Extrait du journal *L'INDUSTRIE TEXTILE* du 15 Mars 1891 (Septième année. — N° 75).

ÉTUDE THÉORIQUE

SUR LA

CONSTRUCTION DES SATINS

RÉGULIERS ET IRRÉGULIERS

PAR

F. MATTOZO SANTOS

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET A L'INSTITUT INDUSTRIEL ET COMMERCIAL
DE LISBONNE
INSPECTEUR GÉNÉRAL DU SERVICE TECHNIQUE DES DOUANES DU PORTUGAL

PARIS
BAUDRY & C^ie^, LIBRAIRES-ÉDITEURS
15, rue des Saints-Pères.

LISBOA
M. GOMES, LIVREIRO-EDITOR
70, Rua Garrett (Chiado) 72.

1891

Extrait du journal *L'INDUSTRIE TEXTILE* du 15 Mars 1891 (Septième année. — N° 75).

ÉTUDE THÉORIQUE

SUR LA

CONSTRUCTION DES SATINS

RÉGULIERS ET IRRÉGULIERS

PAR

F. MATTOZO SANTOS

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET A L'INSTITUT INDUSTRIEL ET COMMERCIAL
DE LISBONNE
INSPECTEUR GÉNÉRAL DU SERVICE TECHNIQUE DES DOUANES DU PORTUGAL

PARIS
BAUDRY & C^ie, LIBRAIRES-ÉDITEURS
15, rue des Saints-Pères.

LISBOA
M. GOMES, LIVREIRO-EDITOR
70, Rua Garrett (Chiado) 72.

1891

ÉTUDE THÉORIQUE

SUR LA

CONSTRUCTION DES SATINS

L'Étude qui suit m'a été inspirée par la lecture des travaux de M. Ed. Gand sur la construction des satins.

Aussi bien dans son travail publié par le *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens* (t. XVI, p. 57) que dans son *Cours de tissage*, le savant professeur indique la manière dont on peut *appliquer le calcul à la construction des satins*, de façon à éviter de longs, ennuyeux et tant de fois infructueux tâtonnements.

Préoccupé cependant surtout du côté pratique, ou mieux de l'application de sa méthode, M. Ed. Gand ne nous en donne pas une théorie assez générale qui puisse guider, en toute connaissance de cause, pour la solution de maints problèmes qui se présentent au sujet de la mise en carte des satins, ni qui puisse expliquer le pourquoi des procédés employés.

C'est donc la théorie de la méthode pour la construction des satins présentée par le distingué professeur d'Amiens que j'ai essayé d'établir.

Satins réguliers

I

Dans les satins, le côté qui fait *face d'endroit* présente tantôt un aspect éclatant et glacé, tantôt une apparence de velouté.

Ces effets sont dus, en dehors de la grande concentration et de la réduction serrée des fils de l'élément du tissu (chaîne ou trame) qui doit apparaître sur la *face d'endroit*, à la manière tout à fait particulière selon laquelle s'effectuent les croisements. « Chaque point de liage doit, autant que possible, être disposé suivant un rapport d'éloignement tel, qu'aucun sillon rappelant ou simulant une diagonale, plus ou moins inclinée, n'apparaisse sur la face d'endroit du tissu. » (Ed. Gand, *Cour de tissage*, t. I, p. 36.) Il en résulte que tantôt la trame, tantôt la chaîne (selon qu'il s'agit d'un satin par effet de chaîne ou par effet de trame), est recouverte dans sa plus grande extension par l'autre des éléments, chaîne ou trame.

Le *décochement*, c'est-à-dire l'avance ou le recul des insertions de la trame sur les fils de la chaîne, ne se fait pas *un à un* suivant une diagonale suivie; chaque point de liage n'est donc plus diagonalement voisin du point de liage qui le suit, ni de celui qui le précède, comme cela arrive pour les autres armures fondamentales : la *toile*, le *batavia*, le *sergé*. Le *décochement* dans les satins est pour ainsi dire *sauté*; ces *sauts* cependant maintiennent entre eux, pour chaque armure satin, des écartements obéissant à des lois qu'il est possible de traduire par des formules algébriques très simples.

J'appellerai MODULE le nombre qui correspond au rapport de l'armure, c'est-à-dire au nombre de fils commandant le nombre absolu de cases que, pour la mise en carte du tissu à exécuter, exige la *course* ou le *duitage* de l'armure.

Or comme « dans toutes les armures fondamentales, et même dans leurs dérivés réguliers, le rapport longitudinal contient autant de duites que le rapport transversal exige de fils de chaîne » (Ed. Gand, *l. c.*, p. 26), le chiffre désignant le module indiquera en même temps le nombre de cases que doit avoir de côtés le papier quadrillé pour qu'on y puisse inscrire le bref du satin voulu. Ainsi, quand je dis un satin module 13, 17, etc., ou simplement un satin de 13, 17, etc., cela veut dire que la mise en carte de ces satins exigera un échiquier de 13, 17, etc., cases de côtés.

Voyons maintenant quel est le mode de dissémination du pointé dans des armures de satin connues.

Dans le tableau suivant, j'indique pour chaque fil de chaîne (colonne C) le numéro d'ordre (colonne T) des duites qui ont avec ces fils de satin des points de liage, dans trois *brefs* de satin : deux satins de 13 (fig. 1, A■, ×) et un satin de 8 (fig. 1, B) :

SATIN DE 13 — INDICE 5.			SATIN DE 13 — INDICE 3			SATIN DE 8 — INDICE 3		
C	*T*	*E*	*C*	*T*	*E*	*C*	*T*	*E*
1	1	1.	1	1	1.	1	1	1.
2	6	6.	2	4	4.	2	4	4.
3	11	11.	3	7	7.	3	7	7.
4	3	16=13+*3*.	4	10	10.	4	2	10=8+*2*.
5	8	21=13+*8*.	5	13	13.	5	5	13=8+*5*.
6	13	26=13+*13*.	6	3	16=13+*3*.	6	8	16=8+*8*.
7	5	31=13×2+*5*.	7	6	19=13+*6*.	7	3	19=8×2+*3*.
8	10	36=13×2+*10*.	8	9	22=13+*9*.	8	6	22=8×2+*6*.
9	2	41=13×3+*2*.	9	12	25=13+*12*.			
10	7	46=13×3+*7*.	10	2	28=13×2+*2*.			
11	12	51=13×3+*12*.	11	5	31=13×2+*5*.			
12	4	56=13×4+*4*.	12	8	34=13×2+*8*.			
13	9	61=13×4+*9*.	13	11	37=13×2+*11*.			

