16. Sett. 1878

28-2º (F.12)

COMPENDIO

DE

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

20.036
Ley 1847

DISPUESTO

PARA LOS ALUMNOS DE 2.ª ENSEÑANZA

POR

D. CÁRLOS BOTELLO DEL CASTILLO,

BACHILLER EN LA FACULTAD DE FILOSOFÍA,
CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS EN EL INSTITUTO PROVINCIAL DE BADAJOZ,
EX-DIRECTOR DEL MISMO,
COMENDADOR DE LAS REALES ÓRDENES ESPAÑOLAS DE CÁRLOS III É ISABEL LA CATÓLICA,
DE LA PORTUGUESA DE CRISTO, ETC.

MADRID.
IMPRENTA DE ALEJANDRO GÓMEZ FUENTENEBRO,
BORDADORES, 10.

1878

3775

447-2983

COMPENDIO

DE

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

DISPUESTO

PARA LOS ALUMNOS DE 2.ª ENSEÑANZA

POR

D CÁRLOS BOTELLO DEL CASTILLO,

BACHILLER EN LA FACULTAD DE FILOSOFÍA,
CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS EN EL INSTITUTO PROVINCIAL DE BADAJOZ,
EX-DIRECTOR DEL MISMO,
COMENDADOR DE LAS REALES ÓRDENES ESPAÑOLAS DE CÁRLOS III É ISABEL LA CATÓLICA,
DE LA PORTUGUESA DE CRISTO, ETC.

Cárlos Botello
del Castillo

3745

MADRID.
IMPRENTA DE ALEJANDRO GÓMEZ FUENTENEBRO,
BORDADORES, 10.

1878.

Ref. f. 0335 Ab. 20

Es propiedad del autor.

A LA EXCELENTÍSIMA

DIPUTACION PROVINCIAL DE BADAJOZ,

en muestra de consideracion y agradecimiento,

El Autor.

Me entrego á la benevolencia de los señores profesores de Matemáticas en particular, y en general á la de todas las personas ilustradas que lean este libro.

C. Botello.

INTRODUCCION

AL ESTUDIO

DE LAS MATEMÁTICAS.

---

1. Matemáticas (del griego μαθησις, *ciencia*) *es la ciencia que trata de las cantidades.*

Se usa en plural la palabra *Matemáticas*, porque la *matesis* era entre los griegos la reunion de los conocimientos evidentes y *ciertos*, y cada uno de éstos ha llegado á constituir una ciencia distinta, aunque formando todas un conjunto armónico, al cabo de muchos siglos y merced á los esfuerzos y progresos de la inteligencia humana. Y era tan alta la estimacion que de aquellos conocimientos tenía la culta Grecia, que les dió el nombre más noble posible, como si dijéramos, *la ciencia por excelencia.*

2. Cantidad de una *cosa* cualquiera es el resultado *que se obtiene al compararla con otra de la misma especie que se elige como unidad de medida* ó término de comparacion. Así, cuando decimos, *aquí hay diez metros de paño*, la *cosa* es el paño; la *cantidad*, diez metros, y la *unidad de medida*, el metro. Es evidente que la *unidad* es tambien *cantidad*, como lo son *dos metros*, *tres metros*, etc. Y como unas veces habrá más de diez metros, y otras ménos; esto es, como la *cantidad de paño* es susceptible de *más* y de *ménos*, de aquí que todos hayamos dicho que *cantidad es todo aquello que es susceptible de aumento y de disminucion:* definicion viciosa que abraza la *cantidad* y la *cosa*, pues que una y otra son susceptibles de *más* y de *ménos*; y es necesario que digamos de una vez, que *la cosa* y *la cantidad de la cosa* son dos entidades distintas. Por eso no pueden ponerse sobre el papel aceite ni carbon, por ejemplo, para hacerlos entrar en los cálculos: lo que se hace entrar en los cálculos son *cantidades* de aceite, de carbon, etc.

Hay más: la idea de la cantidad es ley fundamental del entendimiento; así está reconocido desde Aristóteles. Nosotros no concebimos nada finito sin la idea de la cantidad, que podemos definir tambien *la relacion de una cosa con sus límites*. Y como esta relacion no es constante, por eso la cantidad es susceptible de aumento y de disminucion.

Ni basta este carácter para que esas relaciones puedan caer bajo el dominio de las Matemáticas. Se necesita además que puedan referirse á una unidad de medida. Así los fenómenos que caen bajo el dominio de las Matemáticas tienen por límites los límites del mundo físico. Así los fenómenos del mundo psicológico, como el placer y el dolor, por ejemplo, no pueden entrar en los cálculos; pues si bien son susceptibles de *más* y de *ménos*, de aumento y de disminucion, no existe para ellos unidad de medida alguna.

En suma, definir la *cantidad* por la propiedad que tiene de ser susceptible de *más* y de *ménos*, y por la de poderse sujetar á *medida*, propiedades ambas que son comunes á la *materia* y á la *cantidad de materia*, no es aceptable. En su consecuencia excitamos á las personas competentes para que estudien y propongan una definicion mejor; así como nosotros exponemos modestamente la que está en las primeras líneas de este número.

Y considerando el *tiempo* y el *espacio* (estas condiciones primordiales del mundo físico) como *cantidades*, y como *formas* dentro de las cuales han de verificarse y se nos aparecen todos los hechos del mundo físico, M. Wronski nos ha legado la definicion más bella, y más filosófica á la vez, que pueda darse de las *Matemáticas*, diciendo que son: LA CIENCIA DE LAS LEYES DEL TIEMPO Y DEL ESPACIO.

3. Las *Matemáticas* se dividen en *puras*, y *mixtas ó aplicadas*, segun que se ocupen de la cantidad independiente de toda cualidad ó propiedad física, ó segun traten de la cantidad con aplicacion á esas mismas propiedades, tales como las presenta la naturaleza en los cuerpos y en la materia.

Nosotros sólo nos ocuparémos de las *Matemáticas puras*.

4. Pero la *cantidad* considerada en el *tiempo* es la cantidad *numerable*, y considerada en el *espacio* es la cantidad *figurada*: la primera se llama tambien *cantidad discreta*, y la segunda se llama *cantidad continua* ó *extension*.

Las Matemáticas puras se dividen, pues, en dos ramas fundamentales: la ciencia general de los *números*, y la ciencia general de la *extension*. Para designar la primera ha introducido M. Wronski la palabra *Algoritmia* (del árabe ALGORETM, *cálculo*); y para nombrar la segunda se emplea la palabra *Geometría* (del griego, γη, tierra, y μετρον, medida).

Ahora, los *números*, como todo lo que entra en el círculo de los conocimientos humanos, pueden ser considerados *en particular* y *en* *general*, es decir, segun sus *hechos* y segun sus *leyes;* y la *Algoritmia* se divide á su vez en otras dos ramas: la que trata de los *hechos* de los números y se llama *Aritmética* (del griego ἀριθμος, *número*, y τέχνη, *arte*), y la que trata de sus *leyes* y se llama *Algebra*, de discutible etimología arábiga.

5. UNIDAD *en Matemáticas* es cualquier cantidad elegible á arbitrio ó dada por la naturaleza para que sirva de término de comparacion respecto de las demás de su especie. Así, en el ejemplo anterior (**2**) pudimos tomar por unidad la vara, el pié, etc.; pero en los diferentes géneros de colecciones, la unidad es dada por la naturaleza. Así, en un olivar, la unidad es el olivo.

La expresion de la comparacion ántes indicada se llama *número*.

El NÚMERO es, pues, una *cantidad numérica;* pero no todas las cantidades son *numerables*, pues la *extension* es sólo *numerable* cuando se la mide, que fuera de ese caso la *extension* es siempre una *cantidad geométrica* ó *figurada*.

6. Dos son las cuestiones que están jugando constantemente en los libros didácticos de Matemáticas: el *Teorema* y el *Problema*.

TEOREMA es una cuestion en la que se trata de demostrar las *propiedades* de que gozan cantidades *dadas* y *conocidas* por medio de un razonamiento llamado *demostracion*.

PROBLEMA es una cuestion en la cual nos proponemos determinar el valor de una ó más *cantidades desconocidas*, en virtud del conocimiento de *otras* y de las *relaciones* que ligan á las primeras con las segundas. Las relaciones y cantidades conocidas se llaman *datos*, y las cantidades desconocidas *incógnitas*.

En la demostracion de los teoremas y resolucion de problemas pueden seguirse dos métodos: el *analítico* y el *sintético*.

El MÉTODO ANALÍTICO procede de lo compuesto á lo simple, elevándose por grados de lo particular á lo universal.

El MÉTODO SINTÉTICO procede de lo simple á lo compuesto, descendiendo por grados de lo universal á lo particular.

Ambos son científicos, y léjos de ser incompatibles, por el contrario, se completan mútuamente. Por eso Bacon los comparaba á una escalera de mano de dos ramas ó piernas, en cuyo vértice estuviesen los principios, producto del primero y punto de partida del segundo; porque donde acaba el análisis comienza la síntesis.

El *método analítico* se llama tambien de *invencion*, porque es el que seguiria el primer hombre que tratase una cuestion cualquiera ántes que los demás; es el más filosófico, y hasta el más elegante.

El *método sintético* es propiamente el *método de enseñanza*.

El Algebra es esencialmente analítica.

La Geometría es el más acabado modelo del método sintético.

Y las partes todas de las Matemáticas ofrecen un cuadro de verdades tan evidentes y tan sencillamente expuestas, que con razon se las llama CIENCIAS EXACTAS.

Además conviene conocer las *proposiciones* llamadas *recíprocas*. Es recíproca de otra ya explicada una segunda proposicion en la que sirve de hipótesis la conclusion de la primera, y de conclusion la hipótesis de la primera: por oposicion se llama *directa* á la primera proposicion. Las recíprocas se demuestran casi siempre *indirectamente*, ó *ad absurdum*, suponiendo *falsa la conclusion*, para que aparezca contradiccion ó absurdo entre ella y la hipótesis ó algun principio que la ciencia tenga admitido:

AXIOMAS, que son unos principios tan sencillos y tan evidentes que se admiten sin demostracion; por ejemplo, *dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí:*

POSTULADOS, que se admiten generalmente sin demostracion, aunque no tienen el mismo grado de evidencia que los *axiomas:*

COROLARIOS, que son unas consecuencias tan inmediatas de algun principio que acaba de demostrarse, que no necesitan demostracion especial:

ESCOLIOS, que son ciertas advertencias ú observaciones que sirven para ampliar, restringir ó generalizar un asunto cualquiera: y

LEMAS, que son unas proposiciones prévias ó auxiliares que se establecen como base de algun *teorema fundamental* con que suele dar principio la exposicion de una teoría.

ARITMÉTICA.

ARITMÉTICA.

INTRODUCCION.

7. ARITMÉTICA es la parte de la *Algoritmia*, y tambien de las *Matemáticas* (1), que trata de los *hechos* de los *números*, ó que se ocupa de los *números* de una manera *elemental*.

Número en *Aritmética* es toda coleccion de unidades de una misma especie é iguales, por ejemplo, *tres duros*, *tres quintos de duro*.

Unidad es cada una de estas partes iguales que entran á componer el *número*.

El número puede ser *entero* en absoluto, y, como derivados de éste, *quebrado* y *mixto*. Es *entero* si la unidad que lo compone no se refiere á otra unidad superior, por la cual se la llama *unidad entera* ó simplemente *unidad*, á diferencia de la que se llama *unidad fraccionaria*, que es aquella que se refiere á otra superior como unidad entera. El primero de los ejemplos precedentes es un *número entero;* su unidad, *el duro;* el segundo es un *quebrado*, su unidad fraccionaria, *el quinto de duro;* teniendo ambos igual número de unidades. *Cuatro duros y medio*, por ejemplo, compuesto de entero y quebrado, se llama *número mixto*, en el cual entran cinco unidades, cuatro enteras y una fraccionaria.

Los números se llaman *abstractos* si no se refieren á ninguna unidad determinada, como *cuatro*, *cinco*, etc.; y *concretos* si se refieren á alguna, como *cuatro hombres*, *cinco libros*, etc. Tambien puede llamarse *unidad abstracta* la que entra en el primer ejemplo, y *concretas* las que entran en el segundo.

Los números *concretos* son *homogéneos* si se refieren á unidades de una misma especie, como *cuatro libros* y *cinco libros;* y *heterogéneos*, si se refieren á unidades de distinta especie, como *cuatro libros* y *cinco plumas*.

Los números *abstractos* son todos *homogéneos*, puesto que son todos de una misma especie, á saber, de exclusion de todas las especies de números concretos.

Tambien se dividen los números concretos en *complejos* é *incomplejos*.

Hay números que reciben otras varias denominaciones, segun los casos, como *dígito* y *compuesto*, *primo*, *conmensurable* é *inconmensurable* y *figurados*, de los cuales nos ocuparémos en ocasion oportuna, y los llamados *abundantes*, *deficientes*, *amigos*, *perfectos*, *de oro* y *recíprocos*, cuyas definiciones se darán á conocer más adelante.

8. Se ha dicho tambien que *Aritmética* es la ciencia que enseña á *expresar*, *componer* y *descomponer* los números.

De la primera parte se ocupa la *numeracion*.

De la segunda se ocupan la *adicion*, *multiplicacion* y *elevacion á potencias*.

De la tercera, la *sustraccion*, *division* y *extraccion de raíces*.

Todos los autores de obras como ésta comienzan por la *numeracion* de los *números enteros abstractos*, y explican tambien las *seis operaciones fundamentales* de la Aritmética que acabamos de mencionar, en primer término sobre *números enteros abstractos*, con el auxilio de los cuales se forman y expresan todos los demás.

El *número entero abstracto* debe, pues, ser considerado como el *símbolo característico* de la Aritmética, y del cual se sirve para cumplir su objeto, á saber, para tratar de la cantidad numérica *en particular*, ó sea segun sus *hechos*.

CAPÍTULO PRIMERO.

Numeracion decimal de los números enteros abstractos y las seis operaciones fundamentales sobre los mismos.

NUMERACION.

9. Numeracion es la parte de la Aritmética que se ocupa de la *formacion y expresion de los números enteros.*

La generacion ó *formacion de los números enteros* se obtiene *por la adicion sucesiva de la unidad con ella misma.* Y este acto es tan inmediato al de su *expresion* que la generalidad de las personas los realizan sin darse cuenta de que son dos actos distintos: por eso su explicacion es simultánea.

Ahora, *la expresion de los números* puede ser por medio de la palabra *hablada* y por medio de la palabra *escrita*, es decir, que la *numeracion* puede ser *hablada* y *escrita.*

Numeracion hablada. Como no se puede señalar el límite de los números, porque dado uno, por grande que sea, se obtiene un nuevo número sin más que agregarle una unidad, sería imposible dar á cada uno un nombre distinto.

Así se justifica la necesidad de *combinar un pequeño número de palabras para expresar todos los números enteros posibles:* tal es el objeto de *la numeracion hablada.*

Se considera como primer número la *unidad*, y se expresa con la palabra *uno;* la reunion de *uno y uno* se expresa con la palabra *dos;* la de *dos y uno* con la palabra *tres;* la de *tres y uno* con la palabra *cuatro;* la de *cuatro y uno* con la palabra *cinco;* la de *cinco y uno* con la palabra *seis*; la de *seis y uno* con la palabra *siete;* la de *siete y uno* con la palabra *ocho;* la de *ocho y uno* con la palabra *nueve*, y la de *nueve y uno* con la palabra *diez.*

Este número *diez* se considera como una nueva especie de unidad llamada de *segundo órden*, ó *decenas*, para diferenciarla de las nueve primeras llamadas simplemente *unidades* ó de *primer órden.*

Y se cuentan y expresan los números por *decenas* como se contaron y nombraron por *unidades.* Así se dice: *dos decenas, tres decenas*, etc., cuya nomenclatura ha sustituido el uso con ésta, *veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta*, y *noventa.*

Los números comprendidos entre dos decenas consecutivas se expresan uniendo á éstas una de las nueve primeras palabras. Así dirémos: *treinta y cuatro*, para expresar este número comprendido entre tres y cuatro decenas. El uso, sin embargo, en vez de las palabras diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, y diez y cinco, ha introducido éstas: *once*, *doce*, *trece*, *catorce*, y *quince*.

Con estos elementos podemos ya contar y expresar hasta el número compuesto de *nueve decenas y nueve unidades*, ó sea el número *noventa y nueve*.

Agregando á éste una unidad se forma el número *ciento*, que se considera como una nueva especie de unidad, llamada de *tercer órden* ó *centena*.

Y se cuentan y expresan los números por centenas, como se contaron y nombraron por decenas y por unidades. Así dirémos: *dos cientos*, *tres cientos*, etc. En vez de *cinco cientos* el uso ha inintroducido la palabra *quinientos*.

Los números comprendidos entre dos centenas consecutivas se expresan uniendo á éstas las palabras con que hemos expresado los noventa y nueve primeros números. Así se dice: *ochocientos diez y ocho*, *ochocientos cuarenta*, para expresar estos números comprendidos entre *ocho* y *nueve centenas*, por ejemplo.

Con estos elementos podemos ya expresar hasta el número compuesto de *nueve centenas*, *nueve decenas* y *nueve unidades*, ó sea el número *nuevecientos noventa y nueve*.

Agregando á éste una unidad se forma el número *mil*, que se considera como una nueva especie de unidad, llamada de *cuarto órden* ó *unidad de millar*, ó simplemente *millar*.

Y se cuentan y expresan los números por *millares*, como se contaron y se nombraron por centenas, decenas y unidades. Así se dice: *dos mil*, *tres mil*, etc.

Los números comprendidos entre dos unidades de millar se expresan uniendo á éstas las palabras con que hemos expresado los nueve cientos noventa y nueve primeros números. Así dirémos: *tres mil quinientos ochenta y ocho*, para expresar este número comprendido entre tres y cuatro millares por ejemplo.

Con estos elementos podemos ya expresar hasta el número compuesto de nueve unidades de millar, nueve centenas, nueve decenas y nueve unidades, ó sea el número *nueve mil nueve cientos noventa y nueve*.

Agregando á éste una unidad se forma el número *diez mil*, que se considera como una nueva especie de unidad, llamada de *quinto órden* ó *decena de millar*.

Y se cuentan y expresan los números por decenas de millar, como se contaron y nombraron por millares, centenas, decenas y unidades. Así dirémos: *veinte mil*, *treinta mil*, etc.

Los números comprendidos entre dos decenas de millar consecutivas se expresan uniendo á éstas las palabras con que hemos expresado los nueve mil nueve cientos noventa y nueve primeros números. Así se dice: *setenta y tres mil quinientos* para expresar este número comprendido entre *siete y ocho decenas de millar*, por ejemplo.

Con estos elementos podemos ya expresar hasta el número compuesto de *nueve decenas de millar*, *nueve millares* (ó sean *nueve unidades de millar*), *nueve centenas*, *nueve decenas y nueve unidades*, ó sea el número *noventa y nueve mil nuevecientos noventa y nueve*.

Agregando á éste una unidad, se forma el número *cien mil*, que se considera como una nueva especie de unidad, llamada de *sexto órden* ó *centena de millar*.

Y se cuentan y expresan los números por *centenas de millar*, como se contaron y nombraron por *decenas de millar*, *millares* (ó *unidades de millar*), *centenas*, *decenas* y *unidades*. Así se dice: *doscientos mil*, *trescientos mil*, etc.

Los números comprendidos entre dos centenas de millar consecutivas, se expresan uniendo á éstas las palabras con que hemos expresado los noventa y nueve mil nuevecientos noventa y nueve primeros números. Así dirémos: *ochocientos treinta y dos mil cuarenta y tres*, para expresar este número comprendido entre *ocho* y *nueve centenas de millar*, por ejemplo.

Con estos elementos podemos ya expresar hasta el número compuesto de *nueve centenas de millar*, *nueve decenas de millar*, *nueve unidades de millar*, *nueve centenas*, *nueve decenas y nueve unidades*, ó sea el número *nuevecientos noventa y nueve mil nuevecientos noventa y nueve*.

Se forma el número *millon* agregando al anterior una unidad, llamada de *sétimo órden* ó *unidad de millon*.

Siguiendo el método explicado se forman y se expresan fácilmente los números compuestos de unidades de un órden superior á la unidad de *millon*, observando que *diez* unidades de cierto órden componen *una unidad* del inmediato superior, y que se cuenta por unidades de un órden cualquiera, como se ha contado por las del inmediato inferior.

Despues de las *unidades de millon* siguen las *decenas de millon*, *centenas de millon*, *unidades de millar de millon*, *decenas de millar de millon*, *centenas de millar de millon*, *unidades de millon de millon* ó sea *billon*, *decenas de billon*..... *trillones*, *cuatrillones*, etc.

Trece son las palabras *necesarias* y *suficientes* para la combinacion que acabamos de explicar, á saber: *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *ciento*, *mil* y *millon*. Todas las demás ni son necesarias, ni científicas: únicamente el uso es el que las ha autorizado.

11. NUMERACION ESCRITA. *La numeracion escrita enseña á expresar todos los números enteros posibles por medio de cierta combinacion de signos.*

El tránsito de la numeracion verbal á la escrita se realiza fácilmente, teniendo presente que, al enunciar un número, hemos tratado dos cuestiones: 1.ª decir el número de unidades de cada órden, y 2.ª decir el nombre de cada uno de estos órdenes.

Y como de cada órden de unidades no puede haber más de nueve, porque diez componen ya una unidad del órden inmediatamente superior, de aquí que con nueve signos, llamados *cifras* ó *guarismos*, tengamos resuelta la primera cuestion.

Estas cifras, con sus valores respectivos, son las siguientes:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.

Y con ellas se expresan ó escriben los nueve primeros números: *ocho*, por ejemplo, se escribe, 8.

Para resolver la segunda cuestion, se ha establecido entre los matemáticos un principio convencional, en virtud del cual, *una cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades del órden inmediatamente superior*, y de esa manera podrémos expresar los números desde el diez en adelante.

Para escribir el número treinta y siete, por ejemplo, compuesto de siete unidades y tres decenas, se escribe la cifra 3; y para que represente unidades de segundo órden ó decenas, se pone á su derecha la cifra 7; de este modo: 37, y así de los demás.

Pero se presentan igualmente números que carecen de unidades de uno ó más órdenes, tal como el *treinta*, compuesto de tres unidades de segundo órden y ninguna de primero. Para escribir este número, y otros análogos, se necesita una nueva cifra llamada *cero*, y que se escribe 0, cuyas dos funciones son: expresar *la carencia de unidades del lugar que ocupa, y dar á las que están á su izquierda la colocacion correspondiente*. El número *treinta* se escribirá así: 30.

Diez son, pues, los signos ó cifras necesarias, y suficientes con el principio convencional, para expresar todos los números.

Las nueve primeras, llamadas *significativas*, además de dar como el 0 la colocacion correspondiente á las que están á su izquierda, tienen cierto valor independiente del lugar que ocupan, valor llamado *absoluto*, para distinguirlo del *valor* dependiente del lugar que ocupan, y que se llama *relativo*.

Por ejemplo: la cifra 3, cualquiera que sea el lugar que ocupe, vale *tres unidades;* pero si está sola, serán tres unidades simples; si está en el segundo lugar, contando de derecha á izquierda, serán tres decenas, ó sean treinta unidades simples.

La lectura de un número *escrito* se hace, así como la escritura, de izquierda á derecha, clasificando ántes las cifras de derecha á izquierda de seis en seis, con un 1 en el primer lugar, un 2 en el segundo, etc., para indicar los millones, billones, etc., y dividiendo cada uno de estos períodos de seis cifras en dos de á tres, por la parte inferior con una coma, de esta manera: unidades, decenas, centenas, unidades de millar, decenas de millar, centenas de millar, millon, decena de millon, etc. Sea por ejemplo: 3'207,048.

Este número se lee así: *tres millones doscientos siete mil cuarenta y ocho unidades.*

Es menester advertir que, leyendo este número de esta manera, se reducen todas las unidades de órden superior á unidades de primer órden. Por lo demás, éste como todos los números pueden leerse y enunciarse de varios modos; ya sin reducirse las diferentes unidades de los respectivos órdenes á ninguno inferior, ya reduciéndolas á alguno ó algunos de los intermedios, sin llegar á las unidades de primer órden.

Recomendamos los anteriores ejercicios, y tambien que se aprenda á decir de memoria y con prontitud: 1.° *á qué órden de unidades corresponde una cifra que ocupe cierto lugar contando de derecha á izquierda;* y 2.°, *dado el órden á que corresponde, qué lugar ocupará contando de derecha á izquierda.* Solamente sabiendo esto bien, podrá el alumno escribir y leer con prontitud, acierto y conocimiento de lo que hace, los números que se le propongan.

12. Este sistema de numeracion no es el único, y se llama decimal, porque su *base* es *diez*, esto es, porque *diez unidades* de un órden componen *una* del inmediato superior, y *diez* es el número de cifras que en él se emplea. Además es el sistema que han seguido todos los pueblos espontáneamente, á excepcion de los chinos y de una tribu oscura de Asia, y forma la lengua casi universal de la humanidad.

Esta conformidad no puede explicarse sino por la costumbre que en la infancia tenemos de contar por los dedos. Y de aquí que á los números menores que diez, se les llama *dígitos* (del latin *digitus*, dedo), y del diez en adelante, *compuestos;* y es de creer que si el hombre tuviese seis dedos en cada mano, seguiría el sistema *duodecimal.*

Carlos Botello

Estas cifras que hemos dado á conocer, llamadas *arábigas*, las tomaron los árabes de la India, hácia el siglo X, y son casi iguales á las que hoy usamos, excepto el *cero*, cuyo signo era un punto (.). Los sábios árabes importaron en España estas cifras con su Aritmética, que enseñaban en Córdoba, con razon llamada la Aténas de Occidente; pero no se generalizó su conocimiento por Europa hasta el siglo XIII.

13. Los griegos dividían los números en períodos de á diez; pero como ignoraban el artificio de representarlos por *signos* ó *cifras*, dando á éstas valores absolutos y relativos á la vez, se vieron obligados á emplear hasta treinta y seis *signos*, sacados casi todos de su *alfabeto*, para hacer su Aritmética lo más regular posible.

14. Los romanos representaban los números enteros por medio de siete letras de su *abecedario*, que con sus valores respectivos son:

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M.
1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

Escribían, yendo de las de más valor á las de menor; advirtiendo que una letra antepuesta á otra de mayor valor, quita á ésta el valor de aquélla.

El valor de toda letra se hace mil veces mayor poniendo una línea horizontal encima ó una *m* por la parte superior ó inferior de la letra.

1878..... MDCCCLXXVIII   404.... CDIV

1000000..... $\overline{\mathrm{M}}$

Antiguamente se escribia *mil* con dos CC encontradas y una I en medio, CIↃ.

15. Los hebreos dieron á cada una de las veintidos letras de su *alefato* valor numérico en este órden:

CARÁCTER HEBREO.	NOMBRE HEBREO.	VALOR NUMÉRICO.	CARÁCTER HEBREO.	NOMBRE HEBREO.	VALOR NUMÉRICO.
א	*Áleph*. . . .	1	ל	*Lamed*. . . .	30
ב	*Bheth*. . . .	2	מ	*Mem*.	40
ג	*Ghimel*.. . .	3	נ	*Nun*.	50
ד	*Dhaleth*. . .	4	ס	*Samech*. . .	60
ה	*Hhe*.	5	ע	*Hhhhayin*. .	70
ו	*Wau*.	6	פ	*Phi*.	80
ז	*Zain*.	7	צ	*Tsade*. . . .	90
ח	*Hhhet*. . . .	8	ק	*Qoph*.	100
ט	*Tet*.	9	ר	*Resch*. . . .	200
י	*Yod*..	10	ש	*Schin*.	300
כ	*Chaph*. . . .	20	ת	*Tau*.	400

con las nueve primeras representaban las *unidades*, con las nueve segundas representaban las *decenas*, y con las cuatro restantes las *centenas*.

De suerte que en estos tres pueblos se observa el mismo fondo y la misma aspiracion á *contar por diez*, como que está basada en la estructura de una de las partes de nuestro cuerpo (la mano) que esto significa la letra *yod* con que los hebreos representan el número *diez*. ¿Quién realizó este ideal de los sabios clásicos de la antigüedad? Lo ignoramos. Pero nadie puede disputar al pueblo árabe la gloria de haberlo revelado al mundo, desde las escuelas de Córdoba, con la *escala decimal de numeracion* que es hoy, como dejamos apuntado, la lengua casi universal de la humanidad.

Concluyamos esta teoría llamando la atencion de los hombres pensadores acerca de dos circunstancias que se observan en la numeracion de los hebreos: 1.ª Hay letras que con ligerísima modificacion representan *unidades* y *decenas*, *unidades* y *centenas*, *decenas* y *centenas*; 2.ª nuestras cifras 2, 3, 4 y 7 tienen una semejanza admirable con las letras *bheth*, *ghimel*, *dhaleth* y *zain*, y áun el 1 parece parte de su primera letra *áleph*, con las cuales ellos representan los números respectivamente iguales.

¿Será que alguna tribu fugitiva de la catástrofe de Jerusalen el año 70, cultivase la Aritmética en algun oscuro rincon de Asia hasta el punto de construir la escala decimal que habían de tomar los árabes en sus correrías comerciales y militares de los siglos VIII y IX?

No nos sorprendamos, pues, si por uno de esos raros accidentes que ocasiona algun descubrimiento en las letras orientales, vemos cambiar el nombre de *numeracion arábiga* por el de *hebráica*.

ADICION.

16. Adicion, en general, *es una operacion que tiene por objeto reunir en uno solo el valor de dos ó más números homogéneos.*

Los números cuyos valores han de reunirse, se llaman *sumandos;* el resultado, *suma*, y la accion de reunirlos, *sumar*.

Para indicar la adicion se escribe entre los sumandos el signo +, que se lee *más ó aumentado de*. Este signo se inventó por *Stifelius* y otros alemanes en el siglo XVI.

17. Cuando los sumandos son de una sola cifra, ó uno de varias y los demás de una, la adicion puede hacerse de memoria, descomponiéndolos todos, ménos el primero, en sus unidades, y agregando éstas á aquél una á una. Así, para sumar 11 con 3 y 2, se dice:

once y una doce, y una trece, y una catorce, y una quince, y una diez y seis, disponiendo el cálculo en esta forma: $11+3+2=16$.

Este signo $=$ se lee *igual á*, y se llama signo de igualdad, cuya invencion se atribuye al inglés *Recorde*, del mismo siglo XVI. Su uso es para expresar que dos cantidades son iguales, ya estén expresadas como $7=7$, ya lo estén bajo distinta forma, como en el caso anterior. La cantidad que está á la izquierda de este signo se llama *primer miembro*, y *segundo* la que está á la derecha.

18. Cuando los sumandos son compuestos de varias cifras se observa la regla siguiente: *Se colocan unos debajo de otros, de manera que se correspondan las unidades de un mismo órden, esto es, unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, etc.; se tira una línea por la parte inferior; se suman las unidades de primer órden, y esta suma parcial se coloca debajo y en la misma columna, si no excede de* 9; *mas si excede de este número, se reservan las decenas que compongan la suma de las unidades, para sumarlas con las decenas, escribiendo las restantes debajo de las unidades de primer órden: despues se suman las decenas, y esta suma parcial se coloca debajo y en la misma columna, si no excede de* 9; *mas si excede de este número, se reservan las centenas que compongan la suma de las decenas para sumarlas con las centenas, escribiendo las restantes debajo de las unidades de segundo órden, y así sucesivamente.*

$$
\begin{array}{lr}
\text{Ejemplo:} & 70040 \\
 & 5023 \\
 & 1008 \\
 & 99 \\
\hline
 & 76170
\end{array}
$$

Dirémos: 3 unidades y 8, son 11, y 9 son 20, que componen 2 decenas y 0 unidades, que son las que pondrémos debajo de las unidades.

2 decenas procedentes de la suma de las unidades y 4 son 6, y 2 son ocho, y 0 son 8, y 9 son 17, que componen una centena y siete decenas que son las que pondrémos debajo de las decenas.

1 centena, procedente de las sumas de las unidades de órdenes inferiores, y 0 es 1, y 0 es 1, y 0 es 1, que pondrémos debajo de las centenas.

0 unidades de millar y 5 son 5, y una 6, que pondrémos debajo de los millares.

7 decenas de millar.

De esta suerte se han sumado las unidades, decenas, etc., respectivamente entre sí; y como lo que se hace con las partes queda hecho con el todo, los números propuestos quedan sumados entre sí.

19. Observaciones. 1.ª En la práctica se prescinde de estos detalles, diciendo: 3 y 8, 11, y 9, 20; y van dos: se pone el 0 y se sigue: 2 y 4, 6; y 2, 8; y 9, 17: se pone el 7, y así se continúa.

2.ª Si se coloca una línea entre los sumandos y la suma, es por claridad.

3.ª Si la suma de las unidades de cada órden no excediese de 9, sería indiferente empezar la operacion por la derecha ó por la izquierda, ó por cualquiera de las columnas intermedias. Pero si la suma de las unidades de cada número excediese de 9 y se empezase por la izquierda, habría que ir rectificando las sumas parciales, despues de escritas; lo cual sería embarazoso y de mal efecto: por eso dice la regla general que se empiece á sumar por la derecha, ó sea por las unidades inferiores.

4.ª La colocacion que se da á los sumandos es por comodidad. Por lo demás, la operacion se efectuará, cualquiera que sea la colocacion, con tal que se sumen entre sí unidades de un mismo órden.

5.ª De la definicion misma de la adicion se deduce: que si los sumandos crecen ó decrecen, la suma crece ó decrece; que si un sumando crece la misma cantidad que otro disminuye, la suma no se altera.

SUSTRACCION.

20. Sustraccion, en general, *es una operacion que tiene por objeto hallar la diferencia de dos números homogéneos.*

Si los números propuestos son: el 1.º una suma de dos números, y el 2.º uno de los sumandos; el número que se quiere determinar será el otro sumando, y bajo este aspecto la operacion es inversa de la *adicion.*

El número del que se resta otro, se llama *minuendo;* el que se resta, *sustraendo*; el resultado, *exceso*, *residuo*, *diferencia* ó *resto;* y la accion de hallar la diferencia, *restar.*

Para indicar la *sustraccion,* se escribe entre los números el signo —, que se lee *ménos* ó *disminuido de*: su orígen es el mismo que el de la adicion (**16**).

La sustraccion entre dos números de una cifra, ó entre uno compuesto de varias y otro de una, puede hacerse de memoria.

21. Pero si los dos términos de la sustraccion son compuestos de varias cifras, la operacion se hace del modo siguiente: *Se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de manera que se correspondan las* *unidades de un mismo órden; se halla la diferencia de las unidades de cada órden, empezando por las inferiores, y se escribe debajo de su órden respectivo.*

EJEMPLO:

$$\begin{array}{r} 628 \\ 306 \\ \hline 322 \end{array}$$

Dirémos: 8 unidades ménos 6, son 2, que escribimos debajo de las unidades.

2 decenas ménos 0, son 2, que ponemos debajo de las decenas.

6 centenas, ménos 3, son 3, que escribimos debajo de las centenas.

De este modo hemos restado de las unidades, decenas y centenas del minuendo, las unidades, decenas y centenas del sustraendo; y como lo que se hace con las partes queda hecho con el todo, los números propuestos quedan restados entre sí, el segundo del primero.

22. OTRO EJEMPLO:

$$\begin{array}{r} 6024 \\ 5027 \\ \hline 997 \end{array}$$

En este ejemplo, como de las 4 unidades del minuendo no se pueden restar las 7 del sustraendo, se descomponen mentalmente las 2 decenas en 1 + 1, y dejando 1 en el lugar de las decenas, la otra se reduce á unidades, que son 10 y se agrega á las unidades diciendo: 14 unidades menos 7, son 7, que se escriben debajo.

Despues, para hacer posible la sustraccion de las decenas, se descomponen las 6 unidades de millar en 5 + 1; esta última reducida á centenas son 10, que descompuestas en 9 + 1, y reduciendo ésta á decenas, son 10, y con una hacen 11, y se dice: 11 decenas ménos 2, son 9, que se ponen debajo.

Despues, 9 centenas ménos 0, son 9, que se escriben debajo de las centenas.

Y por último, 5 unidades de millar, que quedaron despues de la descomposicion hecha para hacer la sustraccion de las decenas, ménos 5, son 0, que no se pone á la izquierda.

De suerte que en este caso hemos transformado mentalmente el minuendo 6024 en 5 unidades de millar, 9 centenas, 11 decenas, y 14 unidades.

En vez de considerar disminuida en una unidad la cifra de las decenas, se puede aumentar la del sustraendo y decir: 12 ménos 3, son 9. Despues 10 centenas ménos 1, son 9; y por último, 6 millares ménos 6, son 0. Y en general, se puede aumentar una unidad á la cifra del sustraendo correspondiente á aquella cifra del minuendo de quien se toma una unidad (para hacer posibles sustracciones anteriores), en vez de considerar disminuida á ésta en dicha unidad.

23. Observaciones. 1.ª Si las cifras del minuendo son mayores ó iguales que sus correspondientes del sustraendo es indiferente empezar la operacion por las unidades inferiores ó por las superiores, por la derecha ó por la izquierda, ó por cualquiera de las columnas intermedias.

2.ª Es evidente que si, quedando el sustraendo el mismo, el minuendo crece ó decrece, el resto tambien crece ó decrece; y que si, quedando el minuendo el mismo, el sustraendo crece ó decrece, el resto decrece ó crece; por consiguiente, el resto no se altera, si á minuendo y sustraendo se añade ó quita una misma cantidad.

3.ª Si el minuendo y el sustraendo son iguales, el resto será *cero*.

4.ª Es evidente que el minuendo es igual á la suma del sustraendo y resto.

5.ª El sustraendo es igual á la diferencia entre el minuendo y el resto.

MULTIPLICACION.

24. Multiplicacion, en general, *es una operacion que tiene por objeto, dados dos números, hallar un tercero que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad.*

El primer número, ó sea el que se multiplica, se llama *multiplicando;* aquél por el cual éste se multiplica, *multiplicador;* los dos juntos, *factores del producto*; el resultado, *producto;* y la accion de formar el producto, *multiplicar.*

Para indicar la multiplicacion se escribe entre los factores el signo ×, que se lee *multiplicado por*, signo inventado por el inglés *Ougthred* á principios del siglo XVII: tambien se pone entre los factores un punto.

5×4, ó bien 5.4, se lee: 5 multiplicado por 4.

25. Segun la definicion de la multiplicacion, multiplicar 7 por 3, por ejemplo, es hallar un tercer número que sea respecto de 7 lo que 3 es respecto de la unidad; y como 3 respecto de la unidad es la unidad repetida 3 veces, de aqui que el tercer número que se busca sea igual á 7 repetido 3 veces, ó lo que es lo mismo, á

$$7+7+7=21.$$

No cabe duda, en vista de este ejemplo, en cuanto á la posibilidad de efectuar la multiplicacion por medio de adiciones sucesivas. Pero es tambien cierto que este método, cuando los factores son muy complicados, es sumamente pesado. Y sin duda, haciendo alusion á la brevedad del procedimiento que vamos á explicar, respecto del que ligeramente hemos apuntado, se ha dicho que *la multiplicacion es una adicion abreviada*.

26. Este procedimiento empieza desde la multiplicacion de un número de una cifra por otro de una tambien, la cual se obtiene instantáneamente sabiendo de memoria los productos de los nueve primeros números entre sí: productos que se aprenden en la tabla llamada *Pitagórica*, por haberla dado á conocer Pithagoras (fuese ó nó el inventor), y cuya forma y explicacion es como sigue:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primera línea superior horizontal se compone de los nueve primeros números.

La segunda se compone de los de la primera sumados consigo mismos: de suerte que en la segunda se hallan los nueve primeros números repetidos 2 veces, ó lo que es lo mismo, segun la idea que hemos dado de la multiplicacion (**25**), los productos de los nueve primeros números por 2.

La tercera se compone de los de la segunda, sumados ordenadamente con los de la primera: de suerte que en la tercera se hallan los nueve primeros números repetidos 3 veces, ó lo que es lo mismo, segun la idea que hemos dado de la multiplicacion (**25**), los productos de los 9 primeros números por 3.

La cuarta se compone de los de la tercera sumados ordenadamente con los de la primera: de suerte que en la cuarta, se hallan los nueve primeros números repetidos 4 veces, ó lo que es lo mismo, los productos de los nueve primeros números por 4.

Y así sucesivamente las 5 líneas restantes contienen los productos de los nueve primeros números por 5, por 6, por 7, por 8 y por 9.

Por manera que, si se quiere hallar el producto de 5 por 3, por ejemplo, se busca el 5 en la primera línea superior horizontal, y se baja por la vertical correspondiente hasta encontrarse enfrente del 3 que está en la primera vertical de la izquierda: la casilla interseccion nos dará el producto 15 pedido.

Tambien pudo buscarse en la horizontal el 3, y bajar por la vertical hasta encontrarse enfrente del 5 de la primera vertical de la izquierda: otra casilla nos dará, sin embargo, el mismo producto 15.

Como en la primera línea superior horizontal se consideran siempre los *multiplicandos*, y en la primera vertical de la izquierda los *multiplicadores*, cuando buscamos en la horizontal el 5, aprendimos el producto de 5 por 3; y cuando buscamos en la horizontal el 3, aprendimos el producto de 3 por 5; en ambos casos el producto fué 15; y esto nos indica ya la existencia de un principio interesante, á saber, que *un producto no se altera cualquiera que sea el órden de los factores*, ó en términos más precisos, que *el órden de los factores no altera el producto*; principio que demostrarémos para el caso de *dos factores* por el siguiente

27. Teorema. Vamos á demostrar que 5×4, por ejemplo, es igual á 4×5.

En efecto, descomponiendo el multiplicando 5 en sus unidades, y repitiendo esto tantas veces como unidades tiene el multiplicador, tendrémos:

$$
\begin{aligned}
5&=1+1+1+1+1\\
5&=1+1+1+1+1\\
5&=1+1+1+1+1\\
5&=1+1+1+1+1.
\end{aligned}
$$

Y sumando ordenadamente estas igualdades, esto es, los primeros miembros entre sí, y los segundos entre sí, tendrémos: por una parte 5 repetido 4 veces, que, segun la idea que hemos dado de la multiplicacion (**25**), equivale á 5×4; y por otra, 4 repetido 5 veces, que, por la misma consideracion, equivale á 4×5; y siendo iguales estos dos productos, queda demostrado el teorema, y así de los demas ejemplos.

Disposicion del cálculo :

$$\begin{array}{r}
5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
\hline
5 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 5
\end{array}$$

28. Pasemos á considerar el caso en que , teniendo el multiplicando varias cifras, el multiplicador no tiene más que una.

Sea , por ejemplo , multiplicar 508 por 5. El producto puede obtenerse por medio de la adicion en esta forma :

$$\begin{array}{r}
508 \\
508 \\
508 \\
508 \\
508 \\
\hline
2540
\end{array}$$

Pero, segun el procedimiento que en lo sucesivo hemos de seguir, la operacion se dispone de este modo :

$$\begin{array}{r}
508 \\
5 \\
\hline
2540
\end{array}$$

Y dirémos : 8 unidades por 5 , son 40 , que componen 4 decenas y 0 unidades , siendo estas últimas las que se ponen debajo de las unidades del multiplicando.

0 decenas por 5 son 0, y 4, procedentes del producto anterior, son 4 decenas que se escriben debajo de las decenas del multiplicando.

5 centenas por 5 son 25, que componen 2 unidades de millar y 5 centenas, siendo estas últimas las que se ponen debajo de las centenas del multiplicando , y las 2 unidades de millar á su izquierda.

Y el producto 2540 de este modo obtenido, es el verdadero producto ; porque, segun la idea que hemos dado de la multiplicacion (**24**), multiplicar 508 por 5 es hallar un tercer número que sea respecto de 508 lo que 5 es respecto de la unidad ; y como 5 se compone de la unidad repetida 5 veces , el tercer número que se busca habrá de componerse de 508 repetido 5 veces. Pero acabamos de repetir 5 veces las unidades, decenas y centenas de 508, y como lo que se hace con las partes queda hecho con el todo , el todo, ó sea el número 508 propuesto , ha quedado repetido 5 veces, ó sea multiplicado por 5.

Luego, regla: *Para multiplicar un número de varias cifras por* *otro de una sola, se coloca el segundo debajo de las unidades del primero, y se multiplican por él las unidades, decenas, centenas, etc. del multiplicando; y si de alguno de estos productos parciales se obtienen unidades del inmediato superior, se reservan para añadirlas al producto siguiente.*

El producto de un número por 2 se llama *duplo;* y si es por 3, *triplo.*

Escolio. Si se presenta el caso de que el multiplicando tenga una cifra y el multiplicador muchas, en virtud del teorema (**27**) invertirémos el órden de los factores, y estamos en el caso anterior, que es más cómodo.

29. Pasemos al caso más general de la multiplicacion de los números enteros, que es aquél en que multiplicando y multiplicador constan de muchas cifras. Empecemos por el caso más sencillo.

Para multiplicar un número por 10, 100, 1000, *y en general por la unidad seguida de ceros, se escriben á continuacion del número propuesto tantos ceros como acompañen á la unidad.* Sea, por ejemplo, 78 multiplicado por 10: el producto será igual á 780, porque el 8 que se refería á unidades, ahora se refiere á decenas, y el 7 que se refería á decenas, ahora se refiere á centenas: luego, si las diversas partes de 78 se han hecho diez veces mayores, el número 78 se ha hecho diez veces mayor, ó queda multiplicado por 10. A igual consideracion se prestan los demas casos análogos.

Disposicion de la operacion:

$$78 \times 10 = 780 \qquad 78 \times 100 = 7800 \qquad 754 \times 1000 = 754000.$$

Consideremos aún otro caso ántes de entrar en el general:

Para multiplicar un número por otro compuesto de una cifra significativa seguida de uno ó más ceros, se multiplica el número propuesto por dicha cifra (**28**), *y se escriben á continuacion del producto tantos ceros como acompañen á la cifra significativa.*

Ejemplo: $532 \times 400 = 212800.$

Multiplicar 532 por 400, segun la idea que hemos dado de la multiplicacion, es hallar un tercer número que sea respecto de 532 lo que 400 es respecto de la unidad; pero 400 se compone de la unidad repetida 400 veces, luego el tercer número habrá de componerse de 532 repetido 400 veces Ahora bien, para repetir 400 veces el 532 podemos hacerlo segun queda dicho (**25**); pero estos 400 sumandos iguales á 532 pueden considerarse reunidos en 100 grupos de á 4 sumandos cada uno. Cada grupo de á 4 equivale (**28**) á multiplicar por 4 el número 532, ó sea á 2128, y el grupo de

100 sumandos iguales á 2128, equivale (caso anterior) á 212800.

30. Explicados estos dos últimos casos, es muy fácil explicar el caso general. Sea, por ejemplo, multiplicar 5048 por 3028. Segun la idea que hemos dado de la multiplicacion, multiplicar 5048 por 3028 es hallar un tercer número que sea respecto de 5048 lo que 3028 es respecto de la unidad; pero 3028 se compone de la unidad repetida 3028 veces, luego el número que se busca habrá de componerse de 5048 repetido 3028 veces, esto es, que para determinar el producto pedido hay que repetir 3028 veces el multiplicando 5048, ó lo que es lo mismo, 8 veces, más 20 veces, más 3000 veces, ó lo que es lo mismo, hay que multiplicarle por 8 (**28**), y despues por 20 (**29**), y despues por 3000 (**29**), y sumar, por último, estos productos parciales.

Luego, regla: *Para multiplicar un número de varias cifras por otro de varias cifras tambien, se toma por multiplicador aquél que tenga ménos* (**28**, Esc.), *para mayor comodidad, ó cualquiera si son de igual número de cifras: se coloca el multiplicador debajo del multiplicando, procurando que se correspondan las unidades de un mismo órden: se multiplica el multiplicando por las unidades del multiplicador; despues se multiplica por las decenas del multiplicador, colocando este producto debajo del anterior y un lugar más á la izquierda; despues se multiplica por las centenas del multiplicador, colocando este producto debajo del anterior y un lugar más á la izquierda, y así sucesivamente: por último, se reunen estos productos parciales, y la suma será el producto pedido.*

Esta regla se funda en el postulado de que, *para multiplicar un número por otro, se puede descomponer el multiplicador en varios sumandos, multiplicar sucesivamente el multiplicando por cada uno de ellos, y la suma de los productos parciales será el producto total.*

Disposicion de la operacion:

$$\begin{array}{r} 73504 \\ 6023 \\ \hline 220512 \\ 147008 \\ 441024 \\ \hline 442714592 \end{array}$$

31. Observaciones. 1.ª El segundo producto parcial debe terminar en *cero*, puesto que el multiplicador es 20 (**29**); pero en la práctica no se pone ese cero, que nada implica en la suma que hay que hacer despues, y por eso se pone la primera cifra 8 un lugar más á la izquierda.

El cuarto debe terminar en 3 ceros, puesto que el multiplicador es 6000 (**29**); pero en la práctica se dispensan por la misma razon anterior, poniendo la primera cifra 4 dos lugares más á la izquierda que el anterior; y en general, por cada cero que haya en el multiplicador se corre á la izquierda la primera cifra del producto parcial inmediato, un lugar más que el que corresponde correr por cada producto parcial.

2.ª Si el multiplicador es igual á la unidad, el producto es igual al multiplicando. Por consiguiente, todo número puede considerarse como el producto de sí mismo por la unidad. Así: $7 = 7 \times 1$.

Si el multiplicador es mayor que la unidad, como sucede en todos los casos que hemos considerado, el producto es mayor que el multiplicando.

Si el multiplicador es menor que la unidad, el producto es menor que el multiplicando.

Si el multiplicador ó el multiplicando, ó ambos, son ceros, el producto es cero.

Escolio. Recordando la descomposicion que se hizo del multiplicador en el caso general (**30**), y convirtiendo el multiplicador en multiplicando (**27**), el producto de $(4 + 2) \times 3$ será igual á $4 \times 3 + 2 \times 3$; es decir, que *el producto de una suma indicada por un número entero, se obtiene multiplicando cada sumando por dicho número*; la suma de los productos parciales será el producto total.

Ejemplo: $(4+2+5+1) \times 3 = 4\times3+2\times3+5\times3+1\times3 = 12+6+15+3=36.$

Y, si están descompuestos multiplicando y multiplicador en sumandos, se obtiene el producto, multiplicando todos los sumandos del multiplicando por cada uno de los sumandos del multiplicador; la suma de los productos parciales será el producto total.

Ejemplo: $(4+2)\times(3+5)=4\times3+2\times3+4\times5+2\times5 =12+6+20+10=48.$

Como el producto de $(5 - 3) \times 2$ equivale al producto de $2 \times (5 - 3)$; y éste se obtiene tomando el 2 por sumando cinco veces, y despues tres veces, restando seguidamente el segundo resultado del primero; *el producto de una diferencia indicada por un número entero, se obtiene multiplicando el minuendo y sustraendo por dicho número, y restando el segundo producto parcial del primero*, el resto será el producto pedido.

Ejemplo: $(10-4)\times3=10\times3-4\times3=30-12=18.$

Corolario. Siendo $(4+2+5+1)\times 3 = 4\,.\,3 + 2\,.\,3 + 5\,.\,3 + 1\,.\,3$,
y $(10-4)\times 3 = 10\,.\,3 - 4\,.\,3$:

Recíprocamente $4\,.\,3+2\,.\,3+5\,.\,3+1\,.\,3 = (4+2+5+1)\times 3$,
y $10\,.\,3 - 4\,.\,3 = (10-4)\,.\,3$

A esto se llama *transformar en producto una suma ó una diferencia indicada, ó sacar fuera de un paréntesis el factor comun á los términos de una suma ó diferencia indicada.*

3.ª El producto indicado $5 \times 2 \times 4 \times 9$ significa que 5 se ha de multiplicar por 2, y el producto por 4, y el producto por 9: de suerte que

$$5\times 2\times 4\times 9 = 10\times 4\times 9 = 40\times 9 = 360.$$

32. Vamos á demostrar una nueva propiedad, que es una ampliacion del *teorema* (**27**), á saber:

Teorema. Un producto de varios factores enteros no se altera cualquiera que sea el órden de éstos.

Sea el mismo producto indicado $5 \times 2 \times 4 \times 9$.

Demostremos primeramente que *dos factores consecutivos*, por ejemplo, 2 y 4, *pueden mudar de lugar sin que el producto se altere.*

En efecto:

$$5\times 2 = 5+5:$$

y como dos cosas iguales no dejan de serlo, porque se multipliquen por un mismo número, multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 4, tendrémos

$$5\times 2\times 4 = 5\times 4 + 5\times 4;$$

y como $\quad 5\times 4 + 5\times 4 = 5\times 4\times 2$

y dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí

$$5\times 2\times 4 = 5\times 4\times 2:$$

multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 9, tendrémos finalmente,

$$5\times 2\times 4\times 9 = 5\times 4\times 2\times 9.$$

Y variando de lugar dos factores consecutivos las veces convenientes, cada factor podrá ocupar el lugar que se quiera, sin que el producto se altere, que es lo que demuestra el principio general.

Corolario. Para multiplicar un producto de varios factores enteros por un número entero, basta multiplicar uno cualquiera de dichos factores por el entero.

En efecto, si queremos multiplicar $2 \times 5 \times 6$ por 7 ; puesto que

$14 \times 5 \times 6 = 2 \times 7 \times 5 \times 6 = 2 \times 5 \times 6 \times 7$, la proposicion es exacta.

Y el producto de varios números es igual al de todos los factores de ellos.

Otro. Para multiplicar dos ó más factores, uno ó más de los cuales terminen en ceros, se verifica el producto prescindiendo de los ceros y poniendo á continuacion del producto tantos ceros como sigan al factor ó factores.

En efecto, puesto que

$$470 \times 500 \times 78000 = 47 \times 10 \times 5 \times 100 \times 78 \times 1000 =$$
$$47 \times 5 \times 78 \times 10 \times 100 \times 1000 = 47 \times 5 \times 78 \times 1000000,$$

la proposicion es cierta.

Disposicion de dos ejemplos :

47000	47000
2300	23
141	141
94	94
108100000	1081000

33. Teorema. *El número de cifras de un producto de dos factores es igual á tantas, ó á tantas ménos una, como tienen los dos factores juntos.*

En efecto, el producto 508×23 está comprendido entre

$$508 \times 10$$
y. . . . . 508×100

Pero 508×10 consta de 4 cifras; 508×100 consta de 5 cifras : luego la proposicion es cierta.

Escolio general. De todo lo expuesto se deduce que en la multiplicacion de dos factores *si se añade ó quita á uno de ellos un número entero cualquiera*, el producto tendrá tantas unidades más, ó ménos, como exprese el producto de dicho número por el otro factor.

Si se multiplica cada uno de los factores por un número entero, el producto resulta multiplicado por el producto de dichos números.

Si se multiplica uno de los factores por un número entero, el producto resulta multiplicado por el mismo número.

Productos iguales de dos factores con un factor igual, tienen tambien igual el otro factor. De dos productos desiguales que tienen un factor comun, el producto mayor tendrá mayor el otro factor : y de dos productos iguales con factores diferentes, el que tenga mayor ó menor multiplicando (ó multiplicador), tendrá menor ó mayor multiplicador (ó multiplicando).

Por último, aunque la operacion debe empezarse por la derecha, puede seguirse el órden que se quiera en la multiplicacion del multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador, con tal que al sumar los productos parciales se coloquen unos debajo de otros, correspondiéndose unidades de órdenes iguales.

Abreviaciones de la multiplicacion de los números enteros.

Para multiplicar un número entero por 11 basta colocar dicho número encima ó debajo de sí mismo, un lugar más á la derecha ó izquierda, y la suma de los dos números así dispuestos será el producto pedido.

$$\text{Así, } 324 \times 11 = \begin{array}{r} 324 \\ 324 \\ \hline 3564 \end{array}, \text{ ó bien } \begin{array}{r} 324 \\ 324 \\ \hline 3564 \end{array}.$$

Para multiplicar un número entero por otro compuesto de dos cifras, una de las cuales sea la unidad, siendo la otra una cifra significativa cualquiera, se multiplica por ésta el número propuesto, y se coloca encima ó debajo de él, el producto, corriéndolo un lugar á la derecha, si dicha cifra es de unidades simples, y un lugar á la izquierda, si fuere ó representare decenas.

$$\text{Así, } 528 \times 14 = \begin{array}{r} 528 \\ 2112 \\ \hline 7392 \end{array}$$

$$\text{Pero } 528 \times 41 = \begin{array}{r} 528 \\ 2112 \\ \hline 21648 \end{array}$$

DIVISION.

34. Division, en general, *es una operacion que tiene por objeto, dados dos números, determinar un tercero que exprese las veces que el primero contiene al segundo.*

Segun la explicacion que hemos dado de la *multiplicacion*, el producto se compone de uno de los factores (puesto que cualquiera puede ser multiplicando, siendo el otro multiplicador), repetido tantas veces como unidades tenga el otro ; esto es, el producto contiene á uno de los factores tantas veces como unidades tenga el otro factor; luego tambien puede decirse que la division tiene por objeto, *dado un producto de dos factores y uno de éstos, hallar el otro factor*, y bajo este aspecto la operacion es inversa de la multiplicacion, y por consiguiente el *divisor*, multiplicado por el *cociente*, da el *dividendo*.

El número que contiene al segundo se llama *dividendo ;* el segundo, *divisor ;* el resultado, *cociente* (del latin QUOTIES : *cuantas veces);* y la accion de hallar este resultado, *dividir*.

Y atendida la acepcion de estas tres primeras palabras, á saber : dividendo (lo que se ha de dividir), divisor (el que divide) y cociente (cuantas veces), pudiera decirse tambien que el objeto de la division es *dividir un número en tantas partes iguales como unidades tiene otro,* y es en efecto una de las aplicaciones que tiene esta operacion á los casos ordinarios de la vida.

Para expresar la division se ponen entre el dividendo y el divisor dos puntos (:) signo que se lee *dividido* ó *partido por :* tambien se usa una raya, escribiendo encima el *dividendo* y debajo el *divisor*.

$24 : 8$, ó bien $\frac{24}{8}$, se lee : 24 partido ó dividido por 8.

35. Así como hemos podido (**25**) determinar un producto por medio de adiciones sucesivas, podrémos determinar un *cociente* por medio de sustracciones, y éste será igual al número de sustracciones que puedan hacerse.

Sea el mismo ejemplo $24 : 8 = 3$.

3 es el cociente ; porque, siendo 3 las sustracciones que pueden verificarse, 3 son las veces que el *divisor* 8 está contenido en el *dividendo* 24.

Disposicion de la operacion :

$$
\begin{array}{rl}
24 & \\
8 & \\
\hline
16 & 1.^{er} \text{ resto.} \\
8 & \\
\hline
8 & 2.^{o} \quad \text{id.} \\
8 & \\
\hline
0 & 3.^{o} \quad \text{id.}
\end{array}
$$

A poco que se practique este procedimiento, se conocerá lo largo y penoso que es, cuando el cociente tenga muchas unidades. Así, seguirémos otro más breve.

36. Si el dividendo tiene una cifra ó dos y el divisor una, para

Cárlos Botello

determinar el cociente basta saber de memoria la tabla de Pithagoras.

Así, $8:2=4$; $42:7=6$; $81:9=9$; $38:9=4$ y quedan 2 de residuo.

37. Se dice que la *division es exacta* cuando el dividendo contiene al divisor un número entero de veces, como en los ejemplos $8:2=4$, $42:7=6$, $81:9=9$, y este cociente se llama exacto.

Y se dice que la division es *inexacta* cuando el dividendo no contiene al divisor un número entero de veces. En este caso se llama *cociente entero* el mayor número entero de veces que el dividendo contiene al divisor; y este cociente es inexacto ó incompleto.

Segun la idea que hemos dado de la division (**34**), en la division exacta, el divisor, multiplicado por el cociente, produce el dividendo: y en la inexacta, el divisor, multiplicado por el cociente, producen un número que se diferencia del dividendo en otro número llamado *resto* ó *residuo*.

En el ejemplo $38:9$, 4 es el cociente entero, y 2 el residuo ó resto.

Es evidente que, si al producto del divisor por el cociente se añade el residuo, se obtiene el dividendo.

Tambien es evidente que el resto ha de ser menor que el divisor; pues de lo contrario, el divisor estaría todavía contenido en el dividendo una ó más veces.

38. Vamos á dividir un número de más de dos cifras por otro de una.

Postulado: *para dividir un número por otro, se puede descomponer el dividendo en varios sumandos, dividir sucesivamente cada uno de ellos por el divisor, y la suma de los cocientes parciales será el cociente total.* Sea, por ejemplo, $2289:7$.

La operacion se dispone en esta forma:

```
 22,8,9 | 7
 21      327
 ------
   18
   14
 ------
    49
    49
 ------
     0
```

Como 7×100, ó sea 700, es menor que el dividendo 2289, y 7×1000, ó sea 7000, es mayor que 2289, el cociente será mayor que 100 y menor que 1000; esto es, tiene 3 cifras; es decir, que el cociente consta de unidades, decenas y centenas.

Considerada esta operacion como inversa de la multiplicacion, el dividendo 2289 contiene los productos respectivos del divisor 7 por las unidades, decenas y centenas del cociente sumados entre sí. Y como el divisor, multiplicado por las unidades del cociente, puede dar unidades, ó unidades y decenas, que se amalgaman con las decenas del producto del divisor por las decenas del cociente, no se sabe en qué parte del dividendo se halla aquel producto, que, conocido que fuera, y partido por el divisor, nos diera las unidades del cociente.

Por una consideracion análoga se prueba que no puede empezarse determinando la cifra de las decenas del cociente.

Pero el divisor 7, multiplicado por las centenas del cociente, lo ménos que da son centenas: luego este producto se halla desde el 2 en adelante, ó sea en el grupo de 22 centenas del dividendo, que, partido por el divisor, nos dará las centenas del cociente. Y con esto queda explicado porqué, empezando la adicion, sustraccion y multiplicacion por la derecha, ó sea por las unidades inferiores, la division se empieza por la izquierda, ó sea por las superiores.

Y dirémos, 22 centenas divididas por 7, dan 3 centenas, ó sean las unidades superiores del cociente.

Pero en las centenas del dividendo puede haber unas que procedan del producto del divisor por las centenas del cociente, y otras que procedan del producto del divisor por las decenas y unidades del cociente: conviene distinguir unas de otras, para que, conocidas las del segundo orígen, las reduzcamos á decenas, y sumadas con las decenas del dividendo, podamos partirlas por el divisor para determinar las decenas del cociente.

Y dirémos: 3 centenas del cociente por 7 son 21, que se ponen debajo de las 22 del dividendo, y restadas de éstas, obtenemos 1 que componen 10 decenas, que sumadas con las 8 decenas del dividendo, son 18 (lo que en la práctica se llama bajar el 8).

Por las razones antedichas, aún no podemos determinar las unidades del cociente.

Pero como el producto del divisor por las decenas del cociente lo ménos que da son decenas, este producto se halla desde el 8 en adelante, ó sea en el grupo de 18 decenas, que, partido por el divisor, nos dará las decenas del cociente, porque el cociente es siempre de la especie de lo que se divide.

Y dirémos, 18 entre 7, á 2 decenas para el cociente.

Y como en las decenas del dividendo puede haber unas que procedan del producto del divisor por las decenas del cociente, y otras que procedan del producto del divisor por las unidades del cociente, conviene distinguir unas de otras, para que, conocidas las del segundo orígen, las reduzcamos á unidades y, sumadas con las unidades del dividendo, podamos partirlas por el divisor para determinar las unidades del cociente.

Y dirémos : 2 decenas del cociente por 7 son 14, que se ponen debajo de las 18 del dividendo, y restadas de éstas, obtenemos 4, que componen 40 unidades, y sumadas con las 9 unidades del dividendo, son 49 (lo que en la práctica se llama bajar el 9).

Y dirémos finalmente : 49 entre 7, á 7 unidades para el cociente exactamente ; y, multiplicadas las 7 unidades por el divisor 7, dan por producto 49, que, restadas de las 49 unidades del dividendo, presentan por resto *cero*.

Los dividendos 22 centenas, 18 decenas y 49 unidades se llaman *dividendos parciales* para distinguirlos del dividendo *total* ó *principal*. Y los cocientes 3 centenas, 2 decenas y 7 unidades, se llaman *cocientes parciales*, que juntos componen el *cociente total*.

Escolio 1.° En la práctica no se escriben los productos debajo de los dividendos parciales para hacer las sustracciones sucesivas. Se dice simplemente : 7 × 3 son 21, á 22 va 1 ; 7 × 2 son 14, á 18 van 4; 7 × 7 son 49, á 49 van 0.

Esto se explicará más adelante.

Escolio 2.° Cuando el divisor tiene una sola cifra, la operacion puede efectuarse tambien de esta manera :

$$\begin{array}{c} 2289 \\ 327 \end{array}$$

Diciendo : la sétima parte de 2 unidades de millar es *cero*, que no se escribe á la izquierda de los números enteros, y quedan de resto 2, que valen 20 centenas, que, sumadas con las dos centenas, son 22.

La sétima parte de 22 centenas es 3, y queda 1 de resto, que vale 10 decenas, y sumadas con las 8 decenas, son 18.

La sétima parte de 18 decenas es 2, y quedan 4 de resto, que valen 40 unidades, que sumadas con las 9 unidades, son 49.

Por último, la sétima parte de 49 unidades son 7, sin resto ninguno.

39. Sea otro ejemplo :

$$\begin{array}{r|l} 5{,}2{,}5 & 5 \\ \cline{2-2} 2\ 5 & 105 \\ 0 & \end{array}$$

Como $5 \times 100 = 500$, número menor que el dividendo 525 y $5 \times 1000 = 5000$, mayor que 525, el cociente es mayor que 100 y menor que 1000 ; tiene centenas, decenas y unidades.

Dirémos : 5 centenas divididas por 5 dan 1 centena ó sean las unidades superiores del cociente.

$5 \times 1 = 5$, que restadas de las 5 del dividendo, dan *cero* por resto.

2 decenas divididas por 5 decenas dan *cero*.

$5 \times 0 = 0$, que restado de las 2 del dividendo, nos dan 2 por resto, lo cual indica que en este caso y sus análogos el cociente no tiene unidades de este órden, y que hay que reducir las 2 decenas á unidades, que son 20, y sumadas con las que tiene el dividendo, son 25, que partidas por 5 dan 5 unidades sin resto; pues $5 \times 5 = 25$, á 25 *cero* de resto.

De lo dicho se deduce la regla siguiente : *Para dividir un número de varias cifras por otro de una, se separa en el dividendo la primera de la izquierda por una coma, si es mayor que el divisor ó igual á éste; y si es menor, se separan dos ; esta ó estas dos cifras se dividen por el divisor ; el cociente se multiplica por él y se resta el producto del dividendo parcial : á la derecha del resto (que será menor que el divisor) se escribe la cifra siguiente del dividendo total, formando así el segundo dividendo parcial, que se divide por el divisor : el nuevo cociente parcial se multiplica por éste, y el producto se resta del segundo dividendo parcial ; y así se continúa hasta obtener un resto final cero, en cuyo caso la division es exacta, ó hasta que se obtenga un resto final menor que el divisor, en cuyo caso habrémos obtenido el cociente entero de una division inexacta.*

40. *Para dividir un número que termine en ceros por* 10, 100, 1000 *y en general por la unidad seguida de ceros, se suprimen en el número propuesto tantos como acompañen á la unidad, y el nuevo número que se obtiene, hecha esta supresion, es el cociente exacto.* Sea, por ejemplo, 527000:100 : el cociente será 5270. En efecto, el 5 que se refería á centenas de millar, ahora se refiere á unidades de millar ; el 2 que se refería á decenas de millar, ahora se refiere á centenas ; y el 7 que se refería á unidades de millar, ahora se refiere á decenas : luego, si las diversas partes del número 527000 se han hecho 100 veces menores, el número 527000 se ha hecho 100 veces menor ó queda dividido por 100.

Disposicion de la operacion :

$$527000:100=5270 \qquad 4800:10=480 \qquad 72800:100=728 \qquad 50:10=5.$$

41. *Para dividir un número entero cualquiera por* 10, 100, 1000, *y en general por la unidad seguida de ceros, basta separar á la derecha por medio de una coma tantas cifras como ceros acompañen* *á la unidad: lo que quede á la izquierda de la coma será el cociente entero; y lo que se aparte á la derecha, el resto.* Sea, por ejemplo, 3928 á dividir por 10, que es lo mismo que 3920 unidades + 8 unidades divididas por 10. Pero 3920 : 10 da por cociente exacto 392; las 8 unidades son un número menor que el divisor: luego 8 será el resto.

Sea otro ejemplo, 5749 : 100 = 5700 unidades + 49 unidades divididas por 100. Pero 5700 : 100 da por cociente exacto 57; las 49 unidades son un número menor que el divisor: luego 49 será el resto.

42. Pasemos á considerar el caso en que teniendo dividendo y divisor varias cifras el cociente no tiene más que una.

Sea por ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 5585 & 693 \\ \cline{2-2} 41 & 8 \end{array}$$

Siendo el dividendo menor que 6930, ó sea menor que 693 × 10, es evidente que el cociente no puede tener dos cifras, puesto que 10 es el menor número posible de dos cifras: tendrá pues una sola cifra. La cuestion está reducida á determinar esta cifra. Esta determinacion se hace por tanteo para el cual hay varias reglas. Nosotros seguirémos la que establece Mr. Bourdon, que es como sigue:

Se divide mentalmente el dividendo parcial (en el ejemplo presente dividendo parcial y dividendo total son una misma cosa) *por la cifra que se trata de ensayar, sin detenerse en tanto que las cifras obtenidas para los cocientes parciales de esta division mental sean iguales á las cifras correspondientes del divisor propuesto; pero en el momento en que una de las cifras que se obtienen para cociente sea mayor ó menor que su cifra correspondiente del divisor, se suspende esta operacion: si es mayor, la cifra que se ensaya es buena; si es menor, la cifra que se ensaya es grande, y disminuida en una unidad, se ensaya la nueva cifra como anteriormente.*

Ensayemos la cifra 9 en el presente ejemplo, diciendo:

Novena parte de 55=6, cifra igual á la primera del divisor.

Novena parte de 18=2, cifra menor que la segunda del divisor. El 9 es grande.

Con efecto, cualquiera que sea la cifra que falta por determinar del cociente de 5585 : 9, este cociente es de la forma 620 y tantas, esto es, menor que 693. Pues si ha de ser un número menor que 693 el que multiplicado por 9 dé un producto que pueda restarse del dividendo 5585, es evidente que 693 × 9 no puede restarse de 5585; y como el divisor 693 no puede disminuir, disminuirémos la cifra que estamos ensayando para cociente, y ensayarémos la cifra 8, diciendo :

Octava parte de 55=6, cifra igual á la primera del divisor.

Octava parte de 78=9, cifra igual á la segunda del divisor.

Octava parte de 65=8, cifra mayor que la correspondiente del divisor. El 8 es buena cifra.

Con efecto, si 8 × 698 puede restarse de 5585, con mayor razon 8 × 693 podrá restarse, pues que 693 es menor que 698.

Puesta la cifra 8 en el cociente, se multiplica por el divisor, y el producto se resta del dividendo de esta manera:

8 × 3=24; á 25 va 1. Y hay que tener presente que, para que las cinco unidades del dividendo se conviertan en 25, se han tomado mentalmente 2 unidades del órden inmediatamente superior: por manera que al hacer la sustraccion en el órden inmediato, se considera disminuida la cifra del minuendo ó aumentada la del sustraendo en dos unidades (**22**) diciendo :

8 × 9=72, más 2, son 74, á 78 van 4. Para que las 8 decenas se conviertan en 78, se han tomado mentalmente 7 unidades del órden inmediato superior: por manera que al hacer la sustraccion en el órden inmediato, se considerará disminuida la cifra del minuendo ó aumentada la del sustraendo en 7 unidades (**22**), diciendo :

8 × 6=48, más 7 son 55, á 55 va 0, que no se pone á la izquierda de los enteros.

Esta division es inexacta: cociente entero 8, y resto 41.

43. Entremos ya á explicar el caso más general de la division de los números enteros, que es aquél en el cual dividendo, divisor y cociente tienen varias cifras.

Sea por ejemplo :

```
3320,0,7,6 | 374
 328 0     |-----
  28 8 7     8877
   2 6 9 6
       7 8
```

Haciendo una consideracion análoga á la que hicimos anteriormente (**42**), el cociente que buscamos tiene cuatro cifras, esto es, unidades de millar, centenas, decenas y unidades; y el producto del divisor 374 por las unidades de millar del cociente se halla en las 3320 unidades de millar del dividendo: luego recíprocamente, dividiendo 3320 por 374 (**42**) obtenemos las unidades de millar del cociente, que segun la regla de tanteo (**42**) son 8.

Se multiplica el cociente parcial 8 por el divisor, y el producto se resta del dividendo parcial 3320 (42) para conocer las unidades de millar del dividendo que proceden del producto del divisor por las centenas, decenas y unidades del cociente. En el presente caso son 328, que componen 3280 centenas; y como no hay centenas que agregarles, 3280 centenas son las que se dividen por 374 para obtener las centenas del cociente, que segun la misma regla de tanteo son 8.

Se multiplica el cociente parcial 8 por el divisor, y el producto se resta del dividendo parcial 3280 para conocer las centenas que proceden del producto del divisor por las decenas y unidades del cociente. En el caso presente son 288 que componen 2880 decenas, más 7 que hay en el dividendo, son las 2887 decenas que hay que dividir por 374 para obtener las decenas del cociente que, segun la misma regla de tanteo, son 7.

Se multiplica el cociente parcial 7 por el divisor, y el producto se resta del dividendo parcial 2887, para conocer las decenas que proceden del producto del divisor por las unidades del cociente. En el presente caso son 269 que componen 2690 unidades, más 6 que hay en el dividendo, son las 2696 unidades que hay que dividir por 374 para obtener las unidades del cociente, que, segun la misma regla de tanteo son 7.

Esta division es tambien inexacta: cociente entero 8877; y resto 78.

Despues de todo lo expuesto, puede darse la siguiente REGLA GENERAL:

Para dividir un número de varias cifras por otro tambien de varias, se escribe el divisor á la derecha del dividendo, separados por una raya vertical, poniendo otra horizontal debajo del divisor.

Se separan á la izquierda por una coma en el dividendo tantas cifras como hay en el divisor, ó una más si el conjunto de las primeras es menor que el divisor; la última cifra de la derecha de este dividendo parcial indica el órden superior de unidades del cociente. Se divide este número por el divisor; el cociente se escribe debajo del mismo, se multiplica por éste, y el producto se resta del primer dividendo parcial.

Al lado del resto se escribe la cifra siguiente del dividendo, se divide este número, así formado, por el divisor; este nuevo cociente se escribe á la derecha del primero; se multiplica el divisor por este segundo cociente, y se resta el producto del segundo dividendo parcial.

Al lado de este resto se escribe la cifra siguiente del dividendo;

se divide este número así formado, por el divisor: este nuevo cociente se escribe á la derecha del segundo; se multiplica el divisor por este tercer cociente parcial, y se resta el producto del tercer dividendo parcial.

Y se continúa de la misma manera hasta escribir la cifra de las unidades del dividendo á la derecha del resto correspondiente, y obtener, despues de la determinacion del último cociente parcial y de la multiplicacion y sustraccion consiguientes, un resto final igual á cero, ó menor que el divisor.

44. Observaciones. 1.ª Para conocer si una cifra colocada en el cociente es buena, se observará la regla siguiente:

No es grande si el producto de dicha cifra por el divisor se puede restar del dividendo parcial correspondiente.

No es pequeña, si se obtiene un resto ménor que el divisor.

Fundados en que el producto del divisor por el cociente es igual al dividendo, estableceremos estas otras:

2.ª Para dividir un *producto indicado* de dos ó más factores por un número que divida exactamente á uno de ellos, se divide éste por el divisor, y el cociente multiplicado por el otro ú otros factores, será el cociente total.

Así, $24\times7\times5:3=8\times7\times5$; porque $8\times7\times5\times$ divisor $3=8.3.7.5$(37)$=$ dividendo $24.7.5$. Y por consiguiente un producto indicado de varios factores queda dividido por uno de éstos con suprimir dicho factor. Así, $5\times3\times7:3=5\times7$ porque cociente $5\times7\times$ divisor $3=5\times7\times3=$ dividendo $5\times3\times7$.

3.ª La suma ó diferencia indicadas de dos números se divide por un número entero, dividiendo sus términos por dicho número, y la suma ó diferencia de los cocientes parciales será el cociente total.

Así, $(10+6):2=(10:2)+(6:2)=8$. $(10-6):2=(10:2)-(6:2)=2$.

4.ª El número de cifras del cociente es igual á la diferencia entre las del dividendo y las del divisor, ó á esta diferencia más una.

5.ª Sólo en casos tan raros como el presente, es indiferente empezar la division por la izquierda ó por la derecha, y áun así, es preciso dar á los cocientes parciales la colocacion correspondiente.

$$\begin{array}{l|l} 3{,}6{,}0{,}9 & 3 \\ \cline{2-2} 0\ 0\ 0\ 0 & 1203 \end{array}$$

6.ª Aumentando el dividendo ó disminuyendo el divisor, el *cociente* aumenta.

Disminuyendo el dividendo ó aumentando el divisor, el *cociente* disminuye.

7.ª El cociente no se altera dividiendo ó multiplicando el dividendo y divisor por un mismo número entero.

Sea el ejemplo 24 : 6=4; de donde 24=6×4.

Y como cantidades iguales no dejan de serlo multiplicándolas ó dividiéndolas por un mismo número entero, se verifican tambien las igualdades 72=18×4, 12=3×4; la primera de las cuales se deduce del ejemplo propuesto, multiplicando el dividendo y divisor por 3, y la segunda dividiendo el dividendo y divisor por 2; las cuales demuestran la proposicion.

Pero si el dividendo solo, ó el divisor solo, se multiplica por un número entero ó se divide por uno de sus divisores, el cociente quedará multiplicado ó dividido por el mismo número en el primer caso, y dividido ó multiplicado en el segundo.

Tambien se deduce que multiplicando ó dividiendo el dividendo y divisor de una division inexacta, por un número entero, el *cociente entero* no se altera, pero el resto queda multiplicado ó dividido por dicho número.

8.ª De aquí que: si dividendo y divisor terminan en ceros, pueden suprimirse en ambos igual número de ceros, para simplificar la operacion sin alterar el cociente.

9.ª Si el divisor es igual á la unidad, el cociente es igual al dividendo.

De donde todo número entero puede considerarse como el cociente de sí mismo partido por la unidad.

Si el divisor es mayor que la unidad, el cociente es menor que el dividendo.

Si el divisor es menor que la unidad, el cociente es mayor que el dividendo.

Si el dividendo es mayor que el divisor, el cociente es mayor que la unidad.

Si el dividendo es menor que el divisor, el cociente es menor que la unidad.

Si dividendo y divisor son iguales, el cociente es igual á la unidad.

Si el dividendo es cero y el divisor un número cualquiera, el cociente es tambien cero.

10.ª Cocientes iguales con dividendo ó divisor comun, tienen iguales divisor ó dividendo: de dos cocientes desiguales que tienen el dividendo comun, el mayor corresponde al menor divisor: y de dos cocientes desiguales que tienen el divisor comun, el mayor corresponde al mayor dividendo.

ELEVACION Á POTENCIAS.

45. ELEVACION Á POTENCIAS, en general, *es una operacion que tiene por objeto formar los productos sucesivos que pueden obtenerse, multiplicando por sí mismo varias veces un número dado.*

Esos productos toman el nombre de *potencias*, y la accion de formar los productos se llama *elevar á potencias*.

Así, *potencia segunda* de un número (que tambien se llama *cuadrado*) es el producto que resulta de multiplicarle por sí mismo una vez, ó de tomarle por factor dos veces.

Tercera potencia de un numero (que tambien se llama *cubo*) es el producto que resulta de multiplicarle por sí mismo dos veces, ó de tomarle por factor tres veces.

Cuarta potencia de un número es el producto que resulta de multiplicarle por sí mismo tres veces, ó de tomarle cuatro veces por factor.

Y en general, potencia de cierto grado de un número es el producto que se obtiene multiplicando dicho número por sí mismo tantas veces ménos una, como unidades tenga el grado de la potencia, ó tomándole por factor tantas veces como unidades tenga dicho grado.

El *grado* de una *potencia* de un número se indica por medio de otro número más pequeño, colocado á la derecha y un poco más elevado, llamado *exponente*.

Las potencias segunda, tercera, cuarta, quinta, etc., se indican por medio de los exponentes 2, 3, 4, 5, etc., en esta forma:

$$9 \times 9 = 9^2, \quad 9 \times 9 \times 9 = 9^3, \quad 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4, \text{ etc.}$$

Es evidente que para saber formar las potencias de los números basta saber multiplicar. Sin embargo, recomendamos á los alumnos que conserven en la memoria los cuadrados y cubos de los diez primeros números que están en la tabla siguiente:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10:	son los diez primeros números.
1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100:	son sus *cuadrados* respectivos.
1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000:	son sus *cubos* respectivos.

46. Como consecuencia de esto, y recordando lo expuesto en la multiplicacion, podemos afirmar:

1.° *Que el cuadrado de cualquier número compuesto de la unidad seguida de ceros, es igual á la unidad seguida de doble número de ceros.*

Así, $10^2 = 10 \,.\, 10 = 100$; $100^2 = 100 \,.\, 100 = 10000$·
$1000^2 = 1000 \,.\, 1000 = 1000000$.

2.° *Que el cuadrado de cualquier cifra significativa seguida de ceros, se compone del cuadrado de dicha cifra seguida de doble número de ceros.*

Así, $30^2 = 30 . 30 = 900$; $400^2 = 400 . 400 = 160000$; $7000^2 = 7000 . 7000 = 49000000$.

3.° *Que el cubo de la unidad seguida de ceros, se compone de la unidad seguida de triplo número de ceros.*

Así, $10^3 = 10 . 10 . 10 = 1000$; $100^3 = 100 . 100 . 100 = 1000000$; $1000^3 = 1000 . 1000 . 1000 = 1000000000$.

4.° *Que el cubo de cualquier número compuesto de una cifra significativa seguida de ceros, es igual al cubo de dicha cifra seguida de triplo número de ceros.*

Así, $40^3 = 40 . 40 . 40 = 64000$; $700^3 = 700 . 700 . 700 = 343000000$; $8000^3 = 8000 . 8000 . 8000 = 512000000000$.

5.° *Que las potencias segunda, tercera, cuarta, etc. del número* 10 (al cual hemos llamado *base* de nuestro sistema de numeracion) *son cabalmente las unidades de tercero, cuarto, quinto órden*, etc., del mismo sistema.

Así, $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$; $10^5 = 100000$, etc.

6.° *Que un número entero sin exponente puede ser considerado* (si se quiere) *como afectado del exponente* 1, que nada influye sobre la manera de ser de un número ni como factor ni como divisor, ni como exponente.

Así, $3 = 3^1$; $7 = 7^1$.

Pero no nos atrevemos á decir *potencia de primer grado*, que para nosotros siempre ha sido una cosa que carece de sentido. Como lo es tambien el que se considere que un número pueda entrar una sola vez por factor. ¿Factor de qué, si no hay producto? ¿De qué producto proviene la llamada *primera potencia?* Las potencias empiezan *por la segunda*, como que *dos* es el *mínimum* de factores que han de entrar á formar producto.

7.° *Que una potencia cualquiera de la unidad es igual á la unidad.*

Así, $1^2 = 1$; $1^3 = 1$; $1^{10} = 1$.

8.° *Que las potencias de todo número entero crecen y decrecen, segun que el exponente de la potencia crece ó decrece.*

Así, $7^3 > 7^2$; y recíprocamente $7^2 < 7^3$.

Este signo $>$ ó $<$, inventado por el inglés Harriot en el siglo XVII, sirve para indicar que una cantidad es mayor que otra, colocando la abertura del lado de la cantidad mayor. Así, $30>20$, ó $20<30$, se lee 30 mayor que 20, ó 20 menor que 30.

9.° *Que las potencias de un producto de varios factores se forman elevando cada factor á la misma potencia, y multiplicándolos despues entre sí.*

En efecto: $(2\times8\times15)^2 = (2\times8\times15)\times(2\times8\times15)=2\times8\times15\times$
$2\times8\times15=2\times2\times8\times8\times15\times15$ (**32**).

y reuniendo los factores iguales por medio del exponente 2, tendrémos por último:

$$(2\times8\times15)^2=2^2\times8^2\times15^2.$$

Sea $(3\times4\times10)^3=(3\times4\times10)\times(3\times4\times10)\times(3\times4\times10)=$
$3.4.10.3.4.10.3.4.10=3.3.3.4.4.4.10.10.10$ (**32**).

y reuniendo los factores iguales por medio del exponente 3, tendrémos por último:

$$(3\times4\times10)^3=3^3\times4^3\times10^3.$$

47. Acabámos de decir que las *potencias* de los números se obtienen por medio de multiplicaciones. Esto no obstante, vamos á explicar otro método de formar el cuadrado y el cubo de los números enteros mayores que 10, para deducir de ahí más adelante la manera de extraer la raíz cuadrada y cúbica de los mismos.

Sea, en primer lugar, el cuadrado de la suma indicada de dos números enteros: éste *se compone del cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

Sea, por ejemplo, $(5+7)^2$.

Con efecto: $(5+7)^2$ es igual á $(5+7)\times(5+7)$, esto es, $(5+7)\times5$ más $(5+7)\times7$; pero $(5+7)\times5$ es igual á $5\times5+7\times5$, esto es, $5^2+7\times5$; y $(5+7)\times7$ es igual á $5\times7+7\times7$, esto es, $5\times7+7^2$;

y como de estos cuatro productos parciales, son iguales el segundo y tercero; podemos reunirlos bajo la forma de uno solo multiplicado por 2, y el producto total será $5^2+2\times5\times7+7^2$, conforme con el enunciado.

Corolario. *La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al duplo del menor más* 1.

Así $\left.\begin{array}{l}(7+1)^2=7^2+2.7+1\\ 7^2=7^2\end{array}\right\}$ resto: $2\times7+1$. $\begin{array}{l}(10+1)^2=10^2+2.10+1\\ 10^2=10^2\end{array}$

Diferencia de los segundos miembros. . . . . . $2.10+1$.

Así, la diferencia entre 9^2 y 8^2 es 17; esto es, $81-64=17=2.8+1$.

Corolario 2.º Considerando ahora que todo número entero mayor que 10 puede descomponerse en decenas y unidades, dirémos que su cuadrado consta de tres partes, á saber: *cuadrado de las decenas, más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.*

Ejemplo: $347^2 = 34^2$ decenas $+ 2 . 34$ decenas $\times 7$ unid. $+ 7^2$ unid. $=$ 1156 centenas $+$ 476 decenas $+$ 49 unidades $=$ 120409 unidades, ó sea,
$347^2 = (340+7)^2 = 340^2 + 2 . 340 . 7 + 7^2 = 115600 + 4760 + 49 = 120409$
ó sea $347 \times 347 = 120409$.

Escolio. Tengamos muy presente, que aunque el cuadrado de las decenas da *centenas*, y el doble producto de decenas por unidades da *decenas*; como el cuadrado de unidades puede dar *unidades* solamente (cuadrados de 1, 2 y 3), y puede dar *unidades* y *decenas*, (cuadrados de 4, 5, 6, 7, 8 y 9), hay muchos números enteros (la generalidad de ellos) en los cuales existen decenas procedentes de la tercera parte del cuadrado, ó sea del cuadrado de las unidades, amalgamadas con el duplo de decenas por unidades; y existen tambien centenas procedentes de las demas partes del cuadrado amalgamadas con el cuadrado de las decenas.

48. Sea, en segundo lugar, el cubo de la suma indicada de dos números enteros: éste se compone *del cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero multiplicado por el segundo, más el triplo del primero multiplicado por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

Sea el mismo ejemplo $(5+7)^3$.

Con efecto: $(5+7)^3$ es igual á $(5+7) \times (5+7) \times (5+7)$,

en cuya multiplicacion indicada hay tres factores. y como el producto de los dos primeros es

$$5^2 + 2 . 5 . 7 + 7^2,$$

$(5+7)^3$ será igual á $(5^2+2 . 5 . 7+7^2) \times (5+7)$, esto es,
$(5^2+2 . 5 . 7+7^2) \times 5 + (5^2+2 . 5 . 7+7^2) \times 7$.
Pero $(5^2+2 . 5 . 7+7^2) \times 5$, es igual á $5^3 + 2 . 5^2 . 7 + 7^2 . 5$;
y $(5^2+2 . 5 . 7+7^2) \times 7$ es igual á $5^2 . 7 + 2 . 5 . 7^2 + 7^3$;

y como de estos seis productos parciales hay dos, el segundo en que dos factores entran dos veces, y el cuarto en que los mismos factores entran una, podemos reunirlos haciéndolos entrar tres veces; y haciendo la misma consideracion respecto de los factores tercero y quinto, en el primero de los cuales entran una vez dos factores que entran dos veces en el segundo, el producto total será

$$5^3 + 3 . 5^2 . 7 + 3 . 5 . 7^2 + 7^3,$$

conforme con el enunciado.

Corolario. *La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más 1.*

Asi $(7+1)^3 = 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 1$
$(7)^3 = 7^3$. resto $3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 1$

$(10+1)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1.$
$(10)^3 = 10^3$

Dif. de los segundos miembros. . $3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1.$

Así la dif. entre 9^3 y 8^3 es 217, esto es, 729—512, esto es, $3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 1$.

