes.

mo con la horizontal CC^6, partiendo del punto C, se tendrá la base dividida en las mismas partes que lo estará la circunferencia rectificada; tirando por los puntos 1, 2, 3, etc., de la división de la circunferencia paralelas á la base, será fácil determinar varios puntos de la curva; porque cuando el punto C del círculo generador habrá llegado en C′, el punto 1 se hallará en 1′ sobre la base y el punto A se habrá elevado á la altura de la primera división horizontal que pasa por 1.

Luego si con un radio CA se traza desde C′ un arco de círculo, su intersección con la horizontal que pasa por 1 determinará el punto A′, el cual pertenece á la cicloide; si con el mismo radio CA se describe desde C″ el arco $2'A^2$, su intersección con la horizontal $2A^2$ determinará el punto A^2, que es también de la cicloide; y así siguiendo, desde C^3 se describirá el arco $3'A^3$; desde C^4 el arco $4'A^4$, y así continuando se obtendrán los puntos A^5, A^6, etc.

Observaremos, como ya lo hemos manifestado antes, que la base AB ha de ser igual á la circunferencia rectificada del círculo generador, y que en cuantas más partes se divida á ésta, más puntos se hallarán de la cicloide.

II. *Trazar por un medio mecánico una cicloide cuya base sea la recta* AB (fig. 184).

Conforme á lo explicado anteriormente, determínese el círculo generador C y constrúyase de metal ó de una madera delgadita. A lo largo de la recta AB ajústese el canto de una regla y hágase rodar sobre este canto dicho círculo, haciendo que al empezar el movimiento se halle en contacto con el punto A, extremo de la base dada. Si en este punto A de la circunferencia del círculo movible se sujeta una punta de lápiz, dicha punta trazará una curva AA^6B, que será la cicloide pedida.

IV. *Trazar por puntos una epicicloide plana exterior, cuyo círculo sea el dado O y el movible el C* (fig. 193).

Para el trazado de las epicicloides por puntos hay la siguiente REGLA GENERAL:

Desde el centro del círculo fijo O, con un radio R $+ r$, trácese una circunferencia; determínense dos números N, n, que guarden la razón R : r de los radios de los círculos fijo y movible. Divídase la circunferencia del primero en N partes iguales y la del segundo en n partes también iguales, y por los puntos de división de la circunferencia del círculo fijo tírense radios prolongados hasta encontrar la circunferencia descrita con el radio R$+r$. Haciendo centro en los puntos donde estos radios encuentran á esta última circunferencia, descríbanse, con un radio r, otras tantas circunferencias, sobre las cuales, á partir de los puntos de división del círculo fijo y principiando por el punto de origen a, se pondrá, siguiendo la dirección del círculo generador, *una* parte en la 1.ª circunferencia de dicho círculo, *dos* en la 2.ª, *tres* en la 3.ª, y así consecutivamente. La epicicloide será la curva que se haga pasar á pulso por los puntos así determinados.

Conocida ya la regla general, pasemos á aplicarla.

Primer caso. Que el círculo fijo y el movible tengan radios iguales (fig. 193).

Siguiendo lo dicho anteriormente, hágase centro en O, y con un radio $oc{=}2oa$, descríbase una circunferencia; ahora divídase la circunferencia del círculo fijo o en un número de partes iguales, p. ejemp., en 6, y por los puntos de división tírense los radios $o1$, $o2$, $o3$, etc., que terminen en los puntos c, c', c''..... c^{v}; hágase centro en estos puntos, y con el radio ca trácense otras tantas circunferencias. Ahora, si suponemos que a es el punto de contacto de los dos círculos y que el movimiento del círculo generador se efectúa desde *a* hacia 1, 2, etc., se toma una abertura de compás igual á una de las 6 partes en que se ha dividido la circunferencia, y se pone *una* parte de 1 á *b*, *dos* de 2 á *d*, *tres* de 3 á *e*, *cuatro* de 4 á *f* y *cinco* de 5 á *g*. Se hace pasar por los puntos *a*, *b*, *d*, *e*, *f*, *g*, una curva, que será la epicicloide pedida.

Segundo caso. Que el círculo fijo tenga un radio duplo del círculo generador (fig. 189).

Aplicando la regla establecida, se dividirá la circunferencia del círculo fijo en un número de partes iguales cualquiera, p. ejemp., en 16, y por los puntos de división se tirarán los radios $o1$, $o2$, $o3$, etc., prolongados hasta encontrar la circunferencia que pasa por los puntos c, c', c'', haciendo $1c = {}^1/_2 o1$; por los puntos c, c', c'', etc., se describirán otras tantas circunferencias, y dividiendo una de éstas en 8 partes iguales (á causa de ser el círculo fijo de duplo radio que el generador), se pondrá *una* de estas partes de 1 á *d*, *dos* de 2 á *e*, *tres* de 3 á *f*, *cuatro* de 4 á *g*, etcétera, y haciendo pasar una curva por los puntos que se irán obteniendo, quedará trazada la epicicloide.

Tercer caso. Que el radio del círculo fijo guarde con el del generador una razón dada, por ejemplo, la de 6 (fig. 192).

Determínense dos rectas que estén en la relación de 6 : 8, las cuales serán los diámetros del círculo fijo y del movible; divídase la circunferencia del primero en 6 partes iguales, y se trazarán los radios y círculos movibles como en los problemas anteriores. Se dividirá la circunferencia del círculo generador en 8 partes iguales, y se pondrá *una* de dichas partes de 1 á *b*, *dos* de 2 á *c*, *tres* de 3 á *d*, *cuatro* de 4 á *e*, etcétera, hasta obtener los demás puntos por donde ha de pasar la curva de la epicicloide.

IV. *Dibujar un excéntrico que no sea simétrico y que el diámetro de su eje sea* AB (fig. 190).

Después de trazada una circunferencia sobre dicho diámetro AB, prolónguese á éste indefinidamente. Sobre esta prolongación, desde A hacia D, póngase un número arbitrario de veces, p. ejemp., 6, una magnitud cualquiera, AC, y haciendo centro en O, punto medio del eje, hágase pasar por los puntos obtenidos *c*, *e*, *m*, *n*, *r*, *s*, circunferencias concéntricas. En seguida divídase la parte de línea A*s* en dos partes iguales por medio de la perpendicular *m*F; en esta perpendicular señálese un punto á arbitrio, tal como F, y se hará pasar por este punto una circunferencia concéntrica con las anteriores, y á partir de F se dividirá esta circunferencia en doble número de partes iguales de las cont nidas en el intervalo AS, esto es, en 12. Ahora, con el radio OF, haciendo centro en 1, se cortará en 1′ á la primera circunferencia que pase por *c*; desde 2, se cortará en 2′ á la que pasa por *e*, y así sucesivamente se irán obteniendo los otros puntos 3′, 4′, 5′, etc., hasta 12.

Observ. Si en vez de poner 6 magnitudes iguales desde A á *s*, se hubiesen puesto 8, la circunferencia que pasa por F se había de dividir en 16 partes, y entonces se habrían obtenido *dieciséis* puntos para trazar el excéntrico, en vez de los *doce* que se han obtenido ahora.

V. *Dibujar un excéntrico simétrico cuyo eje sea el círculo* AB (fig. 191).

Primer modo. Tírese el diámetro AB prolongado indefinidamente, y tomando sobre dicha prolongación una distancia A6 igual al largo que se quiera que tenga el excéntrico, se describirá desde O, con el radio O6, una circunferencia. Ahora, tomando como á diámetro la recta AC, se describe una semicircunferencia C, *u*, *s*, *r*, *m*, *n*, A, la cual se divide en un número cualquiera de partes iguales, p. ejemp., en 6; por los puntos de división se tiran las rectas *uu'*, *ss'*, *rr'*, *mm'*, *nn'*, perpendiculares al diámetro CA, y por los puntos *u'*, *s'*, *r'*, *m'*, *n'*, se hacen pasar circunferencias que sean concéntricas con las anteriores. A partir de C, se divide la circunferencia que pasa por este punto en doble número de partes iguales de la que se ha dividido la semicircunferencia C*r*A, y como ésta lo ha sido en 6, la circunferencia lo será en 12. Tírense ahora los radios correspondientes á los puntos de división 1, 2, 3, etc. y la curva que, saliendo del punto A, pase por ambos lados, por la intersección de la *primera* circunferencia con el radio 1, en la intersección de la *segunda* circunferencia con el radio 2, en la de la *tercera* circunferencia con el radio 3, y así consecutivamente, hasta que pase por la intersección de la *sexta* circunferencia con el radio 6, será un excéntrico simétrico.

Segundo modo (fig. 194). Con un radio arbitrario AO, descríbase una circunferencia á la que se tirará un diámetro vertical prolongándolo por ambos extremos, de manera que AC sea el largo que se quiera dar al excéntrico. Desde O se traza, con el radio OC, una circunferencia, y la distancia AB se divide en *cuatro* partes iguales; por los puntos de división *r*, *m*, *n*, se describen otras tantas circunferencias concéntricas con las anteriores, y luego se traza el diámetro *dd* perpendicular con el BC; divídanse los cuadrantes que resultan en dos partes iguales por medio de las bisectrices *e*5, y en seguida tírense las otras bisectrices *hf*, los puntos 1, 2, 3, 4, 5, C, serán otros tantos puntos por donde pasará la curva del excéntrico que nos hemos propuesto dibujar.

ARTÍCULO 12.

PARÁBOLA.—HIPÉRBOLA.—CATENARIA.

323. Qué es parábola? Qué se entiende por eje de una curva? Qué se entiende por foco, vértice y directriz de la parábola?—324. Qué es diámetro, radio vector, tangente y parámetro de una parábola?—325. Propiedades de dicha curva.—326. Qué se entiende por hipérbola?—327. Qué es diámetro, tangente y normal de la hipérbola? A qué se da el nombre de asíntotas?—328. Cuáles son las principales propiedades de la hipérbola?—329. Cuál es la curva llamada catenaria?—331. Ejercicios gráficos.

323. Para dar á conocer la *parábola*, imagínese una curva ZAX (fig. 186) abierta y simétrica en un sentido, compuesta de dos ramas ZBA, ANX, que pueden prolongarse indefinidamente; sobre el eje PD concíbase un punto F á una distancia arbitraria, y á continuación del eje otro punto P, de modo que la distancia AP sea igual á la AF; por P considérese la perpendicular HC, y si los puntos de la curva en cuestión son tales que cada uno de por sí diste igualmente de la recta HC y del punto F, dicha curva será una *parábola,* el punto F su FOCO, el A su VÉRTICE y la recta HC su DIRECTRIZ.

Así, se dirá que PARÁBOLA *es una curva abierta, simétrica en un sentido y cuyos puntos distan cada uno de por sí lo mismo del* FOCO *que de la* DIRECTRIZ.

324. En la parábola toma el nombre de DIÁMETRO *cualquiera recta paralela al eje*, como *ut*.

Se llama RADIO VECTOR *á la recta que desde el foco va á un punto cualquiera de la curva*; tal es FB; y se denomina TANGENTE *la recta que sólo toca á la curva en un punto*, llamado PUNTO DE TANGENCIA Ó DE CONTACTO, como *er*.

PARÁMETRO *es el duplo de la distancia que hay entre el foco y la intersección de la directriz.*

325. Respecto á la parábola, deben saberse las siguientes propiedades:

1.ª La perpendicular al eje de la parábola correspondiente al foco, y limitada en sus extremos por la curva, es igual al parámetro de ésta.

2.ª La tangente de dicha curva es bisectriz del ángulo formado en el punto de contacto por el radio vector y la prolongación del diámetro correspondiente á dicho punto.

3.ª Por un punto de la parábola sólo se puede tirar una tangente á esta curva, y dos tangentes desde un punto fuera de ella.

326. La *hipérbola* es otra curva no menos interesante que la anterior. Para darla á conocer, concíbase una curva simétrica en dos sentidos NAG, N'A'G' (fig. 295), compuesta de dos ramas abiertas que se pueden prolongar hasta el infinito. La línea AA' que termina en las dos ramas de la hipérbola, es el eje *limitado* de la curva, el cual suele tomar el nombre de *primer eje*, y la recta BC, perpendicular enmedio de AA', es el eje *ilimitado*, que se suele llamar *segundo eje*; el punto O, en donde se cortarán los dos ejes, es el *centro*, y AA' los vértices. Si en uno de éstos se levanta la recta AD perpendicular á AA' é igual con la OC, que supondremos mitad del segundo eje, y desde O con el radio OD se describe una semicircunferencia, ésta cortará la prolongación del primer eje en los puntos F y F', los cuales serán los focos de la hipérbola. Si desde los focos se tiran dos rectas FE, F'E á un punto cualquiera E de la curva, dichas rectas toman el nombre de RADIOS VECTORES, y si *la diferencia de estos radios es siempre igual al primer eje* AA', dicha curva será una *hipérbola*.

Por lo que diremos que la HIPÉRBOLA *es una curva abierta, simétrica en dos sentidos, compuesta de dos ramas que pueden prolongarse hasta el infinito y cu-*

yos puntos son tales que la diferencia de sus radios vectores es siempre igual al primer eje.

327. En esta curva se llama DIÁMETRO *á toda recta* HH′ (fig. 296) *que, pasando por el centro, tiene sus extremos en la hipérbola;* TANGENTE *es la recta que no puede tocar á la curva más que en un solo punto*, llamado punto de *tangencia* ó de *contacto*, como LJ, y NORMAL *á toda recta que*, como ID, *es perpendicular á la tangente en el punto de contacto.*

Se da, por fin, el nombre de ASINTOTAS á dos rectas BC′, B′C (fig. 295), que formando el mismo ángulo con el primer eje, se va acercando cada vez más á las ramas de la hipérbola sin jamás confundirse con ellas.

328. *Las principales y más interesantes propiedades de la hipérbola son las siguientes:*

1.ª La diferencia de los radios vectores es siempre igual al primer eje de la curva.

2.ª La bisectriz del ángulo formado por los radios vectores correspondientes á un punto de la hipérbola, es una tangente á la curva en dicho punto.

3.ª Por un punto de la hipérbola sólo se puede tirar una tangente á esta curva, y dos tangentes á cada una de sus ramas desde un punto fuera de ella.

4.ª La normal de un punto de la hipérbola es siempre bisectriz del ángulo formado por el radio vector que sale del foco más inmediato á dicho punto y la prolongación del que sale del otro foco más distante. *Así, la normal* DI (fig 296) *es bisectriz del ángulo* PIF′.

5.ª Todos los diámetros de la hipérbola sólo se cortan mutuamente por mitad en el centro de esta curva.

6.ª El primer eje de la hipérbola es el menor de los diámetros que se puede tirar á la curva.

7.ª Los dos ejes de la hipérbola son también ejes de simetría de dicha curva.

329. Se llama CATENARIA *á una curva abierta* (fig. 300) *que forma naturalmente una cadenilla ó una cuerda, perfectamente flexibles y uniformemente pesantes, que estando suspendidas libremente de dos puntos fijos* A *y* B, *situados sobre dos verticales diferentes, quedan abandonadas á la sola acción de su propio peso.*

Es según esta curva como se han de colocar los cuerpos de un mismo peso, cuando se quiere que se sostengan en el aire por el solo efecto de su contacto. Esta preciosa propiedad ha sido verificada por el célebre *Rondelet.*

APLICACIÓN DE ESTAS CURVAS Á LAS ARTES.

330. Como la curva de la *parábola* refleja la luz que emana de su foco en direcciones paralelas á su eje, se ha aprovechado esta propiedad para la construcción de los faroles de reverbero y de los faroles que se ponen en los faros para guía de los navegantes. Los espejos ustorios afectan también la forma parabólica, así como igualmente las bóvedas de algunos hornos de cocer cal, etc.

Los juegos de agua y los proyectiles arrojados, cuando no siguen direcciones verticales, describen en su subida y descenso una curva que difiere muy poco de la parábola.

La *hipérbola* puede ser también empleada para la construcción de reverberos cuando se quiere diseminar la luz uniformemente, y con la menor pérdida posible, sobre una superficie de dimensiones mucho mayores que las del reflejo. Tales deben ser, por ejemplo, los reverberos destinados á la iluminación de plazas públicas.

Tiene también esta curva alguna aplicación en el dibujo de los cortes de cantería, como, por ejemplo, en las *plantillas* de algunas bóvedas cónicas, en las de la puerta de una torre circular ataluzada, etc.

La *catenaria* se emplea con ventaja para las bóvedas ó arcos que, á más de tener un gran ancho, hayan de sustentar enormes pesos. Esta curva es la que se adoptó en el *Panteón francés,* en París, para los arcos que sostienen la columnata circular de la cúpula de dicho edificio, así como también para la bóveda alta colocada entre la cúpula interior y la exterior.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

331. PROBLEMAS.

1. *Dado el eje* CD *de una parábola, su vértice* C *y*

uno de sus puntos E, *trazar su directriz y determinar su foco y parámetro* (fig. 187).

Unase el vértice C con el punto dado E por medio de una recta, y en su extremo E levántese la perpendicular ED hasta que encuentre el eje; desde el mismo punto E tírese la EJ perpendicular al eje, y el segmento LE será el *parámetro*. Hágase CG=CF=$^1/_4$ LD, y F será su *foco;* ahora levántese en el punto G la perpendicular AB, la cual será la *directriz* pedida.

II. *Dado el eje de una parábola, su vértice* C *y uno de sus puntos* J, *trazar dicha curva* (fig. 187).

Después de haber determinado la directriz y el foco, según lo expuesto en el problema anterior, se baja desde el punto dado J una perpendicular JE que corte al eje; se divide á éste en un número de partes cualquiera, iguales ó desiguales, y por los puntos de división 1, 2, 3, etc., se levantan perpendiculares que le crucen; se toman sucesivamente con el compás las distancias 1G, 2G, 3G, etc., y con ellas se trazan desde el foco F arcos que corten á dichas líneas en los puntos H, I, N, etc., los cuales pertenecen á la parábola.

Observ. Se puede también resolver este problema sin necesidad de conocer el foco y la directriz, como lo veremos por medio de la resolución siguiente (fig. 188).

Desde el punto Z tírese la ZX perpendicular al eje, y hágase DX=DZ; divídase al eje en un número de partes iguales, en 4, p. ejemp., y lo mismo las rectas ZD y DX; por Z y los puntos 1, 2, 3, del eje, tírense las Z1, Z2, Z3, hasta cortar á las 1*b*, 2*c*, 3*n*, tiradas paralelamente al eje AD, y los puntos de intersección *b*, *c*, *n*, pertenecen á la parábola. Si lo mismo que se ha operado respecto del punto Z se hace respecto del punto X, se determinarán los otros tres puntos de la curva *b'*, *c'*, *n'*, por los cuales se hará pasar una curva á pulso, que será la parábola pedida.

III. *Conocida la directriz* HC, *el eje* AD, *el vértice* A *y un punto* Z *de una parábola, describir esta curva por un movimiento continuo* (fig. 186).

Lo primero determínese el foco F, haciendo AF= AP; por Z tírese la ZH perpendiculor á la directriz HC, y en uno de los brazos de una escuadra, á partir del vértice de su ángulo exterior, póngase nm=ZH; tómese un hilo de igual largo que nm, y sujétese uno de sus extremos en el punto m del canto de la escuadra, y el otro en el foco F. En seguida ajústese una regla á lo largo de la directriz HC, y contra su canto el brazo menor de la escuadra nC. Hágase resbalar el lado menor de la escuadra á lo largo de la regla HC, desde P hacia C, y teniendo el hilo siempre tirante por medio de un lápiz que lo mantenga ajustado sobre el canto nm de la escuadra, la curva ANX descrita por el lápiz será la mitad de la parábola. Volviendo la escuadra al otro lado, se trazará de la misma manera la otra rama ó mitad.

IV. *En un punto* B *de una parábola tirar una tangente á esta curva* (fig. 186).

Por el punto propuesto B tírese el diámetro ut y el radio vector BF, y la bisectriz del ángulo FBu será la tangente pedida.

Observ. Si el punto propuesto fuese el vértice A, la tangente sería perpendicular al eje en dicho punto.

V. *Conocidos los dos ejes* AA′, BB′, *de una hipérbola, describir por puntos esta curva* (fig. 301).

Después de hallados los focos F, F′, según lo explicado anteriormente (326), señálese sobre la prolongación del primer eje AA′ varios puntos á arbitrio, tales como c, n, m, y con los radios A′c, A′n, A′m, trácense desde F′ varios arcos que pasen por los puntos d, e, f, d', e', f'; ahora, desde el otro foco F y con los radios Ac, An, Am, descríbanse nuevos arcos que cortarán respectivamente á los anteriores en los puntos *d*, *e*, *f*, *d′*, *e′*, *f′*, cuyos puntos pertenecen á una de las ramas de la hipérbola que se quiere trazar. Para dibujar la segunda rama EDAD′E′, se operará de la misma manera que para la anterior, con la sola diferencia de que al trazar los arcos que determinan los puntos, en vez de hacer centro en F, se hará en F′, y viceversa.

VI. *Conocido el primer eje* AA′ *de la hipérbola y sus focos* F, F′, *construir dicha curva por un movimiento continuo* (fig. 297).

Fíjese en uno de los focos, p. ejemp., F, el extremo de una regla F*n*, de modo que pueda girar alrededor de dicho punto con toda facilidad, y que el agujero que se coloca en el punto F esté en línea recta con el canto *en* de la regla; ahora tómese un hilo cuyo largo sea el F*n* — AA′, es decir, el largo de la regla menos el largo del primer eje, y fijando uno de sus cabos en el extremo *n* de la regla y el otro en el foco F, se hará girar la regla alrededor del punto F, manteniendo siempre el hilo tirante por medio de un lápiz ú otro instrumento á propósito, que no deje de estar en contacto con el canto F*n* de la regla, y se describirá una curva D′, *e′*, A′, que será la mitad de una de las ramas de la hipérbola. Volviendo la regla y manteniendo su extremo en el punto F, se describirá la otra mitad A′*r*E′, y quedará concluída una rama de la hipérbola. Si ahora se sujeta el extremo de la regla en el otro foco F′ y se procede de un modo análogo á lo que se ha hecho anteriormente, se obtendrá la otra rama DAE, con lo que se tendrá la hipérbola.

VII. *Por un punto* I *de una hipérbola* (fig. 296) *tirar una tangente á dicha curva.*

Según lo expuesto en el párrafo 328, 2.ª, tírense los radios vectores FI, F′I, y la bisectriz LIJ del ángulo formado por dichos radios vectores es la tangente pedida.

VIII *Tirar la normal correspondiente al punto* I *de una hipérbola* (fig. 296).

Conforme con la propiedad anunciada en 328, 4.ª, se tirarán al punto I los radios vectores FI, F'I, y prolongando el que sale del foco más distante del punto dado, que es FI, resultará el ángulo PIF'. y la bisectriz DI de este ángulo será la normal que se pide.

IX. *Trazar una hipérbola. conociendo los vértices* AA' *y un punto cualquiera* B *de la curva* (fig 302).

Prolónguese el eje AA' indefinidamente, y por el punto dado B y el vértice A levántense las rectas BE, GH. perpendiculares á la recta AD. prolongación del primer eje: hágase DE=DB, y el punto E pertenecerá á la hipérbola. Tírense ahora las rectas EG. BH paralelas á DA, y divídanse dichas rectas en el mismo número de partes iguales en que se dividen las ED y DB. aquí lo son en tres: únase el vértice A con los puntos de división de las rectas EG y BH, y el vértice A' con los de las ED y DB, y las intersecciones A1 y A'1', A2 y A'2', pertenecerán á la hipérbola pedida.

X. *Trazar por puntos una* CATENARIA, *conociendo la base* AB *y la altura* CD (fig. 304).

Del punto C como á centro. descríbase el arco BE, y del punto E, con el radio EC. trácese el arco CF, el cual cortará en F la línea DJ tirada desde D paralelamente á AB. El segmento DF es el parámetro de la catenaria que se trata de construir, por lo que se hará DG=DF y por G se tirará la recta HI paralela con AB, levantando al propio tiempo en A y B las perpendiculares AH, BI.

Ahora, desde el punto G como á centro, y con el radio GC, descríbase el arco CJ, y por J tírese la JG; haciendo centro en J, y con el radio JD, trácese el arco DL, y trasládese la distancia LG de I á M. El punto M será el origen de una curva $Mr'ns'Dl'pu'$, que toma el nombre de *logarítmica*, y que nos servirá para determinar la catenaria.

Para trazar la logarítmica, divídase IG y GH por mitad en N y P, y por estos puntos tírense las rectas Nn, Pp, paralelas á la GC. Hállese ahora una media proporcional entre IM y GD, y póngase de N á n; búsquese en seguida una tercera proporcional á Nn y GD, y póngase de P á p; los puntos n y p corresponden á la logarítmica que se busca. Ahora, para obtener más puntos de esta curva, se dividirán por mitad las distancias iguales IN, NG, GP y PH, y se tirarán las rectas rr', ss', ll', uu', paralelas con GC; búsquese una media proporcional entre IM y Nn, y colóquese de r á r'; otra media proporcional entre Nn y GD y póngase de s á s', y los puntos r', s', pertenecerán á la logarítmica. Para hallar los otros puntos correspondientes á la otra parte de la GC, búsquese una tercera proporcional á ss' y GD, y colóquese de t á t'; en seguida otra tercera proporcional á rr' y DG, que se pondrá de u á u', y los puntos t', u', son también de la logarítmica; por lo que, por los puntos obtenidos, se trazará á pulso la logarítmica MDu', pasando por los demás puntos intermedios.

Ahora para hallar varios puntos de la *catenaria*, se sumarán las distancias que median desde la recta HI á la curva logarítmica, de manera que cada media proporcional se sume con su tercera proporcional correspondiente, y la mitad de la suma se pondrá sobre las rectas en que estén dichas distancias á uno y otro lado de la GC, partiendo siempre de la recta HI. Es decir, que $ra = uo = \frac{1}{2}(rr' + uu')$, $Nb = pf = \frac{1}{2}(Nn + Pp)$, $sc = te = \frac{1}{2}(ss' + ll')$; ahora, la curva que pasa por los puntos $AofeDcbaB$, que se traza á pulso, será la *catenaria* pedida.

XI. *Trazar por un medio mecánico una* CATENARIA *cuya abertura sea la recta* AB *y su altura la* DC (fig. 300).

Sobre un plano perfectamente vertical, señálense dos puntos A y B, situados en línea horizontal y de manera que su distancia sea la propuesta para la abertura de la catenaria; enmedio de AB tírese, hacia abajo, la perpendicular DC, haciendo que su longitud sea la que se quiere dar á la montea de la curva; en los puntos A y B fíjese una cuerda muy flexible y uniformemente igual, ó mejor aún una cadenilla de metal, la cual se alarga ó se acorta lo conveniente hasta que pasa por el punto dado C, y la curva así formada será la catenaria pedida. Ahora, con un lápiz y de un modo muy ligero, á fin de no mover con el roce la cuerda ó cadenilla, se señala la curva en el plano; ó bien se marcan sus principales puntos, y luego, ya sea á pulso ó ya con una regla muy flexible que pase por los puntos marcados antes, se traza igualmente.

ARTÍCULO 13.

MOLDURAS.

332. Qué son molduras? Cuántas clases de molduras hay?—333. Qué es filete, listelo ó plinto?—334. Cuáles son las principales molduras curvas?—335. Qué es un bocel? Qué es un junquillo ó baqueta? A qué moldura se llama toro?—336. Qué es un cuarto bocel?—337. Qué es un caveto ó media caña?—338. Qué se entiende por gorguera?—339. A qué moldura se llama gola? Qué es gola derecha y gola reversa?—340. Qué es talón? Cuándo el talón se llama derecho y cuándo reverso?—341. Qué se entiende por escocia?—342. Qué es altura de una moldura? Qué son molduras compuestas?—343. Ejercicios gráficos.

332. Llámanse MOLDURAS *los miembros ó partes menores de los órdenes de arquitectura, los cuales sirven también para decorar los muebles.*

Hay molduras *rectas* ó *planas*, *curvas* y *compuestas*.

333. Las principales molduras planas son: el *filete*, el *listelo*, el *plinto* y la *faja*.

El FILETE *es una moldura cuadrangular y angosta, en la que la parte saliente es por lo regular igual á la altura*, como IH (fig. 195).

Cuando la altura es algo mayor que la parte saliente, se la suele denominar LISTELO.

FAJA *es una moldura ancha, plana y muy poco saliente* (fig. 205 bis).

334. Las principales molduras curvas son: el *bocel*, el *cuarto bocel*, el *caveto* ó *media caña*, la *gorguera*, la *gola*, el *talón* y la *escocia*.

335. El BOCEL *es una moldura convexa, compuesta de dos rectas paralelas y un semicírculo que las une*, como EADBF (fig. 195).

Cuando el bocel es de muy poca altura, se le suele llamar JUNQUILLO Ó BAQUETA.

TORO es un bocel que lleva ordinariamente un filete en su parte superior (fig. 196).

336. El CUARTO BOCEL *es una moldura convexa, compuesta de dos paralelas y un cuadrante de círculo, en que la parte saliente es igual á la altura* (figura 197).

337. El CAVETO Ó MEDIA CAÑA *es una moldura hueca y circular, compuesta de dos paralelas y un cuadrante de círculo* (fig. 198).

Esta moldura por lo regular va acompañada de un filete en su parte saliente.

338. La GORGUERA *es una moldura ahuecada semicircular* (fig. 199). Generalmente lleva un filete en cada extremo.

339. La GOLA *se compone de dos paralelas y una curva formada de un caveto y cuarto bocel* (figs. 200 y 201).

Si el *caveto* forma la parte saliente, como en la fig. 200, se llama GOLA DERECHA, y si la forma el *cuarto bocel*, como en la 201, se la denomina GOLA INVERSA Ó REVERSA.

340. El TALÓN *es una gola al revés*, y según sea esta derecha ó reversa, será el talón *derecho* ó *reverso*. La fig. 205 es un talón derecho y la 204 uno de reverso.

341. La ESCOCIA *es una moldura formada de dos paralelas y una curva ahuecada, compuesta de dos ó más arcos de círculo, trazados con diferentes radios* (figs. 206 y 207).

342. En las molduras se llama *altura* á la distancia que media entre las dos paralelas que pasan por el extremo de la curva, y se denomina *vuelo* lo que resalta la moldura respecto á su inmediata

Todas estas molduras se combinan de diferentes maneras, formando otras, llamadas *molduras compuestas*, que no sólo sirven para la arquitectura, sino también para la decoración y adorno de los muebles y otros objetos, como armarios, tremos, cómodas, candeleros, floreros, sofaes, quinqués, jarros y otros varios utensilios de un uso continuo.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

343. PROBLEMAS.

I. *Conocida la altura* BA *de un bocel, delinear esta moldura* (fig. 195).

En los extremos A y B de la recta propuesta, levántense las perpendiculares AE, BF; divídase la altura AB en dos partes iguales, y el punto O será el centro de la semicircunferencia ADB.

II. *Trazar el* TORO *siendo su altura la recta* ab (fig. 196).

Se resuelve como el problema anterior, y luego se divide la altura *ab* en *cinco* partes iguales y se pone media parte de *a* á *c*, y de *c* á *d* para el filete.

III. *Diseñar el* CUARTO BOCEL *que tenga por altura la recta* ac (fig. 197).

Después de tiradas las rectas *nm*, *cu*, se describe desde *a* el cuadrante *cn*. Si se le quiere añadir el filete que lleva en su parte saliente, suele tener la altura igual á $^1/_4 ac$ y el vuelo á $^1/_8$.

IV. *Describir un* CAVETO Ó MEDIA CAÑA *cuya altura sea la recta* ca (fig. 198).

Una vez tiradas las *nm*, *bd*, perpendiculares á *ca*, se forma el cuadrado *acbn*, y el punto *b* es el centro desde el cual, con el radio *bc*, se traza el cuadrante *cn*. La altura del filete suele ser la cuarta parte de *ac*.

V. *Trazar la* GORGUERA *cuya altura sea la recta* ab (fig. 199).

En los extremos de la recta propuesta *ab*, levántense las perpendiculares *ca*, *bd*; divídase la *ab* en dos partes iguales, y de su punto medio *o* descríbase con el radio *oa* una semicircunferencia. Si se quieren añadir los filetes, se hará su altura igual á $^1/_4 ab$.

VI. *Delinear la* GOLA DERECHA, *siendo su altura igual á su vuelo* (fig. 200).

Trazadas las rectas *ab*, *ce*, perpendiculares á *cd*, altura propuesta, se divide á ésta en dos partes iguales por medio de la perpendicular *fh*; se hace *da* igual á *dc*, y se baja la perpendicular *ah*; el punto de intersección *h* es el centro del arco *ag*, y el *f* del arco *gc*.

VII. *Trazar la* GOLA DERECHA, *teniendo su vuelo mayor ó menor que la altura* (fig. 202).

Sea *ab* la altura propuesta y *ac* su vuelo; tírese la recta *cb* y divídase en dos partes iguales en *n*; con una abertura de compás igual á *cn*, descríbanse, desde *c* y *n*, dos arcos de círculo que determinarán el punto *d*, y desde *n* y *b* otros dos que darán el punto *e*; *d* es el centro del arco *cn* y *e* del arco *nb*.

Observ. Del mismo modo se operaría si el vuelo fuese menor que la altura.

VIII. *Dibujar la* GOLA REVERSA, *teniendo la altura igual al vuelo* (fig. 201).

Después de tiradas las rectas *cd*, *be*, perpendiculares á *ba*, alto de la moldura, se hace *ac* igual á *ab* y se tira la recta *cb*; por su punto medio *n* se tira la recta *oo'*, perpendicular á *cd*, y *o* será el centro del arco *cn*, así como *o'* del arco *nb*.

IX. *Dibujar una* GOLA REVERSA *cuya altura sea mayor ó menor que el vuelo* (fig. 203).

Sean *cb* y *ca* el alto y vuelo que se quiere dar á la moldura. Tírese la recta *ab* y divídase en dos partes iguales en *n*, haciendo centro en *a* y *n*; descríbanse con el radio *na* dos arcos que determinarán el punto *o'*, y desde *d* y *b* otros dos que se cruzarán en *o*. Este último punto será el centro del arco *nb*, así como el *o'* lo será del arco *an*.

X. *Describir el* TALÓN DERECHO, *siendo su altura la recta* ab (fig. 205).

Se traza del mismo modo que la gola reversa (*problemas VI y VII*), pues es la misma moldura con la sola diferencia de estar en sentido contrario.

XI. *Trazar el* TALÓN REVERSO *cuya altura sea la recta* ab (fig. 204).

Se dibuja de la misma manera que la gola reversa (*problemas VIII y IX*), solamente que se coloca en sentido inverso.

XII. *Entre las paralelas* AB, CD, *trazar una* ESCOCIA.

Primer caso. Que sólo sea dado el punto A, *extremo correspondiente á la parte superior de la escocia* (figura 206).

Por A bájese la perpendicular A*r*, y divídase en tres partes iguales; por el primer punto de división *o* tírese la *ou* paralela con AB, y haciendo centro en *o*, descríbase con un radio *o*A el cuadrante de círculo A*u*; hágase *ua* igual á *or*, y el punto *a* será el centro del otro cuadrante uC, que completará la escocia pedida.

Segundo caso. Que sean dados los dos extremos A y C *de dichas curvas* (fig. 207).

En este caso puede determinarse la curva por medio de arcos de círculo ó por puntos.

Primer modo. Para trazar la curva por medio de arcos de círculo, levántese en los puntos A y C las perpendiculares An, CO, esta última indefinida; divídase la An en tres partes iguales, y por el primer punto de división e tírese la ef paralela con AB, y desde e descríbase el cuadrante de círculo Af; divídase el radio ef en cuatro partes iguales, y prolónguese un cuarto de e á g; de este punto g, con la distancia gf, trácese el arco fh, cuyo punto h se determina por medio de un arco descrito desde f con un radio igual á la mitad de ef; únase el punto h con el g, y prolóngase hasta I, haciendo gI igual á dos quintos de gf; tómese CL igual á Ih, y levántese enmedio de IL la perpendicular mO hasta que corte en O á la OC; tírese, por último, la OIp, y el punto I será el centro del arco hp, así como el punlo O lo será del arco pC, con el cual termina la escocia.