De l'examen de la colonne E de ce tableau on déduit que, quel que soit le module, la distribution des points sur les fils contigus d'un des éléments du tissu (chaîne ou trame) s'effectue à des distances qui, comptées en fils de l'autre élément, sont numériquement représentées par les termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est l'unité, tandis que la raison est variable pour chaque armure.

Pour les termes de cette progression dont la valeur dépasse le nombre de cases du module, la hauteur des points de liage, ou, d'une manière générale, la distance de ces points à la *rangée origine*, est donnée par le reste de la division de ce terme par le module ou un multiple du module.

J'appellerai INDICE la raison de la progression arithmétique correspondante à chaque armure.

Donc dans un satin de module m et indice i, a désignant la hauteur d'un point de liage, cette hauteur prise en fils d'un des éléments du tissu sera pour le fil n de l'autre élément donnée par

$$a = 1 + i\,(n-1) \ldots\ldots \quad (1)$$

ou d'une manière générale :

$$a = 1 + i\,(n-1) - km \quad (2)$$

k pouvant être égal à 0.

De (2)

$$n=\frac{km+a+i-1}{i}\ \ldots\ldots (3),$$

$$m=\frac{i\,(n-1)+1-a}{k}\ \ldots\ldots (4),$$

$$i=\frac{km+a-1}{n-1}\ \ldots\ldots (5),$$

formules qui seraient tout à fait indéterminées, k n'étant pas connu, si les valeurs de cette inconnue n'étaient elles-mêmes limitées par deux conditions, à savoir : donner pour a, n et i des valeurs *entières* et *inférieures* à m. Un satin sera donc complètement défini dès qu'on connaîtra son *module* et son *indice*. En effet, rien alors de plus simple que sa mise en carte.

On place un point initial de liage (1, ■, fig. A et B, *a*) *sur la première rangée, ce qui correspond à une insertion de la duite 1 avec le fil 1, si on représente, comme on le fait ordinairement, par les interlignes verticaux du papier quadrillé les fils de chaîne, et par les interlignes horizontaux les duites. Il suffit de remonter sur la seconde rangée verticale, à partir de la seconde rangée horizontale, un nombre de cases égal au nombre exprimant l'indice pour tomber sur la case qui devra être également pointée* ($1+i$, second terme de la progression). *Continuant ainsi jusqu'à la dernière rangée verticale du module, on aura tous les points du satin.* Ces points seront successivement à des hauteurs respectives $1+i, 1+2i, 1+3i\ldots 1+ni$, termes de la progression arithmétique dont le premier terme est l'unité et la raison i.

Il peut arriver que la valeur des termes de la progression arithmétique ci-dessus nous conduise hors du module (fig. 1 A et B, *e*). Dans ce cas, pour compléter l'indice, il suffit *de prendre sur l'extrémité opposée de la rangée où l'on aboutit un nombre de cases égal à celles qui font défaut sur l'autre extrémité* (fig. 1, A et B, *c*), *ayant soin, il va sans dire, de les compter en dedans du module* ($k=1$, $a=1+i\,(n-1)-m$). Mais de la formule (2) on tire encore $a+km=1+i\,(n-1)$, c'est-à-dire que si, à partir d'un fil quelconque où il se trouve un point de liage, on compte un nombre de cases égal au module lui-même ou à un multiple du module, on tombera sur d'autres points de liage. Donc :

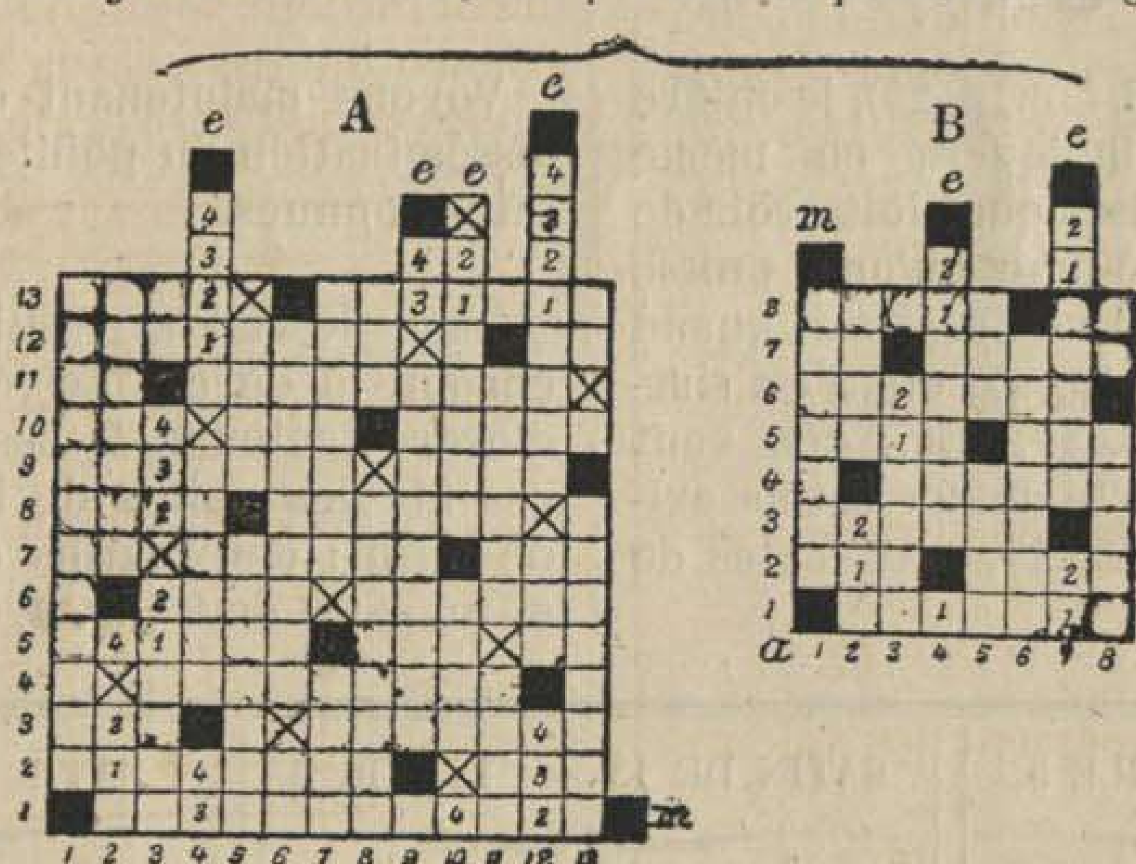

Fig. 1.

