LECCIONES

DE

ÁLGEBRA

POR

BERNARDINO SANCHEZ VIDAL

CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS EN EL INSTITUTO DE MÚRCIA

TOMO II

SEGUNDA EDICION

MADRID:—1878
IMPRENTA DE JOSÉ CRUZADO
Peñon, 7

LECCIONES

DE

ÁLGEBRA

Bernardino Sanchez

LECCIONES

DE

ÁLGEBRA

POR

BERNARDINO SANCHEZ VIDAL

CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS EN EL INSTITUTO DE MÚRCIA

TOMO II

SEGUNDA EDICION

MADRID:—1878
IMPRENTA DE JOSÉ CRUZADO
Peñon, 7

Ref.º P.º 371. lib. 30-

391

Bernar.no Sanchez

LECCIONES DE ALGEBRA

PRIMERA PARTE.

Séries y derivadas.

4H02

LECCION PRIMERA.

De las séries en general.—Teoremas relativos á la convergencia y divergencia de las séries.

De las séries en general.

1. Se llama SÉRIE en matemáticas, *la suma algebráica de un número infinito de cantidades que se deducen las unas de las otras segun una ley constante y determinada.* Estas cantidades se llaman *términos* de la série, y se representan por u_1, u_2, u_3... u_n ... La suma de los n primeros términos de una série, se suele representar por S_n. Tanto la suma S_n como el término general u_n dependen del valor del número n, por lo que se dice que son funciones de este número.

2. Las séries pueden ser *convergentes*, *divergentes* é *indeterminadas*.

SÉRIE CONVERGENTE *es aquella en la cual la suma* S_n *de los* n *primeros términos tienden hácia un cierto límite determinado y finito, á medida que* n *aumenta indefinidamente.*

SÉRIE DIVERGENTE *es aquella en la cual la suma* S_n *de los* n *primeros términos crece indefinidamente, pudiendo ser mayor en va-*

lor numérico que cualquier cantidad dada, á medida que n *crece tambien del mismo modo.*

SÉRIE INDEFINIDA *es aquella que ni es convergente ni divergente;* es decir, que creciendo n indefinidamente, la suma S_n ni crece indefinidamente como en las séries divergentes, ni tiende hácia un límite determinado y finito como en las convergentes.

3. Segun la definicion de cada una de estas séries, se tendrá que la suma de los términos de una progresion geométrica prolongada indefinidamente, será una série; puesto que cada término se forma, segun una misma ley, multiplicando el anterior por la razon; además, esta série será *convergente* ó *divergente*, segun que la progresion sea decreciente ó creciente; ó lo que es lo mismo, segun que la razon sea menor ó mayor que la unidad.

En efecto, en el primer caso la suma de los n primeros términos de la progresion, cuyo primer término es a y la razon q menor que la unidad, es

$$S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} q^n;$$

cuya suma, como hemos visto en la Aritmética, número 422, tiene por límite, cuando n crece indefinidamente, la cantidad finita $\frac{a}{1-q}$; luego la série es convergente.

Si q fuese mayor que la unidad, ó la progresion fuera creciente, la suma de los n primeros términos creceria indefinidamente á medida que n creciese del mismo modo; luego la série seria divergente.

Por último, si consideramos la série á que dá orígen la division de 1 por $1+x$, que es

$$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots$$

y hacemos en ella $x=1$, hallaremos la série cuyo término general es $(-1)^{n-1}$,

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

la cual es indeterminada, porque la suma de los n primeros términos S_n es 0 ó $+1$, segun que n sea par ó impar. Por tanto, cualquiera que sea el valor numérico de n, la suma S_n ni crece indefinidamente, ni tiene por límite una cantidad finita y determinada.

4. La teoría de las séries es una de las más importantes y útiles del Análisis; su principal objeto es obtener de una manera rápida y sencilla valores numéricos aproximados de expresiones algebráicas y

trascendentes, por cuyo medio puedan someterse unas y otras al cálculo aritmético. Por esta razon, como las séries convergentes son las que tienen la propiedad de que la suma S_n de los n primeros términos pueda aproximarse cuanto se quiera á un cierto límite finito y determinado, que se llama *valor de la série*, de aquí el que solo las séries *convergentes* tengan hoy una gran aplicacion. Y como de tomar una série por convergente cuando no lo es, aunque á primera vista lo parezca, se seguirian errores de gran consideracion, y hasta se podrian obtener resultados absurdos, conviene asegurarse muy bien de la convergencia ó divergencia de las séries, para lo cual nos podrán servir los teoremas siguientes.

Teoremas relativos á la convergencia y divergencia de las séries.

5. *En toda série convergente, el término general tiene por límite cero.*

Para demostrar este teorema basta probar, que el término general u_n de una série convergente, puede ser menor que una cantidad α por pequeña que sea, siendo n suficientemente grande; porque en ese caso dicho término general podrá aproximarse á cero cuanto queramos, y por tanto cero será su límite (*Arit.* 46).

Esto supuesto, sea u_n el término general de la série

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

y puesto que dicha série es convergente, podremos dar á n un valor tal, que haga que las sumas S_{n-1}, S_n, S_{n+1}, S_{n+2} etc., se diferencien del verdadero valor de la série en ménos de $\frac{\alpha}{2}$, siendo α tan pequeña como queramos; de modo, que representando por δ y δ' los valores numéricos de las diferencias S_n-S y $S-S_{n-1}$, los cuales son por hipótesis menores que $\frac{\alpha}{2}$, y por tanto su suma $\delta+\delta'<\alpha$, se tendrá, haciendo abstraccion de signos,

$$S_n-S=\delta, \quad \text{y} \quad S-S_{n-1}=\delta';$$

de donde
$$S_n-S_{n-1}=\delta+\delta'<\alpha;$$

pero
$$S_n-S_{n-1}=u_n;$$

luego
$$u_n<\alpha,$$

que es lo que se queria demostrar.

Consecuencia. *En toda série convergente, los términos son decrecientes á partir de uno de ellos, que puede ser el primero.*

6. *En toda série convergente, la suma de un cierto número finito de términos á partir del* enésimo *disminuye indefinidamente y tiene por límite cero cuando* n *es suficientemente grande.*

En efecto, si demostramos que dicha suma, siendo n suficientemente grande, puede ser menor que una cantidad α por pequeña que sea, cualquiera que sea el número de términos de que dicha suma se componga, el principio quedará demostrado; pues pudiendo ser menor que α, y α pudiendo ser tan poco diferente de cero como se quiera, es claro que la suma tendrá por límite cero.

Esto supuesto, siendo la série convergente, podremos dar á n un valor total, que el término general u_n y los $p-1$ términos siguientes sean menores que $\frac{\alpha}{p}$, siendo p tan grande como se quiera; de modo, que se tendrá

$$u_n<\frac{\alpha}{p},\quad u_{n+1}<\frac{\alpha}{p},\quad u_{n+2}<\frac{\alpha}{p},\quad \ldots\quad u_{n+p-1}<\frac{\alpha}{p};$$

y sumando tendremos

$$u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p-1}<\frac{p\alpha}{p}=\alpha,$$

que es lo que se queria demostrar.

7. *Si los términos de una série son constantes ó crecientes, la série no puede ser convergente.*

En efecto, si la série fuera convergente, sus términos á partir del *enésimo* serian decrecientes, y tendrian por límite cero (5), lo cual es contra la hipótesis.

8. No se crea que, verificándose en las séries convergentes la condicion precisa de ser sus términos decrecientes y tener por límite cero, esta condicion sea suficiente; *una série puede tener sus términos decrecientes siendo el límite del término general cero, y sin embargo la série no ser convergente.*

Sea, por ejemplo, la série llamada *armónica*,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots \qquad [1],$$

cuyos términos se forman dividiendo la unidad por cada uno de los números de la série natural. El término general $\frac{1}{n}$ tiende hácia cero á medida que n crece; los términos son por consiguiente decrecientes y tienen por límite cero, y sin embargo la série no es convergente.

En efecto, si agrupamos los términos de la série [1] de la manera siguiente;

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},\quad \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{16},$$

$$\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{32},\ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2^{p-1}+1}+\frac{1}{2^{p-1}+2}+\frac{1}{2^{p-1}+3}+\ldots+\frac{1}{2^p},$$

observaremos que cada grupo consta de un número de términos igual á la mitad del denominador del último, el cual siempre es una potencia de 2; que cada uno de estos términos es mayor que el último, y por tanto la suma de todos los que constituyen un grupo, es mayor que el último repetido tantas veces como términos hay; es decir, mayor que $n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$, cualquiera que sea el número n, siempre que sea una potencia de 2. Así, tendremos

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{8}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots$$

$$+\frac{1}{16}>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{32}>\frac{1}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2^{p-1}+1}+\frac{1}{2^{p-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^p}>\frac{1}{2}.$$

Luego, si suponemos que el último término que se considera es 2^p, y hacemos $n=2^p$, se tendrá $S_n>1+\frac{p}{2}$.

La cantidad $1+\frac{p}{2}$ puede crecer indefinidamente, á medida que el número p de períodos crece tambien del mismo modo, y con más razon S_n; luego la série armónica, cuyos términos son decrecientes y tienen por límite cero, no es convergente, segun queríamos demostrar, y por tanto no es condicion suficiente que los términos de una série tengan por límite cero para que la série sea convergente.

9. *En toda série convergente compuesta de términos positivos, el producto* nu_n *tiene por límite cero á medida que* n *aumente indefinidamente.*

En efecto, el producto nu_n es siempre positivo; cuando n crece indefinidamente, u_n disminuye indefinidamente tambien, por ser la série convergente; luego dicho producto quedará indeterminado. Sin embargo, vamos á demostrar que tiene por límite cero á medida que n crece indefinidamente. Porque si no tuviera por límite cero, y si una cantidad cualquiera positiva α, á medida que n creciera, se iria aproximando cada vez más á α, y podriamos hacer que, á partir de un cierto valor n, se verificase constantemente $nu_n > \beta$, siendo β una cantidad mayor que cero y menor que el límite α. De la misma manera se tendria tambien

$$u_n > \frac{\beta}{n}, \quad u_{n+1} > \frac{\beta}{n+1}, \ldots \quad u_{n+p} > \frac{\beta}{n+p},$$

de donde sumando, se tendrá

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} > \beta\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right);$$

pero la cantidad que hay dentro del paréntesis, siendo la suma de p términos consecutivos de la série armónica, puede ser mayor que cualquiera cantidad por grande que sea (8), y lo mismo esta suma multiplicada por la cantidad constante β, y con más razon lo será el primer miembro, que es la suma de p términos de la série dada; luego ésta no seria convergente, lo cual es contra el supuesto, y por tanto el producto no puede tener otro límite α distinto de cero, segun queríamos demostrar.

10. *Una série cuyos términos son positivos es convergente, cuando la suma* S_n *de los* n *primeros términos conserva un valor finito, aumentando* n *indefinidamente.*

Siendo todos los términos de la série positivos, la suma S_n aumenta á medida que aumenta tambien el número n de términos; y como permanece finita aunque n crezca indefinidamente, se sigue que siendo S_n siempre creciente, á medida que n aumenta, tenderá hácia un límite finito, del cual no pasará, y por tanto la série será convergente.

Observacion. Es necesario tener presente que todos los términos de la série sean positivos; pues si tuvieran signos diferentes, podria la suma S_n tener un valor finito, cualquiera que fuese el valor de n, y sin embargo dicha série no seria convergente, como sucede en general en las séries indeterminadas.

11. *Si á partir de un cierto término de una série, resulta una série parcial convergente, toda la série tambien lo será.*

Sea la série

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1}+\dots+u_{n+p}+\dots \quad [1],$$

de la cual la suma parcial

$$u_n+u_{n+1}+\dots+u_{n+p}+\dots \quad [2]$$

forma una série convergente, y vamos á demostrar que toda la série [1] es convergente tambien.