Corolario 2.° Considerando nuevamente, que todo número entero mayor que 10 puede descomponerse en decenas y unidades, dirémos, que su cubo consta de cuatro partes, conviene á saber: *cubo de las decenas, más el triplo del cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.*

Ejemp.: $347^3 = 34^3$ dec. $+ 3 \cdot 34^2$ dec. 7 unid. $+ 3 \cdot 34$ dec. 7^2 unid. $+ 7^3$ unid.
ó sea, $(347)^3 = (340+7)^3 = 340^3 + 3 \cdot 340^2 \cdot 7 + 3 \cdot 340 \cdot 7^2 + 7^3 =$
$39304000 + 2427600 + 49980 + 343 = 41781923,$
ó sea, $347 \times 347 \times 347 = 120409 \times 347 = 41781923.$

Escolio. Tengamos tambien muy presente que, aunque el cubo de las decenas da *millares*; y el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades da *centenas*; y el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades da *decenas*; como el cubo de las unidades puede dar *unidades* solamente (cubos de 1 y 2), y puede dar *unidades* y *decenas* (cubos de 3 y 4), y puede dar *unidades*, *decenas* y *centenas* (cubos de 5, 6, 7, 8 y 9), hay muchos números enteros (la generalidad de ellos) en los cuales existen decenas, (y áun centenas), procedentes de la cuarta parte del cubo, ó sea del cubo de las unidades, amalgamadas con el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, (ó con el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades); y existen tambien unidades de millar procedentes de las demas partes del cubo amalgamadas con el cubo de las decenas.

Escolio 2.° *El número de cifras del cuadrado de un número entero, es duplo del de éste, ó duplo ménos una* (**33**):

Y el del cubo es triplo, ó triplo ménos una, ó triplo ménos dos.

EXTRACCION DE LAS RAICES DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

49. Extraccion de las raíces, en general, *es una operacion que tiene por objeto, dado un número, determinar otro que, multiplicado por sí mismo una ó más veces, produzca el número propuesto.*

El segundo número, se llama *raiz;* y la accion de determinarle *extraer raíces.*

Así, *raiz segunda ó cuadrada* de un número es otro que, multiplicado por sí mismo una vez, ó tomado dos veces por factor, ó elevado al *cuadrado,* produce el número dado.

Raiz cúbica de un número es un segundo número que, multiplicado por sí mismo dos veces, ó tomado tres veces por factor, ó elevado al *cubo,* produce el número dado.

Y en general, *raiz* de cierto grado de un número es un segundo número que, multiplicado por si mismo tantas veces ménos una como tenga el grado, ó tomado por factor tantas veces como unidades tenga, ó elevado á una potencia de igual grado, produce el número dado.

La extraccion de raíces se indica con el signo $\sqrt{\ }$, llamado *radical,* y se lee *raiz de:* su orígen es el mismo que el de la adicion. Para indicar el *grado de la raiz* se coloca un número entre las ramas, llamado *índice;* si la raíz es la segunda ó cuadrada no se usa *índice.*

Así decimos, $\sqrt{9}$ raíz cuadrada de nueve, $\sqrt[3]{8}$ raíz cúbica de ocho.

Es evidente que la raíz cuadrada y la raíz cúbica de la unidad, es la misma unidad.

La *extraccion de raices* es una operacion inversa de la *elevacion á potencias.*

Extraccion de la raíz cuadrada.

50. Al extraer la raíz cuadrada de un número puede suceder que haya, ó nó, un segundo número que, elevado al cuadrado, produzca el propuesto:

Si le hay, se le llama raíz cuadrada exacta, y el número dado se llama *cuadrado perfecto:*

Si no le hay, lo que se determina es la *raíz cuadrada* del mayor cuadrado contenido en el número propuesto, que, respecto de éste, se llama *raiz cuadrada entera.*

La tabla del número **45** nos dice que en los cien primeros números hay diez que son cuadrados perfectos y noventa que no lo son.

En la extraccion de la raíz cuadrada de los números enteros pueden ocurrir dos casos generales, segun que el número propuesto no pase de 100, ó que sea mayor que 100; y este último es el que merece que le tratemos con más detenimiento.

Porque para resolver el primero basta saber la tabla de que acabamos de hacer mencion:

Ejemplos: $\sqrt{81}=9$, $\sqrt{80}=8$, $\sqrt{50}=7$.

En el primero de estos ejemplos, como el número propuesto 81 es un cuadrado perfecto, su raíz cuadrada 9 es exacta.

El número 80 del segundo ejemplo no es cuadrado perfecto, y no puede tener raíz exacta: pero está comprendido entre los cuadrados 64 y 81 (de 8 y 9 respectivamente); por eso se pone por *raíz entera* el 8, que es la raíz del mayor cuadrado contenido en 80, haciendo por ahora caso omiso del *resíduo* $16 < 2 \cdot 8 + 1$.

Haciendo las mismas consideraciones, se pone en el tercer ejemplo la *raíz entera* 7, que es la raíz del mayor cuadrado contenido en 50, haciendo tambien caso omiso del *resíduo* $1 < 2 \cdot 7 + 1$.

51. Consideremos el 2.° caso.

Propongámonos extraer la raíz cuadrada del número 17698897, cuya indicacion se hace así, $\sqrt{17698897} =$.

Este número es > 1000000 y < 100000000, que son los cuadrados respectivos de 1000 y de 10000; luego su raíz está comprendida entre 1000 y 10000; es decir, su raiz cuadrada consta de cuatro cifras, y no puede tener cinco.

Como la raíz pedida consta de cuatro cifras, no sólo se compone de decenas y unidades, sino que además las decenas constan de tres cifras, que á su vez se componen de decenas y unidades, constando estas últimas decenas de dos cifras, que á su vez se componen de decenas y unidades.

No podemos empezar determinando las unidades de la raíz, por no saber dónde está su cuadrado (**47**, Esc.); y, como el cuadrado de decenas da centenas, podemos afirmar que el cuadrado de las decenas está desde las centenas en adelante, y por eso separamos las dos primeras cifras de la derecha con una coma. Pero acabamos de ver que las decenas de la raíz total, por constar de tres cifras, tienen á su vez decenas parciales de dos cifras y unidades parciales; unidades que no pueden determinarse directamente por la razon anteriormente dicha; y como el cuadrado de esas decenas parciales da centenas, buscarémos ese cuadrado en las centenas del número 176988 desde el 9 en adelante, ó sea separando con una coma el período de dos cifras siguiente al que ántes separamos. Pero estas decenas parciales de las que acabamos de hablar constan de dos cifras, y se componen tambien á su vez de decenas y unidades parciales; unidades que no pueden determinarse directamente por la razon tantas veces dicha; y como el cuadrado de esas nuevas decenas parciales da siempre centenas, buscarémos ese cuadrado en las centenas del número 1769, desde el 7 en adelante, ó sea separando con una coma el período de dos cifras siguientes al último que separamos. Y dirémos: el mayor cuadrado contenido en 17 es 16, su raiz es 4, y

Carlos Botello

ésta es la cifra de las decenas de las decenas de las decenas de la raíz total (ó centenas de las decenas), ó sean millares de la raíz total, que escribimos á la derecha del signo de igualdad.

Se forma el cuadrado de 4, y se resta de 17, y el resto se reduce á unidades que, juntas con 69, nos darán el número donde se encuentre el duplo de decenas por unidades más cuadrado de unidades de la raíz de 1769, y dirémos: cuadrado de 4 es 16, á 17 va 1 centena, no procedente del cuadrado de las decenas, sino de las otras dos partes del cuadrado de la raíz del número 1769; esa centena vale 100 unidades, que juntas ó sumadas con las 69 (pues esto significa bajar el siguiente período) que el mismo tiene, nos dan el número 169. No sabemos dónde está el cuadrado de las unidades; pero sabemos que el duplo de decenas por unidades está desde el 6 en adelante (**47**); separando, pues, el 9 con una coma, á la izquierda hay un producto de tres factores, á saber, *duplo* × *decenas* × *unidades* que se transforma en un producto (**47**) de dos factores, á saber, *duplo de decenas*×*unidades*, (realizando el producto de *duplo* × *decenas* en *duplo de decenas*) y dividiendo el 16 por 8 (ó sea dividiendo el producto de ((2 × decenas) × (unidades)) por el factor (2 × decenas) estarémos seguros de obtener las unidades de la raíz del número 1769, que es 2. Esta cifra, puesta en la raíz á la derecha del 4, nos da el número 42, que es la raíz del número 1769 por una parte, y por otra, forma las decenas de la raíz del número 176988.

Ya se ha restado del número 1769 el cuadrado de las 4 decenas; para restar de él todo el cuadrado de su raíz 42, sólo falta restar el duplo de decenas por unidades, más el cuadrado de unidades; lo cual verificarémos, escribiendo el cociente obtenido 2 á continuacion del divisor 8, formando el número 82, que, multiplicado por el cociente 2, da cierto producto que se resta del dividendo 16 seguido de la cifra 9, formando el número 169, y diciendo: 2 por 2, son 4 (cuadrado de unidades), que se escribe para restar debajo del 9, y 8 por 2, son 16 (duplo de decenas por unidades), que se escribe á la izquierda, dándonos el resto 5; si esta sustraccion no hubiese sido posible, porque el sustraendo fuese mayor que el minuendo, esto nos probaría que la cifra que era buena para el cociente de la division, era sin embargo grande para la raíz, y se rebajaría en una ó más unidades, hasta hacer posible la sustraccion; en el presente ejemplo la cifra 2 es buena.

Ni la sustraccion que acabamos de verificar ha sido una operacion de lujo; por el contrario, ha sido una sustraccion necesaria para poner en evidencia las 5 centenas que hay en el número 176988, procedentes del duplo de decenas por unidades, más el cuadrado de unidades de su raíz, cuyas decenas son el número 42: esas 5 centenas componen 500 unidades, agregadas á las cuales las 88 del número 176988 (que eso significa bajar el siguiente período 88), nos dan el número 588 en el cual se encuentra el duplo de decenas por unidades, más el cuadrado de unidades de su raíz, y cuyas unidades no podemos determinar directamente por la razon tantas veces dicha; pero como sabemos que el duplo de decenas por unidades da decenas, esto es, sabemos que se encuentra desde el 8 (decenas) en adelante: por eso separamos con una coma la cifra de las unidades, y consideramos á la izquierda de dicha coma el número que contiene el producto sabido de tres factores, que transformamos en otro de dos, uno de los cuales sea el duplo de decenas, y las unidades el otro. Dividamos, pues, lo que está á la izquierda de la coma por el duplo de 42, ó sea duplo de decenas, y el cociente será el otro factor, ó bien las unidades de la raíz del número 176988.

Al intentar la division enunciada, tropezamos con el inconveniente de que el dividendo 58 es menor que el divisor 84: esto nos dice sencillamente que pongamos 0 en el cociente; que la raíz que se busca no tiene unidades de segundo órden, razon por la cual pondrémos tambien 0 en la raíz.

Por lo demás, el razonamiento y la operacion siguen la misma marcha; queremos decir que hay que considerar ahora el número 588 como la diferencia entre el cuadrado de las 420 decenas de la raíz total y las centenas del número propuesto (porque $480 \times 0 = 0$, á 588 van 588): hay que reducirlas á unidades y sumarlas con las 97 unidades del número propuesto (que esto significa bajar el último período), para obtener el número 58897, en el cual se encuentran el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades de la raíz total. Digamos por última vez que no se sabe dónde se encuentra el cuadrado de las unidades; pero que el duplo de las decenas por las unidades da decenas, y estará desde el 9 en adelante; para indicar lo cual separarémos con una coma la cifra 7 de las unidades. Considerando, finalmente, al producto que está á la izquierda de la coma compuesto de los dos factores, duplo de decenas, y unidades; y considerando que conocidas las 420 decenas de la raíz total, podemos formar su duplo 840; es claro que, dividiendo aquel producto por este factor, obtendrémos por cociente el otro factor, ó sea la cifra de las unidades de la raíz total. Pongamos tambien el cociente 7 en el divisor, haciendo el número 8407 que, multiplicado por el cociente 7, da el producto 58849, que, restado de 58897, nos da el resto 48.

El número 17698897 no es cuadrado perfecto : hemos determinado su *raíz cuadrada entera*, 4207, que es la raíz cuadrada del mayor cuadrado contenido en él (sea cual fuere), y el residuo 48.

Y que esta es la verdadera raíz entera se demuestra fácilmente. No es mayor de lo que debe ser ; puesto que se han hecho las sustracciones sucesivas : tampoco es menor de lo que debe ser, porque, siendo la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos (**47**, Cor.) igual al duplo del menor más 1, para que en la raíz cupiese siquiera una unidad más, era necesario que el resíduo fuese igual ó mayor á $2 \times 4207 + 1$; pero el resíduo 48 es evidentemente $< 2 \cdot 4207 + 1$; luego la raíz obtenida es la verdadera raíz entera.

Tambien podíamos haber conocido que, terminando el número propuesto en la cifra 7, no podía ser cuadrado perfecto. Y ampliándo esta consideracion, recordemos que los cuadrados de las unidades (**45**, Tabla) terminan en 1, 4, 5, 6, y 9, luego no serán cuadrados perfectos los números que terminen en 2, 3, 7 ú 8.

Ni los que terminen en 5, si no le precede inmediato el 2.

Ni los que terminen en número impar de ceros, como tres ceros, cinco ceros, etc.

La disposicion de la operacion es así :

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{17,69,88,97} = & 4207 \\
16 & \\
\hline
16,9 & 82 \\
16\ 4 & 2 \\
\hline
58,8 & 84 \\
 & 0 \\
5889,7 & 8407 \\
5884\ 9 & 7 \\
\hline
4\ 8 &
\end{array}
$$

$$(4207)^2 + 48 = 17698897 \ ,\ldots\ 48 < 2 \times 4207 + 1.$$

De todo lo expuesto podemos concluir que : *Para extraer la raiz cuadrada de un número mayor que* 100 *se divide en períodos de á dos cifras empezando por la derecha, pudiendo tener una sola cifra el último período de la izquierda :* el número de cifras de la raiz es igual al de períodos.

Se extrae la raíz del primer período de la izquierda, y se tendrá la cifra del órden superior de la raíz pedida. El cuadrado de esta cifra se resta de dicho primer período y á la derecha del resto se baja el siguiente período, del cual se separa con una coma la última cifra de la derecha, y dividiendo lo que queda á la izquierda por el duplo *de la cifra hallada , el cociente será la segunda cifra de la raíz pedida. Esta cifra se escribe tambien á la derecha del divisor, y multiplicando el número de esa manera formado por el cociente, se resta el producto del dividendo seguido de la cifra separada. Á la derecha del resto se baja el siguiente período, del cual se separa, con una coma, la última cifra de la derecha , y dividiendo lo que queda á la izquierda por el duplo de la parte de raíz hallada, el cociente será la tercera cifra de la raíz pedida. Y así se continúa hasta bajar el último período de la derecha , y obtener la cifra de las unidades de la raíz total.*

ESCOLIO. *Si algun dividendo parcial es menor que su correspondiente divisor, se pone cero en la raíz ; y á la derecha del dividendo, seguido de la cifra separada con una coma, se baja el siguiente período y se continúa la regla establecida.*

Si al intentar hacer alguna de las sustracciones prescritas, apareciese el sustraendo mayor que el minuendo, sería efecto de que la cifra del cociente es buena para la division , pero mala para la raíz, y se rebaja una ó más unidades á dicho cociente, hasta hacer posible la sustraccion.

El residuo, si le hay, debe ser menor que el duplo de la raíz hallada más 1.

ESCOLIO 2.° Para extraer la raíz cuadrada de un producto de varios factores, se extrae la raíz cuadrada de cada uno de ellos y se multiplican entre sí estas raíces, puesto que $(2 \times 8 \times 15)^2$ es $2^2 \cdot 8^2 \cdot 15^2$ (**46**, 9.°)

Extraccion de la raíz cúbica.

52. Al extraer la raíz cúbica de un número puede suceder que haya, ó nó, un segundo número que elevado al cubo produzca el propuesto.

Si le hay, se le llama raíz cúbica exacta ; y el número dado se llama *cubo perfecto*.

Si no le hay, lo que se determina es la *raíz cúbica* del mayor cubo contenido en el número propuesto, que respecto de éste se llama *raíz cúbica entera*.

La tabla del número **45** nos dice que en los mil primeros números hay diez que son cubos perfectos, y nuevecientos noventa que no lo son.

Tambien en la extraccion de la raíz cúbica de los números enteros pueden ocurrir dos casos generales, segun que el número propuesto no pase de 1000, ó que sea mayor que 1000 ; y este segundo es el que merece más atencion de parte nuestra.

Porque para resolver el primero basta saber la tabla de que acabamos de hacer mencion.

Ejemplos : $\sqrt[3]{512}=8$, $\sqrt[3]{365}=7$.

En el primero de estos ejemplos, como el número propuesto 512 es un cubo perfecto, su raíz cúbica es exacta.

El número 365 del segundo ejemplo no es cubo perfecto, y no puede tener raíz exacta : pero está comprendido entre 343 y 512 que son los cubos respectivos de 7 y 8 ; por eso ponemos por raíz entera el 7, que es la raíz del mayor cubo contenido en 365, haciendo por ahora caso omiso del residuo $22 < 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 1$.

53. Ocupémonos ya del segundo caso. Y sea propuesto para extraer su raíz cúbica el número 91632508641, cuya indicacion se escribe así :

$$\sqrt[3]{91632508641} =$$

Como este número está comprendido entre 1000000000 y 1000000000000, que son los cubos respectivos de 1000 y 10000, claro es que su raíz está comprendida entre 1000 y 10000, esto es, es mayor que 1000 y menor que 10000, es decir, que su raíz consta de cuatro cifras y se compone por consecuencia de decenas y unidades; y recíprocamente el número propuesto contiene (**48**, Cor. 2.°) el cubo de las decenas, más el triplo del cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades, más el triplo de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades de la raíz pedida.

Ahora bien ; si supiéramos dónde está el cubo de las unidades, extrayendo su raíz, obtendríamos la cifra de las unidades de la raíz que buscamos; y esto no puede verificarse, porque en general (**48**, Esc.) no se sabe ni puede saberse en qué parte del número propuesto se encuentra el cubo de las unidades : y por eso la operacion se hace de unidades de órden superior á unidades de órden inferior, esto es, de izquierda á derecha, como la division y como la extraccion de la raíz cuadrada.

Pero si no se sabe dónde está el cubo de las unidades, se sabe que el cubo de las decenas da unidades de millar, es decir, sabemos que el cubo de las decenas se encuentra desde los 8 millares en adelante, y por eso separamos las tres primeras cifras de la derecha con una coma. Y como la raíz total consta de cuatro cifras, claro es que sus decenas constan de tres, esto es, las decenas de la raíz total se componen á su vez de decenas y unidades : estas unidades parciales no pueden ser determinadas inmediatamente, porque no sabemos en qué parte del número 91632508 se encuentra el cubo de ellas ; pero si no sabemos dónde se encuentra el cubo de estas unidades, sabemos que el cubo de las decenas, que siempre da unidades de millar, se encuentra desde los 2 millares en adelante, y por eso separamos con una coma otro período de tres cifras. Y como las decenas de la raiz total constan de tres cifras, sus decenas parciales constarán de dos cifras, esto es, sus decenas parciales se componen todavía de decenas y unidades : no sabemos determinar inmediatamente estas unidades, porque no sabemos en qué parte del número 91632 se encuentra el cubo de ellas ; pero como sabemos que el cubo de las decenas da unidades de millar, ya tenemos bastantes datos para afirmar que el cubo de estas últimas decenas se encuentra desde 1 millar en adelante, y por eso separamos con una coma otro período de tres cifras. Así, para conocer las decenas de que acabamos de hablar, dirémos :

El mayor cubo contenido en 91 es 64, su raíz es 4, y ésta es la cifra de las decenas de las decenas de las decenas de la raíz total, ó sean centenas de las decenas de la raíz total, ó sean unidades de millar de la raíz total, que escribirémos á la derecha del signo de igualdad. Si formamos ahora el cubo de 4 decenas, ó sea 64, y lo restamos del primer período de la izquierda, que es 91 millares, y reducimos el resto 27 á unidades, que hacen 27000, y á éste agregamos 632 unidades (que esto significa bajar el período siguiente) del número 91632, obtenemos un número 27632 que contiene las otras tres partes del cubo de la raíz de dicho número 91632, ó sean el triplo del cuadrado de decenas por unidades, más el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, más el cubo de unidades. Considerando que este triplo del cuadrado de decenas por unidades da siempre centenas, y que por tanto en el presente ejemplo estará desde las 6 centenas en adelante, si separamos con una coma el grupo de las dos últimas cifras de la derecha, á la izquierda de la coma quedará el triplo indicado, que, aunque producto de tres factores, nosotros podemos darle la forma de producto de dos factores, ó sean triplo del cuadrado de decenas uno, y las unidades el otro ; y considerando que la cifra 4 son las decenas de la raíz del número 91632, podemos formar el triplo de su cuadrado, que es 48, y dividiendo por él el 276 que está á la izquierda de la coma, obtendrémos por cociente las unidades de la raíz de 91632, que es 5, y puesto á la derecha del 4, forman el número 45, que es la raíz del número 91632 por una parte, y por otra las decenas de la raíz de 91632508.

Si formamos, pues, el cubo de esas 45 decenas y lo restamos de las 91632 unidades de millar del número 91632508, y reducimos el resto 507 á unidades, que hacen 507000, y agregamos á ellas las 508 (que esto significa bajar el período siguiente), obtenemos un número 507508, en el cual están contenidas las otras tres partes del cubo de la raíz del número 91632508. Pero el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades da centenas, y en el presente caso estará por lo mismo desde las 5 centenas en adelante; luego, si separamos con una coma las dos últimas cifras de la derecha y dividimos lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la parte de raíz hallada (que son las 45 decenas dichas), el cociente será la cifra de las unidades de la raíz del número 91632508.

Pero en el caso presente, el dividendo parcial 5075 es menor que el divisor 6075. Esto nos dice que la raíz no tiene unidades de este órden. pondrémos, pues, un cero en la raíz y seguirémos el razonamiento y la operacion.

Hemos determinado las decenas de la raíz que buscamos. Si formamos su cubo y lo restamos de los millares del número propuesto, y reducimos el resto á unidades simples, y les agregamos las 641 unidades del número dado (que esto significa bajar el período siguiente), obtenemos un número 507508641 que contiene las otras tres partes del cubo de la raíz pedida. No podemos determinar directamente la cifra de las unidades que nos falta; porque para ello era necesario saber en qué parte del número dado estaba su cubo para extraer su raíz, y esto no se sabe. Pero el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, que da centenas, estará desde las 6 centenas en adelante. Separemos las dos cifras de la derecha con una coma, y, dividiendo lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de las 450 decenas, obtendrémos por cociente las unidades simples de la raíz total, que es 8; y la raíz pedida es 4508.

El número 91632508641 no es un cubo perfecto: hemos determinado su raíz cúbica entera, 4508, que es la raíz cúbica del mayor cubo contenido en él; y el residuo de restar este cubo del número propuesto es igual á 20644129 que es $< 3 \times (4508)^2 + 3 \times 4508 + 1$; luego la raíz (**48**) no es menor de lo que debe ser: tampoco es mayor, puesto que al determinar cada cifra de la raíz se ha verificado la sustraccion consiguiente; luego la raíz obtenida es la verdadera raíz pedida.

No se da regla para conocer cuando un número *no es cubo perfecto*, por la cifra de su terminacion á la derecha; porque, segun la tabla (**45**), el cubo de las unidades termina indistintamente en cada una de las nueve cifras primeras.

Tenemos la costumbre de disponer la operacion de esta manera:

$$\sqrt[3]{91,632,508,641} = 4508 + \text{el residuo } 20644129.$$

64	
276,32	48
911 25	5
5 075,08	5075
911 250 00	0
5 075 086,41	607500
	8
91,611,864,512	
20 644 129	

$$(4508)^3 + 20644129 = 91632508641.$$

$$20644129 < 3 \times (4508)^2 + 3 \times 4508 + 1.$$

De la explicacion que antecede se deduce el precepto siguiente: *Para extraer la raiz cúbica de un número mayor que* 1000, *se divide en periodos de á tres cifras empezando por la derecha, pudiendo tener dos solas cifras ó una el último periodo de la izquierda: el número de cifras de la raiz es igual al de periodos.*

Se extrae la raiz del primer periodo de la izquierda, y se tendrá la cifra del órden superior de la raiz pedida. El cubo de esta cifra se resta de dicho primer periodo, y á la derecha del resto se baja el siguiente periodo, del cual se separan con una coma las dos últimas cifras de la derecha; y dividiendo lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la cifra hallada, el cociente será la segunda cifra de la raiz pedida. Se forma el cubo del número compuesto por las dos cifras halladas para la raiz, y ese cubo se resta de los dos primeros periodos de la izquierda del número dado. A la derecha del resto se baja el siguiente periodo, del cual se separan con una coma las dos últimas cifras de la derecha; y dividiendo lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la parte de raiz hallada, el cociente será la tercera cifra de la raiz pedida. Y así se continua, hasta bajar el último periodo de la derecha, y obtener la cifra de las unidades de la raiz total.

ESCOLIO. *Si algun dividendo parcial fuese menor que su correspondiente divisor, se pone cero en la raiz, y á la derecha del dividendo, seguido de las dos cifras separadas con una coma, se baja el siguiente periodo y se continúa la regla establecida.*

Si al intentar alguna de las sustracciones prescritas apareciese el sustraendo mayor que el minuendo, sería efecto de que la cifra del cociente era buena para la division, pero mala para la raiz, y se rebaja una ó más unidades á dicho cociente, hasta hacer posible la sustraccion.

El residuo, si le hay, debe ser menor que el triplo del cuadrado de la raíz hallada, más el triplo de la misma, más 1.

Escolio 2.° Para extraer la raíz cúbica de un producto de varios factores, se extrae la raíz cúbica de cada uno de ellos, y se multiplican entre sí estas raíces, puesto que

$$(3 \times 4 \times 10)^3 \text{ es } 3^3 . 4^3 . 10^3$$ (**46**, 9.°)

Nos permitirémos dirigir un ruego á los señores profesores. Hagan aprender de memoria á los alumnos las dos reglas dadas para extraer las raíces cuadrada y cúbica: pongan para empezar ejemplos fáciles, y despues otros en que vayan aumentando las dificultades, hasta llegar á éstos, ú otros más fuertes, en que los principiantes comprendan y comprueben esas mismas reglas.

CAPITULO II.

De la divisibilidad de los números enteros abstractos.

54. Se llama cifra *par* á cada una de éstas 2, 4, 6 y 8; é *impar* á cada una de las restantes: 1, 3, 5, 7 y 9. Y por analogía se llama *número par* el que termina en 0 ó cifra par, y *número impar* el que termina en cualquiera de las cifras, 1, 3, 5, 7 ó 9.

Hemos llamado (**28**) *duplo*, *triplo*, al producto de un número por 2, por 3. Tambien llamarémos *cuádruplo*, *quintuplo*, etc., al producto de un número por 4, 5, etc.; y en general, se llama *múltiplo* de un número á su producto por un entero: 15 es múltiplo de 5 y de 3, porque 15 es igual á 5 $\times$ 3.

Un número entero es divisible por otro, si hay un tercero que, multiplicado por el segundo, produzca el primero. Al primero se le llama tambien *múltiplo* del segundo, y el segundo recibe los nombres de *divisor*, *factor*, *submúltiplo* ó *parte alícuota* del primero.

Todo número es múltiplo y divisor de sí mismo.

Se llama *número primo absoluto*, ó sencillamente *número primo* ó *factor simple*, aquel número entero que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad, que es divisor de todo número, como 7, 11, 31.

Y *factor compuesto* es el que, además de ser divisible por sí mismo y por la unidad, lo es siquiera por otros dos números enteros, como 15, que es divisible por 1, 3, 5, 15.

Primos entre sí son aquellos números que no tienen más divisor comun que la unidad.

Es evidente que pueden darse multitud de casos de dos ó más factores compuestos que, no obstante, sean *primos entre sí*, como 12 y 25.

Tambien es claro que si un *número primo* no es divisor de un *factor compuesto*, estos dos números son primos entre sí.

Dos números *primos absolutos* son *primos entre sí*.

Se llaman números *primos entre sí dos á dos* aquéllos que, tomados de dos en dos, del modo que se quiera, son primos entre sí: para lo cual basta que cada uno de dichos números sea primo con cada uno de los demás.

55. *Si un número es divisor de otros varios, será tambien divisor de su suma.*

Si 5 es divisor de 10, 15 y 20, por ejemplo, tambien lo será de 10 + 15 + 20.

En efecto: $\begin{cases}10 = 2 \times 5\\ 15 = 3 \times 5\\ 20 = 4 \times 5\end{cases}$

Sumando ordenadamente estas igualdades, tenemos. . . . . . $10 + 15 + 20 = 2.5 + 3.5 + 4.5$

y sacando fuera de un paréntesis el factor 5, que es comun á los tres sumandos del segundo miembro, resulta. . . . . $10 + 15 + 20 = (2 + 3 + 4) \times 5.$

Pero el segundo miembro es un producto indicado de dos factores: uno, lo que está dentro del paréntesis; otro, el 5. Y como todo producto de dos factores es exactamente divisible por cada uno de ellos, el segundo miembro, y por consecuencia el primero será divisible por el factor 5, ó lo que es lo mismo, 5 es divisor de la suma 10 + 15 + 20.

56. *Si un número es divisor de uno de los dos factores de un producto, será tambien divisor del producto.*

Si 8 es divisor de 24, tambien lo será de 24 × 2.

En efecto: $24 \times 2 = 24 + 24.$

Pero 8 divide á cada uno de los suman dos del segundo miembro, por la hipótesis; luego dividirá á la suma, y tambien al primer miembro; luego 8 es divisor del producto 24 × 2.

Corolario 1.° *Si un número es divisor de otro, es tambien divisor de los múltiplos de este otro;* puesto que, siendo 8 divisor de 24, lo es de 24 × 2, lo será igualmente de 24 × 3, 24 × 4, etc.

Corolario 2.° *Si un número es divisor de otro, es tambien divisor de las potencias de este otro;* puesto que, siendo 8 divisor de 24, lo es del producto 24 × 2, tambien lo será de los productos 24 × 24, ó bien 24^2; 24 × 24 × 24, ó bien 24^3, etc.

Escolio. Hemos demostrado que, por ser 8 divisor del factor 24, lo es tambien del producto 24 × 2, ó lo que es lo mismo, que el número 24 × 2 es divisible por 8, por serlo ántes el número 24 que es factor de 24 × 2, ó lo que es lo mismo: *Si un número es divisible por otro, lo será tambien por todos los divisores de este otro.*

Es evidente que, *si dos ó más números tienen un divisor comun, el producto de ellos tendrá el mismo divisor.*

57. *Si un número es divisor de otros dos, es tambien divisor de su diferencia.*

Si 5 es divisor de 30 y 20, tambien lo será de 30 — 20.

En efecto : $\begin{cases} 30 = 6 \times 5 \\ 20 = 4 \times 5 \end{cases}$

Restando ordenadamente estas dos igualdades, la segunda de la primera, tenemos $30 - 20 = 6 \cdot 5 - 4 \cdot 5.$

Y sacando fuera de un paréntesis el factor 5, que es comun al minuendo y sustraendo que hay en el segundo miembro, resulta $30 - 20 = (6 - 4) \times 5.$

Pero el segundo miembro es un producto indicado de dos factores : uno, lo que está dentro del paréntesis ; otro, el 5. Luego el segundo miembro, y tambien el primero , será divisible por 5, ó lo que es lo mismo, 5 es divisor de la diferencia 30 — 20.

Corolario. Dos números consecutivos, como 4 y 5, son primos entre sí ; porque si tuvieran un divisor comun, éste había de ser tambien divisor de la diferencia, que es la unidad, que no tiene divisor alguno.

58. *Si un número es divisor de uno de dos sumandos y no lo es del otro, no será divisor de la suma ;* porque si lo fuera, tambien lo sería del segundo sumando, diferencia entre la suma y el primer sumando ; lo que es contra la hipótesis.

59. *Si un número es divisor del minuendo, y no lo es del sustraendo, no será divisor del resto. Si un número es divisor del sustraendo, y no lo es del minuendo, no será divisor del resto.*

1.° Porque si fuera divisor del resto, lo sería tambien del sustraendo, diferencia entre el minuendo y el resto ; lo que es contra la hipótesis.

2.° Porque si fuera divisor del resto, lo sería tambien del minuendo, suma del sustraendo y resto ; lo que es contra la hipótesis.

60. *Si un número es divisor de otros dos, es divisor del resto que resulta de dividir el mayor por el menor. Si un número es divisor del resto y del menor de los números dados, tambien lo será del mayor.*

Si tenemos para dividir 84 por 24, por ejemplo, se verifica :

1.° El número 6, divisor comun de 84 y 24, es tambien divisor del resto 12.

En efecto : segun lo expuesto (**37**), $84 - 24 \times 3 = 12$.

Pero todo número que divide á 24, divide á 24×3 (**56**, *Cor.* 1.°): y como todo número que divida á 84 y 24×3, divide á su diferencia (**57**), 6 que por la hipótesis es divisor de 84 y 24, lo será de 84 y 24×3, y por consiguiente será divisor de la diferencia $84 - 24 \times 3$, que es 12.

2.° El mismo divisor 6, ú otro cualquiera, con tal que lo sea del menor 24 y del resto 12, será tambien divisor del mayor 84.

En efecto: $24 \times 3 + 12 = 84$ (**37**).

Siendo, por la hipótesis, 6 divisor del menor 24, lo será igualmente de 24×3 (**56**, *Cor.* 1.°)

Tambien, por la hipótesis, es divisor del resto 12.

Luego, siendo 6 divisor del sumando 24×3 y del sumando 12, lo será (**55**) de la suma 84.

Caractéres de divisibilidad de un número entero por 10, 100 y en general por la unidad seguida de ceros.

61. *Todo número entero es, ó no, divisible por* 10 *segun que termine, ó nó, en un cero.*

Sea, por ejemplo, el número 580: este número es divisible por 10, porque termina en cero.

Con efecto: 580 *es igual á* 58×10. *Pero este producto es divisible por cada uno de sus factores* 58 *y* 10, *luego lo es por* 10; *luego el número propuesto* 580 *tambien es divisible por* 10.

Sea ahora el número 584. Este número no es divisible por 10, porque no termina en 0.

En efecto: puesto bajo la forma de

$$580 + 4 = 584,$$

vemos que el primer sumando 580 es divisible por 10, y el segundo 4 no lo es; luego la suma (**58**) ó sea el número 584, tampoco es divisible por 10.

Todo número entero es, ó nó, divisible por 100, *segun que termine, ó nó, en dos ceros.*

Sea, por ejemplo, el número 7500. Este número es divisible por 100, por terminar en dos ceros.

Con efecto: 7500 *es igual á* 75×100. *Pero este producto de dos factores es divisible por cada uno de ellos, y por lo mismo por* 100; *luego* 7500 *tambien es divisible por* 100.

Sea, ahora, el número 7524. Este número no es divisible por 100, porque no termina en dos ceros.

En efecto: puesto bajo la forma de

$$7500 + 24 = 7524,$$

vemos que el primer sumando es divisible por 100, y el segundo nó; luego la suma (**58**) ó sea el número 7500, tampoco es divisible por 100.

Y así se continúa explicando los casos en los cuales un número entero cualquiera es, ó no, divisible por la unidad seguida de ceros.

62. *Un número entero cualquiera es, ó no, divisible por* 2, *segun que la cifra de sus unidades sea, ó nó* 0 *ó cifra par.* Tambien se dice *segun que termine, ó nó, en* 0 *ó cifra par.*

Sea, por ejemplo, el número 920, divisible por 2, porque termina en 0.

En efecto, este número es divisible por 10 (**61**); luego tambien lo será (**56**, Esc.) por 2, que es uno de los divisores de 10.

Sea, ahora, el número 928, que es divisible por 2 porque termina en cifra par.

Con efecto: puesto bajo la forma de

$$920 + 8 = 928,$$

sabemos que el primer sumando, 920, es divisible por 2: el segundo, 8, lo es evidentemente; luego la suma (**55**) ó sea el número propuesto 928, tambien es divisible por 2.

Sea, por tercer ejemplo, el número 927. Este número no es divisible por 2, porque la cifra de sus unidades no es 0 ni cifra par; dicho de otro modo, porque no termina en 0 ni en cifra par.

Efectivamente: puesto bajo la forma de

$$920 + 7 = 927,$$

se ve que el primero de estos sumandos, 920, es divisible por 2; pero el segundo sumando, 7, evidentemente no es divisible por 2; luego la suma (**58**), ó sea el número 927, tampoco lo es.

Un número entero cualquiera es, ó nó, divisible por 5, *segun que la cifra de sus unidades sea, ó no,* 0 *ó* 5. De otro modo: *segun que termine, ó no, en* 0 *ó* 5.

Sea, por ejemplo, el número 340, divisible por 5, porque termina en 0.

En efecto: este número es divisible por 10 (**61**); luego tambien lo será (**56**, Esc.) por 5, que es uno de los divisores de 10.

Sea, ahora, el número 745, que es divisible por 5, porque termína en 5.

Con efecto: puesto bajo la forma de

$$740 + 5 = 745,$$

sabemos que el primer sumando 740, es divisible por 5: el segundo, 5, lo es evidentemente; luego la suma (**55**), ó sea el número propuesto 745 tambien es divisible por 5.

Sea, por tercer ejemplo, el número 749. Este número no es divisible por 5, porque no termina en 0 ni en 5.

Efectivamente: puesto bajo la forma de

$$740 + 9 = 749,$$

vemos que el primero de estos sumandos, 740, es divisible por 5; pero el segundo sumando, 9, evidentemente no es divisible por 5; luego la suma (**58**), ó sea el número 749, tampoco lo es.

63. *Un número entero cualquiera es, ó no, divisible por* 4 *ó por* 25, *segun que el conjunto de sus decenas y unidades sea, ó no, divisible por* 4 *ó por* 25.

Sea, por ejemplo, el número 800. Este número es divisible por 4 y por 25, porque lo es el conjunto de sus decenas y unidades.

En efecto, 800 es divisible por 100 (**61**); luego tambien lo será (**56**, Esc.) por 4 y por 25, que son factores ó divisores de 100.

Sea, ahora, el número 836. Este número es sólo divisible por 4, porque el conjunto 36 de sus decenas y unidades es sólo divisible por 4.

Con efecto: puesto bajo la forma de

$$800 + 36 = 836,$$

sabemos que el primer sumando, 800, es divisible por 4 y por 25; pero el segundo, 36, lo es por 4 y no lo es por 25; luego la suma ó sea el número propuesto 836, es divisible (**55**), por 4, y no lo es (**58**) por 25.

Sea, por tercer ejemplo, el número 825: este número es sólo divisible por 25, porque el conjunto 25 de sus decenas y unidades sólo es divisible por 25.

En efecto: puesto bajo la forma de

$$800 + 25 = 825,$$

se ve que el primero de estos sumandos, 800, es divisible por 4 y por 25; pero el segundo, 25, lo es por 25 y no lo es por 4; luego la suma ó sea el número propuesto, 825, es divisible (**55**), por 25, y no lo es (**58**) por 4.

Escolio. Tres son los múltiplos de 25 compuestos de dos cifras, á saber: 25, 50 y 75.

Sea, por último ejemplo, el número 839 que no es divisible por 4 ni por 25, porque el conjunto de sus decenas y unidades no es divisible por 4 ni por 25.

Efectivamente: puesto bajo la forma de

$$800 + 39 = 839,$$

vemos que el primero de estos sumandos, 800, es divisible por 4 y por 25; pero el segundo, 39, no es divisible por 4 ni por 25; luego la suma (**58**), ó sea el número propuesto, 839, tampoco es divisible por 4 ni por 25.

Corolario. No son cuadrados perfectos los números pares que no sean divisibles por 4.

Ni los impares que disminuidos de 1, no sean divisibles por 4.

64. *Un número entero cualquiera es, ó nó, divisible por* 8, *ó por* 125, *segun que el conjunto de sus centenas, decenas y unidades sea, ó no, divisible por* 8 *ó por* 125.

Sea, por ejemplo, el número 57000.

Este número es divisible por 8 y por 125, porque lo es el conjunto de sus centenas, decenas y unidades.

En efecto: 57000 es divisible por 1000 (**61**). Y como 1000 es igual á 125×8, dicho se está que 57000 es divisible (**56**, Esc.) por 8 y por 125.

Sea, ahora, el número 57512. Este número es divisible sólo por 8, porque el conjunto 512 de sus centenas, decenas y unidades es divisible por 8, y no lo es por 125.

Con efecto: puesto bajo la forma de

$$57000 + 512 = 57512,$$

se ve fácilmente que el primer sumando, 57000, es divisible por 8 y por 125; pero el segundo sumando 512 es divisible por 8 y no lo es por 125, luego la suma, ó sea el número propuesto 57512, es divisible (**55**) por 8, y no lo es (**58**) por 125.

Sea, por tercer ejemplo, el número 57250. Este número sólo es divisible por 125, porque el conjunto de sus centenas, decenas y unidades, 250, es divisible por 125, y no lo es por 8.

En efecto: puesto bajo la forma de

$$57000 + 250 = 57250,$$

observamos que el primer sumando, 57000, es divisible por 8 y por 125; pero el segundo sumando 250, si bien es divisible por 125, no lo es por 8; luego la suma, ó sea el número 57250 es divisible (**55**) por 125, y no lo es (**58**) por 8.

Sea, por último ejemplo, el número 57044 que no es divisible por 8 ni por 125, porque el conjunto de sus centenas, decenas y unidades no es divisible por 8 ni por 125.

Efectivamente: puesto bajo la forma de

$$57000 + 44 = 57044,$$

Carlos Botello

vemos que el primer sumando, 57000, es divisible por 8 y por 125; pero el segundo sumando, 44, ni es divisible por 8 ni por 125; luego la suma, ó sea el número propuesto 57044 (**58**), no es divisible por 8 ni por 125.

Escolio. Para conocer si un número entero es divisible por 2 ó 5 se atiende á la última cifra de la derecha: para conocer si lo es por 4 ó 25, que son los cuadrados respectivos de 2 y 5, se atiende á las dos últimas cifras, y para saber si lo es por 8 ó 125, que son los cubos respectivos de 2 y 5, hay que atender á las tres últimas cifras de la derecha.

Caractéres de divisibilidad de un número entero por 3, 9 y 11.

65. Conviene advertir que todo número divisible por 9 lo es (**56**, Esc.) por 3; aunque no todos los divisibles por 3 son divisibles por 9.

Así, 18, 36... divisibles por 9, lo son por 3. Pero 12, 15... divisibles por 3, no lo son por 9.

Esto advertido, vamos á demostrar, que *un número entero es, ó nó, divisible por* 9 *ó por* 3, *segun que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea, ó no, divisible por* 9 *ó por* 3. Quiere decir, que si esa suma es divisible por 9, tambien lo es el número dado; pero si la suma no lo es, tampoco lo es el número: y que si esa suma es divisible por 3, tambien lo será el número dado; pero si la suma no lo es, tampoco lo será el número dado. (Hablo á niños.)

Esta regla para conocer cuándo un número es divisible por 9 ó por 3 se funda en el principio siguiente:

66. *Todo número entero puede descomponerse en un múltiplo de* 9 *y de* 3, *más la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

Y este principio se funda en los dos lemas que siguen:

1.° *La unidad seguida de un número cualquiera de ceros puede descomponerse en un múltiplo de* 9 *y de* 3, *más la unidad.*

2.° *Toda cifra significativa seguida de un número cualquiera de ceros puede descomponerse en un múltiplo de* 9 *y de* 3, *más la cifra, sea cual fuere.*

Demostremos los dos lemas:

1.° Sea, por primer ejemplo, la unidad seguida de un cero, ó bien el número 10.

Y en efecto, 10 es igual á $9+1$, y por ser 9 múltiplo de sí mismo y de 3, tenemos:

$$10=9+1=\text{múltiplo de } 9 \text{ y de } 3+1.$$

Sirva de nuevo ejemplo la unidad seguida de dos ceros, ó bien 100.

Y en efecto, 100 es igual á 99 + 1; y por ser 99 múltiplo de 9 y de 3,

$$100 = 99 + 1 = \text{múltiplo de } 9 \text{ y de } 3 + 1;$$

y así de los demás ejemplos que se quiera; luego es cierto el lema 1.°

2.° Sea, por primer ejemplo, la cifra 7 seguida de un cero, ó bien el número 70.

En efecto, 70 es igual á 10×7. Y poniendo por 10 su valor obtenido en el lema anterior, tendrémos:

$$70 = 10 \times 7 = (\text{múltiplo de } 9 \text{ y de } 3 + 1) \times 7 = \text{m.° de } 9 \text{ y de } 3 + 7;$$

porque habiendo de repetir 7 veces cada uno de los dos sumandos que hay dentro del paréntesis, el múltiplo de 9 y de 3 repetido 7 veces es un múltiplo de 9 y de 3; más uno repetido 7 veces, igual á 7.

Sirva de nuevo ejemplo la cifra 8 seguida de dos ceros, ó bien 800.

En efecto, $800 = 100 \times 8$; y sustituyendo por 100 el valor suyo obtenido en el lema 1.°, tendrémos:

$$800 = (\text{múltiplo de } 9 \text{ y de } 3 + 1) \times 8;$$

verificando esta multiplicacion indicada en el segundo miembro, y teniendo presente que múltiplo de 9 y de 3 repetido 8 veces, ó cualquier número de veces, es siempre un múltiplo de 9 y de 3, tendrémos finalmente:

$$800 = 100 \times 8 = (\text{múltiplo de } 9 \text{ y de } 3 + 1) \times 8 = \text{múltiplo de } 9 \text{ y de } 3 + 8;$$

y así de los demas ejemplos que se quiera; luego es cierto el lema 2.°

Pasemos á demostrar el principio.

Sea un número entero cualquiera, como 71018: reduciendo sus unidades superiores é intermedias á unidades simples, se puede escribir así:

$$70000 + 1000 + 10 + 8.$$

Pero segun el lema 2.°. . .	70000 =	múltiplo de 9 y de 3 + 7
segun el lema 1.°. . .	1000 =	múltiplo de 9 y de 3 + 1
segun el lema 1.°. . .	10 =	múltiplo de 9 y de 3 + 1
Y evidentemente.	8 =	8

Sumando ordenadamente estas igualdades, y recordando que un múltiplo de 9 y de 3, repetido varias veces, no es más que un múltiplo de 9 y de 3, tendrémos:

$$71018 = \text{múltiplo de } 9 \text{ y de } 3 + 8 + 1 + 1 + 7.$$

Y escribiendo estos sumandos dentro de un paréntesis, á la manera de una suma indicada, tendrémos:

$$71018 = \text{múltiplo de } 9 \text{ y de } 3 + (8+1+1+7),$$

y queda demostrado el principio conforme con el enunciado que de él dimos.

La consecuencia que de este principio se saca es inmediata; porque representando el número 71018, que ha servido de ejemplo, una suma indicada de dos sumandos, el primero de los cuales es evidentemente divisible por 9 y por 3, dependerá necesariamente el que la suma (**58**), ó bien el número propuesto 71018, sea divisible por 9 ó por 3, dependerá, repetimos, de que lo sea el segundo sumando, que es cabalmente *la suma de los valores absolutos de las cifras que le componen*, conforme con la regla que ántes enunciamos. Luego *un número entero es, ó nó, divisible por* 9, etc.

67. *Un número entero es, ó nó, divisible por* 11, *segun que la diferencia entre la suma de las cifras de órden impar y las de órden par, contando de derecha á izquierda, sea, ó nó,* 0, 11 *ó múltiplo de* 11.

Esa regla se funda en el principio siguiente:

68. *Todo número entero puede descomponerse en un múltiplo de* 11, *más la diferencia que haya entre la suma de las cifras de lugar impar y las de lugar par, contando de derecha á izquierda.*

Y este principio se funda en los cuatro lemas que á continuacion se dicen:

1.º *La unidad, seguida de un número impar de ceros, puede descomponerse en un múltiplo de* 11 *ménos la unidad.*

2.º *La unidad, seguida de un número par de ceros, puede descomponerse en un múltiplo de* 11, *más la unidad.*

3.º *Toda cifra significativa, seguida de un número impar de ceros, puede descomponerse en un múltiplo de* 11, *ménos la cifra, sea cual fuere.*

4.º *Toda cifra significativa, seguida de un número par de ceros, puede descomponerse en un múltiplo de* 11, *más la cifra, sea cual fuere.*

Demostremos los cuatro lemas:

1.º Sea, por primer ejemplo, la unidad seguida de un cero, ó bien el número 10.

Y en efecto: 10 es igual á 11 — 1; y por ser 11 múltiplo de sí mismo, se verifica que

$$10 = 11 - 1 = \text{múltiplo de } 11 - 1.$$

Sirva de nuevo ejemplo la unidad seguida de tres ceros, ó bien el número 1000.

Y en efecto: 1000 es igual á $1001-1$; y como 1001 es igual á 91×11, 1001 es múltiplo de 11, y se verifica que

$$1000=1001-1=\text{múltiplo de } 11-1.$$

Y así de los demas ejemplos que se quiera. Luego es cierto el lema 1.°

2.° Sea, por primer ejemplo, la unidad seguida de dos ceros, ó bien el número 100.

Y en efecto: 100 es igual á $99+1$; pero 99 es múltiplo de 11, luego se verifica que

$$100=99+1=\text{múltiplo de } 11+1.$$

Sirva de nuevo ejemplo la unidad seguida de cuatro ceros, ó bien el número 10000.

Y en efecto, 10000 es igual á $9999+1$; pero 9999, como toda série de un número par de nueves, es un múltiplo de 11; luego se verifica que

$$10000=9999+1=\text{múltiplo de } 11+1\,;$$

y así para los demás ejemplos. Luego el lema es cierto.

3.° Sea, por primer ejemplo, la cifra 7 seguida de un cero, ó bien el número 70.

Y en efecto: 70 es igual á 10×7; y escribiendo en vez de 10 la expresion (múltiplo de $11-1$) que le es equivalente, segun el lema 1.°, resulta que

$$70=10\times 7=(\text{múltiplo de } 11-1)\times 7:$$

verificando esta multiplicacion indicada, y recordando que un múltiplo de 11 repetido cualquier número de veces, como 7, es un múltiplo de 11, y que el producto parcial de 1×7 ha de restarse del otro producto parcial, tendrémos:

$$70=10\times 7=(\text{múltiplo de } 11-1)\times 7=\text{múltiplo de } 11-7.$$

Sirva de nuevo ejemplo la cifra 8 seguida de tres ceros, ó bien el número 8000.

En efecto: 8000 es igual á 1000×8; y escribiendo en vez de 1000 la expresion (múltiplo de $11-1$) que la es equivalente, segun el lema 1.°, resulta que

$$8000=1000\times 8=(\text{múltiplo de } 11-1)\times 8;$$

y verificando esta multiplicacion indicada, repitiendo las consideraciones que hicimos en el ejemplo último, resulta que

$$8000=1000\times 8=(\text{múltiplo de } 11-1)\times 8=\text{múltiplo de } 11-8,$$

y asi de los demas ejemplos que se quiera. Luego es cierto el lema 3.°

4.° Sea, por primer ejemplo, la cifra 3 seguida de dos ceros, ó bien el número 300.

En efecto: 300 es igual á 100 $\times 3$; y escribiendo en vez de 100 la expresion (múltiplo de $11+1$) que le es equivalente, segun el lema 2.°, resulta que

$$300=100\times 3=(\text{múltiplo de } 11+1)\times 3\ ;$$

y verificando la multiplicacion indicada, repitiendo las consideraciones que hicimos en el lema último, pero sumando con el anterior el producto parcial 1×3, resulta que

$$300=100\times 3=(\text{múltiplo de } 11+1)\times 3=\text{múltiplo de } 11+3.$$

Sirva de último ejemplo, la cifra 4 seguida de cuatro ceros, ó bien el número 40000.

En efecto: 40000 es igual á 10000 $\times 4$; y escribiendo en vez de 10000 la expresion (múltiplo de $11+1$) que le es equivalente, segun el lema 2.°, resulta que

$$40000=10000\times 4=(\text{múltiplo de } 11+1)\times 4;$$

y verificando el producto indicado, repitiendo las consideraciones expuestas en el último ejemplo, resulta finalmente que

$$40000=10000\times 4=(\text{múltiplo de } 11+1)\times 4=\text{múltiplo de } 11+4\ ,$$

y así de los demas ejemplos que se quiera. Luego es cierto el lema 4.°

Pasemos á demostrar el principio.

Sea un número entero cualquiera como 711803: reduciendo sus unidades superiores é intermedias á unidades simples, se puede escribir así:

$$700000+10000+1000+800+3.$$

Pero segun el lema 3.°. . .	$700000=\text{múltiplo de } 11-7.$
segun el lema 2.°. . .	$10000=\text{múltiplo de } 11+1.$
segun el lema 1.°. . .	$1000=\text{múltiplo de } 11-1.$
segun el lema 4.°. . .	$800=\text{múltiplo de } 11+8.$
Y evidentemente.	$3=\qquad +3.$

Sumando ordenadamente estas igualdades y recordando que un múltiplo de 11, repetido varias veces, es sólo un múltiplo de 11, tendrémos:

$$711803=\text{múltiplo de } 11+3+8+1-1-7.$$

En el segundo miembro, despues del múltiplo de 11, está indicado que se han de sumar las cifras 3, 8 y 1; y que del resultado se ha de restar 1, y del resto se ha de restar 7. Pues en vez de sumar y restar las cifras una á una, formemos dos grupos: 1.º de las que están afectadas del signo +; 2.º de las que están afectadas del signo —; y restando el segundo del primero, el resultado final no se altera, y por medio de este artificio se verifica el principio bajo la forma enunciada:

$$711803 = \text{múltiplo de } 11 + \Big((3+8+1) - (1+7)\Big)$$

Consecuencia del principio. El paréntesis grande representa el resultado de la sustraccion que ha de verificarse entre las cantidades contenidas en los paréntesis pequeños. En el segundo miembro hay, pues, una suma indicada de dos sumandos, el primero de los cuales es divisible por 11. Luego el que la suma, ó bien el número 711803, sea divisible por 11, depende del segundo sumando; es decir, si el segundo sumando es cero, 11 ó múltiplo de 11, el número es divisible por 11; pero si el segundo sumando no se reduce á cero, ni á 11, ni á múltiplo de 11, el número propuesto no es divisible por 11, conforme con la regla dicha anteriormente. Luego *un número es, ó nó, divisible por* 11, etc.

Escolio. Nos dispensamos de explicar los caractéres de divisibilidad de un número entero por otros primos, como 7, 13 y 17; porque las reglas que habian de seguirse en la práctica son mucho más largas que la division ordinaria de un número por 7, 13, 17, etc.

Los alumnos distinguirán en algunos casos, y despues de breve experiencia, la existencia de factores primos de que no hayamos hablado aquí. Por ejemplo, cualquiera sabe que 85 es divisible por 5, y tambien por 17.

69. Ejemplos: 742 no es divisible por 9 ni por 3, porque 2 + 4 + 7, ó sea 13, no es múltiplo de 9 ni de 3.

7542 es divisible por 9 y por 3, porque 2 + 4 + 5 + 7, ó sea 18, es múltiplo de 9 y de 3.

7842 es divisible por 3 y no lo es por 9, porque 2 + 4 + 8 + 7, ó sea 21, es múltiplo de 3 y no lo es de 9.

41029 no es divisible por 11, porque (9 + 0 + 4) — (2 + 1), ó sea 13 —3, ó sea 10, no es 0, ni 11, ni múltiplo de 11.

51029 es divisible por 11, porque (9 + 0 + 5) — (2 + 1), ó sea 14 — 3, es igual á 11.

19789 es divisible por 11, porque (9 + 7 + 1) — (8 + 9), ó sea 17 — 17, es igual á 0.

82709 es divisible por 11, porque (9 + 7 + 8) — (0 + 2), ó sea 24 — 2, ó sea 22, es múltiplo de 11.

Del maximo comun divisor.

70. *Se llama* MÁXIMO COMUN DIVISOR *de dos ó más números, el mayor de todos los números que los divide exactamente.*

Si se tratase de hallar el máximo comun divisor de los números 72 y 24, por ejemplo, desde luego podemos afirmar que no puede ser mayor que los números propuestos. Ni tampoco igual al mayor de ellos, porque el mayor, si bien es divisor de sí mismo, no puede ser divisor de un número menor que él. Pero el menor, que desde luego es divisor de sí mismo, pudiera ser divisor del número mayor: y si lo fuera, no habría un divisor comun mayor que él; es decir, el número menor sería el máximo comun divisor pedido. Dividamos, pues, 72 por 24. Y efectuada la division, vemos con efecto, que el cociente 3 es exacto, y 24 el máximo comun divisor de 72 y 24: hé ahí la razon de comenzar dividiendo el mayor por el menor en esta operacion.

Para abreviar, representarémos las tres palabras, *máximo comun divisor*, por m. c. d.).

71. Sea, por segundo ejemplo, hallar el m. c. d. de los números 21 y 14.

Empezarémos la operacion como anteriormente, dividiendo 21 por 14 para ver si el menor 14 es el m. c. d. pedido.

Pero efectuada la division, se obtiene 1 por cociente entero y 7 por resto. Y como á primera vista se conoce que 7 es el m. c. d. del menor 14 y del resto 7, si nosotros demostramos que el m. c. d. del menor y del resto es igual al m. c. d. del mayor y del menor: 1.°, habrémos demostrado que 7 es el m. c. d. pedido; y 2.°, habrémos aprendido el procedimiento que en lo sucesivo deberá seguirse en esta importante operacion.

Y en efecto: el m. c. d. del menor y del resto, si bien es divisor del mayor (**60**), no puede ser mayor que el m. c. d. del mayor y del menor, porque éste dejaría de ser *máximo*, si hubiese otro mayor.

Por otra parte, el m. c. d. del mayor y del menor, si bien es divisor del resto (**60**), no puede ser mayor que el m. c. d. del menor y del resto, porque éste dejaría de serlo si hubiese otro mayor. Ahora bien, si ninguno de estos dos m. c. d. puede ser mayor ni menor que el otro, ámbos serán iguales.

Disposicion de la operacion:

$$\begin{array}{r|c|c} 21 & 14 & 7 \\ \hline 7 & 1 & 2 \\ & 0 & \end{array}$$

No hay duda : 7 es el m. c. d. de 14 y de 7, y como acaba de demostrarse que el m. c. d. de 14 y 7 es igual al m. c. d. de 21 y 14, dicho se está que 7 es el m. c. d. pedido.

72. Sea, por tercer ejemplo, hallar el m. c. d. de los números 78 y 45.

Disposicion de la operacion :

78	45	33	12	9	3
33	1	1	2	1	3
	12	9	3	0	

Discurriendo como en los ejemplos anteriores, se divide 78 por 45 y despues se divide 45 por el resto 33, y como esta division no es exacta se continúa dividiendo el primer resto por el segundo, y así sucesivamente hasta obtener el divisor 3, que da cero de resto y es el m. c. d. pedido.

Efectivamente, 3 es el m. c. d. de 9 y 3 que por el teorema del número 71 es igual al m. c. d. de 12 y 9; y por ser m. c. d. de estos dos, es igual al de 33 y 12; y por ser m. c. d. de estos dos, es igual al de 45 y 33, é igual al de 78 y 45, que era el pedido.

De las consideraciones expuestas se deduce que :

Para hallar el máximo comun divisor de dos números, se divide el mayor por el menor : si la division fuere exacta, el menor será el m. c. d. pedido.

Si no ha sido exacta, se divide el menor por el resto : y si esta segunda division fuese exacta, el primer resto será el m. c. d. pedido.

Si esta segunda division tampoco hubiese sido exacta, se divide el primer resto por el segundo, y así sucesivamente hasta obtener un cociente exacto, en cuyo caso el último divisor será el m. c. d. que se busca. Si el último divisor es la unidad, los números propuestos son (**54**) *primos entre sí.*

73. Ultimo ejemplo : Hallar el m. c. d. de los números 78 y 35.

Disposicion de la operacion :

78	35	8	3	2	1
8	2	4	2	1	2
	3	2	1	0	

Los números 78 y 35 son *primos entre sí* (**54**), puesto que no tienen más divisor comun que la unidad.

Y recíprocamente, si se aplica este procedimiento á dos números primos entre sí, ha de obtenerse necesariamente un resto igual á 1. En efecto : los restos de las divisiones sucesivas van disminuyendo;

y si se obtuviese un resto 0 (que es el término de la operacion) sin haber obtenido un resto 1, aquel divisor distinto de 1, que hubiese dado el resto 0, sería el m. c. d. de los números propuestos, lo que es contra la hipótesis.

Corolario. Si en el curso de una operacion se obtiene por resto un número primo, y no es él en la division inmediata el m. c. d.; puesto que dicho primo no es divisible por ningun otro, podemos asegurar, sin pasar más adelante, que los números propuestos son primos entre sí.

Corolario 2.º Todo divisor comun de dos números, lo es tambien de su m. c. d., puesto que lo es de los restos (**60**); la *recíproca* es cierta, porque siendo un número divisor de otro, lo es de sus múltiplos.

74. De aquí se deduce la regla para hallar el máximo comun divisor de más de dos números, de 60, 48 y 30, por ejemplo.

Se halla el m. c. d. de 60 y 48, que es 12.

Despues se halla el de 12 y 30, que es 6, y éste es el m. c. d. pedido.

En efecto: el m. c. d. de 60, 48 y 30, por ser divisor de los dos primeros, lo será de 12; y por serlo de 12 y 30, lo será de 6, que es el m. c. d. de estos últimos; pero no puede ser mayor que éste.

Por otra parte, el m. c. d. de 30 y 12, por ser divisor de 12, lo es de 60 y 48; pero no puede ser mayor que el m. c. d. de estos dos. Luego si el m. c. d. de 60, 48 y 30 no puede ser mayor que el de 12 y 30, y el de 12 y 30 no puede ser mayor que el de 60, 48 y 30, serán iguales.

Luego *para hallar el máximo comun divisor de más de dos números, se busca el de dos de ellos; despues el del que se ha hallado y de otro de los números propuestos*, y así sucesivamente.

En la práctica conviene empezar por los más pequeños.

Corolario. El corolario último y su recíproco pueden ampliarse para el caso del m. c. d. de más de dos números.

75. Si dos números se multiplican ó se dividen exactamente por otro, su m. c. d. quedará multiplicado ó dividido por este otro.

Si 11 es el m. c. d. de 121 y 88, 11×5 será el m. c. d. de 121×5 y 88×5.

En efecto: aplicando el procedimiento del m. c. d. á los números propuestos, tenemos:

121	88	33	22	11
33	1	2	1	2
	22	11	0	

y 11 es el m. c. d. de 121 y 88.

Si ahora aplicamos el mismo procedimiento á 121·5 y 88·5, ó bien 605 y 440, tenemos,

605	440	165	110	55
165	1	2	1	2
	110	55	0	

y 55, ó bien 11×5 es el m. c. d.

Y había de suceder así; porque sabemos (**44**, 7.ª) que, si el dividendo y divisor de una division inexacta se multiplican por un número entero cualquiera, el cociente entero no varía; pero el resto queda multiplicado por dicho número.

En el presente caso quedó multiplicado por 5 el primer resto 33. Y como éste pasó á ser divisor, quedó despues multiplicado por 5 el segundo resto 22. Y como éste pasó á ser divisor, quedó despues multiplicado por 5 el tercer resto 11, que en la division inmediata resultó como m. c. d.

Supongamos ahora que el punto de partida sean los números 605 y 440, cuyo m. c. d. es 55. Como acabamos de ver que el quinto de 605 y el de 440 tienen cabalmente por m. c. d. el quinto de 55, queda demostrada la segunda parte de la proposicion.

Escolio. *Si los números propuestos tienen un factor comun, se suprime*, cuidando de multiplicar despues por dicho factor el m. c. d. hallado.

Si cualquiera de los dos números propuestos tiene un factor que sea primo con el otro número, se suprime definitivamente, porque dicho factor no forma parte del m. c. d. pedido.

Sean propuestos para hallar su m. c. d. los números 2150 y 3612, respecto de los cuales ha lugar á las tres abreviaciones.

Ambos tienen el factor 2 que, aunque se suprima, lo reservarémos para multiplicar por él el m. c. d. que encontremos.

2150 tiene el factor 25 que, no entrando en 3612, no forma parte del m. c. d.: lo suprimirémos definitivamente; así como el 3, que entra en 3612 y no entra en 2150.

Disposicion de la operacion:

$$2150 = 2 \times 25 \times 43$$
$$3612 = 2 \times 3 \times 602$$

602	43	.... $\times 2 = 86$ es el m. c. d.
172	14	
0		

En los casos en que haya lugar á una, ó á dos, ó á las tres abreviaciones, pueden hacerse éstas al principio de la operacion, ó durante su desarrollo. En el presente caso pudo suprimirse el factor 2 de

602, ya que no pudimos aún hablar del factor compuesto 6 : el resultado era el mismo

$$\begin{array}{r|l} 301 & \underline{43} \;\ldots \times 2 = 86 \text{ m. c. d.} \\ 0 & 7 \end{array}$$

76. *Si dos números se dividen por su m. c. d., los cocientes serán primos entre sí.*

Esto es evidente : sean los números 45 y 27, y 9 su m. c. d.

Al dividir 45 y 27 respectivamente por 9, su m. c. d. ha sido dividido por 9 (**75**) ; luego los respectivos cocientes 5 y 3 tienen por m. c. d. el 9 : 9 = 1, esto es, son primos entre si.

La recíproca es tambien cierta.

Hallar los factores simples y compuestos de un número entero.

77. *Todo número, que es divisor de un producto de dos factores y primo con uno de éstos, es divisor del otro factor.*

Sea el producto 110 de los factores 5 × 22, y 11 un divisor de dicho producto, primo con 5. Vamos á demostrar que 11 es divisor del otro factor 22.

En efecto : por suponerse á 5 y 11 primos entre sí, su m. c. d. es 1 : y el m. c. d. de los productos 5 × 22 y 11 × 22 será (**75**) 1 × 22, ó bien 22.

Pero, por la hipótesis, 11 es divisor de 5 × 22 : tambien lo es (**56** *Cor.* 1.°) de 11 × 22 ; luego será divisor (**73**, *Cor.* 2.°) de 22, que es el m. c. d. de estos productos.

Corolario. *Un número primo, que es divisor de un producto, lo es por lo ménos de uno de sus factores.*

Si 2 es divisor del producto 5 × 13 × 4, será divisor de alguno de sus factores.

Pues segun el teorema, si 2 es primo con 5, será divisor de 13 × 4; y siendo divisor de 13 × 4, si es primo con 13, será divisor de 4.

2.° *Si un número es primo con cada uno de los factores de un producto, es primo con el producto ;* porque si siendo primo fuera divisor del producto, tambien lo seria de alguno de los factores (por el anterior cor.) ; lo que es contra la hipótesis : y no siendo primo, tendrá con el producto, y por consiguiente con alguno de sus factores, un divisor primo comun ; lo que es tambien contra la hipótesis.

Y además : *los divisores primos de un producto no pueden ser otros que los divisores primos de sus factores.*

3.° *Si un número primo es divisor de una potencia de otro número, es tambien divisor de este número.* Porque siendo $4^3 =$

$4 \times 4 \times 4$, si 2 es divisor de 4^3, y por lo mismo de $4 \times 4 \times 4$, segun el cor. 1.°, será divisor de 4.

4.° *Si dos números son primos entre sí, todas sus potencias lo serán tambien.* Pues el divisor primo comun que tuviesen, sería tambien divisor de sus raíces, por el corolario anterior; y entónces no serían primos entre sí los números propuestos, lo que es contra la hipótesis.

5.° *Si un número es primo con una potencia de otro número, es tambien primo con éste*; porque si no lo fuera, tampoco sería primo con la potencia, lo que es contra la hipótesis. Y recíprocamente, *todo número primo con otro, es primo con las potencias de este otro;* porque, si no lo fuera, tampoco sería primo con la raíz, lo que es contra la hipótesis.

78. Lo primero que se le ocurre á cualquiera cuando le dan un número para que halle sus factores, es examinar si el número dado es, ó nó, *primo*.

Esto se averigua ensayando si el número es divisible por los factores primos 2, 3, 5, etc. (á partir siempre del más pequeño). Si es divisible por alguno de ellos, el número dado no es *primo*. Pero si ensayando divisiones se llega á obtener un cociente entero menor que el divisor, sin haber obtenido ántes cociente exacto, puede asegurarse que el número propuesto es *primo*, sin pasar más adelante.

EJEMPLO: $127 : 3 = 42 + 1$ de resto, $127 : 5 = 25 + 2$ de resto, $127 : 7 = 18 + 1$ de resto, $127 : 11 = 11 + 6$ de resto, y por último, $127 : 13 = 9 + 10$ de resto, que da el cociente entero $9 <$ el divisor 13; puede asegurarse que el número 127 es primo.

En efecto: el número 127 no ha sido divisible por ningun factor primo menor que 13; ni puede serlo por ninguno mayor, porque para ello había de serlo por el cociente respectivo que, habiendo de ser menor que 9, está ya en vano ensayado; ni puede serlo por los *compuestos* formados de esos primos. Luego 127 es primo; luego *si un número no es divisible por los factores primos* 2, 3, 5, etc., *hasta obtener un cociente entero menor que el divisor, dicho número será primo.*

Tambien se dice:

Un número es primo si no es divisible por ningun otro cuyo cuadrado sea menor que el número propuesto. Así, para que 127 no fuere primo, sería necesario que fuese divisible por 2, ó 3, ó 5, ó 7 ú 11, cuyos cuadrados respectivos son menores que 127: y esto ya se ha visto que no ha podido verificarse.

En otros términos: *Un número es primo cuando se ha llevado la* *prueba hasta la parte entera de su raiz cuadrada sin obtener cociente exacto.*

79. Ensayemos el número 840, por segundo ejemplo, para ver si es primo ó nó. Pero 840 no es primo ; porque, terminando en 0, es divisible por 2 : luego

$$840 = 2 \times 420.$$

Siendo 840 divisible por 2 y por 420, lo será tambien por los divisores de 420 ; y como 420 es divisible por 2 y por lo mismo igual á 2×210, tendrémos

$$840 = 2 \times 2 \times 210,$$

y además divisible nuevamente por 2, y por 210.

Siendo 840 divisible por 210, lo será por los divisores de 210 ; y como 210 es divisible por 2, y por lo mismo igual á 2×105, tendrémos

$$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 105,$$

y además divisible nuevamente por 2 y por 105.

Siendo 840 divisible por 105 lo será por los divisores de 105; y como 105 es divisible por 3, y por lo mismo igual á 3×35; tendrémos

$$840 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 35,$$

y además divisible por 3 y por 35.

Siendo 840 divisible por 35 lo será por los divisores de 35; y como 35 es divisible por 5, y por lo mismo igual 5×7, tendrémos por último

$$480 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

y divisible por cada uno de estos factores.

Luego el número 840, si bien no es primo, se compone de un producto de números primos.

Y lo que se ha dicho de este número es aplicable á todos. Luego *el número que no es primo es un producto de números primos* , ó sea de factores simples.

80. Para hallar en la práctica los factores simples de un número, se traza una línea vertical á su derecha ; enfrente del número y al lado de la línea, se coloca el primer factor simple, prescindiendo de la unidad, que es divisor de todo número. Se escribe debajo del número dado el cociente de dividirle por el primer factor, y enfrente del cociente se coloca el primer factor simple que tenga dicho cociente. Se escribe debajo de éste el cociente de dividirle por su primer factor simple, y así se continúa hasta obtener la unidad por último cociente.

Ejemplos :

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2150 & 2 \\ 1075 & 5 \\ 215 & 5 \\ 43 & 43 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5880 & 2 \\ 2940 & 2 \\ 1470 & 2 \\ 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \qquad 2150 = 2 . 5 . 5 . 43 \qquad 5880 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 7 . 7$$

$$24 = 2^3 \times 3 \qquad 2150 = 2 . 5^2 . 43 \qquad 5880 = 2^3 . 3 . 5 . 7^2.$$

El número 24 es divisible por 2 porque termina en cifra par, colocando el 2 enfrente, y se dice: mitad de 2 es 1; mitad de 4, 2.

Este número 12 es divisible por 2, colocando el 2 enfrente, y se dice : mitad de 1 es 0, que no se pone á la izquierda, y queda de resto una decena, que vale 10 unidades, y 2 son 12 ; mitad de 12 son 6.

Este número 6 es aún divisible por 2, y colocando el 2 enfrente dirémos : mitad de 6 es 3.

Este número 3 es divisible por 3, es decir, no es divisible más que por sí mismo, por ser número primo, como sucede en todos los ejemplos al llegar á esta última division, y colocando el 3 enfrente y debajo de los demas divisores primos, dirémos : tercera parte de 3 es 1, que se coloca debajo de los demas cocientes anteriores.

81. Y ahora procede demostrar que la descomposicion de un número entero en sus factores simples ó primos no puede hacerse más que de una manera, esto es, *que un número no admite más que una descomposicion en factores primos.*

En efecto : acabamos de ver que

$$24 = 2 . 2 . 2 . 3.$$

Si introducimos un nuevo factor y distinto de éstos, como 5, tendrémos :

$$2 . 2 . 2 . 3 . 5 \text{ ó sea } 120 > 24.$$

Si introducimos un nuevo factor, pero igual á uno de ellos, como 3, tendrémos :

$$2 . 2 . 2 . 3 . 3 \text{ ó sea } 72 > 24.$$

Si omitimos uno de los factores del número 24, como 3, tendrémos :

$$2 . 2 . 2 \text{ ó sea } 8 < 24.$$

Si, por último, cambiamos de factores, es decir, si omitimos uno de ellos, como 3, é introducimos uno nuevo, como 5, el producto indicado tomará esta forma 2 . 2 . 2 . 5 : la forma primitiva es 2 . 2 . 2 . 3 ; y reuniendo los tres primeros factores de cada uno en un sólo número, tendrémos : 8×5 para uno, y para el propuesto 8×3.

Pero hemos dicho en la multiplicacion que *productos iguales de dos factores, con un factor igual, tienen tambien igual el otro factor*. Luego para que estos dos productos indicados realicen el mismo número 24, es necesario que sean iguales los segundos factores, á saber, el 5 y el 3 ; y el número 24 no admite más que una descomposicion en factores simples ó primos.

82. *Si un número es divisible por dos ó más primos entre sí dos á dos, es tambien divisible por el producto de todos ellos.*

Si 210, por ejemplo, es divisible por 2, 3 y 5, que son primos dos á dos, es tambien divisible por su producto $2 \times 3 \times 5$.

En efecto : por ser 210 divisible por 2, tenemos

$$210 = 2 \times 105.$$

Por ser 210 divisible por 3, tambien 2×105 será divisible por 3; y como 2 y 3 son primos entre sí, el factor 105 será divisible por 3, y tendrémos

$$105 = 3 \times 35 ;$$

luego

$$210 = 2 \times 105 = 2 \times 3 \times 35$$

y el número dado 210 será divisible por el producto 2×3.

Por último, siendo 210, ó bien $2 \times 3 \times 35$ divisible por 5 ; como 2 y 3 son primos con 5 , el factor 35 será divisible por 5 ; luego

$$35 = 5 \times 7$$

y por consiguiente

$$210 = 2 \times 105 = 2 \times 3 \times 35 = 2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

cuya última igualdad demuestra la proposicion.

Esto sentado, propongámonos *hallar todos los divisores del número* 210, cuyos divisores simples ó primos son 2, 3, 5 y 7.

Siendo primos 2 y 3, el producto 2×3 será divisor de 210 ; y como estos números 2, 3 y 2×3 son primos con 5, el producto de cada uno por 5 será divisor del número dado, y tendrémos que

$$2,\ 3,\ 2\times3,\ 5,\ 2\times5,\ 3\times5 \text{ y } 2\times3\times5$$

serán todos divisores de 210.

Pero estos divisores son primos con 7, luego el producto de cada uno de ellos por 7, será tambien divisor del número propuesto, y por consiguiente los divisores todos de 210 son los siguientes :

$$2,\ 3,\ 2\times3,\ 5,\ 2\times5,\ 3\times5,\ 2\times3\times5,\ 7,\ 2\times7,\ 3\times7,\ 2\times3\times7,$$
$$5\times7,\ 2\times5\times7,\ 3\times5\times7,\ 2\times3\times5\times7.$$

Corolario. Hemos visto que el número 216 es divisible por 6, por serlo ántes por 2 y por 3 : 225 lo es por 15, por serlo ántes por 3 y por 5, etc. Luego *para que un número entero sea divisible por un factor compuesto, es necesario que lo sea por los factores primos de éste.*

2.° Los números que son iguales á la suma de sus factores eran llamados por los antiguos *números perfectos*. Tales como

$$6=1+2+3,\ 28=1+2+4+7+14, \text{ y otros.}$$

Tambien llamaban *números amigos* á dos números tales que cada uno de ellos sea igual á la suma de los factores del otro, como 220 y 284, y otros dos pares más, únicos que se conocen.

Abundantes, á aquéllos que son menores que la suma de sus factores, como

$$12<1+2+3+4+6.$$

Defectivos ó *deficientes* á los que son mayores que la suma de sus factores, como

$$10>1+2+5.$$

Darémos fin á este cuadro de números poco comunes con el *número de oro* ó *áureo número*, que es el que expresa el año del *ciclo lunar* que va corriendo ; llamado así en memoria de la costumbre que tenían los atenienses de publicar el año corriente del ciclo con grandes caractéres de oro, que fijaban en los sitios públicos.

Carlos Botello

83. Tabla de todos los divisores simples y compuestos del número 5880, segun M. Bourdon.

1,	2,	4,	$8 = 2^3$.
3,	6,	12,	$24 = 2^3 \times 3$.
5,	10,	20,	$40 = 2^3 \times 5$.
15,	30,	60,	$120 = 2^3 \times 3 \times 5$.
7,	14,	28,	$56 = 2^3 \times 7$.
21,	42,	84,	$168 = 2^3 \times 3 \times 7$,
35,	70,	140,	$280 = 2^3 \times 5 \times 7$.
105,	210,	420,	$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$.
49,	98,	196,	$392 = 2^3 \times 7^2$.
147,	294,	588,	$1176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$.
245,	490,	980,	$1960 = 2^3 \times 5 \times 7^2$.
735,	1470,	2940,	$5880 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2$.

Con el cuadro de los factores primos de 5880 á la vista se forma esta *tabla*, escribiendo en línea horizontal la unidad (divisor de todo número) seguida de las tres primeras potencias de 2, que evidentemente dividen al número propuesto.

Despues se multiplican estos cuatro números por el factor 3, y con los productos que, segun el principio (**82**), son divisores de 5888, se forma la 2.ª línea.

Despues se multiplican todos los términos de cada una de estas dos por el factor 5, y con los productos que, segun el mismo principio son divisores de 5880, se forman respectivamente las líneas 3.ª y 4.ª

Despues se multiplican todos los términos de cada una de estas cuatro por el factor 7; y con los productos que son divisores de 5880, se forman respectivamente las líneas 5.ª, 6.ª, 7.ª y 8.ª

Y como el 7 entra dos veces por factor en la descomposicion que se hizo del número dado en factores primos, tambien entrará como 7^2 en la presente tabla; y esto se consigue multiplicando por 7 las últimas cuatro líneas (en que ya entraba el 7), con cuyos productos respectivos, divisores todos de 5880, se forman las líneas 9.ª, 10.ª, 11.ª y 12.ª

En la práctica es conveniente colocar en la primera línea horizontal las potencias del factor primo que entre *más veces* en el número propuesto: el órden de los demás es indiferente.

La tabla no puede ser más clara ni más cómoda, ofreciendo como ofrece todos los divisores al primer golpe de vista.

No puede tener otros divisores que los que contiene, porque el número 5880 no admite más descomposicion en factores primos que una, la que se hizo.

Todos los términos que contiene son divisores de 5880, porque sus factores primos 2, 3, 5 y 7 son los únicos que entran en ellos, y entran segun las diferentes potencias en que deben entrar: por eso el 2 entra en 2.ª y 3.ª potencia, el 7 entra en 2.ª, miéntras que el 3 y el 5 no han podido entrar elevados á la 2.ª potencia.

84. Para comprobar que está en la tabla el número de divisores que debe haber, se añade una unidad al exponente de cada factor primo, considerando con la unidad por exponente á aquél que no le tenga, y el producto de esos números así formados será el número de divisores que ha de haber ó sea

$$(3+1)\times(1+1)(1+1)\times(2+1)=4\times2\times2\times3=48.$$

En efecto, entrando el primer primo 2 tres veces por factor, y empezando por la unidad, hay en la 1.ª línea $3+1$.

Multiplicando $(3+1)$ por el número de las potencias sucesivas que forma el segundo primo 3, obtendremos un número de nuevas líneas de á $(3+1)$ términos cada una, á las cuales hay que añadir los $(3+1)$ de la primera. Pero el 3 entra una sola vez, y el producto de $(3+1)\times1$ es $(3+1)$; añadiéndole $(3+1)$, tendrémos:

$$(3+1)+(3+1)=(3+1)\times2=(3+1)\times(1+1).$$

(Estos divisores son potencias de 2 y de 3 una á una ó combinadas dos á dos.)

Multiplicando los $(3+1)\times(1+1)$, términos de estas primeras líneas, por el número de las potencias sucesivas que forma el tercer primo 5, obtendrémos un nuevo número de divisores, al cual se añadirán los $(3+1)\times(1+1)$ que ya hay. Pero el 5 entra una sola vez, y el producto de $(3+1)\times(1+1)\times1$ es igual á $(3+1)\times(1+1)$, y añadiéndole $(3+1)\times(1+1)$, tendrémos:

$$(3+1)\times(1+1)+(3+1)\times(1+1)=(3+1)\times(1+1)\times2=$$
$$(3+1)\times(1+1)\times(1+1).$$

Multíplicando los $(3+1)\times(1+1)\times(1+1)$, términos de estas líneas, por el número de las potencias sucesivas, que forma el cuarto primo 7, obtendrémos un nuevo número de divisores, al cual se añadirán los $(3+1)\times(1+1)\times(1+1)$ que hay ya. Pero 7 entra dos veces por factor, y el producto de $(3+1)\times(1+1)\times(1+1)\times2$ es igual á $(3+1)\times(1+1)\times(1+1)$ repetido dos veces; y añadiendo ahora la misma expresion, tendrémos por resultado final $(3+1)\times(1+1)\times(1+1)$ repetido tres veces, ó sea multiplicado por 3, ó sea multiplicado por $(2+1)$ ó sea

$$(3+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(2+1).$$

Y así para los demas ejemplos.

Formacion de una tabla de números primos.

85. Como ha de seguirse algun método para formar una tabla de números primos, nosotros seguirémos el que está generalmente adoptado, conocido con el nombre de *criba de Eratóstenes*, y que consiste:

En escribir desde la unidad hasta aquel número que se quiera que contenga la tabla.

Se borran despues todos los que sean divisibles por 2, excepto el 2.

Se borran tambien todos los divisibles por 3, excepto el 3.

Se borran asimismo todos los que terminen en 5, excepto el 5.

Sin más que esas supresiones puede asegurarse que los números no borrados hasta 7×7, ó sea 49, son primos; ó mejor dicho, desde 1 á 47, ambos inclusive, son primos los no borrados, porque los múltiplos de 7 por 2, 3, 4, 5 y 6 han sido ya borrados como divisibles por 2, 3, 2, 5 y 2.

Borrando despues los múltiplos de 7 desde 49 en adelante, podemos asegurar que son primos los no borrados hasta el producto de 11×11, ó sea el número 121, porque los múltiplos de 11 por 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8, 9 y 10, han sido ya borrados como divisibles por 2, 3, 5 y 7, y así se continua hasta donde se quiera.

Con esta breve explicacion se habrá comprendido cuán fácil es formar una tabla de números primos.

Nosotros presentarémos, por via de ejemplo, los números primos menores que 100:

1	2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53	59
61	67	71	73	79	83	89	97	

86. En vista de esto, y de que un número admite una sola descomposicion en factores primos, puede hallarse el m. c. d. de dos ó más números, descomponiendo á todos ellos en sus factores primos y formando el producto de los comunes á todos, — y no más que de los comunes—, su producto será el m. c. d. de los números propuestos.

Ejemplo 1.º

72	2	48	2	28	2
36	2	24	2	14	2
18	2	12	2	7	7
9	3	6	2	1	
3	3	3	3		
1		1			

Ejemplo 2.º

70	2	90	2	75	3	35	5
35	5	45	3	25	5	7	7
7	7	15	3	5	5	1	
1		5	5	1			
		1					

En el primero de estos ejemplos entra el número primo 2 tres veces por factor en el primer número, cuatro en el segundo y dos veces en 28; y como el 3 entra dos veces en el primero, una en el segundo y ninguna en 28, y el 7 que entra en este último, no entra en ninguno de los dos primeros; resulta que no hay más factores comunes que 2×2, ó sea 4, y éste será el m. c. d. de 72, 48 y 28.

En el segundo ejemplo el m. c. d. es 5.

En otros términos: el m. c. d. de varios números se compone *del producto de los factores simples comunes á todos ellos, poniendo á cada factor simple comun el menor exponente que lleve en las descomposiciones verificadas.*

Del mínimo múltiplo comun.

87. Llámase MÍNIMO MÚLTIPLO COMUN *de varios números el menor número que sea divisible por todos ellos.*

(Para abreviar, representarémos las tres palabras, *mínimo múltiplo comun*, por m. m. c.)

Hay casos tan sencillos, que á primera vista se conoce que uno de los mismos números es el *mínimo múltiplo comun* de todos ellos: así, 12 es el m. m. c. de 4, 6, 3, 12 y 2.

Porque es evidente que el m. m. c. de varios números no es mayor que el producto de los mismos números, ni menor que el mayor de ellos.

Otras veces basta multiplicar por 2, 3, etc., uno de los números propuestos para obtener el m. m. c. de todos ellos.

Sean los números 2, 4, 6, 12 y 20; pues 20×3, ó bien 60, es el m. m. c. de todos ellos.

88. Propongámonos ahora hallar el m. m. c. de tres números cualesquiera, como 60, 48 y 35.

Descompuestos en sus respectivos factores simples, tendrémos las igualdades:

$$60 = 2^2 . 3 . 5 \qquad 48 = 2^4 . 3 \qquad 35 = 5 . 7.$$

Y como el mínimo múltiplo que buscamos ha de ser divisible por los tres números dados, tambien lo será por los factores $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ del primero, por los $2^4 \cdot 3$ del segundo y por los $5 \cdot 7$ del tercero.

Pero todo número divisible por dos ó más primos entre sí, y primos entre sí dos á dos, por consiguiente, lo mismo que sus potencias respectivas, es divisible por el producto de todos ellos: luego el m. m. c. que se busca será divisible por el producto $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, por ejemplo. Y como el múltiplo menor de un número es el mismo número, es claro que $2^4 . 3 . 5 . 7$ es el mínimo múltiplo comun pedido.

Luego, regla:

Para hallar el m. m. c. de dos ó más números, se descomponen éstos en sus factores simples, y se forma un producto en que entre cada factor simple afectado respectivamente del mayor exponente que tenga en uno, dos ó en todos los números dados.

Escolio 1.º El producto de los números del ejemplo en cuestion, es

$$2^2 . 3 . 5 . 2^4 . 3 . 5 . 7:$$

el m. m. c. de ellos es $2^4 . 3 . 5 . 7$: en éste faltan de los factores anteriores $2^2 . 3 . 5$; esto es, el m. m. c. de los tres números es menor que el producto de ellos $2^2 . 3 . 5$ veces, ó sea 60 veces.

El número $2^4 \times 3 \times 5 \times 7$, ó bien 1680 es múltiplo de 60, 48 y 35; porque contiene los factores simples con un exponente, por lo ménos igual al exponente con que entran en cada uno de aquéllos. Y es además el más pequeño múltiplo posible; porque, para ser múltiplo de cada uno de ellos, es necesario que contenga á cada factor simple con un exponente igual, por lo ménos, al exponente con que entra en cada uno de los números dados, 60, 48 y 35.

Luego el número 1680 es ciertamente el m. m. c. de los números propuestos.

Escolio 2.º Si los números dados son primos, su m. m. c. será el producto de ellos.

Escolio 3.º El m. m. c. de varios números es único. Pero no es decible cuál sea el múltiplo mayor; porque dado uno, por grande que sea, se puede multiplicar por 2, 3, etc., y se obtiene otro ú otros mayores.

CAPÍTULO III.

De los quebrados ordinarios abstractos.

89. Idea de los quebrados. *Se llama unidad fraccionaria á una unidad tal, que á su expresion acompaña siempre la referencia á la unidad abstracta, ó á una unidad concreta cualquiera superior.* Como *un cuarto de arroba, un quinto de la unidad*: la 1.ª se refiere á la unidad concreta arroba: la 2.ª á la unidad abstracta. Cuando se refiera á la unidad abstracta, no se expresa ésta, y se dice simplemente : *un quinto, un sexto.*

Si se divide, por consiguiente, la unidad en dos ó más partes iguales, cada una de estas partes es una unidad fraccionaria, que puede definirse tambien diciendo que *es cada una de las partes iguales en que está dividida ó puede considerarse dividida la unidad entera.*

Número fraccionario ó fraccion, ó simplemente *quebrado*, es una coleccion de dos ó más unidades fraccionarias iguales : como *dos quintos, siete octavos.*

Así como (**10**) la unidad, ó sea la unidad entera, es considerada como el primer número entero, tambien la unidad fraccionaria se considera como *quebrado.*

Dos son, pues, los números que se necesitan para expresar un quebrado, á saber : uno que indique el número de partes en que la unidad está dividida, y se llama *denominador ;* y otro que exprese el número de estas partes que el quebrado contiene, y se llama *numerador.* A *numerador* y *denominador* juntos se les llama *términos del quebrado.*

90. Nomenclatura. Si la unidad se divide en dos partes iguales, cada una de éstas se llama *un medio ;* si en tres, *un tercio;* si en cuatro, *un cuarto;* si en cinco, *un quinto;* si en seis, *un sexto;* si en siete, *un séptimo;* si en ocho, *un octavo ;* si en nueve, *un noveno;* y si en diez, *un décimo.*

Si la unidad se divide en un número de partes mayor que diez, se enuncia la unidad fraccionaria, añadiendo la terminacion *avo* al número que indica el número de partes en que se divide la unidad. Así, segun que la unidad se divida en once, quince, veinte partes iguales, la unidad fraccionaria se nombra *un once avo, un quinçe avo, un veinte avo*, etc.