Segundo modo. Para trazar la ESCOCIA *por puntos, siendo* E *y* F (fig. 207) *sus extremos,* se tira la recta EF, y tomándola como á diámetro, se describe la semicircunferencia EUS... F. Se divide esta curva en un número cualquiera de partes iguales ó desiguales, y por los puntos de división se tiran las líneas Uu, Ss... etcétera, perpendiculares al diámetro EF; ahora, por los puntos obtenidos u, s, r, o, n, se tiran las uu', ss', rr'... etc., paralelas á la EH, y se hace uu'=Uu, ss'=sS, rr'=rR, etc., y la curva que pasa por los puntos F, n', o', r', s', u', E, es la escocia pedida.

Observ. Es fácil conocer que, cualquiera que sea el vuelo de la escocia que quiera delinearse, puede servir también este último método.

SECCION SEGUNDA

DE LAS SUPERFICIES

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LAS SUPERFICIES EN GENERAL. — MEDIDAS AGRARIAS.

344. Es lo mismo superficie curva que curvilínea?—345. Qué se entiende por medir una superficie? Cuál es la figura que sirve de unidad de medida para las superficies?—346. Unidades superficiales ó unidades cuadradas, son una misma cosa? Cuando en la medición de las superficies se dice: multiplicar una línea por otra ó tal lado por tal otro, qué se entiende?—347. Cuántas clases hay de medidas superficiales? Cuáles son las medidas cuadradas? Cuáles las agrarias? Cuáles las topográficas?—348. Cuál es la unidad de las nuevas medidas superficiales mandadas usar por el Gobierno, según el sistema métrico? Tabla de las nuevas medidas superficiales. Tabla comparativa del área con las antiguas medidas de las diferentes provincias de España.

344. En el párrafo 13 hemos definido la superficie, así como en el 25 hemos dicho lo que se entiende por superficie plana y curva. Mas antes de pasar adelante advertiremos que una superficie curva y una superficie curvilínea son dos cosas distintas; *un círculo, p. ejemp., es una superficie curvilínea y plana al mismo tiempo.*

Aquí tan sólo nos proponemos considerar las superficies planas, ora sean rectilíneas ó curvilíneas, ó ya mixtilíneas, que tengan relación con el círculo.

345. Medir una superficie es *determinar cuántas veces contiene á otra conocida*, que se llama UNIDAD SUPERFICIAL.

La unidad de medida para las superficies *es un*

CUADRADO *cuyo lado es la unidad del país en que se hace la medición*; por eso, cuando se quiere expresar el valor de una superficie cualquiera, decimos que contiene tantas varas, pies, metros, etc., cuadrados, según sea el lado del cuadrado que se toma por unidad, de una vara, pie, metro, etc.

Unidades superficiales ó unidades cuadradas son una misma cosa.

346. Cuando en la medición de las superficies se dice *multiplicar una línea por otra* ó *tal lado por tal otro*, se entiende que se han de multiplicar las unidades lineales de la una por las unidades lineales de igual nombre de la otra, y el producto serán unidades cuadradas ó superficiales de este mismo nombre. Así, si en el rectángulo ABCD (fig. 208) suponemos que el lado AB tiene cinco metros de longitud y cuatro el lado AD, y se multiplican las unidades lineales del primero por las unidades lineales del segundo, tendremos $5 \times 4 = 20$ metros cuadrados. Lo que nos dice que el cuadrilongo en cuestión contiene exactamente 20 cuadrados de un metro de lado cada uno.

347. Las medidas superficiales se dividen en simplemente *cuadradas*, *agrarias* y *topográficas*.

Se llaman MEDIDAS CUADRADAS *las que sirven para indagar la extensión de las caras de algunos objetos elaborados por las artes ó de los terrenos destinados para edificar.*

MEDIDAS AGRARIAS *son las que se emplean para justipreciar la extensión de terrenos destinados al cultivo*, como campos, huertos, viñas, etc.

Son MEDIDAS TOPOGRÁFICAS *las que sirven para indicar la extensión de vastos territorios*, como reinos, provincias, etc.; las cuales suelen tener por unidad de medida el cuadrado cuyo lado es la legua ó la milla.

348. La unidad de las nuevas medidas superficiales mandadas usar por el Gobierno, según el sistema métrico, es el ÁREA, *que es un cuadrado de* 10 *metros de lado.*

A continuación ponemos una tabla de sus múltiplos y divisores, así como también de las correspondencias que tiene con las diferentes medidas superficiales usadas hasta ahora en España:

Múltiplo, HECTÁREA = 100 áreas . . . = 10.000 metros cuadr.
Unidad, ÁREA = ... = 100 metros cuadr.
Divisor, CENTIÁREA = 0'01 de área. . . = 1 metro cuadr.

TABLA COMPARATIVA DEL ÁREA CON LAS ANTIGUAS MEDIDAS AGRARIAS Ó SUPERFICIALES SEGUIDA EN LAS DIFERENTES PROVINCIAS DE ESPAÑA, SEGÚN LOS DATOS PUBLICADOS POR EL GOBIERNO.

Una área es equivalente á

143'115329 varas cuadradas..	de Castilla.
26 estados, 14'038 pies cuadrados.. . .	de Alava.
142 varas cuadradas, 6'670 pies íd.. . .	de Albacete.
120 varas cuadradas, 2'064 pies íd.. . .	de Alicante.
5 destres superficiales, 16 varas cuadradas de Burgos, 565 milésimas de pie íd. . .	de Baleares (Palma).
41 canas cuadradas, 22'788 palmos íd. . .	de Barcelona.
30'486 brazas	de Canarias.
24'065 brazas reales.	de Castellón.
140 varas cuadradas, 6'448 pies íd.. . .	de Coruña.
41 canas cuadradas, 9'224 palmos íd. . .	de Gerona.
1 almud, 67 varas cuadradas, 7'108 tercias ídem.	de Huesca.
41 canas cuadradas, 19'377 palmos íd. . .	de Lérida.
162 varas cuadradas, 2'506 pies íd. . .	de Pamplona.
41 canas cuadradas, 5'849 palmos íd. . .	de Tarragona.
24'065 brazas reales.	de Valencia.
1 almud, 67'790 varas cuadradas. . . .	de Zaragoza.

La misma relación que existe entre el área y la medida superficial de *Castilla*, hay con la de las provincias siguientes:

Almería.	Huelva.	Salamanca.
Avila.	Jaén.	Santander.
Badajoz.	León.	Segovia.
Burgos.	Lugo.	Sevilla.
Cáceres.	Madrid.	Soria.
Cádiz.	Málaga.	Teruel.
Ciudad Real.	Murcia.	Toledo.
Córdoba.	Orense.	Valladolid.
Cuenca.	Oviedo.	Vizcaya (Bilbao).
Granada.	Palencia.	Zamora.
Guadalajara.	Pontevedra.	

La misma correspondencia que hay entre el área y la medida superficial de *Albacete*, existe también con las de Guipúzcoa y Logroño.

ARTÍCULO PRIMERO.

PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO.

349. A qué es igual el cuadrado formado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo?—350. El cuadrado del valor numérico de la hipotenusa, á qué es igual? Conociendo la hipotenusa y un cateto de un triángulo, cómo se conoce el otro cateto?—351. Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo se tira una perpendicular á la hipotenusa, qué se verifica?—352. Ejercicios de cálculo.

349. *En todo triángulo rectángulo se verifica: que el cuadrado formado sobre la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados formados sobre los dos catetos.*

Dem. Sea el triángulo isósceles ABC (fig. 209); constrúyase un cuadrado sobre cada uno de sus lados, y tírense las diagonales BD y BE; cada uno de los cuadrados formados sobre de los catetos, será dividido en dos triángulos iguales entre sí é igual cada uno de ellos al triángulo dado ABC, por tener los lados respectivamente iguales. Tírense las diagonales AG y CF, y el cuadrado formado sobre la hipotenusa quedará dividido también en cuatro triángulos iguales entre sí é igual cada uno de ellos al triángulo ABC, por tener los lados respectivamente iguales; pero el cuadrado formado sobre la hipotenusa es igual á cuatro triángulos como el ABC, y los cuadrados formados sobre los catetos son iguales también á otros cuatro triángulos como el ABC; luego el cuadrado formado sobre la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados formados sobre los dos catetos.

350. De aquí resulta: *que en un triángulo rectángulo* ABC (fig. 210), *el cuadrado del valor numérico de la hipotenusa* AB *es igual á la suma de los cuadrados de los valores numéricos de los catetos*. Es decir, que $AB^2 = AC^2 + CB^2$; si extraemos la raíz cuadrada de ambos miembros, será $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$; luego en conociendo los dos catetos, se conocerá la hipotenusa *extrayendo la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de dichos catetos*. Y si en la misma ecuación se despeja un cateto, tal como AC, se tendrá $AC^2 = AB^2 - CB^2$, que da $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2}$; la primera quiere decir que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto*; y la segunda, que, en conociendo la hipotenusa y un cateto, se conocerá el otro cateto *extrayendo la raiz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del cateto conocido*.

351. Si desde el vértice C del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC (fig. 210) se tira una perpendicular CD sobre la hipotenusa AB, se verifica:

1.° *El triángulo queda dividido en dos triángulos semejantes al total y entre sí.*

Porque el ángulo A es común á los dos triángulos

ADC, ABC; el ángulo $ADC = ACB$ por rectos, lo que hace que el ángulo $ACD = ACB$, por ser ambos en sus triángulos respectivos suplementos de los otros dos ángulos; luego (192, 1.º) son semejantes.

Del mismo modo se probaría que el triángulo ABC es semejante al CDB.

2.º *La perpendicular* CD *es media proporcional geométrica entre los dos segmentos* AD, BD, *de la hipotenusa.*

Porque si comparamos los lados homólogos de los triángulos semejantes ACD, CBD, resultará $AD : CD :: CD : DB$.

3.º *Cada cateto es medio proporcional geométrico entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.*

Si comparamos los triángulos semejantes ACB, ADC, darán la proporción $AB : AC :: AC : AD$. Del mismo, la comparación de los triángulos semejantes CDB y ACB, darán $AB : CB :: CB : BD$; luego cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.

4.º Estas propiedades nos dan otro medio para probar que *el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.*

Porque si en estas dos proporciones anteriores $AB : AC :: AC : AD$ y $AB : CB :: CB : BD$, multiplicamos extremos y medios, obtendremos $AB \times AD = AC^2$ y $AB \times BD = CB^2$, que si las sumamos, darán $AB \times AD + AB \times BD = AC^2 + CB^2$; observando que el factor AB es común en el primer miembro, tendremos $AB \times (AD + DB) = AC^2 + CB^2$; y como $AD + DB = AB$, resulta $AB \times AB = AC^2 + CB^2$, lo que da $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

5.º *La perpendicular bajada* CD *es cuarta proporcional á la hipotenusa y á los catetos.*

Porque si comparamos los lados homólogos de los triángulos, resultará $AB : CB :: AC : CD$ ó bien $AB : AC :: CB : CD$.

EJERCICIOS DE CÁLCULO.

352. PROBLEMAS.

I. Un triángulo rectángulo tiene sus catetos de 6 y 8 decímetros; cuánto tendrá la hipotenusa?—*Result.*, 1 metro.

II. El cateto que sirve de base á un triángulo rectángulo tiene 12 metros de longitud y la hipotenusa 25; cuál será su altura?—*Resultado*, 21'9318 metros.

III. El lado de un triángulo equilátero es de 6 decámetros; cuál será su altura aproximada hasta milésimos?—*Result.*, 51 metros, 961 milésimos.

IV. El lado de un cuadrado es de dos decámetros; cuántos metros tendrá de longitud la diagonal de dicho cuadrado?—*Result.*, 28'2842 metros.

CAPÍTULO II.

Del modo de medir las superficies planas.

ARTÍCULO PRIMERO.

CÁLCULO DE LAS SUPERFICIES DE LOS POLÍGONOS.

353. La superficie de un rectángulo, cómo se encuentra? En qué se funda?—354. Cómo se halla la superficie de un paralelogramo? Demostración de lo dicho.—355. La superficie de un triángulo, cómo se mide?—356. Cuando en un triángulo se conocen los tres lados, cómo se obtiene también su superficie?—357. La superficie de un trapecio, á qué es igual? Demostración.—358. Qué se ha de hacer para hallar la superficie de un trapezoide?—359. Cómo se encuentra la de un polígono regular?—360. Para hallar la superficie de un polígono irregular, qué se ha de hacer? Se puede simplificar este cálculo alguna vez?—361. Ejercicios de cálculo.

353. *La superficie* (E') *de un* RECTÁNGULO *es igual al producto de su base por su altura.*

(E') Antes se daba el nombre de *área* á la superficie que comprende una figura; así es que se decía: el área de un polígono, de un círculo, etc.; pero como en el nuevo sistema general de medidas mandado usar por el Gobierno, se da el nombre de *área* (348) al cuadrado que sirve de unidad para la medición de las superficies, hemos creído no deber usar ya dicha palabra sino en este último sentido, y por esto decimos la *superficie de un rectángulo* y no el *área*.

Dem. Supongamos que la unidad sea un pie cuadrado y que con ella queremos medir el rectángulo ABCD (fig. 208); si el lado cuadrado cabe 5 veces en la base DC, obtendremos 5 fajas rectangulares tirando las paralelas á DA por los puntos de división; y si el mismo lado está contenido 4 veces en la altura DA, quedará dividida cada una de estas fajas en 5 cuadrados iguales, por medio de las paralelas á AB, dirigidas por las divisiones de AD. Pero para obtener el número total de 20 cuadrados que hay en el rectángulo, basta multiplicar 4, longitud de la altura AD, por 5, longitud de la base DC; *luego para medir la superficie de un rectángulo, bastará medir su base y su altura, con el metro ú otra medida lineal, y formar el producto de los números que resulten de esta medición.*

354. La superficie de un PARALELOGRAMO *es igual al producto de su base por su altura*; *porque todo paralelogramo es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura.*

En efecto; el rectángulo ABCD (fig. 211) y el paralelogramo AEFD tienen el triángulo común AHD. Es menester, pues, probar que ABCH es igual á DHEF; ó bien, añadiendo á cada uno el triángulo CHE, que los dos triángulos ABE, DCF, son iguales. Es así que estos dos triángulos tienen un ángulo recto, y el ángulo BAE=CDF, por correspondientes; el lado AB=DC y AE=DF, por lados opuestos de un paralelogramo; luego los dos triángulos son iguales; *de donde resulta que el rectángulo y el paralelogramo son equivalentes.*

355. La superficie de un TRIÁNGULO *es igual á la mitad del producto de su base por su altura; porque todo triángulo es igual á la mitad de un paralelogramo de la misma base y de la misma altura.*

Si el triángulo EFG (fig. 212), por los puntos E y G dirigimos las rectas EH, GH, respectivamente paralelas á FG y EF, habremos formado de este modo el paralelogramo EFGH, dividido por la diagonal EG en dos triángulos EGF, EGH, enteramente iguales; luego el triángulo EGF es la mitad del paralelogramo EFGH, que tiene la misma base y altura.

356. Cuando en un triángulo se conocen los tres lados, se obtiene también su superficie *sumando los valores numéricos de los tres lados y tomando la mitad de la suma; de esta mitad se resta cada uno de dichos lados, se multiplican entre sí las tres restas y el resultado por la mitad de la suma de los lados; se extrae por fin la raiz cuadrada del último producto, y en esta raiz se tiene la superficie del triángulo.*

357. La superficie del TRAPECIO *es igual á la semisuma de sus bases, multiplicada por su altura.*

En efecto; si se descompone un trapecio en dos triángulos por medio de la diagonal, veremos que cada uno de estos triángulos tiene por base uno de los dos paralelos y por altura la misma del trapecio.

358. Para hallar la superficie de un TRAPEZOIDE, *se multiplica una de sus diagonales por la semisuma de las perpendiculares bajadas á ella desde los vértices opuestos.*

Porque si en un trapezoide se tira una diagonal, ésta lo dividirá en dos triángulos cuya base es la misma diagonal, y las perpendiculares bajadas desde los vértices opuestos serán las alturas de dichos triángulos.

359. *La superficie del* POLÍGONO REGULAR *es igual al perímetro multiplicado por la mitad del radio recto.*

Porque si descomponemos el polígono regular en triángulos que tengan un vértice común en el centro, el radio recto es la altura de cada uno de los triángulos que forman el polígono y el perímetro es la suma de las bases.

360. *Para medir la superficie de un* POLÍGONO IRREGULAR, *se descompone en triángulos por medio de diagonales tiradas desde un vértice á los demás de la figura; se halla la superficie de cada uno de estos triángulos, y la suma es la del polígono.*

Observ. Como que cada dos triángulos inmediatos componen un trapezoide, se puede simplificar el cálculo anterior aplicando la regla (358).

También se puede simplificar algunas veces el cálculo, descomponiendo el polígono irregular en triángulos y trapecios rectángulos, tirando una diagonal lo más larga posible y bajando perpendiculares á ella desde todos los vértices del polígono, como se ve en la fig. 213. Calculando las superficies de estos triángulos y trapecios, la suma será la del polígono propuesto.

EJERCICIOS DE CÁLCULO.

361. PROBLEMAS.

1. Se ha medido un campo triangular, y se ha hallado su base de 20 v., 7 pulg., 9 lín., y su altura de 11 v., 1 pie, 6 pulg., 8 lín.; cuántas varas superficiales comprende?—*Result.*, 116 varas, 3 pies, 118 pulgadas, 120 líneas cuadradas (F′).

(F′) Para hacer la operación con facilidad, se reducirán los dos factores á la menor de las denominaciones en ella comprendidos; se multiplicarán entre sí los resultados, y el producto serán unidades cuadradas de dicha menor denominación, las cuales se reducirán á unidades cuadradas de la denominación pedida en el problema, por medio del uso correspondiente de la división.

Así, en el problema que nos ocupa, la base del triángulo se transforma en 8733 l., y la altura en 4976 l.; y como para obtener la superficie se ha de multiplicar la base por la mitad de la altura, ó al contrario, el producto que se obtendrá, 21727704, serán líneas cuadradas. Ahora, para reducir estas líneas cuadradas á varas cuadradas, se observará que siendo 1 pulg. $=12$ l., 1 pulg. cuad. será $=12\times12=144$ l., y por lo mismo se deberán partir las líneas obtenidas 21727704 por 144, á fin de obtener su equivalencia 150886 pulg. cuad., 120 l. Siguiendo el mismo raciocinio, se dividirá el número 150886 por 144, número de pulgadas cuadradas que contiene un pie cuadrado, y el cociente 1047, que son pies cuadrados, se dividirá por 9, número de pies cuadrados de una vara cuadrada, y el cociente 116 es el número de varas cuadradas del triángulo en cuestión, á lo que debe añadirse las restas de las anteriores divisiones.

II. Cuál es la superficie de un campo triangular cuyos lados son de 50, 60 y 80 metros?—*Result.*, 14'981238 áreas.

III. Un salón de baile de forma cuadrada, y cuyo la do esde 84 pies, 7 pulg., 9 lín., se ha de enladrillar con ladrillos cuadrados de 8 pulg., 2 lín.; cuántos ladrillos se emplearán?—*Result.*, 15469'77 ladrillos.

IV. Cuánto tendrá de superficie un jardín de forma cuadrada cuya diagonal es de 144 metros?—*Result.*, 1 hectárea, 3 áreas y 68 centiáreas.

V. Cuántas áreas contendrá un prado de figura trapecial, cuyas dos bases paralelas son de 6 y 8 decámetros, y la distancia que media entre ellas de 5 decámetros?—*Result.*, 35 áreas.

VI. Se ha comprado un solar de figura trapecial á razón de 28 reales la centiárea; las bases de dicho solar son de 36 y 38 metros, y la perpendicular comprendida entre ellas de 84 metros; cuánto ha costado el referido solar?—*Result.*, 75.264 reales.

VII. Un campo de figura trapezoidal tiene una diagonal de 724 metros, y las alturas de los triángulos en que esta línea divide al campo son de 212 metros y 623'6 metros; cuál será su superficie?—*Resultado*, 30 hectáreas, 24 áreas, 87'2 centiáreas.

VIII. Cuánto tiene de superficie un baluarte de forma pentagonal regular, cuyo lado es de 82 metros y el radio recto de 56'43 metros?—*Result.*, 1 hectárea, 15 áreas y 68'15 centiáreas.

IX. Qué superficie de terreno ocupará un faro de forma exagonal regular, cuyo lado es de 60 pies?—*Result.*, 1.039 varas cuad., 2'0736 pies cuadrados.

X. En un campo ABCDEFGHIJ (fig. 213), se ha tirado la diagonal AG y se han bajado á ella las perpendiculares Cn, Dm, Eo, Fs, por la parte superior, y las Jr, Iu, por la inferior; se han medido al propio tiempo estas líneas y la distancia que separa sus pies sobre la diagonal, habiendo resultado los valores siguientes:

Por la parte superior á AG.

Distancias horizontales.		*Altura de las perpendiculares.*	
$An = 237$	metros.	$AB = 160$	metros.
$nm = 133$	m.	$nC = 160$	m.
$mO = 205'5$	m.	$mD = 128'4$	m.
$os = 397$	m.	$oE = 304$	m.
$sG = 109'8$	m.	$sF = 224$	m.

Por la parte inferior á AG.

Distancias horizontales.		*Altura de las perpendiculares.*	
$Ar = 205$	metros	$Jr = 288'8$	metros.
$ru = 637$	m.	$Iu = 208$	m.
$uG = 240,3$	m.	$HG = 336$	m.

Con todos estos datos se pide cuál será su superficie?—*Result.*, 47 hectáreas, 18 áreas y 27'7 centiáreas.

XI. Dadas de magnitud y posición las dimensiones que determinan la fig. 214, trazarla con arreglo á escala y hallar su superficie.

DATOS.

Ángulos.	*Lados.*
A = 113°	AB = 120 metros.
B = 133°	BC = 45 m.
C = 100°	CD = 95 m.
D = 102°	DE = 50 m.
E *entrante.*	EF = 65 m.
	FG = 75 m.
	GA = 105 m.

Observ. Para la resolución de este problema, trácese la figura dando á sus ángulos los valores indicados, y dando también á sus lados, con arreglo *á escala*, el número de unidades lineales fijadas en los datos. Luego se divide la figura en triángulos (360), como se ve en la lámina, y se mide en la misma escala la magnitud de las bases y alturas de los triángulos para calcular la superficie que se busca.

ARTÍCULO 2.°

DE LAS SUPERFICIES DE LAS FIGURAS CURVILÍNEAS Y MIXTILÍNEAS.

362. Cómo se calcula la superficie de un círculo? Cuando se conoce el radio del círculo, cómo se encuentra su superficie?—363. Cómo se halla la superficie de un semicírculo, de un cuadrante y de un sector de círculo?—364. La superficie de un segmento menor que el semicírculo, á qué es igual?—365. Cómo se halla la superficie de un segmento mayor que el semicírculo?—367. Cómo se calcula la superficie de un óvalo?—368. Cómo se halla la de una elipse?—369. Cómo se determina la superficie de una corona elíptica?—370. Cómo se encuentra la superficie de una figura curvilínea ó mixtilínea irregular?—371. Ejercicios de cálculo. L. 22 nº 4

362. Considerando el círculo como un polígono regular de infinitos lados, cuyo radio recto ú apotema se ha convertido en un radio del círculo y el perímetro en la circunferencia, podemos decir que:

La superficie del CÁLCULO *es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio, ó al radio por la semicircunferencia.*

Cuando se da conocido el radio del círculo, también se encuentra su superficie *multiplicando* 3'1416 *por el cuadrado del radio.*

363. La superficie de un SEMICÍRCULO, de un CUADRANTE y de un SECTOR DE CÍRCULO *se halla multiplicando el arco correspondiente por la mitad del radio.*

364. La superficie de un SEGMENTO DE CÍRCULO menor que el semicírculo, *es igual á la diferencia que hay entre la superficie de un sector y la de un triángulo cuya base es la cuerda del segmento, y los otros dos lados son radios del círculo á que pertenece dicho segmento.*

365. La superficie de un SEGMENTO DE CÍRCULO mayor que el semicírculo, *es igual á la diferencia de la superficie del segmento menor á la de todo el círculo.*

366. La superficie de una CORONA Ó ANILLO CIRCULAR *es igual á la diferencia que hay de la superficie del círculo que encierra la circunferencia mayor al del que encierra la menor.*

367. Para hallar la superficie de un ÓVALO, *se calcula la de cada uno de los sectores de que se compone; se suman, y de esta suma se resta la superficie del paralelogramo que resulta al centro del óvalo.*

368. La superficie de una ELIPSE *es igual al producto de los dos semiejes multiplicado por* 3'1416.

También es igual á la superficie de un círculo cuyo diámetro es medio proporcional y geométrico entre los dos ejes de la elipse.

369. La superficie de una CORONA ELÍPTICA se obtiene *multiplicando entre sí los dos ejes de la elipse mayor y luego entre sí los de la menor; se restan los productos y se multiplica la resta por* 0'7854; este último producto es la superficie de la corona elíptica.

370. Para medir la superficie de una figura CURVILÍNEA Ó MIXTILÍNEA IRREGULAR, *se inscribirán ó cir-*

cunscribirán á dicha figura el mayor número de rectas que se pueda, hasta tenerla reducida á un polígono de varios lados y próximamente igual á ella; se buscará su superficie, á la cual se sumará la parte de la figura que quedare fuera del polígono, ó se le restará la parte de superficie que no estuviere ocupada por la tal figura.

Supóngase que se nos da para medir la fig. 216; en este caso se tirarán en las partes curvas las rectas AB, BC, CD, DE, y se medirá la superficie de la figura rectilínea ABCDEFGH, añadiéndole después la superficie de la parte AB*n* y restándole la de las partes B*m*C, C*ro* y *o*D*s*.

Para hallar el valor de las partes se tirarán desde la curva, p. ejemp. A*n*B, líneas perpendiculares á la recta AB, y se considerarán el primer espacio A y el último B como triángulos rectilíneos rectángulos, y los demás espacios que quedan en el centro como á trapecios rectángulos.

EJERCICIOS DE CÁLCULO.

371. Problemas.

I. Cuál es la superficie de un círculo cuyo radio es de 20 metros?—*Result.*, 12 áreas, 56'64 centiáreas.

II. Un salón de forma circular, y cuyo diámetro es de 28'12 pies, cuánto tendrá de superficie su pavimento?—*Result.*, 621'04279 pies cuadrados.

III. Cuánto tiene de superficie una plaza circular, cuya circunferencia es de 680 metros?—*Result.*, 367 áreas, 96'5 centiáreas.

IV. El fondo de un estanque circular tiene de superficie 113'0976 metros cuadrados ó centiáreas; cuánto tiene de longitud el radio de dicho estanque?—*Result.*, 6 metros.

V. Cuál es la superficie de un sector de círculo cuyo arco rectificado tiene 18 pies, 4 pulg., y el radio con que está trazado es de 12 pies, 6 pulg.?—*Result.*, 12 varas, 6 pies, 84 pulgadas cuadradas.

VI. Qué superficie tiene un sector de círculo cuyo arco es de 4[illegible]°, y la circunferencia del círculo de que es parte el sector es de 164 metros?—*Result.*, 2 áreas, 67'5383 centiáreas.

VII. Cuál es la superficie de un segmento de círculo cuyo arco es de 120°, y rectificado tiene 90 metros de longitud?—*Result.*, 11 áreas, 34'1429 centiáreas.

VIII. Qué superficie tiene un anillo circular cuyos diámetros son de 42 y 50 decímetros?—*Result.*, 5 metros cuad., 78'0544 decímetros cuadrados.

IX. Cuántos pies superficiales de terreno ocupan las paredes de una torre circular cuya circunferencia exterior es de 56 pies de diámetro y el grueso de la pared ó muro es de 2 pies, 3 pulg.?—*Resultado*, 238'5652 pies cuadrados.

X. Buscar la superficie de un óvalo (fig. 164), dando valores á sus líneas con arreglo á escala.

XI. Cuál es la superficie de una elipse cuyos ejes tienen de largo 84 y 63 metros?—*Result.*, 41 áreas, 56'33 centiáreas.

ARTÍCULO 3.°

TRANSFORMACIÓN Ó REDUCCIÓN DE SUPERFICIES.

372. Qué es transformar un plano ó reducir una figura á otra?—373. Cuáles son las figuras que pueden reducirse á cuadrados equivalentes por construcción geométrica?—374. Cuáles son las figuras que sólo por cálculo pueden reducirse á cuadrados?—375. Para reducir á cuadrado una figura cuya superficie se determine por el producto de dos magnitudes lineales, qué debe hacerse?—376. Cómo se reduce á cuadrado un polígono irregular?—377. Cuál es el cálculo que fija el lado del cuadrado equivalente á una figura curvilínea ó mixtilínea irregular?—378. Ejercicios gráficos.

372. *Transformar un plano en otro, ó reducir una figura á otra, es hallar una superficie que sea equivalente á la de esta figura, pero cuya forma sea distinta.* Así, reducir un triángulo á cuadrado es hallar un cuadrado que tenga igual superficie que el triángulo propuesto.

373. Se pueden reducir á cuadrados equivalentes, por construcciones geométricas, todos los polígonos regulares é irregulares y todas las figuras curvilíneas cuya superficie se determine por el producto de dos dimensiones.

374. Todas las figuras curvilíneas y mixtilíneas cuya superficie no se determine por el producto de dos dimensiones, *sólo pueden reducirse á cuadrados por medio del cálculo.*

375. Para reducir á cuadrado una figura cuya superficie se obtenga por la multiplicación de dos líneas, *se busca una media proporcional geométrica entre estas dos magnitudes, y se tiene en ella el lado del cuadrado equivalente á dicha figura*, el cual se construye conforme ya sabemos.

376. Para hallar un cuadrado equivalente á un polígono irregular, *se divide el polígono en triángulos por medio de diagonales; se transforman todos estos triángulos en rectángulos equivalentes, y luego se reducen á un cuadrado*, conforme se explica (378, VIII).

377. Para obtener por medio del cálculo el lado del cuadrado equivalente á una figura curvilínea ó mixtilínea irregular, *se halla la superficie de esta figura y se extrae luego la raíz cuadrada del número que exprese las unidades superficiales de dicha figura, y esta raíz es el lado del cuadrado que se busca.*

EJERCICIOS GRÁFICOS.

378. Poblemas.

I. *Hallar un cuadrado equivalente al triángulo* ACB (fig. 210).

Búsquese una medida proporcional geométrica entre la *base* AB y la *mitad de la altura* DC (188, III), ó entre la *altura* DC y la *mitad de la base* AB, y se tendrá en esta línea el lado del cuadrado equivalente al triángulo dado ACB.

II. *Hallar un* CUADRADO *equivalente á cada una de las figuras siguientes: á un* PARALELOGRAMO, *á un* TRAPECIO, *á un* POLÍGONO REGULAR *y á un* CÍRCULO.

La regla establecida (375), aplicada á las mencionadas figuras, nos dice: que el lado del cuadrado equivalente es una media proporcional geométrica entre la base y la altura para el *paralelogramo* (354), entre la altura y la semisuma de las bases para el *trapecio* (357), entre el perímetro y la mitad del radio recto para el *polígono regular* (359), entre la circunferencia y la mitad del radio para el *círculo* (362).

III. *Hallar un círculo equivalente á una elipse.*

Búsquese una media proporcional entre los ejes de la elipse, y en ella se tendrá el diámetro del círculo que se busca (368).

IV. *Hallar un cuadrado equivalente á una elipse.*

Primeramente redúzcase la elipse á un círculo equivalente, y luego el círculo á un cuadrado.

V. *Reducir á triángulo equivalente un pentágono irregular* JHBNL (fig. 215).

Desde el vértice B tírense las diagonales BJ, BL, y paralelas á dichas diagonales tírense las HA, NC, hasta que corten en A y C á la base JL prolongada; las rectas BA, BC, darán el triángulo ABC, equivalente al pentágono JHBNL.

Porque el triángulo BHJ = BAJ por estar sobre una misma base BJ y tener ambos una misma altura, por estar entre dos paralelas BJ, HA. Por la misma razón BLN = BLC; por consiguiente, JHBNL = JHB + JBL + BLN = BA + JBL + LBC = ABC.

VI. *Sobre una línea* AB (fig. 217) *hacer un rectángulo equivalente á un triángulo propuesto* RNI.

Del vértice N bájese la perpendicular NO á la base RI; en A levántese la perpendicular AD igual á una cuarta proporcional entre las líneas 2AB, RI y NO; el rectángulo ABCD, levantado sobre AB y AD, es equivalente al triángulo RIN.

Porque por construcción será 2AB : RI : : NO : AD; pero como el producto de extremos es igual al producto de medios, tenemos $2AB \times AD = RI \times NO$, y dividiéndolo todo por dos, será $AB \times AD = {}^1/_2 RI \times NO$.

VII. *Sobre una línea dada* PR *describir un rectángulo equivalente á una figura rectilínea cualquiera* EFGHI (fig. 218).

De lo dicho en el anterior problema se infiere el método facilísimo para ejecutarlo; porque reduciendo la figura á triángulos, y haciendo sobre la línea dada, primero un rectángulo equivalente á uno de los triángulos y después otro equivalente á otro triángulo, y así siguiendo, la suma de todos estos rectángulos, que será también un rectángulo, será equivalente á la figura dada, como vamos á verlo.

Tirando las diagonales IF, IG, se divide la figura en los triángulos IEF, IFG, IGH. Haciendo como en el problema precedente, sobre PR el rectángulo PRNO = IEF, sobre ON el rectángulo ONMK = IFG y sobre KM el rectángulo KMLJ = IGH, será PRLJ equivalente á EFGHI.

VIII. *Hallar un cuadrado equivalente á una figura rectilínea cualquiera.*

Divídase la figura en triángulos, y por el método explicado en el anterior problema, constrúyese un rectángulo equivalente á la figura dada, y luego, por la regla establecida (375), redúzcase dicho rectángulo á cuadrado.

IX. *Dado un triángulo oblicuángulo* AEB (fig. 219), *transformarlo en un triángulo rectángulo de igual base y superficie.*

Levántese al extremo de la base la perpendicular AI = ED, y tírese la hipotenusa IB; el triángulo IAB es equivalente al lado AEB, por tener una misma altura y común la base.

X. *Dado un triángulo cualquiera* CFG (fig. 219), *transformarlo en otro equivalente que sea isósceles.*

Levántese al punto medio de la base la perpendicular HJ = FG, altura del triángulo dado; únase el extremo J de la perpendicular con los extremos C y G de la base, y el triángulo CJG es el pedido.

XI. *Construir un cuadrado equivalente á cualquier número dado de cuadrados* (fig. 220).

Sean los tres lados de los cuadrados dados L, L′, L″. Fórmese un ángulo recto, y hágase $ba = L$ y $bc = L'$; la hipotenusa ac será el lado de un cuadrado equivalente á los cuadrados de L y L'; tómese $ba = ac$ y $be = L''$, y el cuadrado que se forme, tomando por lado la nueva hipotenusa ed, será igual en superficie á los cuadrados de $L + L' + L''$.

Esto se funda en que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los dos catetos (349).

XII. *Hacer un cuadrado cuya superficie sea igual á la suma de las superficies de cualquier número de figuras dadas.*

Primer modo. Redúzcase primero á un rectángulo (prob. VII), y después hágase un cuadrado equivalente á dicho rectángulo (problema VIII).

Segundo modo. Redúzcanse dichas figuras á cuadrados equivalentes, y practíquese con los lados de dicho cuadrado lo que se ha explicado en el problema anterior.

XIII. *Construir una figura semejante á las dadas* ABCDE, abcde (fig. 107), *y cuya superficie equivalga á la suma de las superficies de dichas figuras.*

Constrúyese un triángulo rectángulo cuyos catetos sean dos lados homólogos, AB y *ab*, por ejemplo, y tomando la hipotenusa como lado homólogo al AB, constrúyese sobre ella una figura semejante á la ABCDE, y la superficie de esta figura será igual á la de ABCDE + *abcde*.

XIV. *Dadas dos figuras semejantes* F, f, *construir otra semejante á ellas y cuya superficie sea igual á la diferencia de las superficies de las mismas figuras* (fig. 220).