En efecto, sea s la suma finita y constante de los $n-1$ primeros términos, y S' la suma constante y finita hácia la cual tiende la série convergente [2]; la suma á que tenderá la série [1] será evidentemente $S=s+S'$; y como s y S' son cantidades finitas, su suma S tambien lo será, y por tanto la série [1] es convergente.

12. *Una série que tiene sus términos positivos y menores respectivamente que los de otra série convergente de términos positivos tambien, es convergente.*

En efecto, la suma S_n de los n primeros términos de la primera série, es menor evidentemente que la suma S'_n de los n términos de la segunda; pero esta suma S'_n tiene siempre un valor finito cualquiera que sea n, por ser convergente la série á que pertenece; luego la primer suma S_n con más razon conservará un valor finito; y en virtud del teorema 10, la série á que corresponde será convergente.

Consecuencia. *Toda série cuyos términos además de ser positivos son menores que los de una progresion decreciente y prolongada hasta el infinito, es convergente.* Y segun el teorema 11, basta que á partir de un término cualquiera de una série sean los de otra menores respectivamente que los de una progresion geométrica decreciente, para que esta otra sea una série convergente.

13. *Si en una série de términos positivos, á partir de un cierto término, la relacion de uno cualquiera al anterior tiende constantemente hácia un límite determinado y finito* l, *esta série será* convergente *ó* divergente, *segun que el límite* l *sea menor ó mayor que la unidad.*

Sea, en primer lugar, l un número menor que la unidad, y supongamos que en la série

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}+\ldots \qquad [1]$$

se verifica que á partir del *enésimo* término, la relacion de uno cualquiera al anterior es menor que la unidad y tiende hácia el límite l menor que 1. Sea k una cantidad comprendida entre l y 1, es decir, mayor que l y menor que 1; á medida que n aumente, la relacion entre un término y el anterior se aproximará cada vez más al límite l, y por tanto irá siendo menor que la cantidad k, de modo que se tendrá

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<k,\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<k,\quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}<k,\ \ldots\ \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}}<k,\ldots$$

De la primera desigualdad sacaremos

$$u_{n+1}<ku_n;$$

la segunda nos da

$$u_{n+2}<ku_{n+1};$$

y si ponemos en esta en vez de u_{n+1} una cantidad mayor ku_n, se tendrá con mayor razon, $u_{n+2}<k^2u_n$.

Del mismo modo hallaremos

$$u_{n+3}<k^3u_n,\quad u_{n+4}<k^4u_n,\ \ldots\ u_{n+p}<k^pu_n;$$

donde vemos que los términos de la série [1], son, á partir del *enésimo*, respectivamente menores que los de la progresion geométrica $ku_n+k^2u_n+k^3u_n+\ldots+k^pu_n+\ldots$ la cual es decreciente, por ser la razon $k<1$; luego la série [1] es convergente. (12 CONS.)

Sea, en segundo lugar, l un número mayor que la unidad. A partir de un cierto término, las relaciones

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}},\ldots\quad \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}},$$

irán aproximándose al límite l, y por tanto llegarán á ser mayores que la unidad, lo cual prueba que los términos irán siendo crecientes, y cada vez mayores; luego la série será divergente, puesto que la suma de sus términos podrá llegar á ser mayor que cualquiera cantidad dada.

OBSERVACION. Si creciendo el número n, la relacion de un término al anterior tiene por límite la unidad, no se puede asegurar que la série sea convergente ni divergente; para determinarla es necesario recurrir á otras consideraciones.

Unicamente en el caso de que la relacion de un término al anterior fuese constantemente igual ó mayor que la unidad, aunque en este caso tuviese por límite 1, se podria asegurar que la série seria *divergente;* pues los términos serian iguales ó crecientes, y por tanto no tendrian por límite cero, condicion necesaria para que la série fuera convergente. Además, siendo dichos términos iguales ó crecientes, resultará que, á partir del u_n, serán todos iguales ó mayores que éste; de modo que si consideramos la suma de un número p de estos términos y la representamos por S'_p, se tendrá evidentemente $S'_p =$ ó $> pu_n$; y como p, lo mismo que pu_n, puede ser tan grande como se quiera, S'_p puede ser mayor que cualquier cantidad dada por grande que sea; luego la série será divergente.

Cuando todas las relaciones son menores que la unidad teniendo por límite 1, ó unas son mayores y otras menores tendiendo siempre al límite 1, la série podrá ser convergente ó divergente, y aun indeterminada; mas para conocerlo hay que valerse de medios especiales como más adelante veremos.

14 Puede suceder que la relacion de un término al anterior no tenga por límite un número determinado, como sucede en la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2^2.3}+\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{2^3.3^2}+\frac{1}{2^3.3^3}+\frac{1}{2^4.3^3}+\frac{1}{2^4.3^4}+\dots$$

en la cual la relacion de un término cualquiera al anterior es alternativamente $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$; pero como no excede á $\frac{1}{2}$, cantidad menor que la unidad, se podrá asegurar que la série es convergente, lo cual se demostraria del mismo modo que el teorema 12, primer caso.

Sin embargo, no se vaya á creer que es condicion precisa para que una série sea convergente, que la relacion de un término al anterior sea constantemente menor que una cierta cantidad menor que la unidad; porque una série puede ser convergente y no cumplir con esta condicion.

Sea, por ejemplo, la progresion geométrica decreciente prolongada al infinito,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\dots$$

que sabemos es una série convergente. Si en ella permutamos los términos de dos en dos, obtendremos la série convergente tambien

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\dots$$

en la cual la relacion de un término cualquiera al anterior es alternativamente 2 y $\frac{1}{2}$, la cual no permanece siempre inferior á la unidad.

LECCION II.

Teoremas relativos á la convergencia y divergencia de séries cuyos términos están afectados de signos diferentes.—Cálculo del valor de una série.

Teoremas relativos á la convergencia y divergencia de séries cuyos términos están afectados de signos diferentes.

15. *Si una série de términos positivos es convergente, la série que resulta de afectar á los términos signos cualesquiera, tambien es convergente.*

Sea la série convergente de términos positivos

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

cuya suma de los n primeros términos es S_n, la cual permanece finita cualquiera que sea n, y tiende hácia un límite finito y determinado S. Afectemos á los términos de la série de los signos + y —; representemos por S'_p la suma de los positivos que hay en los n primeros, y por S'_q la de los negativos; de modo que tendremos, llamando S'_n á la suma algebráica de los n primeros términos de la nueva série, $S'_n=S'_p-S'_q$; y como por hipótesis se tiene que $S_n=S'_p+S'_q$ es una cantidad finita, S'_p y S'_q serán cantidades finitas que tenderán hácia los límites finitos S_p y S_q, cuya suma es S; por tanto, tendiendo S'_p y S'_q hácia los límites finitos y determinados S_p y S_q, su diferencia S'_n tenderá hácia un límite finito y determinado, diferencia de estos límites, el cual representándole por S_n, se tendrá $S_n=S_p-S_q$; luego la série que se obtiene afectando á los términos de la propuesta, que se supone convergente, los signos + y —, es convergente tambien, puesto que la suma de sus términos tiende hácia el límite finito y determinado S_p-S_q.

Consecuencia. *Una série de términos afectados de signos diferentes es convergente, cuando considerados todos con un mismo signo, lo sea tambien.*

La recíproca no es verdadera; es decir, que una série de términos de signos diferentes puede ser convergente, sin que lo sea la que resulta de considerar á todos los términos con un mismo signo. La série $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\ldots$ es convergente, como más adelante veremos (16), y sin embargo no lo es la que resulta de considerar á todos los términos con un mismo signo.

16. *Si los términos de una série son, á partir de uno de ellos, alternativamente positivos y negativos, y decrecen constante é indefinidamente teniendo por límite cero, la série es convergente.*

Sea la série

$$v_1+v_2+v_3+\ldots v_{n-1}+u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots \pm u_p \mp u_{p+1} \pm \ldots$$

en la cual los términos son, á partir del *enésimo*, alternativamente positivos y negativos, y además decrecientes, teniendo por límite cero, de modo que lím. $u_p=0$. Si en esta série prescindimos de los n primeros términos, y probamos que la série $u_1-u_2+u_3\ldots$ es convergente, la série propuesta tambien lo será (11).

Para ello representemos en general por S_p la suma de los p términos, á contar desde u_1, y supongamos, para fijar las ideas, que p es un número par, de modo que tendremos la série de igualdades,

$$S_1=u_1$$
$$S_2=u_1-u_2$$
$$S_3=u_1-u_2+u_3=u_1-(u_2-u_3)$$
$$S_4=u_1-u_2+u_3-u_4=u_1-(u_2-u_3)-u_4$$
$$S_5=u_1-u_2+u_3-u_4+u_5=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_p=u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\ldots+u_{p-1}-u_p$$
$$=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{p-2}-u_{p-1})-u_p;$$

ó lo que es lo mismo,

$$S_1=u_1$$
$$S_2=u_1-u_2$$
$$S_3=S_1-(u_2-u_3)$$
$$S_4=S_2+(u_3-u_4)$$
$$S_5=S_3-(u_4-u_5)$$
$$S_6=S_4+(u_5-u_6)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_p=S_{p-2}+(u_{p-1}-u_p)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

lo cual nos prueba evidentemente, que las sumas que comprenden un número par de términos van creciendo, y las que comprenden un número impar, decreciendo; es decir, que

$$S_1 > S_3 > S_5 > S_7 \ldots > S_{p-1},$$

y

$$S_2 < S_4 < S_6 < S_8 \ldots < S_p;$$

pero la diferencia de dos sumas consecutivas es siempre el último término; es decir, $S_p - S_{p-1} = u_p$; y como lím. $u_p = 0$, la diferencia $S_p - S_{p-1}$ tiene por límite cero. Pero la suma total de la série se halla constantemente comprendida entre dos sumas parciales consecutivas; luego esta suma es constante y finita, y por tanto la série es convergente.

Observacion. Es condicion precisa, para que el teorema anterior sea cierto, que los términos sean constantemente decrecientes y tengan por límite cero, pues esta última condicion no es suficiente.

En efecto, *si los términos de una série son alternativamente positivos y negativos, y el límite del término general es cero, pero sin que por esto se entienda que los términos han de ser constantemente decrecientes, es decir, uno cualquiera menor que el anterior, la série podrá ser divergente.*

Para demostrarlo consideraremos la série de términos alternativamente positivos y negativos, y cuyo término general tiene por límite cero,

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} + \ldots$$

en la cual la suma algebráica de un término positivo cualquiera con el negativo siguiente, es igual á $\frac{2}{n-1}$, siendo n el número que hay debajo del radical de los términos que se consideran; por tanto, la suma de los $2n$ primeros términos de esta série, será

$$S_{2n} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right),$$

lo cual prueba que S_{2n} puede ser mayor que cualquier cantidad dada, pues la que hay dentro del paréntesis, es la suma de n términos de la série armónica, y ya se ha demostrado que puede crecer indefinidamente.

17. *Si en una série cualquiera se verifica, que creciendo* n *indefinidamente, la raiz* enésima *del término general* u_n *es constantemente menor que una cantidad* $\alpha < 1$, *la série es convergente.*

Sea la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$ y supongamos que, á partir del *enésimo* término, se tiene constantemente

$$\sqrt[n]{u_n} < \alpha, \quad \sqrt[n+1]{u_{n+1}} < \alpha, \quad \sqrt[n+2]{u_{n+2}} < \alpha, \ldots$$

de donde

$$u_n < \alpha^n, \quad u_{n+1} < \alpha^{n+1}, \quad u_{n+2} < \alpha^{n+2}, \ldots$$

La série propuesta, teniendo sus términos á partir del *enésimo* menores que los de la progresion geométrica decreciente $\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots$, que sabemos es una série convergente, es tambien convergente (12 cons.), segun queríamos demostrar.