Y como el quebrado no se distingue de la unidad fraccionaria sino en que el quebrado consta de dos ó más unidades fraccionarias, la nomenclatura de aquéllos sólo se distingue por el número que exprese la coleccion de unidades fraccionarias que constituyen el quebrado. Así se dice: *dos quintos*, *siete novenos*, *treinta cuarenta avos*, etc.

91. ESCRITURA. Para escribir la unidad fraccionaria, se escribe la unidad sobre una raya horizontal, y debajo de ésta el denominador.

Así: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{40}$.

Se lee, un medio, un tercio,..... un quince avo, un cuarenta avo.

Los quebrados se escriben como la unidad fraccionaria, poniendo en vez de la unidad, el numerador.

Por ejemplo: $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{39}{40}$. Y se leen, nombrando el numerador, como se nombran los enteros, y nombrando el denominador como en la unidad fraccionaria. Estos tres quebrados se expresan diciendo: dos quintos, siete novenos, treinta y nueve cuarenta avos.

Si se quiere explicar lo que un quebrado representa, por ejemplo, $\frac{39}{40}$, dirémos: que segun el denominador 40, la unidad está dividida en 40 partes iguales, llamadas cuarenta avos; y segun el numerador 39, el quebrado contiene ó consta de 39 de estas cuarenta avas partes.

92. Si el numerador de un quebrado es menor que el denominador, el quebrado vale ménos que la unidad.

Por ejemplo: $\frac{3}{4} < 1$. Porque refiriéndose este quebrado á la unidad fraccionaria *cuarto* de la unidad, y necesitándose cuatro cuartos para componerla, es evidente que el quebrado propuesto vale $\frac{1}{4}$ ménos que la unidad.

Si el numerador de un quebrado es igual al denominador, el valor del quebrado es igual á la unidad, é iguales entre sí los quebrados de forma análoga.

Por ejemplo: $\frac{7}{7} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = 1$. Esta proposicion es una consecuencia inmediata de la idea que hemos dado del quebrado y de sus dos términos.

Si el numerador de un quebrado es mayor que el denominador, el quebrado vale más que la unidad.

Por ejemplo: $\frac{5}{4} > 1$; esto es, $\frac{5}{4}$ vale $\frac{1}{4}$ más que la unidad. Un razonamiento análogo al empleado en la penúltima proposicion demuestra la presente.

Esto entendido, se llama *quebrado propio* á aquél cuyo numerador es menor que su denominador, é *impropio* á aquél cuyo numerador es igual ó mayor que su denominador.

Ejemplos: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{51}{60}$ son quebrados propios: $\frac{7}{7}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{30}{10}$, $\frac{41}{35}$ son quebrados impropios.

Esta idea de *propiedad* é *impropiedad* de los quebrados se refiere á su forma, y no á su valor, que puede ser el mismo aun bajo distinta forma.

La palabra *fraccion* expresa más particularmente la idea del quebrado propio.

Y la palabra *quebrado* ó *número fraccionario* se usa indistintamente para nombrar el quebrado, sea propio ó impropio; y aun la unidad fraccionaria.

Por *número mixto* se entiende la reunion de un entero y un quebrado, como $2\frac{4}{7}$ (7).

Se dice que un quebrado está *invertido*, cuando su numerador pasa á ser denominador, y el denominador pasa á ser numerador. Así $\frac{9}{7}$ es el quebrado invertido de $\frac{7}{9}$.

93. *Un quebrado representa tambien el cociente de dos números enteros*, de los cuales el dividendo está por numerador, y el divisor por denominador. Con efecto, si tratamos de dividir 2 por 3, por ejemplo, el cociente no puede ser igual á la unidad: desde luego es una fraccion. Ya que el cociente no puede ser igual á la unidad, ensayemos á qué número de partes de la unidad será igual. Para esto dividamos cada unidad en dos medios; es claro que el dividendo 2 consta de 4 medios; y como 4 medios partido por 3, no dá tampoco cociente exacto, ensayarémos otra division de la unidad en 3 partes iguales, por ejemplo, y dirémos: cada unidad, dividida en tercios, vale 3 tercios; y el dividendo propuesto 2, valdrá 6 tercios; pero 6 tercios, partido por el divisor propuesto 3, da cociente exacto é igual á 2 tercios: luego el cociente de $2 : 3 = \frac{2}{3}$. Y como lo que se ha dicho de este ejemplo es aplicable á otro cualquiera, la proposicion es general y cierta.

Luego, si al llegar al resto final de una division inexacta de números enteros, se quiere continuar la operacion, el nuevo y último cociente parcial será un quebrado cuyo numerador sea dicho resto, y el denominador el divisor.

Luego, *el cociente completo de una division inexacta* (**37**) *es igual al cociente entero más un quebrado que tenga por numerador el resto de la division, y por denominador el divisor.*

94. Para averiguar las unidades que vale un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador. Si la division es exacta, el cociente expresará el número de unidades que el quebrado vale. Y si la division es inexacta, el cociente entero expresará este número, tomando en este caso el quebrado la forma de número mixto.

Con efecto: dado el denominador de un quebrado, necesita éste por numerador un número igual para valer una unidad (**92**); y si el numerador es duplo del denominador, el quebrado vale dos unidades, y así sucesivamente: luego, tantas veces como el denominador de un quebrado esté contenido en el numerador, tantas unidades valdrá el quebrado.

Así: $\frac{2}{2}=1$, $\frac{31}{31}=1$, $\frac{26}{5}=5\frac{1}{5}$, $\frac{32}{4}=8$, $\frac{10}{5}=2$, $\frac{30}{7}=4\frac{2}{7}$.

La resolucion de esta cuestion se conoce comunmente con la denominacion de *sacar los enteros de un quebrado impropio.*

En un número mixto, á pesar de que no hay signo alguno interpuesto entre el entero y el quebrado, se sobreentiende que hay una adicion indicada entre el entero y el quebrado. Así: $7\frac{1}{4}$ es lo mismo que $7+\frac{1}{4}$.

95. De lo expuesto, se deduce que un número entero cualquiera puede ponerse bajo la forma de quebrado, poniéndolo por numerador, y por denominador del quebrado la unidad. Así: $9=\frac{9}{1}$ y $20=\frac{20}{1}$; puesto que estos dos quebrados valen respectivamente 9 unidades y 20 unidades, difiriendo de éstas únicamente en la forma.

Tambien se deduce que un entero cualquiera puede ponerse bajo la forma de quebrado con un denominador dado, poniendo por numerador el producto del entero por el denominador dado. Así: 7, puesto bajo la forma de quebrado con el denominador 6, es igual á $\frac{7\times6}{6} = \frac{42}{6}$, puesto que $\frac{42}{6}$ vale 7 unidades: y 5 bajo la forma de quebrado con el denominador 8 es igual á $\frac{5\times8}{8} = \frac{40}{8}$, pues que $\frac{40}{8}$ vale 5 unidades.

96. Considerado un quebrado (**93**) como el cociente indicado del numerador partido por el denominador, son aplicables al valor del quebrado las observaciones hechas (**44**) relativas á las alteraciones que un cociente sufriera por las que sufrieran el dividendo y divisor.

Esto no obstante, por exigirlo así la importancia del asunto, repetirémos algunas de ellas, aunque expuestas bajo distinta forma.

1.ª *Si el numerador de un quebrado aumenta ó disminuye*, quedando el denominador el mismo; *el quebrado* (esto es, *su valor*) *aumenta ó disminuye*. Efectivamente, siendo la unidad fraccionaria la misma (que esto significa quedar el denominador el mismo), segun que el número de éstas aumente ó disminuya (que esto significa aumentar ó disminuir el numerador), el valor del quebrado aumentará ó disminuirá.

Por consiguiente, de varios quebrados que tengan igual denominador y distinto numerador, es mayor, (esto es, *vale más*) *el que tenga mayor numerador.*

Y si el numerador de un quebrado se multiplica ó divide por un entero, quedando el denominador el mismo, *el quebrado queda multiplicado ó dividido por dicho entero.*

Efectivamente; siendo la unidad fraccionaria la misma (que esto significa quedar el denominador el mismo), segun que el número de éstas sea doble, triplo, etc., esto es, que el numerador se multiplique por 2, 3, etc., ó segun que el número de estas unidades fraccionarias sea mitad, tercera parte, etc., esto es, que el numerador se parta por 2, 3, etc., el valor del quebrado quedará multiplicado ó dividido por 2, 3, etc.

2.ª *Si el denominador de un quebrado aumenta ó disminuye*, quedando el numerador el mismo, *el quebrado disminuye ó aumenta.*

Efectivamente, siendo uno mismo el número de unidades fraccionarias (que esto significa quedar el numerador el mismo), segun que el valor de éstas disminuya ó aumente, el valor del quebrado disminuirá ó aumentará; y como la unidad fraccionaria es tanto más pequeña ó más grande, cuanto mayor ó menor sea el denominador, esto es, cuanto mayor ó menor sea el número de partes en que la unidad entera se divida, segun que el denominador aumente ó disminuya, el quebrado disminuye ó aumenta.

Por consiguiente, *de varios quebrados que tengan igual numerador y distinto denominador, es mayor el que tenga menor denominador.*

Y si el denominador de un quebrado se multiplica ó divide por un entero, quedando el numerador el mismo, *el quebrado queda dividido ó multiplicado por dicho entero.*

Efectivamente, siendo uno mismo el número de unidades fraccionarias (que esto significa quedar el numerador el mismo), segun que el valor de esta sea 2, 3, etc., veces menor ó mayor, esto es, segun que el número de partes en que la unidad se divida, sea 2, 3, etc., veces mayor ó menor, ó lo que es lo mismo, segun que el denominador se multiplique ó divida por 2, 3, etc. veces, el quebrado será 2, 3, etc. veces menor ó mayor.

97. *El valor de un quebrado no se altera porque se multipliquen ó dividan sus dos términos por un mismo número entero.*

Esta proposicion contiene dos partes. La primera, esto es, que el quebrado no se altera, multiplicando sus dos términos por un mismo entero, se explica fácilmente teniendo presente que el incremento que experimenta el quebrado multiplicando el numerador (**96**), se compensa con el decremento que experimenta el mismo quebrado multiplicando el denominador (**96**). La segunda, esto es, que el quebrado no se altera, dividiendo sus dos términos por un mismo entero, se explica tambien, considerando que el decremento que experimenta el quebrado dividiendo el numerador (**96**), se compensa con el incremento que experimenta el mismo quebrado dividiendo su denominador (**96**).

Pero la importancia de esta proposicion es tal, que merece una demostracion especial.

Empecemos demostrando que un quebrado no se altera multiplicando sus dos términos por un mismo número entero.

Sea el quebrado $\frac{4}{7}$: multiplicando sus dos términos por 3, por ejemplo, el quebrado tomará la forma $\frac{12}{21}$, y lo que hay que demostrar es que $\frac{4}{7}=\frac{12}{21}$. En efecto, segun el denominador del primero de estos dos quebrados, la unidad está dividida en 7 partes iguales llamadas séptimos; segun el denominador del segundo, la unidad está dividida en 21 partes iguales llamadas veintiunavos. Pero para deducir esta segunda division de la unidad, de la primera, es evidente que habrá habido que dividir cada séptima parte en 3 partes iguales, y por consiguiente, 1 séptimo vale 3 veintiun avos; luego, si 1 séptimo vale 3 veintiun avos, es claro que 4 spétimos valdrán 4 veces 3 veintiun avos, que son 12 veintiun avos, ó puesto bajo la forma fraccionaria, $\frac{4}{7}$ valen $\frac{12}{21}$.

Y considerando ahora recíprocamente al primer quebrado ó sea $\frac{4}{7}$, como deducido del segundo $\frac{12}{21}$, cuyos dos términos se hayan dividido por tres, explicada ya la igualdad de estos dos quebrados $\frac{12}{21}$ y $\frac{4}{7}$, queda demostrada la segunda parte de la proposicion, á saber: que un quebrado no se altera, dividiendo sus dos términos por un mismo número entero.

En la primera parte de este principio está fundada la importante transformacion que se hace experimentar á los quebrados, conocida con el nombre de *reduccion de los quebrados á un comun denominador*.

Y en la segunda parte del mismo se funda otra transformacion no ménos importante, llamada *simplificacion de los quebrados*.

98. *Para reducir dos quebrados á un comun denominador se multiplican los dos términos de cada quebrado por el denominador del otro.*

Sean, por ejemplo, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{11}$. Multiplicando los dos términos del primero por el denominador 11 del 2.º no se altera su valor, y multiplicando los dos términos del segundo por el denominador 3 del primero, tampoco se altera su valor, únicamente varía la forma de ambos quebrados. Y como el nuevo denominador del 1.º es 3×11, y el nuevo denominador del segundo es 11×3, y está demostrado (**27**) que $3 \times 11 = 11 \times 3$ queda tambien demostrado que $\frac{2 \times 11}{3 \times 11}$ y $\frac{5 \times 3}{11 \times 3}$, esto es, $\frac{22}{33} = \frac{15}{33}$ y conservan respectivamente el mismo valor que $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{11}$, aunque adquiriendo un denominador igual ó comun.

Para reducir tres ó más quebrados á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.

Sean, por ejemplo, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$. Estos quebrados son respectivamente iguales á $\frac{2.11.9.2.5}{3.11.9.2.5}$, $\frac{5.3.9.2.5}{11.3.9.2.5}$, $\frac{7.3.11.2.5}{9.3.11.2.5}$, $\frac{1.3.11.9.5}{2.3.11.9.5}$, $\frac{2.3.11.9.2}{5.3.11.9.2}$ (**97**), y además tiene un mismo denominador (**32**), luego el procedimiento es exacto.

Verificados los productos indicados en los respectivos términos de estos quebrados, tomarán la forma bajo la cual deben quedar:

$$\frac{1980}{2970},\ \frac{1350}{2970},\ \frac{2310}{2970},\ \frac{1485}{2970},\ \frac{1188}{2970}.$$

En la práctica no se forman los productos *indicados:* se escriben desde luego los productos *verificados.*

Tambien puede hacerse esta operacion, formando el producto de todos los denominadores: este será el denominador comun; y para formar el numerador de cada quebrado, se divide el denominador comun por cada denominador, y el cociente se multiplica por cada numerador primitivo, y así viene á multiplicarse cada numerador (**97**), por el mismo número entero por el cual se multiplicó el denominador correspondiente: el resultado será el mismo que obtuvimos ántes.

Porque $3 \times 11 \times 9 \times 2 \times 5 = 2970$. Dividido este número por el denominador 3 del primer quebrado, da 990 por cociente, ó sea el producto de los denominadores, excepto el del primero: claro es que multiplicado por este número 990 el numerador 2 del primer quebrado, tendrémos como anteriormente 1980.

Y sucesivamente tendrémos por numeradores del 2.°, 3.°, 4.° y 5.° quebrado, los mismos números, 1350, 2310, 1485, 1188 que obtuvimos ántes.

$$\begin{array}{ll} 2970 : 11 = 270; & 270 \times 5 = 1350. \\ 2970 : 9 = 330; & 330 \times 7 = 2310. \\ 2970 : 2 = 1485; & 1485 \times 1 = 1485. \\ 2970 : 5 = 594; & 594 \times 2 = 1188. \end{array}$$

Este procedimiento está en desuso por abundar en operaciones repetidas.

99. La regla general establecida (**98**) para reducir dos ó más quebrados á un comun denominador, conduce ordinariamente á quebrados cuyos términos son grandes, y por lo mismo embarazoso para los cálculos. Siempre que los denominadores de los quebrados tengan factores primos comunes, se forma préviamente el denominador comun, pero no del producto de los denominadores como ya hicimos (**98**), sino que se forma el m. m. c. (**87** y **88**) de los denominadores, y ese será el comun denominador más pequeño posible. Para formar los nuevos numeradores, se multiplica cada numerador primitivo por el cociente de dividir el m. m. c. por cada denominador respectivo, y los sucesivos productos serán los numeradores. Es como si se multiplicasen por dicho cociente los dos términos de cada uno de los quebrados propuestos.

EJEMPLO : $\frac{7}{60}, \frac{11}{48}, \frac{6}{35} = \frac{196}{1680}, \frac{385}{1680}, \frac{288}{1680}.$

Se ha formado el m. m. c. de los tres denominadores 60, 48 y 35, que es 1680.

Dividido por el primer denominador 60, se obtiene por cociente 28, que, multiplicado por 7 y por 60, da el primer quebrado $\frac{196}{1680}$, y así con los otros dos quebrados $\frac{11}{48}$ y $\frac{6}{35}$.

En la práctica basta multiplicar el numerador 7 por el cociente 28, pues el denominador será el m. m. c.

OTRO EJEMPLO : $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12} = \frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{5}{12}.$

Aquí, es tan fácil el caso, que, conocido el 12 como m. m. c. á primera vista, se multiplican los numeradores 1 y 3 por los cocientes respectivos 6 y 3, dejando el tercer quebrado como está.

Otro aún más sencillo : $\frac{1}{2}, \frac{7}{8} = \frac{4}{8}, \frac{7}{8}.$

Último ejemplo :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{12}, \frac{7}{8}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4} = \frac{12 + 16 + 10 + 21 + 4 + 18}{24}$$

100. Los quebrados pueden reducirse tambien á un comun numerador por un procedimiento análogo al que hemos empleado para reducirlos á un comun denominador.

Así, *para reducir dos quebrados á un comun numerador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el numerador del otro.*

Por ejemplo: $\frac{2}{5}$ y $\frac{10}{11}$ tomarán la forma $\frac{2 \times 10}{5 \times 10}, \frac{10 \times 2}{11 \times 2}$, ó sea $\frac{20}{50}, \frac{20}{22}.$

Y para reducir tres ó más quebrados á un comun numerador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los numeradores de los demas.

Por ejemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ tomarán la forma $\frac{1\times2\times4}{2\times2\times4}$, $\frac{2\times1\times4}{3\times1\times4}$, $\frac{4\times1\times2}{7\times1\times2}$, ó sea, $\frac{8}{16}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{8}{14}$.

Escolio. Para conocer de dos ó más quebrados de distintos numeradores y distintos denominadores, cual es mayor, se reducen á un comun denominador, y se aplica lo dicho (**96**, 1.ª). ó se reducen á un comun numerador, y se aplica lo dicho (**96**, 2.ª)

Sean los quebrados $\frac{7}{9}$ y $\frac{2}{11}$: reducidos á un comun denominador se transforman en $\frac{77}{99}$, $\frac{18}{99}$. El quebrado $\frac{77}{99}>\frac{18}{99}$; y como $\frac{77}{99}=\frac{7}{9}$, y $\frac{18}{99}=\frac{2}{11}$, se deduce que $\frac{7}{9}>\frac{2}{11}$.

Reduciendo los mismos quebrados $\frac{7}{9}$ y $\frac{2}{11}$ á un comun numerador se trasforman en $\frac{14}{18}$ y $\frac{14}{77}$. El quebrado $\frac{14}{18}>\frac{14}{77}$; y como $\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$, y $\frac{14}{77}=\frac{2}{11}$, se deduce que $\frac{7}{9}>\frac{2}{11}$.

101. *Simplificar un quebrado*, es transformarle en otro de igual valor, pero de forma más sencilla, esto es, cuyos términos sean menores.

Para que un quebrado sea simplificable, es necesario que sus dos términos tengan uno ó más factores comunes, uno al ménos.

Y se hace la simplificacion dividiendo numerador y denominador por el divisor comun (**97**).

Ejemplos: $\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$, 8 es el factor comun; $\frac{36}{72}=\frac{1}{2}$, 36 es el factor comun.

Si el caso es complicado, y no se conocen fácilmente los factores comunes de los dos términos del quebrado, se halla el m. c. d. de ellos, y se divide cada uno por él: los cocientes serán primos entre sí (**76**): el nuevo quebrado que no admite más simplificacion se llama *irreducible*, y se dice que el quebrado propuesto ha sido reducido á *su más simple expresion*, y tambien á sus *menores términos*.

Ejemplo: $\frac{592}{999}=\frac{592:37}{999:37}=\frac{16}{27}$; 37 es el m. c. d. de 999 y 592.

102. *Si se añade un mismo número entero á los dos términos de un quebrado propio, el nuevo quebrado es mayor que el primero.*

Sea, por ejemplo, $\frac{4}{5}$. Añadiendo á sus dos términos el entero 3, tendrémos: $\frac{4+3}{5+3}$, ó sea $\frac{7}{8}$, y reduciendo á un comun denominador los quebrados $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{8}$, tomarán la forma $\frac{32}{40}$ y $\frac{35}{40}$. Pero $\frac{35}{40} > \frac{32}{40}$; luego $\frac{7}{8} > \frac{4}{5}$.

Si se resta un mismo número entero de los dos términos de un quebrado propio, el nuevo quebrado es menor que el primero.

Sea el mismo quebrado $\frac{4}{5}$. Restando el entero 2 de sus dos términos, tendrémos: $\frac{2}{3}$; y reduciendo á un comun denominador los dos quebrados $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$, tomarán la forma $\frac{12}{15}$ y $\frac{10}{15}$; y como $\frac{10}{15} < \frac{12}{15}$; se deduce que $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$.

Si se añade un mismo número entero á los dos términos de un quebrado impropio, el nuevo quebrado es menor que el primero.

Sea el quebrado $\frac{7}{4}$. Añadiendo el entero 3 á sus dos términos, tendrémos $\frac{10}{7}$, y reduciendo á un comun denominador los quebrados $\frac{7}{4}$ y $\frac{10}{7}$, tomarán la forma $\frac{49}{28}$ y $\frac{40}{28}$; pero $\frac{40}{28} < \frac{49}{28}$: luego $\frac{10}{7} < \frac{7}{4}$.

Si se resta un mismo número entero de los dos términos de un quebrado impropio, el nuevo quebrado es mayor que el primero.

Sea el mismo quebrado $\frac{7}{4}$. Restando el entero 2 de sus dos términos, tendrémos $\frac{5}{2}$, y reduciendo á un comun denominador los quebrados $\frac{7}{4}$ y $\frac{5}{2}$, tomarán la forma $\frac{14}{8}$ y $\frac{20}{8}$; pero $\frac{20}{8} > \frac{10}{8}$: luego $\frac{5}{2} > \frac{7}{4}$.

Cárlos Botello

Si el quebrado impropio tiene su numerador igual á su denominador, dicho quebrado no se altera añadiendo ó restando de sus dos términos un mismo número entero, puesto que los quebrados $\frac{4}{4}$, $\frac{7}{7}$ y $\frac{2}{2}$, son iguales (**92**), é iguales á la unidad.

ADICION DE LOS QUEBRADOS.

103. La adicion, sustraccion, multiplicacion y division de los quebrados tienen la misma acepcion que hemos dado en los lugares respectivos á estas operaciones sobre números enteros. Y como nos reservamos el tratar de estas cuatro operaciones sobre números concretos, ya sean enteros ó quebrados, en el cap. V, en el presente sólo explicarémos la adicion, sustraccion, multiplicacion y division de los quebrados abstractos.

104. Pero es evidente que un quebrado (el quebrado *suma*) no puede contener la reunion de todas las unidades fraccionarias que los quebrados *sumandos* contienen respectivamente, sino en tanto que estas unidades fraccionarias sean todas iguales entre sí, como todas *quintos*, todas *novenos*, etc. Y á esta igualdad en las unidades dadas para sumar (y lo mismo para restar), esto es, á esta igualdad de la unidad fraccionaria á que cada quebrado se refiera, es á lo que llaman la generalidad de los autores *homogeneidad* de los quebrados.

Esto en cuanto á quebrados abstractos, pero si son concretos, su homogeneidad consiste no solamente en la igualdad de denominadores, sino en que además se refieran á una misma unidad entera las unidades fraccionarias, esto es, todas á partes de duro, quintal, etc.

Luego para sumar dos ó más quebrados que tengan un mismo denominador, se suman los numeradores, el resultado se pone por numerador del *quebrado suma*, y por denominador el denominador que tengan los *quebrados sumandos*.

Ejemplo: $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2+5+1}{9}=\frac{8}{9}$.

105. *Para sumar dos ó más quebrados que no tengan igual denominador, se reducen préviamente á un comun denominador, y despues se suman como en el caso anterior.*

Ejemplo. $\frac{1}{8}+\frac{2}{3}=\frac{3}{24}+\frac{16}{24}=\frac{3+16}{24}=\frac{19}{24}$.

106. *Para sumar un entero con un quebrado se multiplica el en-*

tero por el denominador del quebrado, al producto se añade el numerador, el resultado se pone por numerador del quebrado suma, y por denominador el mismo que tenga el *quebrado sumando.*

EJEMPLO: $7+\frac{1}{4}=\frac{28+1}{4}=\frac{29}{4}$. Porque, puesto 7 bajo la forma de quebrado, la operacion sería $\frac{7}{1}+\frac{1}{4}=\frac{28}{4}+\frac{1}{4}=\frac{29}{4}$.

O puesto el entero 7 bajo la forma de quebrado con el denominador 4, la operacion sería $\frac{7\times4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{28}{4}+\frac{1}{4}=\frac{29}{4}$; y siempre se obtiene el mismo resultado.

La operacion se practica de la misma manera, y se obtiene por consiguiente el mismo resultado, si en vez de decir *sumar un entero con un quebrado*, se enuncia diciendo: *sumar un quebrado con un entero.*

Porque $$\frac{1}{4}+7=\frac{1}{4}+\frac{7}{1}=\frac{1}{4}+\frac{28}{4}=\frac{29}{4}.$$

O bien $$\frac{1}{4}+7=\frac{1}{4}+\frac{7\times4}{4}=\frac{1}{4}+\frac{28}{4}=\frac{29}{4}.$$

De suerte que siempre seguirémos la misma regla:

$$7+\frac{1}{4}\left(\text{ó } \frac{1}{4}+7\right)=\frac{28+1}{4}=\frac{29}{4}.$$

Conviene advertir que lo mismo da decir *sumar un entero con un quebrado*, que *reducir un número mixto á quebrado*, ó *reducir un entero á la especie del quebrado que le acompaña*. Son tres enunciados y una sola operacion.

107. Para sumar dos ó más números mixtos, se reducen á quebrados, y se suman como éstos. O bien, se suman los enteros con los enteros y los quebrados con los quebrados, y la suma de estas dos sumas parciales será la suma total.

EJEMPLO: $$2\frac{1}{2}+5\frac{1}{3}=\frac{5}{2}+\frac{16}{3}=\frac{15}{6}+\frac{32}{6}=\frac{47}{6}.$$

O bien: suma de los enteros $2+5=7$. Suma de los quebrados

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$. Suma total $7+\frac{5}{6}=\frac{47}{6}$.

La operacion se dispone de este modo:

$$\begin{array}{rr} 2\frac{1}{2} & \frac{3}{6} \\ 5\frac{1}{3} & \frac{2}{6} \\ \hline 7\frac{5}{6}. & \end{array}$$

Y, si la suma de los quebrados fuese un quebrado impropio, se sacan los enteros para sumarlos con éstos.

El segundo procedimiento es más breve que el primero.

Escolio. Comprendidos estos tres casos generales de la adicion de los quebrados, cualquiera otro particular que ocurra, como sumar un número entero con un número mixto, ó un quebrado con un mixto, se resuelve con mucha facilidad. Así, pasarémos á la

SUSTRACCION DE LOS QUEBRADOS.

108. *Para restar un quebrado de otro quebrado cuando ambos tienen un mismo denominador, se resta el numerador del quebrado sustraendo del numerador del quebrado minuendo; la diferencia se pone por numerador del quebrado resto, y por denominador el denominador comun.*

Ejemplo: $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}.$

Si los quebrados no tienen un mismo denominador, se reducen préviamente á un comun denominador, y despues se restan como en el caso anterior.

Ejemplo: $\frac{4}{5} - \frac{2}{7} = \frac{28}{35} - \frac{10}{35} = \frac{28-10}{35} = \frac{18}{35}.$

109. *Para restar un quebrado de un entero, se multiplica el entero por el denominador del quebrado; de este producto se resta el numerador; la diferencia se pone por numerador del quebrado resto, y por denominador el denominador del quebrado.*

Ejemplo: $9 - \frac{3}{5} = \frac{9\times5-3}{5} = \frac{45-3}{5} = \frac{42}{5}.$

Porque, puesto el entero 9 bajo la forma de quebrado, la operacion sería $\frac{9}{1}-\frac{3}{5}=\frac{45}{5}-\frac{3}{5}=\frac{42}{5}$. O puesto el entero 9 bajo la forma de quebrado con el denominador 5, la operacion sería

$$\frac{9\times5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{45}{5}-\frac{3}{5}=\frac{42}{5}.$$

110. *Para restar un número mixto de otro número mixto, se reducen ambos á quebrados, y se restan como en el primer caso.*

Ejemplo: $3\frac{3}{5}-2\frac{1}{4}=\frac{18}{5}-\frac{9}{4}=\frac{72}{20}-\frac{45}{20}=\frac{27}{20}=1\frac{7}{20}.$

O bien, y esto es más breve, *se resta el quebrado del sustraendo del quebrado del minuendo, y el entero del sustraendo del entero del minuendo: la suma de ambos restos será el resto total.*

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 23\frac{3}{5} \\ 20\frac{1}{5} \\ \hline 3\frac{2}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 31\frac{8}{9} & \ldots \frac{32}{36} \\ 14\frac{1}{4} & \ldots \frac{9}{36} \\ \hline 17\frac{23}{36} & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 31\frac{1}{4} & \ldots \frac{9}{36} \ldots \frac{45}{36} \\ 14\frac{8}{9} & \ldots \frac{32}{36} \ldots \frac{32}{36} \\ \hline 16\frac{13}{36} & \end{array}$$

En el último ejemplo el quebrado del minuendo es menor que el quebrado del sustraendo, y para hacer posible la sustraccion, hemos tomado mentalmente una unidad de los enteros del minuendo y la hemos añadido al quebrado del mismo; de suerte que, al hacer la sustraccion de los enteros, hemos tenido que considerar disminuido en una unidad el entero del minuendo, ó aumentado en la misma unidad el entero del sustraendo (**22**). La misma consideracion se hará en todos los casos análogos.

Pongamos otros ejemplos de casos particulares, los cuales se resuelven fácilmente una vez comprendidos los tres casos generales que hemos explicado.

$$20-4\frac{1}{2}=19\frac{2}{2}-4\frac{1}{2}=15\frac{1}{2}.$$

$$10\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=10\frac{12}{15}-\frac{10}{15}=10\frac{2}{15}.$$

El primero de estos ejemplos lo hemos resuelto, tomando mentalmente una unidad del entero y poniéndola en forma de quebrado con el denominador igual al del quebrado sustraendo; restando éste del quebrado así formado, y uniendo el resto al entero disminuido en una unidad, hemos obtenido el resto total.

Este procedimiento es más breve que el explicado (**109**), para restar un quebrado de un entero.

MULTIPLICACION DE LOS QUEBRADOS.

111. Para multiplicar un quebrado por un número entero, *se multiplica el numerador por el entero; se pone este producto por numerador del quebrado producto; y por denominador el mismo del quebrado.*

Sea, por ejemplo, $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 . 3}{5} = \frac{12}{5}$.

En efecto, segun la idea general que tenemos de la multiplicacion, se trata en el presente caso de hallar un tercer número que sea respecto de $\frac{4}{5}$ lo que 3 es respecto de la unidad. Y como 3 se compone de la unidad repetida 3 veces, el tercer número se compondrá de $\frac{4}{5}$ repetido tres veces, ó lo que es lo mismo, de $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{4+4+4}{5} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$.

Y si el denominador del quebrado es exactamente divisible por el entero, la multiplicacion puede hacerse, *poniendo por numerador del quebrado producto el mismo numerador del quebrado, y por denominador el cociente del denominador del quebrado por el entero* (**96**, 2.ª).

Así, lo mismo da $\frac{3}{10} \times 5 = \frac{3 . 5}{10} = \frac{15}{10}$ que $\frac{3}{10} \times 5 = \frac{3}{10 : 5} = \frac{3}{2}$.

Esta segunda regla presenta el quebrado producto ya simplificado; pero no es general como la primera, pues sólo es aplicable á casos particulares como el presente.

112. *Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador, este producto se pone por numerador del quebrado-producto, y por denominador el mismo del quebrado.*

Sea, por ejemplo, $4 \times \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 3}{8} = \frac{12}{8}$.

En el presente caso, el producto será respecto de 4 lo que $\frac{3}{8}$

es respecto de la unidad; y como $\frac{3}{8}$ es, respecto de la unidad, $\frac{1}{8}$ de la unidad repetido 3 veces, el producto se compondrá de $\frac{1}{8}$ de 4 repetido 3 veces. Pero $\frac{1}{8}$ de 4 es $\frac{4}{8}$ (**93**): luego esto repetido 3 veces, esto es, $\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}=\frac{4+4+4}{8}=\frac{4\times 3}{8}=\frac{12}{8}$, es el verdadero producto.

Tambien pudo dividirse el denominador 8 por el entero 4, poniendo el cociente por denominador del quebrado-producto, y por numerador el mismo del quebrado en esta forma: $4\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8:4}=\frac{3}{2}$.

Pero estos son casos particulares en que el denominador es exactamente divisible por el entero, miéntras que la regla establecida es general.

113. *Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican numerador por numerador y denominador por denominador, el primer producto se pone por numerador del quebrado producto, y el segundo por denominador.*

Sea, por ejemplo, $\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}=\frac{5\times 7}{6\times 8}=\frac{35}{48}$.

En este caso, el producto ha de ser respecto de $\frac{5}{6}$ lo que $\frac{7}{8}$ es respecto de la unidad; y como $\frac{7}{8}$ es un octavo de la unidad repetido 7 veces, el producto se compondrá de $\frac{1}{8}$ de $\frac{5}{6}$ repetido 7 veces. Pero $\frac{1}{8}$ de $\frac{5}{6}$ (**96**) es igual á $\frac{5}{6.8}$; y esto repetido 7 veces es igual á $\frac{5.7}{6.8}$: luego la regla es exacta.

Escolio. Esta regla es aplicable á los dos casos anteriores, considerando en éstos al entero como quebrado, con la unidad por denominador.

Otro. El producto de un quebrado por el mismo invertido, es igual á 1.

Asi $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{2.3}{3.2}=\frac{6}{6}=1.$

114. Para multiplicar un número mixto por otro número mixto, se reducen ambos á quebrados, y se multiplican como los quebrados.

Si uno de los factores es un número entero ó un quebrado, y el otro un número mixto, se reduce el mixto á quebrado y se efectúa la multiplicacion como en los casos anteriores.

Ejemplo 1.° $2\frac{1}{2}\times 4\frac{1}{4}=\frac{5}{2}\times\frac{17}{4}=\frac{5.17}{2.4}=\frac{85}{8}.$

2.° $\frac{2}{3}\times 2\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{10}{6}.$

3.° $2\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{6}.$

4.° $2\frac{1}{3}\times 7=\frac{7}{3}\times 7=\frac{7.7}{3}\times\frac{49}{3}.$

Siendo uno de los factores número mixto, puede resolverse la operacion de este modo:

Sea el primer ejemplo.

$$2\frac{1}{2}\times 4\frac{1}{4}=2\times 4+\frac{1}{2}\times 4+2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=8+\frac{4}{2}+\frac{2}{4}$$
$$+\frac{1}{8}=8+\frac{21}{8}=\frac{85}{8}.$$

Escolio. Un producto indicado de varios quebrados ó de quebrados y enteros, indica que el primer factor se ha de multiplicar por el segundo, y el producto por el tercero, etc.

EJEMPLOS.

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{8}{9}\times\frac{4}{7}=\frac{2.1}{3.5}\times\frac{8}{9}\times\frac{4}{7}=\frac{2.1.8}{3.5.9}\times\frac{4}{7}=\frac{2.1.8.4}{3.5.9.7}.$$

$$\frac{2}{3}\times 5\times\frac{4}{5}\times 7\times\frac{2}{9}=\frac{2.5}{3}\times\frac{4}{5}\times 7\times\frac{2}{9}=\frac{2.5.4}{3.5}\times 7\times\frac{2}{9}$$
$$=\frac{2.5.4.7}{3.5}\times\frac{2}{9}=\frac{2.5.4.7.2}{3.5.9}.$$

Y como estos productos se verifican, ya multiplicando los numeradores entre sí, ya numeradores y enteros entre sí, poniendo este producto por numerador y por denominador el producto de los denominadores; y el producto de los numeradores es el mismo (**27** y **32**) cualquiera que sea el órden de los factores, y lo mismo se verifica en el producto de los denominadores, se deduce de aquí que *Un producto de varios factores quebrados ó de quebrados y enteros, no varía cualquiera que sea el órden de estos factores.*

DIVISION DE LOS QUEBRADOS.

115. *Un quebrado se divide por un número entero, multiplicando el denominador por el entero, poniendo este producto por denominador del quebrado cociente y por numerador el mismo del quebrado.*

Así : $\frac{2}{5} : 7 = \frac{2}{5 \,.\, 7} = \frac{2}{35}$.

La explicacion de esta regla está en el número **96**, 2.ª

Y además, el cociente $\frac{2}{35}$ es respecto del dividendo $\frac{2}{5}$ lo mismo que la unidad es respecto del divisor 7. Y fundados en el número **96**, 1.ª, si el numerador del quebrado es exactamente divisible por el entero, se efectúa la division propuesta dividiendo el numerador del quebrado por el entero, poniendo este cociente por numerador del quebrado-cociente, y por denominador el mismo del quebrado.

Así : $\frac{20}{21} : 10 = \frac{20 : 10}{21} = \frac{2}{21}$.

Pero este procedimiento es únicamente aplicable á casos particulares, en tanto que la regla establecida es general.

El cociente $\frac{2}{21}$ es el mismo que se obtendría por la regla general despues de dividir sus dos términos por 10 (**101**).

En efecto, $\frac{20}{21} : 10 = \frac{20}{21 \,.\, 10} = \frac{20}{210} = \frac{2}{21}$: luego el segundo procedimiento es más breve que la regla general.

116. *Un número entero se divide por un quebrado, multiplicando el entero por el denominador del quebrado, poniendo esto por numerador del quebrado-cociente, y por denominador el numerador del quebrado.*

Así : $5 : \frac{7}{8} = \frac{5 \,.\, 8}{7} = \frac{40}{7}$.

En efecto, el cociente ha de ser tal que, multiplicado por el divisor, nos dé el dividendo : el quebrado divisor, multiplicado por el mismo invertido, da por producto 1 (**113**, Esc.) : luego si ponemos como factor en el numerador del quebrado invertido el entero propuesto en esta forma $\frac{5.8}{7}$, éste será el cociente que se busca, puesto que $\frac{5.8}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{5.8.7}{7.8} = 5$ que es el dividendo propuesto. Y además el cociente $\frac{40}{7}$ es respecto del dividendo 5 lo mismo que la unidad es respecto del divisor $\frac{7}{8}$.

El cociente de la unidad por un quebrado es igual al quebrado invertido.

Así : $1 : \frac{3}{8} = \frac{1.8}{3} = \frac{8}{3}$.

117. *Un quebrado se divide por otro quebrado, multiplicando el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el numerador del divisor por el denominador del dividendo ; el primer producto se pone por numerador del quebrado-cociente y el segundo por denominador.*

Así : $\frac{3}{8} : \frac{4}{5} = \frac{3.5}{4.8} = \frac{15}{32}$.

En efecto, el cociente ha de ser tal que, multiplicado por el divisor, dé el dividendo : el quebrado divisor, multiplicado por él mismo invertido, da por producto 1 (**113**, Esc.) : luego el divisor invertido, multiplicado por el dividendo, en esta forma $\frac{3.5}{8.4}$, será el cociente que se busca ; puesto que $\frac{3.5}{8.4} \times \frac{4}{5} = \frac{3.5.4}{8.4.5} = \frac{3}{8}$, que es el dividendo propuesto. Y además el cociente $\frac{15}{32}$ es respecto del dividendo $\frac{3}{8}$ lo que la unidad es respecto del divisor $\frac{4}{5}$.

Si los dos quebrados tienen igual denominador, la operacion se efectúa dividiendo el numerador del dividendo por el numerador del divisor.

Porque $\frac{5}{7} : \frac{4}{7} : \frac{5.7}{4.7} = \frac{5}{4}$.

Y si tienen igual numerador, la operacion se efectúa, dividiendo el denominador del divisor por el denominador del dividendo.

Porque $$\frac{7}{9} : \frac{7}{8} : \frac{7.8}{7.9} = \frac{8}{9}.$$

118. *Un número mixto se divide por otro número mixto, reduciendo ambos á quebrados, y dividiéndolos como quebrados.*

Si el dividendo ó divisor es un número entero ó un quebrado, siendo el divisor ó dividendo un número mixto, se reduce el mixto á quebrado y se efectúa la division como en los casos anteriores.

EJEMPLOS : $$2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{4} = \frac{5}{2} : \frac{13}{4} = \frac{5.4}{13.2} = \frac{20}{26},$$

$$\frac{2}{3} : 3\frac{1}{4} = \frac{2}{3} : \frac{13}{4} = \frac{2.4}{13.3} = \frac{8}{39},\ 3\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{13}{4} : \frac{2}{3} = \frac{13.3}{2.4} = \frac{39}{8}$$

$$7 : 3\frac{1}{7} = 7 : \frac{22}{7} = \frac{7 \times 7}{22} = \frac{49}{22},\ 3\frac{1}{7} : 7 = \frac{22}{7} : 7 = \frac{22}{7.7} = \frac{22}{49}.$$

ESCOLIO IMPORTANTE. Sabemos que en la *adicion* y en la *multiplicacion* pueden invertirse el órden de los sumandos ó de los factores, sin que por ello sufran alteracion las sumas ó los productos. Por eso da el mismo resultado sumar un entero con un quebrado , que sumar dicho quebrado con el mismo entero. Por eso da tambien el mismo resultado, multiplicar un quebrado por un entero, que multiplicar dicho entero por el mismo quebrado.

Pero en la *sustraccion* y en la *division* no sucede lo mismo, por la sencilla razon de que no pueden variarse las funciones respectivas de sus términos. El *minuendo*, dado como tal, no puede dejar de ser minuendo, y lo mismo sucede con el *sustraendo ;* y lo mismo, con el *dividendo* y *divisor* respectivamente. Por eso no puede decirse con propiedad : *reste V. esos números*, *ni divida V. esos números ;* sino que se dice : *reste V. tal de cual número*, *y divida V. tal por cual número*. Miéntras que todos decimos : *sume V. ó multiplique V. esos números*.

Aún hay más : aunque el cociente de dividir un quebrado por un entero sea tan distinto del que se obtiene dividiendo el mismo entero por dicho quebrado, como que es el mismo quebrado-cociente invertido, esto no tiene más consecuencias.

Pero en la *sustraccion*, como el quebrado se resta del entero, *multiplicando el entero por el denominador*, *restando de este producto el numerador*, *poniendo el resultado por numerador del que-*

brado-resto y por denominador el mismo que tiene el quebrado.

Y un entero se resta de un quebrado, *multiplicando el denominador por el entero, restando este producto del numerador, poniendo el resultado por numerador del quebrado-resto, y por denominador el mismo del quebrado,* tenemos : $9-\frac{3}{5}=\frac{9}{1}-\frac{3}{5}=\frac{9\times5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{45-3}{5}$, segun la regla primera ; y segun la segunda : $\frac{3}{5}-9=\frac{3}{5}-\frac{9}{1}=\frac{3}{5}-\frac{5\times9}{5}=\frac{3-45}{5}=\frac{3-3-42}{5}=\frac{-42}{5}$.

Este resultado, -42, obtenido para el numerador del quebrado-resto, es lo que se llama *número negativo*, que procede, como se ha visto, de restar un número mayor de otro menor. Pero no es de este lugar el conocimiento de estos números; y en la *sustraccion* de quebrados prescindimos de este caso de restar un entero de un quebrado, reservándonos el tratarlo aquí con las consideraciones que preceden.

DE OTRAS FORMAS DE QUEBRADOS.

1.° Quebrados de quebrados.

119. Se llama *unidad fraccionaria de otra unidad fraccionaria*, á una de las varias partes iguales en que se puede dividir una unidad fraccionaria, ó un conjunto de unidades fraccionarias.

Así, por ejemplo, si dividimos un tercio en dos partes iguales, cada una de estas partes es un medio de un tercio, y se expresa así: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$. Pero si dividimos dos quintos en tres partes iguales, cada una de estas partes será un tercio de dos quintos, y se expresa así : $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$.

Y se llama *quebrado de quebrado* á una coleccion de dos ó más unidades fraccionarias de otra unidad fraccionaria, ó de un conjunto de unidades fraccionarias. Como, por ejemplo, tres quintos de un tercio, seis sétimos de dos tercios, que se expresan así : $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$, $\frac{6}{7}$ de $\frac{2}{3}$.

Pero $\frac{6}{7}$ de $\frac{2}{3}$ no tiene otra interpretacion que la de tomar $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{3}$ y repetir esto seis veces, y como esta misma interpretacion hemos dado (**113**) á la multiplicacion de un quebrado por otro quebrado, se sigue de aquí que

Para reducir á quebrado ordinario un quebrado de quebrado, se multiplican entre sí los dos quebrados que expresan el quebrado de quebrado propuesto.

Ejemplos : $\frac{6}{7}$ de $\frac{2}{3}=\frac{12}{21}$, $\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{9}=\frac{4}{45}$, $\frac{2}{9}$ de $\frac{3}{8}=\frac{6}{72}$.

Si es unidad fraccionaria de otra unidad fraccionaria, ó unidad fraccionaria de quebrado, se hace la reduccion del mismo modo.

Ejemplos : $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$, $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$,

$\frac{1}{2}$ de $\frac{7}{8}=\frac{7}{16}$.

Interrogado uno por la hora que era, contestó : los $\frac{5}{7}$ de los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{7}{12}$ de las 24 horas del dia, ó sea los $\frac{360}{48}$ de hora, ó bien las $7\frac{1}{2}$; multiplicando el producto de los numeradores por el entero 24, y dividiendo el resultado por el producto de los denominadores, supresion hecha del factor comun 7.

Observacion. Como quiera que el resultado de una operacion debe presentarse siempre bajo la forma más sencilla posible, cuando en la reduccion de un quebrado de quebrado á quebrado ordinario, ó en las otras cuatro operaciones anteriores, ó en otra cualquiera, se obtiene por resultado un quebrado impropio, conviene, salvo alguna excepcion que las circunstancias del momento aconsejen, hallar los enteros que dicho quebrado impropio contenga (**94**). Y si el resultado fuese un quebrado que admita simplificaciones, debe simplificarse sin excepcion alguna.

2.° Quebrados cuyos términos no son números enteros, sino un quebrado, ó quebrados combinados entre sí.

120. Ocurre á veces que, por seguir indicando operaciones en un cálculo, sin verificar ninguna, se llega á un quebrado cuyos dos términos son enteros y quebrados (y á otras expresiones que no hemos explicado todavía), ligados entre sí por distintos signos.

Conviene, pues, empezar dando á conocer estas expresiones, en las cuales no entren por ahora más que números enteros y números quebrados combinados por los cuatro signos de las cuatro operaciones explicadas, para reducirlas á la forma de un quebrado ordinario.

$$\frac{\dfrac{2\times\frac{5}{6}}{1\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}}:9}{\dfrac{\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}}{7}\times\frac{1}{2}}{8:2}}=\frac{\dfrac{\frac{10}{6}}{\frac{4}{3}\times\frac{5}{7}}:9}{\dfrac{\dfrac{\frac{10}{15}-\frac{6}{15}}{7}\times\frac{1}{2}}{4}}=\frac{\dfrac{\frac{10}{6}}{\frac{20}{21}}:9}{\dfrac{\frac{4}{15}}{7}\times\frac{4}{2}}=\frac{\frac{210}{120}:9}{\frac{4}{105}\times\frac{4}{2}}=$$

$$\frac{\dfrac{210}{1.080}}{\dfrac{16}{210}}=\frac{44100}{17280}=\frac{2205}{864}=2\frac{471}{884}=2\frac{53}{96}.$$

3.° Fracciones continuas.

121. Se llama *fraccion continua* á una fraccion que tiene por numerador la unidad y por denominador un entero más una fraccion que tiene por numerador la unidad, y por denominador un entero más una fraccion que tiene por numerador la unidad, y por denominador una fraccion..... y así sucesivamente.

Ejemplo: $\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\ldots\ldots}}}}$ Tambien puede haber ántes de la fraccion un entero como $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\ldots\ldots}}$

Es evidente que, cuanto mayor es el número de partes en que se divide la unidad, más difícil nos es formarnos una idea clara del quebrado, como que se aleja más de aquellas ideas que nos son tan familiares en los usos comunes de la vida. Así cualquiera comprende el valor de $\frac{1}{3}$ de arroba; pero no se comprende tan fácilmente el valor de $\frac{10}{701}$ de arroba.

Pues bien, las fracciones contínuas deben su orígen al deseo de presentar en términos más sencillos el valor aproximado de un quebrado, cuyos términos sean muy considerables, y no puedan simplificarse (**101**).

Sea por ejemplo $\frac{65}{149}$. Dividiendo los dos términos por el numerador, tendrémos $\frac{1}{\frac{149}{65}} = \frac{1}{2+\frac{19}{65}}$

Si prescindimos del quebrado $\frac{19}{65}$, es claro que $\frac{1}{2} > \frac{65}{149}$. Y, si en vez de prescindir de $\frac{19}{65}$, se añade 1 al denominador 2, tambien es claro que $\frac{1}{3} < \frac{65}{149}$: luego $\frac{65}{149}$ está comprendido entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$. Continuando dividiendo los dos términos de $\frac{19}{65}$ por 19, y así sucesivamente, se iría desarrollando la fraccion continua, y se podrían obtener quebrados que se diferenciasen de $\frac{65}{149}$ ménos que lo que se diferencia el quebrado $\frac{1}{2}$.

122. Pero estas consideraciones, y las consecuencias que de aquí se desprenden, nos llevarían fuera del límite de un libro puramente elemental.

Nos basta explicar la existencia y forma de las fracciones continuas, y concluirémos con las definiciones siguientes:

A las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, etc., se llaman *fracciones integrantes*.

Los denominadores 2, 3, 2, se llaman *cocientes incompletos*.

Las expresiones $\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$, $\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$

se llaman *cocientes completos*.

Cada quebrado equivalente á cada una de las expresiones

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}} \qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}$$ etc., se llaman *reducidas*.

Cada reducida va siendo alternativamente mayor y menor que la fraccion ordinaria generatriz, y cada reducida se aproxima á ésta más que la precedente.

Las *reducidas* de la fraccion continua equivalente á la razon de la circunferencia al diámetro, son : $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, etc.

La segunda es la dada por Arquímedes.

La cuarta, dada por Adrian Métius, es fácil de retener en la memoria por constar de esta forma 113355, la segunda mitad por numerador y la primera por denominador.

$$\frac{65}{149}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

Elevacion á potencias de los quebrados ordinarios.

123. Se llama *cuadrado* ó *segunda potencia* de un quebrado el producto que se obtiene multiplicándole por sí mismo una vez. *Cubo ó tercera potencia* de un quebrado es el producto que se obtiene multiplicándole por sí mismo dos veces.

Y, en general, potencia de cierto grado de un quebrado es el producto que se obtiene, multiplicándole por sí mismo tantas veces ménos una como indique el grado, ó tomándole por factor tantas veces como el grado de la potencia indique.

La elevacion á potencias se reduce á mera multiplicacion.

Así, para elevar al cuadrado el quebrado $\frac{2}{5}$, por ejemplo, se indica primeramente de este modo $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, y despues se verifica la multiplicacion $\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$. Y como 4 es el cuadrado de 2, y 25 el cuadrado de 5, resulta que : *Para elevar un quebrado al cuadrado se elevan sus dos términos, conservando el primero de numerador y el segundo de denominador* : y así se explica para los demas casos de otras potencias.

EJEMPLOS.

$$\left(\frac{2}{12}\right)^2=\frac{2}{12}\times\frac{2}{12}=\frac{2^2}{12^2}=\frac{4}{144};\left(\frac{1}{9}\right)^3=\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{1^3}{9^3}=\frac{1}{729}.$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2^3}{5^3}=\frac{8}{125};\left(\frac{3}{7}\right)^3=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{3^3}{7^3}=\frac{27}{343}$$

Si se tratase de números mixtos, la cuestion se resuelve, convirtiendo el mixto en quebrado y elevándole á la potencia que se quiera como tal quebrado. Así, $\left(2\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{5^2}{2^2}=\frac{25}{4}$.

124. Las potencias de todo *quebrado propio* decrecen y crecen, segun que el exponente de la potencia crece ó decrece.

Esto consiste en las condiciones de la multiplicacion, en general, segun una de las cuales el producto es menor que el multiplicando, cuando el multiplicador es menor que la unidad. Por eso $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, ó bien $\frac{4}{25}<\frac{2}{5}$, por ser respectivamente iguales á $\frac{4}{25}<\frac{10}{25}$, despues de reducidos á un comun denominador por la aplicacion del m. m. c.

Sean $\left(\frac{3}{8}\right)^3$ y $\left(\frac{3}{8}\right)^2$, ó bien, $\frac{27}{512}$ y $\frac{9}{64}$, ó bien $\frac{27}{512}$, $\frac{72}{512}$: de donde $\left(\frac{3}{8}\right)^3<\left(\frac{3}{8}\right)^2$. Y así de los demás.

Los *quebrados impropios* siguen la ley de los números enteros, porque, en las multiplicaciones respectivas, el multiplicador es mayor que la unidad.

Por eso, $\left(\frac{5}{2}\right)^2$, ó bien $\frac{25}{4}>\frac{5}{2}$.

Cárlos Botello

Extraccion de la raiz cuadrada y de la raiz cúbica de los quebrados ordinarios.

125. Raíz cuadrada. Nos ocuparémos únicamente de los quebrados irreducibles, bajo cuya forma han de presentarse siempre para hacerlos entrar en los cálculos, ora sean éstos difíciles, ora fáciles. Y si los quebrados son resultado de algun cálculo, deben ser reducidos inmediatamente á su más simple expresion por los medios conocidos.

Dicho esto para siempre, ocupémonos de la extraccion de la raíz cuadrada de un quebrado cuyos dos términos sean cuadrados perfectos.

Hemos visto (**123**) que para elevar un quebrado al cuadrado, se elevan numerador y denominador, y se divide el primer resultado por el segundo. Luego, recíprocamente, *para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuyos dos términos sean cuadrados perfectos, se extrae la raíz cuadrada del numerador y del denominador, y se divide el primer resultado por el segundo.*

Así, $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$, puesto que el cuadrado de $\frac{2}{5}$ es $\frac{4}{25}$.

126. *Si los dos términos de un quebrado no son cuadrados perfectos, el quebrado no tiene raíz cuadrada exacta.*

Porque si la tuviese, ó sería un entero ó sería un quebrado. Si la raíz exacta fuese un número entero, el cuadrado de éste sería igual á un quebrado irreducible, lo que es un absurdo.

Si la raíz exacta fuese un quebrado, sería porque el numerador y denominador de éste fuesen respectivamente raíz exacta de los términos del quebrado propuesto; es decir, que los términos del propuesto serían cuadrados perfectos, lo que es contra la hipótesis.

Si el numerador no es cuadrado perfecto, y lo es el denominador, se obtiene la raíz aproximada del quebrado, dividiendo la raíz entera del numerador por la raíz exacta del denominador.

Por ejemplo: $\sqrt{\frac{18}{49}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{18}}{7}$

Pero la raíz cuadrada de 18 es > 4 y < 5; luego la raíz pedida es $> \frac{4}{7}$ y $< \frac{5}{7}$, es decir, la raíz pedida se diferencia de cualquiera de estos dos quebrados, del primero por exceso y del segundo por defecto, en ménos de $\frac{1}{7}$; en otros términos aún, puede tomarse cualquiera de estos quebrados por la raíz verdadera, con ménos de $\frac{1}{7}$ de error.

Sin embargo, 18 está más cerca de 16 (cuadrado de 4) que de 25 (cuadrado de 5).

Y, en general, *la diferencia entre la raíz hallada de este modo y la raíz verdadera del quebrado propuesto es menor que la unidad fraccionaria á que se refiere la raíz cuadrada del denominador.*

Si el denominador no es cuadrado perfecto, se multiplican ámbos términos por el denominador, ó por un número entero tal, que transforme al denominador en cuadrado perfecto, y entónces estamos en el caso anterior.

Ejemplos: $\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2.5}}{\sqrt{5.5}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{3}{5}$ con ménos de $\frac{1}{5}$ de error.

$\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{3.2}}{\sqrt{8.2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ con ménos de $\frac{1}{2}$ de error.

127. *Para extraer la raíz cuadrada de un número mixto se reduce éste á quebrado, y se extrae la raíz como en los casos precedentes.*

Escolio. Es bastante la raíz del entero.

128. Supuesto lo dicho en esta materia, y recordando que la raíz cuadrada del producto de dos factores es igual al producto de las raíces cuadradas de dichos factores; si multiplicamos un numero entero ó quebrado por el cuadrado del denominador de la unidad fraccionaria $\frac{1}{7}$, por ejemplo, y extraemos la raíz cuadrada del producto de dicho número multiplicado por 7^2, la raíz que obtengamos será igual á la raíz pedida multiplicada por 7.

Así $\sqrt{45\times 7^2}=\sqrt{45}\times\sqrt{7^2}=\sqrt{45}\times 7.$

Es claro, que si dividimos $\sqrt{45 \times 7^2}$ por 7, tendrémos la $\sqrt{45}$: y como $\sqrt{45 \times 7^2}$ está comprendida entre dos números enteros consecutivos, esto es, que se diferencian en la unidad; el menor de estos números, dividido por 7, nos dará la raíz cuadrada pedida.

Luego, *para extraer la raíz cuadrada de un número entero ó quebrado con ménos error que una unidad fraccionaria dada*, se multiplica el número propuesto por el cuadrado del denominador de la unidad fraccionaria, se extrae la raíz cuadrada entera de este producto, y esta raíz se divide por dicho denominador.

129. Raíz cúbica.—Puesto que $\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3^3}{7^3} = \frac{27}{343}$.

Recíprocamente, $\sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{3}{7}$.

Lo que quiere decir que: *para extraer la raíz cúbica de un quebrado, cuyos dos términos son cubos perfectos, se extrae la raíz cúbica del numerador y del denominador, y se parte el primer resultado por el segundo.*

130. *Si los dos términos de un quebrado no son cubos perfectos, el quebrado no tiene raíz cúbica exacta.*

Porque si la tuviere, esta raíz exacta sería un entero, ó sería un quebrado. Pero, en el primer caso, se daría el absurdo de que el cubo de un entero fuese igual á un quebrado irreducible; y para que se diera el segundo caso, era necesario que numerador y denominador del quebrado en cuestion fuesen cubos perfectos, lo que es contra la hipótesis.

Si el numerador no es cubo perfecto, y lo es el denominador, se obtiene la raíz aproximada del quebrado dividiendo la raíz entera del numerador por la raíz exacta del denominador.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{70}{729}} = \frac{\sqrt[3]{70}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{\sqrt[3]{70}}{9}$.

Pero la raíz cúbica de 70 es >4 y <5; luego la raíz pedida es $>\frac{4}{9}$ y $<\frac{5}{9}$; es decir, la raíz pedida se diferencia de cualquiera de estos dos quebrados (del primero por exceso y del segundo por defecto) en ménos de $\frac{1}{9}$; en otros términos, puede tomarse cualquiera de estos quebrados por la raíz verdadera, con ménos de $\frac{1}{9}$ de error.

Sin embargo, 70 está más cerca de 64 (cubo de 4) que de 125 (cubo de 5).

Y, en general, *la diferencia entre la raiz hallada de este modo y la raíz verdadera del quebrado propuesto es menor que la unidad fraccionaria á que se refiere la raíz cúbica del denominador.*

Si el denominador no es cubo perfecto, se multiplican ambos términos por el cuadrado del denominador, ó por un número tal, que transforme al denominador en cubo perfecto, y entónces estamos en el caso anterior.

EJEMPLOS: $$\sqrt[3]{\frac{2}{9}}=\sqrt[3]{\frac{2.81}{9.81}}=\sqrt[3]{\frac{162}{729}}=\frac{\sqrt[3]{162}}{\sqrt[3]{729}}=\frac{\sqrt[3]{162}}{9}=\frac{5}{9}$$

con ménos de $\frac{1}{9}$ de error.

$$\sqrt[3]{\frac{65}{108}}=\sqrt[3]{\frac{65.2}{108.2}}=\sqrt[3]{\frac{130}{216}}=\frac{\sqrt[3]{130}}{\sqrt[3]{216}}=\frac{\sqrt[3]{130}}{6}=\frac{5}{6}$$

con ménos de $\frac{1}{6}$ de error.

131. *Para extraer la raiz cúbica de un número mixto, se reduce éste á quebrado, y se extrae la raíz como en los casos precedentes.*

Tambien puede ser bastante en la práctica la raíz del entero.

132. Si multiplicamos un número, entero ó quebrado, por el cubo del denominador de la unidad fraccionaria $\frac{1}{7}$, por ejemplo, y extraemos la raíz cúbica del producto de dicho número multiplicado por 7^3, la raíz que obtengamos será igual á la raíz pedida multiplicada por 7.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{45\times7^3}=\sqrt[3]{45}\times\sqrt[3]{7^3}=\sqrt[3]{45}\times7.$

Es claro que si dividimos $\sqrt[3]{45\times7^3}$ por 7, tendrémos la $\sqrt[3]{45}$:

y como $\sqrt[3]{45 \times 7^3}$ está comprendida entre dos números enteros consecutivos, esto es, que se diferencian en la unidad; el menor de estos números dividido por 7 nos dará la raíz cúbica pedida.

Luego, *para extraer la raiz cúbica de un número entero ó quebrado con ménos error que una unidad fraccionaria dada*, se multiplica el número propuesto por el cubo del denominador de la unidad fraccionaria, se extrae la raíz cúbica entera de este producto, y esta raíz se divide por dicho denominador.

CAPITULO IV.

De los quebrados decimales abstractos.

133. La unidad fraccionaria que hemos estudiado hasta aquí, era una de las varias partes en que podía considerarse dividida la unidad entera, sin que esta division de la unidad estuviese sujeta á ley alguna: así unas veces se consideró dividida la unidad en 10 partes iguales, otras en 11, etc.

Pero si se considera como la primera division de la unidad en 10 partes iguales, y despues cada una de estas décimas partes en otras 10, y cada una de éstas en otras 10, y así sucesivamente, siguiendo esta ley constante, tenemos una nueva especie de unidad fraccionaria llamada *unidad fraccionaria decimal.*

Su expresion es la unidad por numerador, y la unidad seguida de ceros por denominador en esta forma: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, etc.

Y estas distintas unidades se nombran ó leen de esta manera: una *décima*, una *centésima*, una *milésima*, una *diez-milésima*, una *cien milésima*, etc.

De suerte que una *unidad* vale 10 *décimas*; y como la *décima* vale 10 *centésimas*, la *unidad* vale 100 *centésimas;* y como la *centésima* vale 10 *milésimas*, la *unidad* vale 1000 *milésimas* y 10000 *diez-milésimas*, etc. Y siguiendo este razonamiento dirémos: que una *décima* vale 10 *centésimas*, 100 *milésimas*, etc.: una *centésima* vale 10 *milésimas*, 100 *diezmilésimas*, 1000 *cienmilésimas*, etc.; y así de las demás.

Siguiendo la idea que hemos dado del número (**7**), dirémos que: *quebrado decimal es una coleccion de dos ó más unidades fraccionarias decimales iguales*, como *seis décimas*, *veintiuna milésimas*, etc.

Y su expresion será $\frac{6}{10}$, $\frac{21}{1000}$, etc.

Puesto que los quebrados decimales son un caso particular de los quebrados ordinarios, todos los principios, acepciones y definiciones que hemos dado en el capitulo precedenteson aplicables en éste.

Así, $\frac{7}{10}$ es un quebrado decimal propio, $\frac{13}{10}$ es un quebrado decimal impropio, $3\frac{9}{10}$ es un número mixto de entero y quebrado decimal, etc.

134. De lo expuesto se deduce que la ley de formacion de los quebrados decimales es la misma que la ley de formacion de los números enteros en nuestro sistema *decimal* de numeracion, puesto que las unidades fraccionarias decimales crecen y decrecen de *diez en diez*, esto es, una unidad fraccionaria decimal vale 10 del órden inmediato inferior; así una *cienmilésima* vale 10 *millonésimas*, y recíprocamente 10 de un órden valen 1 del órden inmediato superior; y además el *máximum* de unidades fraccionarias de cada órden es 9; porque 10 componen una del órden inmediato superior; así, diez *centésimas* componen una *décima*; diez *milésimas* componen una *centésima;* diez *diezmilésimas* componen una *milésima;* diez *cienmilésimas* componen una *diezmilésima;* diez *millonésimas* componen una *cienmilésima* etc. Entendiendo por unidades fraccionarias decimales de primer órden las *décimas;* de segundo, las *centésimas;* de tercero, las *milésimas;* de cuarto, las *diezmilésimas;* de quinto, las *cienmilésimas*; de sexto, las *millonésimas*, y así sucesivamente.

Esta observacion hirió indudablemente la imaginacion del matemático inglés Guillermo Ougthred para escribir, el primero, los quebrados decimales sin denominador en el siglo XVII.

Con efecto, recordando el principio convencional adoptado para escribir en el sistema de numeracion explicado ya (**11**), los números enteros, á saber: que una cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades del órden inmediato superior, y que vale por lo mismo 10 veces más que la del anterior, adoptado este principio en toda su generalidad, es evidente que el valor relativo de varias cifras iguales escritas unas á continuacion de otras, disminuye de diez en diez, contando de izquierda á derecha. Por manera que en la cantidad representada por 7777, contando de izquierda á derecha, la segunda cifra vale 10 veces ménos que la primera; la tercera vale 10 veces ménos que la segunda, ó sea 100 veces ménos que la primera; y la cuarta vale 10 veces ménos que la tercera, ó sea 100 veces ménos que la segunda, ó sea 1000 veces ménos que la primera. Luego: si suponemos que la primera exprese 7 unidades enteras, la segunda expresará 7 décimas, la tercera expresará 7 centésimas, y la cuarta 7 milésimas. Esta circunstancia se indica poniendo una coma á la derecha de la primera cifra, es decir, que en el caso ó cuestion presente se escribe así: 7,777, estando á la izquierda de la coma las unidades enteras, y á la derecha las unidades fraccionarias decimales. De esta suerte la *escala completa* de numeracion es como sigue:

	1	1	1	1,	1	1	1	1	
etc.	unidad de millar.	centena.	decena.	UNIDAD.	décima.	centésima.	milésima.	diezmilésima.	etc.

Cuando no hay unidades enteras, se pone en el lugar de éstas un cero. Así, 0,1 significa 1 décima; 0,01 significa 1 centésima; 0,37 significa 37 centésimas, etc.

Esta manera de escribir los quebrados decimales facilita en extremo los cálculos, toda vez que las distintas operaciones que con ellos se ejecuten, se verifican con la misma facilidad que con los números enteros. Así se ven continuamente aplicaciones de estos quebrados á las artes y oficios más comunes; y sobre todo, la aplicacion que se ha hecho al sistema de pesas y medidas que Francia tiene la gloria de ir introduciendo en todos los pueblos cultos, ha producido esa gran popularidad que han alcanzado los quebrados decimales escritos, abstraccion hecha de los denominadores.

Escolio. Se comprende fácilmente, que no obstante las reconocidas ventajas de los quebrados decimales, no puede prescindirse de los quebrados ordinarios, atendiendo, primero, á que los cálculos ofrecerán con más probabilidad quebrados ordinarios que decimales; pues basta considerar que para hacer una division de la unidad en 10 partes, puede hacerse ántes en 2, 3, hasta 9, y para hacer otra en 100, puede hacerse ántes en 11, 12, hasta 99: y 2.° que no todos los quebrados ordinarios, que los cálculos ofrezcan, pueden valuarse exactamente en quebrados decimales, segun tendrémos lugar de observar más adelante.

Otro. Conviene tambien observar, aunque esta idea sea aquí prematura, que á cada sistema de numeracion corresponde una clase de quebrados que tenga con él la misma analogía que respecto de nuestro sistema de numeracion tienen los quebrados decimales.

Una vez explicada la posibilidad de escribir los quebrados decimales como los números enteros, pongamos algunos ejemplos y pasemos en seguida á su lectura.

135. Propongámonos escribir el número *tres* unidades, *cuatro* décimas y *ocho* centésimas. Escribirémos desde luego la parte entera

3 con una coma á su derecha para separarla de la parte fraccionaria; seguidamente pondrémos la cifra 4 en el lugar de las décimas, ó sea el primero, y á su continuacion en el lugar de las centésimas, ó sea en el segundo, la cifra 8, en esta forma: 3,48.

Así como los números enteros se enuncian generalmente expresados en las unidades inferiores, así tambien los quebrados decimales se enuncian casi siempre expresados en las unidades del órden inferior que tengan. Por ejemplo: *quinientas ocho* milésimas. Aquí donde no se enuncian unidades enteras, se entiende que no las hay, que no hay más que fraccion, y para escribir ésta despues de poner el *cero* en el lugar de los enteros y la coma á su derecha, se hace la siguiente consideracion: como 100 milésimas componen 1 décima, 500 milésimas compondrán 5 décimas: luego este número consta de 0 enteros, 5 décimas, 0 centésimas y 8 milésimas, y se escribe así: 0,508.

Tambien se acostumbra, cuando hay enteros, á enunciarlos reducidos á las unidades inferiores que tenga la fraccion decimal, en vez de enunciar la parte entera primeramente, y la fraccionaria despues. Por ejemplo, *cuarenta y dos* décimas. Es claro que como 10 décimas componen una unidad entera, 40 décimas compondrán 4 unidades, y este número consta de 4 unidades y 2 décimas, y se escribirá así: 4,2.

Como la lectura de un quebrado decimal escrito bajo la forma ordinaria, esto es, con denominadores, equivale al enunciado en lenguaje vulgar del mismo quebrado sin denominador, se sigue de aquí que, dado un quebrado decimal con denominador, sabrémos transformarle en otro sin denominador.

Ejemplos: $\frac{7}{10} = 0,7$; $\frac{85}{100} = 0,85$; $3\frac{1}{10} = 3,1$; $\frac{104}{100} = 1,04$;

$$\frac{7}{1000} = 0,007.$$

El primer ejemplo equivale á enunciar el número siete décimas, que ya está explicado (**134**) cómo se escribe.

El segundo tiene el mismo significado é interpretacion.

El tercero es un número mixto cuyo enunciado en el lenguaje comun será *escribir el número* tres unidades y una décima (**134**).

El cuarto es un quebrado impropio: hallando los enteros que contiene, se enuncia y escribe como el ejemplo anterior.

Y el quinto se escribe como el 1.° y 2.°, dando á la cifra 7 la colocacion correspondiente.

Por manera que, *para escribir los quebrados decimales como nú-*

mero entero, se escriben los enteros, si los hay, ó en su lugar un 0, *poniendo la coma á su derecha, y á continuacion la cifra de las décimas, y despues la de las centésimas, y despues la de las milésimas, etc., ocupando con un* 0 *el órden ú órdenes de unidades de que carezca la fraccion propuesta, para dar la colocacion correspondiente á la cifra ó cifras que estén á su derecha*, que son las dos funciones que tiene el 0 en esta clase de números. O si se quiere, puede decirse que :

Para transformar los quebrados decimales escritos bajo la forma ordinaria en quebrados equivalentes bajo la forma entera, se escriben los enteros, si el quebrado es impropio, ó si es un número mixto, ó un 0 *en su lugar si es quebrado propio ; á la derecha, la coma ; y á continuacion, el numerador como número entero, pero de modo que la cifra, si es única, ó la última, si son dos ó más, ocupe el lugar designado ordinariamente por el número de ceros que acompañen á la unidad en el denominador ; escribiendo el número de ceros que, en algunos casos, como en el ejemplo anterior, sea necesario entre la coma y el numerador.*

136. Los quebrados decimales escritos bajo forma entera *se leen como los números enteros*, esto es, *se leen generalmente reduciendo todas las unidades de órdenes superiores á las unidades del órden inferior que tengan.*

Sea, por ejemplo, el número 0,728, compuesto de 7 décimas + 2 centésimas + 8 milésimas.

Como 1 décima vale 10 centésimas, 7 décimas valdrán 70 centésimas; pero el número propuesto tiene además 2 centésimas: luego podemos decir que este número se compone de 72 centésimas + 8 milésimas.

Y como una centésima vale 10 milésimas, 72 centésimas valdrán 720 milésimas; pero el número propuesto tiene además 8 milésimas: luego podemos decir que este número se compone de setecientas veintiocho milésimas, que es como generalmente se lee.

Y decimos *generalmente*, porque puede leerse de otras varias maneras, segun dijimos de los números enteros (**11**) : así puede leerse : *siete décimas* y *dos centésimas* y *ocho milésimas ;* ó *setenta y dos centésimas y ocho milésimas.*

Si hay enteros en el número propuesto, esto es, si es un número mixto, *puede leerse la parte entera separadamente ;* ó puede leerse *reduciendo tambien los enteros á las unidades inferiores que la fraccion tenga.*

Así, 7,08 lo mismo puede leerse diciendo *siete enteros y ocho centésimas*, que diciendo *setecientas ocho centésimas.*

Cuando la fraccion es considerable, puede leerse de tres en tres cifras, contando desde la coma, por de contado, de izquierda á derecha, pudiendo tener el último grupo sólo dos ó una cifra.

Ejemplo : 0,0073430006200047 se leerá : cero enteros, siete milésimas, trescientas cuarenta y tres millonésimas, seiscientas veinte billonésimas, cuatro milbillonésimas y siete diezmilbillonésimas.

Recomendamos, para leer y escribir bien los quebrados decimales bajo forma entera, que se sepa de memoria, análogamente á lo dicho (**11**), que : *dado un órden de unidades fraccionarias, decir el lugar que ocupa, contando desde la coma á la derecha ;* y recíprocamente que, *dado un lugar cualquiera, contando desde la coma á la derecha, decir el órden de unidades fraccionarias á que corresponde.*

Y cuando esta clasificacion no se recuerde, *se lee la parte fraccionaria como un número entero, á contar desde la primera cifra significativa que haya despues de la coma, y para dar nombre á las unidades de órden inferior, entiéndase que éste, en cada caso, es igual al de la unidad fraccionaria que tenga por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte fraccionaria de cada caso.*

Este último ejemplo se leerá así : *setenta y tres billones cuatrocientos treinta mil seis millones doscientas mil cuarenta y siete diezmilbillonésimas ;*

porque la última cifra 7 se refiere á la unidad fraccionaria $\frac{1}{10,000^2000,000^1000,000}$; y de éstas hay tantas como hemos dicho en el número setenta y tres billones, etc.

Esta última manera de explicar la lectura se funda en que

Para transformar un quebrado decimal de un número limitado de cifras escrito bajo forma entera, en otro equivalente de forma ordinaria, ó sea con denominador, se pone por numerador la parte fraccionaria considerada como número entero, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga dicha parte fraccionaria.

Si el número propuesto tiene parte entera y parte fraccionaria, esto es, si es número mixto, puede tomar la forma de número mixto ordinario, ó la de quebrado impropio si se pone por numerador del ordinario la parte entera y la fraccionaria formando un solo número.

Aunque esta proposicion es la recíproca del número **135**, se explica fácilmente porque si $0,1 = \frac{1}{10}$; $0,01 = \frac{1}{100}$; $0,001 = \frac{1}{1000}$ etc.;

tendrémos $0,7 = \frac{7}{10}$; $0,78 = \frac{78}{100}$; $0,209 = \frac{209}{1000}$;

é igualmente $3,8 = 3\frac{8}{10} = \frac{38}{10}$; $56,01 = 56\frac{1}{100} = \frac{5601}{100}$;

y por último $0,003 = \frac{3}{1000}$; $0,00008 = \frac{8}{100000}$.

137. En estos dos últimos ejemplos es claro que, al considerar como número entero la parte fraccionaria, los ceros que quedan á la izquierda no se ponen en el numerador, y éste es solamente 3 en uno y 8 en otro.

Con este motivo, observarémos que los ceros á la derecha de las fracciones son tan nulos, como á la izquierda de los números enteros. La razon es bien sencilla: el cero no lleva valor absoluto ninguno, y como puesto á la derecha de la parte fraccionaria no da tampoco valor relativo á ninguna cifra de ésta, queda demostrado *que el cero á la derecha de una fraccion decimal no aumenta ni disminuye su valor*.

Así: $0,1 = 0,10 = 0,100 = 0,1000$, etc.

Igualdades que conocíamos desde que supimos que una décima vale 10 centésimas, ó sea 100 milésimas ó sea 1000 diezmilésimas, etc.

Otra demostracion: sea 0,37; escribiendo cuatro ceros á la derecha tendrémos 0,370000; puestos estos dos quebrados en forma ordinaria, se transformarán en $\frac{37}{100}$ y $\frac{370000}{1000000}$ y como estos dos últimos quebrados (97) son iguales, tambien lo serán los dos anteriores: luego queda demostrado *que un quebrado decimal no varía de valor poniendo á la derecha de la parte fraccionaria cualquier número de ceros*.

De aquí se deduce que *todo número entero puede considerarse como la parte entera de un quebrado decimal cuya parte fraccionaria es cero*.

Así: $7 = 7,000$ $39 = 39,000$.

Un quebrado decimal escrito bajo forma entera, puede ser considerado como un número mixto cuya parte entera sea por lo ménos cero.

Tambien se deduce, *que si se tienen varios quebrados decimales con unidad fraccionaria decimal inferior distinta, ó sea con distinto denominador, puede hacerse que todos ellos tengan igual dicha unidad inferior, ó sea igual denominador, poniendo el conveniente número de ceros á la derecha de los que tengan ménos cifras que otro.*

Así los quebrados decimales 0,7 0,85 0,027 equivalen respectivamente á. . . 0,700 0,850 0,027, los cuales tienen bajo esta última forma el denominador comun 1000.

Por último, *si el resultado de un cálculo ó de una operacion cualquiera es un quebrado decimal que termina en ceros, pueden suprimirse éstos.*

Pues siendo, $0{,}7=0{,}700$: recíprocamente $0{,}700=0{,}7$.

Unicamente se conservará el cero en final de quebrado, cuando convenga ó sea necesario conservar la huella del órden de unidades á que se refiera el cero.

138. *Si en una fraccion decimal se corre la coma uno, dos, ó más lugares á la derecha, queda multiplicado el número por* 10, 100 *y en general por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corra la coma.* En efecto, sea por ejemplo el número 0,429 : corriendo la coma dos lugares á la derecha, tendrémos 42,9. Pero 4, que eran décimas, han pasado á ser decenas ; 2, que eran centésimas, son ahora unidades; y 9, que eran milésimas, son ahora décimas : luego si todas las partes se han hecho cien veces mayores, el número propuesto se habrá hecho cien veces mayor ó habrá quedado multiplicado por 100 al tomar la forma 42,9.

Esta proposicion se demuestra tambien por la consideracion de los quebrados ordinarios equivalentes á los dos quebrados decimales en cuestion.

Pues siendo $0{,}429=\frac{429}{1000}$ y $42{,}9=\frac{429}{10}$; como quiera que $\frac{429}{10}$ es cien veces mayor que $\frac{429}{1000}$ (**96**, 2.ª), es evidente que 42,9 es cien veces mayor que 0,429.

139. Si en un quebrado decimal se corre la coma uno, dos ó más lugares á la izquierda, queda dividido el número por 10, 100, y en general por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se haya corrido la coma. En efecto, sea por ejemplo el número 428,7 corriendo la coma dos lugares á la izquierda, tendrémos 4,287. Pero el 4 que se refería á centenas, ahora se refiere á unidades ; el 2 que se refería á decenas, ahora se refiere á décimas ; el 8 que se refería á unidades, ahora se refiere á centésimas ; y por último el 7 que se refería á décimas, ahora se refiere á milésimas : luego si todas las partes se han hecho cien veces menores, el número propuesto se habrá hecho cien veces menor, ó habrá quedado dividido por 100, al tomar la forma 4,287.

Esta proposicion se demuestra tambien por la consideracion de los quebrados ordinarios equivalentes á los dos quebrados decimales en cuestion;

porque siendo $428{,}7=\frac{4287}{10}$ y $4{,}287=\frac{4287}{1000}$, como quiera que $\frac{4287}{1000}$ es cien veces menor que $\frac{4287}{10}$ (**96**, 2.ª), es evidente que 4,287 es cien veces menor que 428,7.

ADICION DE LOS QUEBRADOS DECIMALES.

140. *La adicion de los quebrados decimales se dispone y verifica como la de los números enteros.*

Ejemplos:

0,028	0,4	0,97	7,88	928
0,79	77	23,1	2,19	0,779
0,837	0,82	7,892	48,9	93,001
1,655	78,22	31,962	58,97	1021,78

En el primer ejemplo los sumandos son todos fracciones propiamente dichas.

En el segundo, fracciones y enteros.

En el tercero, una fraccion y mixtos.

En el cuarto, números mixtos.

En el quinto, entero, fraccion y mixto.

Es evidente que las sumas están bien determinadas, puesto que cada una de ellas contiene las sumas parciales de las unidades de todos los órdenes de los sumandos respectivos; agregando á los enteros las unidades procedentes de la suma de las unidades fraccionarias en virtud del precepto (**18**) de agregar á la suma de cada columna ú órden de unidades la unidad ó unidades del mismo órden que haya producido la suma del órden anterior ó anteriores.

Para que las unidades de órdenes iguales se correspondan, basta que se correspondan las comas: la coma de la suma corresponderá siempre con las de los sumandos.

Algunos completan con ceros aquellos sumandos (**137**) que tienen ménos cifras en la parte fraccionaria para hacer que tengan todos igual denominador: en la práctica es inútil esto.

En el último ejemplo, al comenzar á sumar por las unidades fraccionarias de órden inferior, encontramos 9 milésimas y 1 que componen 10 milésimas, ó sea 1 centésima y 0 milésimas: hemos agregado la centésima á la suma parcial de las centésimas, y hemos omitido el escribir el cero debajo de las milésimas.

SUSTRACCION DE LOS QUEBRADOS DECIMALES.

141. *La sustraccion de los quebrados decimales se dispone y se verifica como la de los números enteros.*

Ejemplos:						
	0,7008	4,37	0,42	4,078	8	4,2
	0,6309	3,37	0,12	3,9	7,028	4,1528
	0,0699	1	0,3	0,178	0,972	0,0472

Los ejemplos 1.°, 2.° y 3.° no ofrecen nada notable.

Del 4.° dirémos que no hay necesidad de reducir sus dos términos á un comun denominador.

En cuanto al 5.° y al 6.° pueden reducirse, si se quiere, á un comun denominador, minuendo y sustraendo de cada ejemplo, ó sea completar con ceros cada minuendo, el 1.° con tres ceros y el 2.° con otros tres, aunque en la práctica no hay necesidad de ello, y ponerlos bajo esta forma:

8,000	4,2000
7,028	4,1528
0,972	0,0472

Es evidente que los restos de estos seis ejemplos están bien determinados, puesto que cada uno de ellos contiene los restos parciales de las unidades de todos los órdenes de los dos términos de cada ejemplo.

MULTIPLICACION DE LOS QUEBRADOS DECIMALES.

142. *Para multiplicar un quebrado decimal por* 10, 100, *y en general por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares á la derecha cuantos sean los ceros que acompañen á la unidad* (**138**).

Así, $0,78 \times 10 = 7,8$ $3,104 \times 1000 = 3104$ $0,37 \times 1000 = 370$.

En el primer ejemplo el producto queda bajo la forma de quebrado decimal, porque el número de lugares que hay que correr la coma, es menor que el de cifras existentes en la parte fraccionaria.

En el segundo el producto se convierte en entero, porque el número de lugares que hay que correr la coma, es igual al número de cifras existentes en la parte fraccionaria.

En el tercero el producto se convierte tambien en entero, pero con más cifras que las que hay en la parte fraccionaria; porque el número de lugares que hay que correr la coma es mayor que el de aquellas cifras, lo cual puede verificarse poniendo un cero á la derecha de las mismas (**137**).

Observacion. Lo dicho (**114**) respecto al órden de los factores en la multiplicacion de los quebrados ordinarios, es aplicable á la multiplicacion de los quebrados decimales, pues basta transformar éstos en quebrados ordinarios, y se verifica la proposicion.

143. *Para multiplicar un quebrado decimal por un número entero, ó un entero por un quebrado decimal, se prescinde de la coma en el quebrado, se efectúa la multiplicacion como si ambos factores fuesen números enteros, y en el producto se apartan á la derecha, por medio de una coma, tantas cifras como haya en la parte fraccionaria del quebrado.*

Sea por ejemplo: $2{,}04 \times 7 = 14{,}28$.

En efecto: al prescindir de la coma en el multiplicando, queda éste multiplicado por 100: luego el producto $204 \times 7 = 1428$ es 100 veces mayor que el verdadero. Ahora bien: un entero queda dividido por 100, separando dos cifras á la derecha por medio de una coma: luego 14,28 será el verdadero producto de $2{,}04 \times 7$.

Otra demostracion por la consideracion de los quebrados ordinarios equivalentes:

$$2{,}04 \times 7 = \frac{204}{100} \times 7 = \frac{1428}{100} = 14\frac{28}{100} = 14{,}28.$$

Si la cuestion fuese $7 \times 2{,}04$, basta invertir el órden de los factores, y estamos en el caso anterior.

Tambien puede disponerse la multiplicacion de un quebrado decimal por un entero, ó al contrario, *colocando el entero debajo del quebrado, multiplicando las unidades fraccionarias inferiores por el entero, despues las del órden inmediato superior por el entero, y así sucesivamente; y si al multiplicar las décimas por el entero, resultare del producto unidades enteras, se reservan para agregarlas al producto de las unidades enteras por el entero, colocando las décimas menores que 10 en el producto parcial correspondiente, separado del inmediato superior por la coma, en esta forma:*

$$\begin{array}{r} 2{,}04 \\ 7 \\ \hline 14{,}28 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39{,}48 \\ 5 \\ \hline 197{,}4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}40003 \\ 9 \\ \hline 3{,}60027 \end{array}$$

Cárlos Botello

En el primer ejemplo no hay unidades procedentes del producto de las unidades fraccionarias por el entero.

En el segundo hay dos que se agregan al producto de las 9 unidades por el entero.

En el tercero el multiplicando es fraccion propiamente dicha, y en el producto no hay más enteros que las 3 unidades procedentes del producto de las décimas por el entero multiplicador.

Es evidente que estos tres productos están bien determinados puesto que cada uno de ellos contiene los productos parciales de las unidades de todos los órdenes de cada multiplicando por el multiplicador respectivo.

141. *Para multiplicar un quebrado decimal por otro quebrado decimal, se prescinde de la coma en el multiplicando y en el multiplicador, se efectúa la multiplicacion como si ambos factores fueren números enteros y se separan á la derecha, ó sea de derecha á izquierda, tantas cifras como haya en la parte fraccionaria de ambos factores juntos.*

Sea por ejemplo: $30{,}4 \times 0{,}72 = 21{,}888.$

Disposicion de la operacion:

$$\begin{array}{r} 304 \\ 72 \\ \hline 608 \\ 21\,28 \\ \hline 21{,}888 \end{array}$$

En efecto: al prescindir de la coma en el multiplicando, queda éste multiplicado por 10; al prescindir de la coma en el multiplicador, queda éste multiplicado por 100: luego el producto $304 \times 72 = 21888$ es 10×100 veces mayor que el verdadero, y para obtener éste, separarémos por medio de una coma (**139**) tres cifras á la derecha, número igual á las que hay en la parte fraccionaria de ambos factores juntos, con lo cual quedará dividido por 1000 el producto 21888, y nosotros habrémos obtenido el verdadero 21,888.

Otra demostracion por la consideracion de los quebrados ordinarios equivalentes:

$$30{,}4 \times 0{,}72 = \frac{304}{10} \times \frac{72}{100} = \frac{304 \,.\, 72}{10 \,.\, 100} = \frac{21888}{1000} = 21\,\frac{888}{1000} = 21{,}888.$$

Otro EJEMPLO: $0{,}012 \times 0{,}03 = 0{,}00036.$

Disposicion de la operacion:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 3 \\ \hline 0,00036 \end{array}$$

En este ejemplo, el producto de 12 enteros por 3 enteros es igual á 36 enteros. Y como en la parte fraccionaria del multiplicando hay tres cifras, y en la del multiplicador dos, es claro que en el producto hay que separar con la coma cinco á la derecha. Pero el producto 36 no tiene más que dos cifras: para proveer, pues, á esta necesidad, recordarémos que á la izquierda de los enteros pueden ponerse cuantos ceros se quiera, sin que se altere el valor de los enteros; pondrémos á la izquierda de 36 el conveniente número de ceros, en el presente caso cuatro, y separando con la coma á la derecha cinco cifras, tendrémos, segun la regla explicada, el verdadero producto 0,00036.

DIVISION DE LOS QUEBRADOS DECIMALES.

145. *Para dividir un quebrado decimal por* 10, 100, *y en general por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares á la izquierda cuantos sean los ceros que acompañen á la unidad* (**139**).

EJEMPLOS: 50,94 : 10 = 5,094 31,43 : 100 = 0,3143 0,7 : 100 = 0,007.