Fórmese un ángulo recto *ebd*, y póngase una línea de la figura menor *f* de *b* á *d*, y la línea homóloga de la figura mayor F póngase de *d* á *e*, es decir, por hipotenusa del triángulo rectángulo *ebd*; el cateto *eb* será la línea homóloga á las que se tomaron, y construyendo sobre ella una figura semejante á las dadas (196, II), la superficie de esta figura será igual á la diferencia de las superficies de las figuras dadas F, *f*.

Esto está fundado (350) en que el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos al cuadrado de otro cateto.

XV. *Construir un cuadrado que su superficie sea igual á la diferencia de la superficie de dos figuras semejantes.*

Redúzcanse á cuadrados dichas figuras (prob. VIII), y practíquese con ellos lo explicado en el precedente problema.

XVI. *Dividir un campo triangular* (fig. 221) *en tres partes equivalentes, de suerte que cada parte pueda gozar de un pozo ó salida que hay en el vértice* C.

Divídase en tres partes iguales el lado AB, opuesto al vértice C, y las rectas CD, CE, dividirán al triángulo dado en los tres equivalentes CAD, CDE, CEB.

Observ. Del mismo modo que se ha dividido en tres partes equivalentes, se podrá dividir en otro cualquier número.

XVII. *Dividir un trapecio* AFGB *en tres ó más partes equivalentes* (fig. 221).

Divídanse las bases AB, FG, en el número de partes iguales que se quiera, por ejemplo, en 3, y las rectas ID, OE, tiradas desde los puntos de división, dividirán al trapecio dado en tres equivalentes.

XVIII. *Dividir un terreno de figura triangular en cuatro partes equivalentes.*

Primer modo. Tómese un punto P en la mitad del lado HJ (figura 222); otro punto L, en la mitad del lado HK; luego otro punto N en la mitad del lado JK; se unen LN, LP, PN, y se obtienen las cuatro partes equivalentes.

Segundo modo. Tómese un punto T en la mitad de QS (fig. 223), y tírese TU paralela á QR; divídanse las líneas QR, TU, en tres partes iguales; únanse los puntos de división por medio de las rectas XP, ZN, y quedará dividido el triángulo en cuatro partes equivalentes.

XIX. *De un polígono* EGHIJK (fig. 225), *construído con arreglo á escala, quitar un triángulo y un rectángulo cuyas superficies sean de 288 pies cuadrados cada una, y que uno de los lados del triángulo tenga 18 pies y uno de los del rectángulo 24.*

Para obtener el triángulo hágase $Fn = 18$ p., y levántese en n una perpendicular indefinida nx; pártase 288 por 18 y el cociente 16 multiplíquese por 2; se tendrán 32 p., y esta será la distancia qne se pondrá de n á x para tener en nx la altura del triángulo buscado; tírese, por fin, la xz paralela con FG, y el punto z será el vértice del triángulo Fnz, cuya superficie valdrá $18 \times {}^{32}/_{2} = 288$.

Para quitar el rectángulo póngase 24 p. de G á r y pártase 288 por 24, y el cociente 12 será la altura Gm ó ur del rectángulo $Gmur$, cuya superficie valdrá $24 \times 12 = 288$, es decir, los pies superficiales que debían quitarse del polígono propuesto.

XX. *Construir una figura semejante á otra dada* F, *y cuya superficie sea dupla, triple, cuadrúpla, etc., de la dada* (fig. 224) (G′).

Fórmese un ángulo recto ABC, y póngase uno de los lados L, de la figura dada F, de B á A y de B á D; la hipotenusa AD será el lado homólogo al L, correspondiente á una figura semejante á F y de dupla superficie.

Para abtener el lado de la figura de *triple* superficie, póngase $BE = AD$, y AE será este lado; porque el cuadrado de AE es igual al cuadrado de AB, más el cuadrado de $BE = AD$.

Para obtener el lado de la figura de *cuádrupla* superficie, hágase $BC = AE$, y la AC será dicho lado; porque $AC^2 = AB^2 + BC^2$, y como $BC = AE$, será $AC^2 = AB^2 + AE^2$.

(G′) Como las superficies de las figuras semejantes no guardan la *simple relación* de las líneas homólogas, sino la de los *cuadrados* de estas líneas, claro está que para obtener una superficie dupla, triple, etc., no se debe dar á la figura pedida lados duplos, triples, etc., de los de la figura dada, porque entonces se obtendría una superficie *cuádrupla, nónupla*, etc.; porque si el lado de la primera es la unidad, su cuadrado será 1; mas si el de la segunda consta de dos partes, su cuadrado será 4, y si fuese 3, su cuadrado será 9. Sea, por ejemplo, el triángulo HPL (fig. 222); si se prolongan los lados HP, HL, haciéndolos duplos de lo que son, el triángulo se convertirá en el HJK; si ahora se tira LN paralela á HJ y PN paralela á HL, se obtienen *cuatro* triángulos iguales, y si en vez de haber hecho los lados del segundo triángulo duplos del primero, se hubiesen hecho triples, entonces se hubieran obtenido *nueve*. Lo mismo se demostrar á de un cuadrado, etc.

Una vez obtenidos los lados AD, AE, AC, de las figuras de dupla, triple, cuádrupla superficie, no hay más que aplicar lo expuesto (196, II) para tener estas figuras.

XXI. *Se han de construir dos figuras semejantes, cuyas superficies sean como* 8 : 3; *qué relación guardarán dos lados homólogos de dichas figuras?*

Sean L, l, estos lados, y está claro que por lo dicho en la nota (G') del problema anterior, ha de tenerse $S : s : : L^2 : l^2$, ó bien $8 : 3 : : L^2 : l^2$; pero si cuatro términos están en proporción, sus raíces lo están también; luego $\sqrt{8} : \sqrt{3} : : \sqrt{L^2} : \sqrt{l^2}$, ó lo que es lo mismo, 2'82842 : 1'73205 : : L : l. Se ve, pues, que la relación de dos lados homólogos es la de 2'82842 : 1'73205.

Observ. De esto se deduce: que siempre que las superficies de dos ó más figuras semejantes estén representadas por números, los lados ó líneas homólogas de estas figuras guardarán la razón de las raíces cuadradas de dichos números.

CAPÍTULO III.

Combinación de las rectas con los planos y de los planos entre sí.

ARTÍCULO PRIMERO.

RECTAS Y PLANOS.

379. Qué es plano vertical? Qué es plano horizontal? Qué es plano inclinado?—380. Cuándo se dice que una recta está en un plano?—381. Qué es recta perpendicular á un plano? Qué línea es la que mide la verdadera distancia desde un punto á un plano?—382. Qué es línea oblicua á un plano? Cuándo se dice que una recta y un plano son paralelos entre sí?—383. La intersección común de dos planos que se cortan, qué es? Por una recta cuántos planos pueden pasar?—384. Cuántos puntos determinan la posición de un plano? Y de esto qué se deduce?—385. Qué es ángulo diedro? Qué es arista? Qué son caras del ángulo diedro?—386. Cuál es la medida del ángulo diedro? La suma de los dos ángulos diedros que forman un plano al encontrarse con otro, cuánto vale? Cuánto vale la suma de los ángulos formados por una infinidad de planos que pasan todos por una misma recta? Cuando dos planos se cortan, los ángulos que forman opuestos al vértice qué son?—387. Cuándo dos planos son paralelos?—388. Si dos planos están cortados por un tercer plano, las intersecciones que este tercer plano haga con los otros, qué serán?—389. Si se hace pasar un plano por dos rectas que se corten y sean paralelas á otras dos que

también se corten, qué sucederá? Por dos rectas que ni se corten ni sean paralelas, se pueden hacer pasar dos planos paralelos?—390. Qué son líneas de mayor vertiente?

379. Dimos á conocer (25) lo que se entiende por *plano*; ahora añadiremos que se llama PLANO VERTICAL el *que puede contener una recta vertical ó de aplomo*; PLANO HORIZONTAL, *el que permite trazar sobre su superficie dos ó más rectas horizontales que se crucen*, y PLANO INCLINADO, *el que ni es vertical ni horizontal* (H').

380. Se dice que una recta está en un plano *cuando todos los puntos de la recta se confunden con el plano*; tal es CB (fig. 228).

381. RECTA PERPENDICULAR á un plano *es la que forma ángulos de* 90 *grados con todas las rectas que en dicho plano pasan por el punto en que esta perpendicular le encuentra*. Dicho punto se llama PIE de la perpendicular.

De aquí se sigue:

1.° Que la recta AB, perpendicular al plano (figura 238), es perpendicular á todas las líneas BC, BO, BE, que, tiradas en el plano, pasan por el punto B.

2.° Que todas las líneas IJ, LN, perpendiculares al plano, son paralelas entre sí y á la línea AB.

3.° Que la perpendicular bajada de un punto á un plano mide la verdadera distancia del punto al plano.

4.° Que un plano CH (fig. 229) que pasa por una línea AB, perpendicular á un plano GE, es asimismo perpendicular á este plano.

5.° Que dos planos CD, FG (fig. 226), perpendiculares entre sí y á un tercer plano HI, tienen su común intersección AB perpendicular á dicho tercer plano.

(H') Si lo que se expone en este tercer capítulo puede el profesor explicarlo *materialmente* por medio de pequeños modelos de madera, hojalata, cartón, etc., los discípulos lo comprenderán más fácilmente.

382. Llámase OBLICUA á un plano *aquella recta que encuentra á este plano sin serle perpendicular*; y se dice que una recta y un plano son PARALELOS ENTRE SÍ, *cuando su posición es tal, que prolongados indefinidamente no se pueden encontrar.*

383. *La intersección común de dos planos que se cortan es una línea recta.* Pues es evidente que si se unen por medio de una recta dos puntos cualesquiera A y B (fig. 226), tomados en su intersección, todos los puntos de esta recta se encontrarán en la misma intersección.

De esto se deduce: que así como por un punto pueden pasar infinitas rectas, *del mismo modo por una recta pueden pasar infinitos planos*, como se ve en la fig. 227, donde los planos GH, EF, CD, tienen por común intersección la recta AB.

384. Así como dos puntos determinan la posición de una recta, del mismo modo *tres puntos que no estén en línea recta determinan la posición de un plano.* Porque si se da un punto I (fig. 227) fuera de la recta AB, es claro que no se podrá hacer pasar por la recta AB y el punto I más que un solo plano; porque de todos los que pasan por AB, el plano CD es el único que pasa por el punto I.

De donde se infiere:

1.º *Que dos líneas que se cortan determinan* la posición *de un plano.*

2.º *Que dos paralelas están siempre en un mismo plano, como resulta de su misma definición.*

385. Llámase ÁNGULO DIEDRO *el espacio ilimitado comprendido entre dos planos* GH, GO (fig. 230), *que se cortan ó se unen.* La intersección de los dos planos se llama *arista* y los planos *caras* del ángulo diedro.

386. La *medida de un ángulo diedro* es la misma que la del ángulo rectilíneo BAC (fig. 230), formado por dos rectas, tomada la una AB en uno de los pla-

nos GH y la otra AC en el otro GO, uniéndose ambas líneas en un mismo punto A de la arista y siendo las dos perpendiculares á la común intersección GI.

De aquí se sigue:

1.° Que un plano CH (fig. 229) que cae sobre otro plano GE, forma dos ángulos GCI, ICF, que tomados juntos valen 180 grados.

2.° Que la suma de los ángulos formados por tantos planos como se quieran GH, FE, CD, etc. (fig. 226), que pasan por una misma recta, valen 360 grados.

3.° Que los planos CD, GF (fig. 226), que se cortan, tienen los ángulos opuestos al vértice iguales.

387. Se dice que dos planos son PARALELOS *cuando no se pueden encontrar á cualquier distancia que se prolonguen.*

388. Si dos planos paralelos están cortados por un tercer plano, resultará: *que las intersecciones* AB, CD (fig. 232), *que este tercer plano hace con los otros, serán dos rectas paralelas.*

389. Si se hace pasar un plano por dos rectas AB, CD (fig. 231), que se corten y sean paralelas á otras dos SE, HJ, que se cortan también, resultará: *que el plano* FG, *determinado por las dos primeras, será paralelo al plano* KI, *determinado por las otras dos.*

De aquí se sigue: *que por dos rectas* BA, JH (figura 231), *que ni se cortan ni son paralelas, se pueden hacer pasar dos planos paralelos entre sí*; porque AB se puede cortar por una recta DC paralela á JH y JH por otra recta SE paralela á AB, y tenemos el caso precedente.

390. Las *líneas de mayor vertiente* ó *descenso* de un plano inclinado son las rectas perpendiculares á las horizontales trazadas sobre este plano. Dichas líneas indican la dirección que toman las aguas y todos los cuerpos que descienden, rodando ó resbalando sobre el plano inclinado en cuestión.

EJERCICIOS PRÁCTICOS.

391. PROBLEMAS.

I. *Dar la posición horizontal á un plano* FG (fig. 231).

Tírense en él dos rectas AB, CD, que se crucen, y por medio del *nivel de albañil* ó del de *aire*, hágase que dichas rectas tengan la posición horizontal. Cuando estas líneas sean horizontales, también lo será el plano en que estarán trazadas (379).

II. *Dar la posición vertical á un plano* GH (fig. 229).

Tírese en el plano una recta AB, y por medio de la plomada hágase que dicha línea tenga la posición vertical; logrado esto, el plano en cuestión será también vertical.

III. *En el punto* O *del plano* XZ (fig. 233), *levantar una perpendicular á este plano*.

Tómense dos *escuadras* E, E′, y haciéndolas descansar sobre uno de sus catetos OA, OB, en el plano XZ, hágase que los otros dos catetos coincidan, ajustando el vértice O del ángulo recto de ambas escuadras, con el punto propuesto. La común intersección NO fijará la posición de la perpendicular al plano XZ (381).

IV. *Por un punto dado* A *en el espacio, conducir una recta paralela al plano* KI (fig. 231).

Desde A bájese una perpendicular AS al plano KI, y en un punto E de este plano levántese la EB = AS y perpendicular al mismo plano; la AB será la paralela pedida.

V. *Por un punto* B, *dado sobre un plano, hacerle pasar otro plano que le sea perpendicular* (fig. 229).

En dicho punto B levántese la BA perpendicular al plano; hágase pasar en seguida por dicha recta otro plano, y éste será perpendicular al dado (381, 4.º).

VI. *Por un punto dado* A, *hacer pasar un plano paralelo al propuesto* KI (fig. 231).

Bájese desde A la perpendicular AS, y por el punto S tírese en el plano KI una recta cualquiera SE; córtese á la SE por otra recta HJ. Por A tírese la AB paralela con SE, y en seguida la DC paralela con JH. El plano FG, que pasa por las dos rectas AB, CD, será paralelo al KI.

VII. *Sobre un plano inclinado* ABCD (fig. 303), *trazar la línea de mayor descenso correspondiente á un punto dado* n.

Por dicho punto *n* tírese sobre el plano una recta horizontal *ac*, y en el punto *n* levántese la perpendicular *nb*, que será la línea que se pide (390).

ARTÍCULO 2.º

ÁNGULOS POLIEDROS.

392. Qué es ángulo poliedro? Qué entendemos por vértice y cara del ángulo poliedro?—393. Cómo se distinguen los ángulos poliedros?

Cuál es el ángulo poliedro más sencillo?—394. Qué es ángulo poliedro regular?—395. En todo ángulo triedro, la suma de los ángulos de dos caras es mayor que el tercero? La suma de todos los ángulos planos que forman un ángulo sólido, puede llegar á valer 360 grados? Cuándo dos ángulos triedros son iguales?

392. Angulo poliedro ó ángulo sólido *es la porción indefinida de espacio comprendido entre tres ó más planos que concurren en un mismo punto* S (fig. 234).

Llámase *vértice* del ángulo poliedro el punto común S de intersección; *cara*, cada uno de los ángulos planos ASB, BSC, CSA, etc., que forman el ángulo poliedro.

393. Los ángulos poliedros se distinguen por el número de sus planos ó caras; así, se llama *ángulo triedro*, cuando consta de tres caras; *ángulo tetraedro*, *pentraedro*, etc., cuando consta de 4, 5, etc., caras.

El *ángulo triedro* es el más sencillo de los ángulos poliedros, porque dos planos no pueden llegar á formar un ángulo sólido.

394. *Angulo poliedro regular* es el que tiene iguales entre sí sus ángulos diedros é iguales también los ángulos planos que constituyen sus caras.

395. Propiedades.

1.ª *En todo ángulo triedro* S, *la suma de los ángulos de dos caras es mayor que el tercero*; es decir, que en el ángulo sólido S (fig. 234), formado por los tres ángulos planos ASB, BSC, ASC, se verifica: que el ángulo ASC, que es el mayor de todos, es menor que la suma de los otros dos ángulos ASB, BSC.

2.ª *La suma de todos los ángulos planos que forman un ángulo sólido no puede llegar á valer* 360 *grados*.

3.ª *Dos ángulos triedros son iguales cuando tienen respectivamente iguales sus caras y dispuestas del mismo modo.*

CAPÍTULO IV.

GENERACIÓN DE LAS SUPERFICIES CURVAS.

396. En cuántas clases suelen dividirse las superficies curvas?—397. Qué es superficie cilíndrica? Qué se entiende por generatriz? Qué por directriz? De las definiciones anteriores, qué se deduce?—398. Qué es superficie cónica? Qué es vértice, generatriz y directriz de una superficie cónica?—400. Si se corta por un plano una superficie cónica cuya directriz sea una circunferencia, qué sucede?—401. Qué son superficies alabeadas?—402. Cuáles son las superficies que se llaman regladas?—403. Qué son superficies de revolución?—404. Cuáles las que se llaman á doble curvatura?—405. Qué son superficies desarrollables?—406. Cuándo se dice que un plano es tangente á un punto de una superficie curva?—407. Cuándo una recta es normal á una superficie curva?

396. Las superficies curvas suelen dividirse en cuatro clases, que son: superficies *cilíndricas*, superficies *cónicas*, superficies de *revolución* y superficies *alabeadas*.

397. Se llama SUPERFICIE CILÍNDRICA *aquella que forma una recta que, recorriendo todos los puntos de una línea curva, queda siempre paralela á su primera dirección.*

La fig. 209 representa una superficie cilíndrica formada por la línea recta AB, que se mueve siguiendo la curva AA′A″, etc., y en la que las posiciones sucesivas A′B′, A″B″, A‴B‴, son paralelas á la primera AB.

Se da el nombre de *generatriz* á la recta movible AB, y el de *directriz* á la línea curva AA′A″, etc.

De estas definiciones se deduce:

1.º Que todas las curvas imaginables pueden ser tomadas como á directrices, por lo que el número y la forma de superficies cilíndricas varía al infinito.

2.º Que con una misma directriz se pueden formar una infinidad de superficies cilíndricas, variando las inclinaciones de la generatriz.

3.° Que toda sección hecha por un plano paralelo á la directriz es una curva igual ó semejante á dicha directriz.

Las superficies de los tubos que sirven para la conducción de agua ó gas, las del arco de un puente, las de los pozos, la del interior de un cañón, etc., son por lo regular superficies cilíndricas.

398. Se da el nombre de SUPERFICIE CÓNICA *á la engendrada por el movimiento de una recta sujeta á pasar constantemente por un punto fijo, siguiendo al propio tiempo el contorno de una curva dada.*

Una superficie cónica es, por consiguiente, compuesta de dos partes semejantes ABCO, A′B′C′O′ (fig. 208), separadas por el punto fijo O, que se llama *vértice.* La recta AOA′ se llama *generatriz*, y la curva ACB *directriz.*

En general, no se emplea más que una de las dos partes de la superficie cónica. El reloj de arena, instrumento que se emplea en los buques para medir el tiempo, es tal vez el único objeto que en las artes presenta las dos superficies cónicas á la vez.

Las superficies curvas de los panes de azúcar, de los alfileres y punzones, de los pararrayos, de las columnas, etc., son superficies cónicas.

399. *Cuando una superficie cónica es cortada por un plano paralelo á la directriz, la intersección es una curva semejante á la directriz.* Sobre esta propiedad se funda la construcción de *siluetas*, nombre que se da á los contornos que determinan sobre un plano las sombras que ocasionan el perfil de una figura iluminada por una luz; tales son, por ejemplo, los retratos de perfil sacados por el contorno de la sombra.

400. Si se corta por un plano una superficie cónica, cuya directriz sea una circunferencia, se obtiene:

1.° Un *círculo*, si el plano secante, cortando á la generatriz en todas sus posiciones, es paralelo al de la directriz.

2.° Una *elipse,* si el plano, dejando de ser paralelo á la directriz, corta la generatriz en todas sus posiciones sobre una de las dos superficies cónicas.

3.° Una *parábola,* si el plano secante es paralelo á la generatriz.

4.° Una *hipérbola,* si el plano corta las dos superficies cónicas sin entrar por una generatriz; en este caso, el plano secante es paralelo á dos posiciones de la generatriz.

401. Se da el nombre de SUPERFICIES ALABEADAS *á las superficies engendradas por una recta movible, en que dos de sus posiciones consecutivas no están en un mismo plano.* Tales son las superficies de las aspas de un molino de viento, la de las orejeras del arado, la de debajo de una escalera de caracol, la del filete de un tornillo triangular, etc.

402. *Las superficies curvas cuya generatriz es una línea recta,* toman el nombre genérico de SUPERFICIES REGLADAS, indicando con esta voz que en cada uno de sus puntos se puede aplicar el canto de una *regla,* aunque no sea más que en un sentido. Si en cada una de estas aplicaciones se traza sobre dichas superficies una línea recta, se irá teniendo en ellas todas las posiciones que ha tomado la generatriz durante la generación de la superficie.

403. Se llaman SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN *las engendradas por el movimiento de una línea recta ó curva que gira alrededor de una recta fija* que se llama EJE DE REVOLUCIÓN. De manera que cada uno de los puntos de la generatriz describe una circunferencia cuyo centro ha de estar precisamente en el eje de revolución.

Cuando la *generatriz* es una línea curva, se denomina también *meridiano,* y en este caso las superficies suelen tomar el nombre de la curva que las engendra; así, la superficie que tenga por generatriz una semielipse que ha girado alrededor de uno de sus ejes, se llama *superficie elipsoidica*; la que está formada por la mitad de una parábola que ha girado alrededor de su eje, se denomina *paraboloidica*; etcétera.

Luego la superficie de una bala es una superficie de revolución formada por una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro. La superficie de una campana, la de un vaso de figura circular ó esférica y, en general, todos los objetos elaborados en el *torno*, son superficies de *revolución*.

De lo dicho se deduce: que toda sección hecha en una superficie de revolución, por un plano perpendicular á la directriz, es un círculo que tiene su centro en dicha directriz ó eje.

404. Se llaman SUPERFICIES Á DOBLE CURVATURA *las que tres elementos de ella no están situados en un mismo plano y por lo mismo no se les puede trazar una recta en ningún sentido*; tal es, por ejemplo, la superficie de una bala ó bola.

405. Entre las superficies regladas que hemos definido, hay algunas que, si las ponemos *flexibles* y *tendibles*, tendrán la propiedad de poderse desarrollar sobre un plano en toda su extensión, sin que les falte ni les sobre; dichas superficies tomarán el nombre de *desarrollables*. Por lo que diremos que SUPERFICIE DESARROLLABLE *es aquella cuyas generatrices consecutivas se hallan de dos en dos en un mismo plano*. Tales son, por ejemplo, las superficies cilíndricas y las cónicas.

Así es que los estuches, las vainas, los cucuruchos para dulces, las cajas y muchos otros objetos que se elaboran en la industria son hechos con hojas planas de cartón, cuero, papel, etc.

Los tubos ó cañones de las estufas, los embudos y otra porción de objetos son construídos con hojas planas y flexibles de zinc, hierro, hojalata, latón y varios otros metales.

406. Un plano es TANGENTE á un punto de una superficie curva, *cuando pasa por dos tangentes tiradas á este punto*. Resulta de lo dicho que cuando una superficie curva es engendrada por el movimiento de una recta, como las superficies cilíndricas, cónicas y alabeadas, el plano tangente en un punto de la superficie pasa siempre por la posición de la generatriz que corresponde á este punto.

407. Se dice que una recta es NORMAL á una superficie curva *cuando, siendo perpendicular á un plano tangente, pasa por el punto de contacto.*

SECCION TERCERA

DE LOS SÓLIDOS Ó CUERPOS GEOMÉTRICOS

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LOS POLIEDROS EN GENERAL.

408 Qué se entiende por poliedro? Qué son caras del poliedro? Qué es superficie del poliedro?—409. Qué son aristas y vértices de un poliedro?—410. Qué es diagonal de un poliedro? Qué es plano diagonal?—411. Qué es base de un poliedro? Y altura?—412. Qué son poliedros regulares é irregulares?—413. Qué son poliedros semejantes?—414. La superficie de un sólido, cómo se divide? Qué es superficie lateral? Qué es superficie total?—415. Cuántas especies principales de poliedros se consideran?

408. Entiéndese por POLIEDRO *un sólido limitado por cuatro ó más planos que se cortan dos á dos* (figuras 235, 236, etc).

409. Se da el nombre de ARISTA *á la común intersección de dos caras adyacentes del poliedro*, *y* VÉRTICE *á los extremos de la arista.*

410. Se llama DIAGONAL de un poliedro *á toda recta tirada entre dos vértices que no terminen en una misma cara;* tal es *ab* (fig. 236); y PLANO DIAGONAL *á todo plano que pase por tres vértices no comprendidos en una misma cara*, como *abcd* (fig. 237).

411. Es BASE de un poliedro *la cara sobre que se considera insistiendo*, y ALTURA *la perpendicular bajada desde el punto más distante de la base á la misma ó á su prolongación*, como *ef* (figs. 236 y 237).

412. Los poliedros en general se dividen en *regulares* é *irregulares.* Son POLIEDROS REGULARES *aque-*

llos cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí y sus ángulos poliedros son también iguales; son POLIEDROS IRREGULARES *los que no reunen estas circunstancias.*

413. Entiéndese por POLIEDROS SEMEJANTES *aquellos cuyas caras homólogas son polígonos semejantes y sus ángulos sólidos homólogos son iguales.*

414. La superficie de un cuerpo poliedro se divide en *lateral* y *total*. Llámase SUPERFICIE LATERAL *á la suma de la superficie de los lados del cuerpo*, y se llama SUPERFICIE TOTAL *á la unión de la lateral con la de las bases.*

415. Se consideran tres especies principales de poliedros, que son: los *prismas*, las *pirámides* y los *cuerpos regulares.*

ARTÍCULO PRIMERO.

DE LOS PRISMAS.

416. Qué es prisma? Cómo se dividen los prismas? Qué es prisma recto y prisma oblicuo?—417. Qué nombre toman los prismas relativamente á sus bases?—418. Qué se entiende por trozo de prisma?—419. Cómo se subdividen los prismas cuadrangulares? De cuántas maneras pueden ser los paralelepípedos?—420. Cuándo el paralelepípedo toma el nombre de cubo?—421. Qué es rombaedro ó cubo rombal?—422. Qué hay que saber tocante á los prismas?—423. Cuáles son las propiedades de los paralelepípedos que es útil observar?

L. 25

416. Entiéndese por PRISMA *un poliedro que tiene por* BASES *dos polígonos iguales y paralelos, y sus caras laterales son paralelogramos* (figs. 234 y 236, etcétera).

El prisma se divide en RECTO y OBLICUO: *es* RECTO, *cuando sus aristas laterales son perpendiculares á las bases* (~~figs. 235 y 236~~), y es OBLICUO, *cuando no lo son* (~~fig. 237~~).

417. Un prisma será *triangular*, *cuadrangular*,

pentagonal, etc., conforme su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

Cuando un prisma, á más de ser recto, tiene por bases polígonos regulares, se llama REGULAR.

418. Se denomina TROZO DE PRISMA *la porción de prisma comprendida entre una de sus bases y un plano que, cortando las aristas laterales, sea oblicuo á dichas bases.*

419. Los prismas cuadrangulares se subdividen en *trapezoidales, trapeciales* y *paralelepípedos*, según sean sus bases trapezoides, trapecios ó paralelogramos.

Los paralelepípedos se dividen en *rectangulares, rombales* y *romboidales*, según tengan por bases rectángulos, rombos ó romboides.

420. Se llama CUBO Ó EXAEDRO REGULAR *un paralelepípedo cuyas caras son seis cuadrados iguales* (fig. 242); tales son los dados de jugar.

421. ROMBAEDRO Ó CUBO ROMBAL *es un paralelepípedo cuyas caras son seis rombos iguales entre sí* (fig. 241).

422. PROPIEDADES *de los prismas en general.*

1.ª Todas las aristas laterales de un prisma son iguales.

2.ª Las secciones hechas en un prisma por planos paralelos que corten todas las aristas laterales, son polígonos iguales entre sí.

3.ª Toda sección hecha en un prisma por un plano paralelo á dos aristas laterales, es un paralelogramo.

En el *prisma recto*, cada arista lateral es igual á la altura del prisma y las caras laterales son rectángulos.

423. *Tocante á los* PARALELEPÍPEDOS *debe saberse*:

1.º En todo paralelepípedo, las caras opuestas son iguales y paralelas.

2.º El plano diagonal de un paralelepípedo recto lo divide en dos prismas triangulares iguales, y la sección es un paralelogramo.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 6.ª

424. 1.° Dibujar el *prisma triangular recto* y el *oblicuo*, figuras LXXVII y LXXVIII.—El primero representa un cuerpo hueco y el segundo un cuerpo sólido.

2.° Diseñar el *cubo*, fig. LXXIX, y el *cubo rombal*, fig. LXXX.—El primero representa una caja de forma cúbica.

3.° Dibujar los paralelepípedos rectangulares de las figuras LXXXI y LXXXII.—El primero representa un cajón con cuatro divisiones en su interior.

4.° Hacer el dibujo de un *prisma pentagonal regular*, figura LXXXIII.

5.° Copiar la *peaña* de la fig. LXXXIX.—Es un prisma regular eptagonal.

6.° Dibujar un prisma *exagonal oblicuo*, fig. LXXXV.

ARTÍCULO 2.°

L. 26

DE LAS PIRÁMIDES.

425. Qué es pirámide?—426. Según la figura de su base, no toma diferente nombre la pirámide?—427. Qué es eje de la pirámide?—428. Cuándo una pirámide es regular ó irregular?—429. Qué se entiende por apotema en una pirámide regular?—430. Qué es tronco de pirámide ó pirámide truncada? A qué se llama trozo de pirámide?—431. Qué se entiende por pirámide deficiente?—432. Qué son pirámides semejantes?—433. Cuáles son las propiedades principales de las pirámides?

425. La PIRÁMIDE *es un poliedro que tiene por base un polígono de cualquier número de lados y por caras laterales triángulos que tienen un vértice común, llamado* CÚSPIDE *de la pirámide* (figs. 238, 239, etc.).

426. La pirámide se llama *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., conforme sea su base un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

427. Es EJE de la pirámide *la recta que va desde la cúspide al centro de la base*; tal es *ao* (fig. 238).

Altura de la piramide la distancia que va desde la cuspide a la mitad de la base

La pirámide es recta cuando sus aristas la son perpendiculares a las bases y oblicua cuando no lo son.

428. Las pirámides se dividen en *regulares* é *irregulares*. Es REGULAR una pirámide *cuando tiene por base un polígono regular, el cual le cae el eje perpendicularmente* (fig. 238), y es IRREGULAR *cuando le falta alguna de estas circunstancias* (fig. 239).

429. Se llama APOTEMA, en una pirámide regular, *la recta que, trazada sobre una de las caras, va desde la cúspide al punto medio del lado de la base* (fig. 238, *ab*). Y como las caras de las pirámides regulares han de ser precisamente triángulos simétricos, de ahí que la apotema sea siempre perpendicular al lado de la base, en su punto medio.

430. TRONCO DE PIRÁMIDE Ó PIRÁMIDE TRUNCADA *es la porción de pirámide comprendida entre la base y una sección hecha por un plano paralelo á la misma* (fig. 240). Y se entiende por TROZO DE PIRÁMIDE *la porción comprendida entre su base y un plano no paralelo á dicha base.*

431. PIRÁMIDE DEFICIENTE *es la porción de pirámide que resta después de haber quitado de la total la pirámide truncada* (fig. 240, *adcbo*).

432. Son PIRÁMIDES SEMEJANTES *las que tienen semejantes sus caras correspondientes é iguales sus ángulos poliedros respectivos.*

433. PROPIEDADES.

1.ª Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos simétricos, entre sí iguales.

2.ª La pirámide deficiente goza de las mismas propiedades que la total, por serle semejante.

3.ª Las caras laterales de un tronco de pirámide regular son trapecios isósceles é iguales entre sí.

APLICACIÓN DE LA PIRÁMIDE EN LAS ARTES.

434. Los obeliscos, las torres de muchos templos, las pilas de balas, las puntas de los compases, etc., tienen la forma piramidal.—Las famosas pirámides de Egipto, que se cuentan entre las siete maravi-

llas del mundo, son pirámides truncadas de base rectangular. Son también pirámides truncadas algunas chimeneas de fábrica de vapor, los ataudes y varios otros objetos.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 6.ª

435. 1.° Dibujar un *tronco de pirámide cuadrangular*, figura LXXXVI.

2.° Hacer el dibujo de la *pirámide octagonal truncada*, figura LXXXVII.

3.° Diseñar el *obelisco* de la figura LXXXVIII.

4.° Copiar la *garita* de la figura LXXXIX.

5.° Dibujar el *farol* de la figura XC.

ARTÍCULO 3.º

DE LOS CUERPOS REGULARES.

436. Qué es poliedro regular? Cuántos poliedros ó cuerpos regulares hay?—437. Qué entendemos por tetraedro?—438. Qué es un octaedro?—439. A qué se llama icosaedro?—440. Qué se entiende por cubo ó exaedro?—441. Qué por dodecaedro?—442. En qué se funda que no puede haber más que los *cinco* cuerpos regulares mencionados?

L.27. L.27

436. ~~Dijimos que~~ POLIEDRO REGULAR *es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí y sus ángulos poliedros son también iguales.*

Sólo hay cinco con estas circunstancias, y estos, conocidos con el nombre de CUERPOS REGULARES, son: el *tetraedro*, el *octaedro*, el *icosaedro* ó *cubo* y el *dodecaedro.*

437. El TETRAEDO REGULAR es un poliedro que está terminado por cuatro triángulos equiláteros iguales (figs. 243 y 244).

438. Entendemos por OCTAEDRO un cuerpo terminado por ocho triángulos regulares é iguales (figura 245).

439. Llámase ICOSAEDRO el sólido limitado por veinte triángulos iguales y equiláteros (fig. 246).

440. Entiéndese por CUBO Ó EXAEDRO REGULAR un poliedro terminado por seis cuadrados iguales (figura 442).

441. DODECAEDRO es un cuerpo que tiene doce caras iguales, las cuales son pentágonos regulares (fig. 248).

442. Dijimos (395, 2.°) que la suma de todos los ángulos planos que forman un ángulo sólido no puede llegar á valer 360°. Fundados en esta verdad, manifestaremos que no puede haber más de los *cinco* cuerpos regulares arriba dichos.

Porque para formar un ángulo poliedro se necesitan *tres planos* á lo menos, y por lo mismo se tiene que 3, 4 y 5 ángulos de triángulo equilátero darán: $3\times60°=180°$, $4\times60°=240°$ y $5\times60°=300°$; luego con dicha figura se pueden formar ángulos diedros, tetraedros y pentaedros, como son los del *tetraedro*, *actaedro* é *icosaedro*. Como seis ángulos de triángulo equilátero valen $6\times60°=360°$, no pueden formar un ángulo sólido; luego no puede haber más de tres especies de cuerpos regulares formados por triángulos.

Con ángulos de cuadrado se puede formar un ángulo tetraedro (el del *cubo*) y ningún otro más; porque $4\times90°=360°$.

Con tres ángulos de pentágono regular se tiene $3\times108°=324°$; luego con dicha figura se puede formar un ángulo triedro como los del dodecaedro; como cuatro ángulos de pentágono regular valen más de 360°, no puede haber más que un cuerpo regular formado por pentágonos.