1^er^ PRINCIPE. — *Dans un satin, si au nombre de fils qui séparent deux liages existant sur un même fil on ajoute* 1, *on aura le chiffre exprimant le module.*

Selon le mode de construction qui se déduit naturellement des formules ci-dessus, l'indice indique de combien de cases il faut *remonter*, ou en général *avancer* sur un fil donné à partir du liage inscrit sur le fil immédiatement antérieur pour trouver le liage correspondant au premier de ces fils. L'*indice* fait donc connaître ce que M. Gand appelle *mode d'ascension du pointé*, mais qu'il serait, à mon avis, plus exact d'appeler *mode d'avancement du pointé*, parce que l'écartement des liages peut être pris verticalement ou horizontalement, c'est-à-dire (dans le sens de la chaîne) en nombre de duites ou (dans le sens de la trame) en nombre de fils de chaîne.

Afin de mieux distinguer ces deux manières possibles d'indiquer pour une même armure satin l'*avancement du pointé*, je désignerai la première par l'expression *indice-chaîne* ou simplement *indice*, et la seconde par le terme *indice-trame*. Alors le principe suivant va de soi :

2^e^ PRINCIPE. — *Le bref d'un satin* indice-trame *donné est équivalent au bref du satin* de l'indice-chaîne *qui correspond à cet* indice-trame.

En effet, il suffit de faire tourner les brefs de la figure 1 d'un arc de 90 degrés, ou, ce qui revient au même, de changer la position des éléments du tissu ou d'intervertir leurs fonctions pour transformer *l'indice-trame* en *indice-chaîne* ou *vice versa*.

De la condition qu'à l'intérieur du module les points de liage doivent être un seul sur chaque fil et qu'il doit en exister un sur chacun, il découle le

3^e^ PRINCIPE. — Le chiffre qui exprime l'indice d'un satin doit être un nombre premier relativement à celui qui exprime le module.

La démonstration en est facile. Pour $a=1$ (3) $n=\frac{km}{i}+1$. Si $i=ps$ et $m=qs$, c'est-à-dire si n et i avaient un facteur commun s, il serait toujours possible de rendre $km=kqs$ divisible par ps, il suffirait de faire $k=p$. Alors $\frac{pqs}{ps}=q$ et $n=q+1$. Il y aurait donc pour $a=1$, deux valeurs de n; $n=1$ et $n=q+1$. Si m divisible par i, le quotient de $\frac{km}{i}$ sera un nombre entier, quelle que soit la valeur de k, donc plus d'une valeur possible pour n à l'intérieur du module.

Il va de soi que, pour un satin d'indice donné, la dissémination des points ne sera pas changée si, au lieu de prendre cet indice, on prend pour *avancement* du pointé la différence entre le module et l'indice donné.

4^e^ PRINCIPE. — L'indice d'un satin peut toujours s'exprimer par un des nombres compris dans la moitié du module si celui-ci est pair, ou dans la moitié du nombre pair immédiatement inférieur au module si celui-ci est impair.

Ces principes qui, pour ainsi dire, caractérisent les satins une fois établis, employons les formules précédentes à la solution de quelques problèmes.

Supposons qu'en décomposant un satin on a trouvé que deux points de liage appartenant à une même duite quelconque sont séparés par 20 fils-chaîne (fig. 2, *a* et *b*), et qu'il y a

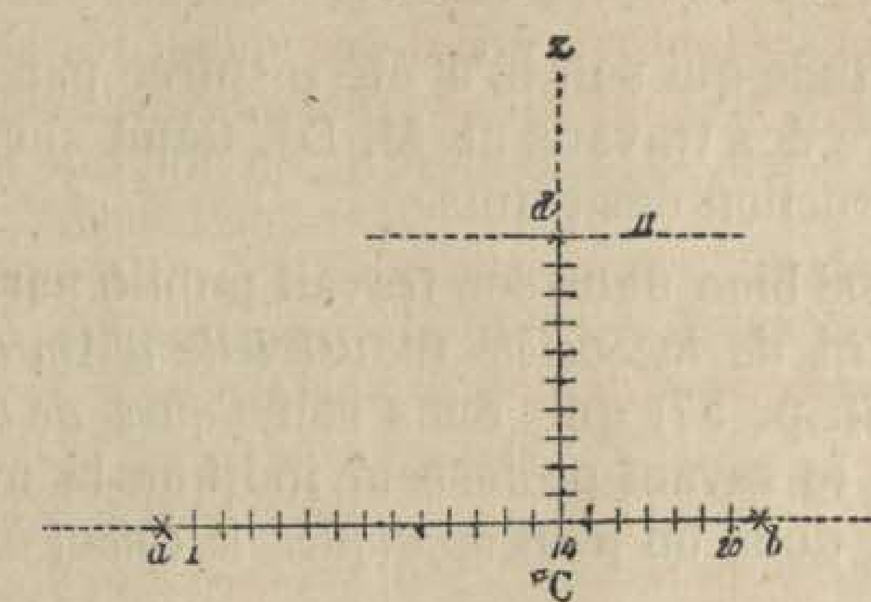

Fig. 2.

un croisement du fil-chaîne 14 (*cz*) compté depuis l'un des points de liage trouvés (*a*), avec la onzième duite (*d*), à partir de celle sur laquelle on a vérifié l'éloignement de deux liages (*a* et *b*).

Quel est l'indice de ce satin?

$m=21$ (1^er^ principe), $a=11$, $n=14$, donc (4)

$$i=\frac{21k+11-1}{13}=\frac{1\times21+11-1}{13}=4,\ldots k=2$$

Quel est l'indice-trame pour le satin 21, indice-chaîne 4?