Observacion. *Si* $\sqrt[n]{u_n}$ *fuese constantemente mayor que* 1, *la série de que es término general* u_n *seria divergente.*

En efecto, siendo n por su naturaleza un número entero y positivo, y $\sqrt[n]{u_n}$ constantemente mayor que 1, los términos u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, etc., serán siempre mayores que la unidad, y por tanto la série será divergente (7).

Cálculo del valor de una série.

18. Ya hemos dicho que las séries tienen por principal objeto hallar valores particulares de las funciones algebráicas y trascendentes. Para ello se desarrolla la funcion dada en série convergente; es decir, se busca una série cuyo valor sea igual al de la funcion en cada caso particular que se le considere, y entónces, si se pudiera hallar el valor exacto de la série, se tendria tambien el de la funcion; pero lo que se hace es hallar el valor aproximado de la série, tomando por el de toda ella el que expresa la suma algebráica de sus primeros términos, el cual se aproximará tanto más al verdadero valor, cuanto mayor sea el número de términos que se sumen, y sobre todo cuanto más convergente sea la série. En las séries poco convergentes, hay que tomar un número muy crecido de términos, para obtener valores aproximados convenientes. El error que se comete

tomando por el valor de la série el de la suma de sus primeros términos, es precisamente la série que forman los términos que se desprecian, cuya suma es lo que se llama el *resto* de la série. Si hallamos un número mayor que el valor que tiene el resto de una série, se tendrá un límite del error que se comete tomando por el valor de la série la suma de sus primeros términos.

19. *En una progresion geométrica decreciente, el error que se comete tomando por el valor de la série la suma de sus* n *primeros términos, es igual al último término que se considera multiplicado por el cociente de dividir la razon por la diferencia entre ésta y la unidad.*

Es decir, que en la progresion decreciente

$$a+aq+aq^2+aq^3+\dots+aq^{n-1}+aq^n,$$

el error que se comete tomando por el valor S de la série, el valor de la suma de sus n primeros términos, el cual se representa en general por S_n, será $aq^{n-1}\dfrac{q}{1-q}$.

En efecto, la suma S_n de los términos de una progresion decreciente, es, como ya se sabe,

$$S_n=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Despreciando todos los términos, á partir del *enésimo*, despreciamos la suma de los términos de la progresion $aq^n+aq^{n+1}+aq^{n+2}+\dots$ cuya suma total es, segun se sabe, $\dfrac{aq^n}{1-q}=aq^{n-1}\dfrac{q}{1-q}$, expresion que está conforme con el enunciado del teorema.

20. *En una série de términos constantemente decrecientes y alternativamente positivos y negativos, el error que se comete tomando por el valor total el de la suma de sus* n *primeros términos, es menor que el primer término que se desprecia.*

En efecto, hemos visto (16), que el valor total de la série propuesta, se halla constantemente comprendido entre dos sumas parciales consecutivas; es decir, que si la série es

$$u_1-u_2+u_3-\dots+u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-u_{n+3}+\dots$$

se tendrá $S>S_n-u_{n+1}$, y $S<S_n$; pero la diferencia de estas dos sumas parciales es u_{n+1}; luego el error que se cometerá tomando por el valor S la suma S_n, será menor, segun queriamos demostrar, que el primero de los términos que se desprecian u_{n+1}.

21. En general, para determinar un límite del error que se comete al tomar por valor de una série la suma de los primeros términos, se compara el resto á una progresion geométrica decreciente; y si se prueba que los términos de la série son respectivamente menores que los de la progresion, su suma será menor tambien; y como el valor de la suma de los términos de la progresion es conocido, este será un límite del error que se comete en la série dada.

Sea, por ejemplo, la série

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots \qquad [1].$$

Supongamos que la relacion de un término al anterior es, á partir de un cierto término u_n, constantemente menor que α, siendo α una cantidad menor que 1; en este caso el resto de la série $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots$ será menor que

$$u_{n+1}+u_{n+1}\alpha+u_{n+1}\alpha^2+u_{n+1}\alpha^3+\ldots=u_{n+1}\frac{1}{1-\alpha};$$

luego un límite del error cometido en la série [1], tomando la suma de los n primeros términos, será $u_{n+1}\dfrac{1}{1-\alpha}$.

22. Si en una série $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$ se verifica, á partir de un cierto término u_n, que $\sqrt[n]{u_n}$ permanece constantemente menor que α, siendo $\alpha<1$, el resto será menor que los términos de la progresion

$$\alpha^{n+1}+\alpha^{n+2}+\alpha^{n+3}+\ldots=\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha};$$

luego un límite del error que se comete en la série dada, será $\dfrac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$; es decir, el error que se comete será menor que esta cantidad.

LECCION III.

Ejemplos de séries.

Ejemplos de séries.

23. Sea, en primer lugar, la série armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots$$

cuyos términos son todos positivos y constantemente decrecientes teniendo por límite cero, todo lo cual contribuye á creer que la série pueda ser convergente; la relacion de un término cualquiera al anterior, es

$$\frac{1}{n}:\frac{1}{n-1}=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n},$$

cantidad menor que la unidad, pero que tiene por límite 1; por tanto, todavía no podemos decir, fundados en estos datos, que la série sea convergente ni divergente.

Si recurrimos á la regla de convergencia que hemos dado (9), veremos que el producto nu_n, en la série armónica, es constantemente igual á 1; pero si la série fuera convergente, nu_n, tendria por límite cero; es así que no tiene por límite cero, luego dicha série armónica es divergente, como ya sabíamos (8).

24. Sea, en segundo lugar, la série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots$$

La relacion de un término cualquiera al anterior, es

$$\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n-1)^2}=\frac{(n-1)^2}{n^2}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2,$$

cantidad menor que la unidad, pero que tiene por límite 1; y por tanto, la série podrá ser convergente ó divergente.

El producto nu_n es en este caso $n\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$, que tiene por límite cero, cuando n tiende hácia infinito; luego la série podrá ser convergente; y en efecto lo es, como se puede demostrar por medio de la descomposicion en grupos; así,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}.$$

Formando un segundo grupo con los cuatro términos siguientes, se tendrá evidentemente

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4}.$$

Del mismo modo tendremos $\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots+\frac{1}{15^2}<\frac{8}{8^2}=\frac{1}{8}$,

y así sucesivamente; de donde podemos concluir, que la suma total de los términos de la série

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

es menor que la de la progresion decreciente

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

y por tanto, dicha série es convergente.

25. Sea la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots$$

el término general tiende, cuando x es mayor que la unidad y n crece indefinidamente, hácia el límite $\frac{\infty}{\infty}=\frac{0}{0}$; cuando x es igual ó menor que la unidad, entónces tiene por límite cero. Sin embargo, nosotros demostraremos que la série es convergente, cualquiera que sea el valor de x; en efecto, la relacion de un término cualquiera al anterior, es

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}:\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}=\frac{x}{n},$$

la cual tiende hácia cero á medida que n aumenta, y por tanto la série es convergente (13), cualquiera que sea x.

En esta série los términos serán crecientes al principio, si x es mayor que la unidad; pero luégo principiarán á ser decrecientes.

Si la série es

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

la relacion de un término cualquiera al anterior, será

$$\frac{x^n}{n}:\frac{x^{n-1}}{n-1}=\frac{n-1}{n}x=\left(1-\frac{1}{n}\right)x,$$

la cual tiene por límite x, cuando n crece indefinidamente; por tanto, la série será divergente ó convergente, segun que x sea mayor ó menor en valor numérico que la unidad; si x fuese igual 1, se tendria la série armónica, que ya sabemos es divergente.

26. Sea la série á que da orígen la fórmula del binómio suponiéndola verdadera cualquiera que sea m,

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}+\ldots$$

El límite de la relacion de un término al anterior, es en este caso

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n:\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}=$$

$$\frac{m-n+1}{n}x=\left(\frac{m+1}{n}-1\right)x.$$

El límite de esta relacion, cuando $n=\infty$, es $-x$; luego la série sólo será convergente en el caso de ser x menor en valor numérico que la unidad, es decir, cuando el valor de x se halle comprendido entre $+1$ y -1.

27. Sea la série

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

cuyo término general $u_n=\dfrac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}$ tiene por límite cero; la relacion de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, es en este caso

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}:\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}=\frac{1}{n},$$

la cual tiene por límite cero; por tanto, la série es convergente. Su valor está comprendido entre 2 y 3; en efecto, este valor es evidentemente mayor que 2, puesto que se desprecian para obtenerle todos los términos, á partir del tercero; el resto es por consiguiente

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}+\ldots$$

Cada uno de estos términos, á excepcion del primero, es menor que el término correspondiente de la progresion

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1;$$

luego el error que se comete, tomando por el valor de la série dada sus dos primeros términos, es menor que 1, y por tanto el número e es menor que $2+1=3$.

28 *El número* e *es inconmensurable.* Si fuese igual á una cantidad conmensurable $\frac{p}{q}$, se tendria

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots q}+\frac{1}{1.2.3\ldots q(q+1)}+\ldots$$

Multiplicando por el producto $1.2.3\ldots q$ los dos miembros de esta igualdad, y representando por N el número entero que resulta de la suma de los $q+1$ primeros sumandos, que son enteros, se tendrá

$$1.2.3\ldots(q-1)\times p=\mathrm{N}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\ldots \quad [1];$$

pero se tiene

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\ldots$$
$$<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\ldots$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots<\frac{1}{q} \quad [2];$$

por tanto, el primer miembro de la igualdad [1], que es un número entero, resulta ser igual á un número entero N, más una fraccion menor que $\frac{1}{q}$, lo cual es absurdo; luego no podemos admitir que el número e sea un número conmensurable $\frac{p}{q}$; luego es inconmensurable.

29. Si quisiéramos obtener el valor de e con un cierto grado de aproximacion, observariamos que, tomando en esta série la suma de los $n+1$ primeros términos, el error que se comete, será

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}+\frac{1}{1.2.3\ldots(n+2)}+\frac{1}{1.2.3\ldots(n+3)}+\ldots$$
$$=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right)$$

y segun la fórmula [2], dicho error será menor que $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\times\frac{1}{n}$, es decir, menor que el último término que se considera, partido por el número de términos considerados ménos uno.

Si queremos obtener el valor de e con doce cifras decimales, principiaremos calculando cada uno de los sumandos de la série en ménos de una unidad del órden catorce, unos por defecto y otros por exceso, y así estaremos seguros que aunque tuviéramos necesidad de considerar cien términos, el error cometido en la suma seria menor que una unidad del órden doce (*Arit.* * 316). Cuando hayamos llegado á un término cuyo valor sea menor que una unidad del órden que marque la aproximacion, ya no se calcularán más, y la suma de los calculados será el valor de e, del cual solo se tomarán las doce primeras cifras decimales.

Calculando los términos de la série con catorce cifras decimales, veremos que los diez y siete primeros nos dan para valor de e el número 2,71828182845901, el cual es exacto hasta la cifra del órden trece, y con más razon hasta la doce.