No se puede formar cuerpo alguno regular con exágonos; porque $3\times120°=360°$. Y como tres ángulos de los demás polígonos de mayor número de lados que el exágono han de valer aún más de 360°, se infiere que con ningún polígono regular que tenga más de cinco lados se puede formar cuerpo regular alguno. *Luego no puede haber más que cinco cuerpos regulares.*

DIBUJOS DEL ATLAS.

Lámina 6.ª

443. 1.° Dibujar el *tetraedro*, fig. XCI.
2.° Diseñar el *octaedro*, fig. XCII.
3.° Copiar el *icosaedro*, fig. XCIII.
4.° Hacer el dibujo del *dodecaedro*, figs. XCIV y XCV.

CAPÍTULO II.

L27 DE LOS CUERPOS REDONDOS.

444. Qué son cuerpos redondos? Cuántos son los cuerpos redondos que considera la geometría elemental?

444. Llámanse generalmente CUERPOS REDONDOS *aquellos que no presentan ningún ángulo poliedro en su superficie.*

Estos cuerpos, ó están terminados por una superficie curva, como sucede con la esfera y otros sólidos, ó bien por una superficie compuesta de partes planas y de partes curvas, como sucede con los cilindros y los conos.

La geometría elemental sólo considera tres cuerpos redondos, que son: *el cilindro de base circular, el cono circular* y *la esfera.* Mas como en la industria y en las artes, no tan sólo están en uso los cilindros y conos circulares, sino también los elípticos y otros; hemos creído conveniente considerar á dichos cuerpos de un modo más general, á fin de que los alumnos tengan un cabal conocimiento de ellos, para lo que les pueda convenir en sus respectivas aplicaciones á la industria y á las artes.

ARTÍCULO PRIMERO.

DE LOS CILINDROS.

445. Qué es cilindro?—446. Qué se entiende por lado ó generatriz de un cilindro?—447. Cuándo se dice que un cilindro es recto ú oblicuo?—448. Qué es eje de un cilindro? Cuándo los cilindros se llaman circulares, elípticos, etc.?—449. Qué es trozo de cilindro?—450. Cuál es el cilindro que es cuerpo de revolución? Cómo se considera engendrado?—451. Cuáles son las principales propiedades de los cilindros?

L. 27

445. Al tratar de las superficies cilíndricas (397), las hemos considerado indefinidas, en la dirección de la generatriz, sin limitar espacio. Mas si ahora suponemos una superficie cilíndrica cuya directriz sea una curva cerrada, limitada en dos sentidos por dos planos iguales y paralelos, obtendremos un cuerpo redondo que se llama *cilindro*. De modo que CILINDRO *es un sólido comprendido entre dos curvas cerradas y paralelas (llamadas bases del cilindro) y la superficie que trazaría una recta que, moviéndose paralelamente á ella misma, tocase en la curva de las bases* (fig. 249).

446. Se llama LADO Ó GENERATRIZ del cilindro *á la recta que, tirada en la superficie lateral, toca á las dos bases* (fig. 249, CA, ZP, etc.).

447. El cilindro puede ser *recto* ú *oblicuo*. Es RECTO, *cuando el lado ó generatriz es perpendicular á las bases* (fig. 249); *cuando no, es* OBLICUO (fig. 250).

448. Cuando las bases del cilindro se componen de curvas que tienen centro de simetría, como, por ejemplo, el círculo, la elipse, el óvalo, etc., entonces se denomina EJE *la recta que une los centros de sus dos bases*; tal es *ao* (fig. 249).

Los cilindros se llaman *circulares*, *elípticos* ú *ovales*, según tengan por bases círculos, elipses ú óvalos.

449. Se llama TROZO DE CILINDRO *cada uno de los dos cuerpos en que se divide un cilindro, cuando se corta por un plano oblicuo á las bases.*

450. Se dice que el cilindro recto circular es un *cuerpo de revolución*, porque se puede considerar engendrado de la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados que está inmóvil; la base y su lado opuesto describen dos planos circulares iguales, que son las bases del cilindro, y el otro lado paralelo al inmóvil describe una superficie circular, que es la lateral del cilindro.

Los demás cilindros que pueden considerarse no son cuerpos de revolución; son simplemente cuerpos redondos.

451. PROPIEDADES.

1.ª Todos los lados ó generatrices de un cilindro son iguales y paralelos al eje del mismo cilindro.

2.ª La sección hecha en un cilindro por un plano que pase por el eje, ó le sea paralelo, es un paralelogramo (fig. 249, *nz*, *pu*).

3.ª Toda sección hecha en un cilindro circular recto, por un plano oblicuo á las bases, es una verdadera elipse (fig. 251, *de*).

APLICACIÓN DE LOS CILINDROS.

452. Son tantas y tan comunes las aplicaciones de los cilindros en toda clase de fabricación é industria, que no habrá tal vez nadie que no conozca una infinidad. Los anteojos de larga vista, los *caños* de plomo para el conducto del agua y los de hierro para la iluminación del gas, son cilindros que se engargantan unos con otros. El lápiz plomo de que nos servimos para dibujar, los tubos de cristal de los barómetros y termómetros, los *rodillos* que sirven para arrastrar algún peso con facilidad, las monedas, los cañutos de hojalata, muchas medidas para líquidos y granos, las candelas, los tallos de las flores, etc., tienen la forma cilíndrica circular.

Varias cajas y estuches de madera, cartón ó metal, ciertas petacas, vasos y otros varios utensilios, etc., son cilindros rectos de base elíptica, oval y circular.

DIBUJOS DEL ATLAS.

Lámina 7.ª

453. 1.° Dibujar la *jícara* de la fig. XCVI y la *marmita* de la figura XCVII.

2.° Diseñar el *cilindro oblicuo* de la fig. XCVIII.

3.° Copiar la fig. XCIX.—Representa un cilindro hueco con otro interior concéntrico y macizo.

4.° Hacer el dibujo de la fig. C.—Representa un cilindro oblicuo y macizo, ceñido por tres piezas de metal.

ARTÍCULO 2.°

DE LOS CONOS.

454. Qué se entiende por cono?—455. A qué se llama vértice del cono? Qué es lado ó generatriz del cono?—456. Los conos no toman nombres particulares según la figura de su base? Qué es eje del cono?—457. Qué es cono recto y cono oblicuo? -458. Cuál es el cono que se considera como cuerpo de revolución?—459. Qué es tronco de cono? Cómo se puede considerar engendrado un tronco de cono circular?—460. A qué se llama trozo de cono?—461. Cuáles son las propiedades que deben saberse respecto de los conos?

454. Hemos visto (398) las superficies cónicas, considerándolas indefinidamente. Pero si concebimos una de estas superficies limitada por un plano que corte todas las generatrices, obtendremos un cuerpo redondo que se llama *cono*.

Así, diremos que cono es un cuerpo encerrado por un plano que termina por una curva cerrada, que se llama base del cono, y por la superficie que trazaría una recta que, girando alrededor de un punto fijo, rozase siempre con la curva de la base (figura 252).

445. Se llama vértice del cono *el punto donde termina la superficie convexa del mismo*; tal es el punto *a* (figs. 252 y 253).

Lado ó generatriz del cono *es la recta que va desde el vértice á un punto de la curva de la base*; tales son *ab*, *ac* (fig. 252).

456. Los conos toman el nombre de la base que les sirve de directriz; así, se llaman circulares, elípticos, óvalos, etc., según tengan por base un círculo, una elipse, un óvalo, etc. *La recta que pasa por el centro de la base y por el vértice del cono se llama* eje.

457. El cono se divide en *recto* y *oblicuo*. Es recto, *cuando el eje es perpendicular á la base* (fig. 252), *y cuando no*, es oblicuo (fig. 253).

458. El cono recto circular es también *cuerpo de revolución* y se origina de la de un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos que está inmóvil; la hipotenusa describe la superficie lateral del cono, y el otro cateto el círculo de la base. Los demás conos son tan sólo cuerpos redondos, pero no de revolución.

459. Tronco de cono ó cono truncado *es la parte de cono comprendida entre la base y una sección hecha por un plano paralelo á la misma* (fig. 254).

Un tronco de cono circular se puede considerar engendrado por la revolución de un trapecio rectángulo que gira alrededor del lado *oo'*, perpendicular á las bases, como eje (fig. 254).

460. Llámase trozo de cono *á la porción de cono comprendida entre su base y un plano que corta todas las generatrices oblicuamente á esta base.*

461. Propiedades.

1.ª Toda sección hecha en un cono por plano paralelo á la base, es una figura curvilínea semejante á esta base. De donde resulta que las bases de un tronco de cono cualquiera son siempre dos figuras semejantes.

2.ª Un plano que toca ó corta la superficie de un cono circular puede tener las siete posiciones principales que siguen:

Primera: pasar por el vértice del cono, sin cortarlo; en este caso se dice que la sección es un *punto*.

Segunda: pasar por una de las generatrices del cono sin poder encontrar á otra generatriz, aunque se prolongue dicho plano cuanto se quiera; en este supuesto la sección es una *recta*.

Tercera: penetrar por una de las generatrices del cono y salir por otra generatriz; en este caso la sección es un *ángulo rectilíneo*.

Cuarta: siendo el plano paralelo á la base del cono, cortar todas las generatrices del mismo; con lo cual la sección será un *círculo*.

Quinta: cuando el plano, dejando de ser paralelo á la base, no llega á serlo con el lado del cono, entonces la sección es una rigurosa *elipse*.

Sexta: si el plano secante es paralelo á uno de los lados del cono, la sección que resulte será una *parábola*.

Séptima: si, según lo manifestado (398), se considera prolongada la superficie curva del cono, y el plano secante corta las dos superficies sin pasar por el vértice, la sección es, en este caso, una verdadera *hipérbola*.

Luego se consideran siete secciones cónicas: el *punto*, la *recta*, el *ángulo rectilíneo*, el *círculo*, la *elipse*, la *parábola* y la *hipérbola*.

APLICACIÓN DE LOS CONOS.

462. Los extremos ó *puntas* de las lanzaderas, los cucuruchos de dulces, los panes de azúcar, los matacandelas, la parte interior de un trompo, la punta de los pararrayos, etc., son conos rectos circulares elaborados por las artes. Los fustes de las columnas, los cubos ó pozales, los dedales, las pantallas de muchos quinqués, los embudos, muchas chimeneas de vapor, etc., son conos rectos truncados y circulares.

DIBUJOS DEL ATLAS.

LÁMINA 7.ª

463. 1.° Dibujar el *cono recto* y el *oblicuo*, figs. CI y CII.
2.° Hacer el dibujo de un *embudo*, fig. CIII.—Se compone de dos conos truncados.
3.° Dibujar el *cuartal* de la fig. CIV.—Su figura es la de un cono recto truncado.
4.° Diseñar la *cafetera*, fig. CV.—Tanto la cafetera como el brocal y el mango son troncos de cono.
5.° Hacer el dibujo de un *reloj de arena*, fig. CVI.—Se compone de dos conos rectos circulares unidos por el vértice.
6.° Dibujar un *pozal ó cubo ordinario*, fig. CVII.
7.° Diseñar un *tonel*, fig. CVIII.—El tonel se puede considerar como dos troncos de cono circulares, unidos por sus bases a, a'.
8.° Copiar la *cesta* de la fig. CIX.—En su totalidad se compone de dos troncos de cono circulares unidos por su base menor.

ARTÍCULO 3.°

DE LA ESFERA, ELIPSOIDE, PARABOLOIDE É HIPERBOLOIDE.

464. Qué es una esfera? Cómo podemos concebir formada la esfera? Qué es radio y diámetro de la esfera? Qué se entiende por eje y polos de la esfera?—465. Toda sección hecha en una esfera por un plano, qué es? Qué se entiende por círculo máximo y menor? Cómo divide el círculo máximo á la esfera? Qué son hemisferios ó semiesferas?—466. Qué son meridianos? Qué es ecuador? Qué son círculos paralelos?—467. Qué son segmentos esféricos? Cuándo se dice segmento mayor ó menor?—468. Qué es altura de un segmento esférico?—469. Qué es husillo esférico?—470. Qué son zonas?—471. Qué es sector esférico?—472. Cuáles son las propiedades generales que se deben saber respecto á las esferas?—473. Qué es un elipsoide? Cuál es el cuerpo llamado paraboloide? Cuál el hiperboloide?—474. Qué se entiende por líneas ó secciones meridianas de estos cuerpos?—475. Cuáles son las propiedades comunes á estos cuerpos?

464. La ESFERA *es un sólido terminado por una superficie convexa, cuyos puntos están todos á igual distancia de uno interior que se llama* CENTRO *de la esfera* (fig. 257).

Podemos concebir formada la esfera por la revolución de una semicircunferencia ELDF alrededor de su diámetro EF.

Radio de la esfera *es la recta tirada desde el centro á cualquier punto de la superficie;* diámetro *es la recta que, pasando por el centro, termina por sus extremos en la superficie.*

Entiéndese por eje de la esfera *el diámetro alrededor del cual ha girado el semicírculo generador*, y se llaman polos *los extremos del eje.*

465. Toda sección hecha en una esfera por un plano, es un *círculo*; el cual se llama *máximo*, cuando el plano secante pasa por el centro de la esfera, y cuando no, se llama *menor*.

Por consiguiente, el círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales, que toman el nombre de *hemisferios* ó *semiesferas*.

466. Se llaman meridianos los círculos máximos que pasan por los polos de la esfera; ecuador, el círculo máximo que es perpendicular al eje, y paralelos, todos los círculos que son paralelos al ecuador.

467. Segmentos esféricos *son las dos partes en que queda dividida la esfera cuando se corta por un plano que no pasa por su centro*, y la sección causada por este plano es la *base* del segmento.

En este caso la esfera está dividida en dos partes desiguales, que se llaman *segmento mayor* y *segmento menor*.

468. Llámase *casquete esférico* á la superficie del segmento esférico menor (LNE, fig. 257).

Altura de un casquete ó segmento esférico es la porción de radio ó diámetro de la esfera, perpendicular á la base y comprendido entre esta base y la superficie del casquete.

469. *Husillo esférico* es la superficie de una parte de esfera, comprendida entre dos semicircunferen-

cias de círculo máximo A*a*I, A*b*I (fig. 258), que terminan en un diámetro común AI.

470. *Zona esférica* es la porción de superficie de la esfera comprendida entre dos círculos paralelos; tal es DLNH (fig. 257).

471. *Sector esférico* es una parte de la esfera compuesta de un casquete y de un cono que tiene su vértice en el centro de la esfera y cuya base es la misma del casquete, como OLENO (fig. 257).

472. PROPIEDADES. En toda esfera se verifica:

1.° Que todos los círculos máximos son iguales y se parten mutuamente por mitad.

2.° Que por dos puntos de la superficie de una esfera no puede pasar más que un círculo máximo, si los dos puntos no son extremos de un diámetro; pero si lo son, pueden pasar tantos como se quieran.

3.° Todo círculo máximo divide por mitad á la esfera.

4.° Los centros de los círculos paralelos están todos en línea recta.

5.° Toda sección hecha por un plano en una esfera es un círculo, cualquiera que sea la dirección de este plano.

473. Hay otros cuerpos de revolución, á más de los ya descritos, cuyo conocimiento podrá sernos útil en lo sucesivo; tales son el *elipsoide*, el *paraboloide* y el *hiperboloide*.

Entiéndese por ELIPSOIDE *el sólido engendrado por la revolución de una elipse alrededor de uno de sus ejes*. Si la elipse generatriz gira alrededor de su eje mayor, el elipsoide se llama *prolongado*, y si alrededor del eje menor *aplanado*.

Llámase PARABOLOIDE el cuerpo engendrado por la revolución de una parábola alrededor de su eje.

HIPERBOLOIDE es el cuerpo engendrado por la revolución de una rama de hipérbola alrededor del eje de la misma.

474. En todos estos cuerpos se llaman *líneas* ó *secciones meridianas* las que resultan de cortar la superficie por un plano sujeto á pasar por el eje del cuerpo.

475. Propiedades. Las que son comunes á todos estos cuerpos son las siguientes:

1.ª Cada punto de la generatriz describe en su revolución una circunferencia cuyo centro está sobre el eje y cuyo radio es siempre perpendicular á dicho eje.

2.ª Si se corta el cuerpo por diferentes planos perpendiculares al eje, las secciones serán círculos paralelos entre sí.

3.ª Todas las secciones meridianas son curvas planas, entre sí iguales.

APLICACIÓN DE LA ESFERA.

476. Son muy numerosas las aplicaciones de la esfera en las artes del tornero, del ebanista, del latonero, etc. Las bolas de billar, las de juguetes, las balas de fusil, las de cañón, etc., son esferas más ó menos grandes; los globos celestes y terrestres empleados para la enseñanza de la geografía, son también esferas.

La luz de los quinqués se hace inofensiva á nuestra vista por medio de esferas de cristal deslustrado; una esfera de cristal llena de agua y colocada entre el obrero y la luz que le alumbra, aumenta considerablemente su claridad.

DIBUJOS DEL ATLAS.

Lámina 7.ª

477. 1.° Dibujar el *trompo* de la fig. CX.—La parte superior *acb* forma una semiesfera, cuya base es común con la del cono recto de la parte inferior del trompo.

2.° Copiar la *esfera* de la fig. CXI.—Es una esfera con dos meridianos, un ecuador y dos círculos paralelos.

3.° Copiar el *globo terrestre* de la fig. CXII.

EJERCICIOS GRÁFICOS.

478. Problemas.

I. *Trazar un* mapamundi (fig. 258).

Trácese una circunferencia y tírense los dos diámetros perpendiculares AI, EM; divídase la circunferencia en todos sus grados (para abreviar, nosotros no la dividiremos más que en 16 partes iguales); de uno de los extremos del diámetro I, tírense rectas á los puntos de división D, C, B, P, O, N, las cuales determinan, por su intersección con el diámetro EM, los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, que es por donde deben pasar las curvas A*a*I, A*b*I, A*c*I, A*d*I, A*e*I, A*f*I. De uno de los extremos M del diámetro EM, tírense rectas á los puntos de división H, G, F, D, C, B, que determinan, por su intersección con el diámetro AI, los puntos *i*, *j*, *l*, *m*, *n*, *o*, por donde deben pasar las curvas H*i*J, G*j*K, F*l*L, D*m*N, C*n*O, B*o*P, que terminan el mapamundi.

CAPÍTULO III.

DE LAS SUPERFICIES DE LOS SÓLIDOS.

479. Una vez que las superficies de los prismas y de las pirámides se componen de paralelogramos, de triángulos y de polígonos rectilíneos, podríamos excusar declarar aquí lo que se debe practicar para medirlas, puesto que bastará para determinar su superficie hallar sucesivamente la de cada una de sus caras Pero de lo que hemos dicho en orden á esto se puede sacar algunas consecuencias, que no sólo contribuirán para simplificar las operaciones en que estas medidas empeñan, sino que también servirán

para valuar las superficies de los cilindros, de los conos y aun de las esferas.

ARTÍCULO PRIMERO. 25

DE LAS SUPERFICIES DE LOS POLIEDROS.

480. Cómo se halla la superficie lateral de un prisma recto.—481. Cómo se determina la superficie lateral de un prisma oblicuo.—482. La superficie total de todo prisma, cómo se halla? Cuál es la regla que fija la superficie total de un prisma regular?—483. La superficie lateral de una pirámide regular, cómo se determina?—484. Y la de una pirámide irregular?—485. Cómo se halla la superficie lateral de una pirámide regular truncada?—486. Cómo se determina la superficie de un poliedro regular?—487. Ejercicios de cálculo.

480. La superficie lateral de un PRISMA RECTO *tiene por medida el producto del perímetro de su base por una de sus aristas laterales.*

En efecto; si las caras laterales del prisma estuviesen desplegadas, se tendría un rectángulo cuya base sería el perímetro del prisma y la altura una de sus aristas.

481. La superficie lateral de un PRISMA OBLICUO *se halla multiplicando una de sus aristas laterales por el perímetro de una sección perpendicular á dicha arista.*

Porque cada lado de la sección será la altura de un paralelogramo cuya arista será la base; y como las aristas son iguales, basta multiplicar una de ellas por la suma de las alturas.

482. La superficie TOTAL de todo prisma *se halla agregando á la lateral la de las bases ó el duplo de una de ellas, pues son iguales.*

De lo dicho se deduce: *que la superficie total de un prisma regular tiene por medida el producto del perímetro de su base por la suma de una arista y del radio recto de la base.* 26

483. La superficie lateral de una PIRÁMIDE REGU-

LAR *tiene por medida el producto del perímetro de su base por la mitad de la apotema de los triángulos laterales.*

En efecto; esta superficie no es otra cosa que una serie de triángulos adyacentes dos á dos, que tienen por altura común *la apotema* de la pirámide, componiendo la suma de sus bases el perímetro de la base de la pirámide.

484. Para hallar la superficie lateral de una PIRÁMIDE IRREGULAR, *se busca por separado la de cada cara, y la suma será la superficie de la pirámide.*

485. Para obtener la superficie lateral de un TRONCO de pirámide regular, *se multiplica la apotema de una de sus caras por la semisuma de los perímetros de la base y sección.*

486. Para hallar la superficie de un POLIEDRO REGULAR, *se calcula la de una cara y se multiplica por el número de las que tenga.*

EJERCICIOS DE CÁLCULO.

487. PROBLEMAS.

I. Se han estucado las paredes de una pieza de baño de forma rectangular con la condición de que el estuquista percibiría por su trabajo 1 real por cada pie cuadrado; teniendo dicha pieza 14 pies de largo, 10 de ancho y 16 de alto, con una puerta cuyo vano tiene 4 pies de base y 9 de alto, y una ventana que forma un cuadrilongo de 2 y 3 pies de lado; cuánto habrá recibido el estuquista?—*Resultado*, 726 reales.

II. Para cierto monumento público se ha construído un prisma exagonal regular de 12 pies de lado y 20 de alto; las caras laterales de este cuerpo son de piedra labrada, cuyo pie superficial cuesta por razón de labra á 6 reales, 17 maravedises. Cuánto importa la labra de dichas caras?—*Result.*, 1.860 reales.

III. Cuál es la superficie lateral de una pirámide regular exagonal, cuya altura es de 50 metros y el lado de su base de 12?—*Resultado*, 1.838'466 metros cuadrados.

IV. Una PIRÁMIDE REGULAR de base cuadrada tiene su arista de 150 pies y el lado de la base de 50. Cuál es su superficie total?—*Resultado*, 9.854'886 pies cuadrados.

V. Cuál será la superficie total de una PIRÁMIDE TRUNCADA, cuyas bases son dos cuadrados de 3'6 metros de lado el uno y 1'8 el otro, y la apotema comprendida entre las bases tiene 6 metros?—*Result.*, 81 metros cuadrados.

VI. Hallar la superficie de un TETRAEDRO, de un OCTAEDRO y de un ICOSAEDRO cuyas aristas son de 10 cent.—*Result.*: *Sup. tetraedro* = 17 decím. cuad., 3'205 cent. cuad.—*Sup. octaedro* = 56 decím. cuad., 6'41 cent. cuad.—*Sup. icosaedro* = 86 decím. cuad., 6'02 cent. cuad.

VII. Cuál es la superficie de un EXAEDRO y de un DODECAEDRO que sus aristas son de 18 p.?—*Result.*: *Sup. cubo ó exaedro*, 1.944 pies cuadrados.—*Sup. dodecaedro*, 6.687'9 pies cuadrados (L').

ARTÍCULO 2.º

DE LA SUPERFICIE DE LOS CUERPOS REDONDOS.

488. Cómo se halla la superficie lateral de un cilindro recto?—489. La superficie lateral de un cilindro oblicuo, cómo se encuentra?—490. A qué es igual la superficie total de un cilindro cualquiera?—491. Cómo se halla la superficie lateral de un cono recto?—492. Cómo se encuentra la de un cono oblicuo?—493. Cómo se mide la superficie de un tronco de cono recto?—494. la superficie total de cualquier cono, á qué es igual?—495. Cómo se halla la superficie de una esfera?—496. Cómo se halla la superficie de un hemisferio, de un casquete ó de un segmento cualquiera?—497. Cómo se determina la superficie de un husillo?—498. Cómo se calcula la superficie curva de una zona?—499. Qué regla hay para hallar la superficie del sector esférico?—500. Ejercicios de cálculo.

488. Pudiéndose considerar el círculo como un polígono regular de una infinidad de lados, podremos también considerar el contorno de una elipse y el de un óvalo como el contorno de un polígono de un número infinito de lados; por lo que el cilindro vendrá, en este caso, á ser un prisma que el número

---

(L') Para hallar el valor del radio recto de un pentágono regular, no conociendo sino el valor de sus lados, es preciso saber que la *diagonal de un pentágono está con uno de los lados en proporción de media y extrema razón*; de manera que, tomando BF = AB (fig. 259), se tendrá BD : FB : : FB : FD, y como BF = AB = 18 p., se tiene: 18 + FD : 18 : : 18 : FD, lo que da FD = 11'124 pies. Calculando, se obtendrá: DB = 18 + 11'124 = 29'124 pies. $DH = \sqrt{DB^2 - BH^2}$ = 27'694 pies. Como BH es media proporcional entre DP y HP, se tiene DH : BH : : BH : HP, lo que da HP = 2'924 pies; DP = DH + HP = 30'618 pies; SP = $^1/_2$ DP = 15'309 pies; SH = SP — PH = 12'385 pies.

de los paralelogramos que componen su superficie es infinito. L. 27

Luego lo superficie LATERAL de un CILINDRO RECTO *es igual al producto de la altura de dicho cilindro por el contorno rectificado de una de sus bases.*

489. Si el cilindro fuese OBLICUO, *se debería multiplicar el lado por el perímetro de una sección perpendicular á dicho lado.*

490. La superficie TOTAL de un CILINDRO CUALQUIERA *es igual á la superficie lateral más la de las bases.*

491. Considerando la circunferencia de un círculo como el contorno de un polígono regular de un número infinito de lados, se echa de ver que el cono recto circular no es más que una pirámide regular cuya superficie lateral se compone de una infinidad de triángulos, y como lo mismo puede decirse de todo cono recto que tenga por base un óvalo ó una elipse, resulta que:

La superficie LATERAL de un CONO RECTO *es igual al producto del perímetro de su base por la mitad del lado ó generatriz del mismo cono.*

492. Si el cono fuese OBLICUO, es preciso contentarse de encontrar la superficie solamente por aproximación, *dividiendo la curva de su base en un número suficiente de arcos para que se pueda considerar cada uno sin error sustancial como una línea recta. Hecho esto, se calculará la superficie como la de una pirámide irregular que conste de tantos triángulos cuantos arcos hubiese.*

493. Para hallar la superficie curva de un TRONCO de cono recto *se ha de multiplicar el lado del tronco por la semisuma de los contornos rectificados de las dos bases.*

494. La superficie TOTAL de cualquier CONO *es igual á la superficie lateral más la de la base, ó de las dos bases, si el cono fuese truncado.*

495. Para medir la superficie de una ESFERA, *multiplíquese la circunferencia de un círculo máximo de la misma por su diámetro.*

También se halla la superficie de una esfera *multiplicando* 3'1416 *por el cuadrado del diámetro.*

496. Para hallar la superficie de un HEMISFERIO, de un CASQUETE ó de un SEGMENTO cualquiera *se multiplica la circunferencia de un círculo máximo de la esfera por la altura del hemisferio, casquete ó segmento esférico.*

497. Para calcular la superficie de un HUSILLO, *se multiplica el arco* bc (fig. 258) *del círculo máximo que abraza por el diámetro* AI *de la esfera.*

498. Para obtener la superficie curva de una ZONA, *se multiplica su altura por la circunferencia rectificada de un círculo máximo de la esfera.*

499. Como el SECTOR ESFÉRICO es compuesto de un cono formado por radios de la esfera, más el casquete esférico que sirve de base á dicho cono, para calcular su superficie *búsquese por separado la superficie del cono y la del casquete, y su suma será la superficie del sector esférico.*

También se halla la superficie de un sector esférico *sumando el radio de la base del casquete con el duplo de su altura; se multiplica la suma por el radio de la esfera, y el resultado por* 3'1416; el último producto es la superficie del sector.

EJERCICIOS DE CÁLCULO.

500. PROBLEMAS.

I. Un pozo circular cuya profundidad es de 15 metros y el diámetro de su luz ó base de 1'5 metros, se ha revestido con pared de ladrillo, que se pagó á razón de 16 rs. el metro superficial, y se pregunta cuál fué su coste total?—*Result.*, 1.131'098 reales.

II. Se ha construído con planchas de hierro una chimenea de forma cilíndrica, cuya altura tiene 8 metros y el diámetro de su luz 0'4 metros. En el supuesto de que cada metro cuadrado pese 3'2 kilogramos, cuántos kilogramos de hierro se habrán necesitado?—*Resultado*, 32'1699 kilogramos.

III. Determinar la superficie curva de un cilindro elíptico recto, siendo su altura de 80 centímetros, y los ejes de su base de 21 centímetros el uno y 30 el otro.—*Result.*, 6.720 centímetros cuadrados.

IV. Con planchas muy delgadas de plomo se ha cubierto la aguja de un campanario cuya figura es la de un cono recto que tiene 18'5 metros de alto y 1'67 metros de radio la base; cuántos metros cuadrados de plancha de plomo se han empleado?—*Result.*, 97'454266 metros cuadrados.

V. Cuál será la superficie lateral de un tronco de cono recto, cuyo lado es de 4 metros, y los radios de los círculos de su base de 2 metros el uno y 5 el otro?—*Result*, 87'9648 metros cuadrados.

VI. Cuántos metros cuadrados comprende la superficie de una esfera de 1'6 metros de diámetro?—*Result.*, 8'042496 metros cuadrados.

VII. Se ha construído una cubeta de cobre cuya forma es la de una semiesfera que tiene su diámetro de 2 pies, 6 pulg., y se pide el número de pies cuadrados de su superficie.—*Result.*, 9'8175 pies cuadrados.

VIII. Qué superficie tendrá un casquete esférico cuya altura es de 18 pies y corresponde á una esfera de 32 pies de radio?—*Resultado*, 402 varas cuadradas, 1'1232 pies cuadrados.

IX. Cuál será la superficie curva de un husillo cuyo ancho es un arco de 36° y pertenece á una esfera de 2 metros, 4 decímetros de radio?—*Result.*, 7'208208 metros cuadrados.

X. Cuántos metros cuadrados comprende la superficie curva de una zona, en el supuesto de tener 3 metros de altura y pertenecer á una esfera de 8 metros de radio?—*Result.*, 150'7968 metros cuadrados.

XI. Cuál será la superficie de un sector esférico cuyo casquete tiene 10 metros de altura y pertenece á una esfera de 20 metros de radio?—*Result.*, 2.344'921 metros cuadrados.

XII. En el supuesto de que el globo terrestre sea esférico y que su radio tenga 7.621.422 varas, teniendo la legua española 20.000 pies de longitud; cuántas leguas cuadradas contiene su superficie?—*Resultado*, 16.423.488'709724438496 leguas cuadradas.

CAPÍTULO IV.

De los volúmenes ó solidez de los cuerpos.

ARTÍCULO PRIMERO.

VOLUMEN DE LOS POLIEDROS.

501. Qué se entiende por medir un sólido? Para medir el volumen de un cuerpo, qué unidad de medida se emplea?—502. Para hallar la

solidez de un paralelepípedo rectangular, qué se debe hacer? Cómo se halla el volumen de un prisma cualquiera?—503. Cómo se determina el volumen de un trozo de prisma triangular? Cómo se fija la solidez de un prisma truncado irregular?—504. Hay algún procedimiento mecánico que dé á conocer el volumen de un cuerpo irregular?—505. Cómo se halla el volumen de una pirámide cualquiera?—507. Conocida la altura de una pirámide truncada y dos lados homólogos de sus bases, cómo se calcula la altura de la pirámide deficiente y de la pirámide total?—508. Cómo se determina la solidez de un tetraedro y de un octaedro?—509. Qué regla servirá para hallar el volumen del cubo ó exaedro?—510. Para fijar el volumen del dodecaedro y del icosaedro, qué se debe hacer?—511. Ejercicios de cálculo.

501. Medir un sólido es lo mismo que hallar el número de veces que en él cabe otro sólido cuyas dimensiones sean conocidas, y hace oficio de unidad de medida.

El sólido que por lo común se toma por *unidad* para medir el volumen de los cuerpos es un *cubo* cuya arista es la unidad lineal; así, cuando queremos expresar el valor del volumen de un cuerpo cualquiera, decimos que contiene tantos metros, pies, pulgadas *cúbicas*, etc., según el que cubo que se toma por unidad tenga las aristas iguales á un metro, pie, pulgada, etc. (N′).

502. Si nos propusiésemos, por ejemplo, hallar el volumen del paralelepípedo rectangular AB (fig. 260), siendo el cubo x la unidad de medida, no hay más

---

(N′) En la aritmética, para formar lo que se llama el *cubo* de un número, es menester multiplicar dicho número por sí mismo, y multiplicar después por el mismo número el producto que resulta de la primera multiplicación. Así, 64 es el cubo de 4, porque $4 \times 4 \times 4 = 64$. De aquí se sigue que:

La vara cúbica contiene.	27 pies cúbicos.
El pie cúbico.	1728 pulg. cúb.
La pulgada cúbica.	1728 líneas cúb.
La cana cúbica.	512 palmos cúb.
El metro cúbico.	1000 decímetros cúb.
El decímetro cúbico.	1000 centímetros cúb.
El centímetro cúbico.	1000 milímetros cúb.

que ver cuántas veces está contenido el lado del cubo en su longitud, cuántas en su latitud y cuántas en su altura Por lo que, si suponemos que se halla contenido 4 veces en la primera dimensión, 2 en la segunda y 3 en la tercera, el volumen de dicho paralelepípedo estará expresado por el número $4 \times 2 \times 4 = 24$; y quiere decir que dicho paralelepípedo equivale á 24 cubos iguales con el que sirve de unidad de medida, conforme se ve expresado en la figura.

De esto se sigue: que para sacar el número de medidas cúbicas que caben en un paralelepípedo cualquiera, se ha de valuar su base en medidas cuadradas y su altura en partes iguales al lado que sirve de medida, y multiplicar el número de medidas cuadradas que se hubiesen hallado en la base por el número de medidas lineales de la altura; (luego *el volumen de un* PRISMA *cualquiera es igual al producto de la superficie de la base por la altura del prisma.*)

503. Cuando se quiere obtener el volumen de un trozo de prisma triangular que las bases no sean paralelas, *tómese el tercio de la suma de sus tres aristas laterales y multiplíquese por la superficie de una sección hecha perpendicularmente á dichas aristas* (la superficie de esta sección es igual á la de un triángulo que tenga los lados iguales á los de la sección dada).

Esto nos facilita un método para pode revaluar la solidez de un prisma truncado irregularmente, aunque su base conste de un número de lados cualquiera; porque dividiendo el prisma en otros triangulares, y buscando por separado el volumen de cada uno de ellos, la suma de dichos volúmenes dará el del prisma total.

504. Para obtener el volumen de un CUERPO IRREGULAR, como el de una piedra, hierro, madera, etc., puede servir en muchos casos el siguiente procedi-

miento mecánico. *Póngase el cuerpo en cuestión dentro de un depósito ó aljibe de volumen conocido y que pueda contener el agua suficiente para cubrir el objeto; llénese de agua y sáquese luego dicho cuerpo, teniendo cuidado en no derramar nada del líquido, y el volumen del cuerpo formado por el vacío que haya quedado en el depósito será el volumen del cuerpo que estuvo sumergido.*

505. *El volumen de una* PIRÁMIDE *cualquiera se halla multiplicando la superficie de la base por el tercio de la altura.*

Lo exacto de esta regla quedará probado si se hace ver que una pirámide triangular es la tercera parte de un prisma triangular, de la misma base y de la misma altura. Sea, pues, el prisma triangular ABCDEF (fig. 261). Tiraremos las rectas OB, DC, y por ellas haremos pasar un plano CBD cuya sección nos dará dos pirámides, una triangular *abcd* y otra cuadrangular *cbefd*. En ésta tiraremos un plano *cde*, determinado por las aristas *cd*, *de*, de cuya sección resultarán otras dos pirámides triangulares que tendrán una altura común y las bases iguales. Quedará, pues, descompuesto el prisma triangular en tres tetraedros equivalentes, á saber: el ABCD$=d'e'f'c'$, por tener iguales la base y la altura, que son puntualmente las del prisma. Si en la pirámide $d'e'f'c'$ consideramos como base el triángulo $e'f'c'$ y como cúspide el punto d', esta pirámide será equivalente á la $c'b'e'd'$, por tener iguales la base y altura; así, pues, la pirámide $c'e'f'd'=abcd=c'b'e'd'$. Luego cada una de ellas es la tercera parte del prisma primitivo.