En el primer ejemplo hay enteros en el cociente, porque el número de lugares que hay que correr la coma es menor que el número de cifras que tiene la parte entera del dividendo.

En el segundo no hay enteros en el cociente, porque ha habido que correr la coma tantos lugares como cifras tiene la parte entera del dividendo.

En el tercero no solamente no hay enteros en el cociente, sino que además, habiendo en la parte entera del dividendo ménos cifras que lugares ha de correrse la coma, ha habido que poner ceros á la izquierda de los enteros, para que se pueda correr la coma todos los lugares necesarios.

Si un número entero que no termine en ceros se divide por 10, 100, y en general por la unidad seguida de ceros, *el cociente completo se obtiene separando á la derecha por una coma tantas cifras cuantos sean los ceros que acompañen á la unidad*, haciendo de parte entera el cociente entero, y de parte fraccionaria el resto.

Así, 93 : 10 = 9,3 8329 : 1000 = 8,329 43 : 1000 = 0,043.

Esto se funda en que el número entero puede considerarse como la parte entera de un quebrado decimal cuya parte fraccionaria es cero (**137**).

146. *Para dividir un quebrado decimal por un entero, se prescinde de la coma en el dividendo, se divide éste por el divisor, como si ámbos fuesen números enteros, y se separan á la derecha del cociente por una coma tantas cifras cuantas tenga la parte fraccionaria del dividendo.*

Así, $3{,}75 : 5 = 0{,}75 \quad 2{,}94 : 3 = 0{,}98.$

En efecto : al prescindir de la coma en el dividendo, queda éste multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte fraccionaria, en los dos casos presentes por 100; luego el cociente es igual número de veces mayor que el verdadero, y para obtener éste, se separan de la derecha un número de cifras igual al que había en la parte fraccionaria del dividendo.

Otra demostracion por la consideracion de los quebrados ordinarios equivalentes :

$$3{,}75 : 5 = \frac{375}{100} : 5 = \frac{375 : 5}{100} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

$$2{,}94 : 3 = \frac{294}{100} : 3 = \frac{294 : 3}{100} = \frac{98}{100} = 0{,}98.$$

147. Pasemos á dividir un quebrado decimal por otro quebrado decimal, empezando por el caso en que el dividendo tenga ménos cifras fraccionarias que el divisor.

Ejemplo : 3,7 : 2,48....

$$\begin{array}{r|l} 370 & 248 \\ \cline{2-2} 1220 & 1{,}49 \\ 2280 & \\ 48 & \end{array}$$

Se escribe á la derecha del dividendo un cero, para que tengan dividendo y divisor igual número de cifras fraccionarias, y despues se prescinde de la coma en ambos, lo cual equivale á multiplicar los dos términos de la division por un mismo número, por 100 en este ejemplo, *y se dividen como los números enteros*.

Hecha la division, se obtiene 1 por cociente y 122 por resto.

Si se quiere obtener un cociente más aproximado al verdadero de esta division inexacta, se hace la consideracion siguiente. Como 1 vale diez décimas, reduzcamos las 122 unidades á décimas, multiplicando el número 122 por 10, esto es, escribiendo un cero á su derecha, y el cociente de dividir 1220 por 248 serán décimas, porque el cociente es siempre de la especie de lo que se divide.

Si se quiere obtener mayor aproximacion, se reducen las 228 décimas de resto á centésimas, multiplicándolas por 10, esto es, escribiendo un cero á su derecha, y el cociente de dividir 2280 por 248 serán centésimas; y el cociente 1,49 se diferencia del verdadero en ménos de 0,01; puesto que no ha podido ponerse ni una centésima más en el cociente. A esto se llama tambien aproximar el cociente hasta centésimas. Claro es que, para obtener mayor aproximacion, no había que hacer más que continuar el procedimiento iniciado.

Si dividendo y divisor tienen igual número de cifras fraccionarias, no hay que hacer preparacion prévia: *se prescinde de la coma en ambos, lo cual es lícito, porque esto equivale á multiplicar por un mismo número los dos términos de la division, y ésta se practica como en el caso anterior.*

Pero si el divisor tiene ménos cifras fraccionarias que el dividendo, entónces, en vez de completar con ceros el divisor para que tengan ambos igual número de cifras fraccionarias, *se prescinde de la coma en el divisor y se corre á la derecha la del dividendo tantos lugares como cifras fraccionarias tenga el divisor: despues se dividen por el divisor los enteros del dividendo, las décimas del dividendo, las centésimas del dividendo, y así sucesivamente.*

EJEMPLO:	2,708 : 1,2.......	27,08	12
		3 0	2,2566.....
		68	
		80	
		80	
		8	

Los 3 enteros de resto, reducidos á décimas, son 30, que dan 2 por cociente.

Las 6 décimas de resto, reducidas á centésimas, componen 60; más 8 que hay en el número propuesto, son 68 centésimas, que dan por cociente 5.

Si se quiere mayor aproximacion en el cociente se reducen las 8 centésimas de resto á milésimas, y así se continúa, haciendo la observacion siguiente: que repitiéndose el resto 8, la cifra 6 del cociente se repite tambien indefinidamente.

Consecuencias de la division de los quebrados decimales.

148. Este procedimiento se emplea *para reducir un quebrado* *ordinario á quebrado decimal*, ó como algunos dicen, para valuar un quebrado ordinario en quebrado decimal.

EJEMPLO : $\frac{3}{4}=0{,}75$. . . . .

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$$

Lo primero que se ocurre es hallar los enteros que el quebrado propuesto tenga ó valga (porque los casos no han de venir tan fáciles como el presente ejemplo), y para eso se divide el numerador por el denominador.

Las 3 unidades de resto componen 30 décimas, y 7 de cociente.

Las 2 décimas de resto componen 20 centésimas, y 5 de cociente, siendo exacto el total.

Y en general, *se sacan los enteros, si los hay; y si no los hay, se pone un cero por enteros.*

Despues se escribe un cero á la derecha del numerador, y el cociente de dividirle por el denominador serán las décimas del cociente.

Despues se escribe un cero á la derecha del resto, y el cociente de dividirle por el denominador serán las centésimas del cociente: y así se continúa hasta que se obtenga un cociente exacto, ó hasta que se vea que repitiéndose el resto, se repetirán los cocientes, y en este caso se suspende la operacion con un cociente que difiera del valor del quebrado propuesto en ménos de una unidad fraccionaria del órden del último cociente parcial escrito.

NUEVOS EJEMPLOS.

$\frac{7}{8}=0{,}875$ $\qquad$ $\frac{13}{25}=0{,}52$

$$\begin{array}{r|l} 70 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0{,}875 \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 130 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 0{,}52 \\ 0 & \end{array}$$

Estos quebrados $\frac{7}{8}$ y $\frac{13}{25}$ han dado lugar á quebrados decimales de un número limitado de cifras, y de valor exactamente igual al de cada uno de ellos. Expliquemos este hecho respecto del primero $\frac{7}{8}$.

En el denominador 8 no entran más factores primos que el 2^3. Ahora bien; al multiplicar el numerador por 1000 (que es lo mismo que hacerlo por 10, y despues por 10 y despues por 10), para verificar las divisiones sucesivas; como en 10 no entran más factores que 2 y 5, claro es que el numerador se convirtió en múltiplo del denominador 8. Y como el 2 entra tres veces por factor en el 8, y la fraccion $\frac{7}{8}$ es irreducible, de aquí que á la tercera division fuese exacto el cociente.

La explicacion es igual para los casos relativos al factor 5, y relativos al 2 y al 5 juntamente.

Luego, *todo quebrado ordinario en cuyo denominador no entren más factores primos que 2, ó bien 5, ó 2 y 5, es equivalente á un quebrado decimal de un número limitado de cifras. Y si el quebrado ordinario es irreducible, el número de cifras del quebrado decimal será igual al exponente mayor que tengan el 2 ó el 5 en el denominador del quebrado ordinario.*

149. Sirvan de nuevos ejemplos:

$$\frac{2}{3}=0{,}666\ldots\ldots \qquad \frac{8}{15}=0{,}5333\ldots\ldots \qquad \begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}666\ldots\ldots \\ \ \ 20 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 80 & 15 \\ \cline{2-2} 50 & 0{,}5333\ldots \\ \ \ 50 & \\ \ \ 50 & \end{array}$$

como en el denominador del primer quebrado $\frac{2}{3}$ no entra el factor 2 ni el 5, claro es que, multiplicando el numerador por 10, 100, etc., nunca harémos al numerador múltiplo del denominador, ni obtendrémos por consecuencia cociente exacto en las divisiones que verifiquemos.

Por otra parte, habiendo de ser el resto menor que el divisor, el resto irá disminuyendo hasta que se hagan, á lo más, tantas divisiones como unidades ménos una tenga el divisor, en cuyo momento se repetirá uno de los restos anteriores, y se repetirán el dividendo parcial y el cociente correspondiente.

Luego, *si el denominador del quebrado ordinario contiene factores primos, que no entren en el numerador, y sean distintos de 2 y 5, el quebrado decimal será de un numero ilimitado de cifras: se llama además fraccion decimal periódica, porque las cifras se repiten en grupos ó períodos.*

En el denominador 15 del segundo quebrado $\frac{8}{15}$ entra tambien un factor primo 3, distinto de 2 y 5, que no entra en el numerador. Por eso se obtiene tambien un quebrado decimal de un número ilimitado de cifras; pero no se repiten las cifras á contar desde la primera, como sucede en el ejemplo anterior; porque en el denominador 15 entra, además del factor 3, el factor 5, que es uno de los submúltiplos de 10 y sus potencias, y como el 5 entra una sola vez en el denominador, una sola es la cifra que no se repite.

Luego, *si el denominador del quebrado ordinario contiene además de los factores 2 ó 5, algun otro que no entre en el numerador, el quebrado decimal será de un número ilimitado de cifras; pero teniendo alguna ó algunas que no se repiten:* ésta se llama *fraccion decimal periódica mixta*, para diferenciarla de la anterior, que llamarémos *fraccion decimal periódica pura.*

Corolario. El período de la fraccion decimal periódica pura tendrá tantas cifras, á lo más, como unidades ménos una tenga el denominador del quebrado ordinario del cual provenga.

Y la parte no periódica de la fraccion decimal periódica mixta tendrá un número de cifras igual al mayor exponente de 2 ó 5 en el denominador del quebrado ordinario de donde provenga.

Escolio. Si el factor, distinto de 2 y 5, que entra en el denominador, entrase tambien en el numerador, la fraccion sería simplificable, y despojados sus dos términos del factor comun, estábamos en igual caso que con los quebrados $\frac{7}{8}$ y $\frac{13}{25}$, esto es, que obtendríamos en su equivalencia un quebrado decimal de un número limitado de cifras.

150. Otra consecuencia de la division de los quebrados decimales es la de valuar el cociente de una division inexacta de dos números enteros, aproximándole hasta donde se quiera. Así 84 : 9 = 9 y 3 de resto. Pues bien, basta reducir las 3 unidades á milésimas, por ejemplo, multiplicándolas por 1000, y se obtendrá un cociente que difiera del verdadero en ménos de 0,001, de este modo:

$$\begin{array}{l|l} 84 & 9 \\ \hline \ \ 30{,}0{,}0 & 9{,}333... \\ \ \ \ \ 3\,0 & \\ \ \ \ \ \ \ 3\,0 & \end{array}$$

Elevacion á potencias de los quebrados decimales.

151. Damos por sabidas ciertas acepciones y definiciones ya explicadas anteriormente.

Un quebrado decimal se eleva al cuadrado, multiplicándole por sí mismo, y separando á la derecha doble número de cifras del que tenga el quebrado.

Así, $(0{,}08)^2 = 0{,}08 \times 0{,}08 = 0{,}0064$:

duplo número de cifras fraccionarias que la raiz.

Un quebrado decimal se eleva al cubo multiplicándole por sí mismo dos veces, y cuidando de separar á la derecha triplo número de cifras del que tenga el quebrado.

Así, $(0{,}08)^3 = 0{,}08 \times 0{,}08 \times 0{,}08 = 0{,}000512$:

triplo número de cifras fraccionarias que la raíz.

Y esto, que está fundado en la idea que tenemos de las potencias y en la regla establecida para la multiplicacion de los quebrados decimales, nos dice que los cuadrados de los quebrados decimales tienen siempre un número de cifras fraccionarias múltiplo de 2, y los cubos un número de cifras fraccionarias múltiplo de 3.

Siguiendo multiplicando, se formarán las potencias que se quiera, y el número de cifras fraccionarias de esas potencias será múltiplo del exponente que afecte al quebrado decimal propuesto.

El cuadrado de un quebrado decimal es menor que dicho quebrado.

Así, $(0{,}2)^2$, ó bien $0{,}04 < 0{,}2$.

El cubo de un quebrado decimal es menor que su cuadrado.

Así, $(0{,}2)^3 < (0{,}2)^2$, ó bien $0{,}008 < 0{,}04$.

Y en general, las potencias de un quebrado decimal van disminuyendo á medida que aumenta el exponente de la potencia: porque siendo los multiplicadores menores que la unidad, cada producto va siendo menor que el anterior, ó bien cada potencia va siendo menor que la de un grado ménos.

Extraccion de la raiz cuadrada y de la raiz cúbica de los quebrados decimales.

152. Raíz cuadrada. De la manera de formar el cuadrado de los quebrados decimales, se deduce que, para extraer la raíz cuadrada de un quebrado decimal de un número par de cifras fraccionarias, *se extrae la raíz cuadrada como si fuese un número entero, separando á la derecha del resultado para cifras fraccionarias la mitad de las que tuviere el número dado.*

$$\text{Así,}\quad \sqrt{0{,}0144} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{10000}} = \frac{12}{100} = 0{,}12.$$

En efecto, al prescindir de la coma en el número 0,0144, se hace 10000 veces mayor; la raíz de 144 es, pues, tanto mayor cuanto sea la raíz cuadrada de 10000, ó sea, 100 veces mayor que la verdadera: dividamos los 12 enteros por 100, y el resultado 0,12 será la verdadera raíz.

Si el número de cifras fraccionarias es impar, se escribe un cero á la derecha y estamos en el caso anterior.

153. Para extraer la raíz cuadrada de un número entero con ménos error que una unidad fraccionario-decimal dada, se multiplica el número propuesto por el cuadrado de 10, 100, etc.; se extrae despues la raíz cuadrada de este producto, y esta raíz se divide por 10, 100, etc. Y como esto es un caso particular del número **128**, podemos decir tambien: que se escriban á la derecha del número dado duplo número de ceros del de cifras fraccionarias pedidas, se extraiga la raíz cuadrada entera de este nuevo número, y se separe á la derecha con una coma el número de cifras pedido.

Así, para obtener la $\sqrt{2}$ en ménos de $\frac{1}{100}$, se dispone la operacion de este modo: $\sqrt{2,00,00} = 141.....$

```
 1
 ----
 10,0     | 24
  9 6     |----
 ----       4
   4,00   | 281
   2 81   |-----
 -------     1
   1 19
```

y dividiendo el número 141 por 100, resulta que 1,41 es la raíz pedida.

Si el número es un quebrado decimal, no se escribe inmediatamente el duplo número de ceros, sino el número de ceros necesarios para que el número total de cifras fraccionarias sea duplo del que se pide para la raíz.

Así, en el caso de $\sqrt{3,425}$ en ménos de $\frac{1}{1000}$ se escribe $\sqrt{3,425000}$, puesto que con tres ceros es suficiente para que el número tenga duplo número de cifras fraccionarias del que deseamos para la raiz.

Pero $\sqrt{3425000} = 1849$; luego dividiendo 1849 por 1000, el número 1,849 será la raíz pedida.

Si se quisiera una nueva cifra para la raíz, se pondrían dos ceros á la derecha del resto, y se continuaría la operacion.

Para obtener la raíz cuadrada de un quebrado ordinario aproximado por decimales, se reduce dicho quebrado á quebrado decimal y estamos en el caso anterior.

Escolio. Es indiferente escribir los ceros de una vez, ó escribirlos dos á dos, durante el curso de la operacion, cuando la aproximacion se refiera á números enteros, que ya hemos dicho (**137**), que pueden considerarse como la parte entera de un mixto decimal cuya parte fraccionaria sea cero ó ceros, que es lo mismo.

Si la aproximacion se refiere á quebrados decimales de un número par de cifras fraccionarias, se extiende tambien á ellos esta observacion; y si son de número impar, se escribe un cero á la derecha del quebrado, y queda subsistente la observacion.

154. Raíz cúbica. De la manera de formar el cubo de los quebrados decimales, se deduce que para extraer la raíz cúbica de un quebrado decimal, cuyo número de cifras fraccionarias sea múltiplo de 3, *se extrae la raíz cúbica como si fuera un número entero, separando á la derecha del resultado para cifras fraccionarias tantas como sea la tercera parte de las que tuviere el número dado.*

$$\text{Así}: \sqrt[3]{0{,}001728} = \frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{12}{100} = 0{,}12.$$

En efecto, al prescindir de la coma en el número 0,001728, se hace 1000000 de veces mayor; la raíz de 1728 es, pues, tanto mayor cuanto sea la raíz cúbica de 1000000, ó sea 100 veces mayor que la verdadera: dividiendo los 12 enteros por 100, el resultado 0,12 será la verdadera raíz.

Si el número de cifras fraccionarias no es múltiplo de 3, se escribe á la derecha un cero ó dos para que lo sea, y estamos en el caso anterior.

155. Para extraer la raiz cúbica de un número entero con ménos error que una unidad fraccionaria decimal dada, se multiplica el número propuesto por el cubo de 10, 100, etc.; se extrae despues la raíz cúbica de este producto, y esta raíz se divide por 10, 100, etc. Y como este es un caso particular del núm. **132**, podemos decir tambien: que se escriban á la derecha del número dado triplo número de ceros del de cifras fraccionarias pedido, se extraiga la raíz cúbica entera de este nuevo número, y se separe á la derecha con una coma el número de cifras pedido.

Así, para obtener la $\sqrt[3]{2}$ en ménos de $\frac{1}{100}$, se dispone la operacion de este modo : $\sqrt[3]{2.000,000} = 125....$

1	
1 0,00	3
1 7 28	2
2 72 0,00	432
1 9 53 1 25	5
46 8 75	

y dividiendo el número 125 por 100, resulta que 1,25 es la raíz pedida.

Si el número es un quebrado decimal, se escriben á su derecha no más que los ceros necesarios para que el número total de cifras fraccionarias sea triplo del que se pide para la raíz.

Así, en el caso de $\sqrt[3]{3,1415}$ en ménos de $\frac{1}{100}$ se escribe $\sqrt[3]{3141500}$; puesto que con dos ceros es suficiente para que el número tenga triplo número de cifras fraccionarias del que deseamos para la raíz.

Pero $\sqrt[3]{3141500} = 146$; luego dividiendo el número 146 por 100, el cociente 1,46 será la raíz pedida. Si se quisiere una nueva cifra para la raíz, se pondrían tres ceros á la derecha del resto y se continuaría la operacion.

Para obtener la raíz cúbica de un quebrado ordinario aproximada por decimales, se reduce dicho quebrado á quebrado decimal, y estamos en el caso anterior.

Escolio. Es indiferente escribir los ceros de una vez, ó escribirlos tres á tres, durante el curso de la operacion, cuando la aproximacion se refiere á números enteros.

Si la aproximacion se refiere á quebrados decimales, cuyo número de cifras sea múltiplo de 3, tambien se extiende á ellos esta observacion. Y si el quebrado no tiene un número de cifras fraccionarias múltiplo de 3, se hace que lo tenga, escribiendo á su derecha un cero ó dos, y queda subsistente la observacion.

Escolio general. Todos aquéllos números, ora sean enteros, ora sean quebrados ordinarios ó decimales, de los cuales se intente extraer la raíz cuadrada ó cúbica, ó en general de un grado cualquiera, y no tengan raíz cuadrada exacta ó cúbica, ó del grado que indique el índice del radical, esos números se llaman irracionales ó inconmensurables ; y se les llama así, porque no pudiendo expresarse su raíz por enteros ni por quebrados, no tienen relacion exacta con la unidad ni con parte alícuota de la unidad.

$\sqrt{27}$, $\sqrt[3]{16}$ son números inconmensurables ó irracionales.

$\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{27}$ son llamados por oposicion números conmensurables ó racionales.

De suerte que un mismo número puede ser inconmensurable para una raíz, y conmensurable para otra. Esto sucede con 16, que es conmensurable para la raíz cuadrada, é inconmensurable para la cúbica. Y 27 es inconmensurable para la raíz cuadrada y conmensurable para la cúbica.

Tambien merece que llamemos la atencion acerca de la siguiente particularidad: la *adicion*, *multiplicacion* y *elevacion á potencias*, dan siempre lugar á resultados de la misma naturaleza y condicion de los elementos que entran en ellas: miéntras que la sustraccion da lugar á los números negativos, los cuales no debemos dar á conocer aún; la division inexacta de los números enteros da lugar á los quebrados que ya conocemos, y la extraccion de raíces da orígen á los números inconmensurables que acabamos de dar á conocer.

Hemos dicho de los números abstractos cuanto *aritméticamente* puede decirse; esto es, cuanto puede decirse sin entrar en el campo del ÁLGEBRA.

Vamos á dedicar el último capítulo de la ARITMÉTICA á los números concretos.

CAPITULO V.

De los números concretos.

156. Tabla *de las unidades principales de pesas, medidas, etc., tanto del sistema antiguo llamado de Castilla, como del métrico-decimal, hoy legal en España.*

SISTEMA DE CASTILLA.	SISTEMA LEGAL.
Unidades de medida de longitud.	
La vara de Búrgos.	El metro.
Medidas de superficie y agrarias.	
La *vara cuadrada*, ó sea un cuadrado cuyo lado es una vara.	El *metro cuadrado.*
La *fanega de marco real*, ó sea un cuadrado cuyo lado tiene 96 varas.	El área.
Medidas de volúmen y capacidad.	
La *vara cúbica*, ó sea un cubo cuya arista es una vara.	El metro cúbico.
La *media fanega* de Avila, (para áridos). La *cántara* de Toledo (para líquidos).	El litro.
Pesas.	
El marco del Consejo de Castilla.	El gramo.
Dinero.	
El real de vellon.	La peseta.

Tiempo.

El dia natural de veinticuatro horas, ó sea el tiempo que tarda la tierra en dar una vuelta completa sobre su eje.

Circunferencia.	
El grado, ó la noventa-ava parte de un cuadrante de circunferencia.	El grado, ó la centésima parte de un cuadrante de circunferencia.

157. TABLA *de pesas y medidas segun el sistema antiguo.*

Unidades de longitud.

La legua de 20 al grado, tiene.	20000 piés.
Tambien.	6666 $^2/_3$ varas.
Tambien.	3 millas.
Tambien.	1666 $^2/_3$ estadales.
El estadal.	4 varas.
La VARA.	3 piés.
El pié.	12 pulgadas.
La pulgada.	12 líneas.
La línea.	12 puntos.

Unidades de superficie y agrarias.

La legua cuadrada tiene.	2777778 estadales cuadrados.
El estadal cuadrado.	16 varas cuadradas.
La *vara cuadrada*.	9 piés cuadrados.
El pié cuadrado.	144 pulgadas cuadradas.
La pulgada cuadrada.	144 líneas cuadradas.
La fanega de tierra de marco real es un cuadrado que tiene.	96 varas por lado.
Tambien.	576 estadales cuadrados.
Tambien.	12 celemines.
El celemin.	4 cuartillos.
La aranzada.	400 estadales cuadrados.

Unidades de volúmen en general y de capacidad para áridos y líquidos.

La *vara cúbica* tiene.	27 piés cúbicos.
El pié cúbico.	1728 pulgadas cúbicas.
La pulgada cúbica.	1728 líneas cúbicas.

Para áridos.

El cahiz tiene.	12 fanegas.
La fanega.	12 celemines.
Tambien.	4 cuartillas.
El celemin ó almud.	4 cuartillos.

Para líquidos.

La cántara tiene.	8 azumbres.
El azumbre.	4 cuartillos.
El cuartillo.	4 copas.

Para el aceite.

La arroba de 25 libras de peso, y la libra que se divide en 4 panillas.

Unidades ponderales ó de peso.

La tonelada tiene.	20 quintales.
El quintal.	4 arrobas.
La arroba.	25 libras.
La libra.	16 onzas ó 2 marcos.
La onza.	16 adarmes.
El adarme.	3 tomines.
El tomin.	12 granos.

En farmacia.

La libra.	12 onzas.
La onza.	8 dracmas.
La dracma.	3 escrúpulos.
El escrúpulo.	24 granos.

Para plata y oro.

El marco.	8 onzas.
La onza.	8 ochavas.
La ochava.	6 tomines.
El tomin.	12 granos

Para piedras preciosas

El quilate : se divide segun $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, $^1/_{32}$, $^1/_{64}$.

Dinero.

La onza de oro vale.	320 reales.
La media onza.	160 »
Ochentin.	80 »
Doblilla.	40 »
Escudito de oro.	20 »
El duro de plata.	20 »
El medio duro.	10 »
La peseta.	4 »
La media peseta.	2 »

De cobre : los dos cuartos, el cuarto y el ochavo.

Y las imaginarias: el doblon 60 reales; el peso sencillo, 15; el ducado, 11, y el maravedí, que vale medio ochavo.

Tiempo.

El siglo consta de.	100 años.
El *año* de.	12 meses.
El mes de.	28, 29, 30 ó 31 dias.
El *dia* tiene.	24 horas.

La hora.	60 minutos.
El minuto. . . , ...	60 segundos.

Division de la circunferencia.

La circunferencia se divide en.	4 cuadrantes.
El cuadrante en.	90 grados.
El *grado* en.	60 minutos.
El mínuto en.	60 segundos.

158. Tabla *de pesas y medidas segun el sistema métrico decimal.*

NOMBRES SISTEMÁTICOS.	RELACIONES CON EL METRO.	
Unidades de longitud.		
El miriámetro.	10000	metros.
El kilómetro.	1000	»
El hectómetro.	100	»
El decámetro.	10	»
El *metro*.	1.	
El decímetro	0,1	»
El centímetro.	0,01	»
El milímetro.	0,001	»
Unidades de superficie y agrarias.		
El miriámetro cuadrado.	100000000	metros cuadrados.
El kilómetro cuadrado.	1000000	»
El hectómetro cuadrado.	10000	»
El decámetro cuadrado.	100	»
El *metro cuadrado*.	1.	
El decímetro cuadrado.	0,01 de metro cuadrado.	
El centímetro cuadrado.	0,0001 de idem.	
La hectárea consta de.	100 áreas.	
El *área*.	100 metros cuadrados.	
La centiárea ó 1 metro cuadrado. .	0,01 de área.	

Carlos Botello

Unidades de volúmen en general y de capacidad para áridos y líquidos.

El *métro cúbico*.	Unidad usual.
El decímetro cúbico.	0,001 de metro cúbico.
El centímetro cúbico.	0,000001 de idem.
El kilólitro ó sean.	1000 litros ó 1 metro cúbico.
El hectólitro.	100 litros.
El decálitro.	10 litros.
El *litro*.	1.
El decílitro.	0,1 de litro.
El centílitro.	0,01 de id.
El milílitro.	0,001 de id.

Unidades ponderales ó de peso.

La tonelada de peso.	1000 kilógramos.
El quintal métrico.	100 »
El kilógramo.	1000 gramos.
El hectógramo.	100 »
El decágramo.	10 »
El *gramo*.	1.
El decígramo.	0,1 de gramo.
El centígramo.	0,01 »
El milígramo.	0,001 »

Dinero.

La onza de oro vale.	80 pesetas.
El doblon-Isabel.	25 »
El duro (de plata).	5 »
La *peseta*.	1
El real.	0,25 de peseta.

Además tenemos para facilitar los cambios monedas de oro de 20, 40, 80 y 160 reales: de cobre y bronce, demasiadas: y de plata, de 2, 8 y 10 reales.

Tiempo.

Continúa la antigua division.

Division de la circunferencia.

La circunferencia se divide en. . . .	4 cuadrantes.
El cuadrante en.	100 grados.
El grado en.	100 minutos.
El minuto en.	100 segundos

159. TABLA *de equivalencias de las medidas métricas en funcion de las antiguas.*

	Líneas.	Pulgs.	Pies.	Varas.	Leguas.	
1 metro	= 516,8	= 43,07	= 3,5889	= 1,1963	= 0,000179	: meds. longituds.

	Ochavas.	Cuartillos.	Celemines.	Fanegas.	Cahíces.	
1 litro	= 3,46	= 0,865	= 0,2162	= 0,018018	= 0,001501	: de capac. para áridos.

	Copas.	Cánts.	Cuartillos.	Moyos.	
1 litro	= 7,9	= 1,98	= 0,062	= 0,003874	: para líquidos (excepto el aceite).

	Panillas.	Libras.	Arrobas.	
1 litro	= 8	= 1,99	= 0,079598	: para el aceite.

	Adarmes.	Onzas.	Libras.	Arrobas.	Quintales.	
1 kilógramo	= 556,4	= 34,78	= 2,1735	= 0,0869	= 0,021735	: de peso.

	Adarmes.	Onzas.
1 gramo	= 0,5564	= 0,6348.

	Pulgadas cuadradas.	Pies cuadrados.	Varas cuadradas.	Estadales cuadrados.	Fanegas de tierra.	
1 Area	= 185477,2	= 1288,04	= 143,115	= 8,945	= 0,0155	: superficie y agrar.

	Pulgs. cúbicas.	Piés cúbicos.	Varas cúbicas.	
1 metro cúbico	= 79879,558	= 46,226596	= 1,712096146	: de solidez.

	Duro.	Rs.	Mrs.	Cts. rl.
1 peseta	= 0,2	= 4	= 136	= 400.

1 grado = 0,9.

160. Tabla *de equivalencias de las medidas antiguas en funcion de las métricas.*

Longitudinales.

	Metros.
1 línea =.	0,002
1 pulgada =.	0,023
1 pié =..	0,278635
1 vara. =.	0,835906
	Kilómetros.
1 legua =.	5,572705

De capacidad para áridos.

	Litros.
1 ochava =.	0,289
1 cuartillo =.	0,156
1 celemin =.	4,625
1 fanega =..	55,501
1 cahíz =.	666,012

De capacidad para líquidos.

	Litros.
1 copa =..	0,126
1 cuartillo =.	0,504
1 azumbre =.	2,017
1 cántara =.	16,133

De capacidad para el aceite.

	Litros.
1 panilla =.	0,126
1 libra =..	0,503
1 arroba =..	12,563

De peso.

	Gramos.
1 adarme =.	1,7972
1 onza=	28,7558
	Kilógramos.
1 libra =..	0,46
1 arroba =.	11,502
1 quintal =.	46,009

De superficie y agrarias.

	Metros cuadrados.
1 pié cuadrado =. . .	0,077638
1 vara cuadrada =. .	0,698738
	Áreas cuadradas.
1 estadal cuadrado. =	0,111789
1 celemin de tierra. =	5,36631
1 fanega de tierra. =	64,395724

Cúbicas.

	Metros cúbicos.
1 pié cúbico =.. . . .	0,021633
1 vara cúbica =.. . .	0,584079

Monedas.

	Pesetas.
1 duro =..	5
1 real =.	0,25
1 maravedí =.	0,007

1 grado = 1,111....

Historia y explicacion.

---

161. *Medida* es una cantidad tomada por término de comparacion, y que sirve para apreciar el valor de otras cantidades de la misma especie y naturaleza.

Medir, es determinar la relacion que hay entre el objeto, cuyo valor se quiere conocer, y la unidad de medida.

Considerada bajo el aspecto de los usos civiles ó comerciales, la medida se divide en cuatro clases, conviene á saber: *medidas de longitud*, de *superficie*, de *capacidad* y de *peso*.

En todos los pueblos han tenido siempre relacion entre sí estas cuatro distintas clases de medidas. Pero el sistema más sencillo es el egipcio, cuya invencion se atribuye á Mercurio, ministro del rey Osiris. La *unidad lineal* era el *codo real*, longitud tomada en las dimensiones del cuerpo humano: el *cubo*, que tenía por arista el medio codo, era la unidad de *volúmen*: este cubo, lleno de agua, la unidad de *peso*; este peso de plata, la unidad *monetaria*; y el codo en cuadro, en fin, la unidad de *superficie*.

El sistema egipcio, conservado en toda su pureza por los hebreos despues de su salida de Egipto, sufrió grandes modificaciones entre los griegos, romanos, árabes y persas. Renunciamos á la descripcion de cada uno de estos sistemas, que nos llevaria muy léjos. Baste decir que en medio de la anarquía que el feudalismo y la irrupcion de diversos pueblos produjeran en tan importante ramo de la administracion, se conocen aún hoy mismo en toda Europa, y entre nosotros por consiguiente, las huellas de aquel sistema egipcio que con los demas gérmenes de civilizacion han sido traidos y llevados por persas, griegos, romanos y árabes.

Pero estaba reservado á esa Francia generosa, grande hasta en sus extravíos, el matar tan vergonzosa anarquía con su mano de hierro revolucionaria.

Y con efecto, en 1790 la Asamblea Constituyente dió el primer paso, que las circunstancias políticas y consideraciones de otro órden dejaron sin efecto por lo pronto; pero que llevó años adelante á Delambre y Méchain á medir el meridiano que pasa por Paris desde Dunkerque á Barcelona, miéntras que Brisson, Borda, Lagrange, Laplace, Prony y Berthollet levantaban el edificio del nuevo sistema, creando una unidad provisional, con el nombre de *metro*, basada sobre las mediciones de Lacaille, y de valor de 443,44 líneas de la toesa de Paris.

En 1799 hizo el pueblo frances un llamamiento á las naciones amigas, y en su consecuencia se formó una vasta comision para realizar definitivamente todas las partes del sistema métrico, subordinándolas al valor del *metro*, que se fijó en 443,295936 líneas. Esta comision se compuso de Borda, Brisson, Coulomb, Darcet, Delambre, Haüy, Lagrange, Laplace, Lefèvre Gineau, Méchain y Prony por Francia: Reneœ y Van Swinden por Holanda: Balbo y más tarde Vassalli-Eandi por Saboya: Bugge por Dinamarca: Ciscar y Pedroyés por España: Fabbroni por Toscana: Franchini por la República Romana: Multedo por la República Liguriense, y en fin, Trallés por la Helvética.

El 22 de Junio del mismo año de 1799 presentó Trallés al Cuerpo Legislativo el resúmen de los trabajos de esta Comision, así como los tipos. Sin embargo, el 2 de Noviembre de 1801 fué el dia en que el sistema métrico-decimal quedó declarado legal en Francia.

Este sistema, basado en una de las dimensiones de la tierra, con sus distintas partes ligadas por el sistema decimal (casi universal), y con una nomenclatura tomada de dos lenguas muertas, puesto de esta suerte al abrigo de toda cuestion internacional y política, había de irse adoptando por todas las naciones civilizadas.

Tambien nuestra España lo ha aceptado por las leyes de Julio de 1849 y Junio de 1864: y por eso vamos á dar aquí su explicacion.

162. Metro (del griego, Μετρον, *medida*) es la palabra escogida por la comision de sabios mencionada, para nombrar con ella la unidad de longitud, y que da nombre al sistema, porque de ella se derivan las demas unidades principales. Imagínense nuestros lectores dividido un cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París en diez millones de partes iguales, y ya sáben que una de esas diezmillonésimas partes es la magnitud ó longitud del metro.

Litro (del griego Λιτρα, nombre de una medida de líquidos entre los griegos), es la palabra designada para las unidades de capacidad, de áridos y líquidos: su capacidad ó cabida es la de un cubo que tiene por arista un *decímetro:* el cubo tiene la figura de un *dado*.

Gramo (del griego Γραμμα, que significa *una medida de peso*) para las de peso.

El *gramo* es el peso de un volúmen de agua destilada igual á un cubo que tenga un *centímetro* por arista, en el vacío, y á la temperatura de cuatro grados centígrados: el cubo tiene la figura de un *dado*.

Área (del latin *Area*, *superficie destinada al cultivo*) para las de superficie. El *Area* es un cuadrado que tiene diez *metros* por lado.

Y METRO CÚBICO para las de volúmen. El *metro cúbico* es un cubo (la figura del *dado)* que tiene un *metro* por arista.

Los *múltiplos* de estas diferentes unidades se expresan con el auxilio de las palabras griegas que significan

DECA,	HECTO,	KILO	y	MIRIA ;
diez,	ciento,	mil,	y	diez mil ;

y los *submúltiplos* con el auxilio de las palabras latinas que significan

DECI,	CENTI	y	MILI ;
décima parte,	céntesima	y	milésima;

anteponiendo unas y otras á las respectivas unidades, segun lo dejamos escrito anteriormente.

Como estos múltiplos y submúltiplos siguen la ley de formacion de nuestra escala decimal completa de numeracion (**134**), de aquí que se escriban y lean como nuestros enteros y quebrados decimales.

Así, 7 kilómetros y 4 metros puede escribirse 70 hectómetros y 4 metros, ó bien 700 decámetros y 4 metros, ó bien 7004 metros : y recíprocamente 5573 metros es igual á 5 kilómetros y 573 metros, etc.

El *gramo*, por su pequeñez, ha quedado por unidad para las cantidades que áun hoy se expresan por granos, adarmes y onzas ; y se ha tomado por unidad usual el *kilógramo*, poniendo á éste dos múltiplos, en vez del *miriágramo*, que era el único que ántes tenía. Y áun esos dos nuevos múltiplos que han reemplazado al *miriágramo*, á saber : el *quintal métrico* y la *tonelada de peso*, se toman por unidades cuando se trata de pesos de mucha consideracion.

Aunque sólo se haya puesto en la *Tabla* correspondiente un solo múltiplo para el *Area*, y ninguno para el *metro cúbico*, pueden formarse todos aquellos que las circunstancias exijan ó aconsejen, así sea miriámetro cuadrado y miriámetro cúbico respectivamente : lo mismo decimos respecto de los submúltiplos.

Puesto que el *área* es un cuadrado que tiene diez *metros* por lado, el *área* mide 10×10, esto es, 10^2 ; ó bien la segunda potencia de su lado, ó sean 100 *metros cuadrados*. El *hectómetro cuadrado* tiene 100 *metros* por lado, y mide por consiguiente 100×100, esto es, 100^2 ; ó bien la segunda potencia de su lado, ó sean 10000 *metros cuadrados*. Por eso se dice, y se dice bien, que la *hectárea* consta de 100 *áreas*, ó lo que es lo mismo, que la *hectárea* es 100 veces mayor que el *área*. Y como la misma explicacion puede darse para otro caso cualquiera, podemos concluir que los múltiplos y submúltiplos de las unidades de superficie crecen y decrecen de 100 en 100.

Cuando decimos para el *área* 10×10, ó 10^2, ya se entiende que no es el lado del cuadrado el que se multiplica, sino el número abstracto que expresa las veces que la unidad lineal *metro* está contenida en el lado del cuadrado.

Decir que el área ó la hectárea miden 100 ó 10000 metros cuadrados, es lo mismo que decir que su superficie puede cubrirse exactamente con 100 ó con 10000 cuadrados de *metro* por lado.

Decir 100 metros cuadrados significa tambien que la superficie á que se refiere es equivalente á un cuadrado que tiene por lado $\sqrt{100}$, ó sea 10 metros: miéntras que 100 metros en cuadro representan un cuadrado que tiene 100 metros por lado. Ahora, cuando se habla de la unidad, lo mismo significa en cuadro que cuadrada, esto es, lo mismo es un metro cuadrado que un metro en cuadro, siempre es un cuadrado que tiene por lado un metro.

Sin ciertos conocimientos de *Geometría*, estas explicaciones son insuficientes. Por eso, respecto de las medidas cúbicas nos limitamos á decir, que crecen y decrecen de 1000 en 1000; quiere decir, que una cualquiera es 1000 veces mayor que la inmediata inferior, y recíprocamente. Y esta analogía que se observa con lo dicho, acerca de la manera que tienen de crecer las medidas de superficie, se observa en otros puntos tambien, como subordinado todo á una ley comun.

OPERACIONES SOBRE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

163. PRELIMINARES. De las diversas definiciones que de los *números complejos* conocemos, ninguna nos ha satisfecho como la de M. Cirodde, diciendo: que *números complejos son aquellos concretos que contienen diferentes especies de unidades dependientes unas de otras, segun una ley cualquiera, pero distinta de la ley decimal;* como 4 arrobas, 20 libras y 3 onzas.

Y por oposicion se llama *incomplejos* á los concretos que sólo contienen una especie de unidad, como 7 arrobas ó 3 varas. Tambien se llaman incomplejos, si, conteniendo dos ó más unidades, éstas están sujetas á la ley decimal; como 3 metros, 8 decímetros, 9 centímetros, ó sea 3,89 metros.

164. *Para reducir un número incomplejo á unidades de especie* *inferior, se multiplica dicho incomplejo por el número de unidades inferiores que contiene ó vale la unidad á que aquél se refiere.*

Ejemplo: *Reducir á unidades inferiores el número 4 arrobas.*

Puesto que una arroba tiene 25 libras, claro es que 4 arrobas tendrán cuatro veces más; luego multiplicando 25 por 4, el producto 100 serán las libras que equivalen á 4 arrobas.

Y multiplicando 100 por 16, que son las onzas que tiene una libra, tendríamos las onzas que equivalen á 100 libras y á 4 arrobas; y así sucesivamente.

Otro ejemplo: $\frac{3}{4}$ de peseta.

Como la peseta tiene 4 reales, decir $\frac{3}{4}$ de peseta es lo mismo que decir $\frac{3}{4}$ de 4 reales, que se obtienen multiplicando el numerador 3 por 4, y partiendo el producto por el denominador (**119**) en esta forma:

$$\begin{array}{r|l} 3 & \\ 4 & \\ \hline 12 & 4 \\ \cline{2-2} & 3 \ldots\ldots\ \text{reales.} \end{array}$$

son los reales que valen $\frac{3}{4}$ de peseta. Esto es lo que se llama tambien valuar un quebrado en unidades de especie inmediata inferior.

Si se tratase de un número *métrico decimal*, se multiplicaría por 10 para reducirlo á unidades de la especie inferior inmediata. Si las unidades del número son de superficie ó área, por 100; si de volúmen, por 1000.

Escolio. Si en vez de valuar el quebrado (ordinario ó decimal) en unidades de especie inmediata inferior, se desea valuarlo en unidades inferiores, cualesquiera, sin pasar por valuaciones intermedias, *se multiplica el numerador por el número de aquellas unidades en que quiere hacerse la valuacion, y sea necesario para componer una de las unidades á que se refiera el quebrado, y luego se divide el producto por el denominador.*

Así $\frac{3}{4}$ de peseta en maravedises son 102 maravedises; lo que se obtiene multiplicando el numerador 3 por 136, que son los maravedises que tiene una peseta, y dividiendo el producto 408 por el denominador 4.

165. *Para reducir un incomplejo á unidades de especie superior* *se divide dicho incomplejo por el número de unidades de la especie á que se refiere, que se necesitan para componer una de la superior á la cual nos propongamos reducirlo.*

Ejemplo: *Reducir á unidades de especie superior el número 1600 onzas.*

Como 16 son las onzas que componen una libra, claro es que tantas veces como el número 16 esté contenido en el número 1600, tantas serán las libras que tienen ó valen 1600 onzas; y el resto, si lo hay, serán onzas.

$$\begin{array}{l|l} 16.00 & 16 \\ \hline 0\ 00 & 100 \end{array}$$

Son, pues, 100 las libras equivalentes á 1600 onzas; y si dividimos 100 por 25, obtendríamos las arrobas equivalentes á 100 libras, y así sucesivamente.

Si se tratase de un número *métrico decimal*, se reduciría á unidades de la especie superior inmediata, dividiéndole por 10. Si las unidades del número son de superficie ó área, por 100; si de volúmen, por 1000.

163. *Para reducir un complejo á incomplejo de la unidad principal ó intermedia, se reduce el complejo todo á sus unidades inferiores; esto se pone por numerador, y por denominador el número de veces que la unidad inferior esté contenida en la principal ó intermedia.*

3 quintales.	
4	
12	
2	
14 arrobas.	
25	
70	
28	
20	
370 libras.	
16	
2220	
37	
10	
5930 onzas.	

Ejemplo: 3 quintales, 2 arrobas, 20 libras y 10 onzas.

A la izquierda está el complejo propuesto, reducido al número de onzas que le es equivalente: multiplicando las unidades principales 3 quintales por 4, y añadiendo las dos arrobas que hay, los quintales y arrobas están expresados por 14 arrobas; reducidas á libras y aumentadas con las 20 que hay, hacen 370 libras, que, reducidas á onzas y aumentadas de las 10 que hay, componen 5930 onzas.

Ahora bien: la onza es $\frac{1}{1600}$ de quintal, luego evidentemente 5930 onzas son $\frac{5930}{1600}$ de quintal.

Además: la onza es $\frac{1}{400}$ de arroba; luego claramente 5930 onzas son $\frac{5930}{400}$ de arroba.

Además: la onza es $\frac{1}{16}$ de libra; luego 5930 onzas serán $\frac{5930}{16}$ de libra.

De suerte que el complejo propuesto puede ponerse bajo la forma de incomplejo de las siguientes maneras.

3 quintales, 2 arrobas, 20 libras, 10 onzas. $= \frac{5930}{1600}$ quintales. $=$ $\frac{5930}{400}$ arrobas. $= \frac{5930}{16}$ libra. $=$ 5930 onzas.

Si nos encontrásemos con la expresion 2 miriámetros, 4 kilómetros, 7 metros, un decímetro y 8 milímetros, la pondríamos inmediatamente bajo la forma 24007,108 metros, que es su forma propia; como que es en lo que consiste una de las principales ventajas de este sistema. Por eso nunca llamarémos número complejo á aquella expresion, que, puesta bajo su forma propia, es un incomplejo, lo mismo que 7 pesetas, ó 3 quintales.

Y si se nos dan 24007,108 metros de terciopelo, por ejemplo, nunca nos entretendrémos en aquella descomposicion; á ménos que lo hagamos para la mejor comprension de los alumnos.

167. *La reduccion de incomplejo á complejo* es muy sencilla, y para su explicacion nos valdrémos de los mismos ejemplos del número último.

Vamos á reducir á complejo el incomplejo $\frac{5930}{1600}$ de quintal.

Como 1600 onzas componen 1 quintal, tantas veces como el número 1600 esté contenido en 5930, tantos quintales valdrá el incomplejo propuesto. Veamos.

5930 | 1600
1130 | 3 q. 2 @ 20 ℔. 10 onz.; y vale 3 q.^{s} $\frac{1130}{1600}$ de q. {que se valúa en @ (**164**).
4
4520
1320 y vale 20 @ $\frac{1320}{1600}$ de @ {que se valúa en libras (**164**).
25
660
264
33000
1000 y vale 20 ℔. $\frac{1000}{1600}$ de ℔. {que se valúa en onzas (**164**).
16
16000 que dan justas 10 onzas de cociente.
0

Las divisiones que están ahí á la vista se prestan á muchas abreviaciones, por terminar siempre dividendo y divisor en ceros. Pero eso que en la práctica es posible, en el libro no siempre lo es.

Vamos á reducir á complejo el incomplejo $\frac{5930}{400}$ de arroba.

Como 400 onzas componen 1 arroba, tantas veces como el número 400 esté contenido en 5930, tantas arrobas valdrá el incomplejo propuesto. Veamos.

5930	400
1930	
330	14 @ ó sean 3 q. 2 $\frac{330}{400}$ @, que se valúan en lb.
25	
165	
66	
8250	
250	y valen 20 lb. $\frac{250}{400}$ de lb. { que se valúan en onzas.
16	
150	
25	
4000	que dan 10 onz. justas de cociente.
0	

y son 3 q., 2 @, 20 lb., 10 onz.

De la misma manera puede reducirse á complejo el incomplejo $\frac{5930}{16}$ de libra.

El otro incomplejo 5930 onzas está en el caso general para reducirse á complejo.

ADICION.

168. Para sumar los números concretos, ya sean incomplejos, ya complejos, es condicion necesaria *que sean de una misma especie*. Por lo demás, *se colocan los sumandos unos debajo de otros de manera que se correspondan unidades iguales; se suman como los abstractos, y la suma será de la especie de los sumandos.*

Ejemplo:	3 duros	4 pesetas	3 reales	$8\frac{1}{5}$ maravedises.
	2	3	2	$20\frac{3}{8}$
	1	0	3	$30\frac{1}{40}$
	7 duros	4 pesetas	1 real	$24\frac{3}{5}$ maravedises.

SUSTRACCION.

169. Para restar un número concreto de otro tambien concreto, bien sean incomplejos, bien complejos, es condicion necesaria *que sean de una misma especie.*

Por lo demás, *se coloca el sustraendo debajo del minuendo de manera que se correspondan unidades iguales; se verifica la operacion como si fueran números abstractos, y el resto será de la especie del minuendo y sustraendo.*

Ejemplo:	3 quintales	2 arrobas	20 libras	10 onzas.
	1	2	20	14
	1 quintal	3 arrobas	24 libras	12 onzas.

Escolio. Observen los alumnos que en los ejemplos que vamos escribiendo no hay nunca un número de unidades inferiores que componga 1 unidad superior inmediata. Así, el número de onzas no llega á 16, ni el de libras á 25, ni el de maravedises á 34, ni el de arrobas á 4, etc.

MULTIPLICACION.

170. *En la multiplicacion de los números concretos* puede suceder que los dos factores sean de la misma especie, y que no lo sean.

Si lo son, la multiplicacion se reduce á un mero ejercicio que da por resultado un producto de la misma especie que los factores, ó un abstracto que exprese la relacion de los factores.

Pero si no lo son, el producto es de la especie del multiplicando: ya no se puede invertir el órden de los factores. Mejor dicho, es indiferente que tal factor se coloque encima ó debajo del otro: de lo que no puede prescindirse es de que, en cada ejemplo, el que haya de ser multiplicando, lo sea; y que el otro, por consecuencia, sea multiplicador. Y se conoce cuál es el multiplicando en el enunciado de la cuestion; porque de él se infiere que es multiplicando el concreto que sea de la especie de lo que se busca ó pide; y el otro concreto será, por consecuencia, multiplicador.

El caso más general de la multiplicacion de números concretos es el tan manoseado de, *conocido el valor ó precio de una unidad hallar el de muchas.*

Prescindiendo, pues, de los llamados casos particulares, pasemos al general. Este se resuelve, *reduciendo multiplicando y multi-*

plicador á incomplejo de la unidad principal respectiva: estos dos incomplejos se multiplican como los quebrados comunes abstractos; y el producto será, es claro, un incomplejo de la unidad principal del multiplicando que se reduce, si se quiere, á complejo, por la regla ya establecida.

Ejemplo: Habiendo costado una arroba de cualquier cosa 3 pesetas 2 rs. 30 $\frac{1}{4}$ mrs., se desea saber cuánto costarán 4 arrobas 20 libras y 14 onzas.

Como lo que se pide ó busca es precio, es dinero; el complejo que se refiera á dinero, ese será el multiplicando.

Luego 3 pesetas 2 rs. 30 $\frac{1}{4}$ mrs. es el multiplicando; y por consiguiente 4 arrobas 20 libras y 14 onzas, el multiplicador.

Disposicion de la operacion:

3 pesetas.	
4	4 arrobas.
12	25
2	100
14 rs.	20
34	120 libras.
56	16
42	720
476	12
30	14
506 mrs.	1934 onzas.
4	
2024	
1	
2025 ctos. de mrs.	

$2025 \times 1934 = 3916350$ 78327

m. c. d. 50

$544 \times 400 = 217600$ 4352

```
78327 | 4352        | 1088
34807 |---------------------
 4343 | 17 pesetas 3 rs. 33 mrs.     782 : 34 ... 23
    4 |                             --------     --
17372                               1088 : 34     32
 4316... 1079
           34
         4316
        3237
        36686
         4046
          782
```

$$3^{\text{pesetas}}\ 2^{\text{rs.}}\ 30\frac{1}{4}^{\text{mrs.}} \times 4^{\text{ar.}}\ 20^{\text{lib.}}\ 14^{\text{onz.}} = \frac{2025}{544}^{\text{pesetas.}} \times \frac{1934}{400}^{\text{onz.}} =$$

$$\frac{3916350}{217600}^{\text{peseta}} = \frac{78327}{4352}^{\text{pesetas}} = 17^{\text{pesetas}}\ 3^{\text{rs.}}\ 33\frac{23}{32}^{\text{mrs.}}$$

Multiplicacion de complejos por el método llamado de las partes alicuotas.

171. Si 1 arroba ha costado.	3^{pesetas}	$2^{\text{rs.}}$	$30\frac{1}{4}^{\text{mrs.}}$
¿cuánto costarán.	4 @	$20^{\text{lib.}}$	$14^{\text{onzas?}}$
4 @ costarán 4 veces el multiplicando, ó sea.	12^{pesetas}	$8^{\text{rs.}}$	$121^{\text{mrs.}}$
5 ℔. costarán $\frac{1}{5}$ del multiplicando, ó sea. .	0	2	$33\frac{1}{4}$
15 ℔. costarán 3 veces el precio de 5 ℔., ó sea	0	6	$99\frac{3}{4}$
Tomando $\frac{1}{5}$ del precio de 5 ℔. se tendrá el de 1 ℔., $0-0-20\frac{1}{4}$, y tendrémos el precio de			
8 onzas tomando $\frac{1}{2}$ del de 1 libra, ó sea.	0	0	$10\frac{1}{8}$
4 onzas costarán la mitad de este último sumando.	0	0	$5\frac{1}{16}$
2 onzas, por último, la mitad del anterior.	0	0	$2\frac{17}{32}$
	17^{pesetas}	$3^{\text{rs.}}$	$33\frac{23}{32}^{\text{mrs.}}$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{17}{32}=\frac{8+24+4+2+17}{32}=\frac{55}{32}=1\frac{23}{32}^{\text{mrs}}$$

Hemos descompuesto el multiplicador en 4 arrobas + 5 libras + 15 libras + 8 onzas + 4 onzas + 2 onzas; y hemos necesitado el auxiliar de 1 libra además.

Como para otro caso tendrá lugar otra descomposicion, no puede darse una regla cierta: cada uno seguirá la marcha que le sugieran su experiencia y la mayor ó menor aptitud que Dios le haya dado para esto.

Aunque este método parece más racional, ambos son buenos, y cada uno debe seguir aquel á que más se aficione: aunque lo mejor será aficionarse á los dos.

En este método figura el multiplicador como un número abstracto.

La reduccion de los quebrados á un comun denominador se hace fácilmente por la aplicacion del m. m. c., puesto que se van tomando los quebrados como partes alícuotas unos de otros.

172. En Extremadura tienen desde tiempo inmemorial los granjeros de ganado de cerda cierta regla, para sus compras y ventas, que vamos á dar á conocer.

No toman en cuenta más que arrobas y libras, esto es, se desprecia el peso que no llega á una libra.

Si se trata de dos ó más cerdos, se suman las arrobas que pese cada uno. Por otra parte, se suman las libras; y esta suma se multiplica por 4, poniendo el producto á la derecha de la suma de arrobas, de modo que no ocupe más que dos lugares ; pues si hay centenas en ese producto, se agregan á las unidades de la suma de arrobas; formando todo ello un número que se multiplica por el precio de la arroba, de cuyo producto se separan con una coma las dos últimas cifras de la derecha, que reducían los antiguos á maravedises (como que son céntimos de real), tomando la tercera parte : si se trata de un solo cerdo, el caso es más fácil.

EJEMPLO.

¿Cuánto importa un cerdo de 12 arrobas 2 ℔. de peso á 40 rs. la arroba?

	4
cuarterones	1208
	40 reales.
	483,20

OTRO: Ha pesado 1 cerdo 12 ... 7 ℔., otro 11 ... 20, otro 12 ... 8, á 40 rs. =¿cuánto importan lcs tres?

Ha pesado 1 cerdo	12	...	7 ℔.
otro	11	...	20
otro	12	...	8
	35	...	35 ℔.
			4
cuarterones	3640		
	40 reales.		
reales	1456,00		

En el primer ejemplo hay 20 céntimos de real, que los antiguos convertían en 6 mrs.

En el segundo ejemplo no hay céntimos.

Explicacion: multiplicar el número de libras por 4, equivale á reducirlas á cuarterones. El escribir éstos á la derecha de las arrobas, formando un solo número, significa haber sumado cuarterones con arrobas, para lo cual era preciso que éstas terminasen en dos ceros.

El terminar en dos ceros el número de arrobas entraña dos conceptos: 1.° que se han multiplicado por 100 implícitamente; 2.° que por medio de esta multiplicacion implícita se han reducido las arrobas á cuarterones; y tenía que suceder así para que pudieran sumarse con los cuarterones procedentes de las libras, esto es, que fuesen homogéneos los dos sumandos.

En este estado la cuestion, se multiplica el precio de la arroba, nó por un número cualquiera de arrobas, sino por un número de cuarterones que es 100 veces mayor. Por eso sale el producto 100 veces mayor de lo que debe ser, y para obtener el verdadero producto nuestros abuelos le dividían por 100, separando con una coma la dos últimas cifras de la derecha. Y para llevar el acierto hasta el fin de la operacion, puesto que por aquellos tiempos no se hablaba siquiera de céntimos de real, reducían por aproximacion el conjunto de aquellas dos últimas cifras de la derecha á maravedises, dividiéndolo por 3, como hemos visto hacer nosotros muchísimas veces, siendo niños.

Excusado es decir que, de treinta años á esta parte, nuestros granjeros no reducen ya á maravedises aquellas dos últimas cifras de la derecha, separadas por la coma, y cuya significacion desconocían.

Por lo demás, ¿no es extraño que esta regla tan exacta como sencilla, y tan sencilla como científica, haya quedado como olvidada en las solitarias dehesas de Extremadura?

No queremos dar punto á esta materia sin dejar consignado el vivísimo interés que en nosotros ha despertado siempre la consideracion de que nuestros abuelos presintieran y practicaran en sus transacciones comerciales el sistema decimal ántes que Francia, y ántes que el mundo culto.

DIVISION.

273. *En la division de los números concretos*, puede suceder que dividendo y divisor sean de la misma especie y que no lo sean.

Si lo son, el cociente nos dará la relacion entre los datos, y será de la especie que indique el enunciado.

Cuando dividendo y divisor son de diferente especie, el cociente es siempre de la especie de lo que se divide, esto es, de la especie del dividendo.

Y se conoce cuál es el dividendo en el enunciado de la cuestion; porque es dividendo el concreto que sea de la especie de lo que se busca ó pide, y el otro concreto será, por consecuencia, divisor.

Carlos Botello

El caso más general en la division de los números concretos es el sabido de, *conocido el valor ó precio de muchas unidades, determinar el de una.*

174. Pasemos por alto los casos particulares, para ocuparnos del general. Este se resuelve, *reduciendo dividendo y divisor á incomplejo de la unidad principal respectiva: el primero de estos dos incomplejos se divide por el segundo, como si fuesen quebrados comunes abstractos, y el cociente será*, es claro, *un incomplejo de la unidad principal del dividendo que se reduce, si se quiere, á complejo, segun la regla ya establecida.*

Ejemplo: Habiendo costado 4 arrobas, 20 libras y 14 onzas de cualquier cosa, 17 pesetas, 3 reales y 33 $\frac{23}{32}$ maravedises, se desea saber cuánto costará la arroba.

Como lo que se pide ó busca es precio, es dinero; el complejo que se refiera á dinero, ese será el dividendo.

Luego, 17 pesetas, 3 reales, 33 $\frac{23}{32}$ maravedises, es el dividendo; y por consiguiente 4 arrobas, 20 libras, 14 onzas, será el divisor.

Disposicion de la operacion:

$$\begin{array}{r l}
17 & \text{pesetas.} \\
4 & \\ \hline
68 & \\
3 & \\ \hline
71 & \text{rs.} \\
34 & \\ \hline
284 & \\
213 & \\ \hline
2414 & \\
33 & \\ \hline
2447 & \text{mrs.} \\
32 & \\ \hline
4894 & \\
7341 & \\ \hline
78304 & \\
23 & \\ \hline
78327 & \left\{\text{treinta y dos avos de mrs.}\right.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r l}
4 & @ \\
25 & \\ \hline
100 & \\
20 & \\ \hline
120 & \text{lb.} \\
16 & \\ \hline
72 & \\
12 & \\
14 & \\ \hline
1934 & \text{onz.}
\end{array}
\qquad
\frac{31330800 : 16}{8416768 : 16} = \frac{1958175}{526048}\left\{\text{incomp. de peseta.}\right)
\qquad
\begin{array}{r}
4352 \\
1934 \\ \hline
17408 \\
13056 \\
39168 \\
4352 \\ \hline
8416768
\end{array}$$

$78327 \times 400 = 31330800.$

$$\begin{array}{r|l}
1958175 & 526048 \;|\; 131512 \\ \cline{2-2}
380031 & \\
4 & 3 \text{ pese. } 2 \text{ rs. } 30 \dfrac{32878 : 32878}{131512 : 32878} \text{ mrs.} \\ \cline{1-1}
1520124 & \\
468028 & \ldots\ldots\ldots\ldots \; 117007
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
117007 \\
34 \\ \hline
468028 \\
351021 \\ \hline
3978238 \\
32878
\end{array}$$

$$17 \text{ pesetas}, 3 \text{ rs.}, 33\frac{23}{32} \text{ mrs.} : 4 \text{ @ } 20 \text{ ℔. } 14 \text{ onz.} =$$

$$\frac{78327}{4352} \text{ pesetas} : \frac{1934}{400} \text{ onz.} = \frac{31330800}{8416768} \text{ pesetas} = \frac{1958175}{526048} \text{ pesetas} =$$

$$3 \text{ pesetas } 2 \text{ rs. } 30\frac{1}{4} \text{ mrs.}$$

FIN DE LA ARITMÉTICA.

ÁLGEBRA.

ÁLGEBRA.

INTRODUCCION.

1. Álgebra es la parte de la *Algoritmia*, y tambien de las *Matemáticas* (Arit. **1**), que trata de las *leyes* de los números, ó que se ocupa de los números de una manera *general* y *completa*.

Vamos á exponer en este libro lo concerniente á la segunda enseñanza.

2. Los signos ó elementos de que se vale el Álgebra para cumplir su objeto (algunos de los cuales nos son ya conocidos) son diez, á saber:

1.° Las letras del abecedario introducidas en el siglo XVI por el matemático francés Viète, para representar por ellas los números: su uso abrevia y generaliza las operaciones, los razonamientos y los resultados: este signo ha hecho cambiar la faz de la ciencia; es el *símbolo característico del Álgebra*.

2.° El signo de *adicion*, que se escribe $+$, y se lee *más*, ó *aumentado de*. Con él se indica que han de sumarse las cantidades entre las cuales se escribe.

3.° El signo de *sustraccion*, que se escribe $-$, y se lee *ménos*, ó *disminuido de*. Con él se indica que han de restarse (la segunda de la primera) las cantidades entre las cuales se escribe.

Con estos dos últimos se forma otro signo, llamado de *ambigüedad* ó *doble signo*, que se escribe $\pm$, y se lee *más* ó *ménos*.

4.° El signo de *multiplicacion* que se escribe $\times$, y se lee *multiplicado por*. Tambien se indica la multiplicacion escribiendo un *punto* entre los dos factores; ó poniendo un factor, si es complicado, dentro de un paréntesis, y al otro dentro de otro paréntesis, si fuese necesario.

Cuando los factores son literales, esto es, cuando son letras, basta escribir unas á continuacion de otras para que su multiplicacion quede indicada.

Así, *abc* significa en *Álgebra* el producto $a \times b \times c$.

5.° El signo de *division*, que consiste en dos puntos :, y se lee *dividido* ó *partido por*. Tambien se usa la raya de quebrado, poniendo el dividendo por numerador y el divisor por denominador.

6.° El *coeficiente*, que es un número colocado á la izquierda de otro, representado por una ó varias letras, é indica las veces que éste entra como sumando.

Así, $3ab$ es lo mismo que $ab+ab+ab$; $2c=c+c$.

7.° El *exponente*, que es un número pequeño colocado á la derecha de una letra, y un poco elevado, é indica las veces que ésta entra como factor.

Asi, a^3 equivale á $a \times a \times a$.

El *coeficiente* y el *exponente* se diferencian en que aquél indica una adicion y éste una multiplicacion ; y además, en que aquél puede afectar á varias letras miéntras que el exponente sólo afecta á la que está inmediatamente á su izquierda. Con el *exponente* se indican las *potencias* (Arit. **45**).

8.° El *radical*, que se escribe $\sqrt{}$, y se lee *raíz de*. La cantidad de la cual haya de extraerse la raíz se coloca debajo, y el grado de la raíz se indica por medio de un número, que se llama *índice*, y se escribe entre las ramas del *radical* : para la indicacion de la raíz cuadrada no se usa índice.

9.° El signo de igualdad que se escribe $=$, y se lee *igual á* ; lo que queda á la izquierda se llama *primer miembro*; y lo que está á la derecha, *segundo miembro*.

10. El signo de desigualdad que se escribe $>$, ó $<$, y se lee *mayor que*, ó *menor que*, poniendo la abertura del lado de la cantidad mayor. Así, para expresar que 30 es mayor que 20, ó 20 menor que 30, se escribe $30>20$, ó bien $20<30$.

3. Las distintas y variadas combinaciones á que se prestan estos diez signos, constituyen lo que se llama *lenguaje algebráico*. Y por analogía se llama *cantidad algebráica* ó *cantidad literal* á toda cantidad representada por medio de los signos del *Álgebra*. Tambien se la llama *expresion algebráica de una cantidad dada*.

4. Se llama *monomio* (del griego Μονος *una*, y νομὸ, parte), ó cantidad de un solo *término*, ó sencillamente *término*, á toda *expresion algebráica* que no está unida á otra por el signo de adicion ni el de sustraccion : *binomio* (del griego βις, *dos veces*, νομὸ, *parte*), si consta de dos *términos* : *trimonio* si consta de tres ; y en general *polinomio* (del griego πογὺς, *muchos*, y νομό, *parte*) si consta de dos ó más *términos* : estos términos irán afectados unos del signo $+$, y otros del signo $-$.

La expresion $a+b$ es un *binomio*, porque a y b van unidas por el signo $+$; pero $a \times b$ y $a : b$ son respectivamente un *monomio*, porque en una expresion van unidas la a y la b por el signo de multiplicacion, y en la otra por el de division. Pero $a-b$ es tambien *binomio*, porque los términos a y b van unidos por el signo $-$.

Si el primer término está afectado del signo $+$, no se pone este signo en principio de polinomio. Tampoco se pone el signo $+$ en un término aislado. Y deben procurar los alumnos empezar á escribir los polinomios por términos afectados de dicho signo, por razones que se dirán muy pronto.

Si un término está sin coeficiente, debe considerarse con la unidad por coeficiente. Y por analogía, una letra sin exponente, debe ser considerada como si tuviese la unidad por exponente.

5. *Valor numérico* de una cantidad literal es el *número* que se obtendría si, dando valores á las letras que entran en ella, se efectuasen las operaciones indicadas. Es claro que este valor varía, en general, con los que se den á las letras. Pero no siempre; porque, si en la expresion $m-n$, variamos los valores de m y de n de manera que ambos crezcan y decrezcan en la misma cantidad, es evidente que la diferencia indicada $m-n$ no varía, es *constante*.

ESCOLIO. El *valor numérico* de un polinomio no varía, cualquiera que sea el órden de sus términos, con tal que éstos conserven sus respectivos signos $+$ ó $-$ que indican que han de sumarse ó restarse donde quiera que se coloquen dichos términos.

6. Se llama *dimension* de un término á cada uno de los factores literales que entran á componer dicho término; y *grado*, al número de estos factores ó dimensiones.

Se llama *homogéneo* á todo polinomio que tiene sus términos todos del mismo grado de dimensiones: $a+b$ es *homogéneo*; así como a^2+ab+b^2, y tambien $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Los dos términos del primero son de primer grado de dimensiones, de segundo los del siguiente, y de tercero los del último.

7. Se llaman *términos semejantes* á los que están compuestos de las mismas letras afectadas *respectivamente* de los mismos exponentes, sean cualesquiera sus signos y coeficientes.

EJEMPLO: $7a^3b^2+5a^3b^2$. Pero observamos que en uno y en otro entra la misma cantidad a^3b^2 y con la misma funcion de aumento (puesto que ambos tienen el mismo signo $+$), 7 veces en el primero y 5 veces en el segundo, total 12 veces; pues es más sencillo que estén reunidos en un solo término con el coeficiente 12, suma de $7+5$, en esta forma $12a^3b^2$.

Otro : $-7a^3b^2-5a^3b^2$. Ahora entra tambien la misma cantidad a^3b^2, y con la misma funcion de disminucion (puesto que ambos tienen el mismo signo —), 7 veces en el primero y 5 veces en el segundo, total 12 veces : pues tambien es más propio que estén reunidos en un solo término con la suma de $7+5$ por coeficiente, pero poniendo á la suma 12 el signo —, á fin de que conserve el carácter ó funcion de disminucion que ántes tenian los términos propuestos, en esta forma $-12a^3b^2$.

Otro : $7a^3b^2-5a^3b^2$. En este caso, si bien entra la misma cantidad a^3b^2 en ambos términos, entra en el primero con funcion de aumento y en el segundo con funcion de disminucion : no puede entrar en un solo término con la misma funcion : entrará con la diferencia numérica que hay entre éstas, que es 2 : y ¿con qué funcion? Claro es, que con la funcion del término en que entre más veces, que es la del primero, en que es de aumento ; luego, la forma del resultado será $2a^3b^2$.

Otro : $-7a^3b^2+5a^3b^2$. Las mismas consideraciones que hicimos en el caso anterior nos conducirian á afirmar que no pudiendo entrar la cantidad a^3b^2 en el resultado con suma de funciones, porque estas son contrarias, entrará con la diferencia numérica de ellas que es 2, y con la funcion del término donde entre más veces, que es la del primero, donde ahora entra con la de disminucion, á saber, $-2a^3b^2$.

Otro : $7a^3b^2-7a^3b^2$. En este caso es igual el número de veces que en cada término entra la cantidad a^3b^2, y con funciones contrarias : la diferencia numérica, *cero ;* el resultado será tambien *cero*.

Hemos tratado insensiblemente una de las cuestiones más importantes que hay en los principios del Álgebra, á saber : *la reduccion de términos semejantes.* Hagamos la síntesis de los cuatro primeros casos tomados dos á dos, para concluir :

En la reduccion de términos semejantes puede suceder que éstos tengan signos iguales, ó que tengan signos contrarios.

Si tienen signos iguales, se suman los coeficientes, y esta suma, con el signo comun, se pone por coeficiente de la parte literal que aquéllos tengan.

Si tienen signos contrarios, se resta el coeficiente menor del mayor, y la diferencia, con el signo del mayor, se pone por coeficiente de la parte literal que aquéllos tuvieren.

Por último, *si tienen signos contrarios, y los coeficientes son iguales, el resultado* será *cero ;* ó como se dice en Álgebra, *se destruyen,* desaparecen.

CAPÍTULO I.

De las cuatro 1.as operaciones, del máximo comun divisor elemental algebráico, y de los quebrados literales.

EXPRESIONES ALGEBRÁICAS DE FORMA ENTERA.

ADICION.

Tengamos presente las definiciones y acepciones dadas en Aritmética.

8. El caso más sencillo que puede ocurrir en la adicion de expresiones algebráicas de forma entera, es el de sumar dos monomios. Por ejemplo, sumar b con a. Si a y b tuviesen valores particulares, ya sabríamos á qué atenernos. Pero como no los tienen, indicarémos la operacion propuesta bajo la forma siguiente: $a+b$.

Y no habiendo lugar á simplificacion, por reduccion de términos semejantes, esa será la forma definitiva, esa será la *suma*.

Sea por segundo ejemplo sumar el polinomio $c-d$ con $a-b$.

Estamos en el caso anterior en cuanto á ignorar los valores de estas letras, que nos permitieran verificar las diferencias indicadas, para sumar despues los resultados.

Por eso nos limitamos á indicar la suma del término a del segundo sumando con el primero, en esta forma: $c-d+a$.

Y como en el segundo sumando figura el término b, restándose del término a, restarémos b de lo que acabamos de escribir. Así, la suma indicada será la verdadera, puesto que tampoco en este caso hay simplificacion posible: $c-d+a-b$.

Luego para sumar en Álgebra *se escriben los sumandos los unos á continuacion de los otros, conservando todos los términos sus signos respectivos, y despues se reducen términos semejantes, si los hay.*

La reduccion de términos semejantes en el polinomio-suma puede hacerse reduciendo á un solo término todos los que estén afectados del signo $+$, y á otro todos los afectados del signo $-$; y reduciendo despues estos dos segun dejamos dicho (**7**). Y tambien puede hacerse, reduciendo los dos primeros que se encuentren, y despues el resultado con el tercero, y despues el resultado con el cuarto, y así sucesivamente.

9. En virtud de la regla precedente, tendrémos:

1.° $(+a)+(+b)=a+b.$
2.° $(+a)+(-b)=a-b.$
3.° $(-a)+(+b)=-a+b.$
4.° $(-a)+(-b)=-a-b.$

En todos y cada uno de los cuatro ejemplos que están delante hay una adicion indicada, segun el signo + que liga á los dos paréntesis. Pero en el 1.° y 4.°, el resultado es realmente una suma, miéntras que en el 2.° y 3.°, dando valores particulares á las letras a y b, la adicion algebráica se convierte en sustraccion aritmética.

Hemos llamado la atencion sobre estos ejemplos, á fin de que los alumnos perciban la generalidad del Álgebra desde los primeros pasos que dan en esta ciencia, y comiencen, por otra parte, á dilatarse los horizontes de sus tiernas inteligencias.

Veamos haciendo $a=9$ y $b=7$:

1.° $(+9)+(+7)=9+7=16.$
2.° $(+9)+(-7)=9-7=2.$
3.° $(-9)+(+7)=7-9=7-7-2=-2.$
4.° $(-9)+(-7)=-9-7=-16$

En el primero y cuarto ejemplo, en los cuales los sumandos son respectivamente ambos positivos ó negativos, los resultados son iguales en valor numérico (que es 16), pero positivo en el primer ejemplo y negativo en el 4.°

Mas en el 2.° y 3.°, en los que los sumandos, siendo numéricamente iguales á los de los ejemplos 1.° y 4.°, tienen sin embargo signos contrarios entre sí, esto es, uno va con funcion de aumento y el otro con funcion de disminucion, claro es que los resultados serán iguales á su diferencia, y de la misma funcion que el mayor, de aumento en el 2.° y de disminucion en el tercero, ó positivo en el segundo y negativo en el 3.°, y numéricamente iguales (siendo 2).

La adicion algebráica continua como adicion aritmética en los ejemplos 1.° y 4.° Pero en el 2.° y 3.° la adicion algebráica se convierte en sustraccion aritmética.

Y el lenguaje comun viene en apoyo nuestro:

Porque dar á uno 9 pesetas, y darle tambien 7 pesetas, equivale á darle 16 pesetas.

Pero dar á uno 9 pesetas, y darle tambien la funcion ó encargo de que pague una deuda mia de 7 pesetas, es lo mismo que darle la diferencia 2 pesetas.

Pero si le doy 7 pesetas, y le comprometo á que pague una deuda mia de 9 pesetas, claro es que le perjudico en 2 pesetas, es como si le diera —2.

Y más le perjudico aún, si le doy la funcion ó encargo de que pague una deuda mia de 9 pesetas, y otra de 7, que es como darle $-9-7=-16$ pesetas.

Escolio. Dos palabras acerca de los términos que van afectados de los signos + ó —, que unos quieren llamar *adictivos* y *sustractivos*, y el uso quiere que sean *positivos* y *negativos*.

En todo número, como en toda cantidad literal, hay que distinguir los dos conceptos que entraña: 1.° la *cantidad;* 2.° la *cualidad.* Tal persona señala 1000000 de pesetas: esa es la *cantidad*, su valor numérico, abstraccion hecha del signo. Pero ese millon, ¿es *efectivo* ó es *pasivo*, *es suyo* ó es *que lo debe?* En suma, deseamos saber la *cualidad* del millon de pesetas de ese caballero.

La *cantidad* es independiente de la *cualidad* en cuanto al valor numérico.

Lo que sucede es, que, *segun su cualidad*, el número ó la cantidad literal se presenta en las relaciones del cálculo con un carácter de *aumento* ó de *disminucion*, y á esta duplicidad de funciones corresponden dos estados, el *positivo* y el *negativo.*

El estado *positivo* ó *negativo* de los números se refiere esencialmente á su *cualidad.* Miéntras que lo que se suma ó se resta es la *cantidad.*

En una palabra, el estado *positivo* ó *negativo* de un número no influye acerca de su valor, considerado este número aisladamente: así, lo mismo vale numéricamente $+7$ que -7. Pero ese mismo estado *positivo* ó *negativo* tiene una influencia trascendental y decisiva en los resultados de las operaciones, en las cuales entre el mismo número: así, $12+7=19$, miéntras que $12-7=5$.

Nosotros consideramos, pues, las cantidades divididas en *positivas* y *negativas*, en relacion con su *cualidad;* y si llamamos POSITIVAS *á las que tienen cierto modo de ser*, llamarémos NEGATIVAS *á las que tienen cierto modo de ser contrario*, empleando el signo + para expresar el carácter *positivo* de cualquier cantidad, y el signo — para expresar el carácter *negativo.*

Ahora, para nosotros, está fuera de duda que una cantidad negativa es menor que cero: y que de dos cantidades negativas, vale más la que es numéricamente menor.

En efecto:

$$\begin{array}{cccccc} 4, & 4, & 4, & 4, & 4, & 4. \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}$$

Pasando la vista por esas sustracciones en las que el minuendo 4 es constante, y el sustraendo va aumentando en una unidad, claro es que el resto irá disminuyendo en una unidad : por eso $0 > -1$, $-1 > -2$, y 0 es el *límite* entre las cantidades positivas y negativas.

O lo que es lo mismo, el que no tiene nada es más rico que el que debe un millon : y el que debe un millon es más rico que el que debe dos.

Todavía hemos de decir algo : que en el curso de esta obra han de tratarse cuestiones en las que los resultados negativos, en vez de ser un absurdo, sean como indicador del absurdo que está en otra parte ; y otras en que los resultados negativos satisfagan la cuestion.

SUSTRACCION.

10. Sea propuesto para restar $(b-c)$ de a.

Si se tratase de números particulares, la cuestion se resolvería restando primeramente c de b, y despues el resultado de a. Pero como se trata de letras, nos atendrémos á meras indicaciones, empezando por restar b de a, cuyo resultado es $a-b$.

Pero ese no es el resto pedido, porque se ha restado de a toda la b, y no era b lo que debíamos restar de a, sino b disminuido de c. Y como esa disminucion no se ha hecho, ni podía hacerse tratándose de letras, al restar b se ha restado una cantidad con c unidades más de las que debía tener ; y como á mayor sustraendo menor resto, el resto $a-b$ tiene c unidades ménos de las que debe tener ; luego habrá que añadir por compensacion esas c unidades para obtener el verdadero resto de la forma $a-b+c$.

Ahora bien : b tenía el signo $+$ en el sustraendo, y ahora aparece con el signo $-$, y c que tenía en el sustraendo el signo $-$ aparece en el resto con el signo $+$. Luego,

Para restar en *Álgebra se escribe el minuendo, y á su continuacion el sustraendo con los signos mudados ; y despues se reducen términos semejantes, si los hay.*

11. En virtud de la regla precedente, tendrémos :

$$1.^{\circ}\quad (+a)-(+b)=a-b.$$
$$2.^{\circ}\quad (+a)-(-b)=a+b.$$
$$3.^{\circ}\quad (-a)-(+b)=-a-b.$$
$$4.^{\circ}\quad (-a)-(-b)=-a+b.$$

En todos y cada uno de los cuatro ejemplos que están delante, hay una sustraccion indicada, segun el signo — que liga á los dos paréntesis. Pero en el 1.° y 4.° el resultado es realmente una diferencia, miéntras que en el 2.° y 3.°, dando valores particulares á las letras a y b, la sustraccion algebráica se convierte en adicion aritmética.

Nuevo motivo para llamar la atencion de los escolares acerca de la generalidad del ÁLGEBRA.

Veamos, haciendo $a=9$ y $b=7$:

1.° $(+9)-(+7)=9-7=2.$
2.° $(+9)-(-7)=9+7=16.$
3.° $(-9)-(+7)=-9-7=-16.$
4.° $(-9)-(-7)=-9+7=-2.$

La sustraccion algebráica continúa como sustraccion aritmética en los ejemplos 1.° y 4.° Pero en el 2.° y 3.° la sustraccion algebráica se convierte en adicion aritmética.

Y el lenguaje comun viene en apoyo nuestro: porque quitarle á uno una cantidad negativa equivale á quitarle de encima una deuda, es lo mismo que darle esa misma cantidad.

ESCOLIO. $(-1)-(-2)=-1+2=+1.$ Quiere decir, que si de una cantidad negativa se resta otra negativa numéricamente mayor, el resto es positivo.

OTRO. $(-2)-(-1)=-2+1=-1.$ Quiere decir, que si de una cantidad negativa se resta otra negativa numéricamente menor, el resto es negativo.

OTRO. Puesto que para restar se mudan los signos del sustraendo, debe huirse de empezar la escritura de un polinomio por un término negativo, para evitar que en un momento de distraccion se le tome por sustraendo, y se incurra en error.

MULTIPLICACION.

12. Si tenemos una expresion de la forma $aaabbc + a \times a \times a \times b \times b \times c$, es sabido que, haciendo uso del coeficiente y de los exponentes, podemos presentarla bajo esta otra $2a^3b^2c$.

Pues recíprocamente, si se nos propone que multipliquemos el monomio $4a^3b^2c$ por el monomio $5ab^3$, podemos indicar su multiplicacion, descomponiéndolos en sus factores literales de este modo:

$$4a^3b^2c \times 5ab^3 = 4 \times a \times a \times a \times b \times b \times c \times 5 \times a \times b \times b \times b.$$

Y como un producto no varía cualquiera que sea el órden de sus factores, podemos presentar el segundo miembro así:

$$4 \times 5 \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times b \times c.$$

Y verificando el producto de los coeficientes, y reuniendo los factores literales por medio de exponentes, tendrémos, por último, $4a^3b^2c \times 5ab^3 = 20a^4b^5c$.

Luego, *para multiplicar un monomio por otro monomio, se multiplican entre sí los coeficientes como los números ordinarios, las letras comunes á ambos factores se escriben con un exponente igual á la suma de los que tuvieren en dichos factores, seguidas de las letras no comunes segun entraren en uno ó en otro factor.*

La regla relativa á los coeficientes no ofrece duda.

Tampoco la ofrece la que se refiere á los exponentes, como que es el medio para significar que una letra comun entra por factor en el producto tantas veces como en el multiplicando y multiplicador juntos.

En cuanto á los signos, si los monomios viniesen siempre como los del ejemplo anterior, afectados ambos del signo +, haríamos la consideracion siguiente: el coeficiente del producto ha de ser respecto del coeficiente del multiplicando (en todo, incluso en signos), como sea el coeficiente del multiplicador respecto de la unidad. Al decir la unidad, se sobreentiende que es la unidad positiva. Pero en el ejemplo anterior, el coeficiente del multiplicador tiene signo gual al de la unidad, luego el producto tendrá el signo del multiplicando, que es +: luego + por + da +.

$$7ab^2c^3 \times 4ab = 28a^2b^3c.$$

Si continuando positivo el multiplicando, fuese negativo el multiplicador, esto es, tuviese el multiplicador signo contrario al de la unidad, el producto tendría el signo —, que es el contrario al del multiplicando: luego, + por — da —.

$$5ab \times -2ab = -10a^2b^2.$$

Si el multiplicando fuese negativo, y el multiplicador fuese positivo, esto es, si el multiplicador tuviese signo igual al de la unidad, el producto tendrá el signo igual al del multiplicando, que en este caso es —: luego, — por + da —.

$$-3ab^2 \times 8bc = -24ab^3c.$$

Por último, si el multiplicando continua negativo, y el multiplicador fuese negativo, esto es, de signo contrario al de la unidad, el del producto será contrario al del multiplicando que es —, es decir, el signo del producto será +: luego, — por —, da +.

$$-4a \times -1 = 4a.$$

Despues de todo, decir signos de los coeficientes y decir signos de los términos respectivos, es una misma cosa.

Además, puesto que + por —, y — por +, dan —; y + por +, y — por —, dan +: podemos reducir estos cuatro casos á dos, diciendo que, en la multiplicacion de monomios, signos iguales dan + para el producto, y signos contrarios dan —. Esto en cuanto á signos.

Creemos, pues, haber dicho lo bastante para la multiplicacion de monomios en lo que se refiere á *signos*, *coeficientes*, *letras* y *exponentes* que son, por decirlo así, los cuatro elementos que entran á componer un término ó monomio.

Pasemos á multiplicar un polinomio por un monomio.

13. Vamos á multiplicar el polinomio $a-b$ por el monomio c.

Segun la idea que tenemos de la multiplicacion, el producto se formará sumando $a-b$ consigo mismo tantas veces como unidades tenga c; ó lo que es lo mismo, a se repetirá por sumando c veces, y $-b$ otras c veces.

Luego, $(a-b) \times c = ac - bc$.

Para multiplicar $a-b$ por $-c$, esto es, cuando el monomio c es negativo, basta suponer á c positivo, y estamos en el caso anterior y tendríamos por producto, $ac-bc$.

Y como mudando el signo á un factor (**12**) queda mudado el signo del producto, $-ac+bc$ sería el producto de $(a-b)$ por $-c$, esto es,

$$(a-b) \times -c = -ac + bc.$$

Luego *para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada término del polinomio por el monomio, segun la regla dada para la multiplicacion de monomios, y despues se reducen términos semejantes*, si los hay.

Pasemos á multiplicar un polinomio por otro polinomio.

14. Propongámonos multiplicar $a-b$ por $c-d$.

Esto significa que hay que multiplicar $a-b$ por c, despues $a-b$ por d y restar el segundo producto parcial del primero.

Pero $(a-b) \times c$ es igual á $ac-bc$; y $(a-b) \times d$ es igual á $ad-bd$.

Luego el producto total será

$$(ac-bc)-(ad-bd) = ac - bc - ad + bd.$$

Cárlos Botello

Luego *para multiplicar un polinomio por otro polinomio, se multiplica todo el multiplicando por cada término del multiplicador, segun la regla precedente; y despues se suman los productos parciales, reduciendo términos semejantes*, si los hay.

Escolio. Más consideraciones acerca de los signos de los productos, para que podamos interpretar los singulares resultados que ofrece el Álgebra.

Si además de ser positivas las cantidades a y c, y negativas b y d, suponemos $a > b$ y $c > d$, se confirma que el producto de dos cantidades positivas es *positivo*. En efecto, dando á los dos primeros términos del producto $ac - bc - ad + bd$ la forma de $(a - b) \times c$, y á los dos últimos la de $(a - b) \times d$, el producto tendría ésta $(a - b)c - (a - b)d$, que da un resultado positivo por haber supuesto á $c > d$.

Si suponemos ahora que $a < b$ y $c < d$, el sustraendo anterior $(a - b)d$ es $>$ el minuendo $(a - b)c$, y el resto será positivo (**11**, escolio 1.°): tambien se confirma que el producto de dos cantidades negativas es *positivo*.

Pero si suponemes $a > b$ y $c < d$, el resto $(a - b)c - (a - b)d$ es negativo, por haber supuesto $c < d$: luego es *negativo* el producto de dos cantidades afectadas de signos contrarios.

Y si, por último, suponemos $a < b$ y $c > d$, tambien es negativo el resto $(a - b)c - (a - b)d$, (**11**, esc. 2.°): luego es *negativo* el producto de las cantidades afectadas de signos contrarios.

Ejemplos:

$$
\begin{array}{l}
a + b \\
a + b \\
\hline
a^2 + ab \\
\qquad ab + b^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 \\
\qquad a + b \\
\hline
a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
\qquad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
a - b \\
a - b \\
\hline
a^2 - ab \\
\qquad - ab + b^2 \\
\hline
a^2 - 2ab + b^2 \\
a - b \\
\hline
a^3 - 2a^2b + ab^2 \\
\qquad - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
\hline
a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a + b \\
a - b \\
\hline
a^2 + ab \\
\qquad - ab - b^2 \\
\hline
a^2 - b^2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
- a - b \\
- a - b \\
\hline
a^2 + ab \\
\qquad ab + b^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + b^2 \\
\qquad - a - b \\
\hline
- a^3 - 2a^2b - ab^2 \\
\qquad - a^2b - 2ab^2 - b^3 \\
\hline
- a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3
\end{array}
$$

ó bien
1.° $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2.° $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
3.° $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$
4.° $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
5.° $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6.° $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
7.° $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
8.° $(- a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
9.° $(- a - b)^3 = - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$

Estos ejemplos son de lo más sencillo y más fácil que cabe. Y sin embargo, tienen cierta significacion que deben conocer los alumnos, y aprender de memoria.

Así, traducidos al lenguaje comun nos dicen:

El 1.°, *que el cuadrado de un binomio* (ó sea la suma compuesta de dos partes) *consta de tres partes: cuadrado del primer término, más duplo del primero por el segundo, más cuadrado del segundo.*

El 2.°, *que el cubo de un binomio* (ó sea la suma compuesta de dos partes) *consta de cuatro partes: cubo del primer término, más triplo del cuadrado del primero por el segundo, más triplo del primero por el cuadrado del segundo, más cubo del segundo.*

El 3.°, *que la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia da por producto la diferencia de sus cuadrados.*

El 4.° y 5.° tienen la misma significacion que el 1.° y 2.° respectivamente, con la variacion de signos consiguiente á haberse variado el signo al segundo término del binomio.