Il suffit de faire permuter les valeurs de a et n. Nous avions $a=11$ et $n=14$; mettons $a=14$ et $n=11$, et cherchons i.

$$i=\frac{21k+14-1}{10}=\frac{21\times7+13}{16}=16\ldots k=7$$

ou (4^e^ principe) $21-16=5$;

donc $i_o=4$, $i_t=5$.

On arriverait au même résultat en cherchant la valeur de n pour $a=2$, c'est-à-dire

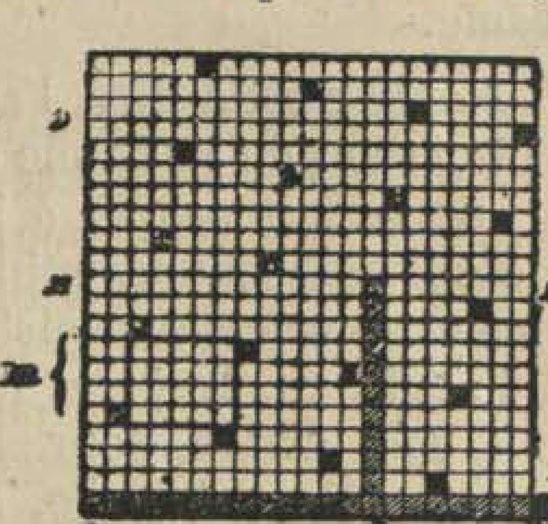

Fig. 3.

la valeur du second terme $(1+i)$ de la progression correspondante à ce satin (3).

$$n=\frac{21k+2+4-1}{4}=\frac{21\times3+4+1}{4}=17=i+1,$$

d'où (4^e^ principe) $i=16$ ou $21-16=5$.

Une fois l'indice-chaîne connu, l'indice-trame pourra être aussi déterminé en cherchant l'écartement de deux points de liage sur deux duites contiguës. Nous avons déjà $a=2$, $n=17$, cherchons n pour $a=3$,

$$(3)\ n=\frac{21\times2+2}{4}+1=12;\ \text{donc}\ a=3, n=12,$$

différence, ou éloignement des points sur deux duites contiguës, ou encore *avancement du pointé* dans le sens de la trame égale à 5.

La position de trois points d'un satin, dont deux sur le même fil, étant connue, on pourra pourtant trouver tous les éléments nécessaires pour la construction de ce satin.

Il devient évident que s'il est vrai que les différentes valeurs de k peuvent donner plus d'une valeur satisfaisant au problème, quand trois des quatre quantités m, i, a et n étant déjà connues, on cherche la quatrième, il est vrai aussi, à plus forte raison, qu'il y aura de même plus d'une solution satisfaisant aux conditions établies, quand des quantités ci-dessus on ne connaît que deux. Ainsi, soit $n=9$ et $a=5$, et je suppose qu'on cherche m et i, ce qui veut dire : — *Dans quels modules et avec quels indices pourra-t-on construire des satins où il y aura une insertion de la duite 5 avec le fil 9 ou vice versa?*

De (4) on tire $m=\frac{8i-4}{k}$; i devant être premier avec m et $m =$ ou > 9, vu que $n=9$.

Satisferont à cette égalité et à ces conditions jusqu'au module 30, les modules et indices suivants :

Module 10.....	Indice 3.....	k=2
— 14.....	— 4.....	k=2
— 12.....	— 5.....	k=3
— 9.....	— 5.....	k=2
— 22.....	— 6.....	k=4
— 11.....	— 6.....	k=4
— 26.....	— 7.....	k=2
— 30.....	— 8.....	k=2
— 20.....	— 8.....	k=3
— 15.....	— 8.....	k=4
— 12.....	— 8.....	k=5
— 10.....	— 8.....	k=6

Les satins $m=9$, $i=5$; $m=11$, $i=6$, et $m=15$, $i=8$ dans lesquels l'indice est supérieur à la moitié des modules correspondants (4e principe), équivalent aux satins $m=9$, $i=2$; $m=15$, $i=2$.

En effet, pour $a=2$ (3)

$$\left.\begin{aligned} n&=\frac{9k+6}{5}=3 \\ n&=\frac{11k+7}{6}=3 \\ n&=\frac{15k+9}{8}=3 \end{aligned}\right\} \ldots k=1$$

Ce qui revient à dire qu'il y aura un point de liage du fil 2 de l'un des éléments du tissu avec le fil 3 de l'autre de ces éléments, c'est-à-dire que le second terme de la progression correspondante à ce satin est $1+i=3$; donc $i=2$. Des autres modules et indices ci-dessus indiqués, $m=14$, $i=4$; $m=22$, $i=6$; $m=30$, $i=8$; $m=20$, $i=8$; $m=12$, $i=8$; $m=10$, $i=8$, ne donnent pas de satins; les indices ayant des diviseurs communs avec les modules (3e principe) (1).

(1) En effet, pour ces modules et indices il y aurait deux points de liage sur le même fil : Ainsi pour $a=1$.

Un point sur $n=1$, et pour

$$\left\{\begin{array}{lll} m=14, i=4, & \text{autre sur } n=8 : & n=\frac{14\,k}{4}+1=8 : k=2 \\ m=22, i=6 & — & n=12 : n=\frac{22\,k}{6}+1=12 : k=3 \\ m=30, i=6 & — & n=16 : n=\frac{30\,k}{6}+1=16 : k=4 \\ m=20, i=8 & — & n=6 : n=\frac{20\,k}{8}+1=6 : k=2 \\ m=12, i=8 & — & n=4 : n=\frac{12\,k}{8}+1=4 : k=2 \\ m=10, i=8 & — & n=6 : n=\frac{10\,k}{8}+1=6 : k=4 \end{array}\right.$$

Encore pour $m=14$, $i=4$, il n'y aurait pas de valeur satisfaisant à $a=2$, ce qui veut dire qu'il n'existerait pas d'insertion de $a=2$ avec aucun fil de l'autre élément du tissu.