Además, como todo prisma y toda pirámide pueden dividirse en prismas y pirámides triangulares, la proposición es igualmente aplicable á cualquier pirámide.

506. Para tener el volumen de un TRONCO DE PIRÁ-

MIDE, *se halla el volumen de la total, después el de la deficiente, y restando éste de aquélla, su residuo es el de la pirámide truncada.*

507. Para calcular la altura de la pirámide deficiente (fig. 240), se hace esta proporción: AB—*ab* : *ab* :: *mn* : *no*; es decir, *que un lado de la base mayor, menos su correspondiente en la sección, es á este mismo, como la altura del tronco es á la de la pirámide deficiente*; la cual, añadida á la altura del tronco, se tendrá la altura total.

También se puede hallar la altura de toda la pirámide haciendo la siguiente proporción: AB—*ab* : AB :: *mn* : *mo*.

508. Como el *tetraedro regular* no es otra cosa que una pirámide regular, y el *octaedro* podemos considerarlo como dos pirámides cuadrangulares unidas por sus bases, la regla dada para las pirámides nos dará su volumen.

509. Para hallar la solidez del *cubo* ó *exaedro* se considerará como un prisma, y servirá la regla dada para ellos.

510. Para fijar el volumen del *dodecaedro* y del *icosaedro*, los consideraremos compuestos de tantas pirámides como caras tienen, cuyas bases sean cada cara y la altura la mitad de la distancia que hay entre dos caras opuestas; buscaremos el volumen de una de estas pirámides, y se multiplicará por el número de caras del poliedro.

EJERCICIOS DE CÁLCULO.

511. PROBLEMAS.

I. Cuál es el volumen de un dado de forma cúbica, cuyo lado ó arista es de 12 metros?—*Result.*, 1.728 metros cúbicos.

II. Un pilar de piedra de forma paralelepípeda tiene de altura 10 pies, y los lados de la base son de 5'75 pies el uno y 3'75 el otro; pesando cada pie cúbico de dicha piedra 76'28 libras, cuánto pesaría dicho pilar?—*Result.*, 15.351'35 libras = 614'054 quintales.

III. Cuántos litros de agua caben en un depósito de forma prismática triangular, cuya altura es de 4 metros y tiene por base un triángulo equilátero cuyo lado es de 2?—*Result.*, 6.928'2 litros.

IV. Cuál es el volumen de una pirámide regular, cuya altura es de 15 metros y el lado de su base cuadrada de 3?—*Result.*, 45 metros cúbicos.

V. Qué volumen tendrá una pirámide cuadrangular truncada y regular, cuya altura es de 5 pies y los lados de sus bases son de 18 pulgadas y 15 ídem?—*Result.*, 113 pies cúbicos, 108 pulgadas cúbicas.

VI. Cuál será el volumen de un octaedro regular cuya arista es de 4 metros?—*Result.*, 30'1728 metros cúbicos.

VII. Cuál es el volumen de un icosaedro regular, cuyas aristas son de 12 pies y la perpendicular que separa dos caras opuestas y paralelas es de 18'464 pies?—*Result.*, 3.837'6269 pies cúbicos.

ARTÍCULO 2.º

VOLUMEN DE LOS CUERPOS REDONDOS.

512. Cómo se determina el volumen de un cilindro?—513. Qué regla hay para medir el volumen de un anillo cilíndrico?—514. Cómo se halla el volumen de un trozo de cilindro recto?—515. Cómo se halla el volumen de un cono?—516. Cómo se mide el volumen de un tronco de cono recto?—517. Qué regla hay para calcular en un tronco de cono recto la altura del cono total y la del deficiente?—518. Cómo se halla el volumen comprendido entre dos conos concéntricos?—519. Cómo se determina el volumen de la esfera?—520. Cómo se halla el volumen de un sector esférico?—521. Cómo se halla el volumen de un casquete esférico?—522. La solidez de un segmento mayor que la semiesfera, á qué es igual?—523. Cómo se fija el volumen de una zona?—524. Cómo se halla el volumen de un elipsoide.

L. 27

512. (Ya que el cilindro puede considerarse como un prisma de un número infinito de lados (488), se tendrá la SOLIDEZ *de un cilindro recto ú oblicuo multiplicando la superficie de su base por la altura de dicho cilindro.*)

513. Para hallar el volumen de un ANILLO CILÍNDRICO, *se halla la superficie del anillo que le sirve de base y se multiplica por la altura.*

514. El volumen de un TROZO de cilindro recto es igual *á la superficie de la base multiplicada por el eje del trozo.*

515. Una vez que el cono puede ser considerado

(491) como una pirámide cuya base se compone de una infinidad de lados, *se obtendrá el* VOLUMEN DEL CONO *multiplicando la superficie de su base por el tercio de la altura.*

516. El volumen de un TRONCO de cono recto *se halla restando el volumen del deficiente del volumen del cono total;* la diferencia es el volumen del tronco.

517. Para calcular en un tronco de cono la altura del cono total y la del deficiente, se sigue la misma regla establecida para el tronco de pirámide (507), sin más diferencia que la de reemplazar los lados homólogos por los radios de las bases del tronco. De modo que, si llamamos A la altura del tronco, *a* la del deficiente, R el radio de la base mayor y *r* el de la menor, tendremos $R-r : r :: A : a$.

Si quisiésemos la altura total del cono, diríamos: $R-r : R :: A :$ *á la altura total.*

518. Para hallar el volumen comprendido entre dos conos concéntricos, sean ó no truncados, *se calculan separadamente los volúmenes de estos cuerpos, y restando el menor del mayor, la diferencia será el volumen pedido.*

519. Si se concibe que la esfera puede estar compuesta de una infinidad de pirámides que tienen su vértice en el centro de la esfera, y que cada una tiene por base una parte infinitamente pequeña de la superficie de la esfera, deduciremos de esto que la esfera es igual á una sola pirámide que tiene por altura el radio y por base la superficie de la esfera.

Luego el VOLUMEN DE LA ESFERA *es igual al producto de su superficie multiplicada por el tercio del radio.*

También se halla el volumen de la esfera multiplicando 4'1888 por el cubo del radio.

520. El volumen de un SECTOR DE ESFERA *es igual*

á la superficie esférica del casquete correspondiente multiplicada por el tercio del radio de la esfera.

También se halla el volumen de un sector esférico *multiplicando* 2'9944 *por el cuadrado del radio de la esfera á que pertenece, y este producto por la altura del casquete del mismo sector.*

521. Para determinar el volumen de un CASQUETE ESFÉRICO, ó bien de un segmento menor que la semiesfera, *se calcula el de todo el sector, después el del cono correspondiente al mismo, y la diferencia de estos dos volúmenes será el del casquete en cuestión.*

522. La solidez de un segmento mayor que la semiesfera *es igual al volumen de la esfera menos el volumen del casquete que falta al segmento mayor para formar la esfera.*

523. Para fijar el volumen de una ZONA *se busca por separado el de cada uno de los segmentos cuyas bases son comunes con las de la zona; se suman estos dos volúmenes; lo que resulta se resta del volumen de la esfera, y la diferencia es el volumen de la zona.*

También se halla dicho volumen *multiplicando la mitad de la suma de las superficies de sus bases por la altura de la zona, y aparte* 0'5236 *por el cubo de dicha altura; la suma de los dos productos da el volumen.*

524. El volumen de un ELIPSOIDE, ya sea *prolongado* ó *aplanado*, se encuentra *multiplicando su semieje de revolución por el cuadrado del otro semieje de la elipse generatriz y este producto por* 4'1888; el resultado será el volumen del elipsoide en cuestión.

EJERCICIOS DE CÁLCULO.

525. PROBLEMAS.

I. Un cilindro tiene de diámetro 2 metros y de altura 6; cuál es su volumen?—*Result.*, 18'8496 metros cúbicos.

II. Qué volumen tendrá un cilindro elíptico recto que tiene su altura de 16 m., y los ejes de su base son de 8 m. el uno y 12 el otro?—*Result.*, 1.206'3744 m. cúbicos.

III. En un pozo circular se ha construído una pared cuyo grueso es de 2 pies, el diámetro interior del pozo de 6 pies y la altura de 60; cuántos pies cúbicos de mampostería comprenden dichas paredes?—*Result.*, 3.015'936 pies cúbicos.

IV. La excavación del pozo del problema anterior se pagó á razón de 4 rs., 17 mrs., por vara cúbica; cuál fué el importe de dicha excavación?—*Result.*, 758 rs., 13'5949 mrs.

V. Cuál será el volumen de un cono recto circular que tiene su altura de 6 metros y el diámetro de su base de 4'8 metros?—*Resultado*, 36'1912 metros cúbicos.

VI. Cuántos litros de agua caben en un *cuenco* que tiene la forma de un cono recto truncado, cuya profundidad es 1'8 metros, y los radios de su base son 2 metros el uno y 1'4 el otro?—*Result.*, 18.729 litros.

VII. Cuál es el volumen de una esfera cuyo diámetro es de 9 metros?—*Result.*, 381'7014 metros cúbicos.

VIII. Qué volumen tendrá un casquete ó segmento esférico cuya altura es de 3 metros y pertenece á una esfera de 4'5 metros de radio?—*Result.*, 98'9604 metros cúbicos.

IX. A una esfera cuyo diámetro es de 9 metros se le ha cortado un segmento que tiene su altura de 6 metros; cuál será el volumen de dicho segmento?—*Resul.*, 282'7449 metros cúbicos (O').

X. Cuál será el volumen de un sector esférico cuyo casquete tiene 3 metros de altura y pertenece á una esfera de 4'5 metros de radio?—*Result.*, 127'2348 metros cúbicos.

XI. Una esfera de 9 metros de diámetro tiene una zona cuya altura es de 1'5 metros y una de sus bases es un círculo máximo de la esfera; cuál será el volumen de dicha zona?—*Result.*, 91'8918 metros cúbicos.

XII. Cuál será el volumen de un elipsoide prolongado, y cuál el de otro aplanado cuya elipse generatriz tenga sus ejes de 8 y 12 centímetros?—*Result.: Elipsoide prolongado*, 402'1248 centímetros cúbicos.—*Elipsoide aplanado*, 603'1872 centímetros cúbicos.

(O') Como la altura del casquete esférico del prob. VIII, sumada con la altura del segmento del prob. IX, componen el diámetro de la esfera, la suma de sus volúmenes ha de dar el volumen de la esfera del prob. VII, á causa de tener igual diámetro.

Igualmente el volumen de dicho casquete, sumado con el de la zona del prob. XI, ha de dar el volumen de la mitad de la esfera citada.

SECCION CUARTA

NOCIONES DE ADORNO

CAPÍTULO PRIMERO.

ARTÍCULO PRIMERO.

DEL DIBUJO DE ADORNO.

526. El dibujo de *adorno* es una de las aplicaciones del dibujo lineal, á causa de que el ornato viene á ser el resultado de la regularidad y de la simetría geométrica, unido á las gracias y sencillez de la Naturaleza, combinando por este medio la precisión del dibujo geométrico y la franqueza del dibujo á pulso, y perdiendo, por decirlo así, la dureza compasada de la una y la indecisión vaga de la otra.

El adorno es la parte del dibujo que se ocupa de embellecer los diferentes productos de las artes. Así es que la arquitectura, la escultura, la carpintería, la cerrajería, la platería, etc., reciben los mayores auxilios de esta rama del dibujo; otro tanto puede decirse de algunas manufacturas é industrias, como, por ejemplo, la fabricación de telas y de papeles pintados, la de bordados, blondas, encajes, obras de esparto, muebles de lujo, etc. El adorno es quien da formas delicadas al bronce y demás metales que adornan nuestros salones, variándolas de mil maneras, según el gusto del artista ó el capricho de la moda.

527. Para la composición del ornato, no solamente se necesita saber dibujar flores, frutas y plantas, sino también la figura humana y demás animales; pues el artista en sus composiciones echa mano, si así lo cree conveniente, no sólo de figuras mitológicas, como faunos, silvanos, tritones, mascarones, etc., sino también de figuras y atributos de la Biblia, según sea el adorno dedicado á objetos profanos, místicos ó sagrados.

Las hojas de encina, las de laurel, las de olivo y las de palma son empleadas como símbolos de fuerza, de gloria, de paz y de triunfo. El *caduceo* es el emblema de la unión y de la concordia, del comercio y de la paz. El *tirso* es un emblema de alegría báquica. La *lira*, la *flauta*, el *tamboril*, etc., son emblemas de gozo, de regocijo y de placer.

528. Para el estudio del ornato, procúrese imitar los buenos modelos que nos quedan de la antigüedad y de la época del Renacimiento, en donde se encuentran algunos de un gusto sencillo y exquisito, dignos de ser estudiados. Cualquiera que sea el adorno que se dibuje, procúrese siempre evitar líneas forzadas, raras y extravagantes, haciendo que reine en su conjunto el gusto y sencillez que tanto embelesa. Procúrese igualmente que los contornos sean puros, cuidadosamente resueltos y apropiados al género de arquitectura que se emplee, sin hacer mezclas ridículas, como sin discernimiento suelen ejecutarlo los que creen que el adorno no es más que el resultado del capricho de la imaginación, pues el adorno no solamente sirve para hermosear un mueble ó un edificio, sino tambien para determinar su carácter y el objeto á que se dedica. En los pequeños muebles y utensilios de lujo es donde más fácilmente se cae en estos defectos, los cuales se evitarán teniendo presente que la elegancia depende de la simplicidad y

sencillez, que debe ser el carácter distintivo de estos objetos de gusto, á los cuales la moda da un gran valor y estima.

529. Cuando el gusto preside al dibujo de adorno, el partido que se puede sacar es verdaderamente admirable, como lo acreditan los diferentes palacios y monumentos en que este dibujo brilla con todo su lujo y esplendor. Pero al mismo tiempo es menester no extraviarse; porque, como dice *M. Lamotte*, «el adorno, si bien á primera vista parece ser el resultado del capricho y de la imaginación, no es así; pues cuanto más el ornato se aproxime á la regularidad geométrica, tanto más agradable es á la vista y más grata es la sensación que nos causa. Las formas fantásticas sorprenden por su novedad; pero en pasado algún tiempo acaban por no agradar, y generalmente, á pesar de todo, se vuelve á las formas puras y naturales.

»La composición del ornato se ha hecho un arte muy complicado, y por lo mismo es conocido de un corto número de artistas. Lo que hace difícil la composición del ornato es la unión de las reglas con las libres concepciones de la imaginación. Pues solamente el gusto puede dirigir á ésta en sus extravíos: el artista que no se guía por un gusto puro, da en la ridiculez y la extravagancia.»

530. En las bellas artes, el mejor gusto es el de la conveniencia, dice el Sr. Cean Bermúdez; porque es el gusto de la verdad y de la utilidad con el que obra el artista. Por eso se suele llamar *gustoso* lo que es apacible á la vista y da complacencia el mirarlo, efecto de una fácil ejecución. Los diseños á la aguada, de lápiz ó de cualquier otro modo, estando tocados con ligereza, gracia y propiedad, son susceptibles de este epíteto.

531. No tratamos de presentar un curso completo

de dibujo de adorno, ni los límites de esta obra tampoco lo permitirían; lo único que nos proponemos es dar algunos elementos fáciles y de sencilla aplicación, siguiendo al efecto una marcha metódica y progresiva, suficiente para que los alumnos suelten la mano y formen su gusto para saber copiar los objetos más ricos y complicados con la prontitud y limpieza convenientes. Es decir, darles los elementos y los medios por si algún día quieren adornar las obras que construyan ó elaboren en sus respectivos artes y oficios, sin faltar á las bellas formas que hacen en todos tiempos tan apreciables las producciones artísticas, por más que el capricho ó la moda quiera alejarlas.

532. Al efecto, aconsejamos á los alumnos que, por sencillo que sea un adorno, procuren lo primero formar el conjunto ajustándolo á una figura geométrica que circunscriba el dibujo, y vayan luego trazando los detalles con la mayor limpieza y pureza posibles.

ARTÍCULO 2.º

HOJAS DE ORNATO.

533. Las hojas que comúnmente se emplean para el dibujo de adorno, son las de hiedra, de pámpano ó vid, de agua, de perejil, de malabar, de acanto, de roble, de palma, de laurel y de olivo. Las cuatro últimas, es decir, las de encina, de laurel, olivo y palma, ya hemos dicho que son empleadas como símbolo de *fuerza*, de *gloria*, de *paz* y de *triunfo*. La hoja de roble toma también el nombre de *triunfal*, á causa de que los romanos formaban con las ramas de este árbol los festones ó guirnaldas para adornar los arcos triunfales.

Las hojas de acanto se prestan muchísimo para toda clase de adorno; así es que la arquitectura se sirve de ellas para adornar los capiteles corintios y compuestos, así como también algunas molduras de las cornisas y arquitrabes de dichos órdenes, como se verá al tratar del dibujo arquitectónico en la segunda parte de esta obra. Algunas veces, en lugar de hojas de acanto, se emplean también las de perejil, particularmente en los adornos del orden compuesto.

Haremos por fin observar que algunas veces se adaptan en el dibujo de adorno hojas y flores de formas raras y caprichosas, que no siempre son imitación de la Naturaleza, sino que son convencionales ó de pura invención.

En los ejercicios que siguen vamos á presentar algunos modelos de hojas y ramas copiadas del natural, que creemos servirán de alguna utilidad como primeros elementos del dibujo de ornato.

DIBUJOS DEL ATLAS.

Lámina 8.ª

534.—1.º *Dibujar una hoja de la planta enredadera llamada* BRIONIA (fig. CXIII).—Como las hojas naturales no guardan casi nunca la forma exactamente simétrica, se requiere para su dibujo cierto gusto y habilidad que sólo se consigue con repetidos ejercicios. Para copiar la hoja designada, se principiará por dibujar el *nervio longitudinal* que atraviesa la hoja de arriba abajo, y que le sirve hasta cierto punto como de eje de simetría; en seguida se dibujará el contorno inflexionado de la hoja, y se concluirá por dibujar los *nervios secundarios* que salen del longitudinal por uno y otro lado.

2.° *Copiar las tres hojas de* HIEDRA (figs. CXIV, CXV y CXVI).—La primera es una hoja vista por detrás, pero algo terciada; la segunda está mirada enteramente de frente, y la tercera se mira también de frente con alguna inclinación.

3.° *Dibujar las hojas de* GERANIO (figs. CXVII y CXVIII).—La primera es una hoja vista de frente y la segunda vista de lado.

4.° *Diseñar el ramillo de hiedra* (fig. CXIX).—Es un ramillo muy gracioso copiado del natural. Para dibujarlo se empezará por hacer el tronquito del ramo y en seguida las hojas.

LÁMINA 9.ª

5.° *Dibujar las dos hojas de* PEREJIL (figs. CXX y CXXI).—Estas hojas, copiadas cuatro veces mayores que el natural, presentan dos tipos completamente distintos: la primera es enteramente simétrica, la segunda no lo es del todo. Para dibujarlas se empezará por hacer el nervio longitudinal, en seguida los nervios secundarios y luego los contornos que forman las hojas.

6.° *Hacer el dibujo de las dos hojas del* LIRIO ACUÁTICO (figs. CXXII y CXXIII).—Dichas hojas están copiadas en una escala mucho menor que la del natural: la primera es una hoja vista de frente y la otra es vista de perfil ó lado.

7.° *Copiar las dos hojas de* MALABAR (figuras CXXIV y CXXV).—Ambas son del mismo tamaño que el natural: la primera es simétrica en su conjunto, pero no en los detalles; la segunda lo es en todo enteramente.

8.° *Dibujar la hoja de* RIBES NEGRO (fig. CXXVI). —Para el dibujo de esta hoja, copiada del grandor natural, se procederá como en las anteriores.

9.° *Copiar las hojas llamadas* PÁMPANAS Ó PÁMPANOS (figs. CXXVII y CXXVIII).—Estas hojas son copiadas del tamaño natural. La primera es enteramente simétrica; la segunda no lo puede ser, á causa de estar mirada de lado.

LÁMINA 10.

10. *Dibujar las tres hojas de* ACANTO *de que se compone esta lámina.*—Las tres son copiadas del mismo grandor que tenían las hojas naturales que tuvimos á la vista; así es que la de la fig. CXXIX representa una hoja muy tierna, al paso que las otras dos representan ya hojas desarrolladas. Para su ejecución se principiará por hacer el nervio del medio y se dibujará la hoja, yendo de arriba abajo, señalando las masas de cada una de las pequeñas hojas en que está dividida la total y detallando en seguida el contorno de estas masas, dándole la forma característica que las distingue de las demás hojas, trazando por fin los nervios laterales con los demás secundarios que se ven en el dibujo.

LÁMINA 11.

11. *Diseñar el* RAMILLO DE ROBLE (fig. CXXXII).—Para su dibujo se empezará por hacer el nervio de la hoja superior y en seguida el contorno denticulado de la misma hoja; después se dibujará el tronco del ramillo y luego el nervio de cada una de las bellotas y demás hojas; el dibujo de aquéllas y el contorno de éstas, denticuladas del modo que lo están en el diseño, terminarán el dibujo de este ramito.

12. *Dibujar la* RAMA DE ROBLE (fig. CXXXIII).—Para su ejecución, hágase lo mismo que hemos indicado en el anterior ejercicio.

13. *Copiar el* RAMILLO DE LAUREL (fig CXXXIV). —El dibujo de este ramito, que se compone de doce hojas y tres bayas, se obtendrá siguiendo el mismo camino que hemos indicado para dibujar el ramillo de roble.

LÁMINA 12.

14. *Hacer el dibujo de un* RAMO DE OLIVO (figura CXXXV).—Se compone de cuatro ramillos, en cada uno de los cuales hay, á más de las hojas, alguna oliva. Para su ejecución debe seguirse el mismo camino indicado para los demás; al efecto, se dibujará primeramente el ramillo superior y el tronquito principal; en seguida los tronquitos de los otros ramitos, y luego las hojas y olivas que los guarnecen.

ARTÍCULO 3.º

ELEMENTOS DE ADORNO.

535. Vamos á presentar á los alumnos los principales elementos del dibujo de adorno, en la creencia de que más tarde podrán serles de alguna utilidad, ya ayudándoles á formar su gusto artístico-industrial, ya poniéndolos en estado de saber apreciar las bellezas que nos quedan de los antiguos en algunos de sus bellos monumentos.

536. PALMITAS son unos adornos en figura de hojas de palma, labradas bajo una forma agradable á la vista y que sirven mucho en la composición del ornato. Las que representamos en la *lámina* 12 *del atlas,* figs. CXXXVI, CXXXVII, CXXXVIII y CXXXIX, son los cuatro tipos más generales de esta clase de adorno, el cual se combina muy fácilmente para remate de ciertos ornatos, como se ve en los adornos

de los diseños CXLVIII y CL (lám. 14) y en el CLIII (lám. 16).

537. Campanáceos son unos adornos compuestos por lo común de hojas de acanto, de agua, de perejil ó de malabar, dispuestos en forma de *campana*; tales son los que representamos en las figs. CXL, *lám.* 12 *del atlas*, y los CXLI, CXLII, CXLIII y CXLIV, *lámina* 13 *idem*.

Estos adornos sirven ordinariamente de base ó núcleo á otros ornatos, como se puede observar en el diseño CL (lám. 14), siendo unas veces simétrico y otras no, como se ve en las figuras citadas anteriormente.

538. Florones son unos adornos hechos á manera de flor muy grande, que figura flores imaginarias y caprichosas, y con los que enriquecen los arquitectos los rosetones y artesonados, así como también el capitel del orden dórico y los sofitos. La figura del florón, si bien por lo común suele ser circular, como se ve en las figs. CXLV y CXLVI, *lám.* 13 *del atlas*, no obstante puede también tener una figura elíptica ó poligonal, como se observa con el de la fig. CXLVII, que tiene la forma cuadrada.

Rosetones son una especie de florones circulares hechos á manera de rosa de gran tamaño, y cuyo uso es el mismo que el del florón.

DIBUJOS DEL ATLAS.

Lámina 12.

539.—1.° *Dibujar las* palmitas *de las figuras* CXXXVI, CXXXVII, CXXXVIII y CXXXIX.—Como las cuatro son perfectamente simétricas en el sentido vertical, para su dibujo se tirará una auxiliar que tenga esta posición, y empezando por hacer la hoja superior ó de enmedio, se irán luego dibujando las otras hojas dos á dos, una por cada lado, hasta llegar á la base.

2.° *Copiar el* CAMPANÁCEO *de la fig.* CXL.—Por ser este adorno simétrico, se principiará trazando una vertical que, sirviendo á la vez de eje y de auxiliar, facilitará en gran manera su dibujo. En seguida se formará el conjunto de la campana y el de las hojas que forman el campanáceo, y luego se dibujarán los detalles con la mayor limpieza posible.

LÁMINA 13.

3.° *Dibujar los* CAMPANÁCEOS *de las figuras* CXLI, CXLII y CXLIII.—Tirando una vertical que pase por el medio de cada campanáceo, será fácil imitar á uno y otro lado las dos mitades casi iguales de los mismos; y lo será aún más si se tira en cada figura la horizontal auxiliar que se ve indicada en las mismas, ó mejor aún el rectángulo que circunscribe á dichos campanáceos.

4.° *Diseñar el* CAMPANÁCEO *de la fig.* CXLIV.—Como este campanáceo no es simétrico, para dibujarlo con facilidad trácese primeramente el cuadrilongo que lo circunscribe, así como también la horizontal auxiliar, lo que facilitará su dibujo.

5.° *Copiar los* FLORONES *ó* ROSETONES *de las figuras* CXLV, CXLVI y CXLVII.—Para dibujar estos florones, se trazará para el *primero* una circunferencia que circunscriba el florón, y otra menor, concéntrica con aquélla, que servirá para el adorno ó rosetón interior; se dividirá en seguida la primera circunferencia en cinco partes iguales, y los radios que se tiren por los puntos obtenidos serán los ejes de los nervios longitudinales de las cinco hojas de perejil que hay en el florón. Luego se dividirá cada una de las partes obtenidas en otras dos iguales, y en estos nuevos radios se tendrán los ejes de las otras cinco hojas de agua que hay en el florón, así como de las trepas que forman entre sí la unión de las hojas de perejil. Obtenido esto, será fácil dibujar lo demás.

Para el *segundo* se seguirá un sistema análogo al anterior, dividiendo primero la circunferencia en seis partes iguales y luego en doce.

Para el *tercero* se dibujará primeramente un cuadrado que circunscriba el florón, y las diagonales de este cuadrado serán ejes de las hojas que ocupan los ángulos del mismo; en seguida se dividirán los lados del cuadrado en dos partes iguales por medio de perpendiculares, y estas líneas serán los ejes ó nervios de las hojas que hay enmedio de cada lado. Para dibujar el rosetón circular que hay enmedio del florón, después de trazadas las circunferencias necesarias, se seguirá un procedimiento análogo á lo dicho para el dibujo de los florones anteriores.

Lámina 14.

6.° Los tres adornos que presentamos en esta lámina se componen de los elementos dibujados anteriormente; por lo que creemos que su dibujo no ofrecerá dificultad, particularmente con la ayuda de las líneas auxiliares que hemos trazado en cada figura.

ARTÍCULO 4.°

CONTINUACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE ADORNO.

540. Follajes son unos adornos compuestos de hojas, cogollos y flores naturales ó inventadas por el

capricho del artista; tales son los ornatos que presentamos en las láminas 15 y 16.

El presentado en la fig. CLI (lám. 15) es un follaje caprichoso que puede combinarse fácilmente con otros ornatos.

El de la fig. CLII se ha copiado de un capitel de pilastra.

El que ocupa la lám. 16 puede servir para adornar un friso ó faja cualquiera, á causa de poderse repetir el adorno indefinidamente enlazando la una mitad de palmitas con la otra mitad, por medio de la línea vertical que termina ambas mitades, y que al propio tiempo les sirve de eje de simetría.

541. Arabescos son unos adornos arbitrarios y caprichosos, compuestos de arbustos, yerbas, hojas, palmas, flores y frutas; también se admiten en su composición toda clase de animales y pájaros diversos, verdaderos ó imaginarios, así como también hombres, mujeres y niños desnudos ó vestidos, y otras mil cosas enlazadas y entretejidas con cintas, con bizarría, con gracia y buen gusto de dibujo, de claro-oscuro y de todos colores, formando agradables y vistosos grupos.

La pintura enriquece con ellos las salas, las galerías y los gabinetes, y la escultura en bajo relieve los frisos, las pilastras, los capiteles y otros miembros de la arquitectura.

Créese que fueron sus inventores los egipcios, á causa de que éstos mezclaron en sus ornatos hojas de árboles, flores, conchas, esfinges, grifos, centauros y otras figuras alegóricas; de éstos parece que lo tomaron los griegos, y de Grecia lo llevaron á Roma los destructores de aquel hermoso país, desde donde lo extendieron en su vasto dominio hasta el Bajo Imperio.

Después que Juan de Udine y otros condiscípulos suyos pintaron bajo la dirección de Rafael de Urbino, y por encargo de León X, aquellos famosos arabescos en las galerías del Vaticano, llamados las *Loggias* de Rafael, se extendió por toda Europa este género de adorno, á pesar de ser hasta cierto punto inverosímil y monstruoso. Pero por lo mismo que es un género de adorno fantástico, aconsejamos á los alumnos que, cuando hayan de inventar algún arabesco, no se abandonen á los caprichos de una imaginación desordenada y procuren ceñirse dentro de los límites que la razón y el buen gusto no permiten traspasar al que no esté dotado del talento, constancia y entusiasmo necesarios para abrirse una senda no trillada aún, separándose de lo natural y estableciendo, si puede decirse así, un bello ideal.

El arabesco de la fig. CLIV (lám. 17) es copiado de un bajo-relieve de yeso, bastante correcto, bien dibujado y lleno de gracia, por lo que creemos útil que lo reproduzcan los alumnos.

542. Trofeos. Toman este nombre las armas é insignias militares que suelen agruparse con cierta simetría y visualidad para honores fúnebres ó con otro motivo plausible, y también las que suelen pintarse por adorno.

En la fig. CLV (lám. 17) presentamos un trofeo de armas antiguas que podrán copiar los alumnos.

543. Atributos son varios objetos agrupados con cierto arte y simetría, y peculiares al arte, ciencia ó cosa que se quiere simbolizar. Así, se dice *atributos* de pintura, de música, de agricultura, de caza, de pesca, etc.

Los que representamos en la fig. CLVI (lám. 17) son atributos de bellas artes.

544. Jarrones y vasos son unos adornos, semejantes á los jarros, que suelen ponerse sobre zócalos, pedestales ó peanas para adornar los edificios, jardi-

nes, etc. Los hay de diferentes formas: los representados en las figs. CLVII y CLVIII (lám. 18) son unos vasos de forma antigua y adoptada otra vez en nuestros días; pues vemos muchos de los jarros modernos construídos con estas mismas proporciones.

A más de los dos jarros citados, podrán copiar los alumnos el de la fig. CLIX, que es simétrico y de forma cónica.

545. Caduceo es un atributo del dios Mercurio en Mitología. Cuéntase que Apolo regaló á Mercurio una varita de avellano ó de olivo que tenía la virtud de reconciliar las personas enemistadas. Para probar la gracia de aquel talismán, lo echó un día sobre dos serpientes que reñían, y al momento se enroscaron juntas en la varita y permanecieron así amigas, formando el *caduceo*, principal atributo de Mercurio, como símbolo de la paz y de la unión, y en este concepto usaban de él los embajadores griegos.

Cuando el caduceo, en vez de terminar simplemente con las alas, termina en gorro ó capacete de Mercurio, como el que se representa en la fig. CLX (lám. 18), entonces es símbolo del comercio, al cual presidía Mercurio entre los antiguos.

546. Cuerno de la abundancia. Según cuenta la fábula, Cibeles hizo criar de incógnito á su hijo Júpiter, con objeto de preservarle de la voracidad de su padre. Alimentáronle con leche de la *cabra Amaltea*; por lo que, reconocido después el dios de su nodriza Amaltea, la colocó en el cielo y dió uno de sus cuernos á las ninfas que lo cuidaron en su niñez. Aquel cuerno, que era el de la abundancia, derramaba sobre la tierra toda clase de frutos y flores, cuando las ninfas lo vertían. El cuerno de la abundancia es también símbolo del comercio, de la agricultura, de la paz y en general de todas las deidades bienhechoras. Se representa adornado de diferentes maneras, según el

gusto ó el capricho del artista. Como muestra de ello, representamos uno en la fig. CLXI (lám. 18).

547. Tirso era entre los antiguos una vara larga rodeada de pámpanos y hiedra, la cual era un atributo de Baco, dios del vino y de la vendimia entre los paganos. Las *bacantes*, sacerdotisas del dios Baco, se armaban de tirsos durante las fiestas llamadas *bacanales*, para recorrer los pueblos y los campos con antorchas, moviendo estrépito con tamboriles y panderetas y cometiendo excesos.

Este adorno, que representamos en la fig. CLXII (lám. 18), se usa hoy día para decorar las tiendas de licores, cafés, comedores y otras cosas análogas. También puede servir para cortinas de ciertas salas de espectáculos, etc.

548. Delfines son unos cetáceos, ordinariamente de poca magnitud, de cuerpo alongado, piel sin vello y que se reunen alrededor de los buques en grupos numerosos. Los antiguos poetas supusieron que Anfitrite, hija del Océano y de la ninfa Doris, fué solicitada de Neptuno, á quien desdeñó; pero el dios del mar diputó un *delfín* astuto para negociar y captarle el corazón de su amada. El mensajero, que era un hábil político, presentó á Anfitrite una corona, y su brillo fué para la diosa más persuasivo que el amor y las palabras de Neptuno, á quién alargó presurosa la mano de esposa. Agradecido el dios á los buenos servicios del delfín, le recompensó colocándole en los astros.

Estos cetáceos juegan un gran papel en el ornato; por cuyo motivo presentamos los dos delfines de la fig. CLXIII, con su forma algo modificada, sobre todo el delfín de la parte superior, en el cual se ven combinadas hojas de adorno que alteran su forma ordinaria, como suele hacerse muchísimas veces en el dibujo de adorno.

549. Grifo es un animal fabuloso formado de partes las más opuestas. La cabeza y alas son de águila, las orejas de caballo, la melena y los pies de león; créese que ha sido un símbolo entre los egipcios. Tal es el que representa la fig. CLXIV, que podrán copiar los alumnos.

550. Esfinge es un monstruo que los antiguos poetas suponían tener rostro de mujer, cuerpo de perro, alas y cola de dragón y garras de león. Proponía enigmas á todos los pasajeros y devoraba á los que no podían adivinarlos. Tenía ya asolada la ciudad de Tebas, cuando *Creón*, que la gobernaba, prometió la corona y la mano de *Jocasta* al que matase al monstruo, lo cual consistía en adivinar un enigma, pues así estaba predestinado á la Esfinge, y como Edipo consiguiese descifrarle el que aquélla le propuso, cegóse de soberbia la Esfinge, y rompiéndose la cabeza contra una roca, cayó precipitada al mar.

En el dibujo de la fig. CLXV (lám. 18) representamos una esfinge, según la definición dada, y que podrán copiar los alumnos.