Cálculo del valor de e.

$$1+1=2{,}00000000000000$$
$$\frac{1}{1.2}=0{,}50000000000000$$
$$\frac{1}{1.2.3}=0{,}16666666666666$$
$$\frac{1}{1.2\ldots4}=0{,}04166666666666$$
$$\frac{1}{1.2\ldots5}=0{,}00833333333333$$
$$\frac{1}{1.2\ldots6}=0{,}00138888888888$$
$$\frac{1}{1.2\ldots7}=0{,}00019841269841$$

$$\frac{1}{1.2\ldots8} = 0{,}0000248015873$$
$$\frac{1}{1.2\ldots9} = 0{,}00000275573192$$
$$\frac{1}{1.2\ldots10} = 0{,}00000027557319$$
$$\frac{1}{1.2\ldots11} = 0.00000002505211$$
$$\frac{1}{1.2\ldots12} = 0{,}00000000208768$$
$$\frac{1}{1.2\ldots13} = 0{,}00000000016059$$
$$\frac{1}{1.2\ldots14} = 0{,}00000000001147$$
$$\frac{1}{1.2\ldots15} = 0{,}00000000000076$$
$$\frac{1}{1.2\ldots16} = 0{,}00000000000005$$
$$e = S_{17} = 2{,}71828182845901$$

30. Sea, por último, la série

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

en la cual el término general $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ tiene por límite cero; del mismo modo se ve, que lím. $\left(nu_n = \dfrac{1}{n+1}\right) = 0$, lo cual nos indica que la série podrá ser convergente.

La relacion de un término al anterior, es

$$\frac{1}{n(n+1)} : \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n+1};$$

de donde se deduce fácilmente, que lím. $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 1$;
lo cual nos prueba, que la série podrá ser convergente, pero que debemos recurrir á medios especiales para descubrirlo.

Para ello observaremos, que en cada término de la série dada se verifica

$$\frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2},\ \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\ldots\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},\ldots$$

de donde deduciremos que la suma de los n primeros términos, será $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$; de donde, lím. $S_n = 1$.

Por consiguiente, la série es convergente, y la suma de sus n primeros términos tiende á valer 1 cuando n crece indefinidamente.

LECCION IV.

Desarrollo de una expresion en série.—Idea general de las séries recurrentes.—De las séries imaginarias.

Desarrollo de una expresion en série.

31. Por medio de las séries se pueden hallar fácilmente valores aproximados de expresiones, tales como determinar el logaritmo de un número, el valor de una exponencial, el de una línea trigonométrica, la relacion de la circunferencia al diámetro, etc., los cuales seria muy pesado ó difícil obtener por otros medios. Pero es necesario para esto, saber trasformar la expresion cuyo valor queremos determinar, en una série que exprese dicho valor; la cual, como ya sabemos, ha de ser convergente, pues solo las séries convergentes pueden representar un valor determinado y finito.

32. Cuando una expresion se trasforma en otra compuesta de un número finito de términos, se obtiene una igualdad en la cual el segundo miembro en general es el resultado de las operaciones indicadas en el primero, y que por tanto se debe verificar para cualquiera que sea el valor que se le dé á cada una de las letras que entran en ella; pero si el segundo miembro se compone de un número infinito de términos, que satisfacen en su formacion á una ley constante, entónces la igualdad no se verifica siempre; está sujeta á ciertas restricciones, que es necesario no despreciar, para no incurrir en graves errores.

Sea, por ejemplo, la expresion de que ya nos hemos ocupado anteriormente $\frac{1}{1-x}$, la cual, segun las reglas de la division, da (*Alg. elem.* 85)

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad [1].$$

Este segundo miembro se compone de un número determinado n de términos, y no es otra cosa que el resultado de la operacion indicada en el primero; por tanto, deberá verificarse, como en efecto sucede, cualquiera que sea el valor que demos á x; así, haciendo $x=2$ y $n=5$, se obtiene la igualdad evidente

$$\frac{1}{1-2}=-1=1+2+4+8+16+32+\frac{64}{1-2}=63-64.$$

Si el número de términos crece indefinidamente, ó si hacemos $n=\infty$, la igualdad [1] siempre se verificará, pues cualquiera que sea n, se tiene (*Arit.* 414)

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x};$$

de modo, que sustituyendo este valor en la igualdad [1], se halla la identidad independiente de n,

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

Si al prolongar indefinidamente la division de 1 por $1-x$, prescindimos del resto y solo consideramos la série á que da lugar, se obtendrá la igualdad

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \qquad [2],$$

la cual no siempre será cierta. En efecto, si damos á x valores numéricamente mayores que la unidad, el primer miembro se reducirá á una cantidad finita positiva ó negativa, mientras que el segundo crecerá indefinidamente en valor numérico; por tanto, cuanto mayor sea el número de términos que consideremos, tanto más nos alejaremos del valor que tiene la expresion que dió orígen á esta série. Si por el contrario, x es numéricamente menor que la unidad, cuanto mayor sea el número de términos que tomemos en la série, tanto más nos aproximaremos al valor de la expresion que la produjo, pues dicha suma, como ya sabemos, tiene por límite $\frac{1}{1-x}$, cuando $x<1$.

33. De lo dicho anteriormente se deduce, que la division puede emplearse, en algunos casos, para desarrollar una expresion en

série, la cual siendo convergente, podrá servir para calcular valores numéricos aproximados de dicha expresion; pero de ningun modo servirá para este objeto, si la série que se obtiene en el desarrollo es divergente.

34. Para desarrollar una expresion en série, se usa frecuentemente el método llamado *de los coeficientes indeterminados*, el cual vamos á exponer en pocas palabras, haciendo algunas observaciones necesarias, para no incurrir en inexactitudes á que dicho método podria dar lugar.

El principio en que se apoya el método de los coeficientes indeterminados, es el siguiente: si para cualquier valor de x se verifica la igualdad

$$0=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n+\ldots \quad [1],$$

se deben verificar tambien las siguientes:

$$A_0=0,\ A_1=0,\ A_2=0,\ A_n=0,\ldots$$

Este principio se demuestra generalmente, diciendo: puesto que la igualdad [1] se ha de verificar para cualquier valor de x, si hacemos $x=0$, se tiene $0=A_0$; y como el valor de A_0 es independiente de x, siempre conservará el mismo valor; por tanto, la igualdad [1] se podrá simplificar suprimiendo el sumando A_0, que constantemente es cero, y dividièndo por x, de modo que dicha igualdad se convertirá en esta otra,

$$0=A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots+A_nx^{n-1}+\ldots$$

la cual es de la misma forma y se halla en las mismas condiciones que la propuesta; por consiguiente, se tendrá tambien $0=A_1$, y de la misma manera se halla $A_2=0$, $A_3=0\ldots$ Pero observemos que esta demostracion, concluyente cuando el número de términos es finito y finito tambien el valor numérico de cada coeficiente, deja de serlo cuando el número de términos es infinito, ó alguno de estos coeficientes se reduce á infinito; porque en cualquiera de estos casos, al hacer $x=0$, la igualdad [1] se convierte en una expresion de la forma $0=A_0+\infty\times 0$, de la cual no se puede deducir que A_0 sea ó no cero, pues siendo $\infty\times 0$ una expresion indeterminada (*Alg. elem.* 262), podrá tener un valor igual á $-A_0$, en cuyo caso la igualdad propuesta podrá ser satisfecha sin que se verifique la condicion $A_0=0$.

Para que este principio pueda demostrarse con todo rigor, hay que enunciarle del modo siguiente:

35. *Si constantemente se verifica por cualquier valor de* x *la igualdad*

$$0=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots$$

siendo los coeficientes A_0, A_1, A_2,... *cantidades finitas, se verificarán tambien las siguientes:*

$$A_0=0,\ A_1=0,\ldots\ A_n=0,\ldots$$

cualquiera que sea el número de términos de que la anterior igualdad se componga.

En efecto, si representamos por A_p el mayor de los coeficientes A_1, A_2, A_3,... se tendrá

$$A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots<A_px(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots)$$

ó $$A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots<A_px\times\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}\right)$$

desigualdad que, para valores de x menores que la unidad, se reduce cuando $n=\infty$, á

$$A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots<A_px\times\frac{1}{1-x};$$

pero la expresion $A_px\times\frac{1}{1-x}$ tiene por límite 0, cuando $x=0$, puesto que A_p es una cantidad finita; luego la expresion

$$A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

que numéricamente es menor que $A_px\times\frac{1}{1-x}$, tendrá tambien por límite 0, cuando $x=0$; y por tanto, para el valor de $x=0$, la igualdad [1] se reducirá á $0=A_0$.

Una vez probado que $A_0=0$, se tendrá, como anteriormente hemos expuesto,

$$0=A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots+A_nx^{n-1}+\ldots$$

de donde deduciremos, de la misma manera, que $A_1=0$, y lo mismo de los demás coeficientes, y por tanto el principio queda demostrado.

Consecuencia. *Si se tienen dos séries ordenadas con relacion á las potencias crecientes de* x *constantemente iguales cualquiera que sea el valor de* x, *los coeficientes de las mismas potencias de esta letra, que suponemos finitos, son tambien iguales.*

Supongamos que para cualquier valor de x, se tiene siempre la igualdad

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$$

de la cual deduciremos, pasando todos los términos á un sólo miembro,

$$0=A_0-a_0+(A_1-a_1)x+(A_2-a_2)x^2+\dots$$

y como los coeficientes a_0, a_1, a_2,... A_0, A_1, A_2,... son finitos, las diferencias A_0-a_0, A_1-a_1, A_2-a_2,... serán finitas tambien; y segun el principio anterior, se tendrá

$$A_0-a_0=0,\ A_1-a_1=0,\ A_2-a_2=0,$$

de donde $$A_0=a_0,\ A_1=a_1,\ A_2=a_2\dots$$

lo cual queriamos demostrar.

36. Esto supuesto, el método de los coeficientes indeterminados para desarrollar una expresion E_x en série ordenada segun las potencias enteras y crecientes de una letra x, consiste en igualar dicha expresion á una série de esta forma, de modo que se tenga la igualdad que podremos llamar *hipotética*

$$E_x=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\dots+A_nx^n+\dots \qquad [1],$$

en la cual los coeficientes A_0, A_1, A_2,... son cantidades que hemos de determinar, con la condicion de que la igualdad [1] se verifique con independencia de los valores de x; despues, por medio de trasformaciones fáciles, se reduce la igualdad anterior á otra de la forma

$$0=P_0+P_1x+P_2x^2+\dots+P_nx^n+\dots$$

cuyos coeficientes P_0, P_1, P_2,... son independientes de x, pero dependientes de A_0, A_1, A_2,... y de las constantes que entran en la expresion dada E_x; por tanto, para que el método sea aplicable, es necesario que dichos coeficientes sean finitos, y además las ecuaciones que resultan del principio fundamental (35), es decir $P_0=0$, $P_1=0$, $P_2=0$,... sean compatibles, en cuyo caso el desarrollo será posible, y podremos deducir de estas ecuaciones, que llamaremos de condicion, los valores de las cantidades A_0, A_1, A_2,... las cuales, si siguen en su formacion una ley constante y general, darán orígen á una série que será la producida por la expresion dada. Pero se tendrá muy presente, que para hacer uso de esta série en el cálculo numérico de la expresion que la ha producido, es necesario asegurarse primero de que es convergente, pues de lo contrario la igualdad no seria siempre cierta, como ya hemos visto que sucede en la division de 1 por $1-x$.

Apliquemos este método á algunos ejemplos de las séries recurrentes.

Séries recurrentes.

37. Se llama *série recurrente*, aquella en la cual un término cualquiera, á partir del $n+1$, se forma en general de los n términos consecutivos anteriores, multiplicados por las cantidades respectivas a_1x, a_2x^2, a_3x^3,... a_nx^n, de las cuales a_1, a_2, a_3,... a_n, son constantes.

Estas cantidades a_1x, a_2x^2, etc., forman lo que se llama en las séries recurrentes *escala de relacion*.