Des 12 valeurs indiquées restent donc 6. Jusqu'au module 30, il ne sera par conséquent possible de construire que 6 satins dans lesquels se réalisent les conditions voulues : $n=9$ et $a=5$. Ce sont :

$m=9$, $i=2$	$m=12$, $i=5$
$m=10$, $i=3$ (carré)	$m=15$, $i=2$
$m=11$, $i=2$	$m=26$, $i=7$

On voit par cet exemple comment, avec les précédentes formules, il est possible d'arriver et à connaître la réductibilité des satins et à démontrer la possibilité ou non de construire un satin dans un module et avec un indice donnés.

Un autre exemple encore plus démonstratif :

On désire connaître tous les indices avec lesquels on peut construire des satins de 36?

D'abord (3e et 4e principes), les indices cherchés doivent être premiers avec le module et être compris dans la moitié du nombre qui le représente. On aura donc comme seuls indices possibles les chiffres 5, 7, 11, 13 et 17.

En effet, 36 est divisible par 2, 3, 4, 6, 9, 12 et 18, et il a des diviseurs communs avec 8, 10, 14, 15 et 16 (1).

Les indices 7 et 13 équivalent aux indices 5 et 11.

Pour les premiers indices, on aura :

Indice 7......... $n=2$, $a=8$
— 13........ $n=2$, $a=14$.

Si l'on change réciproquement les valeurs de a et n, on trouvera :

Indice 7... $i=\frac{36k+2-1}{7}=\frac{36\times6+1}{7}=31$,

ou $36-31=5$.

Indice 13.. $i=\frac{36k+2-1}{13}=\frac{37\times9+1}{13}=25$,

ou $36-25=11$.

Suivant la même méthode on obtiendra pour l'indice 17 :

$$i=\frac{36k+2-1}{17}=\frac{36\times8+1}{17}=17.$$

On arrive ainsi à constater que pour un satin module 36, il n'y a que 3 indices ou possibles, ou donnant des satins distincts pour ce qui regarde le pointé : ce sont les indices 5, 11 et 17.

Je pourrais multiplier les exemples; ceux que je viens de présenter suffiront, je pense, pour montrer la manière dont on peut se servir des formules ci-dessus énoncées, dans les différentes hypothèses qui peuvent se présenter.

(1) Ces derniers chiffres pris comme indices donneraient deux valeurs pour n quand $a=1$:

$$n=1,\ \text{et}\left\{\begin{aligned} n&=\frac{36\times2}{8}+1=10 \\ n&=\frac{36\times5}{10}+1=19 \\ n&=\frac{36\times7}{14}+1=19 \\ n&=\frac{36\times5}{15}+1=13 \\ n&=\frac{36\times4}{16}+1=10 \end{aligned}\right.$$

II

Il y a des satins dans lesquels la dissémination du pointé s'éloigne de toute tendance à la diagonale, et dans lesquels aussi la distribution des liages est d'une admirable régularité. Je veux parler des satins que M. Ed. Gand nomme *satins carrés*.

« J'appelle ainsi (satins carrés) les satins dont les points de liage sont répartis de telle sorte qu'entre quatre points voisins on peut inscrire un carré parfait (*mnor*, fig. 4) tandis que dans les autres satins on peut, entre quatre de leurs points, inscrire des rectangles plus ou moins allongés. » (Fig. 3.) Dans ces satins carrés, « la marche du pointé étant, dans le sens des duites, la même que dans le sens des fils, il s'ensuit que les écarts entre toutes sont égaux dans quelque sens qu'on envisage le décochement des liages. Les tissus qui résultent de cet arrangement harmonique des liages sont parfaits comme satin. » (Ed. Gand, *Cours de tissage*, t. I, p. 41 et 42.)

Dans les satins carrés, on pourra pourtant inscrire autant de carrés ayant de côté l'écartement de deux points qu'il y a de points dans l'armure du tissu, et la somme des aires de ces carrés doit être égale à l'aire de l'armure,

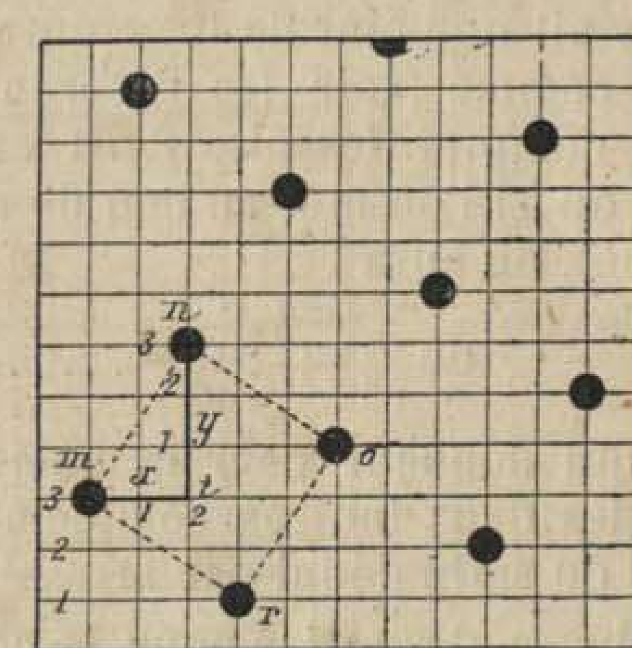

FIG. 4.

c'est-à-dire à la surface d'un carré ayant de côté le module.

Supposons Oxy, figure 5, l'aire de l'armure d'un satin de module m. Cette aire sera égale à m^2. Soit ab l'éloignement de deux points de liage voisins, a et b, on aura

$$\overline{ab}^2=\overline{as}^2+\overline{bs}^2$$

mais si ab mesurait l'écart de deux points d'un satin carré, il serait le côté d'un des m carrés dont la somme devrait être égale à m^2. L'aire de chacun de ces carrés serait donc $\frac{m^2}{m}=m$, d'où $ab=\sqrt{m}$ et $\overline{ab}^2=m=\overline{as}^2+\overline{sb}^2$

ou d'une manière générale

$$m=x^2+y^2 \ldots\ldots (6)$$

Il s'ensuit que « lorsque le module ou nombre qui représente la base d'un satin est la somme des carrés de deux nombres, soit premiers absolus, soit premiers entre eux, et conséquemment premiers avec le module lui-même, ce module est celui d'un satin carré, nonobstant les autres modes de construction que ce satin est susceptible de recevoir ». (Ed. Gand, *Cours de tissage*, t. I, p. 42.)