El 6.° y 7.° representan la reunion del 1.° y 4.° en una sola *fórmula* por una parte, y la reunion del 2.° y 5.° en otra sola *fórmula.*

El 8.° y 9.° tienen la misma significacion tambien que el 1.° y 2.° con la particularidad, en cuanto á signos, que el 8.° los tiene iguales á los del 1.°, porque dos factores, ambos positivos, ó ambos negativos, dan $+$; miéntras que para formar el 9.° entra un nuevo factor negativo que cambia al producto anterior, de positivo que era en negativo.

Esc. 2.° Ya que hemos llamado fórmulas á esas expresiones algebráicas, dirémos que, en Álgebra, se llama *fórmulas á aquellas expresiones que, conteniendo las soluciones de todas las cuestiones de la misma naturaleza, sólo se diferencian en los valores particulares que quiera darse á sus elementos:* tambien significa *la expresion del procedimiento que haya de seguirse para la resolucion de una cuestion dada.*

Esc. 3.° Además, aprenderán los alumnos en los ejemplos 1.°, 4.° y 8.°, que los cuadrados, ya sean de cantidades positivas, ya de negativas, son cantidades esencialmente positivas, miéntras que los cubos llevan el signo de su raiz: ejemplos 2.°, 5.° y 9.°

Por eso a^2 y b^2 aparecen siempre positivos ; pero a^3 y b^3 son positivos en el segundo ejemplo, porque sus raíces son $+a$ y $+b$; en el 5.° es positivo a^3 y negativo b^3, porque sus raíces son $+a$ y $-b$; y en el 9.° son negativos a^3 y b^3, porque sus raíces son $-a$ y $-b$.

OBSERVACIONES.

15. 1.ª Si multiplicando y multiplicador están ordenados respecto de una misma letra, el producto se obtiene ordenado respecto de la misma letra, como se ve en los ejemplos precedentes : entendiendo por *ordenar* un polinomio el escribir sus términos de manera que vayan creciendo ó decreciendo los exponentes de la letra que se elija, llamada por eso *ordenatriz*. Si la letra *ordenatriz* está con exponente igual en varios términos, se saca como factor comun fuera de un paréntesis, ó en columna vertical (que es más cómodo), como pronto verémos, y esos términos se ordenan parcialmente respecto de una segunda letra.

2.ª Si multiplicando y multiplicador son homogéneos, el producto será tambien homogéneo, y de un grado de dimensiones igual á la suma de los grados de los dos factores : así se verifica en los ejemplos anteriores.

3.ª Por muchos términos semejantes que haya para reducir en un producto, éste no se reduce nunca á cero : porque habrá, por lo ménos, dos términos que no admitan reduccion con los demás, y son : 1.° el que proceda del producto de los dos términos en que cierta letra tenga mayor exponente; y 2.°, el que proceda de los dos términos en que la misma letra lo tuviere menor ; porque el 1.° tendrá esa letra con mayor exponente que los demás , y el 2.° con menor que los demás, y ni uno ni otro admiten reduccion.

4.ª Si en un producto no hay términos semejantes, constará de tantos términos como sea el número de términos del multiplicando multiplicado por el del multiplicador ; esto es evidente.

DIVISION.

16. Empecemos por el caso más sencillo. Propongámonos dividir un monomio por otro, por ejemplo, $24a^3b^2c$ por $3ab$.

Para determinar el tercer monomio que multiplicado por $3ab$ produzca $24a^3b^2c$, hay que tener presente la manera de formar el producto de dos monomios, y de ahí deducir la manera de obtener el cociente.

En cuanto á signos, el cociente que buscamos tendrá +; porque este es el signo que, combinado por multiplicacion con el + del divisor, puede dar el + del dividendo: luego para casos iguales..... + por +, da + al cociente.

En cuanto á coeficiente, este ha de ser tal que multiplicado por 3 dé 24: pues recíprocamente, el cociente de dividir 24 por 3, será el coeficiente del cociente.

Las letras comunes al dividendo y divisor tendrán en el cociente un exponente tal que, sumado con el que tengan en el divisor, den el que tengan en el dividendo: luego el exponente que tengan en el cociente será igual á la diferencia de los exponentes que tengan en el dividendo y en el divisor.

En cuanto á las letras no comunes, claro es que han de entrar en el cociente con el mismo exponente que tengan en el dividendo.

Así, pues, $24a^3b^2c : 3ab$, ó lo que es lo mismo $\dfrac{24a^3b^2c}{3ab} = 8a^2bc$.

Si continuando positivo el dividendo, fuese negativo el divisor, el cociente tendrá el signo —, que es el que combinado por multiplicacion con el — del divisor puede dar el + del dividendo:

Luego para casos iguales..... + por —, da — al cociente.

$$\frac{18ab^2c}{-6b} = -3abc.$$

Si el dividendo es negativo y el divisor positivo, el cociente tendrá el signo —, que es el que combinado por multiplicacion con el + del divisor, puede dar el — del dividendo:

Luego para casos iguales..... — por +, da — al cociente.

$$\frac{-32ab^3c}{8ab} = -4b^2c.$$

Por último, si dividendo y divisor son ámbos negativos, el cociente tendrá el signo +, que es el que combinado por multiplicacion con el — del divisor puede dar el — del dividendo:

Luego para casos iguales..... — por —, da + al cociente.

$$\frac{-45a^2b^2c}{-9abc} = 5ab.$$

Luego, para dividir un monomio por otro monomio, *se divide el* *coeficiente del dividendo por el del divisor, y el cociente será el coeficiente del monomio cociente: las letras comunes se escriben en el cociente con un exponente que sea la diferencia de los dos exponentes que tengan en el dividendo y divisor; las letras comunes y con exponentes iguales se omiten en el cociente; y las que solamente entren en el dividendo se escribirán en el cociente con el mismo exponente que tuvieren.* Y respecto á signos: signos iguales dan + para el cociente, y signos contrarios dan —.

Corolario. De lo expuesto se deduce, que la division de un monomio por otro no es posible: 1.°, si el coeficiente del dividendo no es exactamente divisible por el del divisor; 2.°, si alguna letra comun tuviere mayor exponente en el divisor que en el dividendo; y 3.°, si en el divisor entra alguna letra que no entre en el dividendo. Siempre que ocurran estas circunstancias, ó dos, ó una, la division es imposible, y queda indicada bajo la forma de *monomio fraccionario*, que se simplifica, si se puede.

$$\frac{18a^3b}{16ab}=\frac{9a^2}{8}\text{..............} \quad \text{factor comun } 2ab.$$

$$\frac{18abc}{-36a^3m}=\frac{bc}{-2a^2m}\text{........} \quad \text{factor comun } 18a.$$

$$\frac{7ab^2c^3}{-21a^2b^2c^4mn}=\frac{1}{-3acmn}\text{....} \quad \text{factor comun } 7ab^2c^3.$$

Escolio. En la division de un monomio por otro monomio, sea exacta ó inexacta, el grado de dimensiones del cociente es igual al grado del dividendo ménos el del divisor.

Así, $\frac{a^{10}}{a^7}$ es de tercer grado, y $\frac{a^4}{b^2c^5}$ de *ménos* de tercer grado.

Pasemos á la division de un polinomio por un monomio.

17. Para dividir un polinomio por un monomio, *se divide cada término del polinomio por el monomio*, siguiendo la regla dada para la division de monomios.

EJEMPLO:

$$\frac{12a^3b^2-10a^2b^2c+8a^2b-6a^2b^4c}{2a^2b}=6ab-5bc+4-3b^3c.$$

Escolio. Para que en este caso, poco frecuente, se obtenga cociente exacto, es necesario que cada término del *polinomio dividen-*

do sea exactamente divisible por el *monomio divisor*. Y si esto último no sucede, puede ponerse alguno de los cocientes parciales bajo la forma de monomio fraccionario, si se quiere: y si no se quiere, se deja indicada la division.

EJEMPLO: $\dfrac{12a^3b^2 - 10a^2b^2c - 1}{2ab} = 6a^2b - 5abc - \dfrac{1}{2ab}$;

ó bien $\dfrac{12a^3b^2 - 10a^2b^2c - 1}{2ab}$.

OTRO. Tambien puede ocurrir que no siendo exactamente divisibles todos los términos del polinomio por el monomio divisor, tengan sin embargo éste y cada uno de aquéllos algun factor comun que permita poner la division indicada bajo forma más sencilla.

EJEMPLO: $\dfrac{4abc - 10a^2b^2c - a}{2a^3b^5}$: como a es comun al primero del dividendo y al divisor, al segundo y al divisor, y al tercero y al divisor, la division indicada puede quedar bajo la forma siguiente:

$$\frac{4bc - 10ab^2c - 1}{2a^2b^5}.$$

De otro modo: a es factor de todos los términos del dividendo, y por consiguiente de éste: tambien lo es del divisor; luego dividiendo los dos términos de la division por a, la division indicada quedará bajo una forma más sencilla.

18. Vamos á dividir un polinomio por otro polinomio: á dividir por ejemplo, $3a^2b + a^3 + b^3 + 3ab^2$ por $b^2 + a^2 + 2ab$.

Como todos los términos del dividendo no se han de dividir á la vez por todos los del divisor, la primera dificultad que se presenta para encontrar la expresion algebráica que, multiplicada por el divisor, produzca el dividendo, es saber qué término del dividendo se ha de dividir por cuál del divisor, puesto que un producto se compone en general de los productos parciales amalgamados entre sí por la reduccion de términos semejantes. Pero esta dificultad desaparece con sólo recordar (**15**, 3.ª) que hay en todo producto dos términos, por lo ménos, que no admiten reduccion con los demás. Luego si dividimos el término del dividendo en que la letra a, por ejemplo, tenga mayor exponente por el término del divisor en que esa misma letra esté con mayor exponente, estarémos seguros de obtener un término del cociente. Y esto es lo que significa ordenar préviamente los polinomios para empezar la division.

$$\begin{array}{l|l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & a^2 + 2ab + b^2 \\ \cline{2-2} -a^3 - 2a^2b - ab^2 & a + b \\ \hline \quad a^2b + 2ab^2 + b^3 & \\ \quad -a^2b - 2ab^2 - b^3 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

Determinado el primer término del cociente, se multiplica por a el divisor, y el producto se resta del dividendo total (que contiene todos los productos del divisor por cada término del cociente, sumados entre sí), á fin de descartar de éste lo que contenga procedente del divisor multiplicado por el primer término del cociente. Hechas la multiplicacion, sustraccion y reduccion como ahí se ven, se hacen sobre el resto $a^2b + 2ab^2 + b^3$, ahora dividendo parcial, las consideraciones anteriores, y dirémos: a^2b partido por a^2, da $+ b$ para el cociente.

Obtenido el segundo término $+b$ del cociente, se multiplica por el divisor, y restando del dividendo el producto parcial, nos encontramos con un resto cero: prueba de que la division es exacta.

Luego, *para dividir un polinomio por otro polinomio se ordenan dividendo y divisor respecto de una misma letra: se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, y el cociente que se obtenga será el primer término del cociente total. Se multiplica el divisor por el primer término del cociente, y el producto se resta del dividendo: se divide el primer término del resto por el primero del divisor, y se tendrá el segundo término del cociente. Se multiplica el divisor por el segundo término del cociente, y el producto se resta del resto anterior: se divide el primer término del segundo resto por el primero del divisor, y se tendrá el tercer término del cociente que se busca. Y así se continúa hasta obtener un resto cero* (como en el ejemplo anterior), *ó hasta que alguna division parcial sea imposible.*

OBSERVACIONES.

19. 1.ª Si se ordenan los polinomios ántes de empezar la operacion, es por comodidad y claridad. Por lo demás, puede verificarse cada division parcial sin que estén ordenados, con tal que se divida el término del dividendo en que cierta letra tenga mayor exponente por el término del divisor en que esté la misma letra con mayor exponente.

2.ª Si ordenamos siempre de mayor á menor, es porque la experiencia nos ha demostrado que de esa manera lo entienden mejor los principiantes, y hay ménos peligro á equivocaciones; como que en la observacion anterior hemos hecho caso omiso de los términos en que la letra tuviere menor exponente, y puede hacerse, sin embargo, con ellos la division.

3.ª Tiene un carácter de generalidad tal el Álgebra, que, despues de una division parcial, pueden ordenarse los polinomios respecto de otra letra cualquiera. Y si no se hace, es por no perder tiempo en operaciones de lujo: basta con apuntarlo aquí.

4.ª Si la operacion comienza y sigue hasta el fin con los polinomios ordenados respecto de cierta letra, el cociente, es claro, saldrá ordenado respecto de la misma letra.

5.ª Como motivo de curiosidad, y nada más, pueden los alumnos, despues de ordenados los polinomios, dividir el último de la derecha del dividendo por el último de la derecha del divisor, porque esto equivaldría á considerarlos ordenados de menor á mayor.

6.ª Las *sustracciones necesarias* que hemos verificado en el ejemplo precedente, pueden hacerse sin necesidad de escribir el sustraendo, análogamente á lo que hicimos en Aritmética (**38** y **42**).

7.ª Si en una division exacta los polinomios son ambos respectivamente homogéneos, el cociente será tambien homogéneo y de un grado igual al del dividendo ménos el del divisor.

8.ª Por lo demás, la division no es posible desde que el primer término de cualquier dividendo parcial no es divisible por el primer término del divisor.

20. Puede suceder que uno de los dos polinomios, ó ambos, tengan muchos términos con la letra ordenatriz elevada á la misma potencia.

Sea por ejemplo dividir $10a^3 + 11a^2b - 15a^2c + 3ab^2 - 19abc - 5b^2c + 15bc^2$ por $5a^2 + 3ab - 5bc$.

En los términos 2.° y 3.° entra la a con el mismo exponente, y pueden disponerse de esta manera:

$(11b - 15c)a^2$, ó de esta $\left.\begin{array}{r} 11b \\ -15c \end{array}\right\} a^2$ (**15**, 1.ª)

Segun la primera forma se corre el riesgo indicado (**11**, Esc. 3.°). Por eso se prefiere la segunda, y se llama coeficiente de a^2 á lo que está multiplicando á a^2: lo mismo sucede respecto de los términos 4.° y 5.° con a.

La operacion se dispone así :

$$\begin{array}{r|r|l|l}
10a^5+11b & a^2+3b^2 & a-5b^2c+15bc^3 & \underline{5a^2+3ab-5bc,} \\
-15c & -19bc & & 2a+b-3c. \\
-6b & +10bc & & \\
\hline
1.^{er}\text{ resto. }+5b & a^2+3b^2 & a-5b^2c+15bc^2 & \\
-15c & -9bc & +5bc^2-15bc^2 & \\
-5b & -3b^2 & & \\
+15c & +9bc & & \\
\hline
2.^{o}\text{ resto.} & 0 & &
\end{array}$$

Y dirémos: $10a^3$ partido por $5a^2$, da $2a$ al cociente.

Se multiplica el divisor por $2a$, diciendo:

$5a^2$ por $2a$, son $10a^3$, para restar, son $-10a^3$ que no hay necesidad de escribir, puesto que se destruye con $+10a^3$ del dividendo; y se continua: $3ab$ por $2a$, son $6a^2b$, que para restar se escribe con signo — debajo del término que tiene a^2; y se continúa:

$-5bc$ por $2a$, son $-10abc$, que para restar se escribe con signo $+$ debajo del término que tiene a.

Despues de hecha la reduccion de términos semejantes, dividirémos el primer término del resto por el primero del divisor diciendo: $+5a^2b-15a^2c$ partido por $5a^2$, da para el cociente, $b-3c$.

$5a^2$ por $(b-3c)$, son $5a^2b-15a^2c$, que se escriben con signos contrarios para restar, debajo del término que tiene a^2.

$3ab$ por $(b-3c)$, son $3ab^2-9abc$, que se escriben con signos contrarios para restar, debajo del término que tiene a.

Por último, $-5bc$ por $(b-3c)$, son $-5b^2c+15bc^2$, que se escriben con signos contrarios para restar, debajo de los términos que por no tener la letra a, se llaman *independientes* de a.

Conviene advertir que en este ejemplo tan sencillo, el primer término del primer resto ha sido un binomio: en otro ejemplo será un polinomio, y polinomio será el segundo cociente parcial. Por consiguiente, esa division parcial y la multiplicacion subsiguiente, son operaciones que deben hacerse por separado, aunque trayendo los resultados despues á la operacion principal.

21. Cuando el dividendo contiene alguna letra que no entra en el divisor, respecto de la cual éste se llama *independiente*, en este caso, en vez de ordenar los polinomios respecto de alguna letra comun, se ordena el dividendo respecto de la letra indicada, bajo la forma de paréntesis; y *para que sea exactamente divisible el primer polinomio por el segundo, es necesario que cada uno de los llamados coeficientes de las diferentes potencias de esa letra en el dividendo, sea exactamente divisible por el divisor*. Y estas diferentes potencias de esa letra, tendrán en el cociente por coeficientes los respectivos cocientes de los coeficientes del dividendo por el divisor.

22. Hay un caso tan notable en la division algebráica, que por lo mucho que juega en los cálculos se ha hecho de él una especie de *teorema*; y es de gran interés el darlo á conocer, así como el medio de demostracion que hemos de emplear.

Hemos visto (**14**, ejemplos) que $(a+b)\times(a-b)$ dió por producto a^2-b^2 : y recíprocamente, a^2-b^2 dividido por $a-b$ dará por cociente $a+b$.

Si además se divide a^3-b^3 por $a-b$, se obtiene por cociente exacto a^2+ab+b^2.

Si todavía se divide a^4-b^4 por $a-b$, se obtiene por cociente exacto $a^3+a^2b+ab^2+b^3$.

a^5-b^5 partido por $a-b$, daría por cociente exacto $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$; y así sucesivamente hasta concluir, por analogía, que el cociente será exacto cualesquiera que sean los exponentes iguales de a y b.

Vamos á demostrarlo de modo que la certidumbre sea más vigorosa que la adquirida por la analogía.

Para ello dividamos a^m-b^m por $a-b$.

Disposicion de la operacion :

$$\begin{array}{lll|l}
 & a^m-b^m & & a-b \\
 & -a^m+a^{m-1}b & & a^{m-1} \\
\hline
\text{primer resto.. . .} & a^{m-1}b-b^m & & \\
\text{ó bien. . . . .} & b\,(a^{m-1}-b^{m-1}) & &
\end{array}$$

Ahora bien : si se admite que $a^{m-1}-b^{m-1}$ sea exactamente divisible por $a-b$, tambien lo será a^m-b^m que es el caso propuesto. Lo que nos dice, que *si la diferencia de las potencias semejantes y positivas*, de un grado cualquiera, de *dos cantidades es exactamente divisible por la diferencia de estas mismas cantidades, la diferencia de las potencias de un grado más tambien lo será.* Pero $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ da un cociente exacto é igual á $a+b$: luego $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ dará un cociente exacto igual á a^2+ab+b^2, y así sucesivamente hasta que, en general, $\frac{a^m-b^m}{a-b}$ dé un cociente exacto de la forma

$$a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3+\ldots+a^2b^{m-3}+ab^{m-2}+b^{m-1}$$

La exactitud del teorema se confirma multiplicando este cociente por $a - b$; pues se ve que el primer término, por ejemplo, multiplicado por $- b$ se destruye con el segundo multiplicado por a, y así de los demás, excepto a^m y b^m que no admiten reduccion con otros.

Máximo comun divisor elemental algebráico.

23. Vamos á explicar sucintamente, siguiendo á M. Bourdon, *el máximo comun divisor algebráico*, que podemos llamar *elemental*, porque está basado exclusivamente sobre los principios demostrados en *Aritmética* acerca de este asunto: quede para otro libro y lugar *su teoría completa*.

Se llama *máximo comun divisor* de dos polinomios, el polinomio mayor respecto de exponentes y coeficientes, que divide exactamente á los dos polinomios propuestos.

Sea, por ejemplo, hallar el m. c. d. de los polinomios

$$15a^5 + 10a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 - 3ab^4$$
$$\text{y } 12a^3b^2 + 38a^2b^3 + 16ab^4 - 10b^5.$$

Pero observando que el primer polinomio tiene un factor a que no entra en el segundo, y que éste tiene un factor $2b^2$ que no entra en el primero, uno y otro pueden suprimirse porque no forman parte del m. c. d. pedido, y plantearémos la operacion con los polinomios despojados de dichos factores, en la forma siguiente:

$$15a^4 + 10a^3b + 4a^2b^2 + 6ab^3 - 3b^4 \quad \underline{\big|\, 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3.}$$

Ahora se nos ofrece la dificultad de que, ordenados los polinomios respecto de la letra a, el coeficiente del primer término del dividendo no es exactamente divisible por el coeficiente del primer término del divisor; dificultad que se salva multiplicando todos los términos del dividendo por el coeficiente 6 del primer término del divisor, lo cual es lícito por no ser el 6 factor de todos los términos de éste. Y como el primer término del dividendo tiene la letra a con un exponente mayor en una unidad que el de la misma letra en el primer término del divisor, habrá además de la division iniciada, otra relativa á exponentes iguales para la misma letra a: hé ahí la razon por qué en vez de multiplicar todos los términos del dividendo por 6, se multiplican en este caso y análogos por 6^2, y si la diferencia de los exponentes de a fuese 2, por el cubo de 6, y así sucesivamente. Adoptando esta regla en principio, se la sujeta, no obstante, á modificaciones que ni se deben ni se pueden olvidar.

En el presente ejemplo, tienen los coeficientes 15 y 6 el factor comun 3 : luego bastará multiplicar por 2 (en vez de 6) los términos del dividendo para hacer posible la division ; y esto, lo repetimos, por no ser 2 factor de todos los términos del polinomio divisor. Más aún, atentos á la última consideracion expuesta, en vez de multiplicar por 2, multiplicarémos por su cuadrado 4 los términos del dividendo, y presentarémos la operacion :

$$\begin{array}{rl|l}
 & 60a^4 + 40a^3b + 16a^2b^2 + 24ab^3 - 12b^4 & 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 \\
\cline{3-3}
 & -60a^4 - 190a^3b - 80a^2b^2 + 50ab^3 & 10a,\ -25b \\
\cline{2-2}
 & -150a^3b - 64a^2b^2 + 74ab^3 - 12b^4 & \text{primer resto parcial.} \\
 & +150a^3b + 475a^2b^2 + 200ab^3 - 125b^4 & \\
\cline{2-2}
\text{primer resto pral..} & 411a^2b^2 + 274ab^3 - 137b^4 & \\
\text{ó bien...} & 137b^2(3a^2 + 2ab - b^2) &
\end{array}$$

Al llegar la operacion á este punto, observemos que en el segundo resto está la letra *a* con menor exponente que en el divisor : por eso pasa á ser divisor, y por eso se le llama *resto principal.*

Pero no pasa á ser divisor tal y como aparece, sino despojado del factor $137b^2$ comun á sus tres términos, que por otra parte no es factor del divisor que pasa á ser dividendo ; pues si lo fuera tambien de éste, se sacaría de ambos polinomios, para reservarlo como parte del m. c. d. que se busca.

Continuacion de la operacion :

$$\begin{array}{r|l}
6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3 & 3a^2 + 2ab - b^2 \\
\cline{2-2}
-6a^3 - 4a^2b + 2ab^2 & 2a + 5b \\
\hline
15a^2b + 10ab^2 - 5b^3 & \\
-15a^2b - 10ab^2 + 5b^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Luego, $3a^2 + 2ab - b^2$ es el m. c. d. pedido.

$$\begin{array}{lr|l}
\text{Con efecto :} & 15a^5 + 10a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 - 3ab^4 & 3a^2 + 2ab - b^2 \\
\cline{3-3}
 & -15a^5 - 10a^4b + 5a^3b^2 & 5a^3 + 3ab^2 \\
\cline{2-2}
 & 9a^3b^2 + 6a^2b^3 - 3ab^4 & \\
 & -9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 3ab^4 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr|l}
\text{y además} & 12a^3b^2 + 38a^2b^3 + 16ab^4 - 10b^5 & 3a^2 + 2ab - b^2 \\
\cline{3-3}
 & -12a^3b^2 - 8a^2b^3 + 4ab^4 & 4ab^2 + 10b^3 \\
\cline{2-2}
 & 30a^2b^3 + 20ab^4 - 10b^5 & \\
 & -30a^2b^3 - 20ab^4 + 10b^5 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Y los cocientes $5a^3 + 3ab^2$ y $4ab^2 + 10b^3$ son primos entre sí: luego por segunda vez afirmarémos que $3a^2 + 2ab - b^2$ es el máximo comun divisor de los dos polinomios propuestos.

OBSERVACIONES.

24. 1.ª Como para hacer posible la primera y segunda division parcial, se multiplicaron los términos del dividendo por el cuadrado de 2, se pone una coma entre los dos cocientes parciales para significar de esa manera que no están ligados por las relaciones de los cocientes parciales de la division algebráica propiamente dicha.

2.ª La supresion del factor monomio de un polinomio, que no lo es del otro, *es necesaria*; pues de no hacerla, resultaría el máximo comun divisor aumentado en dicho factor, habiendo de introducirlo en un dividendo de una de las divisiones subsiguientes para hacer ésta ó éstas posibles.

3.ª Hay multitud de casos que se ofrecen y resuelven con ménos dificultades que el ejemplo elegido, y áun sin ninguna; pero hacemos caso omiso de ellos, en obsequio de la brevedad.

25. Luego, regla: *para hallar el máximo comun divisor de dos polinomios, se ordenan respecto de una misma letra y se suprime en cada uno de ellos el factor comun á todos sus términos que no lo sea de los del otro polinomio. Si los dos polinomios propuestos tienen algun factor comun, se suprime en ambos, y se reserva para multiplicarle por el m. c. d. que se obtenga, y el producto será el m. c. d. verdadero. Se divide el polinomio en que la letra ordenatriz tenga mayor exponente por el otro polinomio, haciendo las preparaciones convenientes, si fuere necesario, para que el primer término del dividendo sea exactamente divisible por el primero del divisor: esta division se continúa hasta obtener un resto en que la letra ordenatriz tenga menor exponente que en el divisor. En esta situacion, y despues de hechas las supresiones de factores comunes de que hemos hablado más arriba, si los hubiere, se toma el divisor por dividendo, y ese resto por divisor, y se continua la operacion hasta obtener un resto cero, y en este caso el último divisor es el máximo comun divisor, ó hasta obtener un resto independiente de la letra ordenatriz, en cuyo caso los polinomios propuestos son primos entre sí, á ménos que tengan algun factor comun independiente de dicha letra y que no se vió al empezar la operacion.*

Expresiones algebráicas de forma fraccionaria.

26. Los quebrados literales tienen la misma acepcion que los numéricos : unas veces representan el cociente indicado del numerador partido por el denominador (**16**, Cor.); otras pueden ser considerados como una coleccion de unidades fraccionarias iguales.

Así, por ejemplo, el quebrado literal $\frac{a}{b}$ puede ser considerado como el cociente indicado de a partido por b.

Y puede ser considerado como indicacion de que la unidad ha sido dividida en un número b de partes iguales, de las que el quebrado contiene ó vale un número a : en este caso la unidad fraccionaria será $\frac{1}{b}$, y el quebrado es una coleccion de un número a de unidades fraccionarias, iguales entre sí, é iguales á $\frac{1}{b}$.

No participamos de la opinion de los que creen que en la enseñanza del Álgebra puede hacerse caso omiso de las operaciones relativas á los quebrados literales. Al contrario, la experiencia nos ha enseñado cuán útiles son á los alumnos los cálculos sobre expresiones de esta forma, que, despues de todo, les sirven de confirmacion, de medio de generalizacion y hasta de repaso de lo que ántes aprendieron.

Pero ántes de ocuparnos de las operaciones sobre los quebrados literales, dirémos algo acerca de las dos transformaciones prévias que hay que conocer :

27. 1.ª *Simplificacion.* Para que los quebrados literales admitan simplificacion, es necesario que ambos términos tengan algun factor comun, ya sea numérico, ya sea literal, ya sea numérico y literal á la vez. Y suprimido que sea, esto es, dividiendo los dos términos por el factor comun que hubiere, queda hecha la simplificacion.

Aunque ya hemos hablado de esto (**16**, Cor.) con motivo de la imposibilidad que suele ocurrir de dividir algun monomio por otro, presentarémos el nuevo ejemplo, $\frac{8a^3b^2}{512a^4b^3c}$.

Es tan sencillo este ejemplo, que á primera vista se conoce que el factor comun á los dos términos del quebrado es $8a^3b^2$, esto es, el numerador mismo. Y dirémos, $8a^3b^2$ partido por $8a^3b^2$, da 1 que se pone por numerador: $512a^4b^2c$ partido por $8a^3b^2$, da $64ac$: y tendrémos por último $\frac{8a^3b^2}{512a^4b^2c}=\frac{1}{64ac}$.

Sea por segundo ejemplo, $\frac{n^3-3n^2+3n-1}{6n^3-10n^2+5n-1}$.

Si se quiere simplificar este quebrado, que ya no es tan sencillo como el anterior, se determina el m. c. d. de sus dos términos, segun hemos dicho (**25**). Y averiguado que es igual á $(n-1)$, se dividen por él, numerador y denominador, y los cocientes respectivos serán los términos del quebrado simplificado. Así, tendrémos:

$$\frac{n^3-3n^2+3n-1}{6n^3-10n^2+5n-1}=\frac{n^2-2n+1}{6n^2-4n+1}.$$

Otro: $$\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a+b)\,(a-b)}{(a+b)\,(a+b)}=\frac{a-b}{a+b}.$$

28. 2.ª *Reduccion á un comun denominador.* La regla general consiste en *multiplicar los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.*

Así: $$\frac{a}{b},\ \frac{m}{n},\ \frac{x}{y}=\frac{any}{bny},\ \frac{bmy}{bny},\ \frac{bnx}{bny}:\ \text{y}$$

$$\frac{m}{a+b},\ \frac{n}{a-b}=\frac{am-bm}{a^2-b^2},\ \frac{an+bn}{a^2-b^2}.$$

Pero si los denominadores tienen factores comunes, se hace uso del m. m. c.; con lo que se obtiene economía de tiempo y de trabajo, y se presentan los quebrados bajo la forma más simple posible.

El m. m. c. puede ser un monomio, ó un polinomio; pero siempre *compuesto del m. m. c. de los coeficientes de las expresiones á que se refiera, seguido de las diferentes letras que entren en ellas, cada una con el mayor exponente que tenga.*

Así, $\frac{3ab^2}{4ab^5c},\ \frac{m}{8a^2b},\ \frac{1}{3a^2b^2}$ ..... m. m. c. $=24a^2b^5c$.

$24a^2b^5c$ partido por cada denominador da $6a$, $3b^4c$, $8b^3c$. Y multiplicados los dos términos de cada quebrado por el cociente respectivo, tendrémos:

$$\frac{3ab^2 \times 6a}{4ab^5c \times 6a}, \frac{m \times 3b^4c}{8a^2b \times 3b^4c}, \frac{1 \times 8b^3c}{3a^2b^2 \times 8b^3c} = \frac{18a^2b^2}{24a^2b^5c}, \frac{3b^4cm}{24a^2b^5c}, \frac{8b^3c}{24a^2b^5c}.$$

ADICION.

29. Ejemplos. 1.° $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}=\frac{a+c+d}{b}.$

2.° $\frac{a}{b}+\frac{m}{n}=\frac{an}{bn}+\frac{bm}{bn}=\frac{an+bm}{bn}.$

3.° $a+\frac{m}{n}=\frac{a}{1}+\frac{m}{n}=\frac{an}{n}+\frac{m}{n}=\frac{an+m}{n}.$

En este último ejemplo puede darse el enunciado, diciendo: *Sumar un entero con un quebrado*, ó bien *reducir un entero á la especie de quebrado que le acompaña*, ó bien *reducir un número mixto á quebrado*. De suerte que *son tres enunciados distintos*, y un solo concepto.

4.° $\frac{m}{n}+a=\frac{m}{n}+\frac{a}{1}=\frac{m}{n}+\frac{an}{n}=\frac{m+an}{n}.$

Este resultado es igual al anterior, porque *en la adicion el órden de los sumandos no altera la suma.*

Escolio. Un número mixto representa en *Aritmética* (sin necesidad de interpolar el signo + entre el entero y el quebrado) la adicion indicada del entero con el quebrado. Así, lo mismo es escribir $3\frac{1}{4}$ que escribir $3+\frac{1}{4}$.

Pero en Álgebra no puede prescindirse de poner el signo + entre el entero y el quebrado; pues, como los términos son literales, si no se pusiera el signo +, se entenderia (**2**, 4.°) que estaban multiplicados, y no habría tal número mixto. Así, $m\frac{a}{b}$ no representa un número mixto, sino el producto de m por $\frac{a}{b}$; el número mixto es así: $m+\frac{a}{b}$.

Cárlos Botello

SUSTRACCION.

30. Ejemplos. 1.° $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$.

2.° $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=\frac{an}{bn}-\frac{bm}{bn}=\frac{an-bm}{bn}$.

3.° $a-\frac{m}{n}=\frac{a}{1}-\frac{m}{n}=\frac{an}{n}-\frac{m}{n}=\frac{an-m}{n}$.

4.° $\frac{m}{n}-a=\frac{m}{n}-\frac{a}{1}=\frac{m}{n}-\frac{an}{n}=\frac{m-an}{n}$.

Conviene fijar bien la atencion del estudiante en estos dos últimos ejemplos, que ofrecen resultados tan distintos, á diferencia de lo que vimos en la *adicion* en casos análogos ; porque allí puede invertirse el órden de los *sumandos*, y en la *sustraccion* no pueden cambiar de funciones *minuendo* y *sustraendo*.

MULTIPLICACION.

31. Ejemplos. 1.° $\frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\frac{am}{bn}$.

2.° $\frac{a}{b}\times m=\frac{am}{b}$.

3.° $m\times\frac{a}{b}=\frac{am}{b}$.

Tambien se obtienen resultados iguales en estos dos últimos ejemplos, porque *un producto no varía cualquiera que sea el órden de sus factores*.

DIVISION.

32. Ejemplos. 1.° $\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{an}{bm}$.

2.° $\frac{a}{b}:m=\frac{a}{bm}$.

3.° $m:\frac{a}{b}=\frac{bm}{a}$.

Conviene fijar bien la atencion del estudiante en estos dos últimos ejemplos que ofrecen resultados tan distintos, á diferencia de lo que vimos en la *multiplicacion* en casos análogos; porque allí puede invertirse el órden de los factores, y en la division no pueden cambiar de funciones *dividendo* y *divisor*.

Escolio. Es bueno no olvidar, que si en un cálculo entran dos quebrados sumándose uno con otro, ó restándose uno de otro, como $\frac{a}{b}+\frac{m}{n}$, ó bien $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}$, en tanto que no se verifique la operacion, dichos quebrados determinan un *binomio*; miéntras que, si fuesen ligados por el signo $\times$, ó bien por $:$, dichos quebrados no determinarían despues ni ántes de la operacion más que un monomio. Lo mismo se entenderá para tres ó más quebrados.

Otro. Si se tienen tres ó más quebrados de igual denominador y signos contrarios, pueden reunirse en un solo quebrado, *poniendo por numerador la reunion algebráica de los numeradores, con los signos que tengan; se hace despues la reduccion de términos semejantes, si los hay*, y por denominador se pone el denominador comun.

Ejemplo: $\frac{3a^2b^2}{m}+\frac{1}{m}-\frac{2b}{m}-\frac{1}{m}+\frac{5a^2b^2}{m}-\frac{8a^2b^2}{m}+\frac{3b}{m}=$

$$\frac{3a^2b^2+1-2b-1+5a^2b^2-8a^2b^2+3b}{m}=\frac{b}{m}.$$

Si los quebrados no tienen igual denominador, se reducen á él, y estamos en el caso precedente.

CAPITULO II.

Potencias y raíces de las expresiones algebráicas.

POTENCIAS Y RAICES DE LOS MONOMIOS.

33. Segun la regla dada (**12**) para la multiplicacion de los monomios, tendrémos: $-3ab^2c^3 \times -3ab^2c^3 = 9a^2b^4c^6$.

$$-2a^2b^3c \times -2a^2b^3c \times -2a^2b^3c \ldots\ldots = -8a^6b^9c^3.$$
$$3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 \times 3ab^2 = 243a^5b^{10}.$$

Pero segun la idea que de las *potencias* tenemos, el primero de estos productos es el *cuadrado* del monomio $-3ab^2c^3$, el segundo es el *cubo* de $-2a^2b^3c$ y el tercero es la *quinta potencia* de $3ab^2$: luego *un monomio se eleva á una potencia cualquiera*, elevando el coeficiente á la misma potencia y multiplicando los exponentes de las letras por el de la potencia.

De la misma regla para multiplicar se deduce que:

Si el monomio es positivo, *positivas* serán tambien todas sus potencias.

Si el monomio es negativo, serán *positivas* sus potencias de grado *par*, y *negativas* las de grado *impar*.

De otro modo: las potencias de grado *par*, tanto de una cantidad *positiva* como de una *negativa*, son siempre *positivas*, y las de grado *impar* llevan el signo de su *raiz*.

Las potencias de un *monomio* son otro *monomio*.

Corolario. Un *monomio fraccionario* se eleva á una potencia, *elevando sus dos términos*.

Asi $$\left(\frac{3ab^2}{4a^2b^3c}\right)^3 = \frac{3ab^2}{4a^2b^3c} \times \frac{3ab^2}{4a^2b^3c} \times \frac{3ab^2}{4a^2b^3c} = \frac{(3ab^2)^3}{(4a^2b^3c)^3} = \frac{27a^3b^6}{64a^6b^9c^3}.$$

34. Puesto que $(a^m)^n = a^{mn}$ y $(7a^2b^3c)^n = 7^n a^{2\times n} b^{3\times n} c^n$; y supuesto tambien que el coeficiente de la raíz de un monomio ha de ser tal que, elevado á la potencia de igual grado que el de la raiz que se intente extraer, produzca el coeficiente del monomio dado, y que los exponentes de las letras han de ser tales que, multiplicados por el índice del radical, restablezcan los que respectivamente tuvieren en el monomio dado; en esta atencion

Para extraer una raiz cualquiera de un monomio, se extrae la raiz de igual grado del coeficiente, y se dividen los exponentes de las letras por el índice del radical.

Así $\sqrt{16a^2b^4} = \pm 4ab^2$; $\sqrt[3]{8a^6b^3} = 2a^2b$; $\sqrt[3]{-64a^3b^3} = -4ab$.

En cuanto á signos, y atendiendo á lo establecido para la formacion de potencias, dirémos: *Si el índice del radical es de grado par*, la raiz tendrá el doble signo $\pm$; *si el índice es de grado impar*, la raiz tendrá el mismo que la potencia.

Cuando se proponga ú ocurra extraer una raiz *de grado par*, de una cantidad *negativa*, la operacion es imposible.

35. Y las raíces de grado par de cantidades negativas es lo que se llama EXPRESIONES IMAGINARIAS: no porque tengan nada comun con la facultad psicológica llamada *imaginacion*, sino porque no formando parte de la cantidad finita, su existencia es *ideal*, por más que entren en los cálculos, como verémos más adelante, para el mejor conocimiento de esta cantidad; llamándose en ÁLGEBRA, por oposicion, CANTIDADES REALES las que ni son ni se componen de EXPRESIONES IMAGINARIAS.

COROLARIO. *Para extraer una raiz cualquiera de un monomio fraccionario*, se extrae la raiz de sus dos términos.

$$\text{Así} \quad \sqrt[3]{\frac{27a^3b^6}{64a^6b^9c^3}} = \frac{\sqrt[3]{27a^3b^6}}{\sqrt[3]{64a^6b^9c^3}} = \frac{3ab^2}{4a^2b^3c}.$$

ESCOLIO. La raiz no será exacta: 1.° si el coeficiente del monomio no es potencia perfecta de un grado igual al que tenga el indice de la raiz; 2.° si uno ó más de los exponentes de las letras no fueren exactamente divisibles por el índice del radical.

Siempre que se verifiquen estas dos circunstancias, ó una sola, la operacion quedará indicada, salvas las transformaciones que, si es posible, se hace sufrir á esas expresiones llamadas *radicales*, segun tendrémos ocasion de exponer más adelante.

$\sqrt{12a^2}$; $\sqrt{16a^3}$; $\sqrt{15a^3c}$, por ejemplo, son llamados *radicales de segundo grado*. En el primero no es cuadrado perfecto el coeficiente; en el segundo no es divisible por el índice 2 el exponente de la letra, y en el tercero concurren ambas circunstancias.

ESCOLIO 2.° Las raíces todas de un monomio son otro monomio *racional*, *irracional* ó *imaginario*.

Cuadrado y ruiz cuadrada de los polinomios.

36. Darémos principio á este asunto procurando descubrir la *ley de formacion* del cuadrado de los polinomios.

Pero conocemos ya la ley de formacion del cuadrado $a^2+2ab+b^2$ del binomio $a+b$ (**11**, primer ejemplo).

Veamos si se verifica respecto de un trinomio cualquiera $a+b+c$.

Representemos la suma $a+b$ por s, y el trinomio propuesto se habrá transformado en el binomio $s+c$, de suerte que podrémos escribir $(a+b+c)^2=(s+c)^2=s^2+2sc+c^2$.

Y como $s^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, y $2sc=2c(a+b)=2ac+2bc$, sustituyendo convenientemente, tenemos

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2.$$

Lo que nos dice que: *el cuadrado de un trimonio se compone de la suma de los cuadrados de los tres términos, y de los dobles productos de estos términos multiplicados dos á dos.* Luego la ley se verifica para un trimonio.

Para asegurarnos ahora de que se verifica para todo polimonio, supongamos que ha tenido lugar para un polinomio de un número cualquiera de términos, y veamos si se verifica para el mismo polinomio aumentado en un término.

Sea el polinomio general $a+b+c+d+e+f+\ldots+z+u$ en el cual suponemos que se verifica la ley, y veamos si, añadiéndole el término t, se verifica tambien en el nuevo

$$a+b+c+d+e+f+\ldots\ldots+z+u+t.$$

Si representamos por s la suma de todos los términos del polinomio primitivo, el nuevo polinomio tomará la forma de $s+t$, ó bien $(s+t)^2=s^2+2st+t^2$; y poniendo por s lo que s está representando, $(s+t)^2=(a+b+c+\ldots+z+u)^2+2t(a+b+c+\ldots+z+u)+t^2$.

Interpretemos lo que hay en el segundo miembro de esta igualdad, que es donde está el cuadrado del nuevo polinomio cuya indicacion constituye el primer miembro. Pues bien, en el segundo miembro hay tres partes: la primera contiene (por la hipótesis) *los cuadrados de los términos del primer polinomio y los dobles productos de estos términos multiplicados dos á dos*: la segunda contiene *los dobles productos de los términos del primer polinomio por el nuevo término* t: la tercera parte, por último, *es el cuadrado de este término* t Luego la ley se verifica tambien para el nuevo polinomio. Pero ántes se había verificado para un trinomio: luego tambien se verificará para un polinomio de cuatro términos, y por consiguiente para uno de cinco y para uno de seis, etc. Luego *la ley es general.*

Esta ley puede enunciarse así: *el cuadrado de un polinomio se compone del cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo, más los dobles productos de cada uno de los dos primeros por el tercero, más el cuadrado del tercero, más los dobles productos de cada uno de los tres primeros por el cuarto, más el cuadrado del cuarto, y así sucesivamente.*

EJEMPLO: $(5a^2b - 4abc + 6bc^2 - 3a^2c)^2 = 25a^4b^2 - 40a^3b^2c + 16a^2b^2c + 60a^2b^2c^2 - 48ab^2c^3 + 36b^2c^4 - 30a^4bc + 24a^3bc^2 - 36a^2bc^3 + 9a^4c^2 =$
$25a^4b^2 - 40a^3b^2c + 76a^2b^2c^2 - 48ab^2c^3 + 36b^2c^4 - 30a^4bc + 24a^3bc^2 -$
$36a^2bc^3 + 9a^4c^2.$

37. Apoyados en la ley de formacion del cuadrado de un polinomio, veamos de deducir el modo de extraer la raíz cuadrada de un polinomio cualquiera. Sea por ejemplo

$$\sqrt{25a^4b^2-40a^3b^2c+76a^2b^2c^2-48ab^2c^3+36b^2c^4-30a^4bc+24a^3bc^2-36a^2bc^3+9a^4c^2}=5a^2b$$

	$-25a^4b^2+40a^3b^2c-16a^2b^2c^2.$	$10a^2b$	
1.er resto.	$60a^2b^2c^2-48ab^2c^3+36b^2c^4-30a^4bc+24a^3bc^2--36a^2bc^3+9a^4c^2$	$-4abc$ 2.º	
	$-60a^2b^2c^2+48ab^2c^3-36b^2c^4$	$10a^2b$	
2.º resto.	$-30a^4bc+24a^3bc^2-36a^2bc^3+9a^4c^2$	$6bc^2$ . . 3.º	de la raíz.
	$+30a^4bc-24a^3bc^2+36a^2bc^3-9a^4c^2$	$10a^2b$	
3.er resto	0	$-3a^2c$. 4.º	

Explicacion. Considerando al polinomio propuesto para que extraigamos su raíz cuadrada, y á cualquiera otro que esté en su caso, como el cuadrado de la raíz pedida, claro es que contiene (**36**), los cuadrados de los términos de ésta y los dobles productos de los mismos multiplicados dos á dos. Pero el término de la raíz en que una letra cualquiera tenga mayor exponente que en los demás, estará elevado al cuadrado en el polinomio propuesto, y con un exponente mayor tambien que en los demás de éste, por no haber admitido reduccion con ninguno (**15**, Obs. 3.ª). Luego si el polinomio propuesto es cuadrado perfecto, el término en que una letra cualquiera (la *a* por ejemplo) tenga mayor exponente, será á su vez cuadrado perfecto, y extrayendo su raíz cuadrada (**34**), estarémos seguros de obtener el primer término de la raíz pedida: en la práctica se evitan vacilaciones y complicaciones consiguientes, ordenando el polinomio propuesto respecto de las potencias descendentes de una letra cualquiera, y la raíz cuadrada del primer término será el primer término de la raíz pedida.

Una vez ordenado el polinomio respecto de la letra a, y extraida la raíz del primer término $25a^4b^2$, que nos ha dado el primer término $5a^2b$ de la raíz pedida, para obtener el segundo de ésta basta considerar que el doble producto del primero $5a^2b$ por el segundo de la raíz, da tambien para a un exponente mayor que el que tiene en las demas partes del cuadrado de la raíz que se busca. Luego el segundo término $-40a^3b^2c$ debe ser divisible por el duplo del primero hallado para la raíz, si el polinomio propuesto es cuadrado perfecto. Y hecha la division, se obtiene por cociente exacto $-4abc$ que es el segundo término de la raíz pedida.

Obtenidos los dos primeros términos de la raíz, se resta del polinomio propuesto el cuadrado del binomio que forman dichos términos; porque el cuadrado del segundo término de la raíz lleva con frecuencia la letra ordenatriz con un exponente igual al que tiene ésta en el doble producto del primero por el tercero; y hasta despues de hecha la sustraccion, no podemos asegurar que el primer término del resto sea el duplo del primero por el tercero.

El primer resto contiene las partes del cuadrado de la raíz que se busca ménos las tres que se han restado; y su primer término será ya el duplo del primero por el tercero. Luego, dividiendo el primer término del primer resto por el duplo del primero de la raíz, el cociente $6bc^2$ será el tercer término de la raíz que se busca.

Obtenidos los tres primeros términos de la raíz, se restan del primer resto el duplo del primero por el tercero, más el duplo del segundo por el tercero, más el cuadrado del tercero (sustraccion necesaria segun hemos dicho), y despues de hecha la sustraccion, podemos asegurar que el primer término del segundo resto sea el duplo del primero por el cuarto.

El segundo resto contiene las partes del cuadrado de la raíz que se busca, ménos las seis que van restadas entre las dos sustracciones verificadas; y su primer término será ya el duplo del primero por el cuarto. Luego, dividiendo el primer término del segundo resto por el duplo del primero de la raíz, el cociente $-3a^2c$ será el cuarto término de la raiz pedida.

Obtenidos los cuatro primeros términos de la raíz, se restan del segundo resto el duplo del primero por el cuarto, más el duplo del segundo por el cuarto, más el duplo del tercero por el cuarto, más el cuadrado del cuarto. Y siendo este resto igual á cero, queda averiguado que el polinomio dado es cuadrado perfecto, que su raíz es la reunion algebráica de los cuatro términos determinados, y que el procedimiento seguido es bueno.

Y habiendo de observarse el mismo procedimiento con las mismas consideraciones en otro caso igual, lo sintetizarémos para todos los casos bajo la forma de precepto, de la siguiente manera:

Para extraer la raíz cuadrada de un polinomio, se ordena éste con relacion á una letra. Se extrae la raíz cuadrada del primer término, y se tendrá el primer término de la raíz. Se divide el segundo término del polinomio por el duplo del primero de la raíz, y se tendrá el segundo término de ésta: el binomio que forman los dos términos primeros de la raíz se eleva al cuadrado, y éste se resta del polinomio.

Se divide el primer término del resto por el duplo del primero de la raíz, y se tendrá el tercer término de ésta: se forman el duplo del primero por el tercero, el duplo del segundo por el tercero y el cuadrado del tercero de la raíz, y estas tres partes se restan del primer resto.

Se divide el primer término del segundo resto por el duplo del primero de la raíz, y se tendrá el cuarto término de ésta: se forman el duplo del primero por el cuarto, duplo del segundo por el cuarto, duplo del tercero por el cuarto y el cuadrado del cuarto de la raíz, y estas cuatro partes se restan del segundo resto.

Se divide el primer término del tercer resto por el duplo del primero de la raíz, y se tendrá el quinto término de ésta: y así se continúa hasta que un resto sea cero, ó hasta que alguna division parcial no dé cociente exacto.

OBSERVACIONES.

38. 1.ª Si se hubiese ordenado el polinomio respecto de otra letra, de la c, por ejemplo, la raíz seria la misma, aunque ordenada respecto de la misma letra c.

2.ª El polinomio que sea cuadrado perfecto, tendrá (despues de ordenado) su primero y último término respectivamente cuadrados perfectos, y el segundo término así como el primero de cada resto serán divisibles por el duplo del primer término de la raíz. Pero si falta una siquiera de estas circunstancias, el polinomio no será cuadrado perfecto.

3.ª *Ningun binomio puede ser cuadrado perfecto*, puesto que el cuadrado de un monomio es otro monomio, y el cuadrado de un binomio es ya un trinomio.

4.ª Así como $\sqrt{a^2} = \pm a$, tambien es raíz del polinomio anterior el conjunto de los mismos cuatro términos que hemos determinado con los signos cambiados. Esto nos dice que, *la raíz cuadrada de un polinomio tiene dos valores:* en el ejemplo anterior, $5a^2b - 4abc + 6bc^2 - 3a^2c$ y $-5a^2b + 4abc - 6bc^2 + 3a^2c$.

5.ª En la práctica no hay necesidad de escribir el divisor (duplo del primer término de la raíz) tantas veces como divisiones parciales hayan de verificarse : basta escribirlo una vez y colocar á la derecha del primer cociente los demás que se obtengan : y áun se escriben en la raíz inmediatamente, sin que ántes ni despues se escriban en el cociente ; y tambien se puede hacer de memoria las sustracciones y reducciones sucesivas, si no se quiere escribir los respectivos sustraendos.

6.ª Hay expresiones que, no siendo cuadrados perfectos, admiten sin embargo cierta simplificacion, como $\sqrt{2a^2c + 4abc + 2b^2c}$. Pero habiendo de tratar más adelante de los radicales del grado general n, de los cuales son un caso particular los radicales de segundo grado, nos reservamos para entónces el tratar de todos ellos juntamente, á fin de no repetir los conceptos.

Escolio. Así como hemos deducido el precepto para la extraccion de la raíz cuadrada de los polinomios, de la ley de formacion de su cuadrado ; así tambien podríamos deducir de la ley de formacion del cubo ó de otra potencia cualquiera, la regla ó precepto para extraer la raíz cúbica ó de otro grado cualquiera de los polinomios.

Pero creemos más oportuno el dirigirnos desde luego á la explicacion de la regla general para extraer de los polinomios las raices de un grado cualquiera, deducida de la ley de formacion de sus potencias, que á su vez lo ha sido de la ley ó fórmula para obtener las potencias de un binomio, *sin pasar por las potencias inferiores;* ley ó fórmula debida á la prodigiosa inventiva de Newton, pero que, como otros muchos descubrimientos suyos, quedó sin demostracion; sin duda, porque los 85 años que vivió el descubridor de la ley universal de la atraccion fué brevísimo período para demostrar tanto principio y tantas ciencias como de su inteligencia brotaron.

Ilustres sucesores suyos han dado una demostracion de esa ley, fundada en la teoría de las permutaciones y combinaciones, demostracion que á continuacion presentamos.

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

39. Si tenemos un número cualquiera de letras ó cosas y formamos los diversos grupos ó colecciones que sea posible, tomándolas de dos en dos, de tres en tres, etc., y nos fijamos en las colecciones posibles tomando las letras, por ejemplo, de modo que en cada coleccion entren siempre tres, ó sea de tres en tres, observarémos que en estas colecciones de á tres letras hay dos clases distintas.

Constituyen la primera aquellas colecciones de á tres letras que se diferencian en alguna letra ó en el órden de su colocacion.

Constituyen la segunda las que se diferencian por lo ménos en una letra.

Las primeras se llaman *permutaciones*, y *combinaciones* las segundas. Y unas y otras se llaman juntamente *binarias*, *ternarias*, *cuaternarias*, etc., si están compuestas de dos, tres, cuatro, etc., letras.

Las *permutaciones binarias* de las letras a, b son. . . . ab, ba;
y *combinaciones binarias*, una sola. . . . . ab.
Las *permutaciones binarias* de las letras a, b, c son ab, ba, ac, ca, bc, cb;
y sus *combinaciones binarias*. . . . . ab, ac, bc.

Fórmulas de las permutaciones binarias, ternarias, etc., de varias letras.

40. *Las permutaciones binarias* de las diez primeras letras de nuestro abecedario, por ejemplo, se forman escribiendo al lado de cada letra las nueve restantes, una á una. Así, tendrémos

$ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, aj$
$ba, bc, bd, be, bf, bg, bh, bi, bj$
$ca, cb, cd, ce, cf, cg, ch, ci, cj$
$da, db, dc, de, df, dg, dh, di, dj$
$ea, eb, ec, ed, ef, eg, eh, ei, ej$
$fa, fb, fc, fd, fe, fg, fh, fi, fj$
$ga, gb, gc, gd, ge, gf, gh, gi, gj$
$ha, hb, hc, hd, he, hf, hg, hi, hj$
$ja, jb, jc, jd, je, jf, jg, jh, ji$

Si á partir de cada letra se obtienen 9 permutaciones, cuando el número de letras sea n se obtendrán $(n - 1)$ permutaciones por cada letra con que se empiece; y repitiendo esto tantas veces como letras haya, se tendrá el número total de permutaciones. Luego, siendo n

el número de letras, la fórmula del número de permutaciones binarias que con ellas pueden formarse, será..... $n\,(n-1)$.

41. *Las permutaciones ternarias* se forman escribiendo al lado de cada permutacion binaria de las mismas 10 letras (con las que hemos iniciado esta serie de consideraciones) las ocho restantes una á una.

Por manera que á partir de la primera permutacion binaria, tendrémos las siguientes ternarias *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *abg*, *abh*, *abi*, *abj*,
á partir de la segunda, *bac*. . . . . *baj*.
. . . .
jia, *jib*, *jic*, *jid*, *jie*, *jif*, *jig*, *jih*.

Si á partir de cada permutacion binaria se obtienen 8 ternarias, cuando el número de letras sea n, se obtendrán $(n-2)$ ternarias por cada binaria con que se empiece; y repitiendo esto tantas veces como permutaciones binarias haya para n letras, que es $n(n-1)$, la fórmula del número de permutaciones ternarias que se pueden formar con n letras será. . . . . $n(n-1)\,(n-2)$.

42. *Las permutaciones cuaternarias* se forman de las ternarias, á la manera que las ternarias se forman de las binarias; es decir, que así como para formar las permutaciones ternarias de un número cualquiera de letras, se escriben, al lado de cada permutacion binaria de las mismas letras, todas las demás una á una, así tambien para formar las permutaciones cuaternarias de un número cualquiera de letras, se escriben al lado de cada permutacion ternaria de las mismas letras, todas las demás una á una; y por consiguiente, insistiendo sobre el ejemplo de las 10 letras, si á partir de la primera ternaria *abc*, colocamos á su derecha las siete restantes una á una, obtenemos las 7 cuaternarias *abcd*, *abce*, *abcf*, *abcg*, *abch*, *abci*, *abcj*: y esto se repite tantas veces cuantas sean las permutaciones ternarias de las mismas 10 letras.

Cuando el número de letras sea n, se escriben tambien al lado de la primera permutacion ternaria las $(n-3)$ letras restantes, formando de este modo $(n-3)$ permutaciones cuaternarias. Y repitiendo esto tantas veces cuantas sea el número de permutaciones ternarias de n letras, que es $n(n-1)\,(n-2)$, se obtiene la fórmula del número de permutaciones cuaternarias que se pueden formar con n letras, igual á . . . . $n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$.

43. En general, *las permutaciones que con un número* n *de letras pueden formarse, entrando un número* m *de ellas en cada permutacion*, se obtienen escribiendo al lado de cada una de las permutaciones compuestas de $(m-1)$ letras, las que no entran en éstas, una á una.

Y la fórmula del número de dichas permutaciones, compuestas de m letras, se deduce de la manera de formarse las tres fórmulas precedentes; y por consiguiente, será igual á un producto de m factores, el primero de los cuales sea n, siendo el último la diferencia entre n y $(m-1)$, ó bien

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots\ldots\ldots(n-m+1).$$

Si en cada permutacion entran todas las n letras, esto es, si $m=n$, la fórmula anterior se cambia en esta

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\ldots 3\times2\times1.$$

Fórmulas de las combinaciones binarias, ternarias, etc., de varias letras.

11. *Las combinaciones binarias* que de un número cualquiera de letras pueden formarse, se obtienen escribiendo al lado de la primera letra cada una de las demás; al lado de la segunda letra cada una de las demás, excepto la primera; al lado de la tercera cada una de las demás, excepto las dos primeras; al lado de la cuarta cada una de las demás, excepto las tres primeras. Y así se continúa, de manera que al escribir la penúltima no hay más que la última para escribir á su lado, y allí termina la operacion.

Siguiendo el mismo ejemplo de las 10 letras, tendrémos:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
ab, & ac, & ad, & ae, & af, & ag, & ah, & ai, & aj. \\
 & bc, & bd, & be, & bf, & bg, & bh, & bi, & bj. \\
 & & cd, & ce, & cf, & cg, & ch, & ci, & cj. \\
 & & & de, & df, & dg, & dh, & di, & dj, \\
 & & & & ef, & eg, & eh, & ei, & ej. \\
 & & & & & fg, & fh, & fi, & fj, \\
 & & & & & & gh, & gi, & gj. \\
 & & & & & & & hi, & hj. \\
 & & & & & & & & ij.
\end{array}$$

Donde se ve que á la combinacion binaria *ab* corresponden dos permutaciones binarias *ab* y *ba*: á la combinacion *ac* corresponden las dos permutaciones binarias *ac* y *ca*; y así de todas las demás.

Luego si el número de permutaciones binarias de 10 letras es duplo del de combinaciones binarias de las mismas letras, recíprocamente, el número de combinaciones binarias será la mitad del de permutaciones binarias de las mismas letras.

Y por consiguiente, siendo $n(n-1)$ la fórmula de las permutaciones binarias de n letras, la de las combinaciones binarias será

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ ó bien. } \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

45. *Las combinaciones ternarias* que de un número cualquiera de letras pueden formarse, se obtienen escribiéndolas primeramente en línea horizontal ó vertical, y colocando despues al lado de cada letra las combinaciones binarias de las letras siguientes una á una. Al llegar á la antepenúltima se colocan á su derecha las dos letras siguientes, y allí acaba la operacion.

Las 10 letras primeras dan lugar á 120 combinaciones ternarias distribuidas del modo siguiente: 36 empezando por *a*, 28 empezando por *b*, 21 por *c*, 15 por *d*, 10 por *e*, 6 por *f*, 3 por *g*, y 1 por *h* seguida de *ij*.

36 *abc, abd, abe, abf, abg, abh, abi, abj, acd, ace, acf, acg, ach, aci, acj, ade, adf, adg, adh, adi, adj, aef, aeg, aeh, aei, aej, afg, afh, afi, afj, agh, agi, agj, ahi, ahj, aij.*
28 *bcd, bce, bcf, bcg, bch, bci, bcj, bde, bdf, bdg, bdh, bdi, bdj, bef, beg, beh, bei, bej, bfg, bfh, bfi, bfj, bgh, bgi, bgj, bhi, bhj, bij.*
21 *cde, cdf, cdg, cdh, cdi, cdj, cef, ceg, ceh, cei, cej, cfg, cfh, cfi, cfj, cgh, cgi, cgj, chi, chj, cij.*
15 *def, deg, deh, dei, dej, dfg, dfh, dfi, dfj, dgh, dgi, dgj, dhi, dhj, dij.*
10 *efg, efh, efi, efj, egh, egi, egj, ehi, ehj, eij.*
6 *fgh, fgi, fgj, fhi, fhj, fij.*
3 *ghi, ghj, gij.*
1 *hij.*

120

Pero á la combinacion ternaria *abc* corresponden las seis permutaciones ternarias *abc, acb, bac, bca, cab, cba*: á la combinacion *abd* corresponden las seis permutaciones ternarias *abd, adb, bad, bda, dab, dba*; y así de todas las demás.

Luego si el número de permutaciones ternarias de 10 letras es séxtuplo del de combinaciones ternarias, recíprocamente, el número de combinaciones ternarias será la sexta parte del de permutaciones ternarias de las mismas letras.

Y por consiguiente, siendo $n(n-1)(n-2)$ la fórmula de las permutaciones ternarias de n letras, la de las combinaciones ternarias será. . . . . $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}$.

46. En general, *las combinaciones que con un número* n *de letras pueden formarse, y tomando* m *en cada una;* se obtienen colocándolas préviamente en línea horizontal ó vertical, y escribiendo despues al lado de cada letra las combinaciones en que se toman $(m-1)$ de las letras siguientes una á una.

La fórmula tendrá por numerador el número de permutaciones de n letras tomadas de m en m, y por denominador el número de permutaciones que entra en cada combinacion, ó sea

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \ldots \ldots (n-m+1)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots \ldots m}$$

Si en cada combinacion entran todas las n letras, esto es, si $m = n$, la fórmula anterior se reduce á 1.

47. El número de combinaciones de n letras tomadas de m en m es igual al de tomarlas de $n-m$ en $n-m$.

En efecto: uno y otro número de combinaciones son

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots m} \text{ y } \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(m+1)}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots (n-m)}$$

y como al reducirlos á un comun denominador por la regla general, quedan reducidos tambien al mismo numerador, serán iguales.

Por eso, siendo $2 + 3 = 5$, el número de combinaciones binarias de 5 cosas es igual al número de combinaciones ternarias de las mismas 5 cosas.

Y en efecto: $\frac{5 . 4}{1 . 2} = \frac{5 . 4 . 3}{1 . 2 . 3}$, ó bien 10 combinaciones para ámbos órdenes.

El Sr. Fernández y Cardin demuestra esto mismo, dando á su explicacion ese tinte de sencillez y claridad tan abundante en sus obras, y que nos arrastra insensiblemente á copiarla á continuacion:

«Si de m números diferentes colocados en una urna se extraen n, éstos formarán una combinacion, y los $m-n$ que quedan en ella formarán otra distinta ; y como esto se repetiría tantas veces cuantas se ejecutase una extraccion de n números distintos, en uno ó más de los anteriores, resulta que para cada combinacion del órden n de m números se concibe otra del órden $m-n$, ó que el *número de combinaciones de* m *elementos, tomados de* n *en* n, *es igual al de* m *elementos tomados de* m — n *en* m — n.»

Fórmula del binomio.

48. Empecemos multiplicando varios binomios, cuyo primer término x es comun, teniendo los segundos términos diferentes á fin de evitar términos semejantes que reducir :

$$\begin{array}{l}
x+a \\
x+b \\
\hline
\end{array}$$

Primer producto.

$$\begin{array}{r|l}
x^2+a & x+ab \\
+b &
\end{array}$$

$$x+c$$

2.° . . . .

$$\begin{array}{r|r|l}
x^3+a & x^2+ab & x+abc \\
+b & +ac & \\
+c & +bc &
\end{array}$$

$$x+d$$

3.° . . . .

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x^4+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd \\
+b & +ac & +abd & \\
+c & +bc & +acd & \\
+d & +ad & +bcd & \\
 & +bd & & \\
 & +cd & &
\end{array}$$

$$x+f$$

4.°. . . . .

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
x^5+a & x^4+ab & x^3+abc & x^2+abcd & x+abcdf. \\
+b & +ac & +abd & +abcf & \\
+c & +bc & +acd & +abdf & \\
+d & +ad & +bcd & +acdf & \\
+f & +bd & +abf & +bcdf & \\
 & +cd & +acf & & \\
 & +af & +bcf & & \\
 & +bf & +adf & & \\
 & +cf & +bdf & & \\
 & +df & +cdf & &
\end{array}$$

En los cuatro productos que preceden se observa la ley siguiente :

1.° *El número de términos de cada producto* es uno más que el número de factores binomios.

2.° *El exponente de* x en el primer término de cada producto es igual al número de factores binomios multiplicados, y en los demas términos va disminuyendo sucesivamente en una unidad, hasta desaparecer en el último.

3.° *El coeficiente* del primer término es en todos los productos la unidad: el coeficiente del segundo es igual á la suma de los términos no comunes de los factores binomios: el del tercero es la suma de las combinaciones binarias de los mismos términos no comunes: el del cuarto es la suma de las combinaciones ternarias de los mismos: el del quinto, la de las cuaternarias; y así sucesivamente.

4.° *El último término* es igual al producto de los segundos términos (ó sea los no comunes) de todos los factores binomios.

Para asegurarnos de que esta ley de formacion es general, supongamos que se ha verificado ya para un número cualquiera n de factores, y veamos si se verifica introduciendo un nuevo factor.

Representando por A, B, C, D, etc. los coeficientes de los términos segundo, tercero, cuarto, quinto, etc., del producto supuesto, verificado para n factores, y por U el último término, dicho producto será de la forma siguiente: $(x+a)(x+b)\ldots$ hasta n factores $= x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx^{n-(m-1)} + Nx^{n-m} + \ldots\ldots + U$, donde Nx^{n-m} representa un término que tiene m términos delante, y $Mx^{n-(m-1)}$ el que le precede inmediatamente.

Y multiplicando este producto por el nuevo factor binomio $x+K$, tendrémos

$$
\begin{array}{l}
x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Mx^{n-(m-1)} + Nx^{n-m} + \ldots + U \\
x + K \\
\hline
\begin{array}{l|l|l|l|l}
x^{n+1} + A & x^n + B & x^{n-1} + C & x^{n-2} + \ldots\ldots + N & x^{n-m+1} \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad\;\; + K & \quad + AK & \quad\;\; + BK & \qquad\qquad\quad + MK & \qquad\quad + UK.
\end{array}
\end{array}
$$

En cuanto á los *exponentes de* x, evidentemente la ley es la misma.

Respecto de los coeficientes: el del primer término es la *unidad*.

El del segundo término es $A+K$, esto es, la suma de los términos no comunes, ó sea *la suma de los segundos términos de los* $(n+1)$ *factores binomios*.

El del tercero es $B+AK$. Pero B representa por la hipótesis la suma de las combinaciones binarias de los segundos términos de los n primeros factores: AK representa la suma de los productos de cada uno de los segundos términos de los n primeros binomios por el nuevo segundo término K; luego $B+AK$ significa la suma de las combinaciones binarias de los segundos términos de los $(n+1)$ factores binomios.

Y, en general, puesto que N representa la suma de las combi-

(Carlos Botello)

naciones de los segundos términos de los n primeros binomios, tomados de m en m, y que MK representa la suma de los productos de estos segundos términos, tomados de $(m - 1)$ en $(m - 1)$, y multiplicados por el nuevo segundo término K, se sigue que N + MK ó sea el coeficiente que en el polinomio del grado $(n + 1)$ tiene m términos delante, es igual á la suma de las combinaciones de los segundos términos de los $(n + 1)$ factores binomios, tomados de m en m.

El último término UK es el producto de los $(n + 1)$ segundos términos.

Luego, la ley de formacion, supuesta verdadera para el producto de un número n de factores binomios, lo es tambien para un número $(n + 1)$ de factores.

Luego *la ley es general.*

49. Si en la fórmula del producto $(x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ldots\ldots$ hasta n factores, se suponen iguales tambien los segundos términos é iguales á a, tendrémos

$$(x+a)(x+a)(x+a)\ldots \text{hasta } n \text{ veces} = x^n + \begin{array}{r|r|r|l} a & x^{n-1} + a^2 & x^{n-2} + a^3 & x^{n-3} + \ldots a^n. \\ +a & a^2 & +a^3 & \\ +a & a^2 & +a^3 & \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \end{array}$$

Pero el primer miembro de esta igualdad es la potencia del grado n del binomio $x + a$, ó bien $(x + a)^n$.

Examinemos el segundo miembro. En éste las potencias de x siguen la *ley general.*

En cuanto á los coeficientes: el del primer término es la *unidad.*

El del segundo es a repetido tantas veces cuantos sean los factores, ó bien na.

El del tercero es a^2 repetido tantas veces como sea el número de combinaciones binarias que se pueden formar con n letras, ó bien

$$\frac{n\,(n - 1)}{1\,.\,2}a^2.$$

El del cuarto es a^3 repetido tantas veces como sea el número de combinaciones ternarias que se pueden formar con n letras, ó bien

$$\frac{n\,(n - 1)\,(n - 2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^2;$$ y así sucesivamente.

Y, en general, si representamos por Nx^{n-m} el término que tiene un número m de términos delante, el coeficiente N que, en la hipótesis de que los segundos términos de los binomios eran diferentes, era igual á la suma de las combinaciones de los mismos, tomados de m en m; ahora que los segundos términos son iguales á a, N es igual á a^m multiplicada por el número de combinaciones de n letras, tomadas de m en m, ó bien $\frac{n(n-1)(n-2 \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} a^m$.

El último término es a, tomado por factor n veces, ó bien a^n.

Luego la fórmula de la potencia del grado n del binomio $x+a$, ó sea la *fórmula descubierta por Newton*, en virtud de la cual se halla una potencia cualquiera de un binomio *sin conocer las potencias inferiores*, es la siguiente:

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{n-3} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} a^m x^{n-m} + \ldots + a^n.$$

OBSERVACIONES.

1.ª Se llama término general á

$$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m} a^m x^{n-m},$$

porque haciendo $m = 2, 3$, etc., se obtienen los demás.

2.ª El número total de términos es $n+1$.

3.ª El exponente de x en un término cualquiera señala el número de términos que le siguen, y el de a el de los que le preceden, y juntos componen n en cada término: aumentando el de x y disminuyendo el de a, en una unidad, de un término al siguiente.

4.ª Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

5.ª La *fórmula* deducida para el binomio $x+a$ es aplicable al binomio $x-a$, sustituyendo $-a$ por $+a$; y los signos $+$ y $-$ resultarán alternativamente.

6.ª Si en la *fórmula* hacemos $x=1$ y $a=1$, resulta que la suma de los coeficientes es igual á 2^n.

7.ª El coeficiente de cada término se obtiene multiplicando el que tiene x en el inmediato anterior por su exponente y dividiendo el producto por el número de términos que preceden.

$$(x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5.$$
$$(x+a)^8 = x^8 + 8x^7a + 28x^6a^2 + 56x^5a^3 + 70x^4a^4 + 56x^3a^5 + 28x^2a^6 + 8xa^7 + a^8.$$

Hagamos últimamente aplicacion de la fórmula para *hallar directamente una potencia cualquiera de un binomio cualquiera.*

Por ejemplo : hallar la 4.ª potencia de $4ab^2c^3+3a^2b$. Segun la fórmula tendrémos

$$(4ab^2c^3+3a^2b)^4=(4ab^2c^3)^4+4(4ab^2c^3)^3\times 3a^2b+\frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}(4ab^2c^3)^2(3a^2b)^2$$

$$+\frac{4\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3}(4ab^2c^3)(3a^2b)^3+(3a^2b)^4,\quad \text{ó sea}$$

$$(4ab^2c^3+3a^2b)^4=256a^4b^8c^{12}+768a^5b^7c^9+864a^6b^6c^6+432a^7b^5c^3+81a^8b^4.$$

Aplicacion de la fórmula de Newton á la elevacion á potencias de los polinomios.

50. *Un polinomio se eleva á una potencia cualquiera*, considerándole como un binomio, cuya primera parte sea dos ó más términos del polinomio propuesto, y los demás sean la segunda: aplicándole despues la fórmula, y hallando los valores de cada término, la suma algebráica de estos valores será la potencia pedida.

Por ejemplo, hallar la sexta potencia del polinomio $a+b-c+d-f$.

Considerando como primera parte $(a+b-c)$, y $(d-f)$ la segunda, por la ley de Newton, tendrémos

$$(a+b-c+d-f)^6=\big((a+b-c)+(d-f)\big)^6=(a+b-c)^6+6(a+b-c)^5\times$$
$$(d-f)+15(a+b-c)^4\times(d-f)^2+20(a+b-c)^3\times(d-f)^3+15(a+b-c)^2$$
$$\times(d-f)^4+6(a+b+c)\times(d-f)^5+(d-f)^6.$$

Ahora se verifican las operaciones indicadas. Ninguna dificultad hay respecto de las potencias del binomio $d-f$. Ni tampoco la hay respecto de las del trinomio $a+b-c$; porque éste se considera á su vez como un binomio, cuya primera parte sea $a+b$, y $-c$ la segunda.

Extraccion de raices de los polinomios.

51. Si á la simple vista se conoce que en el polinomio propuesto está desarrollada la fórmula de las potencias de un binomio, y se nos ofrece extraer la raíz de un grado igual al de la potencia que se vea en el polinomio propuesto, en este caso la raíz pedida se compone de la suma algebráica de las raíces de los términos extremos, afectados ambos del doble signo $\pm$, si la raíz es de grado par, y afectados respectivamente del signo que tuvieren si de grado impar.

EJEMPLOS:

$$\sqrt[6]{x^6+6x^5a+15x^4a^2+20x^3a^3+15x^2a^4+6xa^5+a^6}=\pm x\pm a.$$

$$\sqrt[7]{a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7}=a+b.$$

$$\sqrt[4]{256a^4b^8c^{12}+768a^5b^7c^9+864a^6b^6c^6+432a^7b^5c^3+81a^8b^4}=\pm 4ab^2c^3\pm 3ab^2.$$

Pero estos son casos particulares.

52. Tratemos ahora el caso general.

Para ello, representemos por P un polinomio cualquiera ordenado segun las potencias descendentes de una letra cualquiera tambien, de x por ejemplo, y llamemos $r+$ etc., la raíz pedida, que supondrémos asimismo ordenada con relacion á la misma letra x.

Considerando á esta supuesta raíz como un binomio cuya primera parte sea r, y representando la segunda por la letra b, tendrémos:

$$P=(r+b)^n=r^n+nr^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}r^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}r^{n-3}b^3\ldots$$

Pero el primer término r^n tiene la letra con un exponente mayor que el que dicha letra tiene en los demas términos (**48** y **49**), y no admite reduccion con los demás (**25**, 3.ª Obs.). Luego si el polinomio propuesto P es potencia perfecta del grado n, su primer término es igual á r^n. Y recíprocamente, extrayendo la raíz del grado n del primer término de P, estarémos seguros de obtener el primer término de la raíz.

De iguales consideraciones se desprende tambien que, si P es potencia perfecta, su segundo término es igual al segundo $nr^{n-1}b$ de la fórmula. Luego si dividimos el segundo término de P por n veces la potencia $n-1$ del primer término de la raíz, obtendrémos el segundo término de ésta.

Formando la potencia del grado n del binomio compuesto por los dos primeros términos de la raíz, y restándola del polinomio propuesto, el resto indicará cómo hemos de hallar el término siguiente de la raíz.

En efecto: representando los términos de la raíz $z+$ etc. por c, tenemos $\big((r+b)+c\big)^n=(r+b)^n+n(r+b)^{n-1}c+\ldots..$

Restando del segundo miembro de esta igualdad, ó lo que es lo mismo, del polinomio cuya raíz buscamos, pero presentado segun la fórmula de Newton, restando, repetimos, $(r+b)^n$, el resto será

$$n(r+b)^{n-1}c + \ldots\ldots$$

Luego si dividimos el primer término de este resto por n veces la potencia $n-1$ de la parte de raíz hallada, el cociente será el término siguiente de la raíz pedida.

Y teniendo en cuenta que para dividir un polinomio por otro se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, concluirémos con la siguiente regla:

Para extraer la raíz del grado n *de un polinomio, se ordena primeramente respecto de una letra cualquiera. Se extrae la raíz del mismo grado de su primer término, y se tendrá el primero de la raíz. Los demas términos se determinan restando del polinomio propuesto la potencia del grado* n *de la raíz hallada, y dividiendo el primer término del resto por* n *veces la potencia* n — 1 *del primero de la raíz.*

Cálculo de las cantidades radicales.

53. Hemos visto (**35**, Esc.) y (**38**, 6.ª) que hay expresiones, como $\sqrt{12a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{2a^2c+4abc+2b^2c}$ á las cuales añadirémos hoy $\sqrt[n]{a+b}$, por ejemplo, llamándose *expresiones radicales de segundo grado las primeras, y del grado* n *la última*, todas ellas *cantidades radicales*, y tambien *cantidades irracionales.*

54. Siendo evidente que $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Si tenemos

$\sqrt[n]{abcd\ldots}$ por una parte, y $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{d}\ldots$ por otra, y elevamos á la potencia del grado n las dos expresiones, resulta

$$(\sqrt[n]{abcd\ldots})^n, \text{ y } (\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{d}\ldots\ldots)^n =$$

$$(\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n \times (\sqrt[n]{c})^n \times (\sqrt[n]{d})^n\ldots\ldots$$

Pero $(\sqrt[n]{abcd\ldots})^n = abcd$, y $(\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n \times (\sqrt[n]{c})^n \times$ $(\sqrt[n]{d})^n\ldots\ldots = abcd.$

Luego si las potencias del grado n de estas expresiones son iguales, tambien son iguales estas expresiones: quiere decir, que *la raíz del grado* n *de un producto de varios factores es igual al producto de las raices del mismo grado de dichos factores.*

55. Puesto que desde la multiplicacion sabemos que

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \ldots\ldots = a^{mn},$$

tambien se verifica que $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Y en efecto:

Supongamos $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = b$: elevando los dos miembros á la potencia n, tenemos $\sqrt[m]{a} = b^n$; y elevando los dos miembros á la potencia m, resulta $a = b^{mn}$; y extrayendo la raíz mn de estos dos miembros, tendrémos $\sqrt[mn]{a} = b$. Pero dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí: luego $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, por ser ambas respectivamente iguales á b en la primera y cuarta igualdad.

Corolario. Y como $(a^m)^n$ y $(a^n)^m$, ambos dan por resultado a^{mn}, se deduce que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

Así,
$$\sqrt[6]{64} = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = 2.$$

56. Tambien se verifica que $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$. En efecto: puesto que $\sqrt[n]{a^n} = a$; se sigue que $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[mn]{a^n}$.

57. Fundados en el principio (**54**); si la parte subradical puede descomponerse en un producto de varios factores, y alguno de ellos tiene raíz exacta del grado que indique su índice, *se transforma una cantidad radical extrayendo dicha raiz y escribiendo el resultado por coeficiente del radical.*

Ejemplos: $\sqrt{2a^2c + 4abc + 2b^2c} = \sqrt{(a^2 + 2ab + b^2) \times 2c} =$

$$\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)} \times \sqrt{2c} = (a+b) \times \sqrt{2c}.$$

$$\sqrt[3]{125a^2} = \sqrt[3]{125 \times a^2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{a^2} = 5 \times \sqrt[3]{a^2}.$$

Y recíprocamente, *el coeficiente de la cantidad radical puede ser introducido como factor debajo del signo radical, con tal que pase elevado á la potencia de grado igual al del índice.*

EJEMPLOS : $5\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{125 \times a^2} = \sqrt[3]{125a^2}.$

$$2ac^2\sqrt[6]{3ab} = \sqrt[6]{64a^6c^{12}} \times \sqrt[6]{3ab} = \sqrt[6]{64a^6c^{12} \times 3ab} = \sqrt[6]{192a^7bc^{12}}.$$

Una cantidad irracional se llama *racional* respecto de su coeficiente.

Un polinomio es *racional* respecto de una letra, cuando sus términos son racionales relativamente á ella.

Fundados en el principio (**55**), se *simplifica una cantidad radical dividiendo el índice por uno de sus divisores, y extrayendo de la cantidad subradical la raiz del grado que indique dicho divisor.*

EJEMPLOS : $\sqrt[6]{16a^4} = \sqrt[3]{\sqrt{16a^4}} = \sqrt[3]{4a^2}; \quad \sqrt[2n]{\frac{1}{36a^6}} = \sqrt[n]{\frac{1}{6a^3}}$

Y fundados en el principio (**56**), tiene lugar la importante transformacion de *reducir dos ó más radicales de diferentes índices á otros de un mismo índice;* y esto se verifica *multiplicando el índice de cada radical por el producto de los demas índices, y elevando la cantidad subradical á la potencia del grado que indique dicho producto.*

Así, $\sqrt[m]{a}, \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n}, \sqrt[mn]{b^m}; \; \sqrt[3]{ab}, \sqrt{ab^2} = \sqrt[6]{a^2b^2}, \sqrt[6]{a^3b^6}.$

Las expresiones radicales de un mismo índice se llaman *homogéneas.*

Si los índices tienen factores comunes, la operacion se abrevia por la aplicacion del m. m. c. de ellos, segun se hizo en la reduccion de los quebrados á un comun denominador.

Asi, $\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[4]{c}, \sqrt[6]{h}, \sqrt[8]{f} = \sqrt[24]{a^{12}}, \sqrt[24]{b^8}, \sqrt[24]{c^6}, \sqrt[24]{h^4}, \sqrt[24]{f^3}.$

58. Se llaman *cantidades radicales semejantes* las que tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical, pero distintos coeficientes, como $7\sqrt[n]{a}$, $126\sqrt[n]{a}$.

Hay radicales que á primera vista no parecen *semejantes*, y vemos que lo son, sin embargo, despues de sufrir alguna de las transformaciones precedentes.

EJEMPLOS: $3\sqrt{4a^2b},\ c\sqrt{16b^3} = 6a\sqrt{b},\ 4bc\sqrt{b}$.

$$8b\sqrt[6]{4a^2},\ \sqrt[3]{2a} = 8b\sqrt[3]{2a},\ \sqrt[3]{2a}.$$

59. *Adicion de las cantidades radicales.* Las cantidades radicales, monomias ó polinomias, *se suman escribiendo los sumandos los unos á continuacion de los otros con los mismos signos que tengan.*

Así, la suma de $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ y $-\sqrt[3]{a-1}$ es $\sqrt[n]{a}+\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt[3]{a-1}$.

Pero si se trata de *radicales semejantes*, se reducen á uno solo sumando algebráicamente sus coeficientes y multiplicando el resultado por la parte irracional comun.

Así, $a\sqrt[n]{b}+2a\sqrt[n]{b}-4\sqrt[n]{b} = (3a-4)\sqrt[n]{b}$.

COROLARIO. Se llaman cantidades radicales *conjugadas* aquellas que tienen la forma $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$, diferenciándose únicamente en el signo que antecede al radical. Pues bien, la suma de dos cantidades radicales *conjugadas* es una cantidad racional.

En efecto:

$$(a+\sqrt[n]{b})+(a-\sqrt[n]{b}) = 2a.$$

60. *Sustraccion.* Las cantidades radicales, monomias ó polinomias, se restan unas de otras *escribiendo el minuendo, y á su continuacion el sustraendo con signos contrarios, reduciendo los semejantes.*

$$\text{Así, } (7a\sqrt[n]{b}+a\sqrt{c})-(7a\sqrt[n]{b}-3a\sqrt{c}+\sqrt[3]{h}) =$$

$$7a\sqrt[n]{b}+a\sqrt{c}-7a\sqrt[n]{b}+3a\sqrt{c}-\sqrt[3]{h} = 4a\sqrt{c}-\sqrt[3]{h}.$$

COROLARIO. La diferencia de dos cantidades radicales *conjugadas* es una cantidad irracional.

En efecto:

$$(a+\sqrt[n]{b})-(a-\sqrt[n]{b})=2\sqrt[n]{b}.$$

Considerando al radical sin coeficiente con la unidad por coeficiente.

61. *Multiplicacion.* Las cantidades radicales monomias de índice comun se multiplican *multiplicando entre sí primeramente los coeficientes y despues las cantidades subradicales; poniendo el primer producto por coeficiente, y el segundo debajo de un radical de un grado igual al índice comun.*

Así, $(a+b)\sqrt[n]{(a+b)^2}\times(a-b)\sqrt[n]{a+b}=(a^2-b^2)\sqrt[n]{(a+b)^3}$.

Si los radicales no tienen un índice comun, se reducen á él, y despues se multiplican como acabamos de expresar.

Si las cantidades radicales son polinomios, se les aplica para su multiplicacion las reglas establecidas para las cantidades racionales (**14**).

Corolario. El producto de dos cantidades radicales *conjugadas* de segundo grado, es una cantidad racional.

En efecto:

$$(a+\sqrt{b})\times(a-\sqrt{b}=a^2-b.$$

62. *Division.* Las cantidades radicales monomias, de índice comun, se dividen una por otra *dividiendo respectivamente el coeficiente y la cantidad subradical del dividendo por el coeficiente y cantidad subradical del divisor: poniendo el primer cociente por coeficiente y el segundo debajo de un radical de un grado igual al índice comun.*

Así, $(a^2-b^2)\sqrt{(a+b)^3} : (a+b)\sqrt{(a+b)^2}=(a-b)\sqrt{a+b}.$

Si los radicales no tienen un índice comun, se reducen á él, y despues se les aplica la regla anterior.

Si las cantidades radicales son polinomios se observa con ellos el procedimiento prescrito para los polinomios racionales (**18**).

Corolario El cociente de una cantidad radical *conjugada* por otra es una cantidad irracional.

En efecto : $\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\frac{(a+\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}=\frac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}=$

$$\frac{a^2+b}{a^2-b}+\frac{2a}{a^2-b}\times\sqrt{b}.$$

63. *Elevacion á potencias.* Las cantidades radicales monomias se elevan á una potencia cualquiera *elevando el coeficiente y la parte subradical, quedando el índice el mismo.*

En efecto :

$$(a\sqrt[5]{b})^n=a\sqrt[5]{b}\times a\sqrt[5]{b}\times a\sqrt[5]{b}\times a\sqrt[5]{b}\times\ldots=a^n\sqrt[5]{b^n}.$$

Si el índice del radical es divisible por el exponente de la potencia, *se eleva el coeficiente y se divide el índice por el exponente*, quedando la cantidad subradical la misma.

Si la cantidad radical es polinomia, *se eleva al cuadrado siguiendo la regla* (**36**).

64. *Extraccion de raíces.* Para extraer la raíz de un grado cualquiera de una cantidad radical monomia, *se extrae la misma raíz del coeficiente y de la parte subradical*, dejando el índice el mismo.

En caso de que sea impracticable la regla anterior, se multiplican los dos índices entre sí, elevando el coeficiente á la potencia que indique el índice del radical, dejando la parte subradical la misma.

Si la cantidad radical es polinomia, se extrae la raíz cuadrada por el medio explicado para las cantidades racionales.

Exponente 0, exponentes negativos, y exponentes fraccionarios positivos ó negativos.

65. El orígen del exponente 0 es el caso de la division de un monomio por otro monomio en que hay una letra comun con exponentes iguales en el dividendo y divisor.

En efecto : al dividir $28a^3b^2c$ por $7abc$, por ejemplo, hemos aceptado como buen cociente á $4a^2b$, puesto que, multiplicado por el divisor $7abc$, produce el dividendo $28a^3b^2c$.

Pero la letra c no aparece en dicho cociente. Y como hay ocasiones en que conviene conservar la huella, por decirlo así, de las letras que de ese modo desaparecen, se cumple hasta para las letras comunes de exponentes iguales la regla establecida (**16**), y se conserva con el exponente 0.

Volviendo á hacer la division, tendrémos

$$\frac{28a^3b^2c}{7abc}=4a^{3-1}b^{2-1}c^{1-1}=4a^2b^1c^0$$

donde aparece ya la c con el exponente 0.

Y nada implica la presencia de la letra c con el exponente 0, porque equivale á la unidad como factor; y, en general, $a^0=1$.

Efectivamente: $\frac{a^m}{a^m}=a^0$, segun la regla de la division para exponentes iguales de letra comun.

Pero $\frac{a^m}{a^m}=1$, porque 1 es el cociente de toda cantidad partida por sí misma.

Y como dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, a^0 y 1, que son respectivamente iguales á $\frac{a^m}{a^m}$, serán iguales entre sí, esto es, $a^0=1$.

66. Generalicemos las ideas, y supongamos que se trata de dividir a^m por a^n, ó bien $\frac{a^m}{a^n}$, cuyo cociente es a^{m-n}, segun la regla sabida.

Aquí pueden ocurrir tres casos, segun que n sea menor, igual ó mayor que m.

1.° Si $n<m$, el exponente de a en el cociente será *entero* y *positivo*, como los considerados hasta ahora.

2.° Si $n=m$, el exponente de a en el cociente es 0, cuya interpretacion acabamos de dar.

3.° Pero si $n>m$, el exponente de a en el cociente es *negativo*.

Ya conocemos el orígen del *exponente* negativo, que, como acabamos de indicar, procede de la division de letras iguales, teniendo la que está en el divisor mayor exponente que la que está en el dividendo.