Se dice que una série recurrente es de *primer órden*, cuando para formar un término, no se necesita más que del anterior; de *segundo órden*, cuando se necesitan los dos anteriores; y en general del *órden* n, cuando es menester n términos consecutivos para formar el que sigue.

En las séries recurrentes del órden n, los n primeros términos no se forman segun la ley general, la cual principia desde el término $n+1$.

Sea la fraccion $\dfrac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$ la expresion que queremos desarrollar en série; y como se conoce, mediante la division, que el cociente será de la forma $A_0+A_1x+A_2x^2$... no habrá inconveniente en establecer la igualdad

$$\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\ldots$$

y multiplicando por el denominador, y pasando despues los términos del numerador al segundo miembro, se hallará

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} 0=A_0a'+A_1a' & x+A_2a' & x^2+A_3a' & x^3+A_4a' & x^4+\ldots \\ -a+A_0b' & +A_1b' & +A_2b' & +A_3b' & +\ldots \\ -b & +A_0c' & +A_1c' & +A_2c' & +\ldots \end{array}$$

Las ecuaciones de condicion para que esta igualdad se verifique con independencia de los valores de x, son

$$A_0a'-a=0,\ A_1a'+A_0b'-b=0,\ A_2a'+A_1b'+A_0c'=0,$$
$$A_3a'+A_2b'+A_1c'=0,\ A_4a'+A_3b'+A_2c'=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de donde se saca

$$A_0=\frac{a}{a'},\quad A_1=\frac{b}{a'}-\frac{b'}{a'}A_0,\quad A_2=-\frac{b'}{a'}A_1-\frac{c'}{a'}A_0,$$

$$A_3=-\frac{b'}{a'}A_2-\frac{c'}{a'}A_1,\quad A_4=-\frac{b'}{a'}A_3-\frac{c'}{a'}A_2\ldots$$

. . . .

$$A_n=-\frac{b'}{a'}A_{n-1}-\frac{c'}{a'}A_{n-2}.$$

De estas igualdades se deduce, que la série á que da orígen la fraccion propuesta, es una série recurrente de segundo órden, en la cual, á partir del tercer término, cada uno se forma de los dos anteriores, multiplicados respectivamente por las cantidades $-\frac{b'}{a'}x$ y $-\frac{c'}{a'}x^2$, que constituyen la escala de relacion.

Si efectuásemos la division indicada y la prolongásemos indefinidamente, obtendriamos el mismo resultado.

Aplicando el mismo método á la fraccion $\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}$, obtendremos tambien una série recurrente de tercer órden, cuya escala de relacion será $-\frac{b'}{a'}x$, $-\frac{c'}{a'}x^2$, $-\frac{d'}{a'}x^3$, y por tanto, á partir del cuarto término, se tendrá para expresion de uno cualquiera,

$$A_nx^n=-\frac{b'}{a'}x\times A_{n-1}x^{n-1}-\frac{c'}{a'}x^2\times A_{n-2}x^{n-2}-\frac{d'}{a'}x^3\times A_{n-3}x^{n-3}.$$

Y en general, una fraccion de la forma

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots+hx^{n-1}}{a'+b'x+c'x_2+\ldots+h'x^{n-1}+k'x^n},$$

da orígen á una série recurrente del órden n, cuya escala de relacion es $-\frac{b'}{a'}x$, $-\frac{c'}{a'}x^2$, $-\ldots-\frac{k'}{a'}x^n$; y por consiguiente, la expresion del término general, á partir del $n+1$, será

$$A_{n+p}x^{n+p}=-\frac{b'}{a'}x\times A_{n+p-1}x^{n+p-1}-\frac{c'}{a'}x^2\times A_{n+p-2}x^{n+p-2}-\ldots-\frac{k'}{a'}x^n\times A_px^p.$$

38. Si el numerador de la fraccion que queremos desarrollar en série, fuese de un grado igual ó superior, con relacion á x, que el denominador, se efectuaria la division, y obtendriamos por co-

ciente una parte entera seguida de una fraccion, cuyo numerador seria el resto y el denominador el divisor, esta fraccion se hallaria en los casos anteriores, y por tanto podriamos desarrollarla en série recurrente.

39. Por lo que llevamos dicho del método de los coeficientes indeterminados, se deduce que es condicion indispensable, para su aplicacion, el conocer de antemano la forma de la série que ha de originar la expresion dada, lo cual no siempre es fácil determinar *à priori*. Así, debemos considerarle como hipotético en la mayor parte de los casos; muy fecundo como método de investigacion, pero de escaso rigor matemático; por lo cual no se debe abusar de su frecuente aplicacion, teniendo cuidado siempre, despues que se han hallado los valores de los coeficientes A_0, A_1, A_2,... ver si la série obtenida es convergente, y si realmente expresa el valor de la cantidad que la produjo.

40. A veces nos indica el mismo método, la imposibilidad de desarrollar una expresion dada en una série de la forma ordinaria $A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots$ lo cual se conoce cuando llegamos á una ecuacion de condicion absurda, tal como $8=0$, ó hallamos para valores de los coeficientes A_0, A_1, A_2, etc., valores infinitos.

Sea, por ejemplo, la fraccion que tratamos de desarrollar en série,

$$\frac{3}{2x+3x^2}.$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, haremos

$$\frac{3}{2x+3x^2}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

Quitando denominadores y trasponiendo, se hallará

$$0=-3+2A_0x+\left.\begin{matrix}2A_1\\+3A_0\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}2A_2\\+3A_1\end{matrix}\right|x^3+\left.\begin{matrix}2A_3\\+3A_2\end{matrix}\right|x^4+\left.\begin{matrix}\ldots\\+\ldots\end{matrix}\right.$$

de donde se deberá tener,

$$-3=0,\ 2A_0=0,\ 2A_1+3A_0=0,\ldots$$

ecuaciones evidentemente incompatibles, por ser absurda la primera.

Esto prueba, que la expresion dada no se puede desarrollar en una série de la forma supuesta; lo cual se ve inmediatamente, pues si hacemos $x=0$, el primer miembro se reduce á ∞, y el segundo á A_0; luego por lo ménos uno de los coeficientes seria infinito, y en este caso el principio fundamental (35) no es rigorosamente exacto.

Con todo, si observamos que la fraccion propuesta se puede poner bajo la forma

$$\frac{3}{2x+3x^2}=\frac{1}{x}\times\frac{3}{2+3x},$$

y que la fraccion $\frac{3}{2+3x}$ da sin inconveniente alguno

$$\frac{3}{2+3x}=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

de donde deducimos

$$\begin{array}{r|r|r|l} 0=2A_0+2A_1 & x+2A_2 & x^2+2A_3 & x^3+\ldots \\ -3+3A_0 & +3A_1 & +3A_2 & +\ldots \end{array}$$

y segun el principio fundamental, se hallará

$$A_0=\frac{3}{2},\ A_1=-\frac{3}{2}A_0,\ A_2=-\frac{3}{2}A_1,\ldots\ A_n=-\frac{3}{2}A_{n-1};$$

y por tanto,

$$\frac{3}{2+3x}=\frac{3}{2}-\frac{9}{4}x+\frac{27}{8}x^2+\frac{81}{16}x^3+\ldots$$

tendremos, por último, la série

$$\frac{3}{2x+3x^2}=\frac{3}{2}x^{-1}-\frac{9}{4}+\frac{27}{8}x-\frac{81}{16}x^2+\ldots$$

que sólo nos servirá para calcular el valor de la expresion $\frac{3}{2x+3x^2}$ cuando á x se le den valores menores que $\frac{2}{3}$, condicion precisa para que la série sea convergente.

De las séries imaginarias.

41. Se dice que una série de términos imaginarios de la forma $a+b\sqrt{-1}$ es convergente, cuando la suma de los términos reales tiene por límite un número determinado y finito S, y la suma de los coeficientes de $\sqrt{-1}$ tiende del mismo modo hácia otro límite determinado y finito S′; en cuyo caso el límite de la suma de los términos de la série, se dice que es $S+S'\sqrt{-1}$.

De lo dicho se deduce, que las condiciones de convergencia de una série de términos imaginarios, se reducen á las condiciones de dos séries reales, en las cuales se descompone la propuesta. En algunas ocasiones basta determinar las que se refieren á la série que forman los módulos de los términos de la primera y probar que la série que forman estos módulos es convergente, para que la série dada lo sea tambien.

LECCION V.

De las funciones en general; diferentes clases de funciones.—Modo de representar las funciones geométricamente.

De las funciones en general; diferentes clases de funciones.

42. Se da el nombre de *variable*, á toda cantidad susceptible de recibir sucesivamente, en la cuestion en que se la considera, diferentes valores.

Si los valores que una variable puede recibir son completamente arbitrarios, se dice que esta variable es *independiente*; pero si los valores de una variable dependen de los que se le den á otra con la cual esté íntimamente relacionada, la primera se llama *dependiente* de la segunda, ó más bien, se dice que es una *funcion* de esta segunda.

Sea y una variable cuyos valores dependen de los que á otra variable x se le den y de la série de operaciones que con esta hay que ejecutar; la variable y es una funcion de x, y la relacion que liga á estas dos variables, se indica por la igualdad $y=f(x)$, que se lee y igual á funcion de x.

El símbolo $f(x)$ expresa la série de operaciones que hay que ejecutar con la variable x, para obtener el resultado que nos da el valor de y.

Se llama funcion *explícita*, aquella en la cual se conoce la série de operaciones que hay que ejecutar con la variable independiente para hallar el valor de la funcion; ó lo que es lo mismo, aquella que se da bajo la forma $y=f(x)$. Cuando la relacion que hay entre una funcion y y su variable independiente x, se da por una ecuacion de la forma $F(x, y)=0$, que se lee funcion grande de x é y igual cero, y no se conoce la série de operaciones que hay que ejecutar con x para hallar el valor de y, se dice que la funcion es *implícita*. Para obtener la funcion explícita correspondiente á una funcion implícita $F(x, y)=0$, hay que resolver esta ecuacion con relacion á la variable dependiente.

Las funciones pueden depender de una ó más variables, las cuales se suelen representar por las letras x, y, z, u... Una funcion explícita de más de una variable, se expresa generalmente por

$$y=f(x, z, u, v...);$$

una funcion implícita de estas mismas variables, se expresará por

$$F(x, y, z, u, v...)=0,$$

cuyas expresiones se leen, y *igual funcion de* z, u, v.., y *funcion grande de* x, y, z, u, v... *igual cero.*

Cuando se quiere indicar que dos funciones son distintas, aunque dependan de unas mismas variables, se expresa por la letra diferente que se antepone al paréntesis que contiene á estas variables; así, las expresiones

$$y=f(x, z, u), \quad y_1=F(x, z, u), \quad y_2=\varphi(x, z, u),$$

indican tres funciones distintas de las variables x, z, u.

Para indicar que en una cierta funcion se han sustituido números particulares en vez de las variables, no hay más que poner en lugar de éstas los números correspondientes, dejando la misma inicial de funcion; así, $y=f(a, b, c)$, indica que en la funcion $y=f(x, z, u)$, hemos puesto los números a, b, c, en vez de las variables x, z, u.

43. Las funciones se dividen en dos clases: *funciones algebráicas* y *trascendentes*.

Funcion algebráica es aquella que se compone de un número limitado de términos de la forma Ax^m, ligados por los signos de las seis operaciones fundamentales de suma, resta, multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raíces.

Funcion trascendente es cualquiera funcion que no viene expresada por los signos ordinarios del álgebra. La relacion que hay entre la funcion trascendente y la variable de que depende, se expresa por un signo particular, tal como a^x, $\log x$, sen x, arc tg x, etcétera.