Les deux quantités x et y indiquent : la première, le nombre de fils de trame ($x'x''$, fig. 5); la seconde, le nombre de duites ($y'y''$) ou *vice versa*, qui mesurent l'éloignement dans le sens de la chaîne et dans le sens de la trame, ou inversement de deux points appartenant au carré de côté ab (1). De là un mode de construction de ces satins qui est celui indiqué sur la figure 4.

A partir de la première ligne ou case à gauche du module on compte x *lignes ou cases horizontales* (fig. 4), *ensuite on remonte de* y *lignes ou cases verticales et on marque un point* m, *puis de ce point* m *on compte de même* x *lignes ou cases à droite, et en remontant ensuite de* y *lignes ou cases on tombera sur un second point de liage et ainsi de suite.*

On peut, en employant le mode de construction que j'ai indiqué plus haut pour les satins en général, arriver à une répartition des points analogue à celle qu'on obtient avec le mode de construction spécial que je viens de décrire; il suffira de se rappeler :

1° Que le premier terme de la progression arithmétique antérieurement considérée recule d'une unité, vu que *le point de liage origine* est hors du module. Il en résulte que n compté sur ox à partir de O correspond au terme $n+1$ de la progression. Donc (5) $i=\frac{km+a-1}{n-1}$ se transforme en $i=\frac{km+a-1}{n}$... (7)

2° Que a et n doivent satisfaire à la condition qu'il y ait un point de liage entre les fils x et y, et comme (voir les différentes manières de compter les fils, fig. 1 et fig. 4) $y=a-1$, ou si l'on met au lieu de a, $m-a$ (4ᵉ principe), on aura

$$i_1=\frac{km+y}{x} \text{ ou } i_2=\frac{km-y}{x} \ldots\ldots (8)$$

formules qui donnent pour la même valeur de y et x les deux indices complémentaires $i_1+i_2=m$ du satin défini par $m=x^2+y^2$.

Mais les brefs des satins pour la construction desquels on prendra pour x la valeur de y, ou *vice versa*, étant évidemment équivalents, les formules (8) peuvent s'écrire

$$i=\frac{km \pm y \text{ ou } x}{x \text{ ou } y} \ldots\ldots (9)$$

d'où

$$km=ix \text{ ou } iy \mp y \text{ ou } x$$

ou

$$\frac{km}{i}=x \text{ ou } y \mp \frac{y \text{ ou } x}{i} \ldots\ldots (10)$$

Abstraction faite des signes + et —, qui servent seulement à indiquer le sens dans lequel on envisage le décochement des liages, des formules précédentes (9 et 10) on conclut :

Qu'un satin défini par $m=x^2+y^2$ *étant donné, si l'on ajoute à son* module *ou à un multiple de son module la valeur de* x *ou* y, *et si l'on divise le nombre ainsi obtenu par* y *ou* x, *en prenant le* quotient *pour* indice *on pourra construire ce satin par la méthode ordinaire que j'ai précédemment indiquée;*

Que le module et l'indice d'un satin carré étant donnés, *si l'on divise* le module par l'indice, *on obtiendra au quotient et au reste les deux nombres dont la somme des deuxièmes puissances* est égale au module;

Que pourtant, *dans un satin quelconque, si le* module *divisé par* l'indice *donne un* quotient *et un* reste *dont la somme des deuxièmes puissances est égale au module, ce satin est un* satin carré.

Ainsi, le satin carré $m=29$, $x=2$, $y=5$, équivaut au satin défini par $m=29$, $i=12$. De (8) et 4ᵉ principe

$$i_1=\frac{29k+2}{5}=12\ldots\ldots k=2$$

$$i_2=\frac{29k-2}{5}=17\ldots\ldots k=3$$

et inversement le satin de 34, $i=13$ est un satin carré $m=34$, $x=5$, $y=3$.

$$\frac{34}{13}=2+\frac{8}{13},\quad 2^2+8^2=68=34\times 2$$

d'où

$$\frac{2m}{i}=\frac{34\times 2}{13}=5+\frac{3}{13}$$

Un autre exemple encore : le satin $m=13$, $x=2$, $y=3$ est équivalent au satin

$$m=13,\ i_1=\frac{13+2}{5}=5,\ \text{et } i_2=\frac{26-2}{3}=8,$$

ce qu'on peut vérifier sur la figure 4.

Pour les satins carrés construits selon la formule (6) (fig. 4 et 5), on peut déterminer,

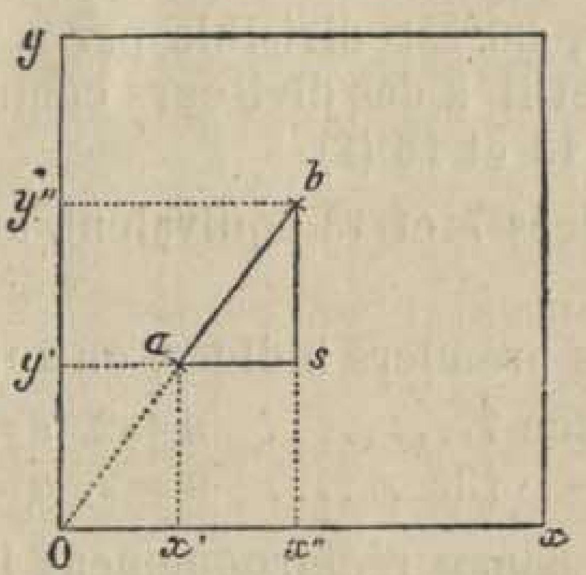

Fig. 5.

même sans en connaître l'indice correspondant, quelle est la hauteur prise sur oy (fig. 5), ou la distance prise sur ox à laquelle tombera un point de liage dans un satin dont les valeurs de m, x et y sont connues.