En relacion con la idea que habiamos dado de los exponentes (**2**, 7.°), el exponente negativo carece de sentido.

Estudiemos, no obstante, el partido que el Álgebra saca de él.

Si en la hipótesis de que $n>m$, representamos por d el exceso de n sobre m, ó sea $n=m+d$, tendrémos

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}=a^{m-(m+d)}=a^{m-m-d}=a^{-d}.$$

Pero $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a^m}{a^{m+d}} = \dfrac{a^m}{a^m \times a^d} = \dfrac{a^m \times 1}{a^m \times a^d} = \dfrac{1}{a^d}$.

Y como dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, a^{-d} y $\dfrac{1}{a^d}$, que son respectivamente iguales á $\dfrac{a^m}{a^n}$, son iguales entre sí, esto es, $a^{-d} = \dfrac{1}{a^d}$.

Lo que nos dice que: *toda cantidad con exponente negativo es igual al cociente de la unidad por la misma cantidad con el mismo exponente, pero positivo.*

67. De lo expuesto se deducen las consecuencias siguientes:

1.ª *Toda cantidad con exponente positivo es igual al cociente de la unidad por la misma cantidad con el mismo exponente, pero negativo.*

En efecto: si multiplicamos los dos miembros de la igualdad $a^{-d} = \dfrac{1}{a^d}$ por el denominador a^d, tendrémos $a^{-d} \times a^d = 1$, y dividiendo los dos miembros de ésta por a^{-d}, resulta por último $a^d = \dfrac{1}{a^{-d}}$.

2.ª *Todo monomio fraccionario puede transformarse en otro de forma entera con exponente negativo;* puesto que $\dfrac{1}{a^d} = a^{-d}$.

3.ª Y recíprocamente, *todo monomio con exponente negativo puede transformarse en otro de forma fraccionaria con exponente positivo;* puesto que $a^{-d} = \dfrac{1}{a^d}$.

4.ª *Todo factor del numerador de un quebrado se puede trasladar al denominador, y al contrario,* mudando el signo á su exponente.

Porque $\dfrac{a^2b^2}{c^3d} = \dfrac{a^2b^2}{c^3} \times \dfrac{1}{d} = \dfrac{a^2b^2}{c^3} \times d^{-1} = \dfrac{a^2b^2d^{-1}}{c^3}$.

y porque $\dfrac{a^2b^2}{c^3d} = \dfrac{a^2}{c^3d} \times b^2 = \dfrac{a^2}{c^3d} \times \dfrac{1}{b^{-2}} = \dfrac{a^2}{b^{-2}c^3d}$,

y por consiguiente tambien se verifica: $\dfrac{a^2b^2}{c^3d} = a^2b^2c^{-3}d^{-1}$, y la recíproca.

5.ª Hay que ampliar la idea de *términos semejantes* (7). Ahora son tambien, por ejemplo, términos semejantes $5a^2b^{-3} - 3a^2b^{-3} = 2a^2b^{-3}$.

68. *Las cantidades algebráicas con exponentes negativos*

Se suman: escribiendo las unas á continuacion de las otras con los signos que tengan, y reduciendo despues términos semejantes;

Se restan: escribiendo el minuendo, y á su continuacion el sustraendo con signos contrarios, reduciendo despues términos semejantes;

Se multiplican: escribiendo las letras diferentes las unas al lado de las otras en el producto, y en cuanto á las letras iguales, basta escribir una sola con un exponente igual á la suma algebráica de los exponeates de los factores, ora sean ambos negativos, ora sea uno positivo y otro negativo, siguiendo la regla general respecto de signos y coeficientes;

Se dividen: indicando el cociente, si las letras son desiguales, escribiendo en el numerador las del dividendo, y en el denominador las del divisor. Pero si las letras son iguales, se verifica el cociente, escribiendo una sola con un exponente igual á la diferencia algebráica del exponente del dividendo ménos el del divisor, ya sean ambos negativos, ya sea uno positivo y otro negativo;

Se elevan á potencias: multiplicando el exponente de la cantidad por el de la potencia, siguiendo la regla de los signos (**12**), pues tambien aquí puede suceder que el exponente de la cantidad y el de la potencia sean ambos negativos, ó bien uno positivo y otro negativo;

Sufren la extraccion de sus raíces: dividiendo el exponente de la cantidad por el índice de la raíz.

Escolio. Esta extraccion de raíces ni se intenta siquiera, si el índice de la raíz no es divisor del exponente de la cantidad.

Escolio 2.° Los exponentes negativos considerados hasta aquí son números enteros.

69. Al dar la regla para extraer raíces de un grado cualquiera de los monomios, hemos dicho, entre otras cosas, *que se dividen los exponentes de las letras por el índice del radical* (**34**).

Miéntras no hemos considerado otros casos que aquellos en los cuales el índice del radical era divisor de los exponentes de las letras, no hemos tampoco conocido otros exponentes que números enteros y positivos. Pero, si queremos que esa regla se cumpla, aunque el índice no sea divisor del exponente de la letra, como en el caso de $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$, por ejemplo, nos encontramos con una nueva forma de exponente, el *exponente fraccionario*. Que además de fraccionario podría ser negativo, si la cantidad subradical tuviese exponente negativo, como en el siguiente ejemplo $\sqrt[7]{a^{-3}} = a^{-\frac{3}{7}}$.

Y en general $\sqrt[n]{a^{\pm m}} = a^{\pm \frac{m}{n}}$

Donde: si n es divisor de m la raíz será exacta;

Si $n = m$ la raíz será $a^{\pm 1}$;

Si por último n no es divisor de m, se obtiene el exponente fraccionario, positivo ó negativo, de la forma $a^{\pm \frac{m}{n}}$.

Ya conocemos su presencia y su orígen. Y el ÁLGEBRA saca partido de él para simplificar el cálculo de las cantidades irracionales, presentándolas con exponentes fraccionarios, positivos ó negativos.

De suerte que, *toda cantidad con exponente fraccionario, positivo ó negativo, expresa la raíz del grado, que indica su denominador, de la misma cantidad elevada á la potencia que diga el numerador.*

$$\text{Así} \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\,;\; a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{3}}\, c^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{a} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[4]{c^{-1}}$$

COROLARIO. *Todo monomio irracional puede presentarse como racional, y al contrario*, sirviéndonos del mismo ejemplo $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Las expresiones a^o, a^{-d}, $a^{\frac{m}{n}}$ y $a^{-\frac{m}{n}}$ son respectivamente equivalentes á estas otras 1, $\frac{1}{a^{+d}}$, $\sqrt[n]{a^m}$ y $\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$, y pueden tomarse unas por otras, segun las circunstancias aconsejen.

70. Las convenciones establecidas en ÁLGEBRA para las seis operaciones fundamentales, son generales é independientes de la forma de los datos.

Por consiguiente, *las cantidades algebráicas con exponentes fraccionarios*, positivos ó negativos, *se suman* escribiendo unas á continuacion de otras con los signos que tuvieren;

Se restan unas de otras escribiendo el minuendo, y á su continuacion el sustraendo con signos contrarios;

Se multiplican las letras comunes ó iguales, sumando algebráicamente los exponentes que tengan, y las desiguales se escriben unas á continuacion de otras con sus respectivos exponentes;

Se dividen una por otra, poniendo á las letras iguales en el cociente un exponente que sea la diferencia algebráica del exponente de la del dividendo, ménos el de la del divisor; dejando la division indicada si las letras son desiguales;

Se elevan á una potencia cualquiera multiplicando el exponente de la cantidad por el de la potencia;

Y *sufren la extraccion de raíces*, dividiendo el exponente de la cantidad por el índice de la raíz.

ESCOLIO. Los exponentes que por la índole misma de la elevacion á potencias fueron y debieron ser en un principio enteros y positivos, los hemos considerado despues enteros y negativos, y últimamente fraccionarios positivos y negativos sin alterar en nada las reglas del cálculo. Y es tal el carácter de generalizacion del ÁLGEBRA que estas reglas son aplicables á los exponentes *inconmensurables*, porque lo son á las fracciones que los representan y que se aproximan cuanto se quiera, y *por extension*, á los exponentes *imaginarios*.

De las expresiones imaginarias.

71. Ya hemos manifestado el concepto que tenemos de las *expresiones imaginarias* (**35**).

Las *expresiones imaginarias* pueden ser de 2.°, 4.°, 6.°, etc., grado: nosotros, sin embargo, sólo nos ocuparémos en las de 2.°, á cuya forma pueden reducirse las demás.

Y esta *forma* es unas veces la de un producto indicado de una parte real por la imaginaria $\sqrt{-1}$, y otras la de la raíz cuadrada de una cantidad negativa.

La transformacion de una en otra es tan fácil, como verémos, recordando lo sentado en el número **54** y siguientes.

En efecto:

$$a\times\sqrt{-1}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{-1}=\sqrt{+a^2\times-1}=\sqrt{-a^2}.$$

$$\sqrt{-16a^2}=\sqrt{16a^2\times-1}=\sqrt{16a^2}\times\sqrt{-1}=4a\times\sqrt{-1}.$$

Estos ejemplos, aunque sencillos, son, no obstante, suficientes para avisarnos que el cálculo de las *expresiones imaginarias* está comprendido, sabiendo el que dejamos explicado relativo á las cantidades radicales, que llamarémos por oposicion *reales*, combinadas con $\sqrt{-1}$, ó sea con la raíz cuadrada imaginaria de la unidad.

72. ADICION. *Las expresiones imaginarias, sean monomias ó polinomias, se suman* escribiendo los sumandos los unos á continuacion de los otros, con los signos que tengan, haciendo despues la reduccion de términos semejantes, si los hay.

La suma de una cantidad real y una expresion imaginaria, es siempre *imaginaria*; porque si tuviésemos $a+\sqrt{-1}=b$, y restásémos a de los dos miembros de la igualdad, tendríamos $\sqrt{-1}=b-a$; es decir, que la diferencia de dos cantidades reales es igual á una expresion imaginaria, lo que es un absurdo.

Y puesto que $(a+\sqrt{-b})+(a-\sqrt{-b})=2a$, dirémos:

La suma de dos expresiones imaginarias *conjugadas* es una cantidad real.

73. SUSTRACCION. *Las expresiones imaginarias, sean monomias ó polinomias, se restan unas de otras* escribiendo el minuendo, y á su continuacion el sustraendo con signos contrarios, haciendo despues la reduccion de términos semejantes, si los hay.

La diferencia de una cantidad real y una expresion imaginaria es siempre *imaginaria*; porque si tuviésemos $\sqrt{-1}-a=b$ y restásemos algebráicamente $-a$ de los dos miembros de la igualdad, que es lo mismo que agregarles $+a$, tendríamos $\sqrt{-1}=a+b$; es decir, que la suma de dos cantidades reales es igual á una expresion imaginaria, lo que es un absurdo.

Y puesto que $(a+\sqrt{-b})-(a-\sqrt{-b})=2\sqrt{-b}$, dirémos:

La diferencia de dos expresiones imaginarias *conjugadas* es una expresion imaginaria.

74. MULTIPLICACION. *Las expresiones imaginarias monomias se multiplican*, multiplicando el producto de sus factores reales por la unidad negativa.

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{-1})^2$$
$$=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}.$$

Advirtiendo que sólo hemos considerado los signos superiores, ó positivos, del doble signo $\pm$ que tienen los radicales reales. En cuanto á las expresiones imaginarias, su producto había de ser único é igual á -1, porque se trataba del cuadrado de $\sqrt{-1}$.

Volviendo sobre nuestro asunto, *si las expresiones imaginarias que se han de multiplicar, son polinomias*, se siguen las reglas establecidas para las cantidades reales.

Carlos Botello

Y puesto que $(a+\sqrt{-b})\times(a-\sqrt{-b})=a^2+b$, dirémos:

El producto de dos expresiones imaginarias *conjugadas* es una cantidad real.

75. Division. *Una expresion imaginaria monomia se divide por otra,* dividiendo el factor real de la primera por el de la segunda.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\times\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Si los datos son expresiones imaginarias polinomias, se siguen las reglas establecidas para las cantidades reales.

Y puesto que $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}=\dfrac{(a+\sqrt{-b})\times(a+\sqrt{-b})}{(a-\sqrt{-b})\times(a+\sqrt{-b})}=\dfrac{a^2+2a\sqrt{-b}-b}{a^2+b}$

$$=\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a}{a^2-b}\times\sqrt{-b},$$ dirémos:

El cociente de una imaginaria *conjugada* por otra es imaginario.

76. Elevacion á potencias. *Una expresion imaginaria monomia se eleva á una potencia cualquiera* elevando la parte real y multiplicando el resultado por la potencia del mismo grado de $\sqrt{-1}$.

$$(\sqrt{-a})^n=(\sqrt{a}\times\sqrt{-1})^n=(\sqrt{a})^n\times(\sqrt{-1})^n.$$

Las potencias sucesivas de $\sqrt{-1}$, poniendo el exponente 1 por analogía á la primera expresion, son las siguientes:

$$\begin{array}{lllll}
(\sqrt{-1})^1= & \ldots\ldots & & & \sqrt{-1}.\\
(\sqrt{-1})^2= & \ldots\ldots & & & -1.\\
(\sqrt{-1})^3= & (\sqrt{-1})^2\times\sqrt{-1} & =-1\times & -\sqrt{-1}= & -\sqrt{-1}.\\
(\sqrt{-1})^4= & (\sqrt{-1})^2\times(\sqrt{-1})^2 & =-1\times & -1= & +1.\\
(\sqrt{-1})^5= & (\sqrt{-1})^4\times\sqrt{-1} & =+1\times & \sqrt{-1}= & \sqrt{-1}.\\
(\sqrt{-1})^6= & (\sqrt{-1})^4\times(\sqrt{-1})^2 & =+1\times & -1= & -1.\\
(\sqrt{-1})^7= & (\sqrt{-1})^4\times(\sqrt{-1})^3 & =+1\times & -\sqrt{-1}= & -\sqrt{-1}.\\
(\sqrt{-1})^8= & (\sqrt{-1})^4\times(\sqrt{-1})^4 & =+1\times & +1= & +1.\\
(\sqrt{-1})^9= & (\sqrt{-1})^8\times\sqrt{-1} & =+1\times & \sqrt{-1}= & \sqrt{-1}.
\end{array}$$

Y así sucesivamente irían repitiéndose las cuatro expresiones primeras $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$ y $+1$.

Si la expresion imaginaria es polinomia, se eleva al cuadrado siguiendo las reglas dadas para las cantidades reales.

77. EXTRACCION DE RAÍCES. *La raíz de cualquier grado de una expresion imaginaria monomia se extrae*, extrayendo la de su parte real y multiplicando el resultado por la raíz del mismo grado de $\sqrt{-1}$.

$$\sqrt[n]{\sqrt{-a}}=\sqrt[n]{\sqrt{a}\times\sqrt{-1}}=\sqrt[n]{\sqrt{a}}\times\sqrt[n]{\sqrt{-1}}.$$

Si, por último, la expresion imaginaria es polinomia, se extrae su raíz cuadrada siguiendo las reglas dadas para las cantidades reales.

ESCOLIO 1.° Las imaginarias simples, como $a\sqrt{-1}$ y $b\sqrt{-1}$, dan siempre resultados *imaginarios* en la adicion, sustraccion y extraccion de raíces; *reales* en la multiplicacion y division, y *reales* ó *imaginarios* en la elevacion á potencias.

Las imaginarias unidas á una cantidad real, como $a+b\sqrt{-1}$ y $c+d\sqrt{-1}$, dan resultados de la misma forma, en general, en la adicion, sustraccion, multiplicacion y division.

ESCOLIO 2.° Puesto que $a=a\times 1$, tambien será $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{1}$.

El valor real y positivo de $\sqrt[n]{a}$ es lo que se llama *valor absoluto* del radical; y se llama *valores algebráicos* á las expresiones que se obtienen multiplicando el *valor absoluto* por las distintas raíces reales ó imaginarias de la unidad.

ESCOLIO 3.° Entendiendo por *módulo* de una expresion imaginaria, el valor absoluto de la raíz cuadrada de su producto por la imaginaria conjugada, es evidente que, *si el módulo es* 0, *la expresion imaginaria tambien lo será, y recíprocamente.*

Si un producto de factores imaginarios es 0, uno por lo ménos de dichos factores será 0.

Sea la última línea de esta teoría un recuerdo de gratitud al señor Rey y Heredia, que derramó sobre ella la luz inextinguible de su talento.

CAPITULO III.

Varias cuestiones necesarias al conocimiento del ÁLGEBRA.

REDUCCION DE QUEBRADOS DECIMALES A ORDINARIOS.

78. En este capítulo vamos á ocuparnos en ciertas cuestiones que de propósito no hemos tratado en ARITMÉTICA, porque tenemos la opinion de que aquellas que, por ser más elevadas y tener cierto carácter de generalidad, exigen la notacion algebráica, deben ser tratadas aquí, como si dijéramos, en la Aritmética superior.

Allí nos ocupamos en la reduccion de los quebrados ordinarios á decimales.

Aquí vamos á encabezar este capítulo, tratando de la reduccion de quebrados decimales á ordinarios.

Y como los quebrados decimales pueden ser de un número limitado de cifras, ó de un número ilimitado de cifras, por eso esta cuestion consta de dos partes:

79. 1.ª *Hallar el quebrado ordinario equivalente á un quebrado decimal de un número limitado de cifras.*

Esta cuestion es tan sencilla que basta su enunciado para comprenderla.

En efecto, ¿de qué se trata? De escribir con denominador un quebrado dado sin denominador. Y este denominador, ¿qué va á indicar? La unidad fraccionaria á que se refiera el nuevo quebrado. Y ¿cómo expresa eso el quebrado dado sin denominador? Por el número de lugares que ocupa á la derecha de la coma, expresa si son décimas, centésimas, milésimas, etc.

Pero la décima, centésima, milésima, etc., se expresa por $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc.

Luego, *el numerador del quebrado ordinario equivalente á otro decimal, de un número limitado de cifras, será igual á éste, sin coma, y como si fuere un entero, y el denominador se compondrá de la unidad seguida de tantos ceros como cifras fraccionarias tuviere el decimal.* Y segun que éste tenga, ó no, enteros, el ordinario equivalente será impropio ó propio.

$$\text{Así: } 3,4 = \frac{34}{10};\ 82,007 = \frac{82007}{1000};\ 0,3 = \frac{3}{10};\ 0,008 = \frac{8}{1000}.$$

Esta primera parte ha sido ya tratada en Aritmética (**136**); pero nosotros queríamos presentarla unida á la 2.ª: y como ésta no debe ser tratada en Aritmética, por eso repetimos la primera en este lugar.

80. 2.ª *Hallar el quebrado ordinario equivalente á un quebrado decimal de un número ilimitado de cifras.*

Esta 2.ª parte se descompone en *dos casos*, segun que la fraccion decimal de un número ilimitado de cifras sea *periódica pura*, ó *periódica mixta*.

81. *Caso* 1.º Sea la *fraccion decimal periódica pura* general $0,ab\ ab\ ab.......$

Si representamos por x el quebrado ordinario equivalente á dicha fraccion, tendrémos

$$x = 0,ab\ ab\ ab.......$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el período (que ahora será por 100), resulta

$$100x = ab,ab\ ab\ ab\ ab.......$$

Restando miembro á miembro estas igualdades, la primera de la segunda, y considerando que un número ilimitado de períodos se destruye con un número ilimitado de períodos iguales y de signos contrarios, nos dará

$$99\,x = ab.$$

Y dividiendo los dos miembros de esta igualdad por 99, tendrémos, por último

$$x = \frac{ab}{99}.$$

Lo que nos dice en lenguaje vulgar, *que el quebrado ordinario equivalente á una fraccion decimal periódica pura se compone de el período por numerador, y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período.*

$$\text{Así: } 0,666..... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Si la fraccion decimal tuviere enteros, se escriben delante del quebrado ordinario, despues de simplificado éste, y formando un número mixto.

$$\text{Así}: 4{,}6666\ldots\ldots = 4\,\frac{2}{3}.$$

82. *Caso 2.º* Sea la *fraccion decimal periódica mixta* general

$$0,\ a\ bc\ bc\ bc\ bc\ldots\ldots$$

Si representamos por x el quebrado ordinario equivalente á dicha fraccion, tendrémos

$$x = 0\ ,\ a\ bc\ bc\ bc\ bc\ldots\ldots$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica (que ahora será por 10), resulta

$$10x = a\ ,\ bc\ bc\,bc\ldots\ldots$$

Y poniendo $\frac{bc}{99}$ en vez de la parte periódica $bc\ bc\ bc\ldots\ldots$ segun acabamos de explicar anteriormente, la igualdad tomará la forma nueva de

$$10x = a + \frac{bc}{99}.$$

Ahora bien, para reducir á quebrado el número mixto que hay en el segundo miembro, se multiplicará el entero a por 99 y al producto se agregará el numerador bc. Y tambien podríamos multiplicar el entero a por 100, con tal que del producto restemos una a. Pero el producto de a por 100 termina en dos ceros, y al sumar el numerador con este producto, las cifras bc ocuparian el lugar de los ceros, y restando de esto el entero a, el resultado será el numerador.

$$\text{O bien},\ (a \times 99) + bc = (a \times 100 - a) + bc = (a00 - a) + bc =$$

$$\left(\begin{array}{r} bc \\ a00 \\ \hline abc \end{array}\right) - a = abc - a.$$

De suerte que, reducido á quebrado el número mixto del segundo miembro, la igualdad puede tomar la forma de

$$10x = \frac{abc - a}{99}.$$

Y dividiendo, finalmente, los dos miembros de la igualdad por 10, el primero se convierte en x, y el segundo queda dividido sin más que multiplicar por 10 el denominador (ARIT. **96**, 2.ª).

Luego, $$x = \frac{abc - a}{990}.$$

Lo que nos dice en lenguaje vulgar que *el quebrado ordinario equivalente á una fraccion decimal periódica mixta tiene por numerador la parte no periódica seguida del período, formando un solo número, ménos la parte no periódica, y por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.*

Así; $$0{,}4282828\ldots\ldots = \frac{428 - 4}{990} = \frac{424}{990} = \frac{212}{495}.$$

Si la fraccion decimal tuviere enteros se escriben delante del quebrado ordinario, despues de simplificado éste, y formando un número mixto.

TEORÍA DE LOS DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERACION.

83. A las palabras con que damos principio á este capítulo añadirémos éstas.

Las materias contenidas en este capítulo no han podido tratarse ántes de saber los alumnos el capítulo I. Y, por otra parte, deseamos que éstos lleguen á la teoría de las ecuaciones con la mayor suma de ideas posible: este es, pues, su lugar.

84. Presentarémos descompuesta en *tres partes* la teoría en que vamos á ocuparnos. En *la primera* explicarémos cómo puede escribirse un número entero en un sistema cualquiera de numeracion. En *la segunda* enseñarémos la manera de traducir, ó pasar al sistema decimal un número entero que esté escrito en diferente sistema del nuestro. Y en *la tercera* pondrémos ejemplos de las primeras operaciones verificadas sobre números escritos en un sistema de numeracion cualquiera, pero distinto del decimal, para lo cual basta tener presente la ley que existe entre las unidades de los diferentes órdenes, á fin de convertir unidades de un órden cualquiera en unidades de órden inmediato superior ó inferior.

Se llama *base* (del griego βάσις, *fundamento*, *apoyo*) de un sistema de numeracion, al número de unidades de un órden cualquiera que se necesita para componer una unidad del órden inmediato superior. Y este número de unidades es siempre igual al de cifras que en cada sistema se emplea.

Es comun á todos los sistemas de numeracion el principio convencional en virtud del cual una cifra colocada á la izquierda de otra representa unidades del órden inmediato superior.

El *cero es necesario* á todo sistema, es decir, *es indispensable* una cifra, désela el nombre y forma que se quiera, que llene estas dos funciones: indicar la carencia de unidades del lugar que ocupa, y dar á las cifras de su izquierda la colocacion correspondiente.

El sistema más sencillo es el *binario*, cuyas cifras son 1 y 0.
Sigue el *ternario*. . . . . con 1, 2 y 0.
— cuaternario. . . . . con 1, 2, 3 y 0.
— quinario. . . . . con 1, 2, 3, 4 y 0.

Y así sucesivamente. Pero si el sistema exige más cifras que el nuestro se le dan las letras que necesite. Así, por ejemplo, en el sistema *duodecimal* el número diez se representa por la letra *a*, y el once por *b*.

85. Esto sentado, ocupémonos ya en la *primera parte*, ó lo que es lo mismo, dado un número escrito en el sistema decimal, traducirle, por decirlo así, á otro sistema cualquiera.

Sea, por ejemplo, el número 528, y vamos á escribirle en el sistema *quinario*, cuya base es cinco.

En el sistema quinario se necesitan cinco unidades de primer órden para componer una de segundo: luego tantas veces como el número 5 esté contenido en el número propuesto, tantas unidades de segundo órden contendrá en el sistema quinario, y el resto serán unidades de primero.

Cinco unidades de 2.° órden componen una de 3.°: luego tantas veces como el número 5 esté contenido en el número de unidades de 2.° órden, tantas unidades de 3.° contendrá el número propuesto, y el resto serán unidades de 2.°: y así sucesivamente.

Disposicion de la operacion:

```
                    528 | 5
                     28   105 | 5
De 1er órden......    3     5   21 | 5
          De 2.°....  0  De 3.°.. 1  De 4.° 4
```

Resultado:

528 en el sistema decimal = 4103 en el sistema quinario.

OBSERVACIONES.

1.ª Este número 4103 escrito en el sistema quinario no se sabe leer más que de este modo: 3 unidades de primer órden, 0 de segundo, 1 de tercero y 4 de cuarto. Y lo mismo sucede con cualquier número escrito en un sistema distinto del decimal.

2.ª Como el cociente de la tercera division es 4, número menor que la base 5, claro es que no podía haber unidades de quinto órden, esto es, que el órden superior en este ejemplo es el 4.°

Y en general, como en un sistema de numeracion cuya base es *b*, *b* unidades de primer órden componen una de segundo, y *b* unidades de segundo componen una de tercero, y así sucesivamente, es claro, que si se quiere reducir á un sistema cualquiera un número dado en el decimal, *se divide éste por la base del otro sistema, escrita en el decimal; el resto serán las unidades de primer órden en el nuevo sistema. Se divide el cociente por la misma base; el resto serán las unidades de segundo órden: el segundo cociente se divide por la base; el resto serán las unidades de tercer órden; y así se continúa hasta obtener un cociente menor que la base, y que será la cifra de unidades del órden superior en el nuevo sistema.*

86. Aparte del procedimiento anterior, cuya exactitud nada deja que desear, vamos á explicar la posibilidad de escribir números en un sistema cualquiera, por ejemplo, en el quinario; no obstante que las consideraciones que hagamos son aplicables á todos los demas sistemas.

Las cifras en el sistema quinario son 0, 1, 2, 3, 4.

Los cuatro primeros números se escriben, pues, en el sistema quinario lo mismo que en el decimal.

Agregando una unidad á *cuatro*, se forma el número *cinco*, ó sea una unidad de *segundo órden* que, segun el principio convencional establecido, se escribirá así: 10.

Colocando sucesivamente cada una de las cinco cifras del sistema quinario, en el primero y segundo lugar se formarán todos los números que haya hasta llegar al compuesto de 4 unidades de primer órden y 4 de segundo, que se escribe 44, y se lee como acabamos de decir.

Agregando á éste una unidad, tendríamos un número compuesto de 5 unidades de primer órden y 4 de segundo; pero como 5 unidades de primer órden componen 1 de segundo, estaría mejor dicho 0 de primer órden y 5 de segundo; y como 5 de segundo componen 1 de tercero, como debiera decirse sería: 1 unidad de tercer órden, 0 de segundo, y 0 de primero, que se escribe así: 100.

Más aún: como el número 44 vale 24 unidades de primer órden, el número 25 es el que en el sistema quinario se escribe así: 100.

De suerte que la base 5 se escribe como la nuestra, 10, y el cuadrado de la base 5, como el cuadrado de la nuestra, 100.

Colocando sucesivamente cada una de las cinco cifras del sistema quinario en el primero, segundo y tercer lugar, se formarán todos los números que haya hasta llegar al compuesto de 4 unidades de primer órden, 4 de segundo y 4 de tercero, que se escribe así: 444, y se lee como acabamos de decir.

Tambien podemos decir que este número vale veinticuatro unidades de segundo órden y cuatro de primero, ó sean ciento veinticuatro unidades de primer órden.

Agregando á este una unidad se obtiene un número compuesto de ciento veinticinco unidades, que es el cubo de cinco. Y repitiendo el razonamiento anterior, apareceria el nuevo número compuesto de 1 unidad de cuarto órden, 0 de tercero, 0 de segundo y 0 de primero, que se escribe así: 1000.

Tambien el cubo de la base 5 del sistema quinario se escribe como el cubo de la base 10 de nuestro sistema decimal, 1000.

Repitiendo estas consideraciones cuantas veces se quiera, y en cuantos sistemas se quiera, quedan probadas dos conclusiones:

1.ª Que pueden escribirse números en el sistema que se quiera, distinto del decimal, á partir del binario: lo que no se sabe es leerlos más que del modo indicado.

2.ª Que en todos los sistemas, sin excepcion, las bases y sus potencias semejantes se escriben de la misma manera que 10 y las respectivas potencias de 10: lo que varía de un sistema á otro son los valores relativos.

87. Vamos á tratar de la *segunda parte*, ó sea de reducir al sistema decimal un número entero escrito en un sistema cualquiera.

Sea, en general, el número..... *onmiedca* escrito en el sistema cuya base es b; representando por a, c, d, e, i, etc., las unidades de 1.º, 2.º, 3.º, 4.º, 5.º, etc., órden.

Pero en virtud del principio *convencional*, y *fundamental* á la vez de todo sistema de numeracion, la cifra c expresa unidades b veces mayores que si estuviese sola; luego su valor relativo es igual á c multiplicado por b, que puede indicarse (**2**, 4.º) así: cb. Por la misma consideracion la cifra d expresa unidades b veces mayores que c; luego su valor relativo es igual á d multiplicado por b, multiplicado otra vez por b, ó bien, $d \times b \times b$, ó sea db^2. Repitiendo la misma consideracion cuantas veces sea necesario, se explica de la misma manera que eb^3, ib^4, mb^5, nb^6, ob^7..... son las expresiones de los valores relativos de las cifras e, i, m, n, o.....

Luego el número N escrito en el sistema de numeracion cuya base es b, y que tiene por cifras a, c, d, e, i, m, n, o..... se presta á la transformacion siguiente :

$$N = a + cb + db^2 + eb^3 + ib^4 + mb^5 + nb^6 + ob^7 + \ldots$$

Luego dando á la base b y á las cifras a, c, d, e, i, m, n, o..... valores particulares, y efectuando en el sistema decimal las operaciones indicadas en la expresion anterior, se tendrá el número correspondiente á esos valores particulares expresado en el sistema decimal.

Sea, por vía de comprobacion, reducir al sistema decimal el número 4103 dado en el sistema quinario.

Disposicion de la operacion :

3×1	$3 \times 1 =$	3
0×5	$0 \times 5 =$	0
1×5^2	$1 \times 25 =$	25
4×5^3	$4 \times 125 =$	500
		528 en el decimal,

segun ya sabíamos.

Luego, regla : Para reducir al decimal un número escrito en un sistema cualquiera se multiplica la cifra de las unidades de primer órden por 1,

La de 2.° por la base del sistema en que se da escrito,

La de 3.° por el cuadrado de dicha base,

La de 4.° por el cubo de la misma ; y así se continúa, y haciendo todas estas operaciones en el sistema decimal, la suma de dichos productos dará el número que se desea en el sistema decimal.

Corolario. Para reducir un número de un sistema á otro, distintos ambos del decimal, se pasa primeramente al decimal, y despues se pasa del decimal al que se quiera.

88. *Tercera parte :* Operaciones.

1.ª Vamos á sumar los números supuestos en el sistema cuya *base* es 6, y sus cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5. . . . .

$$\begin{array}{r} 1045 \\ 2403 \\ 4352 \\ \hline 12244 \end{array}$$

Teniendo muy presente la ley que existe entre las unidades de diferentes órdenes, en cada sistema, dirémos : 5 y 3, 8, y 2, 10 unidades de primer órden, que componen 1 de segundo y 4 de primero.

1 de segundo, procedente de la suma de las de primero y 4, 5;

y 0, 5; y 5, 10 unidades de segundo órden, que componen 1 de tercero y 4 de segundo.

1 de tercero procedente de la suma de los órdenes inferiores y 0, 1; y 4, 5; y 3, 8 unidades de tercer órden, que componen 1 de cuarto y 2 de tercero.

1 de cuarto procedente de la suma de los órdenes inferiores y 1, 2; y 2, 4; y 4, 8 unidades de cuarto órden, que componen 1 de quinto y 2 de cuarto.

La suma es, pues, un número que consta de 1 unidad de quinto órden, más 2 de cuarto, más 2 de tercero, más 4 de segundo, más 4 de primero.

2.ª Vamos á restar un número de otro, supuestos en el sistema cuya *base* es 4, y sus cifras 0, 1, 2, 3. . . . .

$$\begin{array}{r} 1232 \\ 133 \\ \hline 1033 \end{array}$$

Como la primera cifra de la derecha del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo, se hace sufrir al minuendo la transformacion oportuna para que aparezca compuesto de este modo:

1 unidad de cuarto órden, más 1 de tercero, más 6 de segundo, más 6 de primero, y dirémos:

De 3 á 6, van 3: de 3 á 6, van 3: de 1 á 1, va 0: de nada á 1, va 1.

El resto es, pues, un número que consta de 1 unidad de cuarto órden, más 0 de tercero, más 3 de segundo, más 3 de primero.

3.ª Multipliquemos estos dos números supuestos en el sistema *duodecimal*, cuya *base* es 12, y sus cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, *b*: *a* representa á 10, y *b* la cifra 11.

$$\begin{array}{r} 9ab \\ 807 \\ \hline 5945 \\ 6734 \\ \hline 679145 \end{array}$$

Dirémos: *b* multiplicado por 7, son 77; que hacen 5 unidades de primer órden, y 6 de segundo:

a por 7, son 70, y 6, 76; que componen 4 unidades de segundo órden, y 6 de tercero:

9 por 7, son 63, y 6, 69; que componen 9 unidades de tercer órden, y 5 de cuarto.

Ahora: *b* por 8, son 88; que hacen 4 unidades de primer órden (que se ponen debajo de las unidades de tercer órden, porque hay un cero en el multiplicador entre el 7 y el 8), y 7 de segundo.

a por 8, son 80, y 7, 87; que hacen 3 unidades de segundo órden, y 7 de tercero.

9 por 8, son 72, y 7, 79; que hacen 7 unidades de tercer órden, y 6 de cuarto.

Ahora se suman los dos productos parciales, diciendo : 5 ; 4; 9 y 4, 13 ; es decir, 1 de tercero, y 1 de cuarto : 1 de cuarto órden procedente de las sumas de órdenes inferiores y 5, 6 ; y 3, 9 ; 7 ; 6.

4.ª Dividamos un número por otro, supuestos en el sistema *duodecimal*, cuya *base* es 12, y sus cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, *b* : representando *a* la cifra 10, y *b* la 11.	6791.4.5. 59 4 5 0	9*ab* 807

Se separan por un punto las cuatro primeras de la izquierda, se dividen por el divisor, y multiplicando éste por el cociente 8, se resta el producto del dividendo parcial, diciendo : *b* por 8, 88, que son 7 de segundo y 4 de primero.

Si se escribiese 4 debajo del 1 para restar, habría que añadir mentalmente 12 (pues que 12 es la *base*) al 1, con lo que queda convertido en 13, y dirémos : de 4 á 13, van 9.

a por 8, 80, y 7 del producto anterior, son 87, ó bien 7 de tercero y 3 de segundo.

Escribiendo el 3 debajo del 9 para restar, dirémos : de 3 á 8, van 5.

9 por 8, 72, y 7 del producto anterior, son 79, que componen 6 de cuarto y 7 de tercero.

Escribiendo estas dos cifras 6 y 7 debajo del 6 y 7 del dividendo parcial, diríamos, de 7 á 7 va 0 ; y de 6 á 6, va 0, que no se ponen á la izquierda.

El principiante puede formar el producto del divisor por 8, escribirlo debajo del dividendo parcial, y efectuar la sustraccion, como se ha hecho dos ejemplos ántes.

A la derecha del resto se escribe la cifra siguiente 4 del dividendo. Y como ese dividendo parcial es menor que el divisor se pone 0, en el cociente.

Se baja la última cifra del dividendo, se escribe el cociente parcial 7, y el producto del divisor por 7 se resta del dividendo parcial, diciendo :

b multiplicado por 7, son 77, ó bien, 6 unidades de segundo órden y 5 de primero.

Escrito este 5, para restar, debajo de las unidades de primer órden del dividendo parcial, dirémos, de 5 á 5, va 0.

a por 7, son 70, y 6 del producto anterior, 76, ó bien, 6 de tercero y 4 de segundo.

Escrito el 4 debajo del 4, dirémos, de 4 á 4 va 0.

9 por 7, son 63, y 6 del producto anterior, 69, ó bien, 5 de cuarto y 9 de tercero.

Y dirémos, finalmente, de 9 á 9, va 0; y de 5 á 5, va 0, que no se escriben, porque hay bastante con uno para significar la exactitud de la operacion, que por lo demás había de ser así: puesto que tratándose de dividir el producto anterior por uno de sus factores, claro es que el cociente había de ser el otro factor.

Escolio. Hemos explicado cómo se pueden escribir números, y cómo se pueden verificar las operaciones en sistemas de numeracion distintos del nuestro.

Cuando éste se difundió por Europa, los hombres ilustrados no trataron más que de celebrar las ventajas que el sistema arábigo, ó indio ó *hebráico*, tenía sobre el griego y el romano.

Despues se ocuparon en calcular si habría otro más ventajoso que el decimal.

El ilustre Leibnitz pensó sériamente en el sistema *binario*, que no teniendo más cifras que 0 y 1, le permitía escribir todos los números imaginables por medio de los valores absolutos y relativos de la unidad.

Pero lo prolijo y penoso del sistema, que, para expresar un número pequeño, como *mil* por ejemplo, necesita diez lugares, miéntras en el sistema decimal sólo se necesitan cuatro, puesto que el número 1000 se escribe en el sistema binario de este modo 1111101000, esos inconvenientes le hicieron abandonar su propósito á principios del siglo XVIII.

Alguno se ha ocupado en el *duodecimal*, que por cierto no ofrece otra ventaja que la de tener su *base* 12 más divisores que la *base* 10 del nuestro.

Y si aquel hombre extraordinario, uno de los que más han honrado la inteligencia humana, vió la esterilidad de su invencion de la *Aritmética binaria*, séanos permitido aventurar nuestra opinion acerca de la vida que tendrá el sistema decimal de numeracion; vida, en nuestro sentir, tan larga como la de la humanidad.

1000 | 2
0 500 | 2
0 250 | 2
0 125 | 2
1 62 | 2
0 31 | 2
1 15 | 2
1 7 | 2
1 3 | 2
1 1

Diferencias, equidiferencias, razones y proporciones.

89. Preliminares. Los *objetos*, las *cosas* que existen en el mundo físico, considerados aisladamente y en sí mismos, *son absolutos:* no hay duda. Pero el hombre no puede tener idea del *cuanto*, de la *cantidad* de esos objetos ó cosas, sino comparándolos con otro de la misma especie llamado *unidad*, que se elige arbitrariamente ó es dado por la naturaleza, recibiendo el nombre de *número* la expresion de esa comparacion (Arit. 5).

Pero si, haciendo caso omiso de la unidad, se comparan entre sí dos cantidades de una misma especie, lo cual equivale á comparar los dos números que las expresan, el resultado de esta comparacion es lo que se llama en Matemáticas *la razon* de dos números.

Y ahora podemos decir que *número* es tambien la expresion de la *razon* de una cantidad cualquiera con su *unidad*.

Dos son, en general, *las maneras que hay de comparar una cantidad con otra:* ora se pretenda saber cuánto la una excede á la otra; ora se desee saber cuántas veces la una contiene á la otra.

Así, los números 32 y 8 se prestan á estas dos comparaciones.

$$32-8=24; \quad \frac{32}{8}=4.$$

El resultado de la comparacion por sustraccion es 24; y el resultado de la comparacion por division es 4.

Estas dos razones se distinguian antiguamente con los nombres de *razon aritmética* y *razon geométrica*. Hoy se llaman *razon por sustraccion*, ó simplemente *diferencia;* y *razon por cociente*, ó simplemente *razon*, porque casi siempre se comparan dos cantidades en Matemáticas por saber cuántas veces contiene la una á la otra.

Si los números que se comparan son iguales, el resultado de la comparacion es necesariamente *cero* ó la *unidad*, segun que la comparacion sea por sustraccion ó por division.

Si los números que se comparan son desiguales, el resultado es un tercer número, que expresa el exceso del uno sobre el otro, ó el número de veces que el uno contiene al otro, segun que la comparacion sea por sustraccion ó por division.

DIFERENCIAS.

90. Razon por diferencia, ó simplemente *diferencia* de dos números es el resíduo indicado de dichos números, el primero de los cuales se llama *antecedente*, y el segundo *consecuente*.

La diferencia de los números 15 y 12, por ejemplo, se escribe así: 15 — 12, y se lee 15 es á 12.

Es evidente que, *la diferencia de dos números no se altera* añadiendo ó quitando un mismo número al antecedente y consecuente.

Una diferencia es inversa de otra, cuando el consecuente y antecedente de la primera, son antecedente y consecuente de la segunda.

Se llama diferencia *compuesta* la diferencia que resulta de sumar ordenadamente dos ó más diferencias; llamándose *componente* cada una de éstas, que puede ser sustituida por otra igual, sin que la *compuesta* sufra alteracion.

La suma de dos diferencias iguales es dupla de cada una de ellas.

Si tenemos 7 — 5 y 10 — 8, 17 — 13 es, en efecto, dupla de cada una de las dos primeras.

La suma de dos diferencias inversas es cero.

Si tenemos 7 — 5 y 5 — 7, 12 — 12 es, en efecto, igual á cero.

EQUIDIFERENCIA.

91. Se llama *equidiferencia* (palabra introducida por M. Lacroix), á la igualdad de dos diferencias.

Una *equidiferencia* entre los números 12, 9, 7 y 4, por ejemplo, se escribe así: 12 — 9 : : 7 — 4, y se lee así: 12 es á 9 como 7 es á 4.

El primero y tercero se llaman *antecedentes*, el segundo y cuarto *consecuentes*, el primero y cuarto *extremos*, y el segundo y tercero *medios*.

Si los medios de una equidiferencia son iguales, la equidiferencia se llama *continua*, y el medio que se repite se llama medio diferencia entre los otros dos términos.

Así, 12 — 9 :: 9 — 6, es una equidiferencia *continua*, y 9 es *medio diferencial* entre 12 y 6.

92. *En toda equidiferencia la suma de los extremos es igual á la de los medios; é igual al duplo del medio diferencial, si la equidiferencia es continua.*

En efecto: sea la equidiferencia general $a - b :: c - d$, ó bien, $a - b = c - d$.

Añadiendo á los dos miembros de esta igualdad la expresion $b + d$, toma la forma de $a - b + b + d = c - d + b + d$; y reduciendo toma esta final $a + d = c + b$.

Si la equidiferencia es continua, por ejemplo, $a - b :: b - c$, ó bien, $a - b = b - c$; se verificará, repitiendo el razonamiento anterior, que $a + c = b + b$, ó sea, $a + c = 2b$.

Recíprocamente. *Si tenemos cuatro números tales que la suma de dos de ellos sea igual á la suma de los otros dos, esos cuatro números forman una equidiferencia, siendo los dos primeros extremos ó medios, y los dos segundos medios ó extremos.*

Sea, por ejemplo, la igualdad $a + d = c + b$.

Restando de los dos miembros de esta igualdad la expresion $b+d$, tomará la forma de $a + d - b - d = c + b - b - d$; y reduciendo, toma esta otra $a - b = c - d$, ó bien, $a - b :: c - d$.

Corolario. *Uno de los extremos* es igual á la suma de los medios ménos el otro extremo.

En efecto: si tenemos $12 - 9 :: 7 - x$, representando por x un extremo desconocido, y aplicamos á esta equidiferencia la anterior propiedad, resulta

$$12 + x = 9 + 7.$$

Y restando 12 de los dos miembros de esta igualdad, tendrémos:

$$12 + x - 12 = 9 + 7 - 12,\ \text{ó bien},\ x = 9 + 7 - 12 = 4.$$

Corolario 2.° *Uno de los medios* es igual á la suma de los extremos ménos el otro medio.

En efecto: si tenemos $12 - 9 :: x - 4$, y aplicamos á esta equidiferencia la propiedad anterior, resulta $9 + x = 12 + 4$.

Y restando 9 de los dos miembros de esta igualdad, tendrémos:

$$9 + x - 9 = 12 + 4 - 9,\ \text{ó bien},\ x = 12 + 4 - 9 = 7.$$

Corolario 3.° *El medio diferencial*, en una equidiferencia contínua, es igual á la semi-suma (mitad de la suma), de los extremos.

En efecto: si tenemos $12 - x :: x - 6$, y aplicamos á esta equidiferencia la propiedad ántes dicha, tendrémos: $x + x = 12 + 6$, ó bien, $2x = 12 + 6$.

Y dividiendo los dos miembros de esta igualdad por 2, coeficiente de x, resulta $x = \frac{12 + 6}{2}$, ó bien, $x = \frac{1}{2}(12 + 6)$.

Carlos Botello

COROLARIO 4.° Pueden hacerse sufrir á los términos de una equidiferencia las transformaciones que se quiera, con tal que subsista respecto de ellos el principio de que *la suma de extremos sea igual á la suma de medios.*

RAZONES.

93. Razon por cociente, ó simplemente *razon* de dos números, es el cociente indicado del primero, llamado *antecedente*, por el segundo, llamado *consecuente.*

La *razon* de los números 12 y 3, por ejemplo, se escribe así 12 : 3, y se lee 12 es á 3.

Es evidente que la *razon de dos números no se altera* multiplicando ó dividiendo el antecedente y el consecuente por un mismo número.

Una razon es inversa ó recíproca de otra, cuando el consecuente y antecedente de la primera son antecedente y consecuente de la segunda.

Y se llaman tambien *números recíprocos* aquéllos cuyo producto es la unidad, como $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$.

Se llama razon *compuesta* la razon que resulta de multiplicar ordenadamente dos ó más razones; llamándose *componente* cada una de éstas, que puede ser sustituida por otra igual, sin que la *compuesta* sufra alteracion.

El producto de dos razones iguales es el cuadrado de cada una de ellas.

Si tenemos 12 : 3 y 8 : 2, 96 : 6, ó sea 16, es en efecto el cuadrado de 4.

El producto de dos razones inversas ó recíprocas es igual á la unidad.

Si tenemos 12 : 3 y 3 : 12, 36 : 36 es, en efecto, igual á la unidad.

PROPORCIONES.

94. Se llama *proporcion* á la igualdad de dos razones.

Una *proporcion* entre los números 12, 3, 8 y 2, por ejemplo, se escribe así, 12 : 3 :: 8 : 2 y se lee así, 12 es á 3 como 8 es á 2.

El primero y tercero se llaman *antecedentes*, el segundo y cuarto *consecuentes*, el primero y cuarto *extremos*, y el segundo y tercero *medios.*

Si los medios de una proporcion son iguales, la proporcion se llama *contínua*, y el medio que se repite se llama *medio proporcional* entre los otros dos términos.

Así, 12 : 6 :: 6 : 3 es una proporcion contínua, y 6 es *medio proporcional* entre 12 y 3.

Tambien se escribe ∺ 12 : 6 : 3, y se llama signo de proporcion contínua á este ∺.

Y cada uno de los extremos se llama *tercero proporcional* respecto del *medio proporcional* y el otro extremo. Y en una proporcion *no contínua*, cada término se llama *cuarto proporcional* respecto de los otros tres.

95. En toda proporcion se verifican las propiedades siguientes:

1.ª *El producto de los extremos es igual al de los medios; é* igual al *cuadrado del medio proporcional*, si la proporcion es contínua.

En efecto: sea la proporcion general $a : b :: c : d$, que puesta bajo la forma de igualdad de cocientes indicados, nos da $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la expresion $b \times d$, tendrémos

$$\frac{a \times b \times d}{b} = \frac{c \times b \times d}{d}$$

y efectuando las divisiones indicadas, resulta

$$a \times d = c \times b.$$

Si la proporcion es contínua, por ejemplo, $a : b :: b : d$, y se pone bajo la forma de igualdad de cocientes indicados, tendrémos $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$. Repitiendo el razonamiento anterior, se verifica que $a \times d = b \times b$, ó bien $a \times d = b^2$.

Recíprocamente. *Si tenemos cuatro números tales que el producto de dos de ellos sea igual al producto de los otros dos, esos cuatro números forman proporcion, siendo los dos primeros extremos ó medios, y los dos segundos medios ó extremos.*

Sea, por ejemplo, la igualdad $a \times d = c \times b$.

Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por la expresion $b \times d$, tomará la forma de $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d}$, y suprimiendo el factor d comun á los dos términos del primer quebrado, y el b que lo es á los dos del segundo, tomará esta otra $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que, segun la ordinaria de las proporciones, será $a : b :: c : d$.

Corolario. *Un extremo desconocido* es igual al producto de los medios dividido por el extremo conocido.

En efecto : si tenemos $12 : 3 :: 8 : x$, y aplicamos á esta proporcion la anterior propiedad, resulta

$$12 \times x = 3 \times 8,$$

y dividimos los dos miembros de esta igualdad por 12, coeficiente de x, tendrémos $x = \frac{3 \times 8}{12} = 2$.

Corolario 2.° *Un medio desconocido* es igual al producto de los extremos partido por el medio conocido.

En efecto : si tenemos $12 : 3 :: x : 2$, y aplicamos á esta proporcion la propiedad anterior, tendrémos :

$$3 \times x = 12 \times 2,$$

y dividiendo los dos miembros de esta igualdad por 3, coeficiente de x, resulta $x = \frac{12 \times 2}{3} = 8$.

Corolario 3.° *El medio proporcional*, en una proporcion contínua, es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.

En efecto : si tenemos $12 : x :: x : 3$, y aplicamos á esta proporcion la propiedad ántes dicha, tendrémos : $x \times x = 12 \times 3$,

ó bien $$x^2 = 12 \times 3.$$

Y extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de esta igualdad, resulta $x = \sqrt{12 \times 3} = 6$.

Corolario 4.° *Un extremo desconocido* (ó sea un tercero proporcional), en una proporcion continua, es igual al cuadrado del medio proporcional partido por el extremo conocido.

Porque si tenemos $12 : 6 :: 6 : x$, ya sabemos que se verifica $12 \times x = 6^2$, de donde $x = \frac{6^2}{12} = 3$.

2.ª Se pueden mudar de lugar los medios ó los extremos, y esto se llama *alternar* : poner los medios por extremos y *vice-versa*, y se llama *invertir* : y poner la segunda razon por primera y ésta por segunda, ó sea *permutar*. Transformaciones lícitas, porque despues de ellas subsiste la igualdad entre el producto de los extremos y el de los medios, esto es, hay proporcion.

Así, de la proporcion $a : b :: c : d$ se deducen :

$$a : c :: b : d \quad | \quad d : b :: c : a \quad | \quad b : a :: d : c \quad | \quad c : d :: a : b.$$

Si la proporcion es sobre números particulares, pueden hacerse de la misma manera una, ó dos, ó las tres transformaciones anteriores :

$12 : 3 :: 8 : 2$	4	$8 : 2 :: 12 : 3$	4
$12 : 8 :: 3 : 2$	$\frac{3}{2}$	$8 : 12 :: 2 : 3$	$\frac{2}{3}$
$3 : 12 :: 2 : 8$	$\frac{1}{4}$	$2 : 8 :: 3 : 12$	$\frac{1}{4}$
$3 : 2 :: 12 : 8$	$\frac{3}{2}$	$2 : 3 :: 8 : 12$	$\frac{2}{3}$

3.ª *Una proporcion no deja de serlo*, aunque se multipliquen ó se dividan por un mismo número todos sus términos ó los antecedentes, los consecuentes, los dos primeros ó los dos últimos; puesto que, despues de cualquiera de estas transformaciones, subsiste la igualdad de ambas razones.

4.ª *Si dos ó más proporciones se multiplican ó se dividen ordenadamente*, los productos ó cocientes serán proporcionales.

Sean las proporciones $a : b :: c : d$ y $m : n :: r : s$, que pondrémos bajo la forma de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$.

Y multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, tendrémos $\frac{a \times m}{b \times n} = \frac{c \times r}{d \times s}$ ó bien $am : bn :: cr : ds$, con lo cual queda demostrada la primera parte de la proposicion.

Si ahora dividimos ordenadamente esta última por la primera, por ejemplo, nos da $\frac{am}{a} : \frac{bn}{b} :: \frac{cr}{c} : \frac{ds}{d}$, ó bien $m : n :: r : s$, y queda demostrada la segunda parte.

5.ª *Si cuatro números son proporcionales*, tambien lo serán sus potencias y raíces de un mismo grado.

Sea la proporcion general $a : b :: c : d$, ó bien bajo la forma de igualdad de cocientes $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Elevando los dos miembros de esta igualdad á la potencia n, tendrémos:

$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}, \text{ ó bien } a^n : b^n :: c^n : d^n.$$

Y extrayendo la raíz del grado n de los dos miembros de la misma igualdad, resulta $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$, ó ya

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}, \text{ ó bien } \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}.$$

6.ª *Si los antecedentes de una proporcion son iguales*, tambien lo serán los consecuentes, y al contrario.

Porque cocientes iguales, con dividendo ó divisor comun, tienen iguales divisor ó dividendo.

7.ª *Si dos proporciones tienen una razon comun*, con las otras dos razones se puede formar proporcion.

Sean las proporciones $a : b :: c : d$ y $a : b :: m : n$, que pueden ponerse bajo la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$.

Y como dos cosas iguales á una tercera son iguales entre si, $\frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n}$, que son iguales á $\frac{a}{b}$, son iguales entre sí, y nos dan $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$, ó bien $c : d :: m : n$.

Corolario. Si dos proporciones tienen respectivamente iguales los antecedentes ó los consecuentes, los otros cuatro términos serán proporcionales, esto es, con los otros cuatro términos se podrá formar proporcion. Así, de $a : b :: c : d$ y $a : m :: c : n$ resulta alternando, $a : c :: b : d$ y $a : c :: m : n$; luego $b : d :: m : n$, ó bien $b : m :: d : n$, y de $a : b :: c : d$ y $m : b :: n : d$, resulta alternando, $a : c :: b : d$ y $m : n :: b : d$; luego $a : c :: m : n$, ó bien $a : m :: c : n$.

8.ª *La suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporcion general $a : b :: c : d$, en la cual se verifica $a \times d = b \times c$.

Añadiendo á los dos miembros de esta igualdad el producto

$a \times b$, tendrémos $a \times d + a \times b = b \times c + a \times b$, ó bien $a \times (d + b) = b \times (c + a)$; y segun la recíproca de la primera propiedad $c + a : d + b :: a : b$.

Si en vez de añadir, se restase de los mismos miembros el mismo producto $a \times b$, tendríamos $a \times d - a \times b = b \times c - a \times b$, ó bien $a(d - b) = b(c - a)$; de donde $c - a : d - b :: a : b$.

Añadiendo á dichos dos miembros $c \times d$, en vez de $a \times b$, resulta ahora $a \times d + c \times d = b \times c + c \times d$, de donde $d(a + c) = c(b + d)$; luego $a + c : b + d :: c : d$.

Y si en vez de añadir, restamos de los mismos miembros el mismo producto $c \times d$, resulta ahora $a \times d - c \times d = b \times c - c \times d$, ó bien $d(a - c) = c(b - d)$, de donde $a - c : b - d :: c : d$.

Reuniendo las dos primeras proporciones en una sola, resulta

$$c \pm a : d \pm b :: a : b.$$

Y haciendo lo mismo con la tercera y cuarta, tendrémos:

$$a \pm c : b \pm d :: c : d.$$

Corolario. *La suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes, como la diferencia de los primeros es á la diferencia de los segundos.*

Porque de las proporciones

$a + c : b + d :: a : b$ y $a - c : b - d :: a : b$ se deduce que

$$a + c : b + d :: a - c : b - d.$$

Corolario 2.° *La suma de los antecedentes es á su diferencia como la suma de los consecuentes es á la diferencia de éstos.*

Basta alternar los medios en la última proporcion para obtener

$$a + c : a - c :: b + d : b - d.$$

Escolio. Aplicando el teorema anterior y sus corolarios á la proporcion $a : c :: b : d$, se deducirán para la primitiva $a : b :: c : d$ las nuevas propiedades que siguen:

La suma ó la diferencia de los dos primeros términos es á la suma ó la diferencia de los otros dos, como el primer término es al tercero, ó como el segundo es al cuarto.

La suma de los dos primeros es á la de los otros dos, como la diferencia de aquéllos es á la diferencia de éstos.

La suma de los dos primeros es á su diferencia, como la suma de los otros dos, es á la diferencia de éstos.

Escolio 2.° Es claro que una proporcion que se refiera á números irracionales ó inconmensurables, se verificará para los quebrados decimales que difieran de aquéllos en ménos de una cantidad dada, por pequeña que sea.

Escolio 3.° *La razon de dos quebrados puede ser sustituida por la de dos números enteros.*

En efecto: siendo la razon del quebrado $\frac{3}{7}$ es á $\frac{5}{11}$, por ejemplo, el cociente del primero partido por el segundo, ó bien $\frac{3 \times 11}{7 \times 5}$, dicho se está que la razon de $\frac{3}{7}$ es á $\frac{5}{11}$ puede ser sustituida por $\frac{33}{35}$, ó como si dijéramos, por la razon de 33 es á 35.

De aquí se deduce la proporcion $\frac{3}{7} : \frac{5}{11} :: 33 : 35$.

Serie de razones iguales.

96. Se llama *serie de razones iguales* á la igualdad de tres ó más razones.

La serie se escribe, poniendo las razones iguales unas á continuacion de otras, unidas por el signo ::

Por ejemplo, 2 : 3 :: 4 : 6 :: 8 : 12 :: 14 : 21 :: 10 : 15.

97. *En toda serie de razones iguales, la suma ó la diferencia de todos los antecedentes es á la suma ó la diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la serie de razones iguales $a : b :: c : d :: m : n :: r : s :: x : z$.

En efecto: considerando sólo las dos primeras razones $a : b :: c : d$, en virtud de lo expuesto (8.ª propiedad), se verifica para ellas que $a \pm c : b \pm d :: c : d$.

Pero segun la hipótesis, $c : d :: m : n$; luego, por tener estas dos proporciones una razon comun, surge ésta; $a \pm c : b \pm d :: m : n$, para la cual tambien se verifica que $a \pm c \pm m : b \pm d \pm n :: m : n$.

Pero, segun la hipótesis, $m : n :: r : s$; luego, tendrémos esta nueva proporcion: $a \pm c \pm m : b \pm d \pm n :: r : s$, para la cual tambien se verifica que $a \pm c \pm m \pm r : b \pm d \pm n \pm s :: r : s$.

Pero, segun la hipótesis, $r : s :: x : z$; luego, tendrémos esta nueva proporcion: $a \pm c \pm m \pm r : b \pm d \pm n \pm s :: x : z$, para la cual se verifica, finalmente, que

$$a \pm c \pm m \pm r \pm x : b \pm d \pm n \pm s \pm z :: x : z.$$

Corolario. *La suma de los antecedentes es á la de los consecuentes como la diferencia de aquéllos es á la diferencia de éstos.*

Corolario 2.° *La suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.*

Corolario 3.° Si tenemos dos quebrados iguales $\frac{8}{12}$ y $\frac{2}{3}$, pero de forma distinta, y se suman los numeradores, y despues los denominadores, *el nuevo quebrado* $\frac{10}{15}$ *es igual á cada uno de ellos.*

En efecto: de la igualdad $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, resulta $8 : 12 :: 2 : 3$; de donde $8 + 2 : 12 + 3 :: 8 : 12 :: 2 : 3$, ó bien $\frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Lo mismo sucede restando un numerador de otro, y despues los denominadores.

REGLA DE TRES Y SUS ANÁLOGAS.

98. *Preliminares.* Cuando hemos hablado (**93**) de las *razones*, nos referíamos á números abstractos.

Ahora que vamos á ocuparnos de las *razones* relativas á números concretos, dirémos: que para comparar dos números concretos es necesario que éstos sean homogéneos. Y por consiguiente, para que pueda establecerse proporcion entre cuatro números concretos, es necesario que éstos sean homogéneos, ó por lo ménos, que lo sean dos á dos.

Esto último es lo que acontece en las cuestiones de que vamos á tratar. Y en los enunciados de ellas se observa además, que hay dos números homogéneos con un carácter tal, que ha hecho que se les llame *principales*; y que cada uno de los otros dos homogéneos está tan explícitamente ligado con cada uno de los primeros, que por eso se les llama uno á uno *correspondientes* de aquéllos.

Un ejemplo acabará de aclarar esto:

Si 5 *fanegas de trigo han costado* 50 *pesetas, ¿cuánto costarán* 10 *fanegas?*

Aquí los números homogéneos *principales* son 5 fanegas y 10 fanegas; siendo 50 pesetas el *correspondiente* de 5 fanegas, y el *correspondiente* de 10 fanegas lo es el precio que se pide.

Y como es evidente que doble, triplo, etc., número de fanegas costarían doble, triplo, etc., número de pesetas, el sentido comun dice que la proporcion relativa á este ejemplo se plantearía diciendo:

5 fanegas es á su homogéneo, como el número correspondiente al primero es al correspondiente al segundo.

Se dice que estos números, y todos aquéllos que den lugar á una proporcion como la que acabamos de enunciar, son *directamente proporcionales*, ó simplemente *proporcionales*.

Y como es evidente que más ó ménos fanegas cuestan más ó ménos pesetas, tambien se dice que las fanegas y las pesetas, ó sea su precio, están en *razon directa*.

Propongamos otro ejemplo, para mayor claridad:

Si 8 hombres han invertido 14 dias en construir una pared ¿cuántos dias invertirán 16 hombres?

Aquí los números *principales* son 8 hombres y 16 hombres, y sus *correspondientes* respectivos 15 dias y el número de dias que se pide.

Y como es evidente que doble, triplo, etc., número de hombres invertirán (suponiendo todas las demas circunstancias iguales) la mitad, tercera parte, etc., del número de dias que invirtieron los primeros, la proporcionalidad existe, pero en sentido contrario al que tuvo en el primer ejemplo, y esto se expresa diciendo: 8 hombres es á su homogéneo, como el correspondiente (no del primero, segun el ejemplo anterior) del segundo, es al correspondiente del primero.

Se dice que estos números, y todos aquéllos que den lugar á una proporcion como la que acabamos de enunciar, son *inversa ó recíprocamente proporcionales*.

Y como es evidente que más ó ménos hombres, suponiendo iguales las demas circunstancias, invierten en una obra cualquiera ménos ó más dias, tambien se dice que los hombres y los dias están en *razon inversa*.

99. En general, cuatro números son *proporcionales*, ó están *en razon directa*, cuando, despues de existir proporcion entre ellos vemos que, partiendo de uno de los principales, crece ó decrece su homogéneo, y el correspondiente de éste crece ó decrece tambien respecto del correspondiente del primero.

Pero si, dada la proporcion entre cuatro números, vemos que, partiendo de uno de los principales, crece ó decrece su homogéneo, y el correspondiente de éste decrece ó crece respecto del correspondiente del primero, entónces los números son *inversamente proporcionales* ó están en *razon inversa*.

Por vía de ejemplos, vamos á demostrar que el valor de los quebrados está en *razon directa* de sus numeradores y en *razon inversa* de sus denominadores.

Sean los quebrados generales $\frac{a}{m}$ y $\frac{b}{m}$, que dan la proporcion evidente $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} :: a : b$, puesto que los términos de la segunda razon son los mismos de la primera multiplicados por un mismo número, por m.

Pero la proporcion está planteada de manera que el primer quebrado es al segundo como el numerador del primero es al numerador del segundo.

Luego, segun lo dicho anteriormente, los quebrados y sus numeradores están en *razon directa*.

Si los quebrados tuviesen distinto denominador, se reducirían á un comun denominador, y despues se haría el razonamiento anterior: y con esto queda demostrada la primera parte de la proposicion.

Sean los nuevos quebrados $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{c}$ que dan la proporcion evidente $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} :: \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, puesto que los términos de la segunda razon son los mismos de la primera divididos por un mismo número, por a.

Multiplicando los dos términos de la segunda razon por el producto $b \times c$, tendrémos

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{c} :: \frac{b \times c}{b} : \frac{b \times c}{c}, \text{ ó bien } \frac{a}{b} : \frac{a}{c} :: c : b.$$

Pero la proporcion está planteada de manera que el primer quebrado es al segundo como el denominador del segundo es al denominador del primero.

Luego, segun lo dicho hace un momento, los quebrados y sus denominadores están en *razon inversa*.

Si los quebrados tienen distinto numerador, se reducen á un comun numerador, y despues se hace el razonamiento anterior; y con esto queda demostrada la segunda parte de la proposicion.

Regla de tres.

100. *Regla de tres* es una cuestion en la cual se trata de determinar una cantidad desconocida, en funcion de *tres conocidas*, por medio de una proporcion.

1.ª *Habiendo costado* 10 *kilógramos de azúcar* 20 *pesetas, ¿cuánto costarán* 5 *kilógramos?*

10 kilógramos. . . . . 20 pesetas.
5 kilógramos. . . . . x »

Puesto que 5 kilógramos costarán la mitad que 10, estos números están en razon directa con sus precios. Y para que x ocupe el cuarto lugar, que es lo más cómodo, se empieza la proporcion por el término no correspondiente de x: las razones van de mayor á menor; pero si se tratase de averiguar el precio de un número de kilógramos mayor que 10, irían de menor á mayor.

$$10 : 5 :: 20 : x = \frac{5 \times 20}{10} = 10.$$

2.ª 10 *hombres han invertido* 20 *dias en levantar una pared ¿cuántos dias invertirán* 5 *hombres?*

10 hombres.. . . . . 20 dias.
5 hombres.. . . . . x »

Puesto que 5 hombres invertirán doble número de dias que 10 hombres, estos números de hombres están en razon inversa con los números de dias. Y para que x ocupe el cuarto lugar, que es lo más cómodo, y hasta lo más elegante, se empezará la proporcion por el término correspondiente de x, y las razones van en este caso de menor á mayor; pero si se tratase de averiguar los dias que invertirían doce hombres, por ejemplo, entónces las razones irían de mayor á menor.

$$5 : 10 :: 20 : x = \frac{10 \times 20}{5} = 40.$$

191. Estas cuestiones se resuelven por otro método llamado de *reduccion á la unidad.*

En efecto: *Si* 10 *kilógramos costaron* 20 *pesetas, un kilógramo costará* $\frac{20}{10} = 2$ *pesetas, y* 5 *kilógramos costarán* 2×5, *ó sean* 10 *pesetas.*

Regla de tres compuesta.

102. Las cuestiones que hemos tratado (**100**), dependían de una sola circunstancia, y se resolvían por consiguiente por medio de una sola proporcion.

Pero hay otras muchas dependientes de dos ó más circunstancias, dando lugar cada una de éstas á una proporcion diferente. El tipo de estas cuestiones se llama *regla de tres compuesta;* y para distinguirla llamarémos *regla de tres simple* á la cuestion general tratada ántes (**100**).

Un ejemplo de *regla de tres compuesta* nos dará á conocer mejor esta cuestion :

Si 10 *hombres en* 12 *dias, trabajando* 8 *horas por dia, han hecho* 100 *metros de pared;* 6 *hombres en* 10 *dias, trabajando* 12 *horas, ¿cuántos metros harán?*

Análisis del problema. La determinacion del número de metros que se nos pide depende de tres circunstancias, que son : una relativa á hombres, otra á dias y la tercera á las horas de trabajo por dia. Cada una de estas circunstancias da lugar á una proporcion distinta. Y como no pueden plantearse á la vez las tres proporciones, hay que recurrir á algun artificio que permita ir planteando una á una las proporciones y llevar de este modo la cuestion al terreno de la regla de tres simple, que ya sabemos resolver.

Y esto se consigue, suponiendo dos circunstancias iguales por medio de nuevos enunciados, que serán de esta manera :

Si 10 hombres en 12 dias, á 8 horas, han hecho 100 metros de pared; 6 hombres en 12 dias, á 8 horas, ¿cuántos metros harán?

La cuestion queda limitada á hombres y metros : están (en igualdad de circunstancias) en razon directa : y la proporcion será $10 : 6 :: 100 : y$.

Por manera que y representa los metros de pared que harán los 6 hombres en 12 dias, trabajando 8 horas por dia. Y como lo que han de trabajar son 10 dias, darémos un nuevo enunciado, diciendo :

Si 6 hombres en 12 dias, á 8 horas por dia, han hecho y metros de pared : 6 hombres en 10 dias, á 8 horas por dia, ¿cuántos metros harán?

La cuestion queda, pues, limitada á dias y metros : están en razon directa : y la proporcion será $12 : 10 :: y : z$.

De suerte que z representa el número de metros que harán los 6 hombres en 10 dias, trabajando 8 horas por dia. Y como lo que han de trabajar al dia son 12 horas, darémos un nuevo enunciado diciendo :

Si 6 hombres en 10 dias, trabajando 8 horas al dia, han hecho z metros de pared : 6 hombres en 10 dias, trabajando 12 horas al dia ¿cuántos metros harán?

La cuestion queda, por último, limitada á horas y metros : están en razon directa : y la proporcion será $8 : 12 :: z : x$.

Donde x nos da el número de metros pedido, y por consiguiente resuelta la cuestion.

Para hallar ahora el valor numérico de x, pueden seguirse dos métodos : ó se determina en la primera proporcion el valor de y, que sustituido por y en la segunda nos da el de z, que sustituido por z en la tercera nos da finalmente el de x : ó se multiplican ordenadamente las tres proporciones, y, hechas las reducciones convenientes, obtenemos inmediatamente el valor de x. Nosotros seguirémos ámbos por vía de comprobacion.

$$\text{Primer método...}\left\{\begin{array}{l} 10 : 6 :: 100 : y = \dfrac{100 \times 6}{10} = 60 \\ 12 : 10 :: 60 : z = \dfrac{10 \times 60}{12} = 50 \\ 8 : 12 :: 50 : x = \dfrac{12 \times 50}{8} = 75 \end{array}\right.$$

$$\text{Segundo método.}\left\{\begin{array}{l} 10 : 6 :: 100 : y \\ 12 : 10 :: y : z \\ 8 : 12 :: z : x \end{array}\right.$$

$$\overline{10 \times 12 \times 8 : 6 \times 10 \times 12 :: 100 \times y \times z : y \times z \times x;}$$

suprimiendo los factores z é y comunes al antecedente y consecuente de la segunda razon, tendrémos :

$$10 . 12 . 8 : 6 . 10 . 12 :: 100 : x = \frac{6 . 10 . 12 . 100}{10 . 12 . 8} = \frac{6 . 100}{8} = \frac{3 . 100}{4} = 3 \times 25 = 75$$

75 son, pues, los metros de pared que harán los 6 hombres en 10 dias, trabajando 12 horas por dia.

Regla de compañía.

103. *Regla de compañía* es una cuestion en la cual se trata de determinar la *ganancia* ó *pérdida* que corresponde á cada uno de varios individuos que han puesto su capital en un fondo comun, en proporcion con estos capitales y en proporcion tambien con el tiempo que hayan estado puestos en el fondo.

Pueden ocurrir tres casos : 1.° que el tiempo sea el mismo y diferentes los capitales : 2.° que los capitales sean iguales y el tiempo diferente : y 3.° que sean diferentes los tiempos y los capitales.

De la definicion misma que hemos dado de la *regla de compañía*, se deduce que :

Las *ganancias* ó *pérdidas* son proporcionales á los capitales respectivos ; y las de un mismo capital son proporcionales al tiempo que permanece en el fondo.

Luego, las *ganancias* ó *pérdidas* de dos ó más capitales distintos que están en el fondo comun tiempos desiguales, son proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.

104. Primer caso. *Tiempos iguales y capitales desiguales.*

Ejemplo : Tres amigos se reunieron para un negocio cualquiera, poniendo uno 10000 pesetas, otro llevó 15000, y 12000 el tercero.

A los 19 meses de tener estos capitales en sociedad, se disolvió ésta, por causas que no nos interesan, y en la liquidacion que hicieron apareció una ganancia ó pérdida de 5000 pesetas, *¿cuánto correspondió á cada socio?*

Es evidente que 10000 : á su ganancia ó pérdida :: 15000 : á su ganancia ó pérdida :: 12000 : á su ganancia ó pérdida. Y recordando que suma de antecedentes es á suma de consecuentes como un antecedente es á su consecuente, podemos establecer la fórmula siguiente :

$$37000 : 5000 :: \left\{ \begin{array}{l} 10000 : x = 1351{,}351 \\ 15000 : y = 2027{,}027 \\ 12000 : z = 1621{,}622 \end{array} \right.$$

$$\overline{5000}$$

Representando por x, y, z, la ganancia ó pérdida respectiva del primero, segundo y tercer asociado, cuya suma es, en efecto, igual á 5000 pesetas.

Al último le correspondían 1621,621 pesetas ; pero se le dió una milésima más, porque había de resto $\frac{23}{37}$ de milésima que es más de media milésima.

105. Segundo caso. *Capitales iguales y tiempos desiguales.*

Ejemplo : Un caballero particular acometió una empresa cualquiera con un capital cualquiera ; á los dos años se le asoció un amigo con un capital igual al suyo ; un año más tarde se les unió un tercer amigo con un capital igual al de aquéllos, y dos años despues de esto se hizo liquidacion, de la que resultó una ganancia ó pérdida de 200 pesetas, *¿cuánto correspondió á cada uno?*

Del enunciado se desprende que el primer socio tuvo invertido el capital 5 años, 3 el segundo, y 2 el tercero.

Es evidente que

5 años : g. ó p. del 1.° :: 3 años : g. ó p. del 2.° :: 2 años : g. ó p. del 3.°

Y recordando que suma de antecedentes es á suma de consecuentes como un antecedente es á su consecuente, estableceremos la fórmula siguiente :

$$10 : 200 :: \begin{cases} 5 : x = 100 \\ 3 : y = 60 \\ 2 : z = \underline{40} \end{cases}$$
$$\qquad\qquad\qquad 200$$

Representando por x, y, z la ganancia ó pérdida respectiva del primero, segundo y tercer asociado, cuya suma es, en efecto, igual á 200 pesetas.

106. Tercer caso. *Capitales y tiempos desiguales.*

Los capitales de tres socios eran 150, 200 y 500 pesetas ; el primero puesto en el fondo por 5 años, por 4 el segundo y por 2 el tercero : ganaron ó perdieron 1000 pesetas, ¿cuánto correspondía á cada uno?

Pero

150 pesetas	por 5 años,	son lo mismo que 150×5	pesetas	en un año ;	750
200 »	por 4 »	son como. . . . . 200×4	»	por un año ;	800
500 »	en 2 »	son lo mismo que 500×2	»	en un año ;	1000

y estamos en el caso primero.

Escolio 1.° El tercer caso es lo que se llama por algunos *regla de compañía compuesta.*

Escolio 2.° Esta cuestion, conocida con el nombre de *regla de compañía*, puede ser considerada bajo otro aspecto : *bajo el de dividir un número en partes proporcionales á otros números dados.*

En efecto : en el primer caso hemos dividido el número 5000 en partes proporcionales á los números 10000, 15000 y 12000.

En el segundo hemos dividido el número 200 en partes proporcionales á los números 5, 3 y 2.

Y en el tercero se trataba de dividir el número 1000 en partes proporcionales á los números 750, 800 y 1000.

Vamos á confirmarlo, dividiendo 36000 en partes proporcionales á los números 1, 2, 3 y 9.

$$15 : 36000 :: \left\{ \begin{array}{l} 1 : x = 2.400 \\ 2 : y = 4.800 \\ 3 : z = 7.200 \\ 9 : u = 21.600 \end{array} \right.$$
$$\overline{36.000}$$

Sin necesidad de más proporcion que para determinar el valor de x, el de y pudo obtenerse multiplicando por 2 el de x, el de z sumando los dos primeros, y el de u multiplicando por 3 el de z. Y esto se presta á servir de enunciado de un nuevo problema:

Distribuir 36000 pesetas entre cuatro personas, de modo que la segunda lleve doble que la primera, la tercera tanto como la primera y la segunda juntas, y la cuarta lleve el triplo de la tercera.

Regla de interes.

107. Se acostumbra á llamar *capital* á una cantidad cualquiera de dinero que se presta con el objeto de que produzca una ganancia ó rédito convenido entre el dueño del capital y el que lo recibe á préstamo.

Se llama *interes* la ganancia que produce un *capital* prestado.

Para mayor uniformidad en la manera de determinar el *interes,* se conviene generalmente en el que producen 100 unidades en un año, y es lo que, considerado como número abstracto, llamamos *tanto por ciento.*

El interes de un capital se considera *simple* ó *compuesto*, segun que no se agrega, ó se agrega al capital.

En el primer caso se pagan los intereses al fin de cada unidad de tiempo, que generalmente es un año; quedando el capital siempre el mismo: aunque sabemos que hay quienes pagan anticipado, y hasta por meses y semanas.

En el segundo caso, el capital va aumentando anualmente con los intereses del año anterior, hasta que, en una sola vez, y segun lo estipulado, paga la víctima capital é intereses de intereses.

Interes simple.

Dos casos pueden ocurrir en esta cuestion, segun que el capital esté impuesto por un año, ó por más ó ménos de un año.

108. *Primer caso.* QUE EL CAPITAL ESTÉ IMPUESTO POR UN AÑO.

EJEMPLO: *¿ Qué producen en un año* 10000 *pesetas al* 5 *por* 100 ?

Cárlos Botello

A doble triplo, etc. capital, corresponden dobles, triplos, etc. intereses ó réditos.

Luego, los intereses ó réditos son proporcionales á los capitales; luego la siguiente proporcion es evidente:

Capital menor es á *capital* mayor como interes menor es á interes mayor, ó sea $100 : 10000 :: 5 : x = \frac{10000 \times 5}{100} = 500.$

O bien 100 : *capital* :: *tanto por* 100 : *interes* que se pide.

En esta cuestion entran cuatro cantidades, á saber: 100, capital, tanto por ciento é intereses. La primera de ellas, 100, es constante, y las otras tres variables: y habrá sobre este tema tres cuestiones, segun que se trate de determinar cada una de aquéllas en funcion de las demás. Ya hemos resuelto la primera: ahora darémos los enunciados y resolucion de las otras dos, que son tan fáciles como se verá.

2.ª *¿Qué capital es el que en un año al* 5 *por* 100 *produce ó ha producido* 500 *pesetas?*

$$5 : 500 :: 100 : x = \frac{500 \times 100}{5} = 10000.$$

3.ª *¿Al cuánto por* 100 *se impondrán ó habrán sido impuestas* 10000 *pesetas para producir* 500 *pesetas de intereses ó réditos?*

$$10000 : 100 :: 500 : x = \frac{100 \times 500}{10000} = 5.$$

109. *Segundo caso.* QUE EL CAPITAL ESTÉ IMPUESTO MAS Ó MENOS DE UN AÑO.

EJEMPLO: *¿Qué producen* 10000 *pesetas en* 6 *meses*, *al* 5 *por* 100 *al año?*

El mes comercial tiene 30 dias y el año comercial 360: por consiguiente, 6 meses son 180 dias.

Pero segun el caso anterior, los intereses y los capitales son proporcionales; ó bien capital menor es á capital mayor, como interes menor es á interes mayor: ó lo que es lo mismo, $100 : 10000 :: 5 : y$ representando por y el interes anual.

Por otra parte, á doble, triplo, etc. tiempo corresponden dobles, triplos, etc. intereses ó réditos. Luego los intereses ó réditos son tambien proporcionales á los tiempos: luego es evidente la proporcion siguiente: 1 año es al tiempo en que el capital está impuesto como el interes anual es al interes pedido. Y tomando por unidad de tiempo el dia, y reduciendo ó expresando por dias un año y el tiempo durante el cual el capital está impüesto, tendrémos

$$360 : 180 :: y : x.$$

Y multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, y suprimiendo el factor y comun al antecedente y consecuente de la segunda razon, resulta

$$36000 : 10000 \times 180 :: 5 : x = \frac{10000 \times 180 \times 5}{36000} = \frac{9000}{36} = 250.$$

Y en general 36000 : al *capital* multiplicado por el *tiempo* :: el *tanto* por 100: al *interes* pedido.

O bien 36000 : $c \times t$ :: *tanto* por 100 : *interes* que se pide.

En esta cuestion entran cinco cantidades, á saber: 100, capital, tiempo, tanto por ciento y rédito ó interes. La primera de ellas, 100, es constante, y las otras cuatro variables, y surgen de aquí cuatro cuestiones segun que se trata de determinar cada una de aquéllas en funcion de las demás: queda resuelta la primera: pasemos á dar los enunciados y resolucion de las otras tres, que no presentan dificultad alguna.

2.ª *¿Qué capital es el que en* 6 *meses produce* 250 *pesetas al* 5 *por* 100 *al año?*

$$5 : 250 :: 36000 : 180 \times x ; x = \frac{250 \times 36000}{5 \times 180} = \frac{9000000}{900} = \frac{90000}{9} = 10000.$$

3.ª *¿Al cuánto por* 100 *al año habrá de imponerse, ó habrá sido impuesto, un capital de* 10000 *pesetas para que produzca, ó haya producido, en* 6 *meses* 250 *pesetas?*

$$10000 \times 180 : 36000 :: 250 : x = \frac{36000 \times 250}{10000 \times 180} = \frac{9000000}{1800000} = \frac{90}{18} = 5.$$

4.ª *¿Qué tiempo estarán impuestas* 10000 *pesetas para que, al* 5 *por* 100 *al año, produzcan* 250 *pesetas?*

$$5 : 250 :: 36000 : 10000 \times x ; x = \frac{250 \times 36000}{5 \times 10000} = \frac{9000000}{50000} = \frac{900}{5} = 180.$$

Escolio. Esa misma cuestion ha podido resolverse tomando por unidad de tiempo el mes.

En efecto : 100 : 10000 :: 5 : y , representando por y el interes anual.

Pero $$12 : 6 :: y : x.$$

Luego, $$1200 : 10000 \times 6 :: 5 : x = \frac{10000 \times 6 \times 5}{1200} = \frac{300000}{1200} = \frac{3000}{12} = 250.$$

Y las cuestiones 2.ª, 3.ª y 4.ª pueden resolverse asimismo tomando el mes por unidad de tiempo.

Escolio 2.° Tambien puede tratarse la cuestion tomando por unidad de tiempo el año.

Ejemplo : *¿ Qué producen* 10000 *pesetas en 4 años al* 5 *por* 100 *al año ?*

En efecto : 100 : 10000 :: 5 : y, representando por y el interes anual.

Pero $$1 : 4 :: y : x.$$

Luego , $$100 : 10000 \times 4 :: 5 : x = \frac{10000 \times 4 \times 5}{100} =$$

$$\frac{50000}{10} \times 4 = 500 \times 4 = 2000.$$

Esto quiere decir que cuando el capital está impuesto un número cabal de años , como 4 años , 6 años ; en vez de tomar el año por unidad de tiempo y resolver la cuestion como acaba de hacerse , es más sencillo hallar el interes anual (**108**), y multiplicarle por el número de años.

Esto en cuanto á la determinacion del *interes* ó *rédito*. Pero si se trata de determinar el *capital* , el *tanto por ciento* ó el *tiempo* , conocidas respectivamente las otras tres cantidades, entónces puede tomarse por unidad de tiempo el año, segun se ha dicho en el presente *Escolio* , y seguir el mismo procedimiento que se siguió , tomando por unidad de tiempo el dia.

Interes compuesto.

110. Si el interes ó rédito que produce un capital en una unidad de tiempo dada, se agrega al mismo capital para producir nuevo interes en la misma unidad de tiempo siguiente, entónces se llama *interes compuesto*.

¿ Cuánto producen 10000 *pesetas en* 3 *años á interes compuesto al* 5 *por* 100 ?

$$100 : 10000 :: 5 : x = \frac{10000 \times 5}{100} = 500 \text{ pesetas: es lo que da}$$

de interes al fin del primer año.

El capital que juega durante el segundo año será 10500 pesetas.

$$\text{Luego, } 100 : 10500 :: 5 : y = \frac{10500 \times 5}{100} = \frac{52500}{100} = 525 \text{ pe-}$$

setas : es lo que da de interes al fin del segundo año.

El capital impuesto durante el tercer año será 11025 pesetas.

$$\text{Luego } 100 : 11025 :: 5 : z = \frac{11025 \times 5}{100} = \frac{55125}{100} = 551{,}25 :$$

es lo que da de interes al fin del tercer año.

El capital se ha convertido, pues, al fin del tercer año en 11576,25 pesetas.

Este método, aunque suficiente, es muy embarazoso en ejemplos complicados.

111. Busquemos la fórmula del capital C en que se habrá convertido el primitivo c prestado á interes compuesto por T años al $100r$ por 100, ó sea al r por 1, puesto que $100 : 100r :: 1 : r$.

El interes del capital c al fin del primer año, se obtiene por la proporcion $100 : 100r :: c : x = cr$.

Al fin del primer año se habrá convertido el capital c en

$$c + cr = c(1 + r).$$

El interes al fin del segundo año

$$100 : 100r :: c(1 + r) : y = cr(1 + r).$$

Al fin del segundo año el capital es

$$c(1 + r) + cr(1 + r) = c + cr + cr + cr^2 = c + 2cr + cr^2 = c(1 + 2r + r^2) = c(1 + r)^2$$

El interes al fin del tercer año

$$100 : 100r :: c(1+r)^2 : z = cr(1+r)^2$$

Al fin del tercer año el capital es

$$c(1+r)^2 + cr(1+r)^2 = (c+cr)(1+r)^2 = c(1+r)(1+r)^2 = c(1+r)^3$$

El interes al fin del cuarto año

$$100 : 100r :: c(1+r)^3 : u = cr(1+r)^3$$

Al fin del cuarto año el capital es

$$c(1+r)^3 + cr(1+r)^3 = (c+cr)^3(1+r)^3 = c(1+r)(1+r)^3 = c(1+r)^4$$

y continuando de esta manera al fin de t años, el capital total será igual á $c(1+r)^t$.

Apliquemos esta fórmula al ejemplo anterior, cuyos datos serán: $c = 10000$ pesetas, $100r = 5$, ó bien $r = 0{,}05$, y $t = 3$ años.

Tendrémos, pues, $C = 10000 \times (1 + 0{,}05)^3$

ó bien $C = 10000 \times (1{,}05)^3$

ó lo que es lo mismo $C = 10000 \times 1{,}157625.$

y por último $C = 11576{,}25$ pesetas.

Regla de descuento.

112. Se llama en el comercio *descuento* de una *letra de cambio* la diferencia que hay entre el valor nominal de la *letra*, cuyo pago vence á cierto plazo, y su valor real y efectivo ántes de la fecha del plazo.

¿Qué descuento tiene una letra de 10000 *pesetas que vence dentro de un año, estando en la plaza el descuento al* 5 *por* 100*?*

Como 100 pesetas producen al comerciante 5 al cabo de un año, recíprocamente, anticipando un año el pago de las 105 pesetas, no valen éstas más que 100, y el descuento se hallará diciendo:

$$105 : 5 :: 10000 : x = \frac{5 \times 10000}{105} = 476{,}2 \text{ pesetas.}$$

$10000 - 476{,}2$; ó bien $9523{,}8$ será el valor efectivo de la letra, que tambien puede obtenerse directamente por medio de la proporcion siguiente:

$$105 : 100 :: 10000 : z = \frac{100 \times 10000}{105} = 9523{,}8 \text{ pesetas.}$$

Escolio. No falta quien por ignorancia, ó mala fe, haga el descuento así:

100 : 5 :: 10000 : $x = 500$; y dan por valor efectivo 9500 pesetas en vez de 9523,8.

Y de esta manera cobran 23,8 pesetas de más, esto es, cobran el verdadero descuento más el rédito del descuento.

Despues de todo, comprendemos bien que el más necesitado cederá; y el descuento se hará á gusto del ménos necesitado, salvo aquellos casos en que se dé con hombres honrados.

FONDOS PÚBLICOS.

113. Se llaman *fondos públicos* toda clase de capitales prestados al Gobierno de una Nacion, y cuyos intereses paga éste por semestres, en tanto que amortiza el capital recibido.

Hay multitud de conceptos y títulos de la Deuda pública, cuyos valores *suben* y *bajan* segun el estado más ó ménos próspero del país.

Estos títulos son *negociables* ó *transferibles*, y se venden y compran en una casa de contratacion inspeccionada por el Gobierno, que se llama LA BOLSA.

Escogerémos el papel llamado *Deuda consolidada del* 3 *por* 100 *al año* para presentar algunos ejemplos de los negocios que caben en este asunto.

Por esta deuda paga el Gobierno un rédito de 3 por 100 al año. Y como el valor de este papel sufre varias vicisitudes, supongamos que está al 50 por 100: lo cual quiere decir que con 50 pesetas efectivas se compran 100 pesetas en papel ó nominales, y que las 3 pesetas que paga de intereses el Gobierno por cada 100 pesetas nominales son como si se pagasen por cada 50 efectivas.

Esto supuesto, *¿qué cantidad de Deuda consolidada del* 3 *por* 100 *podrá comprarse con* 250000 *pesetas, estando dicho papel á* 50 *por* 100?