44. Las funciones algebráicas pueden ser *racionales* ó *irracionales*.

Funciones algebráicas racionales son aquellas en las cuales la variable x no viene afectada de exponentes fraccionarios, ni se halla debajo de ningun radical; cuando se verifica una ó las dos de estas condiciones, la funcion es *irracional*.

Las funciones racionales pueden ser *enteras* ó *fraccionarias*.

Funciones racionales enteras son aquellas cuyo variable no viene afectada de exponentes negativos, ni se halla en ningun denominador; si ocurre algunas de estas condiciones ó las dos, la funcion es fraccionaria.

45. Las funciones tanto algebráicas como trascendentes, pueden ser *simples* ó *compuestas*.

Funcion simple es aquella que está ligada á la variable por una relacion que no es susceptible de descomposicion; como $y = x$, $y =$ sen x, $y = a^x$, etc.

Funcion compuesta es aquella en la cual entran varias funciones simples, tal como $y = ax^2 + b^x - 3\,\text{sen}\,x$.

46. *Funcion de funcion* es aquella cuya variable es otra funcion de una segunda variable. Así, si tenemos $u = f(x)$ é $y = F(u)$, y será una funcion de funcion; pues la variable u, de que depende inmediatamente, es á su vez una nueva funcion de la variable x.

Una funcion de funcion se puede siempre representar por una funcion dependiente de la última variable, sustituyendo la variable por la funcion que representa y ejecutando los cálculos indicados; así, la funcion de funcion anterior se podrá expresar por $y = F[f(x)] = \varphi(x)$.

47. Si se da la ecuacion $F(x, y) = 0$, que expresa la relacion que hay entre las dos variables x é y, es evidente que dando valores á una de ellas, corresponderá uno ó más valores para la otra; de modo que cada una se podrá considerar como funcion de la otra. Si suponemos resuelta esta ecuacion, primero con relacion á y, y luégo con relacion á x, se tendrá en general $y = f(x)$ y $x = \varphi(y)$; y digo en general, porque en el caso de ser la ecuacion simétrica con relacion á las dos variables, es decir, en el caso de que ambas variables entren en dicha ecuacion de la misma manera, se hallarán las fun-

ciones idénticas $y=f(x)$ y $x=f(y)$; cuando esto no sucede, se dice que las funciones anteriores $y=f(x)$ y $x=\varphi(y)$ son *inversas* la una respecto de la otra. Así, las funciones inversas de

$$y=x^m,\ y=a^x,\ y=\text{sen}\,x,\ y=\log_a x,\ y=\text{arc tg}\,x,$$

serán

$$x=\sqrt[m]{y},\ x=\log_a y,\ x=\text{arc sen}\,y,\ x=a^y,\ x=\text{tg}\,y.$$

48. Una variable se dice que es *contínua*, cuando no puede pasar de un valor á otro, sin pasar por todos los valores intermedios; tal como la distancia que recorre un móvil sobre una línea al pasar de un punto á otro de la misma, que no puede hacerlo sin pasar por todos los puntos intermedios á aquellos cuya distancia recorre.

49. Se dice que una funcion es *contínua*, cuando haciendo variar de una manera contínua á la variable ó variables de que depende, es siempre real y varía tambien de un modo contínuo; es decir, que al pasar de un valor particular á otro, pasa por todos los intermedios.

Una funcion puede ser de tal naturaleza que, para valores de la variable ó variables comprendidos entre ciertos límites, sea contínua; y deje de serlo cuando á las variables se les den valores que no se hallen entre estos límites.

50. Cuando á una variable x se le dan incrementos tan pequeños como queramos, pero determinados y fijos, se representan estos por la letra Δ antepuesta á dicha variable; así, Δx, que se lee *diferencia x*, es el incremento, tan pequeño como se quiera, que se le ha dado á x, y cuyo carácter especial es el de tener un valor fijo y determinado. Si el incremento que recibe una variable no tiene el carácter de ser fijo y determinado de valor por pequeño que sea, sino que por el contrario, su carácter especial *es el ser por su naturaleza esencialmente variable, sin representar valor particular alguno, y que variando puede ser menor que cualquier cantidad por muy pequeña que esta sea*, se tiene lo que en matemáticas se llama un INFINITAMENTE PEQUEÑO, el cual se representa por la letra d antepuesta á la variable que recibe incrementos de esta especie; así, dx, que se lee *diferencial x*, es el *incremento infinitamente pequeño*, tal como acabamos de difinirle, que recibe la variable x, cuyo incremento se suele llamar tambien la *diferencial* de dicha variable.

Para probar que una funcion que es real entre ciertos límites de la variable de que depende, es contínua, basta demostrar que á incrementos infinitamente pequeños de la variable, corresponden á la funcion incrementos infinitamente pequeños tambien; porque la funcion pasará de un valor á otro por grados insensibles, del mismo modo que la variable ha pasado tambien por grados insensibles de uno á otro valor.

Recíprocamente, si la funcion es contínua entre ciertos valores de la variable, á valores infinitamente próximos de esta comprendidos entre dichos límites, corresponderán valores infinitamente próximos tambien de la funcion; pues si no sucediera así, y á un incremento infinitamente pequeño h de la variable, correspondiera á la funcion un cierto incremento finito k, esta pasaria bruscamente de un valor á otro sin pasar por todos los intermedios, y no sería contínua, lo cual es contra la hipótesis.

Sea una funcion $y=f(x)$, en la cual damos á x el valor a, y supongamos que para este valor de x, y recibe el valor b; de modo que se tendrá $b=f(a)$.

Dando ahora al valor a un cierto incremento h, el valor b recibirá otro incremento k, el cual podrá ser positivo ó negativo, y se determinará por la relacion

$$b+k=f(a+h).$$

Esto supuesto, segun lo que de la continuidad de las funciones llevamos dicho, esta funcion será contínua, si el incremento k se hace infinitamente pequeño al mismo tiempo que h tiende hácia cero.

Cuando decimos una cantidad *infinitamente pequeña*, no queremos decir una cantidad pequeñísima, determinada de valor y medible por consiguiente, sino un infinitamente pequeño, tal como lo hemos considerado anteriormente.

Modo de representar las funciones geométricamente.

51. Si se tiene una funcion $y=f(x)$, y se quiere representar de una manera sensible la relacion que existe entre x é y, más bien que dar valores particulares á x y hallar los correspondientes de y, é ir anotando en forma de tablas estos valores y observar la relacion que entre ellos hay, con-

viene tomar dos rectas XX' y OY (*Figura* 1.ª), que se corten perpendicularmente en un punto O, á partir del cual se cuenten en la línea XX', llamada *eje de abscisas*, magnitudes que representen los valores de x, las cuales serán contadas de izquierda á derecha si estos valores son positivos, y de derecha á izquierda si son negativos.

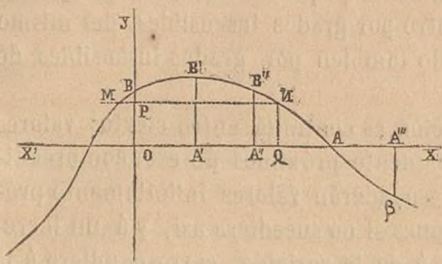

Figura 1.ª

Sobre la línea OY, llamada *eje de ordenadas*, ó más bien sobre perpendiculares á la línea XX', tiradas por los extremos de las magnitudes que representan los valores de x, se toman porciones iguales á los valores correspondientes de y, los cuales se contarán por encima del eje de abscisas XX' si son positivos, y por debajo si fuesen negativos. Los extremos de estas perpendiculares, llamadas *ordenadas*, unidos por trozos de recta, formarán una línea quebrada de un número de lados tanto mayor, cuanto mayor sea el número de valores que hayamos dado á x; y cada uno de estos lados será tanto menor, cuanto menor sea la diferencia que haya entre uno cualquiera de estos valores y el siguiente. De modo, que si la funcion es contínua, y suponemos que x recibe valores segun la ley de continuidad, y variará del mismo modo, y las extremidades de las ordenadas formarán una curva que será el lugar geométrico representado por la funcion propuesta $y=f(x)$, el cual nos marcará de un modo sensible la manera de que varía la funcion, segun las variaciones que sufre la variable de que depende.

52. Para construir de un modo aproximado el lugar geométrico representado por la funcion $y=f(x)$, se toma, á partir del orígen O, una distancia O A' igual á un cierto valor positivo de x; en el punto A' se levanta una perpendicular, y en ella se toma una longitud que represente el valor correspondiente de $y=f(\text{O A}')$, el cual se tomará por encima ó debajo del eje XX', segun que dicho valor de y sea positivo ó negativo, y de este modo se hallará un punto B' del lugar que se busca; el cual está determinado por las distancias O A' y A' B', cuyos valores numéricos forman una solucion de la ecuacion $y=f(x)$, y que se llaman las *coordenadas* de dicho punto, de modo que se tendrá $\text{A}'\,\text{B}'=f(\text{O A}')$. De la misma manera hallaremos todos los puntos que queramos del lugar geométrico.

El punto en que el lugar geométrico corta al eje de ordenadas O Y, corresponde al valor de $x=0$, de modo que se tendrá $\text{O B}=f(0)$; de la misma manera, el punto en que el lugar geométrico corta al eje de abscisas XX', corresponde al valor cero de la funcion; de modo que se tendrá $f(\text{A O})=0$.

Una vez hallados de este modo tantos puntos como queramos, los uniremos por un trazo contínuo, y se tendrá de un modo aproximado la curva que expresa el lugar geométrico representado por la funcion propuesta.

53. Por medio de la representacion geométrica de las funciones, no sólo podemos formarnos una idea clara de la relacion que existe entre la funcion y la variable de que depende, sino que puede servir para hacer tangibles, por decirlo así, ciertas verdades que se demuestran analíticamente, ó sea por medio del cálculo, como tendremos ocasion de ver en el curso de esta obra.

Desde luégo se ve inmediatamente, que una funcion contínua y entera $y=f(x)$ no puede pasar de un valor positivo á otro negativo, sin pasar por cero; ó lo que es lo mismo, si una funcion entera y contínua, para un cierto valor a de la variable, recibe un valor positivo b, y para otro valor a' de la misma variable, la funcion tiene un valor negativo $-b'$, y además es contínua entre estos dos límites, tiene necesariamente que pasar la variable x por un cierto valor a'', que reduzca á cero á dicha funcion. En efecto, si para el valor $x=a=$O A$''$, la funcion toma un valor $y=b=$A$''$ B$''$, y para otro valor $x=a'=$O A$'''$, la funcion recibe el valor negativo $y=-b'=-$A$'''$ β, necesariamente, siendo la funcion contínua y entera entre estos dos límites b y $-b'$, estará representada por una curva contínua B$''$ A β, la cual cortará al eje XX$'$ en el intervalo A$''$ A$'''$, tal como en un punto A, que corresponderá á un cierto valor O A de la variable x; y como para este valor la ordenada, ó sea la funcion, es cero, se sigue que por lo ménos hay un valor de x comprendido entre a y a', que anula la funcion; y en general podrá haber un número impar, pues la curva, para pasar de una á otra region del plano con relacion al eje XX$'$, tiene que cortar á dicho eje por lo ménos una vez, y en general un número impar.

Es necesario suponer que la funcion es contínua y además entera, para poder asegurar que, al pasar de positiva á negativa ó viceversa, tiene que pasar por cero necesariamente; pues de lo contrario, podria pasar del uno al otro sentido sin pasar por cero, y sí por infinito.