Des deux égalités suivantes, déduites des deux progressions arithmétiques correspondantes aux deux raisons x et y, on obtient les formules (11) qui résolvent le problème, et dans lesquelles je représente par d les distances comptées sur ox et par h les hauteurs comptées sur oy (fig. 5)

$$(y+1)+y(n-1)=1+ny=h\ldots\ldots (11)$$

$$x+x(n-1)=nx=km+d\ldots\ldots (11a)$$

$$\text{ou } n=\frac{km+d}{x} \text{ d'où } (11)$$

$$h=1+\frac{km+d}{x}y\ldots\ldots (12)$$

De la formule 12 on tire

$$d=\frac{h-1}{y}x-km$$

mais comme il peut arriver que $(h-1)\,x$ ne soit pas divisible par y ou que $\frac{(h-1)x}{y}$ soit inférieur à m, et que, dans l'un ou l'autre de ces cas, ou dans les deux à la fois, il faudra ajouter à la valeur de h autant de fois le module qu'il sera nécessaire pour rendre $(h-1)x$ divisible par y ou $\frac{(h-1)x}{y}>m$, ce qui, on le sait, n'altère point les conditions du problème, il sera donc mieux d'écrire la valeur de d

$$d=\frac{k'm+h-1}{y}x-km\ldots\ldots (13)$$

Dans un satin m = 25, x = 4 et y = 3, *à quelle hauteur du fil 7 chaine y a-t-il une insertion de la trame?* (12)

$$1+\frac{3(25+7)}{4}=25$$

sur la dernière duite.

Dans le même satin, à quelle distance sur la duite 21 y a-t-il un point de liage? (13)

$$\frac{25+21-1}{3}\times 4-25k=\frac{45}{3}\times 4-25k$$
$$=60-(2\times 25)=10.$$

Dans le tableau suivant on peut voir l'exactitude des résultats trouvés, et en même temps saisir la déduction des formules précédentes (11) et (11a) :

$(m=25,\ x=4,\ y=3) =$

Termes de la progression.	Numéro d'ordre des fils. Chaîne x.	Trame y.	Termes de la progression.	Numéro d'ordre des fils. Chaîne x.	Trame y.	Termes de la progression.	Numéro d'ordre des fils. Chaîne x.	Trame y.
1	4	4	9	11	3	17	18	2
2	8	7	10	15	6	18	22	5
3	12	10	11	19	9	19	1	8
4	16	13	12	23	12	20	5	11
5	20	16	13	2	15	21	9	14
6	24	19	14	6	18	22	13	17
7	3	22	15	10	21	23	17	20
8	7	25	16	14	24	24	21	23
						25	25	1

De la formule (12) on déduira, cela va sans dire, la valeur de quelqu'une des quantités x, y et m, la valeur des autres étant connue.

Le 3ᵉ principe étant applicable aux satins carrés, il s'ensuit que pour $x=y$, aucun de ces satins ne pourra être inscrit dans le module m.

III.

J'appelle *satins composés* l'amalgame de deux satins de module différent, mais pour lesquels il est possible de trouver une répartition telle du pointé que jamais un liage d'un des satins ne rencontre un liage de l'autre.

Les formules antérieures vont nous per-

(1) M. Ed. Gand, qui présenta pour la première fois la formule (6) ci-dessus, dans une note publiée par le *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens*, t. IV, n'en donne pas cependant la déduction.

mettre encore de résoudre ce problème en nous faisant connaître d'une manière générale quelles sont les valeurs de a et n communes aux satins de modules m et m_1, indices i et i_1.

Nous avons (3)

$$\left.\begin{array}{l} km+a+i-1=ni \\ km_1+a+i_1-1=ni_1 \end{array}\right\} \ldots\ldots (14)$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} n=\dfrac{k(m-m_1)+i-i_1}{i-i_1}=\dfrac{k(m-m_1)}{i-i_1}+1 \\ \text{et} \\ a=1+i(n-1)-km \end{array}\right\} \ldots (15)$$

Ces deux valeurs (15) de a et n sont donc communes aux deux satins considérés, ce qui veut dire que ces valeurs de a et n nous feront connaître la distribution du pointé sur la carte du satin de plus petit module, si l'on prend le pointé du satin de plus grand module et si on le rapporte sur la carte du plus petit.

On pourra donc construire avec (15), $k=1$, une carte synthétique comprise dans le module du satin le moins large et qui soit le résumé du pointé du plus large.

Si, ce résumé correspond à un satin qu'il soit possible d'inscrire, en partie, dans la carte du satin du plus petit module, il n'y aura pas évidemment de rencontre des liages des deux satins, quel que soit le point de départ donné au satin de plus grand module sur les *laissés* de l'autre.

Je choisirai comme exemple, pour l'application des formules que je viens d'indiquer, un problème présenté par M. Ed. Gand (*Bulletin de la Société industrielle d'Amiens*, t. IV, p. 86).

Le tissu que nous voulons exécuter est, je suppose, lié en satin de 5. La face d'endroit se fait par la trame. Quatre fils restent conséquemment sous l'étoffe à chaque passé des duites, celles-ci n'étant liées que par un cinquième fil.

Nous avons un second lat *d'une trame faisant un dessin de couleur rouge, je suppose. Nous voulons lier ce* lat *en-dessous tous les 25 fils de chaîne, c'est-à-dire par un satin 25 (24 pris, 1 laissé). Le laissé devra toujours être l'un des quatre fils laissés déjà dans le satin de 5 du fond.*

On demande comment on reconnaîtra quel est celui ou quels sont ceux des trois larges satins de 25 dont les points de liage pourront voyager de conserve avec ceux du satin 5, sans que jamais un des liages rouges rencontre un liage du fond, ce qui compromettrait le travail, puisque le liage du fond est toujours *pris*, tandis que le liage d'une duite est ici toujours *laissé*.

Je prendrai aussi les trois indices de satins de 25 qui sont indiqués par M. Ed. Gand : les indices 2, 4 et 7 (satin carré : $x=3$, $y=4$).

Pour ceux de ces indices qui sont inférieurs au plus petit module, il n'y aura pas possibilité de rencontre des liages des deux satins combinés, du moment qu'on pourra avec ces indices-là construire des satins dans le moins large module.

Ainsi pour : $m=25$, $i=2$ et $m_1=5$, $i_1=2$ la formule 5 nous donne :

$$n=\frac{20}{23-3}+1=2, \text{ d'où } a=1+3\ (2-1)=4$$

et $i=3$ ou (4e principe) $i=2$, indice d'un satin de 5.