551. No damos mayor número de detalles ó elementos para el dibujo de adorno, porque creemos que los ejercicios practicados hasta ahora son suficientes para indicar el camino que debe seguir el alumno para los demás dibujos que se le puedan presentar, por complicados que sean. También creemos que lo dicho bastará para hacer ver á los jóvenes que quieran dedicarse al dibujo de adorno, para ejercerlo como á profesión, la necesidad que tienen de estudios *mitológicos* é *iconológicos* (1), á más de los que precisamente habrán de hacer, con algún deteni-

(1) La iconología es la ciencia que demuestra con imágenes, símbolos y jeroglíficos ideas abstractas y pensamientos morales, políticos y religiosos. Tales son: un niño desnudo con alas, vendados los ojos, con aljaba y flechas, para significar el amor impuro; Minerva

miento, en varias obras de dibujo de adorno, á fin de conocer los diferentes tipos y estilos. Porque el hábito adquirido de dibujar fielmente y con gracia todos los objetos presentados hasta ahora, no es suficiente para el que quiere llamarse *dibujante de adorno;* pues para eso se necesita además que lo sepa combinar en varias cosas diferentes, dando un carácter á sus composiciones y adaptando para cada una adornos que sean propios del objeto que lo motiva. Haciéndolo así, florecerán las artes, se aumentará la elegancia de los muebles y sacarán su utilidad las artes mecánicas para dar realce y originalidad á sus producciones, pudiendo competir con las que vienen de otros países.

---

encadenándole, para indicar el poder que la sabiduría tenga sobre él; el gallo como símbolo de la vigilancia; el tigre, de la fiereza; el león, de la generosidad; el arado, de la agricultura; la lira, de la música; el tamboril y la pandereta, de la alegría y del placer; etc.

SECCION QUINTA

NOCIONES DE LAVADO

CAPÍTULO PRIMERO.

ARTÍCULO PRIMERO.

DEL LAVADO EN GENERAL.—MATERIAL DEL DIBUJANTE.

552. Se llama *dibujo lavado ó de aguada* el dibujo hecho con tintas de agua colorida con alguna sustancia propia para este objeto, y que se ha ido aplicando sobre el papel, cartón de Bristol ó lo que sea, por medio de un pincel. Son muchas las sustancias colorantes que pueden servir para el lavado, pues todos los líquidos que tiñen son buenos, con tal que estén compuestos de materias bastante oscuras ó colorantes para que las sombras puedan llegar al grado de fuerza que se juzgue conveniente para representar los objetos.

553. Cuando sólo se quiere dar una idea de los distintos relieves, formas y posición del objeto que se quiere representar, se lava generalmente con *tinta de China ó sepia*, y también algunas veces se emplea el *bistre*, la *tinta neutra* y el *hollín*. Pero cuando, á más de lo dicho anteriormente, se quiere imitar los diferentes colores naturales y propios de los objetos representados, entonces se hace uso de los colores que, ya en pastillas ó barritas, ya en botellitas, se venden en las tiendas de artículos de dibujo y pintura.

Entendido esto, pasemos á designar los materiales que son necesarios para el dibujo de lavado, á fin de que sepan los alumnos, no tan sólo lo que necesitan para ello, sino que conozcan al propio tiempo las buenas y malas cualidades de los mismos.

554. *De la tinta de China.*—Hay tinta de China de dos tonos: la una es de un hermoso negro muy subido, que tira, aunque ligeramente, á azul; la otra, de un negro pardo que tira algo á rojo. La primera suele emplearse para las orlas, viñetas y escritos de un cuadro; la segunda para el delineado y el lavado.

Para conocer si la tinta es de buena calidad, se frotará un cabo de la barrita en un platito de loza fina ó porcelana que contenga muy poca agua; se dejará secar la barrita de la tinta, y si la parte que ha sido frotada resulta arenosa, sin lustre y como empañada, es prueba de que no es buena; si, al contrario, fuese fina, unida y brillante, es probable que sea de buena calidad. También suele ser buena la tinta cuando, rompiéndola, la parte rota queda unida y brillante con reflejos ó visos bronceados.

Hay también otra prueba para conocer si la tinta es de buena ó mala calidad. Consiste en desleir en un platito un poco de tinta algo espesa y trazar con ella algunas líneas finas y otras gruesas, de modo que queden bastante oscuras; una vez secas, se les pasa por encima una capa de agua con un pincel, y si la tinta se dilata ó la línea se ensancha poniéndose desigual, es prueba de que la tinta es mala; pues para que sea buena es menester que soporte el lavado sin ninguna clase de alteración.

555. *De la sepia.*—El tono tan agradable que tiene este color y la facilidad que ofrece para irlo extendiendo sobre el papel por tintas que se pueden ir colocando sucesivamente las unas encima de las otras tantas veces como se quiera, sin ofrecer inconve-

niente, es causa de que muchos lo prefieran á la tinta de China y al bistre para hacer dibujos de un solo color. La sepia tiene la particularidad de que las tintas, á medida que se van secando, disminuyen de fuerza casi una tercera parte del tono que tienen mientras son húmedas; lo que hace que no se tenga de ir con temor de que el dibujo quede duro ó áspero.

La sepia de Roma (*Seppia Romero Roma*) es preferible por ahora á todas las otras que se conocen. Las hay de dos tonos ó matices; pero la más colorada es la mejor.

556. *Del bistre.*—Este color es notable por la trasparencia y vigor de sus tonos, cuando es preparado con todo el cuidado debido; pero como, por muy depurado y limpio que sea, siempre es difícil trabajar con él, por eso suele preferirse la sepia á este color.

557. *Tinta neutra.*—Este color, que tira á una especie de rojo pajizo, es á la vez sólido, trasparente y de fácil manejo. Como no suele encontrarse en las tiendas de artículos de dibujo y pintura, pondremos el modo de prepararlo. Tómese un pequeño manojo de raíces de escarola quemada y reducida á polvo, y hágase hervir en un litro de agua durante cuatro horas consecutivas; cuélese todo en un trapo fino y blanco, y hágase evaporar el licor en el baño-maría; el residuo será el color que se busca. Hágase secar este color á la sombra en un vaso barnizado, y consérvese procurando preservarlo de un grado de calor excesivo, así como también de la humedad.

558. *Tinta de hollín.*—Este color tiene un tinte pajizo algo parecido al de la tinta neutra, pero mucho más fácil de obtener. Para prepararlo, se toma una pequeña cantidad de hollín y se envuelve en un trapito fino y limpio, en forma de muñeca, y se pone á hervir con agua en un ollita nueva ó que no haya

habido nada de grasa. Cuando ha hervido cosa de media hora, poco más ó menos, se saca la muñeca del hollín y se guarda el líquido en una botellita bien tapada, para servirse de él cuando sea necesario. Tanto esta tinta como la anterior sirve mucho para fondos de dibujos ejecutados con tinta de China.

559. *Del papel.*—En el lavado, una de las cosas más importantes para que el dibujo tenga buen éxito consiste en tener un buen papel, por lo que es menester poner mucho cuidado en escogerlo. Las buenas cualidades del papel generalmente consisten *en el grano*, *en la blancura*, *en su grueso* y *en el modo de estar colado.*

El grano debe ser fino, unido y compacto; el color, de un blanco de nieve; el espesor, que sea más bien grueso que delgado; el colado, que sea de manera que, humedeciendo el papel con una esponja fina y limpia empapada de agua, no presente manchas; que no embeba el agua, y que mirándolo contra la luz no se vean puntos ó lunares más trasparentes que lo demás. Pero como esta prueba no es fácil hacerla sino después de haber comprado el papel, vamos á manifestar otro medio para poderlo conocer antes de comprarlo. Para eso se pone el papel horizontalmente y se mira bajo un ángulo de 45 grados, poco más ó menos, y si presenta una superficie unida, suave, plateada y sin brillo, es casi cierto de que será bueno para lavar; si le falta una sola de estas circunstancias, vale más no tomarlo.

El papel satinado, bruñido ó cilindrado puede servir para diseños que se hacen con la pluma ó el tiralíneas, pero no para dibujos lavados. Advertiremos, por fin, que el papel, cuanto más viejo es, más fácilmente se lava en él; por lo que, cuando se encuentra papel á propósito para el lavado, es útil hacer algún acopio proporcionado al que se necesite durante algún tiempo, toda vez que no siempre se encuentra bueno.

560. *Del lápiz plomo.*—El lápiz que se emplea para los ejercicios de dibujo lineal es el de *grafito* ó *lápiz plomo*. Este lápiz ordinariamente se divide en cuatro clases: siendo el del núm. 1 el más tierno y el del núm. 4 el más duro. El del núm. 2 suele ser á propósito para el dibujo á pulso, y el del núm. 3 para el delineado con regla y compás. Pero sucede á menudo que los números que llevan los lápiz plomo son equivocados y que el núm. 3 resulta más blando que el núm. 2, y viceversa; por lo que, si alguna vez sucede, no hay más remedio que cambiarlo.

561. *De los pinceles.*—Para que los pinceles sean buenos, es menester que, después de estar empapados con agua, todos los pelos queden bien unidos formando una sola punta, y que á la par que sean finos, suaves y elásticos, tengan la firmeza suficiente para que la punta se mantenga tiesa aunque se la doble. Un pincel es firme y elástico á la vez si, apretándolo ligeramente en la uña ó en el borde del vaso, haciéndole formar curva, vuelve naturalmente y por sí mismo á ponerse tieso como antes; si no tiene la elasticidad suficiente para resistir esta presión y se queda formando curva, ó bien si, en lugar de quedar con buena punta, ésta se deshace formando horquilla, es una prueba de que el pincel no es á propósito para lavar.

Los pinceles requieren mucho cuidado para conservarlos en buen estado; así es que, después de haberse servido de ellos, es menester lavarlos con agua bien limpia, de manera que no quede en el pincel ningún vestigio de color ó tinta de China; luego se pasa suavemente por entre los labios, procurando chuparle el agua y dejarlo con buena punta.

Se ponen los pinceles en unos palillos ó mangos de madera, marfil ú otra materia, colocando uno en cada cabo, con objeto de dar la tinta con el uno y con el otro unir, por medio del agua, dicha tinta con el blanco ó color del papel, sin tenerse que tomar más trabajo que dar una vuelta entre los dedos al citado mango; pues si para unir ó esfumar la tinta se hubiese de dejar el pincel de ésta para tomar el del agua, se secaría la tinta y quedaría cortada sin poderse unir como se deseaba.

Creemos inútil tener gran número de pinceles; pues con dos que sean algo gruesos para dar grandes capas ó aguadas y otros dos que sean algo menores para ejecutar los detalles, hay todo lo que se puede necesitar. Algunos no tienen más que un par de pinceles grandes, pero con buenas puntas para poder marcar los más ligeros detalles, y les bastan para ejecutar los trabajos más delicados.

562. *De la cola de boca.*—La cola de boca sirve para pegar el papel en el tablero y también para unir dos ó más papeles, ya sea con objeto de dibujar un croquis ó borrador en grande escala, ya para tapar ó cubrir el dibujo que se ejecuta. Como la cola de boca que se expende en el comercio no siempre es de la mejor calidad, y aun en este caso es muchas veces cortada en tablitas ó pastillas tan sumamente delgadas que imposibilita su uso, ponemos á continuación el modo de prepararla, á fin de que en caso de que no la hubiese á propósito pueda cualquiera fabricársela á su gusto.

Tómese una porción de cola de Flandes, de la mejor, que en este caso será muy blanca, clara y trasparente; póngase en infusión dentro de una olla de tierra nueva, por el espacio de diez á doce horas, con el agua que se crea necesaria, y si se quiere dar á la cola un gusto agradable, mientras está en infusión se le añade un poco de esencia de flor de naranjo, limón, rosa, etc.; póngase después en un fuego lento hasta que quede derretida, añadiéndole azúcar blanco del usual, en una cantidad igual á la que se ha puesto de cola de Flandes; viértase en un plato, fuente ú otra cosa hueca, cuyo fondo sea plano, procurando que esté horizontal, á fin de que por todas partes tenga un mismo espesor ó grueso. Cuando se haya enfriado, córtese en tablitas ó pastillas de 100 á 112 milímetros de largo, de 30 á 36 de ancho y de 6 á 8 de grueso.

563. *Pegado del papel en el tablero.*—Cuando un dibujo ha de quedar simplemente delineado, no es necesario, para su ejecución, tener el papel pegado en el tablero; pero para un dibujo que se ha de lavar es enteramente indispensable, pues estando el papel bien tirante, es mucho más fácil extender las tintas ó aguadas de modo que puedan quedar bien.

564. Para pegar el papel, se le moja primero por el reverso (1) con agua clara, por medio de una esponja, dejándolo embeber durante unos seis minutos, para que pueda estirarse, evitando siempre mojar los bordes del papel sobre una distancia de 3 centímetros alrededor de la hoja. Sobre este borde que queda sin mojar se extiende la cola, de modo que no llegue á coger un centímetro del papel; en seguida se vuelve éste y se le estira todo lo que sea posible, frotando al propio tiempo alrededor para que quede pegado. Se puede emplear cola común ó cola de boca; con la primera, el papel se pega con suma facilidad; pero la segunda tiene la circunstancia de no tenerse que calentar para usarla, por lo que suele preferirse su uso en las clases públicas de dibujo.

---

(1) Los papeles para lavar tienen un lado *bueno*, y es aquél en el que se puede leer en su sentido natural el nombre del fabricante; el otro lado se llama *reverso* del papel.

565. Es muy esencial dejar secar naturalmente el papel sin exponerlo al calor del fuego ni del sol, á fin de que á la primera humedad no se afloje; pero si á pesar de las precauciones tomadas el papel no se pusiese tirante, se le puede poner un momento delante del fuego, pero á una cierta distancia; porque si bien es verdad que el calor lo hace poner tirante, también lo es que lo hace romper en el caso de ser demasiado fuerte.

Al pegar el papel en el tablero, algunos lo mojan, por la parte que se ha de dibujar, con agua de alumbre (1), y por el reverso con agua de almidón; esta precaución es muy útil cuando el papel no tiene la cola suficiente, pues que el almidón, dando cuerpo al papel, priva que la tinta ó color cale.

566. El tablero debe ser construído de una madera dura y compacta, como, por ejemplo, el *álamo* ó mejor aún el *nogal;* porque si fuese de una madera blanda, las puntas de los compases se clavarían en ella y agujerearían el papel hasta inutilizar tal vez el dibujo, si éste fuese algo delicado. A más se ha de procurar también que dicha madera sea bien seca, para que la humedad no la vicie.

ARTÍCULO 2.°

PRÁCTICA DEL LAVADO.

567. Después de pegado el papel en el tablero, y cuando esté aquél ya bastante seco, se principiará á dibujar con esmero el croquis de los objetos que se

---

(1) Para hacer el *agua de alumbre* se toma un vaso lleno de agua muy limpia y se disuelve como cosa del grueso de una nuez de alumbre en polvo. Adviértase que si el alumbre se envuelve en un trapito en forma de muñeca, teniendo á ésta colgada sin que toque al fondo del vaso, se disuelve mucho más fácilmente.

trate de copiar ó representar, procurando hacerlo con buena punta en el lápiz plomo, á fin de que resulte un delineo fino y delicado que no cueste de borrar, si hubiese necesidad de hacerlo. A este objeto advertimos á los alumnos que en el delineo de todo dibujo que se haya de lavar no borren nunca con el *caoutchouc vulcanizado* (que es lo que vulgarmente se llama *goma elástica blanca*), á causa de que esta goma rasca la superficie del papel y hace que al dar la tinta queden unas manchas imposibles casi siempre de enmendar. Por esto encargamos que no se apriete el lápiz plomo, á fin de que salga un delineo flojo y delgadito, que en caso de tenerse que borrar pueda conseguirse fácilmente pasando muy ligeramente la goma elástica usual.

568. Cuando el dibujo esté debidamente delineado con el lápiz plomo, se pasará á delinear con tinta de China de la parda, ó bien de la negra, con tal que sea algo clara. Este delineo se ejecutará con el tiralíneas, y en caso de que hubiese algo de adorno ó dibujo á pulso, se hace esta parte con buenas plumas metálicas; pero haciendo de manera, como ya se ha dicho antes, que la tinta no sea oscura, á fin de que una vez lavado el dibujo no resulte áspero y recortado. Recomendamos á los alumnos que siempre que hayan de pasar de tinta el delineo de un dibujo que se ha de lavar, no hagan uso sino de la tinta de China fresca, pues la tinta desleída de tiempo y nuevamente remojada se descompone al contacto del pinel, y mezclándose produce tintas sucias que manchan el lavado.

569. Sucede algunas veces que, cansado el papel por las líneas que han tenido que tirarse en el delineo del objeto que se dibuja, presenta una superficie grasa y raspada, levantando una especie de pelusa ocasionada por el repetido frote de la goma elástica; y como un lavado sobre semejante papel no daría más

que tintas pálidas y desiguales, vamos á explicar el modo de obviar este inconveniente. Para conseguirlo, se pasa sobre el dibujo una ligera capa de agua de alumbre, la cual se extiende sobre el papel por medio de una esponja fina ó de un pincel grande, que se pasa muy ligeramente, y aun mejor inclinando algo el tablero y derramando el agua con un vaso por encima del papel, pues de esta manera se evita un roce ó frotamiento que podría perjudicar el trabajo ya ejecutado. Antes de empezar á lavar es menester que el papel esté bien seco, y en caso de que el alumbre no hubiese sido bien disuelto y hubiesen quedado partículas pegadas sobre el papel, pasarle muy ligeramente una pluma ó brocha muy fina y suave á fin de quitarlo.

Esta operación tiene la triple ventaja: 1.°, de quitar toda alteración causada por el frote de la goma elástica y de impedir al papel que chupe ó embeba demasiado las aguadas; 2.°, fija el trazado de modo que, si es menester sacar alguna tinta por medio de la esponja y el agua, se puede hacer sin alterar en nada el delineado, y 3.°, vuelve al papel su primitivo estado de limpieza y blancura.

570. Cuando se ha de lavar un dibujo, sea con tinta de China, sepia ó colores, á más de que todas las líneas ó contornos deben estar trazadas con mucha finura y precisión, es menester también que esté sin líneas *gruesas* ó de *fuerza*, á fin de que no recorten ni disuenen desagradablemente sobre el lavado ó colorido, y tan sólo al haber concluído el dibujo es cuando se hacen gruesas las líneas de fuerza ó de sombra que lo deban ser, pues en caso de necesidad, esta operación sirve para rectificar las tintas que pueden haber pasado algo de las líneas en donde debían terminar.

571. Al desleir la tinta de China en el platito se

ha de procurar que éste tenga la superficie bien lisa y tersa, á fin de que la tinta no forme granitos; y en caso de no tener ningún platito con estas buenas circunstancias, lo mejor es mojar con un poco de agua el extremo del índice de la mano izquierda y desleir la tinta en la yema de dicho dedo, desde donde se traslada al platito, sabiendo entonces con certitud que no puede haber ningún granito en dicha tinta y que por lo mismo será á propósito para lavar.

Los platitos, y lo mismo el vaso de agua, procurará el dibujante tenerlos siempre á su derecha, á fin de poderse servir fácilmente de la tinta ó agua según le convenga, lo que no podría hacer si lo colocara á su izquierda, á no ser que fuera zurdo.

572. Para que el lavado quede bien igual, se principiará extendiendo con un pincel una ligera capa de agua sobre la parte que se quiera lavar, á fin de humedecer un poco el papel; y cuando aun le queda un poco de humedad, pero sin que pueda mezclarse con la tinta, se le da una capa de color ó tinta bastante aguada, la cual quedará muy igual y uniforme, á causa de que con esta precaución el papel no absorbe precipitadamente la tinta y permite el extenderla sin tener que hacerlo con precipitación; en verano, sobre todo, es muy útil tomar esta precaución. Adviértase que el papel no se ha de mojar demasiado, porque si no forma prominencias y el color entonces no se extiende con igualdad, pues cargándose más en las concavidades, se oscurece con el agua, formando tonos desiguales. La tinta se va poniendo gradualmente sobre el papel con capas ó aguadas ligeras puestas las unas sobre las otras, hasta obtener el tono que se quiere (pues á cada capa que se va dando se va oscureciendo más), cuidando siempre de dejar secar el papel á cada aguada hasta dejarlo al estado de humedad que hemos dicho antes. Cuando ya se sea bas-

tante diestro para dar de una vez y con una sola tinta el tono local correspondiente, entonces podrá hacerse dándose más prisa; lo que á más de activar el trabajo, hará que se obtenga una viveza y hermosura de tonos que no suelen tener los dibujos coloridos con muchas tintas. No obstante, á pesar de lo dicho, aconsejamos á los alumnos que no se apresuren en querer obtener las tintas ó tonos demasiado pronto, porque esto requiere una mano muy ejercitada y se expondrían á echar á perder los dibujos.

Para que una tinta ó aguada quede bien, vale más poner al pincel mucha tinta que poca, porque de este modo corre mejor y se seca más pronto; mientras que si le falta tinta, provoca la sequedad y da tonos débiles, á los que es preciso revenir, resultando entonces tintas desiguales, con lunares ó manchas muchas veces imposible de enmendar y que desfiguran los dibujos.

573. Cuando se quiere dar una tinta á una parte del diseño compuesto de superficies muy diminutas, es menester ir siguiendo con la punta del pincel los contornos de estas partes; y como esto no se puede hacer aprisa, porque requiere mucho cuidado, sucede á menudo que mientras se trabaja por un lado se seca por el otro; lo que hace que tengan que apresurarse para obviar este inconveniente, y traspasando entonces los límites dados, se hace lo que se llaman *barbas*. Para que esto no suceda, lo mejor es hacer uso de buenos pinceles y llevarlos casi perpendicularmente al papel, pues sin esta precaución se pone curva la punta del pincel y salen unos trazos gruesos y largos que impiden seguir bien los contornos del dibujo.

ARTÍCULO 3.°

MODO DE ESFUMAR LAS TINTAS.

574. Explicado el modo de dar las tintas llanas, pasemos á manifestar el modo de darlas en claro y oscuro; pero primeramente es menester explicar lo que se entiende por *claro-oscuro*, lo que son *medias tintas* y á qué se llama *reflejo* y *reflexión*.

575. Se entiende por *claro-oscuro* el efecto de la luz, considerada en sí misma; comprende las gradaciones de los claros y de las sombras, y los diferentes rechazos que causan los reflejos.

También se llama así el diseño ó dibujo que no tiene más que un color sobre el campo en que se pinta, sea en papel ó en lienzo, etc.

576. *Medias tintas* son los colores degradados que sirven para suavizar el tránsito del claro al oscuro y viceversa.

577. *Reflejo* es la luz que, descendiendo sobre un cuerpo, vuelve hacia otro cuerpo vecino, á quien quita su primitiva luz y le presta otra. La que hiere un cuerpo rojo, por ejemplo, comunica parte de este color al cuerpo reflejado, y se forma en él una mezcla del suyo peculiar y del comunicado. Esto en donde se observa muy bien es en los cuerpos redondos que están cerca de otros cuerpos.

578. *Reflexión* es la claridad ó luz secundaria que resulta de la incidencia de la luz primera en los cuerpos iluminados y templa la fortaleza de las sombras.

579. Entendido esto, pasemos á explicar el modo de *unir* ó *esfumar* las tintas en el lavado.

Se llama *esfumar*, al mecanismo de saber degradar ó unir las sombras con las medias tintas y éstas con los claros, de manera que no sufran interrupción y sin que se conozca la línea ó punto en donde se unen.

580. Para esfumar las tintas es necesario tener dos pinceles en un mismo palillo ó mango, puestos uno en cada cabo. Dicho mango ha de tener la conveniente longitud para que sea fácil el movimiento de volverlo y poder hacer uso tan pronto de un pincel como del otro, á fin de dar la tinta con el uno, y con el otro, un poco mojado de agua, esfumar hasta que no se conozca dónde se concluye. Para esto es menester que el pincel que sirve para esfumar no esté muy cargado de agua; porque si ésta es muy abundante, se mezcla con la tinta que se quiere esfumar, y quedando entonces más cargado en una parte que en otra, resultan unas manchas que hacen muy mal efecto. Sucede también que el pincel que sirve para esfumar, poco á poco se carga de las tintas ó colores que va tocando, por lo que es menester que se limpie á menudo, lo que se consigue fácilmente agitándolo dentro del vaso con agua limpia.

581. Cuando en el dibujo que se lava ha de borrarse alguna cosa, ya sea por defectuosa, ya por haberse hecho alguna mancha, lo mejor es lavarlo con una esponjita fina, á fin de que la superficie del papel sufra la menor alteración posible. Cuando lo que se quiere borrar está muy impregnado ó bien el papel no es muy resistente, es claro que su superficie sufre con esta operación, y entonces para que no cale se le ha de dar una capa de agua de alumbre ó de goma arábiga muy clara, procurando unirla por sus extremos con lo demás del dibujo por medio de agua pura, como quien esfuma una tinta.

582. Cuando en un lavado concluído, ó ya muy adelantado, se le hace alguna mancha, se moja todo el dibujo hasta que esté bien empapado de agua y luego se enjuga con una esponja fina, la cual se vuelve á mojar y se escurre otra vez, según fuere menester, para ir secando el papel cuando no haya nece-

sidad de lavar más. En seguida se vuelve á trabajar de nuevo todo el diseño, el cual suele ser á menudo mucho más dulce y agradable de lo que lo hubiese sido sin esta operación, que muchos dibujantes tienen la costumbre de hacer aunque no hayan de lavar ninguna mancha, sobre todo si el dibujo no tiene la entonación conveniente ó, lo que es lo mismo, si las tintas no están suficientemente acordes.

583. El uso del *rascador* es mucho más difícil y arriesgado que el de la esponja, á causa de que muchas veces deteriora el papel de manera que, para restablecer la superficie, obliga á colarlo por medio de un líquido preparado del modo siguiente:

En un litro de agua destilada, hágase disolver cola de Flandes de la mejor, como cosa de una nuez; añádasele la misma cantidad de jabón blanco y hágase hervir dicha agua en una olla nueva, y antes que se enfríe satúrese fuertemente con alumbre y se obtendrá un líquido como una especie de leche que se puede conservar por mucho tiempo. Se extiende sobre el papel que se quiere colar, por medio de un pincel grande ó de una brocha muy suave, hasta que todas las partes del papel estén bien embebidas de él. Al aplicar esta cola en el papel, es menester que no esté caliente; al contrario, vale más que apenas sea tibia y poco espesa para que penetre bien en todos los poros de aquél.

EJERCICIOS GRÁFICOS Y DE LAVADO.

Lámina 19.

584. En la *seis* figuras que hay en esta lámina, se observará: que los dos dibujos de que consta cada figura tienen un delineo ó trazado general común, diferenciándose sólo en los detalles.

A fin de ejercitarse debidamente en el lavado, se harán las figuras algo mayores de lo que son en las láminas, por ejemplo, una mitad más.

Figs. 1.ª *y* 2.ª—Para su trazado obsérvese lo dicho en el párrafo

157, prob. V. Para el lavado, lo mismo en esta figura que en las siguientes, aténgase á lo explicado anteriormente en esta misma sección.

Figs. 3.ª *y* 4.ª—Para su dibujo téngase presente lo explicado en el párrafo 157, prob. VII.

Figs. 5.ª *y* 6.ª—Para el delineo, de estos diseños, trácense primeramente varios cuadrados iguales y sucesivos, y luego, desde los vértices de dichos cuadrados, así como también desde sus centros, descríbanse circunferencias tangentes, que formarán el trazado general del dibujo, como se ve en la lámina.

Figs. 7.ª *y* 8.ª—Se dibujarán unas fajas cuyos lados tengan la inclinación de 45°, formando unas con otras cuadrados perfectos, como se ve en la lámina. Para los demás detalles, la sola inspección de la figura indica lo que se debe hacer.

Figs. 9.ª *y* 10.—Teniendo presente lo indicado en el párrafo 157, II, y lo relativo á estrellas poligonales, será muy fácil su delineo.

Figs. 11 y 12.—Estos dibujos se componen de círculos concéntricos, en los que las circunferencias mayores son tangentes con las menores, formando un *entrelazado* muy fácil de ejecutar.

LÁMINA 20.

585. *Figs.* 13 *y* 14.—Como es un entrelazado que se compone de octágonos y cuadrados, para su delineo téngase presente lo explicado en el párrafo 157, prob. XI.

Figs. 15 *y* 16.—Estos diseños, como se componen de exágonos regulares y estrellas exagonales, se trazarán conforme lo explicado en el párrafo 157, prob. VIII y IX.

Figs. 17, 18..... 22.—No explicamos el modo de trazar estas figuras, porque el que haya delineado las anteriores creemos que no tendrá dificultad en dibujarlas.

LÁMINA 21.

586. Esta lámina consta de cuatro entrelazados y un dibujo gótico, que creemos no ofrecerán dificultad en su trazado, si se ha comprendido todo lo que antecede. En cuanto al *lavado*, no requiere más que un poco de cuidado, á fin de no salirse de los límites que marcan las líneas.

SECCION SEXTA

NOCIONES DE AGRIMENSURA (P').

CAPÍTULO PRIMERO.

ARTÍCULO PRIMERO.

DE LAS LÍNEAS Y SU MEDICIÓN.

588. Cómo se trazan las líneas en el terreno cuando éstas no han de tener mucha longitud? Cuando se ha de tirar una recta entre dos puntos muy distantes, cómo se hace?—589. Cuál es el instrumento llamado compás de varas?—590. Qué cadenilla es la que sirve para medir?—592. Cómo se sirve de la cadenilla ó del compás de varas?

588 Para trazar sobre el terreno rectas que su longitud no sea mucha, se pone una cuerda bien tirante atada por sus extremos á dos clavos ó maderos plantados en la tierra, como lo hacen los jardineros, albañiles ó empedradores; pero si los puntos son muy distantes el uno del otro, entonces es menester servirse de unos piquetes grandes llamados *jalones*, los cuales se clavan de distancia en distancia, facilitando de este modo trazar la recta.

Supongamos (fig. 262) *que se quiera tirar una recta* GH *entre las dos torres* G *y* H, *que distan la una de la otra algunas leguas.*

(P') Considerando que esta obrita puede servir, no solamente para los jóvenes de las poblaciones industriales, sino también para los de las agrícolas, hemos creído conveniente poner unas nociones de agrimensura, valiéndonos de consideraciones puramente geométricas y sin hacer uso de la trigonometría, tablas logarítmicas, etc.

Se plantará un jalón B hacia el medio; á corta distancia se plantará otro A, alineado con BG; el que hiciere la operación tendrá que volver á G para ver si el rayo visual BA va á parar al medio de la torre H; si se desvía, supongamos, hacia la derecha, plantará el jalón B hacia la izquierda, y volverá á plantar el jalón A de manera que esté alineado con la nueva dirección BG; volverá luego á mirar si el rayo visual BA se termina en H; si se aparta todavía, se repetirá lo que hemos dicho, hasta que la línea AB sea la prolongación de BAH.

Estando bien colocados los dos piquetes A y B de la línea GH, se enviará un peón para que plante un jalón C, que deberá estar en la dirección del rayo AB prolongado hasta G. Se mandará plantar del mismo modo los otros piquetes hacia adelante, teniendo cuidado de alinearlos bien, no sólo con los dos jalones precedentes, sino también con el medio de la torre G, que se percibirá mejor á medida que se acerque más á ella; del mismo modo se trazará la línea BAH.

Los árboles de un paseo, los guías de un regimiento cuando está alineado, nos presentan ejemplos de lo que acabamos de exponer.

589. *Para medir las líneas en el terreno* se hace uso algunas veces de un instrumento llamado *compás de varas* (fig. 263), que es una regla de metal ó madera, armada con dos puntas de acero movibles para afianzarlas á la distancia que se quiere. Están clavadas estas dos puntas en el borde de dos cajas, por dentro de las cuales pasa la regla; en cada una de estas cajas hay un tornillo para fijarla en el punto de la regla que ha de tener de uno á dos metros, y si fuere de madera, es preciso que ésta sea muy dura y compacta para que no se tuerza. C y D son las dos cajas de latón á las que están clavadas las dos puntas

de acero, las cuales han de estar indispensablemente de modo que no se inclinen á ningún punto de la regla. El extremo del tornillo E no se aplica inmediatamente sobre la regla, para que no la rehunda, sino sobre una hoja de acero que, arrimándose á la regla, la aprieta y sujeta de modo que no pueda correrse.

590. Sirve también para medir una *cadenilla* (fig. 264) compuesta de varios eslabones de cierta medida determinada, por ejemplo, de un pie. Se le pueden dar á la cadenilla treinta pies de largo, y será bueno hacerla de alambre que no sea muy grueso, á fin de que no pese demasiado.

La cadenilla de la cual se debe hacer uso en lo sucesivo, es la *cadenilla métrica*, la cual tiene 10 metros ó un decámetro de longitud. Está formada (figura 265) de 50 anillos ó eslabones de alambre *ab*, *bc*, etcétera, de dos decímetros de largo y unidos entre sí. Cada serie de 5 eslabones 1, 2, 3, 4, 5, etc., está marcada con un anillo de cobre é indica los metros. El quinto metro, que es la mitad de la cadena, se distingue por una señal arbitraria. Cada punta ó extremo de la cadena termina en una empuñadura de hierro sujeta al eslabón contiguo.

591. Si la línea que se ha de medir estuviese trazada en un plano muy igual, se tomará con un compás común ó con el de varas la longitud de la medida que sirve de tipo, y se aplicará sucesivamente la abertura de este compás sobre la línea que deba medirse.

592. Cuando se *quiera medir la distancia que separa un punto de otro sobre el terreno,* después de haber fijado con jalones (588) la recta que une los mismos puntos, se va colocando la *cadenilla* ó el *compás de varas* en la dirección de los expresados jalones, tomando por punto de partida uno de los

dados y conservando siempre horizontal la medida adoptada. El número de veces que quepa esta medida en la línea figurada, expresará la distancia que separa los puntos propuestos.

A fin de que el peso de la cadena no falsee su verdadera longitud, se hace uso para sostenerla del instrumento representado en la figura 273, el cual sirve al mismo tiempo para poner horizontalmente la cadenilla.

Adviértese que para mayor exactitud conviene medir la línea dos ó tres veces, y si las medidas salieren diferentes, lo más útil será tomar la menor, porque suele ser la más exacta. La razón de esto consiste en que no es posible sacar dos medidas iguales de una misma línea, midiéndola con la cadenilla ó la cuerda; porque no es posible que en ambas operaciones se tenga igualmente tirante la medida. De esto resulta el hallarse la línea antes más larga que corta, pues bien se echa de ver que, teniendo floja la medida, es lo mismo que si se midiera con una medida menor, y como ésta ha de caber más veces en la línea que otra mayor, se evidencia que la medida de una línea que más se arrima á su verdadero valor es la que se saca teniendo muy tirante la cuerda ó la cadenilla. Por consiguiente, cuando se toma dos veces la medida de una misma línea y salen desiguales sus valores, se ha de preferir el menor.

ARTÍCULO 2.º

MODO DE TIRAR LAS LÍNEAS PERPENDICULARES Y PARALELAS EN EL TERRENO.

593. Para bajar una perpendicular á una recta, por medio de la cadena ó de la cuerda, cómo se opera?—594. Si la perpendicular se hubiese de levantar en un punto de la recta, cómo se efectúa?—595. Cómo se hace para levantar una perpendicular el extremo de una

recta?—596. Cuando las perpendiculares han de ser de una longitud algo considerable, de qué instrumento se hace uso?—597. Cómo se hace para levantar una perpendicular á una recta por medio de la escuadra de agrimensor?—598. Y para bajar la perpendicular desde un punto fuera de la recta, cómo se hace?—599. Para tirar una paralela á una línea dada en el terreno, cómo se opera?—600. Cómo se hace para proseguir una línea recta más allá de un obstáculo que lo impida?—601. Para bajar y levantar perpendiculares á una recta, no hay otro instrumento llamado escuadra de reflexión?

593. Cuando ocurre en el terreno tener que bajar ó levantar perpendiculares que no hayan de ser de mucha longitud, se trazan, por medio de la cadena ó de una cuerda, de un modo muy sencillo, como vamos á manifestar.

Supongamos que se quiere bajar una perpendicular desde el punto A (fig. 266) á la línea BC; se asegurará en A el medio de una cuerda ó cadenilla, y poniéndola bien tirante, clávense dos piquetes en los puntos *d* y *e*, que es en donde sus extremos encuentran una línea dada BC; divídase *de* en dos partes iguales, en F, y tirando AF, ésta será la perpendicular, porque tendrá todos sus puntos equidistantes de *e* y *d*.

594. Si la perpendicular se hubiese de levantar en un punto de la recta, por ejemplo, en F, se pondría, con la cuerda ó la cadenilla, una distancia arbitraria de F á *d* y otra igual de F á *e*, y poniendo el un extremo de la cuerda ó cadenilla en *d* y el otro en *e*, el punto medio de dicha cuerda ó cadenilla, puesta tirante, dará el punto A; tírese de este punto la recta AF, la cual será perpendicular, por tener todos sus puntos á igual distancia de *e* que de *d*.