54. Por medio de la representacion geométrica de las funciones, podremos tambien tener valores aproximados de estas, correspondientes á ciertos valores de la variable, y al contrario. En efecto, supongamos construido exacta ó aproximadamente el lugar geométrico correspondiente á una funcion $y=f(x)$, y supongamos que se trata de hallar el valor aproximado de esta funcion correspondiente á un cierto valor de la variable $x=a$. Si a es un número positivo, se tomará á la derecha del orígen O una distancia O A$'$ igual á a; en el punto A$'$ levantaremos una perpendicular hasta que corte á la curva en un punto B$'$; se medirá la distancia A$'$ B$'$, y su valor será el de la funcion propuesta, el cual será positivo ó negativo, segun que la perpendicular corte á la curva por encima ó por debajo del eje XX$'$.

Si a fuese un número negativo, se haria lo mismo tomando la distancia á la izquierda del orígen.

Por último, si la perpendicular cortase á la curva en más de un punto, seria señal que al valor de $x=a$, correspondian para la funcion tantos valores como puntos de interseccion tuviesen la perpendicular y la curva.

Si queremos saber el valor de x correspondiente á un cierto valor de la funcion, se tomará en el eje O Y una distancia O P igual al valor de la funcion, por encima ó por debajo de X′ X, segun que dicho valor sea positivo ó negativo; por el punto P tiraremos la paralela M N al eje X′ X, y desde los puntos N M en que corta á la curva, bajaremos las ordenadas N Q, M Q′ y las distancias O Q, O Q′ del orígen á los piés de estas ordenadas, serán los valores de la variable x. Así veremos inmediatamente, que las abscisas de los puntos en que la curva corta al eje X′ X, son los valores de x que anulan á la funcion; y las ordenadas que corresponden á los puntos en que la curva corta al eje O Y, expresan los valores de la funcion correspondientes al valor particular de $x=0$.

LECCION VI.

Límites de las funciones.—Derivadas de diferentes órdenes.

Límites de las funciones.

55. Se ha dicho en aritmética, que *límite* de una cantidad variable es la cantidad fija á la cual se va aproximando la primera cuanto se quiera, sin que jamás llegue á ser igual á ella; de modo, que pudiendo ser la diferencia que hay entre ambas cantidades tan pequeña como queramos, podremos decir que en el límite son iguales.

Tambien allí hemos visto que una cantidad no puede tender á la vez hácia dos límites distintos; y que si dos cantidades variables son constantemente iguales, cualquiera que sea el estado de magnitud en que se les considere, si una de ellas tiende hácia un cierto límite, la otra tambien tenderá hácia el mismo límite; porque de lo contrario dejarian de ser iguales cuando fueran aproximándose á sus límites, lo cual es contra la hipótesis.

Esto supuesto, si tenemos una ecuacion

$$f(x, y, z, \ldots)=F(x, y, z, \ldots) \qquad [1],$$

cuyos dos miembros son funciones contínuas de las variables $x, y, z,\ldots$ las cuales pueden ser dependientes ó independientes las unas de las otras, y suponemos que dichas variables tienden simultáneamente hácia los límites respectivos α, β, γ, etc., las funciones $f(x, y, z,\ldots)$ y $F(x, y, z,\ldots)$ que forman los dos miembros de la ecuacion, tenderán á valer $f(\alpha, \beta, \gamma,\ldots)$ y $F(\alpha, \beta, \gamma,\ldots)$; y como se supone que estas funciones son contínuas y además que están ligadas constantemente por la ecuacion [1], cualquiera que sea el estado de magnitud en que se las considere, se sigue que en el límite tambien se verificará esta relacion, y se tendrá

$$f(\alpha, \beta, \gamma,\ldots) = F(\alpha, \beta, \gamma,\ldots);$$

lo cual prueba, que la misma relacion que hay entre las cantidades variables, cualquiera que sea el estado de magnitud en que se las considere, existe tambien entre los límites de estas variables; y por tanto, para hallar la relacion que existe entre los límites de cantidades variables, conociendo la que hay entre estas variables, no tenemos más que reemplazarlas por sus límites en la relacion que entre ellas existe, y de esté modo se hallará la relacion pedida.

Cuando se quiere hallar la relacion que existe entre ciertas cantidades y no se puede hallar directamente por medio de las cantidades que se dan, se eligen otras cantidades variables que tengan con las primeras una relacion cualquiera, y que variando segun ciertas leyes, puedan tener por límites respectivos las mismas cantidades propuestas; entónces se ve cuál es la relacion que constantemente se verifica entre las cantidades variables, y sustituyendo en ella estas por sus límites, tendremos la relacion pedida. Es evidente que de la buena eleccion que se haga de las variables, dependerá que la relacion se halle con más ó ménos facilidad en cada uno de los casos que se puedan presentar.

De la teoría de los límites deduciremos algunos teoremas que en lo sucesivo hemos de necesitar, como son los siguientes:

36. *El límite de la suma de un número finito de cantidades variables, es igual á la suma de los límites de estas cantidades.*

Sea A, B, C,... L un número finito m de cantidades variables, que simultáneamente tienden hácia los límites respectivos a, b, c,... l. Llamemos α, β, γ,... λ las diferencias que hay entre las cantidades variables, y sus límites, cuyas diferencias podrán aproximarse á valer cero cuanto queramos, y tendremos

$$A = a + \alpha$$
$$B = b + \beta$$
$$C = c + \gamma$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$L = l + \lambda.$$

Sumando estas igualdades, y haciendo $S = A + B + C + \ldots + L$, y $s = a + b + c + \ldots + l$, se tendrá $S = s + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda)$.

Si ahora representamos por Δ la mayor en valor absoluto de las diferencias α, β, γ,... su suma será evidentemente menor que $\Delta + \Delta + \Delta + \ldots = m\Delta$. Ahora bien, el factor m es una cantidad finita, y el otro factor Δ es un número que puede ser menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea; luego el producto $m\Delta$ podrá aproximarse á valer cero cuanto queramos, y con más razon la suma $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda$; por tanto, la suma S de las cantidades variables tiene por límite la suma s de los límites de estas variables, segun queríamos demostrar.

57. *El límite del producto de un número finito de factores variables, es igual al producto de sus límites.*

Sea, como ántes, A, B, C,... L, un número finito m de factores variables; a, b, c,... l, sus límites; y α, β, γ,... λ las diferencias que hay entre cada variable y su límite; tendremos

$$A - a = \alpha$$
$$B - b = \beta$$
$$C - c = \gamma$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$L - l = \lambda$$

Multiplicando la primera igualdad por el producto BC...L, la segunda por aC...L, la tercera por abD...L, etc., y la última por $abc...k$, se tendrá

$$ABC\ldots L - aBC\ldots L = \alpha BC\ldots L$$
$$aBC\ldots L - abC\ldots L = \beta aC\ldots L$$
$$abC\ldots L - abcD\ldots L = \gamma abD\ldots L$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$abc\ldots kL - abc\ldots kl = \lambda abc\ldots k.$$

Sumando y observando que el sustraendo de cada diferencia en los primeros miembros se destruye con el minuendo de la igualdad siguiente, tendremos

$$ABC...L-abc...l=\alpha BC...L+\beta aC...L+...+\lambda abc...k.$$

Siendo finito el número de factores de que el producto se compone, los productos parciales $BC...L$, $aC...L$,... $abc...k$, son cantidades finitas, que multiplicadas respectivamente por los factores α, β, γ,...λ, que tienden á ser cero á medida que las cantidades variables tienden á sus límites, darán un número finito de cantidades $\alpha BC...L$, $\beta aC...L$, etc., que podrán aproximarse á cero cuanto queramos; y por tanto, la suma expresada por el segundo miembro de la igualdad anterior, podrá representarse por una cantidad s, la cual podrá aproximarse á cero cuanto se quiera, en cuyo caso dicha igualdad se convertirá en esta otra:

$$ABC...L-abc...l=s, \quad ó \quad ABC...L=abc...l+s;$$

y como la suma s puede llegar á ser tan pequeña como queramos, se sigue que el límite del producto $ABC...L$, es el producto de los límites $abc,..l$.

58. *El límite de un cociente, es igual al cociente de los límites.*

En efecto, sean A y B dos cantidades variables, a y b sus límites, y Q el cociente de A y B; de modo que se tendrá $Q=\frac{A}{B}$, ó $Q\times B=A$; pero el límite deun producto, es igual al producto de los límites, luego tendremos lím. $Q\times$lím. B$=$lím. A, ó lím. $Q\times b=a$; de donde lím. $Q=\frac{a}{b}$, segun queriamos demostrar.

Observacion. Para que los principios 56 y 57 sean ciertos, es necesario tener muy presente la condicion de que el número de cantidades variables cuya suma ó producto se va á determinar, sea *finito*; porque sin esta condicion, dichos teoremas ó principios dejan de ser ciertos. En efecto, ambos están fundados en que la suma de un cierto número de cantidades variables que tienen cero por límite, tiene tambien por límite cero, lo cual no se verificaria si el número de sumandos fuese infinito, aunque cada sumando sea tan pequeño como se quiera; así, dividiendo un número a en un cierto número de partes m tan grande como se quiera, en cuyo caso una de estas partes $\frac{a}{m}$ será tan pequeña como queramos, se tendrá que

m de estas partes, cualquiera que sea el valor de m, compondrán siempre una suma finita a, la cual podrá ser tan grande como se quiera.

Un ejemplo de lo que acabamos de decir es el producto de m factores iguales á $1+\frac{1}{m}$, representado por la potencia $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, en el cual no se verifica que el límite del producto sea el producto de los límites, cuando m tiende hácia infinito. En efecto, si así fuera, el límite del producto seria 1, igual al producto de los límites de los factores, que se reducen á 1 cuando $m=\infty$: y como vamos á demostrar, dicho producto no es la unidad, sino el número e, del cual ya hemos hecho mencion en el primer tomo de esta obra.

59. *El límite de la potencia* $\left(1+\frac{1}{\mathrm{m}}\right)^{\mathrm{m}}$ *cuando* m *tiende hácia infinito, es la cantidad* $\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots$

Supongamos, en primer lugar, que m sea un número entero y positivo. Segun la fórmula del binómio, se tendrá

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+m\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{2}\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\frac{1}{m^3}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{2.3\ldots n}\frac{1}{m^n}+\ldots$$

ó dividiendo los dos términos de cada fraccion por la potencia de m que contiene el denominador, para lo cual dividiremos por m cada factor del numerador, hallaremos

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{2.3}+$$
$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{2.3.4}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{2.3\ldots n}+\ldots$$

Si comparamos este desarrollo con la expresion

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{2.3\ldots n}+\ldots$$

se verá que á excepcion de los dos primeros términos, que en ambas expresiones son iguales, todos los demás de la primera son respectivamente menores que los de la segunda; pues teniendo todos un mismo denominador, los numeradores son más pequeños; además, en el primer desarrollo el número m de términos es finito, mientras que en el segundo no; por consiguiente, la suma de los términos de dicho primer desarrollo es, cualquiera que sea el valor positivo y entero de m, menor que la suma de los términos de la segunda expresion; y por tanto, se deberá tener

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e \qquad [1].$$

Ahora bien, aumentando m, la expresion $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ aumenta tambien; porque no sólo aumenta el número de términos del desarrollo, aumentando m, sino que tambien los factores $\left(1-\frac{1}{m}\right)$, $\left(1-\frac{2}{m}\right)$,... que forman los numeradores de estos términos, van creciendo; luego si el valor de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ crece cuando crece m, y siempre es menor que el número e, segun la igualdad [1], es claro que tiende hácia un límite que no puede ser mayor que e. Probemos que este límite es el mismo número e, para lo cual haremos ver que la diferencia entre $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ y e puede ser tan pequeña como queramos, á medida que m vaya siendo tan grande como se quiera.