Si con 50 pesetas efectivas se compran 100 nominales, la proporcion será:

$$50 : 100 :: 250000 : x = \frac{100 \times 250000}{50} = 500000 \text{ pesetas nominales.}$$

¿A cuánto por 100 *impuso su capital una persona en el negocio anterior?*

Si 50 producen 3 en un año, la proporcion será $50 : 100 :: 3 : x = \frac{100 \times 3}{50} = 6$ por 100.

¿Qué renta anual se ha proporcionado el comprador con el mismo negocio anterior?

Si 50 producen 3 en un año, la proporcion será como sigue :

$$50 : 250000 :: 3 : x = \frac{250000 \times 3}{50} = \frac{750000}{50} = 15000 \text{ pesetas de renta anual.}$$

¿Qué cantidad efectiva ha de emplearse en consolidados del 3 *por* 100 *para proporcionarse una renta anual de* 15000 *pesetas, estando dicho papel al* 50 *por* 100*?*

3 pesetas de renta se consiguen con 50 pesetas : luego

$$3 : 15000 :: 50 : x = \frac{15000 \times 50}{3} = \frac{750000}{3} = 250000 \text{ pesetas.}$$

¿Qué cantidad nominal de consolidados del 3 *por* 100 *ha de comprarse, para proporcionarse una renta efectiva de* 15000 *pesetas anuales, estando dicho papel al* 50 *por* 100 ?

100 pesetas nominales dan 3 de renta efectiva : luego

$$3 : 15000 :: 100 : x = \frac{15000 \times 100}{3} = 500000 \text{ pesetas nominales.}$$

Regla conjunta.

Esta regla y la siguiente, aunque no guarden con la *regla de tres* la íntima relacion que guardan las otras que anteceden, van seguidamente detras de éstas, porque así lo juzgan ménos irregular que en otro sitio todos los autores.

224. El objeto de esta regla es *determinar la relacion que hay entre monedas de dos naciones*, por medio de la relacion conocida que éstas tienen respectivamente con las de otras naciones.

Ejemplo. Sabiendo que

48 francos valen , ó bien. . .	=	52 chelines de Inglaterra ;
15 shills de Inglaterra. . . .	=	6 florines de Alemania :
50 florines de Alemania. . .	=	7 ducados de Hamburgo ;
14 ducados de Hamburgo. .	=	40 rublos de Rusia ;
¿Cuántos rublos valen		2500 *francos?*

Representando por x el número de rublos pedido, y multiplicando ordenadamente estas igualdades, tendrémos $48 . 15 . 50 . 14 \times x = 52 . 6 . 7 . 40 . 25000$.

Y dividiendo los dos miembros de la igualdad por lo que multiplica á x. resulta

$$x = \frac{2500 \times 40 \times 7 \times 6 \times 52}{14 \times 50 \times 15 \times 48} = \frac{25 \times 1 \times 1 \times 1 \times 52}{1 \times 1 \times 3 \times 1} = \frac{25 \times 52}{3} = \frac{1300}{3} =$$

433,33 rublos.

Al plantearse la operacion, ha de escribirse el segundo miembro de cada igualdad de la misma especie que sea el primer miembro de la igualdad siguiente.

La última igualdad del ejemplo expuesto equivaldria á decir :

x rublos = 2500 francos.

Una vez escrito el quebrado igual á x, no hay más que ir suprimiendo los factores comunes al numerador y denominador, para llegar al resultado final.

Regla de aligacion.

El objeto de esta regla es enseñar á resolver las dos cuestiones siguientes :

115. 1.ª *Hallar el precio de la mezcla* (ó sea el *precio medio*) *de varias especies*, sabido el número de las unidades que se mezclan y sus precios respectivos.

Y esto se averigua, *dividiendo el valor total de las unidades mezcladas por el número de estas unidades.*

Ejemplo. A un labrador le han reunido los mozos, en uno, tres montones de trigo que tenía ya limpio en la era, de la cantidad y precios siguientes :

Uno de 500 fanegas	de.	40 reales fanega.	
Otro de 600	id.	de.	38 id.
Y otro de 1000	id.	de.	37 id.

¿A cómo debe vender la fanega de trigo mezclado?

El primer monton valía. . . .	500×40.. . . .	= 20000	reales.
El segundo.	600×38.. . . .	= 22800	»
El tercero..	1000×37.. . . .	= 37000	»
	2100	79800	

Pues dividiendo el valor total (79800 rs.) por el número de fanegas (2100) mezcladas, sabrá el precio medio, ó bien

$$798 : 21 = 38 \text{ reales.}$$

116. No siempre han de ser mezclas y precios el asunto de esta cuestion.

Ejemplo: Una persona cuenta al pasar por el puente del Guadiana en esta ciudad 600 pasos, y al volver de paseo cuenta 590. Vuelve atrás para rectificar contando 604, y al venirse definitivamente cuenta 596. Cansado de tanta divergencia, suma los pasos de los cuatro paseos $600 + 590 + 604 + 596$; y el cociente de la suma 2390, partida por 4, número de paseos que dió, ó sea $597 \frac{1}{2}$ pasos, será la *longitud media* del puente en pasos.

En la medicion de alturas por la caida de un cuerpo pesado, haciendo uso de un reloj que marque segundos, así como en la medicion de alturas por medio del barómetro, se hace aplicacion tambien de esta regla.

117. 2.ª *Hallar el número de unidades de dos especies que han de mezclarse*, para que la mezcla tenga un precio dado, sabido el precio respectivo de aquéllas.

Y esto se averigua, *tomando de cada especie un número de unidades igual á la diferencia entre el precio medio dado y el de la otra especie.*

Ejemplo: Para vender la arroba de vino mezclado á 20 reales, ¿qué número de arrobas de á 14 ha de mezclarse, y qué número de á 25 reales arroba?

Es evidente que cada arroba de á 14 deja 6 de ganancia, y cada una de á 25, vendida á 20, da 5 reales de pérdida. Luego para que la ganancia y la pérdida sean iguales, basta mezclar 5 arrobas de á 14 (que dejan 30 reales de ganancia), con 6 de á 25 (que dan 30 reales de pérdida), y el problema queda resuelto segun la regla precedente.

Pero no es esta la única solucion. Porque si los números 5 y 6 se multiplican por 2, habria 60 reales de ganancia y 60 reales de pérdida, esto es, habria otra solucion.

Si se multiplican por 3, habria 90 reales de ganancia y 90 reales de pérdida: otra solucion, y así sucesivamente.

Luego el problema es indeterminado; quiere decir, que admite un número infinito de soluciones.

Escolio. Si en general, representamos por x el número de arrobas de á 14, y por z el de á 25, que hayan de mezclarse; siendo evidente que x arrobas dejan $6 \times x$ reales de ganancia, y que z arrobas dan $z \times 5$ reales de pérdida, igualando estos dos productos, resulta $6 \times x = 5 \times z$; de donde $5 : 6 :: x : z$.

Lo que nos dice en lenguaje vulgar: *los números que se han de mezclar de ambas especies* están en razon *inversa* de las diferencias de sus precios al precio medio.

ESCOLIO 2.° Para que estos problemas fuesen *determinados*, sería necesario plantearlos de nuevo, suponiendo, por ejemplo, que era conocida una de las cantidades que entrase en la mezcla, quedando una sola cantidad desconocida, para la cual habría un solo valor; que en eso consiste el ser *determinado* el problema, y se resolvería segun la regla de tres.

ESCOLIO 3.° *Si son tres ó más las especies*, se halla el número de unidades (que han de mezclarse) de dos cualesquiera de ellas, entre cuyos precios esté comprendido el precio medio: despues el de otras dos, y así sucesivamente.

PROGRESIONES POR DIFERENCIA.

118. *Progresion por diferencia* es una serie de números tales que restando de cada uno el anterior, se obtiene una misma diferencia, llamada *diferencia* de la progresion.

Si la *diferencia* es mayor que cero, los términos van creciendo y la progresion se llama *creciente;* si la *diferencia* es menor que cero, los términos van disminuyendo, y la progresion se llama *decreciente;* y si la *diferencia* es igual á cero, se repite el primer término, y no hay progresion.

Sean, por ejemplo las dos progresiones

$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17$ (Diferencia 2).
$\div 100 . 96 . 92 . 88 . 84 . 80 . 76 . 72$ (Diferencia — 4).

La primera es creciente, porque su diferencia 2 es mayor que 0.

La segunda es decreciente, porque su diferencia — 4 es menor que 0.

Las progresiones por diferencia se escriben como se ven y se leen, la primera, por ejemplo, 1 es aritméticamente á 3, como 3 es á 5, como 5 es á 7, como 7 es á 9, como 9 es á 11, etc.

Tambien se lee abreviadamente, diciendo: 1 es á 3, es á 5, es á 7, es á 9, etc.

Una progresion por diferencia no deja de serlo, porque se añada ó quite un mismo número á todos sus términos.

Una progresion *decreciente* se convierte en *creciente*, y viceversa, invirtiendo el órden de sus términos.

119. 1.ª *propiedad.* Segun la idea que hemos dado de las progresiones crecientes por diferencia, un término cualquiera es igual al que le precede más la *diferencia.* Luego:

El *segundo* término es igual al *primero* más la diferencia.

El *tercero* es igual al *segundo* más la diferencia, ó bien igual al *primero* más dos veces la diferencia.

El *cuarto* es igual al *tercero* más la diferencia, ó bien igual al *primero* más tres veces la diferencia.

Y en general, *un término cualquiera es igual al primero más tantas veces la diferencia como sea el número de términos que le precedan.*

Sea, para fijar las ideas en los escolares, la progresion general

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, e \,.\, f \ldots\ldots r \,.\, s \,.\, x \,.\, z \,.\, u;$$

que suponemos creciente, y representemos por d la diferencia.

Es evidente, despues de lo expuesto, que

$$\begin{aligned} b &= a + d, \\ c &= b + d = a + d + d = a + 2d, \\ e &= c + d = a + 2d + d = a + 3d, \\ f &= e + d = a + 3d + d = a + 4d, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Luego, si tenemos una progresion de un número n de términos, siendo a el primero, y u el último, delante de éste habrá $(n - 1)$ términos, y el último, en funcion del primero, será igual á éste más $(n - 1)$ veces la diferencia, ó bien, $u = a + (n - 1)d$, fórmula que, en lenguaje vulgar, reproduce el enunciado anterior.

Si la progresion es decreciente, tendrémos, por el contrario,

$$\begin{aligned} b &= a - d, \\ c &= b - d = a - d - d = a - 2d, \\ e &= c - d = a - 2d - d = a - 3d, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

y por consiguiente $u = a - (n - 1)d$.

2.ª Tambien es evidente que en la misma proporcion creciente de n términos:

$$\begin{aligned} z &= u - d, \\ x &= z - d = u - d - d = u - 2d, \\ s &= x - d = u - 2d - d = u - 3d, \\ r &= s - d = u - 3d - d = u - 4d, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Luego, *un término cualquiera es igual al último ménos tantas veces la diferencia como sea el número de términos que le sigan.*

Y el primero, en funcion del último, será igual á éste ménos $(n-1)$ veces la diferencia, ó bien $a = u - (n-1)d$.

Si la progresion es decreciente, tendrémos, por el contrario,

$$z = u + d,$$
$$x = z + d = u + d + d = u + 2d,$$
$$s = x + d = u + 2d + d = u + 3d,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

y por consiguiente $a = u + (n-1)d$.

3.ª Si de los dos miembros de la primera fórmula $u = a + (n-1)d$ restamos a, tendrémos $u - a = (n-1)d$: y dividiendo los dos miembros de ésta por $(n-1)$, resulta $\frac{u-a}{n-1} = d$, ó lo que es lo mismo $d = \frac{u-a}{n-1}$.

Y si la progresion es decreciente, $d = \frac{a-u}{n-1}$: fórmulas que nos dan el valor de la diferencia d, conocidos el primer término, el último, y el número de términos de la progresion.

Corolario. Y esto nos sirve para interpolar varios términos entre dos números dados.

Por ejemplo: vamos á interpolar tres términos entre los números 2 y 10, de modo que los cinco formen progresion.

Lo que se necesita es conocer la *diferencia*, porque conocida que sea, no hay más que añadirla al número 2, y despues al que se obtenga, y así sucesivamente, y queda resuelta la cuestion.

Pero $u = 10$, $a = 2$, $n - 1 = 4$; luego $d = \frac{10-2}{4} = 2$, y tendrémos:

$$\div 2 . 4 . 6 . 8 . 10.$$

Y si la interpolacion hubiese sido entre los números 10 y 2, tendríamos una progresion decreciente; y la segunda fórmula $d = \frac{a-u}{n-1} = \frac{10-2}{4} = 2$, nos daría restando 2 sucesivamente

$$\div 10 . 8 . 6 . 4 . 2.$$

Se conoce el carácter que ha de tener la progresion por el órden en que nos den los dos números. Así, al interpolar entre 2 y 50, será creciente la progresion, porque los números dados van de menor á mayor: miéntras que al interpolar entre 50 y 20 será decreciente, porque los números dados van de mayor á menor.

Llamando m al número de términos á interpolar, el denominador de las dos fórmulas últimas puede cambiarse en $m+1$, esto es, que lo mismo es decir, *el número de términos que habrá ménos uno*, como decir *el número de términos á interpolar más uno*, y las fórmulas serán $d=\frac{u-a}{m+1}$, y $d=\frac{a-u}{m+1}$.

Si, por último, en vez de hacer uso de la segunda, hubiésemos hecho uso de la primera fórmula para interpolar tres términos entre los números 10 y 2, su valor negativo nos habría dicho que la nueva progresion de cinco términos se obtenía por sustracciones sucesivas.

En efecto: $d=\frac{u-a}{m+1}$, siendo $u=2$, y $a=10$, nos dará $d=\frac{2-10}{3+1}=\frac{-8}{+4}=-2$.

Y como añadir algebráicamente -2, equivale á restar aritméticamente 2 (9), la nueva progresion $\div\, 10 \,.\, 10-2 \,.\, 8-2 \,.\, 6-2 \,.\, 4-2$, es, y no podía ménos de ser igual á la obtenida más arriba.

Corolario 2.° *Si entre cada dos términos consecutivos* (sin excepcion) *de una proporcion por diferencia*, sea creciente ó decreciente, *se interpola igual número de términos, los primitivos y los nuevos términos forman progresion.*

En efecto: sea la progresion general $\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, e \,.\, f \,.\, h \ldots\ldots$; y sea m el número de términos que se quiere interpolar entre a y b, entre b y c, entre c y $e\ldots\ldots$; las *diferencias* de las respectivas progresiones parciales serán $\frac{b-a}{m+1}$, $\frac{c-b}{m+1}$, $\frac{e-c}{m+1}\ldots\ldots$ Pero segun la idea que hemos dado de las progresiones por diferencia, los numeradores de estos quebrados son iguales; tambien lo son los denominadores: luego la *diferencia* es la misma para todas las progresiones parciales: y como el *último* término de cada una es al mismo tiempo el *primero* de la siguiente, podemos afirmar que todas las progresiones parciales, y por consiguiente todos los términos primitivos y nuevos, forman una sola y única progresion.

4.ª Dada la progresion $\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, e \,.\, f \,.\, g \,.\, h \,.\, m \,.\, n \,.\, o \,.\, u$, creciente ó decreciente, cuatro términos consecutivos cualesquiera, como g, h, m, n, forman una equidiferencia, puesto que la misma diferencia hay entre g y h, que entre m y n: por la misma razon forman equidiferencia dos términos consecutivos con otros dos consecutivos, aunque estos dos no estén á continuacion de los dos primeros, como a, b, o, u; y por la misma razon la forman tambien cuatro términos que estén dispuestos de manera que haya entre el primero y segundo la misma distancia que entre el tercero y cuarto, como a, c, n, u, ó bien a, e, m, u, ó bien a, f, h, u.

Tres términos consecutivos cualesquiera, como b, c, e, forman una equidiferencia contínua, puesto que entre el primero y segundo hay la misma diferencia que entre el segundo y tercero: y por la misma razon la forman tambien tres términos que estén dispuestos de manera que haya entre el primero y segundo la misma distancia que entre el segundo y tercero, como a, c, f, ó bien a, e, h, ó bien a, f, n, ó bien a, g, u.

Corolario De esta propiedad se deduce que $a+u=b+o=c+n=e+m=f+h=2g$; es decir, que en toda progresion por diferencia creciente ó decreciente, *la suma del primer término y último es siempre igual á la de los medios equidistantes de los extremos; é igual tambien al duplo del término medio, si el número de términos de la progresion es impar.*

Corolario 2.° Cada término es *antecedente*, *consecuente y medio diferencial*, excepcion hecha del primero, que es sólo *antecedente*, y del último, que no es más que *consecuente*.

5.ª *La suma de todos los términos es igual á la suma de los extremos multiplicada por la mitad del número de términos.*

En efecto: si representamos por S la suma de los términos de la progresion general $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, e \,.\, f \,.\, \ldots\ldots\ldots\ldots \, r \,.\, s \,.\, x \,.\, z \,.\, u$,

tendrémos. . $S=a+b+c+e+f+\ldots\ldots+r+s+x+z+u$,

ó bien. . . . $S=u+z+x+s+r+\ldots\ldots+f+e+c+b+a$.

Sumando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$2S=(a+u)+(b+z)+(c+x)+(e+s)+(f+r)+\ldots\ldots$$
$$+(r+f)+(s+e)+(x+c)+(z+b)+(u+a).$$

Y como los sumandos, que estos paréntesis representan, son iguales, segun el primer *Cor.* de la cuarta propiedad, tendrémos $2S=(a+u)+(a+u)+(a+u)+\ldots\ldots+(a+u)+(a+u)+(a+u)$, esto es, tantos sumandos $(a+u)$ como sea el número de términos de la progresion.

Luego si representamos por n el número de términos de la progresion, tendrémos $2S=(a+u)\times n$.

Y dividiendo por 2 los dos términos de esta igualdad, tendrémos finalmente $S = \frac{(a+u) \times n}{2}$, ó bien $S = (a+u) \times \frac{n}{2}$.

Corolario. Sustituyendo en esta fórmula, en vez del primero y último término, los correspondientes de las progresiones que siguen, representando por n el número total de términos de cada una, por $2n$ la forma general de los números *pares*, y por $2n - 1$ la de los *impares*, tendrémos

La suma de los números *naturales* 1, 2, 3, 4, 5, 6..... n, es $\frac{n(n+1)}{2}$, ó bien $(1+n) \times \frac{n}{2}$.

La suma de los números *pares* 2, 4, 6, 8, 10, 12..... $2n$, es $n(n+1)$.

La suma de los números *impares* 1, 3, 5, 7, 9, 11... $2n-1$, es n^2.

EJEMPLO:

La suma de los 100 primeros números naturales es $\frac{100(100+1)}{2} = 5050$.

PROGRESIONES POR COCIENTE.

120. *Progresion por cociente* es una serie de números tales que, dividiendo cada uno por el anterior, se obtiene un mismo cociente, llamado *razon* de la progresion.

Si la *razon* es mayor que la unidad, los términos van creciendo y la progresion se llama *creciente ;* si la *razon* es menor que la unidad, los términos van disminuyendo y la progresion se llama *decreciente ;* y si la *razon* es igual á la unidad, se repite el primer término y no hay progresion.

Sean, por ejemplo, las dos progresiones

$\div 3:6:12:24:48:96:192:384.\ldots\ldots\ldots$ (Razon 2).

$\div 880:440:220:110:55:27\frac{1}{2}:13\frac{3}{4}:6\frac{7}{8}.$ (Razon $\frac{1}{2}$).

La primera es creciente, porque su razon 2 es mayor que 1.

La segunda es decreciente, porque su razon $\frac{1}{2}$ es menor que 1.

Las progresiones por cociente se escriben como se ve y se leen, la primera por ejemplo,

3 es geométricamente á 6, como 6 es á 12, como 12 es á 24, etc.

Tambien se lee abreviadamente diciendo: 3 es á 6, es á 12, es á 24, etc.

Una progresion por cociente no deja de serlo porque se multipliquen ó se dividan todos sus términos por un mismo número.

Una progresion *decreciente* se convierte en *creciente*, y viceversa, invirtiendo el órden de sus términos.

121. *Primera propiedad.* Segun la idea que hemos dado de las progresiones crecientes por cociente, un término cualquiera es igual al que le precede multiplicado por la *razon*. Luego:

El *segundo* término es igual al *primero* multiplicado por la razon.

El *tercero* es igual al *segundo* multiplicado por la razon, ó bien al *primero* multiplicado por el cuadrado de la razon.

El *cuarto* es igual al *tercero* multiplicado por la razon, ó bien al *primero* multiplicado por el cubo de la razon.

Y, en general, *un término cualquiera es igual al primero multiplicado por la razon elevada á la potencia del grado que indique el número de términos que le preceden.*

Sea, para fijar las ideas en los alumnos, la progresion general

$$\div a : b : c : e : f : \ldots\ldots\ldots\ldots : p : q : x : z : u,$$

que suponemos creciente, y representemos por r la razon.

Es evidente, despues de lo expuesto, que

$$\begin{aligned} b &= a \times r, \\ c &= b \times r = a \times r \times r = a \times r^2, \\ e &= c \times r = a \times r^2 \times r = a \times r^3, \\ f &= e \times r = a \times r^3 \times r = a \times r^4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Luego si tenemos una progresion de un número n de términos, siendo a el primero y u el último, delante de éste habrá $(n-1)$ términos; y el último, en funcion del primero, será igual á éste multiplicado por la razon elevada á la potencia del grado $(n-1)$, ó bien $u = a \times r^{n-1}$, fórmula que en lenguaje vulgar reproduce el enunciado anterior.

Si la progresion es decreciente, tendrémos, por el contrario,

$$\begin{aligned} b &= \frac{a}{r}, \\ c &= \frac{b}{r} = \frac{a}{r} : r = \frac{a}{r^2}, \\ e &= \frac{c}{r} = \frac{a}{r^2} : r = \frac{a}{r^3}, \\ f &= \frac{e}{r} = \frac{a}{r^3} : r = \frac{a}{r^4}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

y por consiguiente $$u = \frac{a}{r^{n-1}}.$$

Carlos Botello

2.ª Tambien es evidente que en la misma progresion creciente de n términos

$$z = \frac{u}{r}$$

$$x = \frac{z}{r} = \frac{u}{r} : r = \frac{u}{r^2}$$

$$q = \frac{x}{r} = \frac{u}{r^2} : r = \frac{u}{r^3}$$

$$p = \frac{q}{r} = \frac{u}{r^3} : r = \frac{u}{r^4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Luego, *un término cualquiera es igual al último dividido por la razon elevada á la potencia del grado que indique el número de términos que le siguen.*

Y el primero, en funcion del último, será igual á éste dividido por la razon elevada á la potencia del grado $(n-1)$, ó bien $a = \frac{u}{r^{n-1}}$

Si la progresion es decreciente, tendrémos, por el contrario:

$$z = u \times r$$

$$x = z \times r = u \times r \times r = u \times r^2$$

$$q = x \times r = u \times r^2 \times r = u \times r^3$$

$$p = q \times r = u \times r^3 \times r = u \times r^4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y por consiguiente $a = u \times r^{n-1}$.

3.ª Si dividimos por a los dos miembros de la primera fórmula $u = a \times r^{n-1}$, tendrémos $\frac{u}{a} = r^{n-1}$: y extrayendo de los dos miembros de esta igualdad la raíz $(n-1)$, resulta $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = r$; ó lo que es lo mismo, $r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$.

Y si la progresion es decreciente, $r = \sqrt[n-1]{\frac{a}{u}}$; fórmulas que nos dan el valor de la razon r, conocido el primer término, el último, y el número de términos de la progresion.

Corolario. Y esto nos sirve para interpolar varios términos entre dos números dados.

Por ejemplo: vamos á interpolar tres términos entre los números 2 y 32, de modo que los cinco formen progresion.

Lo que se necesita es conocer la razon, porque conocida que sea, no hay más que multiplicarla por el número 2, y despues por el que se obtenga, y así sucesivamente, y queda resuelta la cuestion.

Pero $u = 32$, $a = 2$, $n - 1 = 4$, luego $r = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$,

y tendrémos:

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32.$$

Y si la interpolacion hubiese sido entre los números 32 y 2, tendríamos una progresion decreciente: y la segunda fórmula

$r = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$, nos daría, dividiendo sucesivamente por 2,

$$\div 32 : 16 : 8 : 4 : 2.$$

Se conoce el carácter que ha de tener la progresion por el órden en que nos dan los dos números. Así al interpolar entre 2 y 32 será creciente la progresion, porque los números dados van de menor á mayor: miéntras que, al interpolar entre 32 y 2, será decreciente, porque los números dados van de mayor á menor.

Llamando m al número de términos á interpolar, el índice del radical de las dos fórmulas últimas puede cambiarse en $m + 1$, esto es, que lo mismo es decir *el número de términos que habrá ménos uno*, como decir *el número de términos á interpolar más uno*, y las fórmulas serán $r = \sqrt[m+1]{\frac{u}{a}}$, y $r = \sqrt[m+1]{\frac{a}{u}}$.

Si, por último, en vez de hacer uso de la segunda, hubiésemos hecho uso de la primera fórmula para interpolar tres términos entre los números 32 y 2, su valor fraccionario nos habría dicho, que la nueva progresion de cinco términos tambien se obtenía por divisiones sucesivas, puesto que lo mismo da multiplicar por $\frac{1}{2}$ que dividir por 2.

En efecto:

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{u}{a}} = \sqrt[4]{\frac{2}{32}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}.$$

Corolario 2.° *Si entre cada dos términos consecutivos* (sin excepcion) *de una progresion por cociente*, sea creciente ó decreciente, *se* *interpolan igual número de términos, los primitivos y los nuevos términos forman progresion.*

En efecto: sea la progresion general $\div a : b : h : i : j : l : .....$; y sea m el número de términos que se quiere interpolar entre a y b, entre b y h, entre h é i, ...; las razones de las respectivas progresiones parciales serán $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \sqrt[m+1]{\frac{h}{b}}, \sqrt[m+1]{\frac{i}{h}}, ...$ Pero segun la idea que hemos dado de las progresiones por cociente, las cantidades subradicales $\frac{b}{a}$, $\frac{h}{b}$, $\frac{i}{h}$, etc., son iguales; tambien lo es el grado de la raíz; luego la razon es la misma para todas las progresiones parciales: y como el *último* término de cada una es al mismo tiempo el *primero* de la siguiente, podemos afirmar que todas las progresiones parciales, y por consiguiente todos los términos, primitivos y nuevos, forman una sola y única progresion.

4.ª Dada la progresion $\div a : b : h : i : j : l : o : p : q : z : u$, creciente ó decreciente, cuatro términos consecutivos cualesquiera, como l, o, p, q forman una proporcion, puesto que $\frac{l}{o}$ es igual á $\frac{p}{q}$: por la misma consideracion forman proporcion dos términos consecutivos con otros dos consecutivos, aunque estos dos no estén á continuacion de los dos primeros, como a, b, z, u; y por la misma consideracion la forman tambien cuatro términos que esten dispuestos de manera que haya entre el primero y segundo la misma distancia que entre el tercero y cuarto, como a, h, q, u, ó bien a, i, p, u, ó bien a, j, o, u.

Tres términos consecutivos cualesquiera, como b, h, i forman una proporcion continua, puesto que $\frac{b}{h}$ es igual á $\frac{h}{i}$; y por la misma consideracion la forman tambien tres términos que estén dispuestos de manera que haya entre el primero y segundo la misma distancia que entre el segundo y tercero, como a, h, j, ó bien a, i, o, ó bien a, j, q, ó bien a, l, u.

Corolario 1.º De esta propiedad se deduce que $a \times u = b \times z = h \times q = i \times p = j \times o = l^2$; es decir, que en toda progresion por cociente, creciente ó decreciente, *el producto del primer término por el último es siempre igual al de los medios equidistantes de los extremos, é igual tambien al cuadrado del término medio, si el número de términos de la progresion es impar.*

Corolario 2.º Cada término es *antecedente*, *consecuente* y *medio* *proporcional*, excepcion hecha del primero que es sólo antecedente, y del último que no es más que consecuente.

5.ª *El producto de todos los términos de una progresion por cociente es igual á la raiz cuadrada del producto de los extremos elevado á la potencia del grado que indique el número de términos de la progresion.*

En efecto: si representamos por P el producto de los términos de la progresion general $\div a : b : c : \ldots : x : z : u$, tendrémos

$$P = abc \ldots\ldots xzu,$$

ó bien

$$P = uzx \ldots\ldots cba.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta

$$P^2 = abc \ldots\ldots xzu \times uzx \ldots\ldots cba;$$

é invirtiendo convenientemente el órden de los factores, tendrémos:

$$P^2 = au \times bz \times cx \ldots\ldots xc \times zb \times ua.$$

Pero segun el corolario 1.º de la propiedad anterior

$$au = bz = cx \ldots\ldots;$$

luego $P^2 = au \times au \times au \ldots\ldots au \times au \times au,$

esto es, tantos productos (au) como sea el número de términos de la progresion.

Luego si representamos por n el número de términos de la progresion, tendrémos:

$$P^2 = (au)^n.$$

y extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros de esta igualdad, tendrémos finalmente

$$P = \sqrt{(au)^n}.$$

6.ª *La suma de todos los términos de una progresion por cociente, es igual á la diferencia entre el primer término y el producto del último por la razon, dividida por la diferencia entre la unidad y la razon.*

En efecto: si representamos por S la suma de los términos de la progresion general $\div a : b : c : \ldots\ldots : x : z : u$, tendrémos

$$S = a + b + c + \ldots\ldots + x + z + u.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la razon r, y teniendo presente que el producto de cada término por r es igual al término siguiente, tendrémos:

$$Sr = b + c + \ldots\ldots + z + u + ur.$$

Restando ordenadamente de esta igualdad la primera, siempre que la progresion sea creciente, resulta

$$Sr - S = ur - a,$$

ó bien
$$S(r-1) = ur - a;$$

de donde
$$S = \frac{ur - a}{r - 1}.$$

Pero si la razon es menor que la unidad, esto es, si la progresion es decreciente, se resta ordenadamente la segunda igualdad de la primera, y se obtiene

$S - Sr = a - ur$, ó bien $S(1-r) = a - ur$, de donde $S = \dfrac{a - ur}{1 - r}$.

Números figurados.

122. Se llaman *números figurados* aquéllos que, por adiciones sucesivas, forman diferentes *series* de diferentes órdenes, pero derivadas unas de otras por una ley constante.

Por ejemplo: la serie de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc., forma la primera clase de los *números figurados de primer órden.*

Si á partir del primer término se suman sucesivamente los términos de la anterior, se obtienen los números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, etc., que son *números figurados de segundo órden*, llamados tambien *números triangulares,* y en general *poligonales.*

Si á partir del primer término se suman sucesivamente los términos de la anterior, se obtienen los números 1, 4, 10, 20, 35, 56, etc., que son *números figurados de tercer órden*, llamados tambien *números piramidales.*

Si á partir del primer término se suman sucesivamente los términos de la anterior, se obtienen los números 1, 5, 15, 35, 70, etc., que son *números figurados de cuarto órden.*

Y así sucesivamente se obtienen de *quinto*, *sexto*, *sétimo*, etc., *órden.*

123. Si recordamos que

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

poniendo al primer binomio el exponente 1 por analogía, observarémos que los coeficientes de los segundos términos en las potencias sucesivas, son *números figurados de primer órden*; los de los terceros términos son *números figurados de segundo órden*; los de los cuartos términos son *números figurados de tercer órden*; los de los quintos términos son *números figurados de cuarto órden*, y así sucesivamente.

De aquí, la importancia de los *números figurados* que, desde Arquímedes á Descartes, todos los sabios han estudiado con detenimiento. Importancia que han perdido, desde que Newton descubrió la fórmula de las potencias del binomio, que ha inmortalizado su nombre.

Número de balas que tienen las pilas que se forman en los parques de artillería.

124. Las pilas de balas en los parques de artillería se disponen de modo que sus capas horizontales sean triángulos equiláteros, ó cuadrados ó rectángulos (véase la *Geometría*).

Primer caso. *Pila triangular*. Las capas horizontales de esta pila son triángulos equiláteros, cuyos lados van disminuyendo en una bala hasta la capa superior, que consta de una sola. Es evidente que cada bala está sostenida por tres de la capa inferior, y que el número de capas es igual al de las balas del lado de la base.

El número de balas, siendo n el número de capas, será igual á la suma de los números triangulares siguientes:

$$1 + 3 + 6 + \ldots\ldots + \frac{1}{2}(n^2 + n).$$

Segundo caso. *Pila cuadrangular*. Las capas horizontales de esta pila son cuadrados, cuyos lados van disminuyendo en una bala hasta la capa superior, que consta de una sola. Es evidente que cada bala está sostenida por cuatro de la capa inferior, y que el número de capas es igual al de las balas del lado de la base.

El número de balas, siendo n el número de capas, será igual á la suma de los números cuadrados siguientes:

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots\ldots + n^2.$$

Tercer caso. *Pila rectangular.* Las capas horizontales de esta pila son rectángulos, cuyos lados van disminuyendo en una bala desde la base hasta la capa superior, que consta de una línea de balas. Es evidente que cada bala está sostenida por cuatro de la capa inferior, y que el número de capas es igual al de las balas del lado menor de la base.

Segun esto, si la capa superior de una pila rectangular tiene $m+1$ balas, la segunda tendrá $2(m+2)$, la tercera $3(m+3)$..... y la base (siendo n el número de capas) tendrá $n(n+m)$.

Y el número total de balas será

$$m(1+2+3+.....+n)+1^2+2^2+3^2+.....+n^2,$$

expresando n las balas del lado menor de la base y $n+m$ las del mayor.

LOGARITMOS.

125. Está demasiado próxima la teoría de las progresiones para que sin esfuerzo recordemos las fórmulas

$$u=a+(n-1)d \;..... \; u=a\times r^{n-1}.$$

$$d=\frac{u-a}{m+1} \;............\; r=\sqrt[m+1]{\frac{u}{a}}$$

$$S=\frac{(a+u)n}{2} \;..........\; P=\sqrt{(au)^n}.$$

Fórmulas que nos dicen elocuentemente las repetidas relaciones que hay entre los elementos, propiedades y operaciones existentes en las progresiones por diferencia y en las progresiones por cociente. Esas relaciones fueron las que indudablemente excitaron la atencion del escoces Néper á principios del siglo XVII, hasta el punto de que inventase los *logaritmos*, que permiten abreviar los cálculos de una manera ingeniosa y sorprendente: interesante teoría que, perfeccionada por su íntimo amigo Briggs, por Keppler, Euler y otros, hará que siempre se pronuncien con gratitud nombres tan gloriosos.

126. Se llaman *logaritmos* los términos de una progresion por diferencia, que, empezando por cero, se corresponden con los de otra por cociente que empieza por la unidad.

Dos progresiones que empiecen de esta manera, una por diferencia y otra por cociente, constituyen lo que se llama un *sistema de logaritmos*.

Si se dan dos progresiones cualesquiera, una por diferencia y otra por cociente, que no tengan esa forma, se consigue que la tengan, restando de todos los términos de la primera su primer término y dividiendo todos los términos de la segunda tambien por su primer término.

Logaritmo de un número dado es el término de la progresion por diferencia, correspondiente al *número dado* de la progresion por cociente, en un sistema de logaritmos dados.

Y como se pueden formar cuantos sistemas de logaritmos se quiera, con tal que las progresiones empiecen por 0 y por 1 respectivamente, de aquí que un mismo número puede tener diferentes logaritmos, y recíprocamente un mismo logaritmo puede corresponder á diferentes números, en sistemas diferentes.

Llámase *base de un sistema de logaritmos* el número que tiene por logaritmo la unidad.

La *base* puede ser entera, fraccionaria ó inconmensurable, y variable de un sistema á otro como los logaritmos de los números. Lo que es constante en todos los sistemas, es el logaritmo de la unidad, que en todos ellos es 0.

Las progresiones. . $\begin{cases} \div\ 0\ .\ 3\ .\ 6\ .\ 9\ .\ 12\ .\ 15\ .\ 18\ .\ 21\ \ldots\ldots \\ \div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128\ \ldots\ldots \end{cases}$

constituyen un sistema de logaritmos.

Y las progresiones $\begin{cases} \div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ .\ 7\ .\ 8\ \ldots\ldots \\ \div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256\ \ldots\ldots \end{cases}$

constituyen otro sistema diferente.

127. En todo sistema de logaritmos se verifican las propiedades siguientes :

1.ª *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.*

En efecto: en las progresiones generales

$$\div\ 0\ .\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ e\ .\ f\ .\ g\ .\ h\ .\ \text{etc.},$$
$$\div\!\div\ 1 : A : B : C : E : F : G : H : \text{etc.},$$

se verifica segun la 4.ª propiedad de las mismas, que

$$0 - a :: b - c \text{ y } 1 : A :: B : C;$$

de donde $\qquad c = a + b \quad \text{y} \quad C = A \times B.$

Pero, segun la idea que acabamos de dar de los logaritmos, tendrémos que a, b y c son los logaritmos respectivos de A, B y C: luego á la primera igualdad podemos darle esta forma log. C = log. A + log. B ; y como C = A × B, tendrémos, por último, logaritmo (A × B) = log. A + log. B.

Si fuesen tres ó más los factores, tendrémos :

$$\log. (F \times G \times H) = \log. (F \times GH) = \log. F + \log. (GH) = \log. F + \log. G + \log. H.$$

Corolario. *Para hallar el producto de dos ó más números*, se hallan los logaritmos respectivos de estos números, se suman despues, y el número correspondiente á esta suma será el producto pedido.

2.ª *El logaritmo de un cociente es igual á la diferencia del logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor.*

En efecto : por ser el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, tendrémos segun el principio anterior :

log. dividendo = log. divisor + log. cociente;

de donde log. dividendo — log. divisor = log. cociente,

ó bien log. *cociente* = log. dividendo — log. divisor.

Corolario. *Para hallar el cociente de un número por otro*, se resta del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, y el número correspondiente á esta diferencia será el cociente.

3.ª *El logaritmo de una potencia es igual al logaritmo del número que se ha de elevar multiplicado por el exponente de la potencia.*

En efecto : sea la potencia A^n, ó bien A . A . A. ..... hasta n factores, que puesta bajo la forma de igualdad será

$$A^n = A \times A \times A \times A \times A......$$

y tomando los logaritmos de los dos miembros de esta igualdad, resulta

$$\log. A^n = \log. A + \log. A + \log. A + ... = n \text{ veces } \log. A,$$

ó bien log. $A^n = n$ log. A.

Corolario. *Para hallar una potencia cualquiera de un número dado*, se halla el logaritmo de este número, se multiplica dicho logaritmo por el exponente de la potencia, y el número correspondiente á este producto será la potencia pedida.

4.ª *El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la potencia dividido por el índice de la raiz.*

En efecto : siendo evidente la igualdad $A = (\sqrt[n]{A})^n$, resulta, tomando los logaritmos de sus dos miembros

$$\log. A = n \log. \sqrt[n]{A},$$

de donde $$\log. \sqrt[n]{A} = \frac{\log. A}{n}.$$

Corolario. *Para extraer la raíz de un número dado cualquiera,* se divide su logaritmo por el índice de la raíz, y el número correspondiente á este cociente será la raíz pedida.

Construccion de las tablas de logaritmos.

128. Despues de conocer las cuatro propiedades precedentes y sus consecuencias, se comprende la gran utilidad que ofrecerá una coleccion de números enteros, que empezando por la unidad concluya en el número mayor posible, acompañada de sus correspondientes logaritmos (en un mismo sistema), y dispuestos de manera que dado un número, en el momento se halle su logaritmo y viceversa. Esa coleccion, mayor ó menor, es lo que se llama *Tabla de logaritmos.*

El sistema generalmente adoptado es el que tiene por *base* la misma que tiene nuestro sistema de numeracion. Las progresiones son:

$$\because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : 10000000 \ldots\ldots$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . \ldots\ldots$$

Si ahora interpolamos entre los términos 1 y 10 de la primera progresion un número tan crecido de *medios proporcionales* que si los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, no forman parte de él, siquiera difieran de algunos medios proporcionales en ménos de cualquier cantidad dada por pequeña que sea, de modo que puedan tomarse unos por otros sin error sensible: si despues interpolamos entre los términos 0 y 1 de la segunda un número de *medios diferenciales* igual al de *medios proporcionales* interpolados anteriormente, es claro que los términos de esta progresion parcial por diferencia serán los logaritmos respectivos de los términos de la nueva progresion por cociente obtenida más arriba.

Repitiendo estas consideraciones y estos procedimientos respecto de los términos 10 y 100 de la primera progresion, y 1 y 2 de la segunda; y despues respecto de 100 y 1000 de la primera, y 2 y 3 de la segunda; y continuando de esta suerte hasta donde se quiera, pero interpolando siempre entre cada dos términos consecutivos el mismo número de términos que se interpoló entre 1 y 10.

Haciendo caso omiso de los medios proporcionales y medios diferenciales que no nos sirven á nuestro propósito, y tomando en cuenta únicamente los números enteros consecutivos (que si no constituyen progresion por cociente, forman parte de ella), desde la unidad hasta donde se quiera, de una parte; y de otra, tomando sus logaritmos respectivos (que si no constituyen progresion por diferencia, forman parte de ella), habrémos formado, mejor dicho, habrémos explicado la posibilidad de formar una tabla de logaritmos, sean cuales fueren las *dificultades materiales* que la realizacion de las operaciones presente en la práctica.

129. Dos observaciones, de casi todos sabidas, presentarémos á fin de aminorar esas dificultades.

1.ª *Que teniendo los logaritmos de los números primos*, no hay necesidad de determinar directamente los de los *números no primos*; puesto que, segun la *primera propiedad*, log. 21, por ejemplo, es igual á log. $(7 \times 3) =$ log. $7 +$ log. 3; y así de los demás.

2.ª *Que se puede calcular el logaritmo de un número primo* con un error tan pequeño como se quiera, sin tener que extraer raíces del grado $(m + 1)$ que dice la fórmula $r = \sqrt[m+1]{\frac{u}{a}}$, siendo bastante con extraerlas de segundo grado.

Sea, por ejemplo, *hallar el logaritmo del número* 5.

Para ello interpolemos un medio proporcional entre 1 y 10, y un medio diferencial entre 0 y 1, de modo que tengamos:

$$1 : x :: x : 10 \quad \text{y} \quad 0 - z :: z - 1, \text{ de donde}$$

$$x = \sqrt{1 \cdot 10} = \sqrt{10} = 3{,}16227 \ldots \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{2} = 0{,}5;$$

ó lo que es lo mismo $0{,}5 =$ log. $3{,}16227.....$

Pero 5 es mayor que 3,16227..... y menor que 10; tenemos, pues, que interpolar un nuevo medio proporcional entre 3,16227...... y 10, y un nuevo medio diferencial entre 0,5 y 1, de modo que tengamos

$$3{,}16227 \ldots\ldots : x :: x : 10 \text{ y } 0{,}5 - z :: z - 1, \text{ de donde}$$

$$x = \sqrt{3{,}16227 \ldots \times 10} = \sqrt{31{,}6227 \ldots\ldots} = 5{,}623 \ldots \text{ y } z = \frac{0{,}5+1}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75;$$

ó lo que es lo mismo, $0{,}75 =$ log. $5{,}623.....$

Pero 5 es mayor que 3,162..... y menor que 5,623.....; tenemos, pues, que interpolar otro nuevo medio proporcional entre 3,162..... y 5,623..... y otro nuevo medio diferencial entre 0,5 y 0,75.

Continuando estas interpolaciones llegaríamos á obtener dos medios proporcionales, uno en pos de otro, que se diferenciasen uno de otro en ménos de cualquier cantidad dada por pequeña que fuese, y entre los cuales estaria comprendido el número 5. Podríamos, por consiguiente, tomar uno de ellos por el número dado 5, y el medio diferencial correspondiente al medio proporcional que se tome será el logaritmo pedido. Y análogamente se calcularán los logaritmos de los números primos 2, 3, 7, 11, 13, 17, etc.

Advertencia. Los alumnos que se dediquen al estudio especial de las Matemáticas, aprenderán, en las partes más elevadas de la ciencia, los métodos que hay mucho más expeditos para calcular los logaritmos.

Disposicion y uso de las tablas de logaritmos.

130. Se llaman *logaritmos de Briggs* (del nombre del autor de las primeras tablas de este sistema), y tambien *logaritmos vulgares* por estar generalmente adoptados —aunque hoy se nombran sin ese calificativo— los que están formados en el sistema de las progresiones que repetimos á continuacion.

$$\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000.....$$
$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6.....$$

De la simple inspeccion de estas dos progresiones se deduce que:

el logaritmo de la unidad es 0,
el logaritmo de 10 es 1,
el logaritmo de 100 es 2,
el logaritmo de 1000 es 3,
el logaritmo de 10000 es 4,

y, en general, los logaritmos de la unidad seguida de ceros, ó mejor dicho, los logaritmos de las diferentes potencias de la *base* 10, son números enteros, y positivos, compuestos de tantas unidades como unidades tenga el exponente de las diferentes potencias de 10.

Tambien se deduce que:

Los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10 son mayores que 0 y menores que 1, esto es, una fraccion, que, como las demás que en adelante mencionemos, vienen valuadas por Briggs y sus sucesores, en decimales:

Los logaritmos de los números comprendidos entre 10 y 100 son mayores que 1 y menores que 2, esto es, 1 mas una fraccion:

Los logaritmos de los números comprendidos entre 100 y 1000 son mayores que 2 y menores que 3, esto es, 2 más una fraccion:

Los logaritmos de los números comprendidos entre 1000 y 10000 son mayores que 3 y menores que 4, esto es, 3 más una fraccion: y así sucesivamente.

Se llama *característica* de un logaritmo á su parte entera, y *mantisa* á la parte fraccionaria. Es claro que los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10 sólo tienen *mantisa*, y los de 10, 100, 1000, etc., sólo tienen *característica*: y, en general, la característica de un número entero cualquiera consta de tantas unidades como cifras ménos una tenga dicho número: y recíprocamente, un número que se busque, tendrá tantas cifras como unidades más una tenga la característica del logaritmo correspondiente dado.

Corolario 1.° Y puesto que segun la primera propiedad, logaritmo 300, por ejemplo, es igual á log. $(3 \times 100) = \log. 3 + \log. 100$, dirémos que:

Dado el logaritmo de un número, se obtiene el de otro, 10, 100, 1000, etc., *veces mayor ó menor*, añadiendo ó quitando á la característica del logaritmo dado tantas unidades como ceros sigan á la unidad, quedando la mantisa de todos ellos la misma. Y recíprocamente: *dado el número correspondiente á un logaritmo que se desconoce ó ignora, se obtiene el número correspondiente á otro logaritmo que tenga igual mantisa, pero que tenga una, dos, tres, etc., unidades más ó ménos en la característica*, multiplicando ó dividiendo el número dado por la unidad seguida de tantos ceros, como unidades más ó unidades ménos, tenga la característica del segundo logaritmo.

Corolario 2.° Del anterior corolario se deduce que: una fraccion decimal tiene en su logaritmo una mantisa igual á la del logaritmo de dicha fraccion, considerada como un número entero, esto es, abstraccion hecha de la coma: la diferencia está en la característica y en el signo, segun verémos más adelante.

231. Porque es bueno advertir que los números fraccionarios tienen tambien sus respectivos logaritmos.

En efecto: si consideramos prolongadas á la izquierda las progresiones fundamentales del sistema, tendrémos

$$\begin{array}{l} \div\!\div \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10, \ldots\ldots \\ \div -4 \;.\; -3 \;.\; -2 \;.\; -1 \;.\; 0 \;.\; 1, \ldots\ldots \end{array}$$

donde -4, -3, -2, y -1, son los logaritmos respectivos de $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{10}$: que nos dice además, que los quebrados propiamente dichos, tienen *números negativos* por logaritmos.

Y que esta continuacion á la izquierda es lícita, no admite duda: porque la restriccion ó condicion impuesta de que las progresiones fundamentales empiecen por 1 y por 0 respectivamente para formar sistema de logaritmos, queda satisfecha presentando el término 1 de la progresion por cociente de modo que se corresponda con el término 0 de la progresion por diferencia.

Escolio. Como los logaritmos de los números, que no son potencias de 10, son números inconmensurables, que se reemplazan por otros que, si bien se diferencian de ellos en ménos de cualquier cantidad por pequeña que sea, rigorosamente hablando, no son iguales con aquéllos; por eso los resultados serán tan aproximados cuanto se quiera, pero no exactos. Que no olviden esto nuestros alumnos; así como tampoco que la operacion en que más justificado está el uso de los logaritmos es la *extraccion de raices*.

132. La resolucion del problema general *dado un número entero, hallar su logaritmo*, y la recíproca y los casos particulares, todo lo deben aprender los estudiantes de la viva voz del Profesor, teniendo á la vista las tablas de Vazquez Queipo, por muchos títulos recomendables, y seguidas de un *apéndice* en que dicho señor explica en seis páginas no cabales, la tabla y el método de Roberto Flower, matemático inglés del siglo XVIII, que proporciona casi mecánicamente los logaritmos de los números con una mantisa de hasta 20 cifras, y, en su caso, los números con la misma extension de 20 cifras. Neper, Briggs y Flower han hecho que los logaritmos sean una gloria peculiar de la Gran Bretaña. Y al exhumar nuestro compatriota el libro de Flower (puede decirse que ya desconocido en el mundo científico), ha dado un alto ejemplo de moralidad, diciéndonos el nombre de su verdadero autor. Circunstancias todas, que, unidas á la larga y honrosa carrera del Sr. Vazquez Queipo, han valido á éste, de parte del Instituto de Francia, la envidiable distincion que pocos españoles alcanzan.

133. Sabiendo hallar el logaritmo de un número entero, y viceversa, digamos dos palabras acerca de los logaritmos de los números fraccionarios en los distintos casos que ocurren.

1.° *Si el quebrado es impropio y ordinario*, puesto que el quebrado representa el cociente del numerador por el denominador, es evidente que su logaritmo será igual al logaritmo del numerador ménos el logaritmo del denominador.

Así, $$\log. \frac{12}{5} = \log. 12 - \log. 5$$

$$\log. 2\frac{1}{2} = \log. \frac{5}{2} = \log. 5 - \log. 2$$

$$\log. \frac{3}{3} = \log. 1 = 0.$$

2.° *Si el quebrado es impropio* (ó mayor que la unidad), *pero* *decimal*, se considera como entero, restando despues de la característica de su logaritmo tantas unidades como cifras fraccionarias tuviere el quebrado dado.

En efecto :

$$\log.\ 12{,}5 = \log.\ \frac{125}{10} = \log.\ 125 - \log.\ 10 = 2{,}096910 - 1 = 1{,}096910.$$

$$\log.\ 1{,}25 = \log.\ \frac{125}{100} = \log.\ 125 - 2 = 2{,}096910 - 2 = 0{,}096910.$$

Advertencia. Se llama *complemento de un número* lo que le falta para componer ó valer la potencia de 10 inmediata superior.

Así, el complemento de 85 es 15 ; el de 12,5 es 87,5, y el de 1038 es 8962.

El *complemento á* 0 de un logaritmo es otro logaritmo de igual valor absoluto, pero de signo contrario : como sucede con los logaritmos de dos números *recíprocos* que sólo se diferencian en el signo — que lleva el logaritmo del número menor que la unidad ; sabiendo ya que números *recíprocos* son aquéllos cuyo producto es igual á la unidad, como a y $\frac{1}{a}$.

El *complemento á* 10 de un logaritmo es otro logaritmo, que sumado con el primero, produce 10.

El *complemento á* 20 de un logaritmo es otro logaritmo, que sumado con el primero, produce 20.

Y, en general, *complemento de un número ó logaritmo* es otro número ó logaritmo, que sumado con el primero produce 0, ó una cantidad determinada cualquiera.

El complemento del logaritmo de un número cualquiera a se escribe así : $C_0 \log.\ a$, $C_{10} \log.\ a$, $C_{20} \log.\ a$, etc., segun se refiera á 0, 10, 20, etc. ; pero si se escribe simplemente Comp. log. a, se sobreentiende el *complemento á* 10 ; y se lee *complemento del logaritmo de* a, *ó complemento logarítmico de* a.

TERCER CASO. Esto supuesto, vamos á *hallar el logaritmo de una fraccion* propiamente dicha, ó sea de un quebrado propio y ordinario.

Digo que el logaritmo de tal quebrado es igual á la diferencia de los logaritmos de sus dos términos, afectada del signo — ; es decir, será un *logaritmo negativo* (**131**).

En efecto : Sea la fraccion general $\frac{a}{b}$, en que suponemos $a<b$, y que por ser igual á $1 : \frac{b}{a}$ da lugar á la igualdad siguiente :

$$\frac{a}{b} = 1 : \frac{b}{a}.$$

Tomando los logaritmos de los dos miembros de esta igualdad, tendrémos

$$\log.\frac{a}{b}=\log.1-\log.\frac{b}{a};\quad \text{y como}\quad \log.1=0,\ \text{resulta}$$

$$\log.\frac{a}{b}=-\log.\frac{b}{a}=-(\log.b-\log.a).$$

Así, $$\log.\frac{4}{5}=\log.4-\log.5=-0{,}096910$$

$$\log.\frac{1}{12}=\log.1-\log.12=-1{,}079181.$$

Pero siendo comunes á los logaritmos negativos las propiedades generales (**127**), y ofreciendo inconvenientes su presencia en los cálculos, se ha convenido en añadir 10 unidades á la característica de los logaritmos negativos, para que, efectuada la sustraccion consiguiente, el resultado aparezca sin el signo —; teniendo buen cuidado de corregir el logaritmo final, al terminar la operacion. Y el logaritmo negativo, así transformado, es lo que se llama *complemento logarítmico* del número en cuestion, que se expresa poniendo un punto algo elevado entre la característica y la mantisa.

Así, puesto que $\log.\frac{2}{3}$ es $-0{,}176091$; el comp. $\log.\frac{2}{3}$ será 9·823909.

CUARTO CASO. Que la *fraccion* propiamente dicha sea *decimal*.

Siendo $\log.0{,}5=\log.5-1=-0{,}301030$, tendrémos tambien

Comp. log. 0,5 = 9·698970; y Comp. log. 0,05 = 8·698970;

de donde *el complemento de una fraccion propia decimal* tiene por característica 9, ó tantas unidades ménos que 9 cuantos ceros haya entre la coma y las cifras significativas; y por mantisa la correspondiente á dichas cifras, consideradas como formando un número entero.

Si recíprocamente se da un *logaritmo negativo* para hallar su número correspondiente, éste será igual á la unidad fraccionaria cuyo denominador sea el mismo número correspondiente al logaritmo dado, pero sin el signo —.

Si el logaritmo dado tiene la forma de complemento, se hallará la fraccion decimal correspondiente, escribiendo 0 enteros, y despues de la coma tantos ceros cuantas unidades falten á la característica para 9, seguidos del número que por las tablas corresponda á la mantisa.

ESCOLIO. Por medio del uso de los complementos, se convierte la *sustraccion en adicion*.

Carlos Botello

De suerte que combinándose por adicion y sustraccion varios logaritmos, se abrevia la operacion, añadiendo á los logaritmos *sumandos* los complementos de los logaritmos *sustraendos*, rebajando de la *suma* tantas decenas cuantos complementos se hayan introducido.

Demos fin á esta materia, rogando á nuestros ilustrados compañeros que nos perdonen si insistimos en recomendarles que, despues de explicada la teoría de los logaritmos, dediquen al ménos una semana al manejo de las tablas, teniendo cada alumno las suyas en la mano, y enseñando de viva voz el profesor á resolver los diferentes problemas y casos que ocurrir puedan.

CAPITULO IV.

De las ecuaciones de primer grado.

134. PRELIMINARES. En los tres primeros capítulos hemos dado á conocer el *cálculo algebráico elemental*, ó sean las diversas transformaciones que pueden recibir las expresiones literales de la cantidad, tal y como deben enseñarse á los niños de 12 á 14 años, que cursan esta asignatura en los institutos de segunda enseñanza.

Con el mismo criterio vamos á explicar, en este y en el siguiente capítulo, la *comparacion algebráica elemental por igualdad*, ó sea la resolucion y discusion de las ecuaciones y problemas de 1.º y 2.º grado; tratando de pasada aquello que, ménos interesante á los alumnos, contribuye sin embargo, á ilustrar esta parte analítica del ALGEBRA, la más esencial y fecunda.

135. Se llama *identidad* la relacion que existe entre dos expresiones de formas iguales de una misma cantidad, como

$$7=7 \qquad a+b=a+b \qquad 5a^3b^2c-4=5a^3b^2c-4.$$

Igualdad es la relacion que existe entre dos expresiones de formas desiguales de una misma cantidad, como

$$8+2=10 \qquad a^2-b^2=(a+b)(a-b) \qquad \sqrt{1-2a+a^2}=1-a.$$

Y la *igualdad* toma el nombre de ECUACION cuando contiene una ó más *incógnitas* (ARIT. **6**), cuyos *valores* se desea conocer, como

$$2x-4+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=30. \qquad x+y=8.$$

La *ecuacion* es, pues, un caso particular de la *igualdad.*

La *ecuacion* queda satisfecha únicamente por ciertos valores de las *incógnitas*, miéntras que la *igualdad* se verifica cualesquiera que sean los valores de los elementos que entren á formarla.

La *identidad* es siempre evidente.

Se llama *ecuacion numérica* toda ecuacion en la que las cantidades conocidas son números particulares, estando representadas la incógnita ó incógnitas por letras, generalmente por las últimas del abecedario; y *literal* toda ecuacion en que tanto las cantidades desconocidas como las conocidas, ó alguna de éstas al ménos, están representadas por letras, acostumbrándose á representar las conocidas por las primeras del abecedario.

Grado de una ecuacion con una incógnita es el mayor exponente de ésta, con tal que no esté por denominador ni afectada del signo radical. Si el exponente es negativo ó fraccionario, la incógnita á la cual afecte es considerada en denominador ó debajo de un signo radical. El *grado* de una ecuacion con dos ó más incógnitas se aprecia como en el caso anterior, siempre que en cada término entre una sola incógnita; pero si entran más de una en algun término, entónces el grado de la ecuacion es *la suma de los exponentes* de las incógnitas en el término en que esta suma sea mayor, no estando aquéllas por denominador ni debajo de radical.

Tambien se llaman las ecuaciones *completas*, respecto de una incognita, si contiene á ésta elevada á todas las potencias sucesivas, desde 0 hasta la mayor en que entre: *incompleta*, si falta alguna potencia: *pura*, si los exponentes son iguales, y *mixta*, en caso contrario.

Solucion de una ecuacion con una incógnita es el valor ó valores que, sustituidos en vez de la incógnita, convierten la ecuacion en identidad: estos valores se llaman tambien *raíces* de la ecuacion: y hallar sus soluciones es *resolver* una ecuacion.

Se da el nombre de *equivalentes* á dos ecuaciones que tienen soluciones iguales; de *incompatibles* ó *contradictorias*, si pueden presentarse de manera que, siendo idénticos los primeros miembros ó los segundos, no lo sean los segundos ó los primeros; de *imposible* ó *absurda* á la que no puede transformarse en *identidad* por ningun valor que se dé á la incógnita ó incógnitas que contenga, y el nombre de *indeterminada* á toda la que admita una infinidad de soluciones.

$3x - 4 = 8$ $\Big\{$ es una ecuacion numérica de primer grado con una sola incógnita.

$3x^2 + 4x = C$ literal de segundo grado.

$5x + 2y = 3$ indeterminada.

$7x + 2 = 7x$ imposible ó absurda.

$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x - y &= 7 \end{aligned}\right\}$ incompatibles ó contradictorias.

Resolucion de una ecuacion de primer grado con una incógnita.

136. Para *resolver* una ecuacion de primer grado con una incógnita, hay que hacerla sufrir cuatro transformaciones, á saber: 1.ª quitar quebrados si los hay; 2.ª pasar todos los términos que contengan la incógnita á un solo miembro, generalmente al primero, y las cantidades conocidas al segundo; 3.ª formar de cada miembro un solo término, al ménos indicado; y 4.ª dividir los dos miembros de la ecuacion por el coeficiente de la incógnita, ó cantidad que la multiplique, sea numérica ó literal.

EJEMPLO: $$2x - 12\frac{3}{4} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{6} - \frac{7}{12}.$$

1.ª Si reducimos todos los términos de la ecuacion á un comun denominador, que en el caso presente es 12 por el m. m. c., tomará la forma de

$$\frac{24x}{12} - \frac{153}{12} = \frac{8x}{12} - \frac{2}{12} - \frac{7}{12}.$$

Si suprimimos ahora el denominador comun, lo cual es lícito porque equivale á multiplicar cada quebrado, ó sea cada término, por su denominador, y por consiguiente equivale á multiplicar los dos miembros de la igualdad, ó sea de la ecuacion, por una misma cantidad, por el denominador comun, en el presente caso por 12, la ecuacion tomará la forma siguiente:

$$24x - 153 = 8x - 2 - 7.$$

Luego *para quitar quebrados en una ecuacion, se reducen todos sus términos á un comun denominador, considerando á los términos de forma entera como quebrados con la unidad por denominador, y despues se suprime el denominador comun.*

Excusado es decir que en la práctica se hace la reduccion y supresion, sin pasar por el materialismo de escribir el denominador comun.

2.ª Tambien es evidentemente lícito el añadir ó quitar una misma cantidad á cantidades iguales.

Si añadimos, pues, 153 á los dos miembros de la ecuacion, y restamos de los mismos $8x$, tendrémos

$$24x - 153 + 153 - 8x = 8x - 2 - 7 + 153 - 8x.$$

Y considerando que -153 y $+153$ se destruyen en el primer miembro, y que $8x$ y $-8x$ se destruyen en el segundo, podemos presentar la ecuacion bajo la siguiente forma:

$$24x - 8x = 153 - 2 - 7.$$

Pero 153 que tenía el signo $-$ en el primer miembro, aparece con el signo $+$ en el segundo, y $8x$ que tenía el signo $+$ en el segundo, aparece con el signo $-$ en el primero.

Luego *para pasar los términos de un miembro á otro, se verifica mudándoles el signo.*

3.ª La reduccion de términos semejantes en cada miembro no ofrece dificultad, y nos dará

$$16x = 144.$$

4.ª De donde, dividiendo los dos miembros de la ecuacion por el coeficiente de x, 16, lo cual es tambien lícito, resulta finalmente

$$x = \frac{144}{16} = 9.$$

Comprobacion. Sustituyendo en la ecuacion propuesta en vez de x su valor 9, tendrémos

$$2 \times 9 - 12\frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times 9 - \frac{1}{6} - \frac{7}{12},$$

ó sea
$$18 - \frac{51}{4} = 6 - \frac{1}{6} - \frac{7}{12},$$

ó bien *la identidad*
$$\frac{21}{4} = \frac{21}{4}.$$

Luego la ecuacion ha sido bien resuelta, y 9 es el verdadero valor de x.

Sea, por segundo ejemplo, la ecuacion

$$2x + 7 = 4x - 9.$$

No tiene lugar la primera transformacion.

Pasando al primer miembro los términos con x, y al segundo los conocidos, tendrémos

$$2x - 4x = -9 - 7;$$

y reduciendo
$$-2x = -16;$$

de donde, descomponiendo el término $-2x$ en $-2 \times x$, resulta

$$x = \frac{-16}{-2} = 8.$$

137. Sirva de nuevo ejemplo

$$2x + 5 = 3x - 10.$$

Haciendo la transposicion de términos, tendrémos

$$2x - 3x = -10 - 5;$$

de donde, reduciendo
$$-x = -15.$$

Hemos puesto de propósito este ejemplo para llamar la atencion sobre él, y advertir á los alumnos que ésta no es la ***solucion negativa*** que hemos de conocer muy pronto.

Porque haciendo la descomposicion del ejemplo anterior, tendríamos

$$-1 \times x = -15, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{-15}{-1} = 15.$$

Porque pasando $-x$ al segundo miembro, y las cantidades conocidas al primero, sucedería que

$$+15 = +x, \quad \text{ó bien} \quad x = 15.$$

Porque multiplicando los dos miembros de la ecuacion por una misma cantidad, por -1, tenemos

$$-x \times -1 = -15 \times -1, \quad \text{ó bien} \quad x = 15.$$

Por cualquiera de estas tres consideraciones resulta que la ecuacion $-x = -15$ da para x *valor positivo*, como si fuese $x = 15$.

Y la tercera consideracion nos enseña además que pueden cambiarse los signos á *todos* los términos de la ecuacion cuando convenga, porque esto equivale á multiplicar sus dos miembros por una misma cantidad, por -1.

138. Si nos dan la ecuacion

$$3x-2=\frac{4}{x}+\frac{1}{5};$$

al quitar quebrados, siendo $5x$ el comun denominador, resulta

$$\frac{15x^2}{5x}-\frac{10x}{5x}=\frac{20}{5x}+\frac{x}{5x},$$

ó bien $$15x^2-10x=20+x.$$

Esto nos *advierte* que cuando la incógnita esté por denominador, no puede aventurarse cuál sea el grado de la ecuacion ; pues bien se ve en el ejemplo presente, que pareciendo á la simple vista una ecuacion de primer grado, resulta con su verdadero carácter despues de quitados los quebrados, esto es, que es de segundo grado.

Entiéndase tambien la *advertencia* para los casos en que la incógnita esté afectada del signo radical.

Escolio. Hay, sin embargo, casos particulares en que estando la incógnita por denominador ó debajo de un radical, se transforma la ecuacion en otra de primer grado, por ejemplo :

$$\frac{20}{x}+\frac{1}{x}=7 \quad \text{y} \quad 4=2\sqrt{x}.$$

Quitando quebrados en la primera y elevando al cuadrado los dos miembros de la segunda, resulta

$$20+1=7x \quad \text{y} \quad 16=4x.$$

Pero éstos, lo repetimos, son casos particulares que, léjos de destruir, confirman la *advertencia anterior.*

Problemas que pueden resolverse por medio de una ecuacion de primer grado con una incógnita.

139. 1.° *Hallar un número cuya mitad y tercera parte aumentadas de* 10, *den la suma* 30.

Si representamos por x el número pedido, su mitad será $\frac{x}{2}$, y su tercera parte $\frac{x}{3}$.

Y con estos *datos* podemos indicar la suma á que se refiere el *enunciado*, escribiendo :

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+10=30.$$

Quitando quebrados, tenemos

$$3x+2x+60=180,$$

y naciendo la transposicion de términos, resulta

$$3x + 2x = 180 - 60,$$

y reduciendo $5x = 120;$

de donde $x = \frac{120}{5} = 24.$

Comprobacion: Siendo $x = 24$,
su mitad.... 12,
tercera parte 8;

y tenemos $12 + 8 + 10 = 30$,

ó bien la identidad $30 = 30.$

Dirémos, con motivo del problema anterior, que la resolucion de un problema consta de dos partes: 1.ª Plantear el problema ó *poner el problema en ecuacion:* 2.ª *Resolver la ecuacion.*

Esta segunda parte está sujeta á reglas fijas y terminantes, que dejamos explicadas (**136**).

Lo difícil es la primera parte; y es difícil, porque los hombres no dan reglas para poner un problema en ecuacion, como no las dan para hacer versos buenos, ni para hacer obras maestras de arte; pues el plantear un problema difícil exige el *quid divinum del* ÁLGEBRA!

Por eso, nosotros aconsejamos al estudiante que procure *comprender bien el enunciado*, pues en él está implícita la forma de la ecuacion, que despues de todo no ha de ser más que la fiel traduccion algebráica del enunciado; entendiendo por *datos* no sólo las cantidades conocidas, sino tal *condicion explícita* que se impone en el enunciado, y cuál *implícita* que se deduce de él, además de las relaciones que ligan á las cantidades conocidas con las desconocidas.

El problema anterior fué sumamente fácil de plantear, porque todo ello estaba reducido, segun el enunciado, á indicar una *adicion* cuyos *sumandos* eran $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, y 10, representando x el número pedido, y cuya *suma* fuese 30.

Pero las dificultades irán creciendo en otros; los alumnos irán acostumbrándose á vencerlas, todo progresivamente, y aquéllos que se aficionen á esta clase de estudios serán la honra de sus maestros y el orgullo de sus familias.

2.º *Hallar dos números, cuya suma sea* 24, *y su diferencia* 16.

Puesto que hay una diferencia, los números son desiguales.

Si representamos el número mayor por x, el menor será $x - 16$.

Y con arreglo al enunciado, la ecuacion tendrá esta forma

$$x + (x - 16) = 24,$$

ó sea $x + x - 16 = 24;$

y hecha la transposicion

$$x + x = 24 + 16,$$

ó bien $$2x = 40;$$

de donde $$x = \frac{40}{2} = 20,$$

y el menor $$x - 16 = 20 - 16 = 4.$$

Y con efecto: $20 + 4 = 24$ y $20 - 4 = 16$;
y queda satisfecho el enunciado.

Si, obedeciendo á la segunda indicacion del enunciado, hubiésemos planteado el problema de esta manera

$$x - (x - 16) = 16,$$

tendríamos $$x - x + 16 = 16,$$

ó bien la identidad $16 = 16$, de la cual no sale la resolucion del problema.

Otro modo: Si representamos por x el número menor, el mayor será $x + 16$, y tendrémos la ecuacion

$$(x + 16) + x = 24,$$

ó sea $$x + 16 + x = 24,$$

ó bien $$2x = 8;$$

de donde $$x = \frac{8}{2} = 4.$$

y el mayor será $x + 16 = 4 + 16 = 20$, resultados iguales á los obtenidos anteriormente.

Otro modo: resolviendo el problema con toda generalidad, esto es, representando las cantidades conocidas tambien por letras. Mas, exigiendo esto un nuevo enunciado, dirémos:

Hallar dos números cuya suma sea s, *y su diferencia* d.

Si representamos el número mayor por x, el menor será $x - d$, y la ecuacion tendrá esta forma:

$$x + (x - d) = s,$$

ó sea $$x + x - d = s,$$

y hecha la transposicion y reduccion, tendrémos

$$2x = s + d;$$

de donde $$x = \frac{s + d}{2},$$

y el menor será $x - d = \frac{s + d}{2} - d = \frac{s + d - 2d}{2} = \frac{s - d}{2}.$

Estos valores son fórmulas que nos dicen: que dadas la suma y diferencia de dos números, el mayor es igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, ó como es costumbre decirlo, el mayor es igual á *la semisuma más la semidiferencia*, y el menor á *la semisuma ménos la semidiferencia.*

Comprobacion.

$$\frac{s+d}{2}+\frac{s-d}{2}=\frac{2s}{2}=s\,,\ \text{y}\ \frac{s+d}{2}-\frac{s-d}{2}=\frac{s+d-s+d}{2}=d,$$

de conformidad con el enunciado.

Si obedeciendo á la segunda indicacion del enunciado, hubiésemos planteado el problema de esta manera

$$x-(x-d)=d\,,$$

tendríamos $\quad x-x+d=d\,,$

ó bien la identidad $\quad d=d,$

que no sirve á nuestro propósito.

Otro modo: Si últimamente representamos por x el número menor, el mayor será $x+d$, y tendrémos la ecuacion

$$(x+d)+x=s\,,$$

ó sea $\quad x+d+x=s,$

ó bien $\quad 2x=s-d\,;$

de donde $\quad x=\frac{s-d}{2},$

y el mayor será $\quad \frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d+2d}{2}=\frac{s+d}{2},$

resultados iguales á los últimos que hemos obtenido.

3.° *Un pescador hizo con su hijo el convenio siguiente: cada vez que éste sacase peces le daría el padre* 5 *céntimos; y cada vez que no sacase, daría él al padre* 3*; á los* 18 *lances ajustaron cuentas*, y *el padre debía al hijo* 26 *céntimos. ¿Cuántas veces sacó peces, y cuántas no?*

Si representamos por x el número de lances en que sacó peces, el número de lances en que no sacó será $18-x$.

Pero el padre había de dar 5 céntimos por cada lance favorable al hijo, y por x lances le daría $5x$.

Por otra parte, el hijo había de dar 3 céntimos por cada lance adverso, y por $18-x$ daría al padre $3(18-x)$.

La diferencia entre estas cantidades sería lo que el padre debía al hijo, y la ecuacion será

$$5x-3(18-x)=26,$$

ó sea $\quad 5x-54+3x=26,$

ó bien $\quad 8x=80\,;$

de donde $\quad x=\frac{80}{8}=10.$

Siendo 10 el número de lances favorables, el de adversos será

$$18-10=8.$$

Y con efecto $\quad 10\times5-8\times3=50-24=26.$

Este problema puede resolverse tambien con toda generalidad.

representando por *a* lo que el hijo debe recibir por cada lance favorable, por *b* lo que el hijo dé al padre por cada lance adverso, por *n* el número total de lances, y por *c* la diferencia á favor del hijo.

Con estos datos tenemos la ecuacion siguiente:

$$ax - b(n - x) = c,$$

ó sea $$ax - bn + bx = c,$$

ó bien $$(a + b)x = bn + c;$$

de donde $$x = \frac{bn + c}{a + b}.$$

El número de lances adversos será:

$$n - \frac{bn + c}{a + b} = \frac{an + bn - bn - c}{a + b} = \frac{an - c}{a + b}.$$

Y en efecto:

$$a \times \frac{bn + c}{a + b} - b \times \frac{an - c}{a + b}, \text{ ó bien } \frac{abn + ac}{a + b} - \frac{abn - bc}{a + b}$$

dan la diferencia siguiente:

$$\frac{abn + ac - abn + bc}{a + b} = \frac{ac + bc}{a + b} = \frac{(a + b)c}{a + b} = c.$$

El uso de las letras para la resolucion de problemas ofrece ventajas prácticas y científicas. Ya las hemos indicado en el problema anterior.

Añadirémos ahora que las fórmulas $\frac{bn + c}{a + b}$ y $\frac{an - c}{a + b}$ obtenidas en la hipótesis de que el padre deba al hijo, sirven para la de que el hijo deba al padre, sin más que cambiar el signo de $+c$ en $-c$, y las fórmulas serán $\frac{bn - c}{a + b}$ y $\frac{an + c}{a + b}$.

Y aun sirven para la hipótesis de que saliesen en paz padre é hijo, sin más que hacer á *c* igual á cero. Porque las fórmulas serían $\frac{bn}{a + b}$ para el número de lances favorables y $\frac{an}{a + b}$ para el de adversos, y multiplicadas la primera por *a* que recibia el hijo por cada uno, y la segunda por *b* que tambien recibia el padre por cada uno, darán la identidad $\frac{abn}{a + b} = \frac{abn}{a + b}$; es decir, que para quedar en paz serian iguales las cantidades que mútuamente debiesen el padre al hijo y el hijo al padre.

4.° *Una liebre perseguida por un galgo lleva á éste* 60 *saltos de ventaja. Pues bien; teniendo en cuenta que la liebre da* 9 *saltos mién-*

tras el galgo da 6 , *y que tres saltos del galgo valen* 7 *de la liebre, ¿ cuántos saltos dará el galgo para alcanzar á la liebre?*

Es evidente que el camino ó distancia que ha de recorrer el galgo hasta alcanzar á la liebre, se compone de los 60 saltos que ésta lleva de ventaja y de la distancia que recorra, miéntras es perseguida. Veamos si podemos representar estas dos distancias , ó sea estas dos cantidades desconocidas , por medio de una sola letra x , segun hemos hecho ya en los problemas 2.° y 3.°

Representemos por x el número de saltos que dé el galgo. Para averiguar el que dará la liebre durante su persecucion, esto es, miéntras el galgo da x saltos, harémos esta consideracion : si la fuerza muscular de estos animalitos está en la razon de 9 es á 6 , ó bien de 3 es á 2; es decir , si miéntras la liebre da 3 saltos , el galgo da 2, se determina sencillamente el número de saltos que dará la liebre , miéntras dé el galgo x , por medio de la proporcion

$$2 : 3 :: x : \frac{3x}{2}.$$

Averiguado que la liebre da $\frac{3x}{2}$ saltos durante su persecucion, parece que la ecuacion sería $x = 60 + \frac{3}{2}x$.

Pero haciendo esto cometeríamos el error de sumar cantidades que se refieren á unidades distintas, como si dijéramos heterogéneas , puesto que, segun el enunciado , 3 saltos de galgo valen 7 de liebre , esto es, son desiguales los saltos de aquél y de ésta. Habrá, pues , que referirlas á una misma unidad ; es decir, hay que expresar los saltos de galgo en saltos de liebre, ó al contrario.

Tomemos el primer partido y planteemos la proporcion

$$3 : 7 :: x : \frac{7x}{3}.$$

Que nos dice que x saltos de galgo valen $\frac{7}{3}x$ de liebre; y la ecuacion será

$$\frac{7}{3}x = 60 + \frac{3}{2}x,$$

ó bien $$14x = 360 + 9x,$$

ó sea $$5x = 360;$$

de donde $$x = \frac{360}{5} = 72.$$

Así , pues, el galgo, da 72 saltos para alcanzar la liebre , y ésta da durante este tiempo, esto es, durante su persecucion

$$72 \times \frac{3}{2} = 108.$$

Y en efecto: los 72 saltos del galgo valen $\frac{72 \times 7}{3}$, ó sean 168 saltos de liebre, que dan $168 = 60 + 108$
ó bien la identidad $168 = 168.$

5.° *Un padre que tenia tres hijos dispuso en su testamento que al mayor de ellos se le diese una cantidad* a *más la* n *parte del resto: al segundo una cantidad* 2a *más la* n *parte del resto que resultase despues de separar del capital la parte del primero y* 2a *: al tercero,* 3a *más la* n *parte del resto que resultase despues de separar del capital la parte del primer hijo, más la del segundo, más* 3a. *Al llegar aquí no habia quedado nada por repartir. ¿Qué capital tenia el padre?*

Representemos por x el capital del padre. Y si nosotros conseguimos expresar algebráicamente las tres partes por medio de una sola letra x, segun venimos haciendo desde el segundo problema, restando del capital x la suma de las tres partes é igualando este resto á 0, habrémos puesto el problema en ecuacion.

La parte del primer hijo es fácil de formular; puesto que, segun el enunciado, debe ser

$$a + \frac{x - a}{n}, \text{ ó bien } \frac{an + x - a}{n} \qquad [1.^a]$$

La parte del segundo se deduce tambien del enunciado, y será

$$2a + \left(x - \frac{an + x - a}{n} - 2a\right) : n,$$

donde están indicadas una adicion, dos sustracciones y una division, que verificadas dan

$$\frac{2an^2 + nx - an - x + a - 2an}{n^2};$$

y, hecha la reduccion, tendrémos

$$\frac{2an^2 + nx - 3an - x + a}{n^2} \qquad [2.^a]$$

La parte del tercero se deduce igualmente del enunciado, y será

$$3a + \left(x - \frac{an + x - a}{n} - \frac{2an^2 + nx - 3an - x + a}{n^2} - 3a\right) : n,$$

donde están indicadas una adicion, tres sustracciones y una division que verificadas nos dan

$$\frac{3an^3 + n^2x - an^2 - nx + an - 2an^2 - nx + 3an + x - a - 3an^2}{n^3};$$

y, hecha la reduccion en el numerador, tendrémos

$$\frac{3an^3 + n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^3} \qquad [3.^\circ]$$

La ecuacion es como sigue:

$$x - \frac{an + x - a}{n} - \frac{2an^2 + nx - 3an - x + a}{n^2}$$
$$- \frac{3an^3 + n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^3} = 0.$$

Quitando quebrados y verificando las tres sustracciones indicadas, tendrémos

$$n^3x - an^3 - n^2x + an^2 - 2an^3 - n^2x + 3an^2 + nx - an - 3an^3 - n^2x$$
$$+ 6an^2 + 2nx - 4an - x + a = 0.$$

Hecha la reduccion, y pasando las cantidades conocidas al segundo miembro, resulta

$$n^3x - 3n^2x + 3nx - x = 6an^3 - 10an^2 + 5an - a,$$

ó bien $\quad (n^3 - 3n^2 + 3n - 1)x = a(6n^3 - 10n^2 + 5n - 1)$;

de donde $\quad x = \dfrac{a(6n^3 - 10n^2 + 5n - 1)}{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}.$

Pero hemos podido obtener el valor de x más pronto y bajo forma más sencilla, habiendo tomado en cuenta una condicion *implícita* que no supimos apreciar. Porque decir que la parte del tercer hijo es $3a$ más la n parte del resto, y decir á continuacion que *no quedó nada por repartir*, es lo mismo que decir que la parte del tercer hijo es $3a$, y que el resto último es ilusorio, es nulo.

Igualando, pues, á 0 ese resto, tendrémos la ecuacion

$$\frac{n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a}{n^2} = 0,$$

ó bien $\quad n^2x - 6an^2 - 2nx + 4an + x - a = 0,$

ó sea $\quad n^2x - 2nx + x = 6an^2 - 4an + a,$

ó ya $\quad (n^2 - 2n + 1)x = a(6n^2 - 4n + 1);$

de donde $\quad x = \dfrac{a(6n^2 - 4n + 1)}{n^2 - 2n + 1}$

Y este valor de x sólo se diferencia del anterior en la forma. Porque los dos términos del primer quebrado tienen el factor comun $n - 1$, en que no habíamos reparado; y, despojados de él, resultan idénticos á los dos términos del segundo quebrado, ó sea del valor de x últimamente determinado.

Todavía se puede resolver este problema siguiendo un camino que, aunque parece ménos directo que los dos anteriores, es mejor que el primero y más completo que el segundo, pues se obtienen al mismo tiempo que el capital del padre, los valores de las tres partes; sirviendo además de muestra de los variados recursos del ÁLGEBRA.

M. Bourdon indica este camino fundado en la observacion ántes dicha, segun la cual, despues de separar las dos primeras partes y $3a$, no queda resto ninguno.

Representando por r, r' y r'' los tres restos de que hemos hecho mérito anteriormente, (que se leen r, *r prima* y *r segunda*) las expresiones algebráicas de las tres partes serán

$$a+\frac{r}{n}, \qquad 2a+\frac{r'}{n} \text{ y } 3a+\frac{r''}{n}.$$

Pero, segun el enunciado, es evidente que $r''=0$.

Luego $3a$..... es la tercera parte.

Además, lo que resta despues de dar al segundo hijo $2a+\frac{r'}{n}$, puede expresarse por $r'-\frac{r'}{n}$, ó bien $\frac{nr'-r'}{n}$, ó $\frac{(n-1)r'}{n}$.

Y como este resto es cabalmente la parte del tercer hijo, tendrémos

$$\frac{(n-1)r'}{n}=3a, \text{ ó bien } (n-1)r'=3an, \text{ de donde } r'=\frac{3an}{n-1}.$$

$$\text{Luego} \quad 2a+\frac{3an}{n-1}:n=2a+\frac{3a}{n-1}=\frac{2an-2a+3a}{n-1},$$

ó bien $\frac{2an+a}{n-1}$ ..... es la segunda parte.

Además, lo que resta despues de dar al primer hijo $a+\frac{r}{n}$, puede expresarse por $r-\frac{r}{n}$, ó bien $\frac{nr-r}{n}$, ó $\frac{(n-1)r}{n}$.

Y como este resto constituye precisamente lo destinado para el primero y el segundo hijo, tendrémos

$$\frac{(n-1)r}{n}=3a+\frac{2an+a}{n-1}=\frac{3an-3a+2an+a}{n-1}=\frac{5an-2a}{n-1},$$

esto es
$$\frac{(n-1)r}{n}=\frac{5an-2a}{n-1};$$

y quitando quebrados, tenemos

$$(n-1)^2 \times r = 5an^2 - 2an;$$

de donde

$$r = \frac{5an^2 - 2an}{(n-1)^2}.$$

Luego

$$a + \frac{5an^2 - 2an}{(n-1)^2} : n = a + \frac{5an - 2a}{n^2 - 2n + 1} =$$

$$\frac{an^2 - 2an + a + 5an - 2a}{n^2 - 2n + 1} = \frac{an^2 + 3an - a}{n^2 - 2n + 1} \ldots\ldots \text{ es la primera parte.}$$

Ultimamente, el capital del padre será

$$3a + \frac{2an + a}{n - 1} + \frac{an^2 + 3an - a}{n^2 - 2n + 1};$$

expresion que, reducida á un comun denominador, y despues de verificadas las dos adiciones indicadas, se transforma en

$$\frac{3an^2 - 6an + 3a + 2an^2 - 2an + an - a + an^2 + 3an - a}{n^2 - 2n + 1},$$

y hecha la reduccion en el numerador, nos da

$$\frac{6an^2 - 4an + a}{n^2 - 2n + 1}$$

resultado igual al obtenido anteriormente.

Resolucion de una ecuacion de primer grado con dos ó más incógnitas.

140. Ocurre á veces, que á la terminacion de un cálculo cualquiera, ó al planteamiento de un problema, ó por cualquier circunstancia, se nos ofrezca á nuestra consideracion una ecuacion de primer grado con dos ó más incógnitas, á las cuales hemos llamado *indeterminadas* (**135**), porque admiten en general una infinidad de soluciones.

Tal es, por ejemplo, la ecuacion

$$x + y = 32.$$

Si despejamos x, tendrémos

$$x = 32 - y;$$

y suponiendo ahora que y sea respectivamente igual á 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., obtendrémos evidentemente para x los respectivos valores 31, 30, 29, 28, 27, 26, etc.

Los números 1 y 31 forman una solucion, 2 y 30 otra, 3 y 29 otra, y así cuantas se quieran.

Si en la misma ecuacion despejamos y, tendrémos $y = 32 - x$; y si suponemos ahora valores arbitrarios y diferentes para x, es evidente que á cada valor variable de x corresponde uno nuevo para y.

Por manera, que á cada valor variable de y corresponde uno para x, y á cada valor variable de x corresponde otro para y.

Por eso decimos que estas ecuaciones admiten infinidad de soluciones, ó que las incógnitas que en ellas entran admiten infinidad de valores.

Si la ecuacion tiene tres incógnitas, como

$$x - 2y + z = 10$$

despejando x, tendrémos

$$x = 10 + 2y - z$$

y dando valores á z é y, tendrémos los que corresponden á x.

Y como lo mismo sucederá respecto de y, dando valores arbitrarios á x y z, y lo mismo respecto de z, dándolos á x é y; y lo mismo para otra ecuacion con cuatro ó más incógnitas;

De aquí que *las ecuaciones indeterminadas de dos ó más incógnitas admiten infinidad de soluciones.*

Resolucion de dos ó más ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas.

141. Ya se comprende que no siempre han de venir las cuestiones en ÁLGEBRA de suerte que puedan plantearse bajo la forma de una ecuacion de primer grado con una incógnita.

Esto supuesto, se llama *sistema de ecuaciones* el conjunto de dos ó más ecuaciones que han de verificarse por unos mismos valores de las incógnitas, ya entren todas ó nó en cada ecuacion, pero siendo siempre en número igual al de éstas, si el sistema ha de ser *determinado.*

Porque un sistema de ecuaciones puede ser *determinado*, *indeterminado ó imposible*, segun que el número de soluciones sea limitado, ilimitado ó que no se verifique por unos mismos valores de las incógnitas.

Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* el uno del otro, si toda solucion del primero lo es tambien del segundo, y al contrario. Es evidente que un sistema de ecuaciones puede sustituirse por otro equivalente.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones.

Y como un sistema de ecuaciones *determinado* no puede resolverse, resolviendo las ecuaciones una á una, y aisladamente cada una; porque la consideracion de cada ecuacion aislada convertiría á esta en ecuacion *indeterminada* con infinidad de soluciones (**140**), ha sido necesario cierto artificio, que consiste en reemplazar el sistema dado, con otro que tenga una incógnita ménos y una ecuacion ménos, por medio de operaciones que no alteren los valores de las in-

Carlos Botello

cógnitas, y despues reemplazar este nuevo sistema por otro que tenga una incógnita ménos y una ecuacion ménos, continuando así esta especie de movimiento descendente, ó de descomposicion, hasta llegar á una sola ecuacion con una sola incógnita, llamada *ecuacion final*, que ya sabemos resolver (136).

El valor que se obtenga en la *ecuacion final* para la incógnita que en ella entre, se sustituye por dicha incógnita en una ecuacion anterior á la final, donde entre con otra no más, cuyo valor es inmediatamente determinado. Estos dos valores se llevan á otra ecuacion donde entren tres incógnitas, dos de las cuales sean las dos cuyos valores se conozcan, y se sustituyen por ellas para obtener el valor de la tercera incógnita. Y así se continúa esta especie de movimiento ascendente, ó de composicion, hasta determinar los valores de todas las incógnitas que satisfagan las ecuaciones todas del sistema propuesto.

La accion de hacer desaparecer las incógnitas una á una, sin alterar los valores de las demás, se llama *eliminar*.

Tres son únicamente los métodos que debemos dar á conocer en este lugar: uno llamado método de eliminacion por *adicion* ó *sustraccion*, otro por *sustitucion*, y por *igualacion* el tercero.

Tratándose de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, consiste el 1.° en preparar las dos ecuaciones, de modo que la incógnita que se trata de eliminar tenga en ambas igual coeficiente, y sumarlas ó restarlas despues miembro á miembro, segun que dicha incógnita tenga en ellas signos contrarios ó signos iguales; sirviendo de minuendo, si han de restarse, la ecuacion en que la cantidad conocida sea mayor.

Consiste el 2.° en despejar la incógnita que se quiera eliminar en la ecuacion en que tenga menor coeficiente, y sustituir este indicado valor por la misma incógnita en la otra ecuacion: si hay una incógnita con la unidad por coeficiente, esa se preferirá para la eliminacion, por evitar quebrados.

Consiste el 3.° en despejar en ambas ecuaciones la incógnita que se haya de eliminar, é igualar despues estos valores indicados.

142. Sean, por ejemplo, las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 2 \end{array}\right\}$$

y propongámonos eliminar una cualquiera de las incógnitas, x por ejemplo, por *adicion* ó *sustraccion*.