Pour $m=25$, $i=4$ et $m_1=5$, $i_1=2$, on aura au contraire $n=1$ et $a=1$, ce qui veut dire que dans la combinaison de ces satins il n'y a d'autre liage qui soit commun aux deux satins donnés que $n=1$ et $a=1$, ou, ce qui revient au même, que le pointé du satin de 25 indice 4, rapporté sur le satin de 5, ne donne une dissémination des points qui soit correspondante à un satin de ce dernier module.

En effet, si on cherche avec quelle duite s'effectue le croisement sur le fil de chaîne 2 dans le satin de 25 indice 4, on trouve :

$$a=1+(2-1)=5$$

ce qui pour le satin de 5 donnerait

$$I=4, \text{ et (4e principe) } I_1=1$$

c'est-à-dire un pointé dont le *décochement* serait *un à un*, chaque croisement se répétant sur chaque fil de 5 en 5 fils, dont un sergé de 4 — *le* — 5.

Pour l'indice 7 : $n=4$ et $a=2$, d'où $i=2$.

Voyons encore un autre exemple :

On désire combiner, dans les mêmes conditions que, pour l'exemple ci-dessus, un satin de 8 avec un satin de 36.

Nous avons trouvé plus haut comme indices donnant des satins distincts dans le module 36 les chiffres 5, 11 et 17 :

$$\text{pour } m=36,\ i=5 \text{ et } m_1=8,\ I_1=3$$

$$n=\frac{28}{2}+1,\ 15-8=7;\ a=3 \text{ et } I_1=3$$

$$\text{pour } m=36,\ i=11 \text{ et } m_1=8,\ i_1=3$$

$$n=8,\ a=6 \text{ et } I=\frac{2\times 8+5}{7}=3$$

$$\text{pour } m=36,\ i=17 \text{ et } m_1=8,\ i_1=3$$

$$n=3,\ a=7,\ I=\frac{8+6}{2}=7 \text{ ou } I=8-7=1$$

Donc, seulement les deux premiers satins de 36 satisferont aux conditions voulues.

Des exemples et formules précédentes on déduit que si $i=i_1$ ou $m-i=i_1$, ou encore $m_1-i=i_1$, i_1 étant un indice du moins large satin, on pourra *amalgamer* les satins de module m et m_1.

Satins irréguliers

Il y a deux modules dans lesquels on ne pourra pas construire des satins en employant le procédé général basé sur *l'avancement du pointé*. Ce sont les modules 4 et 5.

En effet, pour ces modules il n'y a pas de nombre compris dans leur moitié qui soit premier avec eux, donc pas d'indice possible. Ainsi si l'on prenait pour le module 4 l'indice 2, et pour le module 6 les deux indices 2 et 3 on aurait :

$$\text{Pour } a=1\ldots.. \atop n=1 \text{ et dans} \left\{\begin{array}{l} m=4,\ i=2\ldots\ n=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ m=6,\ i=2\ldots\ n=\dfrac{6+2}{2}=4 \\ m=6,\ i=3\ldots\ n=\dfrac{6+3}{3}=3 \end{array}\right.$$

pourtant sur le même fil $a=1$ on rencontrerait deux liages écartés d'un nombre de fils inférieurs au module.

Si nous cherchons tous les points de liage de ces armures, nous aurons :

1° pour $m=4$, $i=2$

$a=1$, $n=1$ et $n=3$

$a=2$, $n=\frac{7}{2}$, pas de croisement

$a=3$, $n=4$

$a=4$, $n=\frac{9}{2}$, pas de croisement

sur $n=2$ pas de liage.

On considère cependant comme un satin de 4 une armure dont la distribution du pointé est la suivante :

$\left.\begin{array}{l} a=1,\ n=1 \\ a=2,\ n=2 \end{array}\right\}$ décochement $=1$, droite à gauche.

$a=3$, $n=4$ avanct = 2, droite à gauche.

$a=4$, $n=3$ avanct = 1, droite à gauche.

C'est donc un *sergé* de 3 — *le* — 4, avec permutation dans les duites 3 et 4. Tout se borne à *un sergé contredit*, c'est-à-dire à un pointillé dont le décochement est *un à un* et change de direction de deux en deux duites. Ce n'est pas un satin.

2° Pour $m=6$, $i=2$ et $i=3$ (5) et (1) :

$$\overbrace{a=1\ldots\ n=1 \text{ et } n=4}^{1=2}\ldots.\ \overbrace{n=2 \text{ et } n=1}^{1=2}$$

$a=2\ldots\ n=\frac{9}{2}$, pas de liage.... $n=\frac{10}{3}$, pas de liage.

$a=3\ldots\ n=2$ et $n=5$.... $n=\frac{11}{3}$ »

$a=4\ldots\ n=\frac{11}{2}$ pas de liage. $n=2$, $n=4$ et $n=6$

$a=5\ldots\ n=3$ et $n=6$.... $n=\frac{13}{3}$, pas de liage.

$a=6\ldots\ n=\frac{13}{2}$, pas de liage.... $n=\frac{14}{3}$ »

On pourra cependant obtenir une armure dont la dissémination du pointé obéisse aux conditions requises, à savoir : qu'il y ait un liage sur tous les fils et que ces liages ne soient pas contigus. Il suffit de combiner les nombres 1 à 6 de telle façon que deux valeurs de n correspondant à deux valeurs successives de a, ou *vice versa*, soient supérieures à 1, et que pour a ou n égal à 6 les valeurs de n ou a ne soient pas 2 ni 6, parce que pour $a=7$, $n=1$ et inversement.

Ces points cependant seront « jetés forcément d'une façon bizarre, sinon désordonnée ».

Voici trois séries de ces distributions :

$a=1$, $n=1$,.. 1,.. 1 $a=4$, $n=4$,.. 2,.. 2

$a=2$, $n=3$,.. 4,.. 3 $a=5$, $n=2$,.. 5,.. 6

$a=3$, $n=6$,.. 6,.. 5 $a=6$, $n=5$,.. 3,.. 4

Ce sont bien des distributions désordonnées. Du reste, je ne me suis occupé de ces satins de 4 et 6 que pour faire encore une application des principes exposés dans cette Étude.

Paris. — L.-Imp. réunies, 7, r. Saint-Benoît.