595. Si la perpendicular se hubiese de levantar al extremo de una recta, por ejemplo, en N (fig. 267). Se medirían sobre la recta dada 3 metros de N á P, y tomado 9 metros de la cadena á partir de N y P, se formaría con la misma el ángulo NRP, de manera que hubiese 4 metros de N á R y 5 de R á P. La rec-

ta NR sería la perpendicular pedida, por formar los tres puntos NPR un triángulo rectángulo (349), pues se verifica que $5^2=4^2+3^2$.

596. Cuando las perpendiculares han de ser de una longitud algo considerable, es de mucho uso el instrumento llamado CARTABÓN Ó ESCUADRA DE AGRIMENSOR, que se compone (fig. 268) de un círculo de latón bastante grueso, de diez á catorce centímetros de diámetro, y dividido en cuatro partes iguales por medio de dos líneas que se cortan en el centro formando ángulos rectos. En los cuatro extremos de estas líneas, y enmedio de lo ancho de la orla ó limbo del círculo, se hallan cuatro pínulas A, B, C, D, bien remachadas y hendidas perpendicularmente, de modo que las hendiduras correspondan á las líneas que dividen el círculo en cuatro partes iguales; en el extremo inferior de cada hendidura suele haber unos agujeritos que sirven para observar mejor los objetos en el campo.

Toda la perfección de este instrumento consiste en que las pínulas estén exactamente hendidas en ángulos rectos.

Suele afianzarse la escuadra por un *pie* compuesto de tres piernas EF, EG, EH, que se doblan sobre el palo triangular NF por medio de tres tornillos de latón puestos en su parte superior E; dicho *pie* debe tener como un metro y cinco decímetros de altura.

597. *Supongamos ahora que en el punto* E *de una línea se quiere levantar una perpendicular* (figura 270).

Se plantará el pie del CARTABÓN en el punto E, alineado el extremo superior con la línea BA ú OF; después se pondrá el cartabón de modo que por el rayo visual que pasa por las pínulas 1 y 2 se vean igualmente al uno y al otro lado los jalones A y B; se enviará después un peón para que tenga en el punto C, á su derecha, un jalón; se le hará seña de que lo arrime ó lo separe hasta que el pie esté enmedio del rayo visual que pasa por las pínulas 3 y 4, y se fijará después de haber mirado por las mismas pínulas que los extremos del jalón se hallen enmedio del rayo visual; treinta pasos más allá se plantará otro jalón D, operando del mismo modo; la línea CD se podrá prolongar siempre así, y será perpendicular á la base AB.

598. *Si en lugar del punto* E *fuese* H *el punto dado* (fig. 271), *esto es, un punto fuera de la línea* AB, plántese el cartabón aproximadamente enfrente del punto H sobre la línea AB; mírese después si el rayo FX pasa muy cerca del punto H, y se avanzará el que hiciere la operación hacia la izquierda ó hacia la derecha, según fuere menester, para encontrarse en el punto E, desde el cual se podrá tirar la perpendicular EH.

El cartabón y su pie han de estar muy á plomo, porque una corta inclinación ocasionaría un grave error.

599. *Para tirar en el terreno por el punto* A (figura 269) *una paralela á la línea dada* BC, bájese una perpendicular AD; levántese otra EF=AD; tírese por los puntos A y F la línea AF, que será la paralela.

600. En esta operación se funda la de *proseguir una línea recta* AD (fig. 272) *más allá de un obstáculo que lo impida*. A este fin, levántense las dos perpendiculares iguales AC, BD; tírese la línea CD prolongada, en la cual se tomarán más allá del obstáculo los puntos E y F, desde los cuales bájense las perpendiculares EG y FH=CA=DB; tirando la línea GH, será evidentemente la continuación de la línea AB paralela á la CF.

601. Para levantar perpendiculares en el terreno, hay también otro instrumento llamado *escuadra de re-*

flexión, el cual es muy cómodo, tanto por su poco coste y volumen, como por la sencillez con que con él se opera. Consiste en una cajita cilíndrica que suele tener unos 7 centímetros de diámetro y 3 de altura, dentro de la cual hay dos espejos; el uno recibe directamente los puntos desde los cuales se quieren bajar las perpendiculares á la recta, sobre la cual se ha de hallar el que opera, y el otro que, colocado á 45º de inclinación del primero, refleja de éste dicho punto. De modo que cuando el que opera, mirando por un agujerito ó hendidura que tiene la cajita, ve que coincide con la prolongación de la recta á la que se quiere bajar la perpendicular, es prueba que el punto donde se halla la recta es el pie de la perpendicular que se quiere bajar.

ARTÍCULO 3.º

MEDICIÓN DE ÁNGULOS EN EL TERRENO Y LEVANTAMIENTO DE PLANOS CON EL GRAFÓMETRO Y LA PLANCHETA.

602. Qué es levantar un plano?—603. De qué instrumento se sirven para medir los ángulos en el terreno? Descripción del grafómetro. A qué se llama núñez ó vernier? Qué es brújula del grafómetro?—604. Cómo se hallan los ángulos con el grafómetro y cómo se hace la evaluación de los minutos del núñez?—605. De qué artificio se valen para medir un ángulo, cuando los tres puntos que lo forman son muy distantes uno de otro?—606. Cómo se levanta el plano de un terreno por medio del grafómetro?—607. Descripción de la plancheta.—609. Cómo se levanta el plano de un terreno por medio de la plancheta?—Para qué sirve principalmente la plancheta?

602. Levantar un PLANO *es trazar sobre un papel la forma de un terreno con todos sus detalles en dimensiones reducidas que conserven la proporcionalidad de sus lados y la igualdad de sus ángulos.*

603. *El instrumento que sirve para hallar ó medir los ángulos en el terreno, se llama* GRAFÓMETRO. Consiste en un semicírculo de latón ABC (fig. 275),

cuyo limbo está dividido en 180°; tiene dos alidadas AC, DE: la primera está inmóvil y forma cuerpo con el instrumento, la segunda sólo está sujeta á él por el centro F y se mueve para recorrer la semicircunferencia desde 0° á 180°; ambas están terminadas por dos pínulas verticales para mirar los jalones. La AC se llama *alidada inmóvil*, la DE *alidada móvil* (Q'). En cada extremo de la alidada móvil está señalada la línea diametral con una flor de lis que se llama *línea de fe* y sirve para señalar los grados. La alidada móvil está provista en uno de sus extremos de un *núñez ó vernier* que da las fracciones de los grados. Este núñez consiste en un arco de cobre concéntrico á la semicircunferencia, y cuya división difiere del limbo, puesto que señala 30'; por manera que la comparación de estas dos divisiones permite añadir á los grados marcados sobre el limbo los minutos que da el núñez. Entre el limbo y la alidada inmóvil hay una brújula H que sirve para orientar el plano, esto es, para reconocer la posición del plano con relación al meridiano; es una línea dirigida de *norte* á *sur*; una perpendicular á ella da los otros dos puntos cardinales *este* y *oeste*. Por último, para que el instrumento tome las diversas inclinaciones necesarias para ponerse de nivel, está montado sobre una bola G, llamada *rodilla*, que se adapta á una especie de concha que se cierra á voluntad por medio de un tornillo.

604. *Para medir, pues, con el grafómetro, por ejemp., el ángulo* LFJ (fig. 275), colóquese el pie del instrumento en el punto K, donde concurren las direcciones de los objetos L y J, y suspéndase al trípode una

---

(Q') En lugar de las cuatro pínulas, lleva el grafómetro muchas veces dos anteojos de larga vista, de los cuales el uno está inmóvil sobre el diámetro del instrumento y el otro sirve de alidada móvil.

plomada GK que, correspondiendo al centro del instrumento, caiga verticalmente sobre el punto del vértice F; nivélese en seguida el limbo, porque si se inclinase á derecha ó izquierda, haría cometer un gran error en la medida de los ángulos; diríjase después el rayo visual AC, de la alidada inmóvil, al uno de los objetos, como, por ejemplo, J, y luego se cierra el tornillo de la choquezuela; póngase después la alidada móvil DE en la dirección del otro objeto L, y cuéntense los grados comprendidos entre E y C.

Los grados y medios grados no ofrecen ninguna dificultad, pero no sucede lo mismo con los minutos. Sea *ce* la porción del limbo empleada en medir el ángulo LFJ, y *nb* el *núñez* ajustado á la alidada móvil. Si el 0 del *núñez* correspondiese exactamente á la diferencia *cb* del 50°, se contarían 50 grados para la medida del ángulo. Si, por el contrario, cayese sobre el punto *g* de los semigrados, leeríamos 50° y 30′; pero si el cero del núñez cae sobre una porción del semigrado que la vista no puede apreciar con exactitud, es necesario buscar hasta que la señal de los minutos 1, 2, 3, 4, etc , corresponda á una señal de grados ó semigrados del limbo. Aquí la primera que corresponde es la señal 10, de donde se sigue que la medida buscada del ángulo es 50° y 10′. Cuando, en vez de partir de cero sobre el limbo, se procede desde 18° para estimar los grados, los minutos se cuentan á la inversa.

605. *Cuando se ha de medir un ángulo que los tres puntos qne lo forman son muy distantes uno de otro*, plántese junto al vértice, en la dirección FJ, dos jalones X, Z, y otros dos en la dirección FL; tómese después el ángulo que forman estos jalones con el vértice F, y quedará conocido el que se pedía.

Es muy útil este artificio cuando el grafómetro, en vez de llevar anteojos, lleva pínulas.

606. Cuando haya de servir el grafómetro para medir un ángulo que esté en un plano vertical, esto es, un ángulo formado en un plano que pasa por lo que llamamos una línea á plomo, se colocará el plano del instrumento en una situación vertical por medio de un plomo que esté colocado en su centro.

Cuando el hilo del plomo rasa con el borde del instrumento y coincide con los 90º, está el grafómetro en la situación que corresponde.

Así, para medir el ángulo BAC (fig. 276), *formado por la cuesta* AC *con la horizontal* AB, colóquese el grafómetro al pie de la cuesta en la dirección AD, conforme acabamos de decir; levántese después la alidada móvil hasta que por ella se vea la cabeza del jalón C, que está en lo alto de la cuesta; el arco *mn* expresará el valor del ángulo *m*A*n*, igual al ángulo CAB por opuestos al vértice.

607. En el párrafo 602 hemos dicho lo que era levantar el plano de un terreno. Consiste esta operación en determinar en el papel puntos que estén colocados los unos respecto de los otros, del mismo modo que están en el terreno los unos respecto de los otros, los objetos que dichos puntos han de representar. Supone el que levanta un plano que todos los objetos cuya situación se ha de determinar están en un mismo plano horizontal, y nosotros caminaremos en lo que vamos á decir bajo esta suposición.

Sean, pues, A, C, D, B, G, F, E, H, I, K (fig. 277), *muchos objetos cuya posición respectiva se quiere representar en un plano.*

Se dibujarán toscamente dichos objetos en un papel, dándole las situaciones que á ojo parezca que tienen; á cuyo fin el que levantare el plano tendrá que ir á los diferentes sitios donde conviniere para formar algún juicio de todos los objetos propuestos. Este primer dibujo, que se llama *borrador,* servirá para señalar las diferentes medidas que se tomarán en el decurso de las operaciones.

Se medirá una base AB, cuya distancia no sea muy desproporcionada con la distancia de los objetos más remotos que desde sus extremos se pueden ver, y que sea tal, al mismo tiempo, que se pueda ver desde sus extremos el mayor número de objetos que sea posible; se medirán con el grafómetro en el punto A los ángulos EAB, FAB, GAB, CAB, DAB, que forman en el punto A con la base AB las líneas que se imaginarán tiradas desde dicho punto á los objetos E, F, G, C, D, que, según suponemos, se pueden ver desde los extremos A y B de la base; se medirán del mismo modo en el punto B los ángulos EBA, FBA, GBA, CBA, DBA, que forman en dicho punto con la línea AB las rectas que se imaginarán tiradas desde dicho punto B á los mismos objetos que antes.

Si algunos objetos, como H, I, no se pueden ver desde los extremos A y B, será menester pasar á dos de los puntos E y F, observados antes, desde los cuales se puedan ver los dos objetos H é I; se considerará EF como una base, y se medirán los ángulos HEF, IEF, HFE, IFE, que formarán con esta nueva base las líneas que irían desde sus extremos á los objetos H, I. Finalmente, si algún otro objeto, como K, no se hubiese podido ver ni desde los extremos AB ni desde los de EF, se tomará por base otra línea, como FG, que va desde uno de los puntos observados á otro, y se medirán del mismo modo en sus dos extremos los ángulos KFG, KGF.

Después de apuntados todos estos ángulos, se tirará en el papel una línea *ab*, dándola tantas partes de la escala que ha de determinar el tamaño del plano, cuantos sean los metros ó pies que tuviere AB; se formarán en los extremos *a* y *b* los ángulos *eab*, *eba*, *fab*, *fba*, etc., iguales á los ángulos observados EAB, EBA, FAB, FBA, etc., que forman con la base AB los objetos que se han podido ver desde los puntos A y B. Juntando después los puntos *e* y *f* con la recta *ef*, se formarán en los extremos de esta línea, como base, ángulos iguales á los que se han observado desde los puntos E y F, y así prosiguiendo se sacará una figura semejante á la del terreno.

608. Hay otro modo también de levantar planos, que es muy cómodo porque pide poco aparato, y al mismo tiempo que se observan los diferentes puntos cuya situación se quiere determinar, se van señalando en el plano sin perderlos de vista. El instrumento que sirve para este fin se llama *plancheta*, y se compone de una tablita en forma de rectángulo que se coloca sobre un plano ó trípode que gira sobre sí, á fin de que pueda colocarse en una posición horizontal. Sobre esta tabla se extiende una hoja de papel y se afianza por medio de un bastidor que coge todo el contorno de la tabla, ó bien se encola por los lados con cola de boca ó goma. Se emplea también una *alidada*, que consiste en una regla de metal armada de pínulas en sus extremos, cuyas pínulas están en una línea paralela al borde de la regla, como se ve en LM (fig. 278). En lugar de pínulas, puede también ponerse un anteojo de larga vista.

609. Cuando se quiere hacer uso de la plancheta para trazar el plano de un terreno, se busca una base *mn*, como en las operaciones antecedentes, y plantando en *m* el pie del instrumento, se manda poner un piquete en *n*; se aplica sobre el papel la alidada LM, y colocándola de modo que se pueda ver por las dos pínulas el piquete plantado en *n*, se tira después á lo largo de la regla de la alidada una línea EF, dándola tantas partes de la escala del plano, cuantas medidas cupiesen en el punto E, desde el cual se observa primero, y el punto *f*, desde el cual se observa en la se-

gunda estación. Después se hace dar la vuelta á la regla alrededor del punto E hasta encontrar, mirando por las pínulas, algunos de los objetos I, H, G; y á medida que se encontrare alguno, se tirará á lo largo de la regla una línea indefinida. Habiendo recorrido de este modo todos los objetos que se pueden ver desde el punto *m*, se llevará el instrumentio en *n*, y dejando un piquete en *m*, se harán en el punto *n* las mismas observaciones respecto de los objetos I, H, G, que se hubiesen hecho en la estación antecedente. Las líneas *fi*, *fh*, *fg*, que en este seguudo caso van, ó se concibe que van, hasta dichos objetos, encuentran á las primeras en los puntos *g*, *h*, *i*, que son la representación de los objetos G, H, I.

Sirve principalmente la plancheta para trazar el pormenor ó detalles de un plano, después de determinados, por el método declarado antes (607), los puntos más principales, ó para añadirle á un mapa levantado objetos que se hubiesen omitido (R′).

ARTÍCULO 4.º

MODO DE MEDIR DISTANCIAS EN TODO Ó PARTE INACCESIBLES.

610. Cuando una línea es inaccesible en toda su longitud ó en alguna de sus partes, cómo se consigue medirla?—611. Cómo se mide una línea que no tenga accesible sino uno de sus extremos?—612. Cómo se mide lo ancho de un río desde una de las orillas?—613. Cómo se mide una línea que tenga únicamente accesibles sus extremos?—614. Cómo se mide una línea que sea totalmente inaccesible?—615. Las operaciones que anteceden para qué sirven?

610. Una línea puede ser inaccesible ó en toda su longitud ó en alguna de sus partes. Sea como fuere,

---

(R′) Para la medición de los ángulos, á más del grafómetro y la plancheta, hay otros instrumentos, como la brújula, el teodolito, círculo repetidor y otros que se encontrarán descritos en obras escritas exprofeso para los agrimensores.

se ha de procurar que sea lado de un triángulo para venir en conocimiento de su longitud, lo que se conseguirá reduciendo á pequeño la expresada figura.

Supongamos que se ofrezca medir una línea AB (fig. 274) *que tenga una parte* aA *inaccesible.*

Se medirá una base BC, que supondremos de 80 metros.

Se tomará B*c* á arbitrio, de 20 metros, por ejemplo; se hará el ángulo B*ca* igual á BCA, el cual lo habremos determinado con el grafómetro después de haber medido la base; la línea *ca* cortará á la AB en *a* (si estuviese *a* más allá de la parte accesible, se habría de tomar B*c* más corta); después se medirá B*a*, que supondremos sea de 25 metros, y se hará esta regla de tres: B*c* : BC :: B*a* : BA; es decir, 20 : 80 :: 25 : BA=100 metros, que será la longitud de la línea propuesta.

Para mayor comodidad, conviene tomar B*c* de modo que sea el tercio ó el cuarto de BA.

611. *Si la línea* MN *que se ha de medir* (fig. 279) *no fuese accesible sino en su extremo* N, levántese en dicho punto una perpendicular indefinida NP; tírese la línea RS en la dirección del punto que se quiera tomar la distancia, haciendo en M un ángulo cualquiera NMR; hágase SP igual á un tercio ó cuarto, etcétera, de SN, y en P levántese una perpendicular PR, y se tendrán los triángulos SPR y SNM con los ángulos respectivamente iguales y los lados proporcionales; de modo que midiendo los lados SP, PR y SN, se tendrá la longitud NM por la proporción SP : PR :: SN : NM.

612. *Si se quisiese medir lo ancho de un río*, se buscaría á la orilla opuesta un objeto tal como A (fig. 279); se imaginaría la línea AB, y en B se levantaría una perpendicular BC, y se operaría, como en el anterior, haciendo que la línea DE estuviese en la dirección del punto A.

613. *Si una línea fuese accesible únicamente por sus extremos, como, por ejemplo, la* AB (fig. 280), se tomará un punto C, desde el cual se puedan tirar las dos rectas CA, CB, y tomando en los lados del triángulo ACB las partes C*a*, C*b*, proporcionales á los lados CA, CB, de modo que sean, por ejemplo, su mitad; tírese la *ab* paralela á BA, y se formará esta proporción C*b* : *ba* :: CB : BA, cuyo cuarto término da la línea que se desea conocer.

Para mayor acierto y comodidad, se tomarán las partes C*a*, C*b*, tan grandes como se pueda.

614. *Si la línea que se ha de medir fuese totalmente inaccesible, como, por ejemplo, la* AB (fig. 281), se medirá una base CD, que sea con poca diferencia paralela é igual á la línea propuesta AB; por los extremos de esta base imagínense líneas tiradas, esto es, visuales, á los extremos de la AB, y mídanse los ángulos en C y en D con el grafómetro. Hecho esto, se hallará la línea AB formando en el papel triángulos semejantes á los que se han hallado en el terreno y dando á la línea *cd* tantas partes de una escala cuantos sean los metros ó pies, etc., que en el terreno tenga la CD.

615. Las operaciones que anteceden se aplican para medir las líneas que están al otro lado de un río, de un precipicio, etc.; para ver la distancia de dos sitios apartado el uno del otro, como de dos torres ó campanarios, de dos buques, etc.; sirven también de principio para levantar el mapa de un país.

ARTÍCULO 5.º

MEDICIÓN DE ALTURAS.

616. Para medir alturas, ¿de qué propiedades nos valdremos?—617. ¿Cómo se mide la altura de un muro inaccesible por su parte superior?—618. No se puede medir la altura de una torre ú otro objeto

por medio de la sombra del sol ó de la luna?—619. Si el objeto cuya altura se ha de medir estuviese situado en un paraje que no fuese plano, como al pie de una colina, por ejemplo, cómo se encuentra su altura?—620. Para medir una altura enteramente inaccesible, cómo se opera?

616. Para medir la altura de una pared, de una torre ó de otro objeto cualquiera, nos sirven también las propiedades de los triángulos semejantes, del mismo modo que nos han servido para la medición de las líneas inaccesibles.

617. *Supongamos que se haya de medir la altura de un muro* BD (fig. 282), *inaccesible por su parte superior.*

Después de tomada la base AB, se mide el ángulo BAD; se tira en el papel la línea *ab*, que contenga tantas partes de la escala como metros ó pies, etc., contiene AB; se forma con el trasportador el ángulo *dab*, igual al DAB, y se levanta en el punto *b* la perpendicular *bd*; su punto de intersección con *ad* determinará la altura BD.

Por medio del cálculo se puede también encontrar dicha altura del modo siguiente:

Después de haber elegido y medido la base AB, se plantará en un punto cualquiera de ésta un jalón EC, bien verticalmente y de un modo que su extremo superior pase por la visual AD; se medirá su altura y la del segmento AE, y en seguida se hará esta proporción AE : EC :: AB : BD, cuyo cuarto término dará la altura.

A fin de poder en la práctica tirar la visual AD *con alguna comodidad, se podría también operar de la manera siguiente:*

Después de haber medido una base AB (fig. 283), se plantará un jalón A*a*, cuyo largo sea de uno á dos metros; se plantará en un punto cualquiera de la base otro jalón E*d*, que su extremo superior pase por la visual *a*D; por *a* se imaginará la horizontal

aC, la cual dará $ac : aC :: cd : CD$, y como $ac = AE$ y $aC = AB$, se tendrá $AE : cd :: AB : CD$; á cuyo cuarto término, si se le agrega la altura $Aa = BC$, dará la altura total BD.

618. *Por el mismo método se puede medir la altura* QP *de una torre* (fig. 284), *por medio del sol ó de la luna.* A cuyo fin se medirá en un plano igual la longitud QR de la sombra de la altura QP; se plantará en el mismo plano un palo *qp* paralelo á QP; la parte del palo que saliere fuera de la tierra se medirá, y también su sombra, y se hallará la altura de la torre por esta proporción $qr : qp :: QR, QP$.

619. *Si el objeto cuya altura se ha de medir estuviese colocado en un sitio que no fuese plano, como el pie de dos colinas, por ejemplo,* se coloca el instrumento A, tomado arbitrariamente (fig. 286); se miden los ángulos CAD y DAB; se tira en seguida sobre el papel la línea *ab*, que contenga tantas partes iguales como metros tenga la base AB; se forman en el punto *a* con el trasportador los ángulos *cad* y *dab*, iguales á los ángulos CAD y DAB; finalmente, del punto *b* se tira una perpendicular *bc* á *ad*; la longitud comprendida entre los puntos *b* y *c*, llevada á la escala, dará la altura BC.

620. *Para medir una altura enteramente inaccesible como la* mn (285).

Se señalará una base *br*, de una distancia arbitraria, y se plantarán en ella tres jalones *ab*, *cd* y *er*, que sean iguales entre sí y que la parte que saliere fuera de la tierra sea de un metro ó algo más; por los puntos *a* y *e* se tirarán las visuales *an* y *en*; se medirá el ángulo *fan*, y en el punto *e* se formará el ángulo *hcg* igual al *fan*, por lo que la recta *cg* resultará paralela á la visual *an* y dará el triángulo *ecg*, semejante con el *ean*; por *g* hágase pasar un jalón *ghs*, el cual dará el triángulo rectángulo *chg*, semejante con *afn*;

mídanse las distancias $rd=ec$, $ds=ch$, $sb=ha$, y comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes, se tendrá $ec : cg :: ea : an$. Conociendo el lado an, se hallará la altura por esta proporción: $cg : gh :: an : nf$.

Si al valor de nf se le añade el de $er=fm$, se obtendrá la altura total mn.

Observ. Para hallar en la primera proporción el valor de cg, se recordará que dicha línea es hipotenusa del triángulo rectángulo chg, por lo que será igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los dos catetos ch y hg.

ARTICULO 6.º

DE LA NIVELACIÓN.

621. Qué se entiende por nivelación?—622. Qué es línea de nivel? Qué es la diferencia de nivel?—623. A qué se reduce la nivelación? Para saber si una línea es ó no horizontal, de qué instrumentos se sirven? De estos instrumentos, cuáles son los que se usan para nivelar dos puntos bastante próximos?—624. Qué es nivel de aire?—625. Qué es nivel de albañil? Cómo se halla con el nivel de albañil la diferencia de altura entre dos puntos bastante próximos? Cómo se hace si no puede obtenerse el nivel con una sola operación?—626. Qué nivel se emplea para nivelar dos puntos muy distantes? Nivel de agua.—627. Qué es una escala? Qué es una mira?—628. Cómo se halla con el nivel de agua la diferencia de altura entre dos puntos muy distantes?—629. Cuál es la mayor distancia que con este instrumento se puede nivelar de una sola vez?—630. Qué se entiende por una alineación parcial? Qué son estaciones? Qué son puntos de señal?

621. *Nivelar ó hacer una nivelación* es determinar la altura comparativa de muchos puntos de un terreno.

622. Se llama *línea de nivel* la horizontal sobre que se encuentran dos puntos. La *diferencia de nivel* es la diferencia que hay entre la altura del uno y la del otro.

623. Como la nivelación está reducida á tirar lí-

neas horizontales, no nos detendremos en manifestar cómo se ejecuta esta operación, mirándola únicamente bajo este respecto.

Para mirar si una línea es ó no horizontal, se han inventado varios instrumentos, de los cuales sólo daremos á conocer el *nivel de aire*, el *de albañil* y el *de agua*.

Para nivelar dos puntos próximos nos servimos de los dos primeros.

624. El nivel de aire es muy sensible. Está formado de un tubo de cristal colocado sobre un plano AB (fig. 287) que le permite adaptarse sobre una regla. Cuando la burbuja de aire que se halla en el líquido del tubo se detiene enmedio de dos puntos marcados, es una prueba de que están á nivel.

625. Se suple este nivel por el de albañil. Dicho nivel se compone de dos reglas iguales CD, CE (figura 288), unidas en C por una muesca y en *n* y en *o* por un travesaño. En el medio del travesaño hay una raya *f*, llamada línea de fe, por donde debe pasar la plomada cuando el nivel esté exacto.

Con este nivel se hace uso de dos reglas de 3 á 4 metros de largo, las cuales deben estar divididas en decímetros, centímetros y milímetros.

Para hallar con el nivel de albañil la altura comparativa de dos puntos próximos A y B (fig. 289), el agrimensor coloca horizontalmente la regla DB mientras que su ayudante va á colocar en A la vertical AD. Hecho esto, se pone el nivel sobre la regla DB, que se baja ó levanta sucesivamente hasta que esté exacto; la medida hallada EA es la altura buscada.

Si la nivelación no puede ejecutarse de una vez (fig. 290), se mide primero HI, luego JK, después LF; se suman las tres mediciones obtenidas, y la suma de estas tres verticales es igual á la línea GM, así como la suma de las tres horizontales LK, JI, HG, es igual á la base FM.

Si se quiere obtener la diferencia de nivel entre dos puntos N, O y un tercero P (fig. 291), se suman las extensiones verticales que se hallan descendiendo de N á P y las que se hallan subiendo de P á O; se resta en seguida la suma menor de la mayor, y el residuo es la diferencia buscada.

626. Para nivelar dos puntos muy distantes, se emplea el *nivel de agua*. Dicho nivel se compone de un tubo QR, de hojalata (fig. 292), doblado en Q y R. En sus dos extremos se introducen dos cilindros de cristal S, T, perfectamente ajustados y pegados con betún; se sostiene el tubo horizontalmente sobre un pie en U; se vierte agua, colocada en uno de los cilindros, hasta que suba á la altura de 5 á 7 centímetros en los dos tubos de vidrio, y hay nivel cuando se eleva á la misma altura en los dos lados. La línea xz que pasa por la superficie del agua en ambos tubos S, T, es una línea horizontal.

627. Con el nivel de aguas nos valemos de una *escala* y una *mira*.

La *escala* es una regla OP de 3 á 4 metros, dividida en decímetros, centímetros y milímetros, en la cual hay un rebajo para meter la mira y correrla según convenga hacia arriba ó abajo.

La *mira* es una plancha de unos 30 centímetros cuadrados, poco más ó menos, y cuya cara está dividida en dos partes iguales, una blanca y otra negra, colocada de tal modo en la escala, que puede correr de arriba abajo y sujetarse donde convenga por medio de un tornillo. La línea que forma la división de los dos colores que tiene la mira se llama *índice*.

628. Para hallar con el nivel de agua la diferencia de altura de los puntos A y B (fig. 293), se fijan en estos puntos dos jalones ó escalas, divididas, como

se ha dicho, en metros, decímetros, centímetros, etcétera, plantándolos lo más perpendicularmente que se pueda; después se coloca el instrumento en un punto desde donde se puedan ver los dos piquetes C y D. El agrimensor envía al punto A á su ayudante, que levanta ó baja, según la señal, la mira que hay en la escala, mientras que él enfila su nivel mirando horizontalmente por la superficie del agua hacia la mira. Si, fijo el ojo en ella, divisa la línea formada por la separación de los dos colores, hace señal á su ayudante para que tenga inmóvil la mira, y el ayudante anota entonces los metros, decímetros, centímetros y milímetros, contando desde el suelo hasta el punto del *índice*. Para saber la diferencia de altura entre B y A, es necesario deducir la altura del piquete CB, y se tiene en EA la diferencia buscada.

629. La mayor distancia que con este instrumento se puede nivelar de una sola vez, no pasa de unos 200 metros, poco más ó menos, que es lo que puede alcanzar la vista sin exponerse á cometer equivocaciones.

Cuando es mucha la distancia entre los dos objetos que se lleva ánimo de nivelar, se repite muchas veces la operación; pero si no fuese más que de unos 400 metros, se puede ejecutar de una sola vez, plantando el nivel enmedio de la distancia que hay entre los dos términos de la nivelación.

630. Cuando es mucha la distancia entre los dos términos, suelen encontrarse subidas y bajadas que hacen más embarazosa la nivelación, porque entonces es necesario cambiar muchas veces de plano, que es lo que se llama *alineación parcial*. En este caso es preciso apuntar en un libro de memorias todas las subidas en una columna, que llamaremos la *primera columna*, y en otra *segunda* las bajadas; se suman todos los números de la primera columna, y

por separado los de la segunda; se resta la menor de estas dos sumas de la mayor, y el residuo manifiesta lo que un término está más bajo ó más alto que el otro.

Los puntos donde verifica las operaciones el agrimensor se llaman *estaciones*, y se denominan *puntos de señal* los que se anotan dos veces en la operación.

FIGURAS QUE SE HAN DE ENSEÑAR Á LOS DE LA PRIMERA Y DE LA SEGUNDA SECCIÓN (1).

Líneas. — Recta, curva, vertical, horizontal é inclinada.
Círculo. — Circunferencia, radio, diámetro, arco, cuerda, sagita, tangente y secante.
Trasportador. — Grados del mismo.
Ángulos. — Rectilíneo, curvilíneo y mixtilíneo —Vértice y lados. —Ángulo recto, agudo y obtuso.—Bisectriz de un ángulo.
Línea perpendicular. — Levantar una perpendicular en medio de una recta. — Idem al extremo de una línea. — Idem en un punto cualquiera de una recta.— Idem pasando por un punto dado fuera de la línea.
Línea oblicua.
Líneas convergentes y divergentes.
Líneas paralelas. — Rectas paralelas pasando por un punto dado.
Triángulos —Equilátero, isósceles y escaleno. — Rectángulo, catetos, hipotenusa. — Base y altura del triángulo.
Cuadrilátero diagonal.
Trapezoide. — Trapecio, isósceles, escaleno y rectángulo.
Paralelogramos. — Cuadrado, cuadrilongo, rombo, romboide.
Polígono regular é irregular. — Pentágono, exágono, eptágono, octágono, eneágono, decágono.
Estrella poligonal.--Idem regular é irregular.— Idem exagonal por extensión y por reducción.
Polígonos simétricos. — Eje y centro de simetría.
Óvalo, ejes de ídem, diámetro.
Arco carpanel. — Ojival. —Escarzano.—Descendente.
Elipse.— Eje mayor y eje menor.—Diámetro.
Espiral.
Triángulo inscrito y circunscrito.

(1) Véase la nota (a), pág. 11.

Cuadrado inscrito y circunscrito.
Molduras.— Filete, plinto, faja. —Bocel, junquillo, toro. — Cuarto bocel, caveto ó media caña.— Gorguera, gola derecha.—Idem reversa.—Talón derecho.— Idem reverso. — Escocia.
Poliedro.
Paralelepípedo.— Cubo.
Prisma.-Recto y oblicuo.
Pirámide. — Regular é irregular.
Altura de la pirámide.
Pirámide truncada.
Cuerpos regulares.
Cilindro.— Recto y oblicuo.
Cono.—Recto y oblicuo.
Altura del cono.
Cono truncado.
Esfera.—Radio.—Diámetro.
Círculo máximo.—Círculo menor.

PROBLEMAS Ó CUESTIONES PARA HACER RESOLVER Á LOS ALUMNOS DE LA TERCERA SECCIÓN.

Trazar una línea recta.
Idem una curva.
Idem una vertical. — Horizontal. — Inclinada.
Describir una circunferencia.
Trazar un diámetro.—Un radio, una cuerda, un arco, una sagita.
Idem un trasportador.
Idem un ángulo recto.
Idem agudo.—Obtuso.
Hacer un ángulo igual á otro.
Formar un ángulo igual á la suma de otros dos.
Trazar un ángulo igual á la diferencia de otros dos.
Dividir un ángulo en dos partes iguales.
Dividir un ángulo en cuatro partes iguales.
Trazar un ángulo rectilíneo, curvilíneo y mixtilíneo.
Idem un triángulo equilátero.
Idem isósceles.— Escaleno.
Idem un triángulo rectángulo.
Idem obtusángulo.
Indicar la base y las alturas de un triángulo acutángulo y obtusángulo.
Dada una recta como á lado, trazar un cuadrado.
Idem dada la diagonal.
Trazar un rectángulo.
Idem un rombo.

Trazar un romboide.
Idem un trapecio.
Idem un trapezoide.
Idem un pentágono regular.
Idem un exágono.
Idem un eptágono.
Idem un octágono.
Idem un eneágono.
Idem un decágono.
Idem un embaldosado compuesto de triángulos equiláteros.
Figurar el tablero de damas.
Dibujar un pavimento de rombos iguales.
Idem un enladrillado compuesto de exágonos.
Trazar la estrella regular de tres puntas.—Idem la cuadrangular.
Idem la estrella exagonal por el método de reducción y por el de extensión.
Idem una estrella eptagonal regular que no sea por los métodos de extensión ni reducción.
Idem un polígono simétrico irregular.
Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas.
Buscar una tercera proporcional geométrica á dos rectas dadas.
Dividir una recta en un número de partes iguales cualquiera.
Delinear un decímetro dividido en centímetros y milímetros.
Idem la escala de mil partes.
Trazar una recta tangente á un círculo en un punto dado.
Por un punto dado fuera del círculo tirar una ó dos tangentes á la circunferencia.
Trazar dos circunferencias concéntricas.
Idem dos circunferencias tangentes exteriormente.
Idem un óvalo.
Idem un huevo.
Idem un arco carpanel.
Idem apuntado.
Idem escarzano.
Describir una elipse por puntos y por medio de una tira de papel.
Trazar una espiral.
Inscribir un triángulo en un círculo.
Circunscribir un triángulo á un círculo.
Inscribir y circunscribir un cuadrado en un círculo.
Inscribir en un círculo un pentágono regular.
Idem un exágono regular.
Idem un octágono.
Idem un decágono.
Idem un dodecágono.
Hallar una recta próximamente igual á la lon-

gitud de una circunferencia dada.
Trazar una circunferencia próximamente igual á una recta dada.
Idem un filete.
Idem un bocel.
Idem un toro.
Trazar un cuarto bocel.
Describir un caveto ó media caña.
Trazar la gorguera.
Idem la gola derecha.
Idem la reversa.
Describir la escocia.