Para que x tenga en ambas ecuaciones igual coeficiente, se multiplican los dos miembros de cada una por el coeficiente de x en la otra; es decir, se multiplican los dos miembros de la primera por 4, y los de la segunda por 2. Pero como en el presente ejemplo los coeficientes de x tienen el factor comun 2, basta multiplicar los dos miembros de la primera por 2, y copiar la segunda, para que x tenga en las dos ecuaciones igual coeficiente : igual ó análoga abreviacion se hará siempre que se pueda.

Hecha la multiplicacion que dejamos indicada, tendrémos

$$\left.\begin{aligned} 4x + 6y &= 16 \\ 4x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Y como á cantidades iguales se puede añadir ó quitar otras tambien iguales, sin inconveniente; restando de la primera la segunda ordenadamente, resulta

$$7y = 14\,;$$

de donde

$$y = \frac{14}{7} = 2.$$

Sustituyendo en la primera de las dos ecuaciones propuestas por y su valor obtenido ahora, tendrémos

$$2x + 3 \times 2 = 8,$$

ó bien

$$2x = 2\,;$$

de donde

$$x = \frac{2}{2} = 1.$$

Luego, tenemos $\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\}$ valores que transforman las dos ecuaciones propuestas en identidades como puede verse.

2.° Ejemplo : sean las tres ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - u &= 11 \\ 4x - 2y + 3u &= 11 \\ 6x + 4y - 9u &= 17. \end{aligned}\right\}$$

Si queremos comenzar tambien eliminando x, se compara una cualquiera de las tres ecuaciones, la primera por ejemplo, con cada una de las otras dos; es decir, se elimina x entre la primera y la segunda, y despues se elimina entre la primera y la tercera.

Hecha la preparacion, ya explicada, para la primera y segunda ecuacion, tendrémos

$$\begin{aligned} 4x + 6y - 2u &= 22 \\ 4x - 2y + 3u &= 11. \end{aligned}$$

Y hecha la preparacion oportuna para la primera y tercera, resulta

$$\begin{aligned} 6x + 9y - 3u &= 33 \\ 6x + 4y - 9u &= 17. \end{aligned}$$

Restando en el primer *par* de ecuaciones la segunda de la primera, y restando tambien en el segundo *par* la segunda de la primera ecuacion, siempre ordenadamente, tendrémos

$$\left.\begin{aligned} 8y - 5u &= 11 \\ 5y + 6u &= 16. \end{aligned}\right\}$$

Para eliminar ahora u, y á fin de que tenga en estas dos ecuaciones igual coeficiente, se multiplican los dos miembros de la primera por 6, coeficiente de u en la segunda, y los dos miembros de la segunda se multiplican por 5, coeficiente de u en la primera, y resulta

$$48y - 30u = 66$$
$$25y + 30u = 80,$$

y sumando estas ecuaciones, miembro á miembro, tendrémos la *ecuacion final*

$$73y = 146;$$

de donde $$y = \frac{146}{73} = 2$$

Este valor obtenido para y se sustituye por esta letra en una de las dos ecuaciones en que solamente entran u é y, en la primera por ejemplo, y resulta

$$8 \times 2 - 5u = 11,$$

ó sea $$16 - 11 = 5u,$$

ó bien $$5u = 5;$$

de donde $$u = \frac{5}{5} = 1.$$

Este valor obtenido para u y el que obtuvimos para y se sustituyen respectivamente por estas incógnitas en una de las tres ecuaciones propuestas, en la primera por ejemplo, y tendrémos

$$2x + 3 \times 2 - 1 = 11$$

ó bien $$2x = 6;$$

de donde $$x = \frac{6}{2} = 3.$$

Luego, tenemos $\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \\ u = 1 \end{array}\right\}$ valores que transforman las tres ecuaciones propuestas en identidades como puede verse.

Si se nos propusiera un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, obraríamos de la misma manera; es decir, elegiríamos una ecuacion para compararla con cada una de las demás, prefiriendo aquélla en que la letra designada para la eliminacion esté con un coeficiente que tenga el mayor número posible de factores comunes con los coeficientes de la misma letra en las demas ecuaciones, y eliminando la letra que se quiera designada entre la ecuacion elegida y cada una de las otras tres, estamos en el caso anterior.

Y así tambien procederíamos con cinco, seis, etc., ecuaciones.

Vengamos ahora á eliminar la y, por ejemplo, ***por sustitucion*** entre las dos ecuaciones que ya conocemos

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 2. \end{array}\right\}$$

Despejando y en la segunda ecuacion, donde tiene la unidad por coeficiente, se obtiene $y = 4x - 2$.

Y sustituyendo por y su valor en la primera ecuacion, tendrémos $2x + 3(4x - 2) = 8$,

ó bien $2x + 12x - 6 = 8$,

ó ya $2x + 12x = 8 + 6$,

ó sea $14x = 14$;

de donde $x = \frac{14}{14} = 1$.

Una vez determinado el valor de x, se sustituye por dicha letra en la primera de las ecuaciones propuestas, y tendrémos

$$2 \times 1 + 3y = 8,$$

ó bien $3y = 6$;

de donde $y = \frac{6}{3} = 2$.

Es decir $x = 1$,

$$y = 2.$$

Propongámonos resolver el sistema de las tres ecuaciones conocidas, haciendo uso para la eliminacion del método por *sustitucion*.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - u &= 11 \\ 4x - 2y + 3u &= 11 \\ 6x + 4y - 9u &= 17 \end{aligned}\right\}$$

La incógnita más fácil de despejar es u en la primera ecuacion, que nos da

$$u = 2x + 3y - 11.$$

Sustituyendo este indicado valor de u por esta letra en la segunda y tercera ecuacion, tendrémos

$$4x - 2y + 3(2x + 3y - 11) = 11$$
$$6x + 4y - 9(2x + 3y - 11) = 17,$$

ó bien
$$4x - 2y + 6x + 9y - 33 = 11$$
$$6x + 4y - 18x - 27y + 99 = 17$$

y haciendo la transposicion y reduccion, resulta

$$\left.\begin{aligned} 10x + 7y &= 44 \\ -12x - 23y &= -82 \end{aligned}\right\}$$

En este sistema de dos ecuaciones, que ha reemplazado al propuesto de tres, la incógnita más fácil de despejar es x en la primera, que nos da

$$x = \frac{44 - 7y}{10}.$$

Sustituyendo este indicado valor de x por esta letra en la segunda, tendrémos

$$-12 \times \left(\frac{44 - 7y}{10}\right) - 23y = -82.$$

Esta es la ecuacion final en que no hay más incógnita que y.

Para resolverla se empieza verificando el producto del quebrado por -12

$$\frac{-528+84y}{10}-23y=-82,$$

y quitando quebrados,

$$-528+84y-230y=-820,$$

y haciendo la transposicion y reduccion,

$$-146y=-292;$$

de donde $$y=\frac{-292}{-146}=2.$$

Obtenido este valor para y se sustituye por esta letra en la expresion del valor de x, y tendrémos

$$x=\frac{44-7\times2}{10}=\frac{44-14}{10}=\frac{30}{10}=3.$$

Y obtenidos los valores de x é y, se sustituyen respectivamente por estas letras en la expresion del valor de u, y tendrémos

$$u=2\times3+3\times2-11=6+6-11=12-11=1.$$

Es decir $$\begin{cases}x=3\\y=2\\u=1.\end{cases}$$

De suerte que, habiendo resuelto primeramente *el mismo sistema de dos ecuaciones*; pero eliminando una vez por *adicion* ó *sustraccion* y *otra vez por sustitucion*, hemos obtenido ámbas veces $x=1$, $y=2$.

Y habiendo resuelto despues *el mismo sistema de tres ecuaciones*, pero eliminando una vez por *adicion* ó *sustraccion*, y otra vez por *sustitucion*, hemos obtenido ambas veces $x=3$, $y=2$, $u=1$.

Si se nos propusiera un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, obraríamos de la misma manera; es decir, despejaríamos la incógnita que tuviese menor coeficiente, y sustituyendo por ella este valor indicado en las otras tres ecuaciones, nos encontrábamos en el caso anterior.

Y así tambien procederiamos con cinco, seis, etc., ecuaciones.

Veamos si, eliminando por *igualacion* en el mismo sistema de las dos mismas ecuaciones, obtenemos para las incógnitas x é y los mismos valores que obtuvimos eliminando por los otros dos métodos.

En efecto: sean $$\begin{cases}2x+3y=8\\4x-\ y=2.\end{cases}$$

Despejando y en ambas ecuaciones, tendrémos

$$y=\frac{8-2x}{3}$$

$$y=4x-2.$$

Igualando estos valores, resulta

$$\frac{8-2x}{3}=4x-2,$$

y quitando quebrados

$$8-2x=12x-6,$$

ó bien $$8+6=12x+2x,$$

ó sea $$14=14x;$$

de donde $$x=\frac{14}{14}=1.$$

Y sustituyendo por x su valor en la primera ecuacion, nos da

$$2\times 1+3y=8,$$

ó bien $$3y=6;$$

de donde $$y=\frac{6}{3}=2.$$

Es decir, que $x=1$ é $y=2$ como en los dos ejercicios anteriores, en los cuales se eliminó una vez por *adicion* ó *sustraccion*, y otra vez por *sustitucion*.

Veamos, por último, si eliminando por *igualacion* en el mismo sistema de las tres mismas ecuaciones, obtenemos para las incógnitas x, y, u, los mismos valores que obtuvimos eliminando por los otros dos métodos.

En efecto: sean $$\left\{\begin{array}{l}2x+3y-u=11\\4x-2y+3u=11\\6x+4y-9u=17.\end{array}\right.$$

Si queremos comenzar tambien eliminando x, se compara una cualquiera de las tres ecuaciones, la primera por ejemplo, con cada una de las otras dos; es decir, se despeja x en todas tres, y el valor indicado que se obtiene en la primera se iguala con cada uno de los otros dos, de esta manera:

$$x=\frac{11-3y+u}{2}$$

$$x=\frac{11+2y-3u}{4}$$

$$x=\frac{17-4y+9u}{6}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{11-3y+u}{2}=\dfrac{17-4y+9u}{6}.\\[2ex]\dfrac{11-3y+u}{2}=\dfrac{11+2y-3u}{4}\end{array}\right\}$$

Quitando quebrados, tomarán la forma de

$$\left.\begin{array}{l}33-9y+3u=17-4y+9u\\22-6y+2u=11+2y-3u\end{array}\right\}$$

y haciendo la transposicion y reduccion, tendrémos

$$\begin{cases} -5y-6u=-16, \\ -8y+5u=-11. \end{cases}$$

Para eliminar ahora u, se despeja en ambas ecuaciones, y se obtiene

$$u=\frac{16-5y}{6}$$

$$u=\frac{8y-11}{5};$$

é igualando estos valores indicados, resulta la ecuacion final

$$\frac{16-5y}{6}=\frac{8y-11}{5},$$

que sin quebrados, tomará la forma de

$$80-25y=48y-66,$$

ó bien

$$-73y=-146;$$

de donde

$$y=\frac{-146}{-73}=2.$$

Sustituyendo por y su valor en la primera expresion anterior del valor de u, tendrémos

$$u=\frac{16-5\times2}{6}=\frac{16-10}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Y sustituyendo por u é y, sus valores en la primera expresion anterior del valor de x, tendrémos

$$x=\frac{11-3\times2+1}{2}=\frac{11-6+1}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

Es decir, que $x=3,\ y=2,\ u=1,$
como en los dos ejercicios anteriores, en los cuales se eliminó una vez por *adicion ó sustraccion*, y otra vez por *sustitucion*.

Si se nos propusiera un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, para eliminar por igualacion, obraríamos de la misma manera; es decir, se despeja en todas cuatro la incógnita que se quiera eliminar, é igualando aquel valor indicado que tenga la más conveniente forma con cada uno de los otros tres obtenidos en las otras tres ecuaciones, estarémos en el caso anterior.

Y así tambien procederíamos con cinco, seis, etc., ecuaciones.

Escolio. Sucede alguna vez que no entran todas las incógnitas en todas las ecuaciones, y esto en vez de ser un inconveniente, al contrario, facilita la resolucion del sistema propuesto.

EJEMPLO:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+2z&=13 \\ 4u-2x&=30 \\ 4y+2z&=14 \\ 5y+3u&=32. \end{aligned}\right\}$$

Efectivamente: z entra sólo en la primera y tercera ecuacion, y restada la primera de la tercera ordenadamente, nos da por eliminada la z.

Por otra parte, u entra sólo en la segunda y cuarta; y puede eliminarse fácilmente por *adicion ó sustraccion* tambien.

El sistema de dos ecuaciones que reemplaza al propuesto, será

$$\left.\begin{array}{r} 7y - 2x = 1 \\ 20y + 6x = 38. \end{array}\right\}$$

Multiplicando ahora los dos miembros de la primera por 3, y sumando ordenadamente estas dos ecuaciones, tendrémos

$$41y = 41;$$

de donde $y = \frac{41}{41}$, ó bien. . . . . $y = 1$

sustituyendo este valor en la ecuacion $7y - 2x = 1$, se obtiene. . . . . $x = 3$

sustituyendo por x su valor en la segunda de las propuestas, resulta. . . . . $u = 9$

y la sustitucion del valor de y en la tercera, da. . . . . . $z = 5$,

valores que verifican las ecuaciones propuestas, como puede verse.

Y cuenta, que el número de ecuaciones ha de ser igual al de incógnitas: porque si el número de ecuaciones fuese menor que el de incógnitas, ó letras que las representen, habría infinidad de soluciones. Si hubiese, por ejemplo, cuatro ecuaciones y cinco incógnitas, habría, despues de la primera eliminacion, tres ecuaciones y cuatro incógnitas; despues de la segunda, dos ecuaciones y tres incógnitas; y despues de la tercera, la ecuacion final con dos incógnitas, que sería *indeterminada* (**140**), y haría indeterminada la cuestion.

ESCOLIO. Despues de eliminar una incógnita por cualquiera de los tres métodos explicados, no hay inconveniente en hacer la eliminacion siguiente por otro método, ni en que alternen los tres.

Y finalmente; si se nos pide nuestra opinion acerca de cada uno de los métodos expuestos, dirémos que:

El de *igualacion* se usa poco, porque casi siempre ofrece quebrados.

El de *adicion* ó *sustraccion* es bueno en los casos sencillos en que con ligera preparacion, ó sin ella, basta sumar ó restar dos ecuaciones ordenadamente para que desaparezca una incógnita.

El más cómodo y más usado es el de *sustitucion*, sobre todo, si hay incógnitas con la unidad por coeficiente. Hay más: como á partir de la *ecuacion final* y del valor de la incógnita que en ella éntre, la determinacion de los valores de las demás incógnitas se hace por *sustituciones sucesivas;* si en la eliminacion se ha empleado el método de *sustitucion*, las expresiones de los valores indicados de las incógnitas estarán ya formadas, y como esperando aquellas *sustituciones sucesivas;* miéntras que, si en la eliminacion se empleó otro método, habrá que perder tiempo y trabajo en *formar esas expresiones de valores indicados*, que de otro modo ya podian estar *formadas* como hemos dicho.

Problemas que pueden resolverse por medio de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

143. *Dos correos salen al mismo tiempo, uno de Badajoz y otro de Mérida, camino recto de Madrid: los separa una distancia de* 10 *leguas: el que sale de Badajoz anda legua y media por hora, y el que sale de Mérida legua y cuarto por hora. Supuestas iguales las demas circunstancias*, ¿cuál es el punto de encuentro? Es decir, á qué distancia de Badajoz y de Mérida será alcanzado el que sale de Mérida por el que sale de Badajoz?

Representemos por x la distancia que hay desde Badajoz al punto de encuentro, y por y la que hay desde Mérida al mismo punto.

La primera ecuacion será $x-y=10$.

Para formar la segunda, basta considerar que los correos parten *al mismo tiempo*, y evidentemente se encuentran *al mismo tiempo*, esto es, que los tiempos empleados por los correos en recorrer sus distancias respectivas son iguales. Y como los tiempos se representan en Física por *las distancias partidas por las velocidades*, siendo uniforme el movimiento, igualando las expresiones $\frac{x}{1\,^1/_2}$ é $\frac{y}{1\,^1/_4}$ tendrémos la segunda ecuacion.

Tambien tenemos la primera: luego el problema quedará planteado bajo la forma de

$$\left.\begin{aligned} x-y&=10\\ \frac{x}{1\,^1/_2}&=\frac{y}{1\,^1/_4}.\end{aligned}\right\}$$

Para quitar quebrados en la segunda ecuacion hay que hacerla pasar por ciertos trámites, quedando la primera como está.

Así, tendrémos
$$x-y=10$$
$$\frac{x}{^3/_2}=\frac{y}{^5/_4},$$

ó sea
$$x-y=10$$
$$\frac{2x}{3}=\frac{4y}{5},$$

ó bien
$$\left.\begin{aligned} x-y&=10\\ 10x-12y&=0.\end{aligned}\right\}$$

Eliminemos ya la y, despejándola en la primera ecuacion, y sustituyendo en la segunda su valor indicado, de manera que siendo

$$y = x - 10,$$

tengamos $\quad 10x - 12(x - 10) = 0,$

ó sea $\quad 10x - 12x + 120 = 0,$

ó ya $\quad -2x = -120,$

de donde $\quad x = \frac{-120}{-2} = 60.$

Y sustituyendo este valor de x en la expresion del valor indicado de y, tendrémos

$$y = 60 - 10 = 50.$$

Es decir $\quad \begin{cases} x = 60 \\ y = 50. \end{cases}$

Lo que nos dice que el correo que salió de Badajoz alcanzó al otro á 60 leguas de Badajoz y 50 de Mérida.

Y con efecto: $\quad 60 - 50 = 10$

$\frac{60}{1\,{}^1/_2} = \frac{50}{1\,{}^1/_4}$ es lo mismo que $\frac{60}{{}^3/_2} = \frac{50}{{}^5/_4}$, lo mismo que

$$\frac{120}{3} = \frac{200}{5} = \text{ó que } 40 = 40.$$

Escolio. Muchos problemas que se resuelven por medio de una ecuacion con una incógnita, se resuelven tambien por medio de dos ecuaciones con dos incógnitas, y al contrario.

Tomemos por ejemplo el mismo problema segundo en que nos propusimos *hallar dos números, cuya suma fuese* 24 *y su diferencia* 16.

Ahora dirémos:

Representando el número mayor por. . . . x

y el número menor por. . . . y,

las ecuaciones del problema serán. . . . . $\begin{cases} x + y = 24 \\ x - y = 16 \end{cases}$

Sumando ordenadamente, tendrémos. . . . $2x \quad = 40;$

de donde. . . . . $x = \frac{40}{2} = 20.$

Despejando y en la primera y sustituyendo por x su valor, se obtiene. . . . . $y = 24 - x = 24 - 20 = 4.$

valores iguales á los obtenidos anteriormente.

Hallar dos números cuya suma sea s *y su diferencia* d.

Ahora dirémos:

Representemos el número mayor por. x

y el número menor por. . . . . y, el problema queda planteado de este modo. . . . . $\begin{cases} x + y = s \\ x - y = d \end{cases}$

Sumando ordenadamente tendrémos. . . . . $2x = s + d$

de donde. . . . . $x = \frac{s + d}{2}$

Despejando y en la primera y sustituyendo por x su valor, se obtiene. . . . $y = s - \frac{s + d}{2} = \frac{2s - s - d}{2} = \frac{s - d}{2}$.

Valores que tambien conociamos ya. Y podrian ponerse otros muchos ejemplos.

Escolio 2.° Tambien se da el caso de que una ecuacion sea traduccion algebráica *de más de un enunciado.*

Ejemplo. *Un propietario hizo con un jornalero el trato siguiente: el propietario daria* 5 *rs. al jornalero cada dia que éste trabajase, y le retendria* 3 *rs. para su manutencion por cada dia que no trabajase. A los* 18 *dias ajustaron cuentas*, y debia el propietario al jornalero 26 rs. ¿Cuántos dias trabajó y cuántos nó?

Esta cuestion, como la del pescador, puede resolverse por medio de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sigamos, no obstante, la marcha adoptada en la del pescador.

Si representamos por x el número de dias de trabajo, el de ociosidad será $18 - x$.

Y la ecuacion será. . . . . $5x - 3\,(18 - x) = 26$

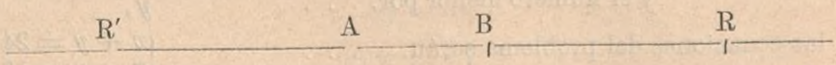
ó bien. . . . . $8x = 80$

de donde. . . . . $x = \frac{80}{8} = 10$

y el número de dias de ociosidad. . . . . . $18 - x = 18 - 10 = 8$

resultados iguales á los anteriores.

141. Resolvamos con toda generalidad el problema anterior de los correos.



Dos correos, separados por la distancia a *que hay entre los puntos* A *y* B, *salen al mismo tiempo de* A *y de* B *en la misma direccion de* R, *andando* m *leguas por hora el que sale de* A *y* n *leguas el que sale de* B. *Supuestas iguales las demas circunstancias, ¿cuál será el punto de encuentro?*

Representando por x é y las distancias respectivas de A y B al punto de encuentro, que podemos representar por R, tendrémos por primera ecuacion la siguiente que se refiere á las distancias

$$x - y = a.$$

Y puesto que representamos las dos cantidades desconocidas por dos signos ó letras distintas, necesitamos otra ecuacion que se referirá á los tiempos. Y como los tiempos invertidos por los dos correos en recorrer sus distancias respectivas sean iguales, pues por la hipótesis parten al mismo tiempo, y evidentemente se encuentran al mismo tiempo, y los tiempos se representan en Física por las distancias partidas por las velocidades, si el movimiento es uniforme, como en el presente problema, representarémos estos tiempos por $\frac{x}{m}$ é $\frac{y}{n}$ respectivamente; igualando estas dos expresiones, tendrémos planteado el problema bajo la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= a \\ \frac{x}{m} &= \frac{y}{n} \end{aligned}\right\}$$

Quitando quebrados en la segunda ecuacion, y hecha en la misma la transposicion de términos, resulta

$$\left.\begin{aligned} x - y &= a \\ nx - my &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Para eliminar y por sustitucion, por ejemplo, la despejarémos en la primera ecuacion, y obtenemos

$$y = x - a.$$

Sustituido por y su valor en la segunda ecuacion, resulta

$$nx - m(x - a) = 0.$$

Verificada la multiplicacion indicada, y pasando las cantidades conocidas al segundo miembro, tenemos

$$nx - mx = -am.$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuacion por -1, para cambiar los signos de todos sus términos, se transforma en

$$mx - nx = am,$$

y sacando fuera de un paréntesis en el primer miembro el factor x comun á los dos términos, tomará esta última forma

$$(m - n)x = am;$$

de donde

$$x = \frac{am}{m - n}$$

é

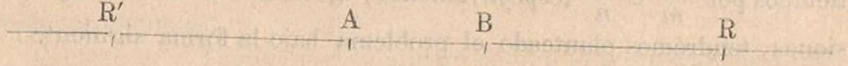
$$y = x - a = \frac{am}{m - n} - a = \frac{am - am + an}{m - n} = \frac{an}{m - n}.$$

Discusion de este problema.

145. *Cuando se ha resuelto un problema con toda generalidad,* esto es, *representando por letras tanto las cantidades desconocidas* (que siempre se representan así) *como las conocidas, y se hacen sobre los datos todas las hipótesis posibles; la determinacion de los dis-*

tintos resultados á que las diferentes hipótesis dan lugar, su interpretacion y explicacion, constituye lo que se llama discusion de un problema.

Tomemos del *Algebra* de M. Bourdon la discusion del problema de los correos, que ofrece los casos más dignos de ser conocidos, y pongamos préviamente el cuadro de la resolucion y discusion del mismo problema, para la mejor inteligencia de nuestros jóvenes amigos.



	Valores.	**Hipótesis.**
$a,\ m,\ n,\ x,\ y$ $\left.\begin{array}{l} x-y=a \\ \frac{x}{m}=\frac{y}{n} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x-y=a \\ nx-my=0 \end{array}\left\{\begin{array}{l} y=x-a \\ nx-m(x-a)=0 \\ nx-mx+am=0 \\ (m-n)x=am; \end{array}\right.$ de donde. . . . . . é $y=x-a=\frac{am}{m-n}-a=\frac{am-am+an}{m-n}=$ . .	$x=\frac{am}{m-n}$ $y=\frac{an}{m-n}$	1.ª $m>n$
$\begin{array}{l} y-x=a \\ nx-my=0 \end{array}\left\{\begin{array}{l} y=a+x \\ nx-m(a+x)=0 \\ nx-am-mx=0 \end{array}\right\}$ $(n-m)x=am;$ de donde. . . . . é $y=a+\frac{am}{n-m}=\frac{an-am+am}{n-m}=$	$x=\frac{am}{n-m}$ $y=\frac{an}{n-m}$	2.ª $m<n$
$\left.\begin{array}{l} x-y=a \\ x-y=0 \end{array}\right\}$ . . . . . $\frac{A}{0}=\infty$	$x=\frac{am}{0}$ $y=\frac{an}{0}$	3.ª $m=n$
$\left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$	$x=\frac{0}{0}$ $y=\frac{0}{0}$	4.ª $\left\{\begin{array}{l} m=n \\ a=o \end{array}\right.$
$\left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ nx-my=0 \end{array}\right\}$	$x=0$ $y=0$	5.ª $\left\{\begin{array}{l} a=0 \\ m\gtrless n \end{array}\right.$

Suponiendo que el problema acaba de ser resuelto, segun hemos explicado ántes, y teniéndolo á la vista en la pizarra, segun indica el cuadro, examinemos las diferentes hipótesis que sobre los datos pueden hacerse.

Supongamos tambien que no hay escrito más que la resolucion y la primera hipótesis: se supone que lo demás se va escribiendo á medida que vamos haciendo la discusion siguiente:

1.ª *Hipótesis.* Si $m > n$, como los valores de x é y están representados por dos quebrados que tienen por denominador comun la sustraccion indicada, $m - n$; si se supone al minuendo mayor que el sustraendo, que esto significa $m > n$, el resultado de la sustraccion es positivo, el denominador comun positivo, los quebrados positivos, y los valores de x é y positivos. Estos valores positivos nos dicen que en esta hipótesis el problema se resuelve *en el sentido propio de su enunciado.* Con efecto: si el correo que parte de A anda con más velocidad que el que parte de B, es evidente que á cada instante va ganando algo de la ventaja a con que el segundo salió de B: esta ventaja a irá, pues, disminuyendo hasta que llegue el momento en que desaparezca, y los correos se encuentren en un punto de la línea que recorren, conforme con la pregunta del enunciado.

2.ª Si $m < n$, el resultado de la sustraccion indicada en el denominador comun de los quebrados es negativo, los quebrados negativos, y los valores de x é y negativos, y pueden ponerse bajo la forma de $-\frac{am}{n-m}$ y $-\frac{an}{n-m}$. Estos valores negativos nos dicen que en esta hipótesis el problema no puede resolverse en el sentido propio de su enunciado Con efecto: si el correo que parte de A con la desventaja a anda con ménos velocidad que el que parte de B, es evidente que á cada instante va aumentando la distancia a que los separaba, y que no puede haber encuentro en el camino que recorren en direccion de R.

Y esta *imposibilidad* de encuentro en la direccion de R, reconoce por causa un vicio en el enunciado; pero entiéndase bien, el vicio del enunciado es ó existe dentro de la presente hipótesis, y consiste en preguntar por el punto de encuentro en direccion de R, cuando no puede haber encuentro, por andar ménos el correo que sale con la desventaja a.

Pero el Álgebra, haciendo alarde de la fecundidad de sus recursos, se hace cargo de ese vicio, lo modifica para esta hipótesis en que nos encontramos, plantea el problema con arreglo á la modificacion, y esos mismos valores negativos aparecen positivos, resolviendo la cuestion.

La modificacion consiste en preguntar *dónde se habrán encontrado*, en vez de preguntar *dónde se encontrarán.*

Y para hacer esta modificacion, basta admitir que los correos vengan andando de atrás, y que pasan al mismo tiempo por A y B. A ninguna ley se falta con suponer que vengan andando de atrás: no hay más medio para expresar donde empieza el movimiento, que la segunda ecuacion; que lo mismo sirve para expresar la simultaneidad de *partida* de A y B que la simultaneidad de *paso* por A y B, y quedan satisfechos el enunciado primitivo y el modificado.

La primera ecuacion será $y - x = a$, representando x é y ahora, como ántes, las distancias respectivas de A y B al punto de encuentro R' de la modificacion.

Y las ecuaciones serán $\left\{\begin{array}{l} y - x = a \\ \frac{x}{m} = \frac{y}{n} \end{array}\right.$ ó bien $\left.\begin{array}{r} y - x = a \\ nx - my = 0 \end{array}\right\}$ que como se ve en el cuadro dan los valores positivos $\frac{am}{n-m}$ y $\frac{an}{n-m}$ (que ántes fueron negativos), resolviendo la cuestion respecto del punto de encuentro R'.

3.ª Si $m = n$, los valores de x é y tomarán la forma de $\frac{am}{0}$ y $\frac{an}{0}$, y tampoco hay punto de encuentro.

Que en esta hipótesis no hay punto de encuentro, es evidente; porque si los correos andan con velocidades iguales, que esto significa $m = n$, claro es que la distancia a que los separaba es constante, es siempre la misma, no hay encuentro.

Y esto mismo nos lo dicen las ecuaciones; pues, puesto el problema en ecuacion con arreglo á esta hipótesis, la primera es $x - y = a$, y la segunda, despues de quitar quebrados y hacer la transposicion $x - y = 0$; ecuaciones incompatibles y contradictorias.

Pero los algebristas, por explicar todo, dicen que en esta hipótesis los correos se encuentran en el *infinito*.

Lo que está fuera de duda es que á medida que la cantidad $m-n$ disminuye, los valores de los quebrados $\frac{am}{m-n}$ y $\frac{an}{m-n}$ aumentan, y el punto de encuentro dista más de A y de B. Y por consiguiente, cuando $m - n$ sea menor que cualquiera cantidad dada, las distancias $\frac{am}{m-n}$ y $\frac{an}{m-n}$ serán mayores que cualquier cantidad dada, ó *infinita*, y que las soluciones $x = \frac{am}{0}$ é $y = \frac{an}{0}$ son valores *infinitos*, símbolo de imposibilidad que no ha de confundirse con *infinidad* de valores.

Y como el valor de un quebrado aumenta á medida que el denominador disminuye, quedando el numerador el mismo; si consideramos el 0 como el límite por decremento de todo valor *absoluto* de la cantidad, el quebrado que tenga 0 por denominador, será el límite por incremento, ó *infinito*, ó bien $\frac{A}{0} = \infty$.

Y se lee, A partido por *cero* igual al *infinito*.

Concluyamos con M. Bourdon, que en esta hipótesis no tiene el problema solucion en números *finitos* y *determinados*, pero las incógnitas tienen valores *infinitos*.

4.ª Si además de $m = n$, a es igual á cero, los valores tomarán la forma de $\frac{0}{0}$ y $\frac{0}{0}$. Así como el símbolo anterior $\frac{a}{0}$ es de *imposibilidad*, el presente símbolo $\frac{0}{0}$ lo es de *exceso de posibilidad*. Y con efecto: si los correos parten de un mismo punto, que esto significa $a = 0$, y con velocidades iguales, puesto que $m = n$, es claro que los correos irán siempre juntos, y que habrá tantos puntos de encuentro como puntos físicos haya en el camino que recorran; es decir, el problema admite una *infinidad* de soluciones.

Y esto mismo nos lo dirían las ecuaciones, porque puesto el problema en ecuacion con arreglo á esta hipótesis, la primera ecuacion será. . . . . $x - y = 0$;

y la segunda, despues de quitar quebrados y hacer la transposicion. . . . . $x - y = 0$.

Y en realidad, lo que hay es una ecuacion repetida con dos incógnitas, y estamos en el caso de *infinidad de soluciones* para la cuestion (**140**).

5.ª Si, por último, además de $a = 0$ se supone á $m > ó < n$ los valores de x é y se reducen ambos á 0; y éste será un nuevo signo de *imposibilidad*; de que no hay solucion. En efecto: si los correos parten de un mismo punto y con velocidades desiguales, que esto significa la presente hipótesis, es evidente que el de mayor velocidad deja atrás al otro en el momento de la salida, y no vuelven á encontrarse más.

Y puesto el problema en ecuacion, tendríamos $x - y = 0$.

$$nx - my = 0.$$

Que son incompatibles y contradictorias; porque si $x - y$ da un resto *cero*, no puede obtenerse el mismo resto *cero*, multiplicando el minuendo y el sustraendo por cantidades desiguales como son m y n dentro de esta hipótesis; y las ecuaciones incompatibles, claro es, son tambien signo de imposibilidad.

De suerte, que la discusion anterior ha sido desarrollada, repitiendo los cuatro conceptos que siguen, y en el órden que siguen: *hipotesis*; *valores* de x é y en cada hipótesis; *interpretacion* de los valores; *explicacion*. Pasemos á generalizar esta discusion.

146. En la discusion del problema de los correos hemos obteni-

Carlos Botello

do cinco clases de valores: *positivos, negativos, de la forma* $\frac{A}{0}$, de la forma $\frac{0}{0}$, y en fin 0.

Los valores *positivos* resuelven generalmente los problemas en el sentido de su enunciado. Y digo generalmente, porque hay cuestiones en las que no todos los valores positivos satisfacen el enunciado: un ejemplo nos hará comprenderlo: basta que la índole del problema exija números enteros, y que los obtenidos sean fraccionarios.

Los valores *positivos* resuelven, pues, las ecuaciones; y son soluciones para los problemas, si sus demas caractéres ó condiciones son iguales á lo que el enunciado exija. Y esto se concibe: una ecuacion puede ser á la vez traduccion algebráica de muchos problemas, de los cuales unos admiten todos los números por soluciones, y otros sólo admiten números de cierta clase.

147. En cuanto á los valores *negativos*, ya sabemos á qué atenernos. Indican un vicio en el enunciado. Si se pudiese prescindir de su signo, satisfarían la cuestion. Por eso se modifica el enunciado, y los valores negativos aparecen positivos como soluciones directas del problema. Y en algun caso raro en que no sea posible modificar el enunciado de un problema, se modifican las ecuaciones, y los valores *negativos* serán soluciones para las ecuaciones modificadas, que pueden ser consideradas como traduccion algebráica de otros problemas.

148. La forma general de una ecuacion de primer grado con una incógnita es $ax = b$.

Representando a la suma algebráica de todas las cantidades que multiplican á x, y b la suma algebráica de todas las cantidades conocidas, se deduce $x = \frac{b}{a}$.

Discutamos esta ecuacion.

1.ª *hipótesis: que ni* a *ni* b *sean iguales á cero*. Como el valor de x es el cociente de b por a, y este cociente es *único*, la ecuacion $ax = b$ se llama *determinada*, por más que su raíz pueda ser entera, fraccionaria, inconmensurable, positiva, negativa ó imaginaria, segun los signos y la forma de las cantidades a y b.

2.ª *Si* a *es igual á cero y* b *nó*, el valor de x resulta $\frac{b}{0}$, ó sea el símbolo de una cantidad infinitamente grande (**145**, *hipót.* 3.ª).

La ecuacion puede ponerse bajo la forma de $0 \times x = b$; de donde $\frac{b}{x} = 0$.

Y como á medida que x aumenta, el valor de $\frac{b}{x}$ se aproxima á 0, por eso los algebristas dicen que ∞ satisface la ecuacion, que por lo mé os es *imposible* en valores *finitos*.

3.ª *Si* a *y* b *son iguales á* 0, el valor de x resulta $\frac{0}{0}$, é igual á una cantidad cualquiera, puesto que cualquier cantidad multiplicada por cero da siempre cero por producto: y por lo mismo es *indeterminada* la ecuacion $0 \times x = 0$, que resulta satisfecha por cuantos valores se den á la incógnita, y $\frac{0}{0}$ es el *símbolo de la indeterminacion.*

Sin embargo, á veces sirve de indicio de la existencia de algun factor comun á los términos del quebrado que se reduce á esa forma, y que no se suprimió á tiempo.

Si tenemos, por ejemplo, $x = \frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2}$,

y suprimimos el factor $(a-b)$ comun á sus dos términos, tendrémos $x = \frac{a+b}{a-b}$; y haciendo $a = b$, resulta $x = \frac{2a}{0}$.

Pero si teniendo la misma expresion $x = \frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2}$, se supone $a = b$, ántes de hacer la supresion del factor comun $(a-b)$, tendríamos evidentemente $x = \frac{0}{0}$.

4.ª *Si* b *es igual á* 0 *y* a *nó*, el valor de x resulta $\frac{0}{a} = 0$; y la ecuacion $ax = 0$ es *imposible* en valores *finitos*, y la satisface el valor cero; advirtiendo que un quebrado literal puede reducirse á cero, suponiendo cero el numerador, ó ∞ el denominador.

En efecto; $a : \frac{1}{b} = a \times b$; de donde suponiendo $b = 0$, resulta $\frac{a}{\infty} = 0$.

149. La forma general de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, es $\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned}\right\}$

en las cuales a y a' representan la suma algebráica de las cantidades que multiplican respectivamente á x en la primera y segunda ecuacion, b y b' las que multiplican á y, y c y c' las cantidades conocidas.

El uso de los acentos tiene por objeto evitar términos semejantes que reducir, para conocer en su consecuencia la *ley* de formacion de los valores de las incógnitas en éste y en los sistemas sucesivos.

Hechas en este sistema las preparaciones convenientes, se deduce

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y &= \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{aligned}\right\}$$

Discutamos este sistema.

1.ª *hipótesis: Si el denominador comun* ab' — ba' *no es cero*, las incógnitas tendrán un valor único, puesto que se deduce siempre de la resolucion de una ecuacion de primer grado con una incógnita. Y por lo tanto, una sola solucion admitirá el sistema propuesto, y será *determinado.*

Si añadimos la condicion de ser c y c' iguales á cero, las incógnitas serán tambien cero, y las ecuaciones *imposibles* ó *absurdas.*

2.ª *Si el denominador comun* ab' — ba' *es cero, no siéndolo ninguno de los numeradores*, los valores de las incógnitas tendrán la forma $\frac{A}{0}$, y serán $x = \infty$ é $y = \infty$; y por consiguiente las ecuaciones dadas serán incompatibles en valores *finitos*, puesto que equivalen á estas otras

$$ab'x + bb'y = cb'$$
$$a'bx + b'by = c'b$$

ecuaciones evidentemente contradictorias, miéntras no se verifique

$$cb' = c'b, \text{ ó sea } cb' - c'b = 0.$$

Y semejante sistema, que no puede verificarse por ningun grupo de valores simultáneos de las incógnitas, es *imposible* ó *absurdo.*

3.ª *Si el denominador comun* ab' — ba' *es cero, y cero tambien el numerador de una de las incógnitas*, el numerador de la otra incógnita será tambien cero, y tendrémos $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$; verificándose que una de las dos ecuaciones es consecuencia de la otra, puesto que equivalen á

$$ab'x + bb'y = cb'$$
$$a'bx + b'by = c'b$$

que son una misma en el supuesto de que $ab' = ba'$ y $cb' = c'b$.

En esta hipótesis el sistema propuesto es *indeterminado.*

4.ª Suponiendo $a=0$, $b = 0$, tendrémos $x=\infty$, $y=-\infty$

y si además $c=0$, resultará $x=\frac{0}{0}$ $y = \frac{0}{0}$

Suponiendo $a=0$, $a' = 0$, las incógnitas serán $x=\infty$, $y = \frac{0}{0}$

si $a=0$, $b' = 0$, tendrémos $x= \frac{c'}{a'}$, $y = \frac{c}{b}$

Escolio. La discusion de la ecuacion $ax = b$ (148) nos conduce á las conclusiones siguientes:

Si la ecuacion es *determinada*, su raíz *única* puede ser entera, fraccionaria, inconmensurable, positiva, negativa ó imaginaria.

Si *imposible* ó *absurda*, será cero, ó ∞.

Si *indeterminada*, tiene cuantas raíces se quieran.

Y sea cualquiera la raíz, *siempre verifica la ecuacion.*

La discusion del precedente sistema de dos ecuaciones nos conduce á estas otras:

Si el sistema es *determinado*, admite una sola solucion.

Si *imposible* ó *absurdo*, no admite ninguna en números *finitos.*

Si *indeterminado*, tienen cuantas soluciones se quieran.

Y aunque se puede continuar la discusion para un sistema de tres ó más ecuaciones, consideramos que lo expuesto es suficiente para el objeto de este libro.

CAPITULO V.

De las ecuaciones de segundo grado.

---

150. PRELIMINARES Se llama *ecuacion de segundo grado*, toda ecuacion que tiene una incógnita elevada á la segunda potencia, estando las demás (si las tuviere) en la misma ó inferior potencia.

Las ecuaciones de segundo grado con una sola incógnita se dividen en *puras* y *mixtas*, ó bien en *incompletas* y *completas*.

Son *puras* ó *incompletas* las que sólo tienen términos con x^2 y términos conocidos; y *mixtas* ó *completas* las que tienen términos con x^2, términos con x y términos conocidos, representando por x la incógnita que en ellas entre.

Y reuniendo algebráicamente, y despues de quitar quebrados si los hay, en un solo término todos aquéllos en que entre x^2, y en otro todos los términos conocidos, las ecuaciones *puras* reciben tambien el nombre de ecuaciones de segundo grado de *dos términos*: siendo su forma general $ax^2 = b$.

151. *Resolucion*. La primera transformacion que hay que hacer sufrir á una ecuacion *pura* de segundo grado para su resolucion, consiste en prepararla de manera que el término en que entra x^2 aparezca con la unidad por coeficiente; y esto se consigue dividiendo los dos miembros de la ecuacion por el coeficiente de x^2, ó cantidad que multiplique á x^2, que en el presente caso es a.

Dividiendo, pues, por a ambos miembros de la ecuacion, ésta tomará la forma de $x^2 = \frac{b}{a}$.

Y extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de esta ecuacion, tendrémos $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

152. *Discusion*. Si $\frac{b}{a}$ es una cantidad *positiva*, la extraccion de su raíz cuadrada es *posible*; y se obtiene *exactamente* si $\frac{b}{a}$ es un cuadrado perfecto, y por *aproximacion* si no lo es; es decir, que siendo $\frac{b}{a}$ cantidad *positiva*, los valores de x, ó bien las raíces de la ecuacion, son *conmensurables* ó *inconmensurables*, segun que la cantidad subradical sea ó no cuadrado perfecto; pero son *posibles*, *reales* por consecuencia, *numéricamente iguales*, y de signos contrarios, esto es, uno positivo y otro negativo (31).

Si $\frac{b}{a}$ es negativo los valores de x son *imaginarios*.

Además, suponiendo $b = 0$, los valores de x serán ± 0

si $a = 0$. . . . . serán $\pm \infty$

si $a = 0$ y $b = 0$. . . . . $\pm \frac{0}{0}$

Resumiendo : *toda ecuacion pura de segundo grado tiene dos raíces iguales, una positiva y otra negativa* : raíces que pueden ser enteras, fraccionarias, inconmensurables ó imaginarias.

153. *Problema.* Preguntado un particular por su edad, contestó : *el triplo del cuadrado del número de años que tengo, compone* 10800. ¿Qué edad tenía ?

Si representamos por x el número de años, el triplo de su cuadrado será $3x^2$: y por ecuacion tendrémos

$$3x^2 = 10800,$$

ó bien
$$x^2 = 3600;$$

de donde
$$x = \pm \sqrt{3600} = \pm 60:$$

ó bien
$$x = +60, \quad x = -60.$$

De estos dos valores, el primero responde á la ecuacion y al problema ; miéntras que el negativo sólo responde á la ecuacion.

154. *Ecuaciones completas de segundo grado.* La forma general de las ecuaciones *completas* ó *mixtas* de segundo grado, llamadas tambien de *tres términos*, despues de quitados quebrados, es la de

$$ax^2 + bx = c.$$

Donde ax^2 representa la suma algebráica de todos los términos en que hay x^2, bx la de todos los términos en que hay x, y c la de todas las cantidades conocidas.

155. *Resolucion.* La primera transformacion que ha de hacerse experimentar á una ecuacion completa de segundo grado para su resolucion, consiste en disponerla de modo que x^2 tenga la unidad por coeficiente ; y esto se consigue, dividiendo los dos miembros de la ecuacion por el coeficiente de x^2 ó cantidad que multiplique á x^2, que en el presente caso es a.

Dividiendo, pues, por a los dos miembros de la ecuacion, tendrémos
$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}.$$

Y llamando p al cociente de b por a, y q al de c por a, la ecuacion tomará la siguiente forma :

$$x^2 + px = q.$$

Si el primer miembro de esta ecuacion fuese un cuadrado perfecto, extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, se deduciría x del término x^2, la ecuacion que es de segundo grado pasaría á ser de primero, y la resolveríamos como hemos aprendido en el capítulo anterior.

Pero esto no puede realizarse, porque el primer miembro no es ni puede ser cuadrado perfecto, por ser un binomio, y un binomio no es cuadrado de ninguna expresion algebráica (**38**, 3.ª *Obs.*).

Sin embargo, aunque no puede obtenerse directamente la transformacion de la ecuacion propuesta en ecuacion de primer grado, puede obtenerse indirectamente y de un modo muy sencillo, considerando que, si bien el primer miembro no es cuadrado perfecto por ser un binomio, se compone, no obstante, de las dos primeras partes del cuadrado del binomio $x+\frac{p}{2}$, puesto que $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = x^2+px+\frac{p^2}{4}$. Podemos, pues, considerar al primer miembro de la ecuacion como cuadrado del binomio $x+\frac{p}{2}$, con lo cual se le añade implícitamente la tercera parte del cuadrado, ó sea $\frac{p^2}{4}$, con tal que se añada explícitamente esta misma cantidad al segundo miembro; tomando la ecuacion por consecuencia, la nueva forma de

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}+q.$$

Ahora que el primer miembro es ya cuadrado perfecto, podemos extraer la raíz cuadrada de ambos miembros, y obtendrémos

$$x+\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\,;$$

ecuacion de primer grado que nos da el valor de x, sin más que pasar $\frac{p}{2}$ al segundo miembro. Y tenemos

$$x = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

Lo que nos dice en lenguaje vulgar, que el valor de x en una ecuacion completa de segundo grado, llevada á la forma de $x^2+px=q$, se compone: *de la mitad del coeficiente del segundo término tomado con signo contrario, más ó ménos la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de dicha mitad y el tercer término con el signo que éste tuviere en el segundo miembro.*

156. *Discusion.* La ecuacion completa de segundo grado, puesta bajo la forma de $x^2 \pm px \pm q = 0$, tiene el carácter más general posible en cuanto á signos.

Descomponiendo el doble signo del tercer término, se derivan las dos siguientes : $x^2 \pm px + q = 0$ y $x^2 \pm px - q = 0$.

Y haciendo igual descomposicion del doble signo del segundo término en cada una de éstas, surgen $x^2 + px + q = 0$ y $x^2 - px + q = 0$ de la primera, y $x^2 + px - q = 0$ y $x^2 - px - q = 0$ de la segunda ; obteniéndose de la primera de estas cuatro los siguientes valores para x : $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ y $-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Pero creemos más conveniente á la enseñanza presentar en un cuadro estas ecuaciones y los respectivos valores de x, haciendo seguidamente la discusion. El lector juzgará.

$$x^2 \pm px \pm q = 0 \begin{cases} x^2 \pm px + q = 0 \begin{cases} x^2 + px + q = 0, & x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x^2 - px + q = 0, & x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 1.^{a}\ \frac{p^2}{4} > q \\ 2.^{a}\ \frac{p^2}{4} = q \\ 3.^{a}\ \frac{p^2}{4} < q \end{array} \right. \\ x^2 \pm px - q = 0 \begin{cases} x^2 + px - q = 0, & x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \\ x^2 - px - q = 0, & x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \end{cases} \end{cases}$$

En la interpretacion de los valores de x correspondientes á la primera de las cuatro ecuaciones en que vamos á ocuparnos, caben las tres hipótesis que más arriba están indicadas, segun que $\frac{p^2}{4}$ sea mayor, igual ó menor que q.

Pues bien, si $\frac{p^2}{4} > q$, los valores de x son *conmensurables ó inconmensurables, pero reales, de signos iguales entre sí, y contrarios al del segundo término.*

En efecto : si en la sustraccion indicada debajo del radical, el minuendo es mayor que el sustraendo, que esto significa $\frac{p^2}{4} > q$, el resultado de la sustraccion es positivo, la extraccion de su raíz cuadrada posible, exactamente ó por aproximacion, segun que la cantidad subradical sea ó no cuadrado perfecto ; pero basta que la extraccion de la raíz sea posible para que los valores sean reales. Y, por lo que á signos se refiere, considerando que $\sqrt{\frac{p^2}{4}}$ es numéricamente igual á $\frac{p}{2}$, y que por consiguiente la raíz cuadrada de $\frac{p^2}{4}$ disminuida en una cantidad q, por pequeña que sea, nos dará un resultado menor que $\frac{p}{2}$; como en la doble combinacion por sustraccion y por adicion que, segun está indicado, ha de verificarse entre lo que está fuera y lo que está dentro del radical, ha de prevalecer el signo de la cantidad mayor, y la cantidad mayor es la que está fuera del radical, segun acabamos de explicar, afectada de un signo único y contrario al del segundo término de la ecuacion, dicho se está que los dos valores de x tendrán tambien un signo único, esto es, tendrán en esta hipótesis signos iguales entre sí y contrarios al del segundo término.

Si $\frac{p^2}{4} = q$, el resultado de la sustraccion indicada debajo del radical será 0; desde el doble signo en adelante todo se reduce á 0, y no queda para x más valor que *la mitad del coeficiente del segundo término tomado con signo contrario.*

Si $\frac{p^2}{4} < q$, el resultado de la sustraccion indicada será negativo, la extraccion de su raíz cuadrada imposible, *y los valores de* x *imaginarios.*

Los valores de x correspondientes á la segunda ecuacion, tienen la misma interpretacion que hemos dado á los de la primera. Los alumnos deberán, no obstante, repetirla, por via de ejercicio.

Los valores de x correspondientes á la tercera ecuacion son *conmensurables ó inconmensurables, pero siempre reales y de signos contrarios entre sí.*

En efecto: la cantidad subradical es positiva; y es positiva, porque se compone de un cuadrado que, como todos los cuadrados, es cantidad esencialmente positiva, y de q que lo es por la hipótesis. Siendo positiva la cantidad subradical, la extraccion de su raíz cuadrada es posible, exactamente ó por aproximacion, pero siempre posible, y siempre reales por consiguiente los valores de x. Respecto de signos, considerando que $\sqrt{\frac{p^2}{4}}$ es numéricamente igual á $\frac{p}{2}$ y que por consiguiente la raíz cuadrada de $\frac{p^2}{4}$ aumentada en una cantidad q, por pequeña que sea, nos dará un resultado mayor que $\frac{p}{2}$; como en la doble combinacion por sustraccion y por adicion que, segun está indicado, ha de verificarse entre lo que está fuera y lo que está dentro del radical, ha de prevalecer el signo de la cantidad mayor, y la cantidad mayor es ahora la que está debajo del radical, segun acabamos de explicar, afectada del doble signo $\pm$, es evidente que los dos valores de x estarán afectados, uno del signo $+$ y otro del signo $-$, esto es, tienen signos contrarios entre sí.

Los valores de x correspondientes á la cuarta ecuacion tienen la misma interpretacion que hemos dado á los de la tercera. Los alumnos deberán, no obstante, repetirla por via de ejercicio.

Y en los exámenes ú otros actos de lucimiento no harán girar la discusion más que sobre las dos ecuaciones $x^2 \pm px + q = 0$ y $x^2 \pm px - q = 0$, siguiendo despues con los casos particulares que á continuacion se expresan:

157. 1.° Si haciéndonos nuevamente cargo de la ecuacion general $x^2 + px = q$, suponemos en ella $q = 0$, la ecuacion tomará la forma de $x^2 + px = 0$, ó bien $x(x + p) = 0$, que se verifica si $x = 0$, ó tambien si $x + p = 0$; resultando de esta última, $x = -p$.

De suerte que en la hipótesis de que q sea *cero*, se obtienen para x los dos valores siguientes: 0 y $-p$.

2.° Suponiendo $p = 0$, la ecuacion tomará la forma de $x^2 = q$, de donde $x = \pm\sqrt{q}$; es decir, que en este caso x tiene dos valores iguales y de signos contrarios; y reales ó imaginarios, segun que q sea positivo ó negativo (**152**).

3.° Suponiendo $p = 0$ y $q = 0$, la ecuacion tomará la forma de $x^2 = 0$, y los valores de x serán iguales á 0.

4.° Si volviendo sobre la ecuacion $ax^2 + bx = c$, hacemos $x = \frac{1}{y}$, resulta $\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} = c$, ó bien $cy^2 - by - a = 0$.

Suponiendo ahora $a = 0$, esta última ecuacion tomará la forma de $cy^2 - by = 0$, que da los dos valores siguientes: $y = 0$, $y = \frac{b}{c}$.

Y sustituyendo estos valores en la expresion $x = \frac{1}{y}$, resulta $x = \frac{1}{0}$, $x = \frac{c}{b}$.

Suponiendo $a = 0$ y $b = 0$ en la misma ecuacion $cy^2 - by - a = 0$, ésta tomará la forma de $cy^2 = 0$, que da valores iguales á *cero* para y, y valores *infinitos* por consiguiente para x, ó sean $x = \frac{1}{0}$, $x = \frac{1}{0}$.

Suponiendo, finalmente, $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$, la ecuacion $cy^2 - by - a = 0$ tomará la forma de $0 = 0$, lo mismo que la ecuacion primitiva $ax^2 + bx = c$, y admite *una infinidad* de valores para y, que dan *una infinidad* de valores para x.

158. Vamos á demostrar ahora algunas propiedades sobre la ecuacion general de segundo grado supuesta sin quebrados, con los dos miembros divididos por el coeficiente de x^2, y puestos todos sus términos en el primer miembro, bajo la forma de

$$x^2 + px - q = 0,$$

de donde $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ y $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

Si en estas dos expresiones pasamos al primer miembro los términos todos que hay en el segundo, tendrémos

$$x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = 0 \quad \text{y} \quad x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = 0.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, y considerando que el primer miembro de la primera es la diferencia de las cantidades $x + \frac{p}{2}$ y $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, y que el primero de la segunda igualdad es la suma de las mismas cantidades, tendrémos por producto (**14**, tercer ejemplo):

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} + q\right) = 0, \quad \text{ó bien} \quad x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} - q = 0,$$

$$\text{ó sea} \qquad x^2 + px - q = 0.$$

Lo que nos dice que: *el primer miembro de una ecuacion de segundo grado, puesta bajo la forma de* $x^2 + px - q = 0$, *es el producto de dos factores que tienen* x *por parte comun, y cada uno de los dos valores de* x *con signo contrario por parte no comun.*

Mr. Bourdon cree posible que por esta propiedad se haya dado el nombre de *raíces* á los valores de la incógnita; puesto que, conocidos estos valores, se puede construir la ecuacion.

159. *Otra demostracion.* Si dividimos el primer miembro de la ecuacion $x^2 + px - q = 0$ por $x - a$, tendrémos

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^2 + px - q & x - a \\
 & -x^2 + ax & x + (a + p) \\
\hline
\text{1.}^{\text{er}} \text{ resto.....} & (+a + p)x - q & \\
 & (-a - p)x + a^2 + ap & \\
\hline
\text{2.}^{\text{o}} \text{ resto......} & a^2 + pa - q &
\end{array}$$

Como este segundo resto, en que nos hemos detenido, es independiente de la letra x; si a es *raíz* de la ecuacion $x^2 + px - q = 0$, y por consecuencia $a^2 + pa - q = 0$, el resto independiente de x es nulo, y la division es exacta, y *el primer miembro de la ecuacion propuesta será divisible por* x — a.

Recíprocamente. Si la division de $x^2 + px - q$ por $x - a$ es exacta, es porque el resto $a^2 + pa - q$ independiente de x es igual á *cero; y a será raíz de la ecuacion.*

Corolario 1.° Como en el caso en que a es raíz de la ecuacion, $x - a$ divide exactamente á $x^2 + px - q$, y da por cociente $x + (a + p)$: recíprocamente, $x + (a + p)$ dividirá exactamente á $x^2 + px - q$, dando por cociente $x - a$: luego $-a - p$ es la otra raíz de la ecuacion propuesta; y la igualdad que existe entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente, confirma una vez más la propiedad precedente.

Corolario 2.° Sumando las dos raíces de la ecuacion, tenemos

$$a + (-a - p) = a - a - p = -p.$$

Y multiplicando las mismas raíces, nos dan

$$a \times (-a - p) = -a^2 - pa,$$

que es el valor de $-q$ en la ecuacion $a^2 + pa - q = 0$, despejando $-q$, en la cual se obtiene $-q = -a^2 - pa = + a \times (-a - p)$.

Lo que nos dice que: *en una ecuacion de segundo grado, puesta bajo la forma de* $x^2 + px - q = 0$, *el coeficiente* p *del segundo término, tomado con signo contrario, es igual á la suma algebráica de las raíces: y el último término* $-q$ *es igual al producto de estas mismas raíces.*

Y esto se confirma sumando y multiplicando los valores deducidos de la misma ecuacion para x.

Porque, siendo estos valores

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad \text{y} \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

sumándolos, tenemos por una parte

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -\frac{2p}{2} = -p;$$

y multiplicándolos, tenemos por otra

$$\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right) \times \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right) =$$

$$\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} + q\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} - q = -q.$$

160. *Aplicaciones de la discusion á algunos ejemplos.* La ecuacion $3x^2 - 6x + 2 = 0$ tiene las raíces reales, inconmensurables, y ambas positivas; por estar comprendida en la hipótesis 1.ª relativa á la primera ecuacion discutida en el *número* **156**.

La ecuacion $2x^2 - 12x + 18 = 0$ está comprendida en la segunda hipótesis de la misma discusion.

La ecuacion $3x^2 + 6x + 20 = 0$ tiene sus raíces imaginarias.

La ecuacion $2x^2 - 3x - 54 = 0$ tiene sus raíces reales, conmensurables y de signos contrarios.

161. Hay casos en que *una ecuacion que tiene la incógnita debajo de un radical*, se resuelve transformándola en otra equivalente de segundo grado, cuyas raíces verifican la ecuacion propuesta.

Sirva de ejemplo la ecuacion $\sqrt{5x-1} = 1 + x$.

Elevando sus dos miembros al cuadrado, tendrémos

$$5x - 1 = 1 + 2x + x^2,$$

ó bien
$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

de donde
$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$$

ó sea
$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2, \quad \text{y} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1;$$

satisfaciendo ambos valores, 2 y 1, la ecuacion propuesta, como puede verse.

Hay otros casos en que la ecuacion propuesta sólo queda satisfecha por uno de los dos valores de x, deducidos de la segunda ecuacion.

Y otros, por fin, en que la ecuacion propuesta no es satisfecha por ninguna de las dos raíces de la ecuacion transformada.

162. *Problema de las luces*, tomado del *Algebra* de Mr. Bourdon.

C‴ A C″ C B C′

Sabiendo por la Física que *las intensidades de una misma luz, á distancias desiguales, están en razon inversa de los cuadrados de estas distancias; hallar en la línea recta que une dos luces* A *y* B *de intensidades desiguales, el punto igualmente iluminado por las dos.*

Solucion. Representemos por d la distancia AB, por a la intensidad de la luz A, por b la intensidad de B (ambas á la misma unidad de distancia). Sea C el punto pedido, llamemos x á la distancia AC, la distancia BC será $d - x$, y tendrémos $\frac{a}{x^2}$ por expresion de la intensidad de A á la distancia x, y $\frac{b}{(d-x)^2}$ por expresion de la de B á la distancia $d - x$, é igualando estas dos expresiones quedará planteado el problema de este modo

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}.$$

Y apartándonos del método ordinario, á fin de que los valores de x aparezcan bajo una forma más sencilla, tendrémos

$$\frac{(d-x)^2}{x^2}=\frac{b}{a},$$

ó sea
$$\frac{d-x}{x}=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

ó bien
$$d\sqrt{a}-x\sqrt{a}=\pm x\sqrt{b}$$

de donde
$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}.$$

Y descomponiendo estos dos valores, resulta

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\\ x&=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\end{aligned}\right\}\text{de donde....}\left\{\begin{aligned} d-x&=\frac{d\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\\ d-x&=\frac{-d\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.\end{aligned}\right.$$

163. *Discusion*. Cinco hipótesis pueden ocurrir en la discusion de este problema.

1.ª $a>b$. El primer valor de x es positivo: y como además es un quebrado propio, será menor que d; es decir, este valor da como punto igualmente iluminado un punto C situado entre A y B. Y puesto que $a>b$, el numerador del primer valor de x será mayor que la mitad del denominador, y el quebrado $>\frac{c}{2}$, y $x>\frac{d}{2}$ esto es, el punto C está más cerca de B que de A; y así debe suceder, suponiendo que la intensidad de A es mayor que la de B. El valor de $d-x$ correspondiente al primer valor de x es positivo, y $<\frac{d}{2}$ como puede verse.

El segundo valor de x es tambien positivo; pero mayor que d, por ser un quebrado impropio mayor que la unidad. Este valor nos da un segundo punto C′ á la derecha de B. Esto se concibe; puesto que las luces se esparcen ó derraman en todos sentidos, puede haber otro punto igualmente iluminado en la direccion AB prolongada, y más próximo de B, cuya intensidad es menor.

Estos valores de x están ligados por la misma ecuacion; porque, si representamos por x la distancia AC′, BC′ será $x-d$, y la ecuacion será $\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(x-d)^2}$, ecuacion igual á la anterior por ser iguales los cuadrados de $x-d$ y de $d-x$. El segundo valor de $d-x$ es negativo, y así debe ser.

Luego en esta hipótesis las luces brillan con igual intensidad en los puntos C y C′, ambos más cerca de B que de A; aunque el primer valor de x es el que responde directamente al enunciado del problema.

2.ª $a < b$. El primer valor de x es siempre positivo, y, como se ve, $< \frac{d}{2}$. El correspondiente valor de $d - x$ es tambien positivo, pero $> \frac{d}{2}$. Así, pues, el primer punto igualmente iluminado C″ estará más cerca de A que de B.

El segundo valor de x es esencialmente negativo. Para interpretarle se pone $-x$ en vez de x en la ecuacion, y la expresion $d + x$ indica que el punto está á la izquierda de A, en C‴, por ejemplo. Y asi debe ser, puesto que siendo en esta hipótesis la intensidad de B mayor que la de A, el segundo punto igualmente iluminado estará más cerca de A que de B. El correspondiente valor de $d - x$ es positivo; y esto consiste en que, siendo x negativo, la *sustraccion algebráica* $d - x$ se convierte en una *adicion aritmética*.

Luego en esta hipótesis las luces brillan con igual intensidad en los puntos C″ y C‴, ámbos más cerca de A que de B; por más que ahora, como ántes, el primer valor de x es el que responde directamente al enunciado.

3.ª $a = b$. Los primeros valores de x y de $d - x$ se reducen ambos á $\frac{d}{2}$. Lo que nos dice que el punto medio de AB es el primer punto igualmente iluminado; de conformidad con el enunciado, con la hipótesis y con el sentido comun.

Los segundos valores se reducen á $\frac{d\sqrt{a}}{0}$ que es la forma del *infinito*. Es decir que el segundo punto igualmente iluminado está á igual distancia de A y de B, pero á una distancia inmensamente grande de ellos, ó como si dijéramos, el segundo punto se pierde en la inmensidad del espacio, ó en el *infinito*, como cada cual quiera decirlo.

4.ª $a = b$ y $d = 0$. El primer sistema de valores de x y de $d - x$ se reduce á 0; y el segundo sistema á $\frac{0}{0}$. Este último es aquí el conocido símbolo de *indeterminacion;* porque si nos trasladamos á la ecuacion del problema, verémos que dentro de esta hipótesis puede ser satisfecha por un número cualquiera sustituido por x. Y en efecto: si las dos luces tienen la misma intensidad y están colocadas en un mismo punto, *deberán iluminar igualmente cualquier punto de la línea* AB.

Y la solucion 0 que da el primer sistema es una de tantas, de las que, *en número indeterminado*, da el segundo sistema.

5.ª $d = 0$ y $a > 6 < b$. Los valores de cada uno de los dos sistemas se reducen á 0. Lo que prueba que no hay más que un punto, que es *aquel en el cual se colocan las luces*. Y no habiendo otro punto con el cual se compare aquél, respecto á estar igualmente iluminados, no hay solucion; el problema es imposible.

Y puesto el problema en ecuacion con arreglo á esta hipótesis, se deduce $x = 0$ y $x = 0$.

CONCLUSION.

164. *Desigualdades. Inecuaciones.* Aunque en el curso de esta obra hemos tenido que hacernos cargo varias veces de las *desigualdades*, nunca nos hemos detenido á estudiarlas como hacemos ahora, siquiera sea ligeramente.

Se llama *desigualdad* la relacion que existe entre dos expresiones de cantidades desiguales como

$$7 > 3 + 2, \quad (a + b)^3 < (a + b)^4.$$

Y la *desigualdad* toma el nombre de INECUACION cuando contiene una ó más *incógnitas*.

Resolver una inecuacion es hallar los límites de los valores de sus incógnitas.

165. *Transformaciones que pueden sufrir las desigualdades.*

1.ª Se puede *añadir ó quitar una misma cantidad á los dos miembros de una desigualdad*, y ésta subsistirá en el mismo sentido.

Fundados en esto, se pueden pasar los términos de un miembro á otro con signo contrario.

2.ª Se puede *sumar miembro á miembro dos ó más desigualdades establecidas en el mismo sentido*, y la resultante subsistirá en el mismo sentido que las componentes.

Pero no sucede siempre lo mismo, *si se trata de restar miembro á miembro dos desigualdades, aunque estén en el mismo sentido.*

Pues si bien de $4 < 8$ y $2 < 3$, se deduce $4 - 2 < 8 - 3$, ó bien $2 < 5$; de $10 < 12$ y $4 < 9$, por ejemplo, se deduce $10 - 4 > 12 - 9$, ó sea $6 > 3$, en sentido contrario al que tienen las dos desigualdades propuestas.

Por eso, ántes de restar dos desigualdades ordenadamente, hay que examinar si el resultado queda ó nó en el mismo sentido que las propuestas.

3.ª Se puede *multiplicar los dos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo*, y la desigualdad subsistirá en el mismo sentido.

Carlo Botella

Fundados en esto, se puede quitar quebrados en una desigualdad. Y se puede pasar un factor positivo de un miembro á divisor del otro miembro.

Tambien *pueden dividirse los dos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo*, quedando la desigualdad en el mismo sentido.

Pero, *si se multiplican ó dividen los dos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo*, la desigualdad resultará en sentido contrario.

Así, al mudar los signos á todos los términos de una desigualdad, ésta resulta en sentido contrario; porque esta transformacion equivale á *multiplicar los dos miembros por* -1.

4.ª Se pueden *elevar al cuadrado los dos miembros de una desigualdad entre números positivos*, y ésta subsiste en el mismo sentido.

Pero si la desigualdad existe entre números de signos cualesquiera, debe examinarse el resultado ántes de hacer la transformacion.

Pues si bien de $-2 < 5$ se deduce $(-2)^2 < 5^2$, ó bien $4 < 25$; de $-2 < -1$, por ejemplo, se deduce $(-2)^2 > (-1)^2$, ó bien $4 > 1$, en sentido contrario al que tiene la desigualdad propuesta.

5.ª Se puede *extraer la raiz cuadrada de los dos miembros de una desigualdad entre números positivos*, y ésta subsiste en el mismo sentido.

166. *Inecuaciones y problemas de primer grado con una incógnita.* Toda inecuacion de primer grado con una incógnita, prévias las transformaciones explicadas (**136**) para las ecuaciones, puede llevarse á la forma $ax \pm b > 0$ ó $ax \pm b < 0$,

ó bien $ax > \mp b$ ó $ax < \mp b$,

de donde $x > \frac{\mp b}{a}$ ó $x < \frac{\mp b}{a}$.

Luego, todo valor de la incógnita, mayor ó menor que *cierto límite*, verificará respectivamente las inecuaciones propuestas. Y ese *límite* es cabalmente el valor de x, que transforma la inecuacion en igualdad é identidad.

Sea la inecuacion $3x - \frac{x}{2} > 45 - 2x$.

Quitando quebrados, tendrémos $6x - x > 90 - 4x$,

haciendo la transposicion $6x - x + 4x > 90$,

y reduciendo $9x > 90$;

de donde $x > \frac{90}{9} = 10$.

Lo que nos dice que cualquier número mayor que 10 verifica la inecuacion propuesta : el límite superior queda indeterminado.

La sustitucion del límite inferior 10 en la inecuacion nos da la igualdad $30 - 5 = 45 - 20$, ó bien la *identidad* $25 = 25$.

Problema. *Descomponer el número 30 en otros dos enteros que se diferencien en más de 4 unidades y en ménos de 10.*

Si representamos el número mayor por x, el otro será $30 - x$; y tendrémos las dos inecuaciones

$$x - (30 - x) > 4 \quad \text{y} \quad x - (30 - x) < 10,$$

que nos dan $x - 30 + x > 4$ y $x - 30 + x < 10$,

ó bien $2x > 34$ y $2x < 40$;

de donde $x > \dfrac{34}{2} = 17$ y $x < \dfrac{40}{2} = 20.$

Pero no hay más números enteros que 18 y 19, mayores que 17 y menores que 20 : luego no hay más que dos soluciones, una 18 y 12, y otra 19 y 11.

167. *Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.* Toda inecuacion de segundo grado con una incógnita puede llevarse á la forma $ax^2 + bx + c > 0$ ó $ax^2 + bx + c < 0$.

Dividiendo ambos miembros por a, coeficiente de x^2, y llamando p y q los cocientes respectivos de b y de c por a, tendrémos

$$x^2 + px + q > 0 \quad \text{ó} \quad x^2 + px + q < 0;$$

siendo el trinomio $x^2 + px + q$ positivo en el primer caso, y negativo en el segundo.

Si representamos por x' y x'' las raíces de la ecuacion

$$x^2 + px + q = 0,$$

en la cual es primer miembro el trinomio precedente, tendrémos (**158**)

$$x^2 + px + q = (x - x')(x - x'').$$

Segun esto, el trinomio $x^2 + px + q$ será positivo si los factores $x - x'$ y $x - x''$ tienen signos iguales ; para lo cual basta que x sea más grande que la mayor de las dos raíces ó menor que la más pequeña.

Si las raíces de la ecuacion $x^2 + px + q = 0$ son iguales á x', tendrémos $x^2 + px + q = (x - x')^2$.

Pero el segundo miembro es un cuadrado, y no puede ser negativo ; luego la desigualdad $x^2 + px + q < 0$ es imposible, y por lo mismo la $x^2 + px + q > 0$ será satisfecha por cuantos valores diferentes de x' se quiera.

Si, por último, la ecuacion

$$x^2 + px + q = 0$$

tiene sus raíces imaginarias, tendrémos

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \text{ó sea} \quad p^2 - 4q < 0, \quad \text{ó bien} \quad q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Pero $x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$,
y estos dos últimos sumandos son positivos: luego

$$x^2+px+q>0$$

es satisfecha por cualquier valor de la incógnita, y

$$x^2+px+q<0 \text{ es imposible.}$$

168. *Nociones acerca de los máximos y mínimos.* Hay problemas en los cuales se desea determinar el *mayor* ó *menor* valor que pueda recibir la incógnita.

Por ejemplo: *Dividir el número* 2a *en dos partes tales que su producto sea el mayor posible, esto es, el* MÁXIMO.

Si representamos por x una de estas partes, la otra será $2a-x$, y la ecuacion tendrá la forma de $x(2a-x)=y$, ó bien $2ax-x^2=y$; representando por y el mayor producto pedido.

De donde $$x=a\pm\sqrt{a^2-y}.$$

Pero estos valores de x no pueden ser *reales*, sino en tanto que y, esto es, en tanto que el producto pedido sea menor ó igual á a^2. Luego el MÁXIMO que puede obtenerse es el *cuadrado de la mitad del número dado.*

ESCOLIO. En la ecuacion establecida se llama á x una *variable*, y á la expresion $x(2a-x)$ se la llama FUNCION de la variable. Esta *funcion*, representada por y, es á su vez otra *variable*; porque su valor depende del que se dé á la primera.

Hé ahí la razon de llamar los algebristas *variable independiente* á la primera.

Sea por segundo ejemplo: *Dividir el número* 2a *en dos partes tales que la suma de las raíces cuadradas de estas dos partes sea el* MÁXIMO.

Si representamos por x^2 una de estas partes, la otra será $2a-x^2$, y la expresion de la suma de sus raíces cuadradas nos dará la ecuacion $$x+\sqrt{2a-x^2}=y\,;$$
representando por y la mayor suma pedida.

Pasando x al segundo miembro, la ecuacion será

$$\sqrt{2a-x^2}=y-x,$$

y elevando ambos miembros al cuadrado

$$2a-x^2=y^2-2yx+x^2,$$

ó bien $$2x^2-2yx=2a-y^2$$

ó sea $$x^2-yx=a-\frac{y^2}{2}\,;$$

de donde $$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}+\frac{2a-y^2}{2}},$$

ó lo que es lo mismo $x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{4a-y^2}{4}}$,

que tambien puede ponerse bajo la forma de

$$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\times(4a-y^2)},$$

que da finalmente $x=\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\times\sqrt{4a-y^2}.$

Pero estos valores de x no pueden ser reales sino en tanto que y^2 sea menor ó igual á $4a$.

Luego si suponemos $y^2=4a$, de donde $y=2\sqrt{a}$; x será igual á $\sqrt{a}$, $x^2=a$, $2a-x^2=a$. Es decir, *el número debe ser dividido en dos partes iguales* ; y el MÁXIMO de la suma de las raices cuadradas de estas dos partes es igual á $2\sqrt{a}$.

De aquí deducimos la regla siguiente : *Para hallar un* MÁXIMO *ó un* MÍNIMO *se formula la expresion algebráica que representa el* MÁXIMO *ó* MÍNIMO *y se le iguala con una letra cualquiera* y. *Suponiendo que la ecuacion obtenida es de segundo grado, y que ha sido resuelta; se iguala á* 0 *la cantidad subradical, deduciendo de esta última ecuacion el valor de* y, *que será el* MÁXIMO *ó* MÍNIMO *pedido. Y sustituyendo el valor de* y *en la expresion primera, se obtendrá el valor que responda al enunciado.*

Los que quieran más conocimientos en esta materia, pueden ver la obra lata de M. Lacroix y la *Geometría* de Simpson.

169. *Nociones acerca de las probabilidades.* Se llama PROBABILIDAD de un hecho la razon que existe entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siendo unos y otros igualmente posibles.

Si se tratase de expresar, por ejemplo, la *probabilidad* de sacar una bola blanca de una urna que contiene ocho bolas, de las cuales seis son blancas y dos negras ; como de ocho hechos igualmente posibles, hay seis favorables, la *razon* $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ expresa la probabilidad de sacar una bola blanca ; siendo $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ la de sacar una negra. Y como el quebrado $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{1}{2}$, por eso hay más motivo para creer que salga bola blanca, que para *dudarlo.*

Las probabilidades precedentes en las cuales se suponen igualmente posibles, tanto los casos favorables como los contrarios, se llaman *simples*. A diferencia de aquéllas que dependen del concurso de varios hechos, y se llaman *compuestas;* correspondiendo á cada uno de estos hechos una probabilidad *simple.*

El cálculo de las probabilidades descansa sobre las tres proposiciones siguientes:

1.ª *La probabilidad simple de un hecho se expresa por un quebrado cuyo numerador es el número de casos favorables á la produccion del hecho, y el denominador es el número de todos los casos, tanto favorables como contrarios.*

2.ª *La probabilidad compuesta del concurso de muchos hechos es igual al producto de las probabilidades simples correspondientes á estos hechos.*

3.ª *La suma de la probabilidad favorable y de la contraria de un mismo hecho, es siempre igual á la unidad.*

Así, en el ejemplo anterior $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Esta unidad representa la *certeza;* así como la *fraccion* propiamente dicha representa la *probabilidad.*

Problema. Jugando al tresillo *¿qué probabilidad se tiene de recibir en una mano espada y basto?*

La probabilidad *simple* de recibir la *espada* de las 40 cartas de la baraja, entre las 9 que se reciben cada mano, es $\frac{9}{40}$: la de recibir despues el *basto* de las 39 cartas restantes, entre las 8 que faltan, es $\frac{8}{39}$; luego la probabilidad compuesta será

$$\frac{9}{40} \times \frac{8}{39} = \frac{72}{1560} = \frac{3}{65}.$$

El cálculo de las probabilidades nació, por decirlo así, entre las manos de Pascal y de Fermat, con ocasion de algunas cuestiones sobre juegos de azar. Desarrollado despues por Santiago y Daniel Bernouilli, por Montmort, Moivre, Condorcet, d'Alembert, Lagrange, Lacroix, Laplace, Poisson y otros, ha llegado á ser un instrumento de civilizacion, por su aplicacion á las cuestiones morales, políticas y comerciales.

Recomendamos su estudio en las obras de los sabios citados.

170. *Otra manera de estudiar los logaritmos.* Considerando que las potencias con exponentes enteros, positivos ó negativos, de la unidad, son la misma unidad;

Que las potencias de un número mayor que la unidad son mayores ó menores que la unidad, segun que los exponentes de las potencias sean positivos ó negativos;

Que la expresion b^x, suponiendo $b > 1$, aumentará desde 1 á ∞, si x aumenta desde 0 al ∞ ; y disminuirá desde 1 á 0, si x disminuye desde 0 á $-\infty$; y si b es positiva, pero < 1, sucede lo contrario;

Que la raíz cuadrada, cúbica, y en general de cualquier grado real y positivo, de una cantidad mayor que 1, es mayor que 1; menor que la cantidad; y disminuye si crece el índice, teniendo 1 por límite;

Que si en la ecuacion $b^x = y$, b conserva siempre un mismo valor positivo, mayor ó menor que 1, es evidente que á cada valor positivo ó negativo de x corresponde otro positivo para y, y *vice versa*:

Se llama *logaritmo* de un número á el exponente de la potencia á que se eleva otro número positivo, y diferente de la unidad, llamado *base*, para que la potencia sea igual al número dado.

Los logaritmos de todos los números y que se refieren á una misma base, constituyen un *sistema de logaritmos*.

Para formar una tabla de logaritmos, se resuelve la ecuacion $b^x = y$ para todos los valores enteros de y, desde 1 hasta el número que se quiera.

No teniendo la *base* más limitacion que la de ser positiva y diferente de la unidad, puede haber infinitos sistemas de logaritmos, y un mismo número puede tener muchos logaritmos. Y siempre se verifica que el logaritmo de la unidad es 0, y el de la base es 1, porque

si $b > 1$	si $b < 1$
$b^0 = 1$, luego log. $1 = 0$	$\left(\frac{1}{b}\right)^0 = 1$, luego log. $1 = 0$
$b^1 = b$, luego log. $b = 1$	$\left(\frac{1}{b}\right)^1 = \frac{1}{b}$, luego log. $\frac{1}{b} = 1$.

Siendo x positiva ó negativa y $b >$ ó < 1, la ecuacion $b^x = -y$ es imposible: luego los números negativos no tienen logaritmos.

La base ha de ser diferente de la unidad; porque de suponer $b=1$, b^x sería siempre igual á 1, cualquiera que fuese el valor de x.

Si la base es mayor que la unidad, sucede

1.° Los logaritmos de los números mayores que 1 son positivos; á mayor número mayor logaritmo; y el logaritmo del ∞ es el ∞.

En efecto: de $b^m = A$, se deduce log. $A = m$; de $b^{m+n} = A+a$, se deduce log. $(A + a) = m + n$; y por último, de $b^{\infty} = \infty$, se obtiene logaritmo $\infty = \infty$.

2.° Los logaritmos de los números menores que 1 son negativos; cuanto menor es el número, tanto mayor es el valor absoluto del logaritmo; el logaritmo de cero es $-\infty$.

En efecto: de $b^{-m} = \frac{1}{A}$, se deduce log. $\frac{1}{A} = -m$; de

$b^{-m-n} = \frac{1}{A+a}$, se deduce log. $\frac{1}{A+a} = -m-n$; y de $b^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$, se deduce log. $0 = -\infty$.

371. *Propiedades generales de los logaritmos.* Si representamos por b la base de un sistema cualquiera de logaritmos; por y, y', y'', varios números enteros, fraccionarios, ó inconmensurables; y por x, x', x'', sus correspondientes logaritmos en el mismo sistema, tendrémos $\quad b^x = y, \quad b^{x'} = y', \quad b^{x''} = y''$

de donde multiplicando ordenadamente, resulta

$$b^x \times b^{x'} \times b^{x''} = yy'y'', \quad \text{ó bien} \quad b^{x+x'+x''} = yy'y''$$

y por consiguiente $\quad$ log. $yy'y'' = x + x' + x''$

ó sea $\quad$ log. $yy'y'' =$ log. $y +$ log. $y' +$ log. y''. Luego:

1.ª *propiedad.* El *logaritmo de un producto* es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.

Si dividimos ordenadamente las dos primeras ecuaciones anteriores, la primera por la segunda, tendrémos

$$\frac{b^x}{b^{x'}} = \frac{y}{y'}, \quad \text{ó bien} \quad b^{x-x'} = \frac{y}{y'}, \quad \text{de donde} \quad \text{log. } \frac{y}{y'} = x - x',$$

$$\text{ó sea} \quad \text{log. } \frac{y}{y'} = \text{log. } y - \text{log. } y'. \quad \text{Luego:}$$

2.ª El *logaritmo de un cociente* es igual al logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor.

Si elevamos á la potencia del grado n ambos miembros de la primera ecuacion ántes dicha, tendrémos $b^{nx} = y_n$, de donde logaritmo $y^n = nx$, ó bien log. $y^n = n$log. y. Luego:

3.ª El *logaritmo de una potencia* de un número es igual al logaritmo de este número multiplicado por el exponente de la potencia.

Si extraemos de los dos miembros de la misma ecuacion la raíz del grado n, tendremos

$$b^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{y}, \quad \text{de donde} \quad \text{log. } \sqrt[n]{y} = \frac{x}{n}, \quad \text{ó bien} \quad \text{log. } \sqrt[n]{y} = \frac{\text{log. } y}{n}.$$

Luego:

4.ª El *logaritmo de la raíz* de un número es igual al logaritmo de este número dividido por el índice de la raíz.

5.ª *La razon de los logaritmos de dos números* es la misma en todos los sistemas.

6.ª *Dado un sistema de logaritmos* de la base b, puede calcularse otro cuya base sea b', multiplicando los logaritmos del primero por el número constante $\frac{1}{\text{log. } b'}$, llamado *módulo*.

7.ª La diferencia de los logaritmos de dos números consecutivos es tanto menor cuanto mayores sean dichos números.

8.ª Los logaritmos que hemos dado á conocer anteriormente (**126**) son los mismos que acabamos de definir, como exponentes de un número constante, positivo y diferente de la unidad.

Basta, para comprenderlo, considerar dos progresiones que constituyan un sistema de logaritmos, y transformar la progresion por cociente en otra cuya *base* sea igual á la raíz del grado que indique la *diferencia* de la progresion por diferencia, de la *razon* de la primera progresion por cociente.

172. *Ecuacion exponencial. Si dados dos de tres números* a, b, c, *cualesquiera, nos proponemos determinar el tercero por medio de una de las seis operaciones fundamentales conocidas*, la operacion más sencilla y la primera que se nos ocurre es la *adicion*.

Si nos proponemos, por ejemplo, hallar c por la adicion de los números a y b, esta relacion se expresará por la igualdad

$$a + b = c,$$

que nos da al mismo tiempo

$$a = c - b, \quad \text{y} \quad b = c - a.$$

Donde vemos que si en vez de buscar c, se hubiese buscado el valor de a ó de b, la misma igualdad nos habria dado la cantidad desconocida por medio de una *sustraccion*.

Así, pues, la *adicion* y la *sustraccion* están ligadas por la misma igualdad $a + b = c$.

Conviene advertir que si en la igualdad $a = c - b$, se supone $c < b$, el valor de a pasa á ser un *número negativo*: números que, como ya sabemos, deben su orígen á los casos en que se resta un número mayor de otro menor.

Es claro que la adicion de muchos números iguales conduce á la *multiplicacion*.

Si ahora nos proponemos, por ejemplo, hallar c por la multiplicacion de los números a por b, esta relacion se expresará por la igualdad $a \times b = c$,

que nos da al mismo tiempo $a = \frac{c}{b}$ y $b = \frac{c}{a}$.

Donde vemos que si en vez de buscar c en la igualdad anterior, se hubiese buscado el valor de a ó de b, la division de c por b, ó de c por a, nos habria dado el valor del número desconocido.

Así, pues, la *multiplicacion* y la *division* están ligadas por la misma igualdad $a \times b = c$.

Conviene advertir que si $c < b$, ó si c no es exactamente divisible por b, la expresion $\frac{c}{b}$ es una *fraccion* ó un *número fraccionario*: números que, como ya sabemos, tienen su orígen en las divisiones inexactas.

Es claro que la multiplicacion de muchos números iguales conduce á la *formacion de potencias*.

Si, últimamente, nos proponemos, por ejemplo, hallar c *formando el producto de* b *números iguales á* a, esta relacion se expresará por la igualdad $a^b = c$,

que nos da al mismo tiempo $a = \sqrt[b]{c}$.

Lo que nos dice que, dados a y b, se obtiene c por medio de la *formacion de una potencia*; y que, dados b y c, se obtiene a por medio de la *extraccion de una raiz*.

Pero si se conociesen a y c ¿*cómo hallaríamos* b?

Antes de contestar á esta pregunta, resumamos lo dicho.

La igualdad $a + b = c$ reune las dos operaciones conocidas con los nombres de *adicion* y *sustraccion*: la segunda de las cuales puede dar lugar á los números llamados *negativos*.

La igualdad $a \times b = c$ reune la *multiplicacion* y la *division*: naciendo de esta última la *fraccion* y el *número fraccionario*.

Observemos, además, que en cada una de estas dos igualdades

$$a + b = c \quad \text{y} \quad a \times b = c,$$

el número a y el número b se obtienen por medio de la misma operacion, efectuada en una ó en otra igualdad sobre las dos cantidades conocidas: lo cual se expresa diciendo que a y b entran de una manera semejante ó simétrica en estas igualdades.

Así tambien, la igualdad $a^b = c$ reune la *formacion de potencias* y la *extraccion de raices*: teniendo de ésta orígen los *números inconmensurables*. Pero hay entre esta igualdad y las dos anteriores una diferencia que debemos señalar, y consiste en que basta la extraccion de una raiz para obtener a; miéntras que para hallar b se necesita una operacion particular y nueva que será, en cierto modo, segun Euler, una *séptima* operacion.

173. Pues bien, las ecuaciones que tienen la incógnita por exponente son llamadas *ecuaciones exponenciales*, y muchas de ellas se resuelven por medio de los logaritmos.

EJEMPLO: $a^x = b$.

Tomando los logaritmos de ambos miembros, tendrémos

$$\log.\ a^x = \log.\ b,$$

ó bien

$$x \log.\ a = \log.\ b;$$

de donde

$$x = \frac{\log.\ b}{\log.\ a}.$$

174. Los alumnos que deseen conocer con más extension alguna materia tratada ligeramente, ó quieran estudiar alguna otra de que no nos hayamos ocupado, pueden conseguir su objeto en la excelente obra del SR. VALLIN Y BUSTILLO, de quien nos declaramos deudores de muchos conceptos escritos en este libro; como son los relativos á la extraccion de raíces de los quebrados, casi todo el *capítulo II* del ÁLGEBRA, las pilas de balas y otros.

¡Coincidencia singular! ¡Que las últimas líneas de este modesto trabajo sirvan como de accion de gracias al amigo querido á quien saludamos, más bien que como á compañero, como á maestro insigne!

FIN DEL ÁLGEBRA.

Badajoz 30 de Junio de 1878.

INDICE.

ARITMÉTICA.

INTRODUCCION.

CAPÍTULO PRIMERO.

CAPÍTULO II.

CAPÍTULO III.

CAPÍTULO IV.

CAPÍTULO IV.

CAPÍTULO V.

CONCLUSION.

ERRATAS.

PAG.	LÍNEA.	DICE.	LÉASE.
11	12	la cual	lo cual.
13	15	NUMERACION HABLADA.	**10**. NUMERACION HABLADA.
15	30	llamada	llamándole
57	6	$\underline{\vert\, 5075}$	$\underline{\vert\, 6075}$
106	1.ª por abajo	$\frac{5}{7} : \frac{4}{7} : \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{7} : \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{5}{4}.$
107	3	$\frac{7}{9} : \frac{7}{8} : \frac{7 \cdot 8}{7 \cdot 9} = \frac{8}{9}$	$\frac{7}{9} : \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 8}{7 \cdot 9} = \frac{8}{9}.$
147	7	Cántaras. Cuartillos.	Cuartillos. Cántaras.
147	14	0,6348	0,0348.
148	1.ª col. 14	0,156	1,156
148	2.ª col. 15	Areas cuadradas.	Areas.
161	2	han	ha
213	4	$\pm 3ab^2$	$\pm 3a^2b$
226	7 por abajo.	$-1 \times -\sqrt{-1}$	$-1 \times \sqrt{-1}$
262	8	$(c + cr)^3 (1 + r)^3$	$(c + cr)\ (1 + r)^3$
335	14	$\frac{c}{2}$	$\frac{1}{2}$

Esta obra se vende á SIETE PESETAS en casa del autor, Badajoz, calle de la Soledad, núm. 11; y en Madrid, en la imprenta de D. Alejandro Gomez Fuentenebro, Bordadores, 10. Se remite por el mismo precio á los demas puntos de España.