CUARTA SECCIÓN.

Los alumnos de esta sección seguirán en un todo lo indicado en la obra.

FIN DE LA PRIMERA PARTE.

ÍNDICE

SECCIÓN PRIMERA.

De las líneas.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

CAPÍTULO II.

COMBINACIÓN DE RECTAS CERRANDO ESPACIO.

CAPÍTULO III.

FIGURAS CURVILÍNEAS Y MIXTILÍNEAS.

SECCIÓN SEGUNDA.

De las superficies.

CAPÍTULO PRIMERO.

CAPÍTULO II.

MODO DE MEDIR LAS SUPERFICIES PLANAS.

CAPÍTULO III.

COMBINACIÓN DE LAS RECTAS CON LOS PLANOS Y DE LOS PLANOS ENTRE SÍ.

CAPÍTULO IV.

SECCIÓN TERCERA.

De los sólidos ó cuerpos geométricos.

CAPÍTULO PRIMERO.

CAPÍTULO II.

DE LOS CUERPOS REDONDOS.

CAPÍTULO III.

DE LAS SUPERFICIES DE LOS SÓLIDOS.

CAPÍTULO IV.

DE LOS VOLÚMENES Ó SOLIDEZ DE LOS CUERPOS.

SECCIÓN CUARTA.

Nociones de adorno.

CAPÍTULO PRIMERO.

SECCIÓN QUINTA.

Nociones de lavado.

CAPÍTULO PRIMERO.

SECCION SEXTA.

Nociones de agrimensura.

CAPÍTULO PRIMERO.

Lámina 1ª

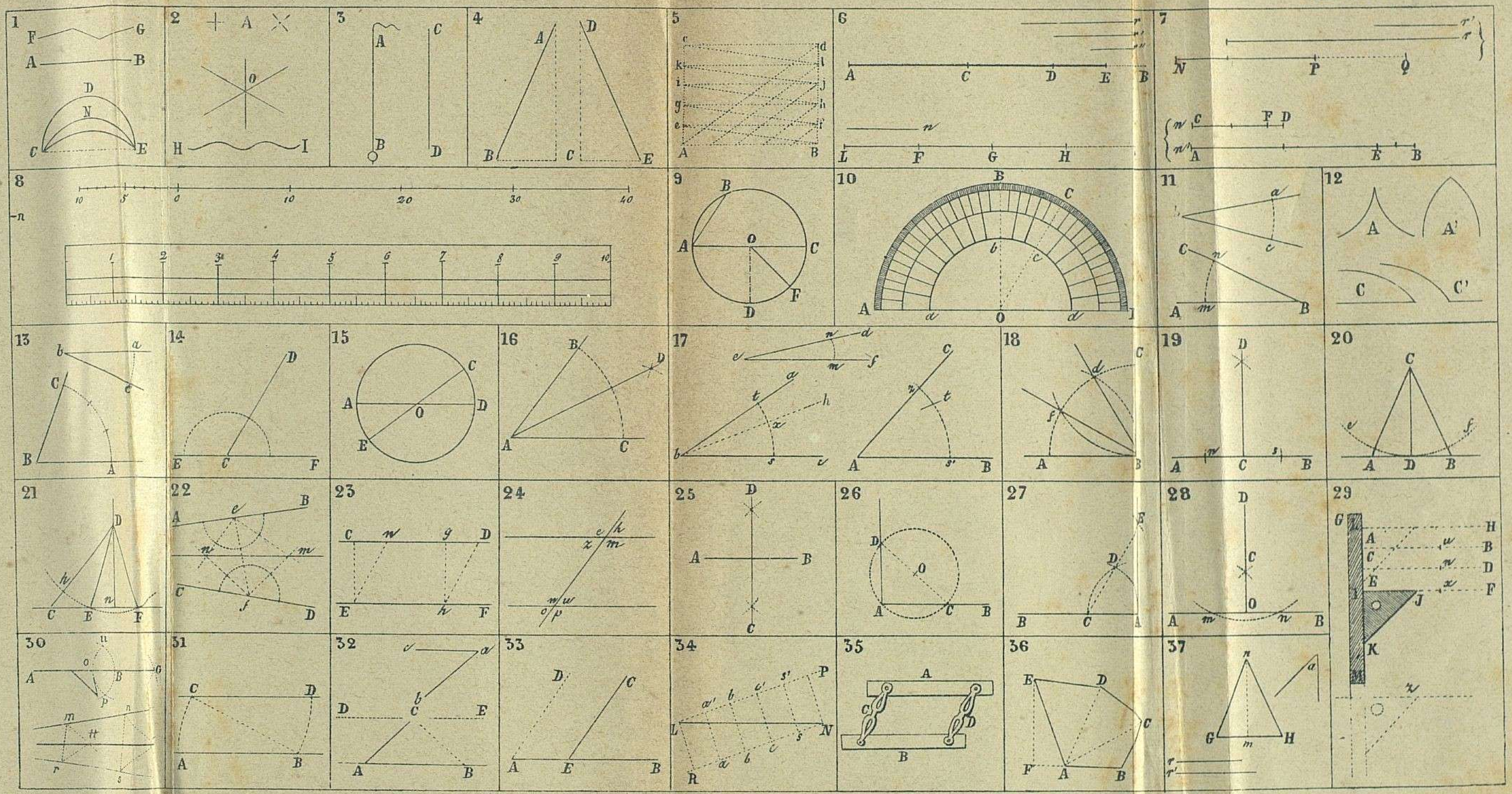


Lámina 2ª

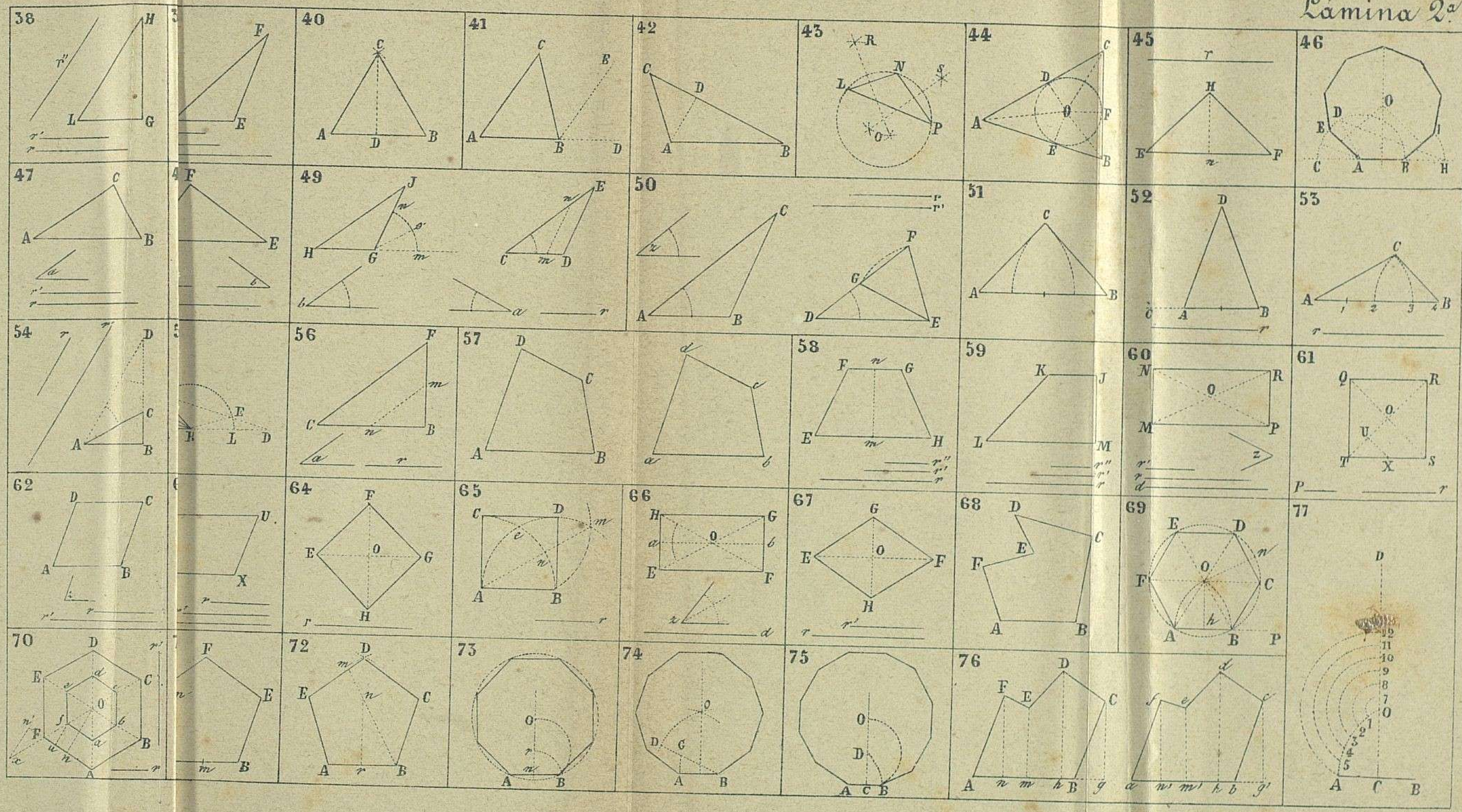
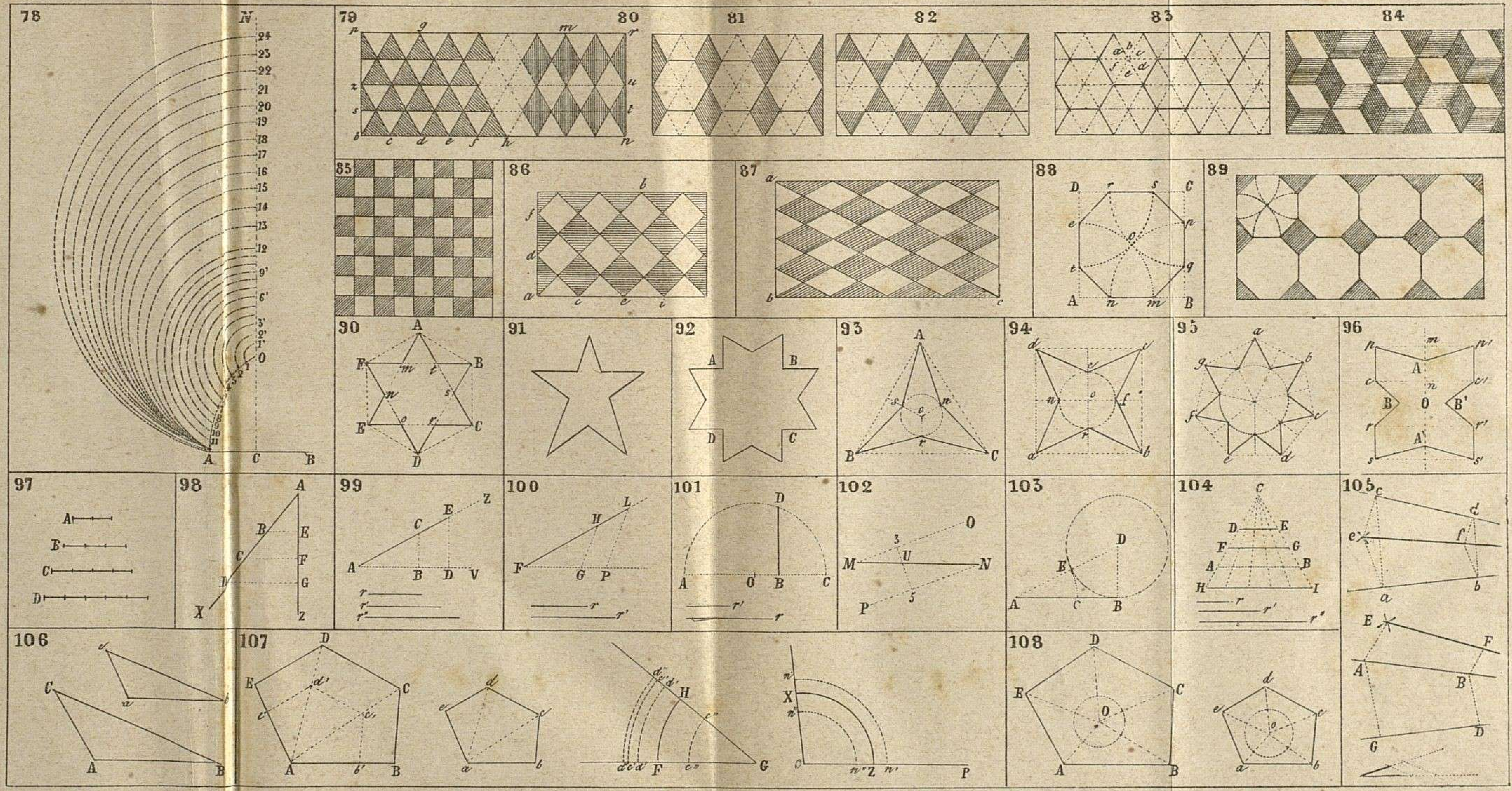


Lámina 3ª


78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108

Lamina 4ª

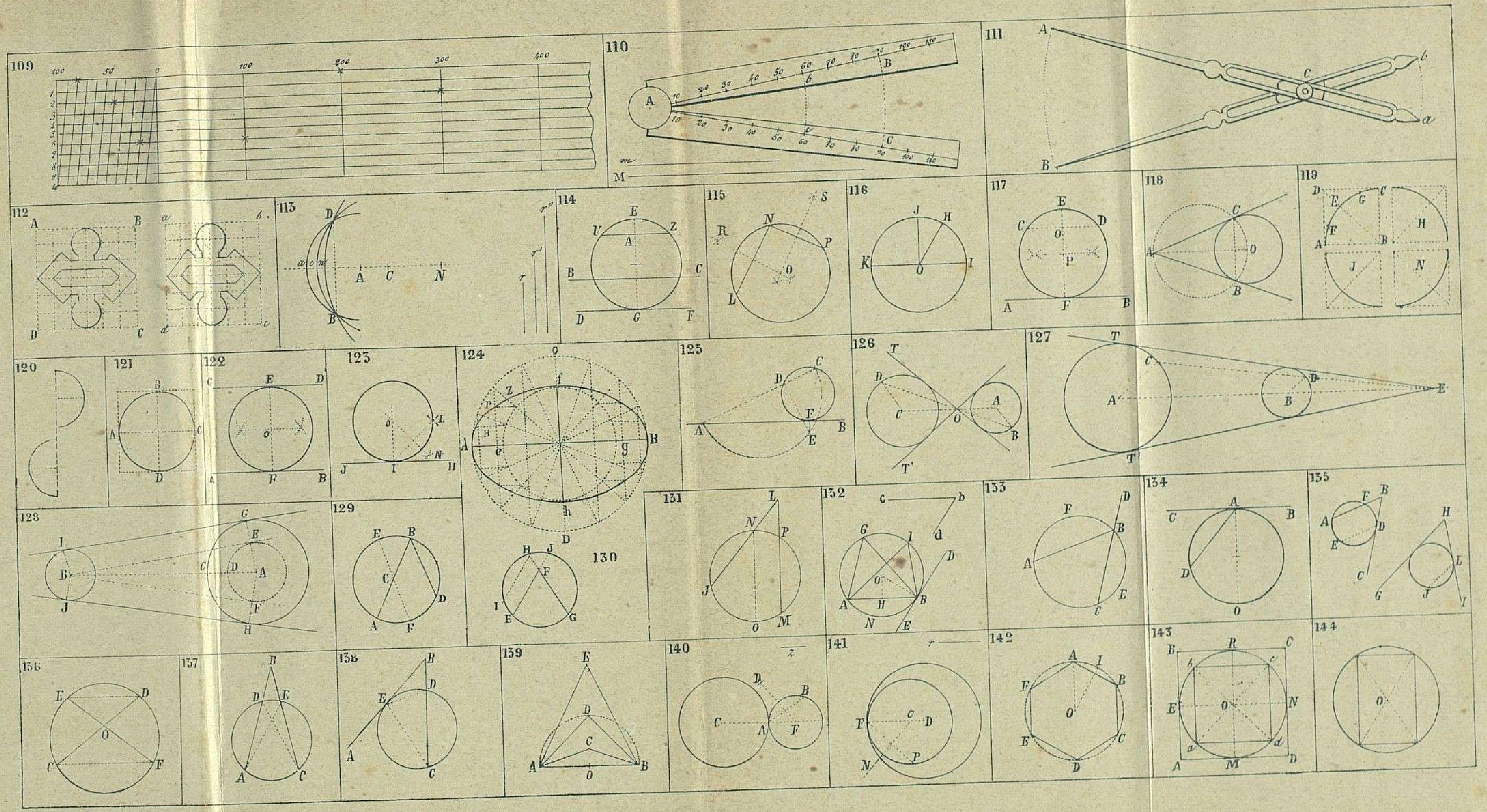


Lámina 5ª

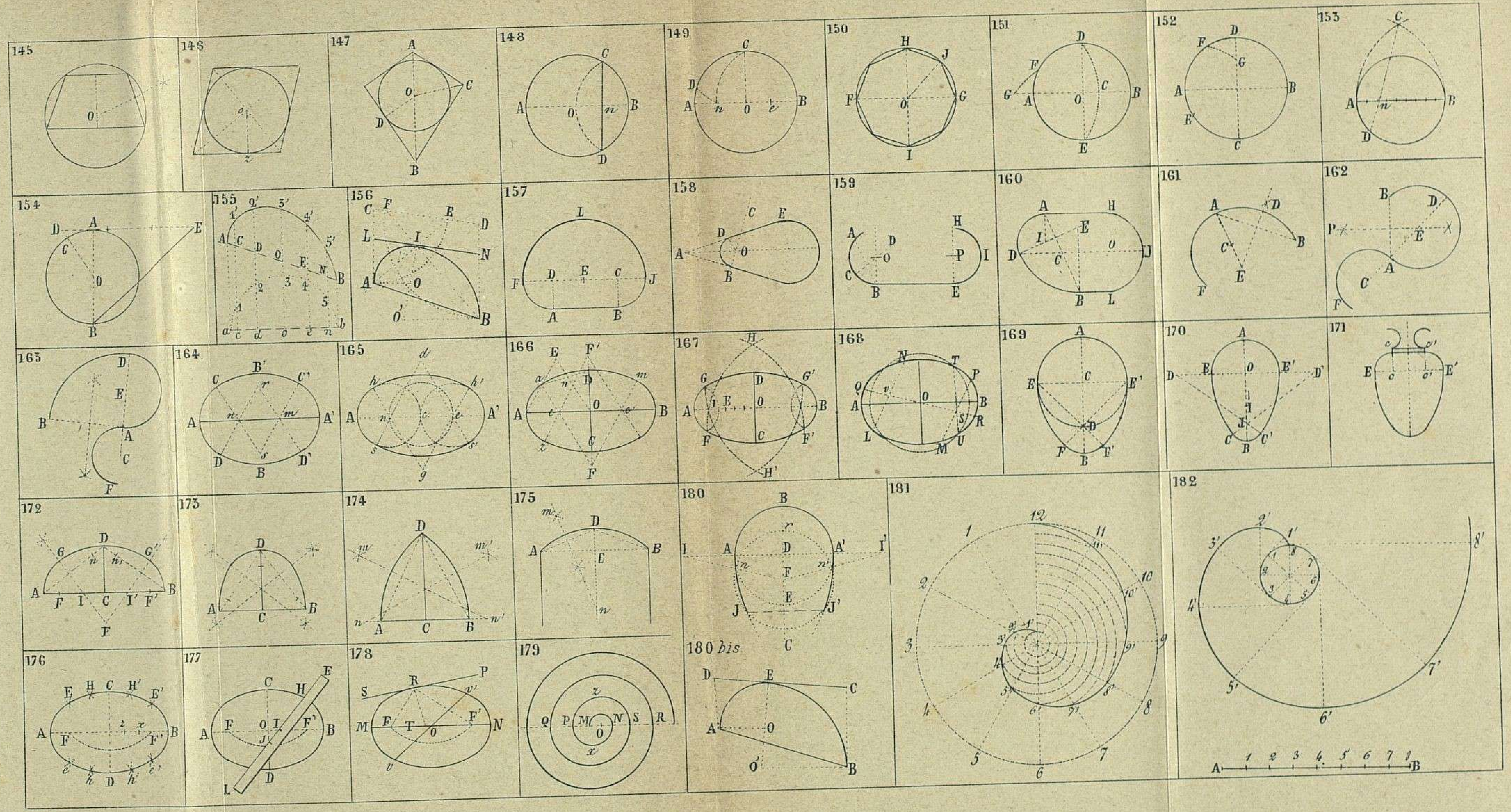


Lámina 6ª

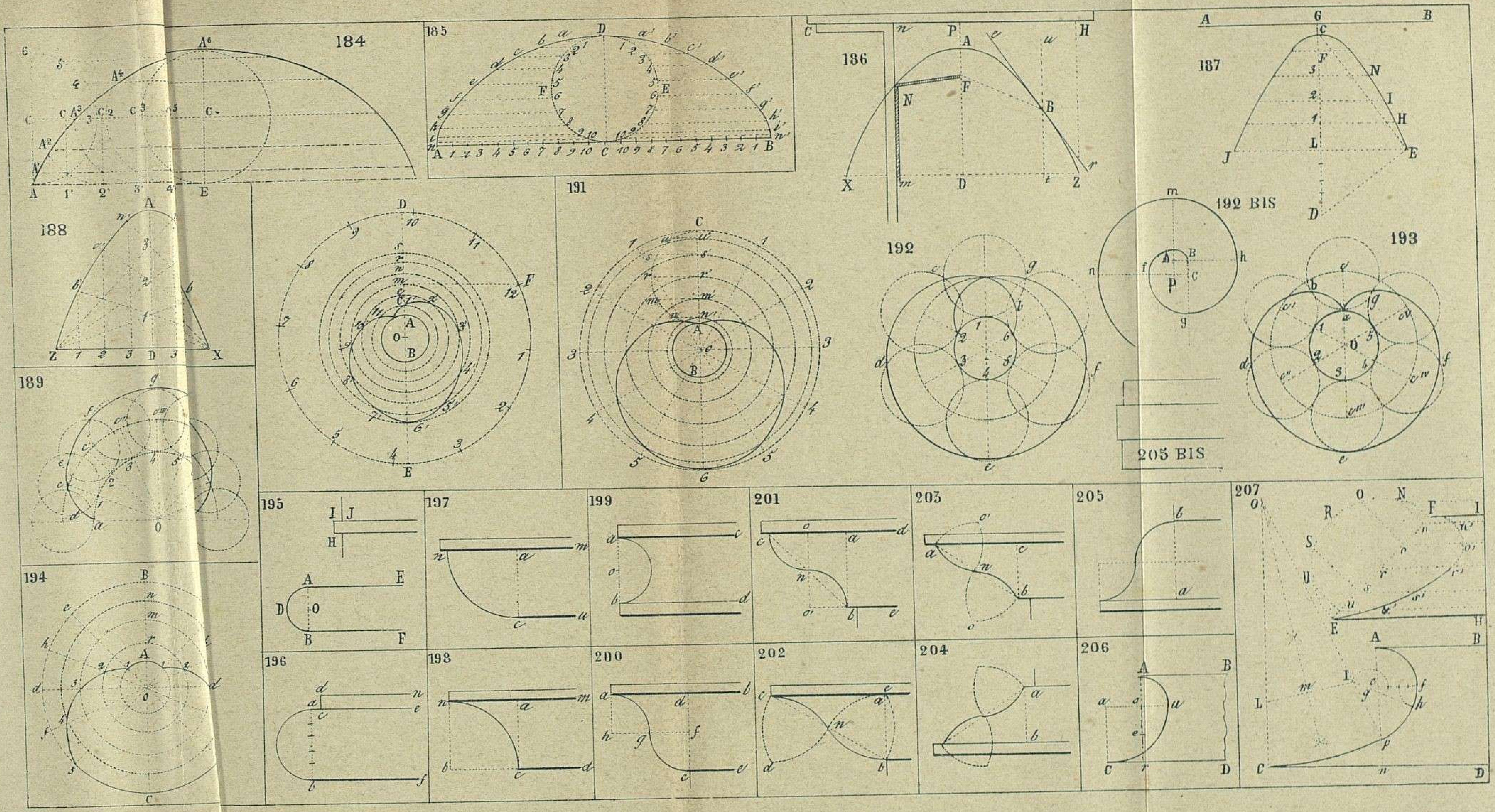

184
185
186
187
188
189
191
192
192 BIS
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
205 BIS
206
207

Lámina 7ª

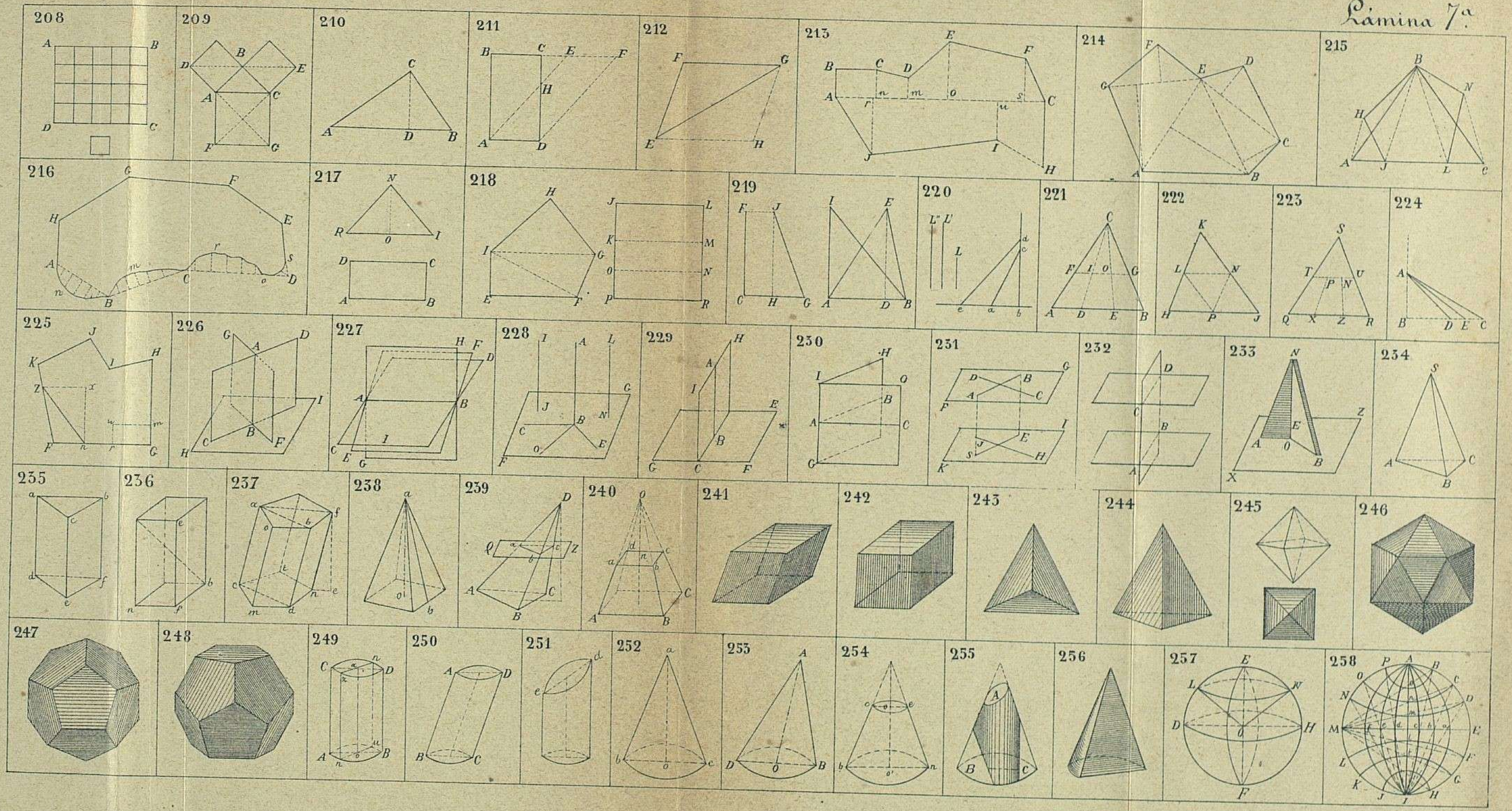


Lámina 8ª

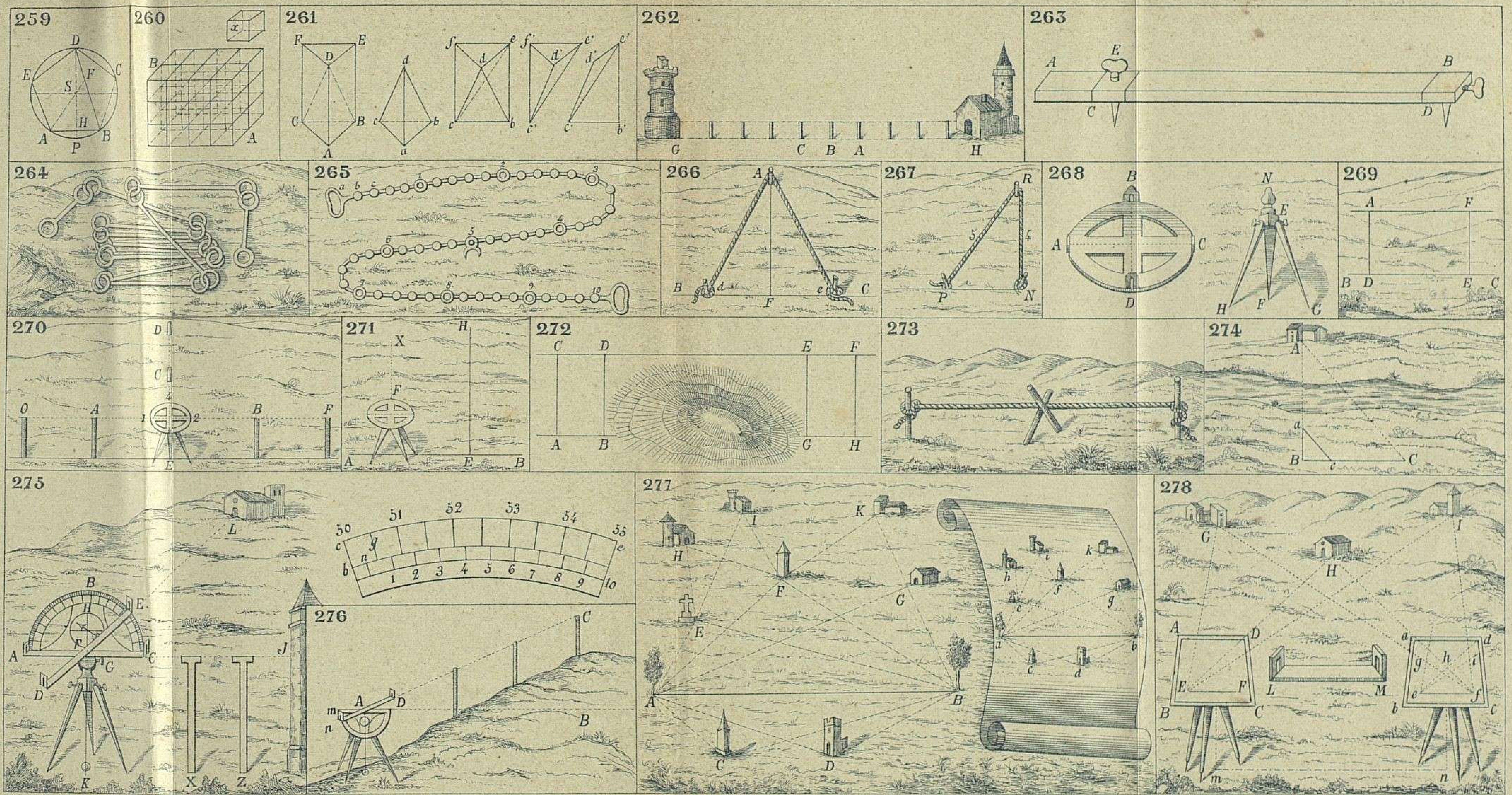
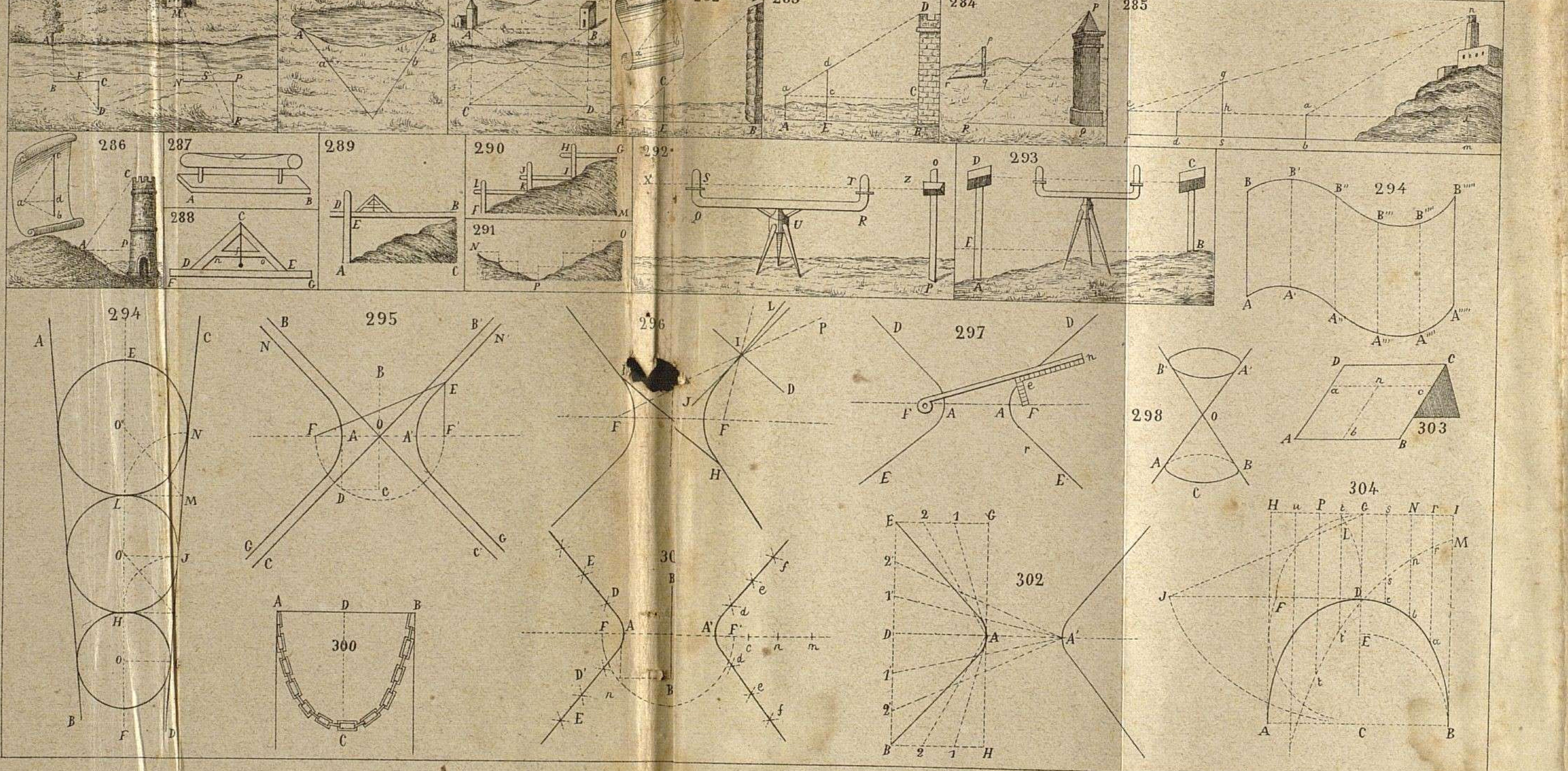

259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278

Lámina 9ª


279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
294
295
296
297
298
300
302
303
304

Giró

DIBUJO LINEAL

1ª. PARTE