Tomemos en ambas expresiones un número n finito de términos á partir del orígen, y representemos su suma por S y E, de modo que tendremos

$$S=1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{2.3}+\ldots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{m}\right)}{2.3\ldots(n-1)}$$

$$E=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{2.3\ldots(n-1)}.$$

A medida que n aumenta, E aumenta tambien; de modo que podremos dar á n un valor fijo tal, que haga que la diferencia entre E y e sea tan pequeña como queramos, y por tanto menor que una cierta cantidad $\frac{\alpha}{2}$; sea p este valor de n.

Esto supuesto, demos á m valores mayores que p y que cada vez vayan aumentando más, permaneciendo fijo el valor p; la suma S irá aumentando tambien, á medida que m aumente; y como consta de un número finito de términos, que en este caso es el valor p de n, el límite de esta suma será (56) la suma de los límites de los sumandos. El numerador de un término cualquiera, siendo el producto de un número finito de factores variables, que á lo más es $p-2$, de los cuales cada uno tiene por límite la unidad, tendrá por límite (57) el producto de los límites de estos factores, ó lo que es igual, la unidad. De donde se deduce, que cuando m aumenta indefinidamente, la suma S tiende á valer el límite E; y por tanto, podremos dar á m un valor tal, que haga que la diferencia entre S y E sea menor que $\frac{\alpha}{2}$ y tendremos las dos desigualdades $e-\mathrm{E}<\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{E}-\mathrm{S}<\frac{\alpha}{2}$, que sumadas dan $e-\mathrm{S}<\alpha$.

Pero la cantidad $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ es menor que e y mayor que S; luego con más razon se verificará $e-\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\alpha$.

Pudiendo ser la diferencia entre e y $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ menor que la cantidad α, para valores de m que van creciendo indefinidamente, y pudiendo ser α tan pequeña como queramos, es claro que el límite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, cuando m crece indefinidamente, es el número e.

Si m es un número fraccionario y positivo tan grande como se quiera, podremos hallar dos números enteros consecutivos n y $n+1$ que comprendan á m, y tendremos evidentemente

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}},$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Si m crece indefinidamente, n crece tambien del mismo modo; luego los límites de $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ y de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ serán, segun el caso anterior, el número e; y como el límite de $1+\frac{1}{n+1}$, lo mismo que el de $1+\frac{1}{n}$, es la unidad, se tendrá que el límite de la expresion $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$, lo mismo que el de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times\left(1+\frac{1}{n}\right)$, es el número e (57); pero la potencia $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ se halla siempre comprendida entre estas dos expresiones, puesto que es mayor que una y menor que otra; luego si estas dos expresiones tienen un mismo límite e, la cantidad $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ comprendida entre las dos, tendrá tambien por límite el mismo número e.

Sea, por último, m un número negativo, pero infinitamente grande en valor numérico, y se tendrá, poniendo el signo — de manifiesto en la expresion cuyo límite buscamos,

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^m=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m=$$
$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\times\left(1+\frac{1}{m-1}\right).$$

Creciendo m indefinidamente la expresion $\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$ tiene por límite el número e, y $1+\frac{1}{m-1}$ tiene por límite la unidad; luego límite de $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=e\times1=e$.

60. Si consideramos la expresion $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, en la cual α puede ser un número tan pequeño como se quiera, se tendrá tambien que

lím. $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$

En efecto, si hacemos $\alpha=\frac{1}{n}$, α será infinitamente pequeña, siendo n infinitamente grande, y recíprocamente; luego si ponemos en la expresion anterior, en vez de α, su igual $\frac{1}{n}$, y hallamos el límite cuando n crece indefinidamente, tendremos

$$\text{lím. } (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\text{lím. }\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,$$

que es lo que se queria demostrar.

61. *El límite de la expresion* $\frac{(1+\mathrm{h})^{\mathrm{m}}-1}{\mathrm{h}}$, *cuando* $\mathrm{h}=0$, *es el número* m.

En efecto, sea, en primer lugar, m un número entero y positivo, y se tendrá, aumentando y disminuyendo una unidad al denominador,

$$\text{lím. }\frac{(1+h)^{m}-1}{h}=\text{lím. }\frac{(1+h)^{m}-1}{(1+h)-1};$$

pero

$$\text{lím. }\frac{1(+h^{m})-1}{(1+h)-1}=\text{lím. }[(1+h)^{m-1}+(1+h)^{m-2}+\ldots+1]=1+1+1+\ldots=m;$$

luego
$$\text{lím. }\frac{(1+h)^{m}-1}{h}=m.$$

Si m es un número fraccionario $\frac{p}{q}$ positivo, se tendrá la expresion cuyo límite queremos hallar $\frac{(1+h)^{\frac{p}{q}}-1}{h}$.

Hagamos $(1+h)^{\frac{1}{q}}=1+\alpha$; de donde $1+h=(1+\alpha)^{q}$, ó $h=(1+\alpha)^{q}-1$, y tendremos

$$\text{lím.}\frac{(1+h)^{\frac{p}{q}}-1}{h}=\text{lím.}\frac{(1+\alpha)^p-1}{(1+\alpha)^q-1}=\text{lím.}\frac{\frac{(1+\alpha)^p-1}{\alpha}}{\frac{(1+\alpha)^q-1}{\alpha}};$$

pero el límite de un cociente es el cociente de los límites (58), y el límite del dividendo es en este caso p y el del divisor q; luego se tendrá

$$\text{lím.}\frac{(1+h)^{\frac{p}{q}}-1}{h}=\text{lím.}\frac{\frac{(1+\alpha)^p-1}{\alpha}}{\frac{(1+\alpha)^q-1}{\alpha}}=\frac{p}{q},$$

segun queriamos demostrar.

Si m fuera un número inconmensurable, se sustituiria por números conmensurables que cada vez se le aproximasen más; y en todos los estados de magnitud en que se les considerase, se verificaria que $\text{lím.}\frac{(1+h)^{m'}-1}{h}=m'$, siendo m' uno de estos números conmensurables; luego en el límite tambien se verificaria.

Si m fuese una cantidad negativa cualquiera, se hallaria que

$$\text{lím.}\frac{(1+h)^{-m}-1}{h}=\text{lím.}\frac{\frac{1}{(1+h)^m}-1}{h}=\text{lím.}-\frac{(1+h)^m-1}{h(1+h)^m}=$$
$$\text{lím.}\left(-\frac{1}{(1+h)^m}\times\frac{(1+h)^m-1}{h}\right).$$

El límite de $-\frac{1}{(1+h)^m}=-1$, y el de $\frac{(1+h)^m-1}{h}=m$; luego $\text{lím.}\frac{(1+h)^{-m}-1}{h}=-1\times m=-m$, que es lo que se queria demostrar; luego cualquiera que sea m, se tiene que el límite de $\frac{(1+h)^m-1}{h}$, siendo $h=0$, es el exponente m.

Derivadas de diferentes órdenes.

62. Sea una funcion $y=f(x)$. Supongamos que á la variable x se le dá un cierto incremento h, y que á este incremento corres-

ponde á la funcion el incremento k; de modo que se tendrá

$$y+k=f(x+h),$$

de donde se deducirá

$$k=f(x+h)-y=f(x+h)-f(x);$$

y dividiendo los dos miembros por h, se tiene

$$\frac{k}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si ahora suponemos que el incremento h tiende á valer cero, la relacion $\frac{k}{h}$ tenderá á un cierto límite, que es la derivada de la funcion $y=f(x)$. Así diremos, que *la derivada de una funcion es el límite de la razon que hay entre el incremento de la funcion y el incremento de la variable, á medida que este tiende hácia cero.*

63. Aunque el límite de la razon que hay entre los incrementos de la variable y funcion, ó sea la derivada, viene á primera vista bajo la forma indeterminada, como se vé por la expresion $\frac{k}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, en la cual haciendo $h=0$ se tiene límite $\frac{k}{h}=\frac{f(x)-f(x)}{0}=\frac{0}{0}$ se puede demostrar, sin embargo, que si la funcion es contínua, *este límite no es indeterminado, sino que tiene un cierto valor determinado, el cual depende de la naturaleza de la funcion que se considera.*

Sea, en primer lugar, una cierta funcion racional y entera

$$y=f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A_m \qquad [1],$$

en la cual los coeficientes A_0, A_1, A_2,... son constantes, y los exponentes m, $m-1$, $m-2$,... son enteros y positivos; x representa una variable cualquiera.

Si ponemos $x+h$ en vez de x, la igualdad [1] se convertirá, representando por k el incremento de la funcion y, correspondiente al incremento h de la variable, en

$$y+k=f(x+h)=A_0(x+h)^m+A_1(x+h)^{m-1}+A\,(x+h)^{m-2}+\ldots$$
$$+A_{m-1}(x+h)+A_m.$$

Desarrollando por la fórmula del binómio cada una de las potencias indicadas en el último miembro, y ordenando con relacion á h, se tendrá

$$y+k=f(x+h)=$$

$$\begin{array}{ll|l|l}
A_0x^m & +mA_0x^{m-1} & h \quad +m(m-1)A_0x^{m-2} & h^2 \\
+A_1x^{m-1} & +(m-1)A_1x^{m-2} & +(m-1)(m-2)A_1x^{m-3} & \overline{2} +\ldots+A_0h^m. \\
+A_2x^{m-2} & +(m-2)A_2x^{m-3} & +(m-2)(m-3)A_2x^{m-4} & \\
+\vdots & +\vdots & +\vdots & \\
+A_{m-1}x & +A_{m-1} & & \\
+A_m & & &
\end{array}$$

En este desarrollo se observa, que la primera columna vertical es la misma funcion propuesta; que el coeficiente de la primera potencia de h es un polinómio del grado $m-1$ con relacion á x, el cual se puede representar por $f'(x)$, y se deriva de $f(x)$, *multiplicando cada término por el exponente de* x, *y disminuyendo una unidad á este exponente*; que el coeficiente de $\frac{h^2}{2}$ es otro polinómio del grado $m-2$, que se deriva de $f'(x)$, segun la regla anterior, y que podremos representar por $f''(x)$; que el coeficiente de la potencia que sigue seria otro polinómio $f'''(x)$, que se formaria de $f''(x)$, del mismo modo que este se forma de $f'(x)$, y así de todos los demás; el último se formaria segun la misma ley, pero nosotros lo hemos puesto simplificado de los factores comunes al coeficiente y al denominador de h^m; de modo, que haciendo uso de esta notacion, el desarrollo anterior se convertirá en

$$y+k=f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+f'''(x)\frac{h^3}{2.3}+\ldots$$
$$+f^{(m)}(x)\frac{h^m}{2.3\ldots m} \qquad [2]$$

de donde deduciremos

$$k=f(x+h)-f(x)=f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+f'''(x)\frac{h^3}{2.3}+\ldots$$
$$+f^{(m)}(x)\frac{h^m}{2.3\ldots m};$$

dividiendo por h y haciendo en seguida $h=0$, se halla

$$\lim.\frac{k}{h}=f'(x);$$

pues todos los términos del desarrollo, á excepcion del primero, tienden á valer cero á medida que h decrece indefinidamente, por formarse de los factores respectivos $f''(x)$, $f'''(x)$,... que para valores finitos de x son cantidades finitas, por ser, segun su formacion, funciones racionales y enteras de x y de los otros factores $\frac{h}{2}, \frac{h^2}{2.3}, \ldots$ los cuales se reducen á cero con h; y por tanto, la suma de todas estas cantidades en número finito, que tienen por límite cero, será (56) tambien cero.

Donde vemos, que en una funcion racional y entera de x, el límite de la relacion $\frac{k}{h}$, cuando h decrece indefinidamente, no es indeterminada como parecia, sino que es una cierta funcion de x, la cual hemos representado por $f'(x)$, y hemos llamado la *funcion derivada*, ó simplemente la *derivada* de la funcion propuesta.

Formándose el coeficiente de $\frac{h^2}{2}$ de la derivada $f'(x)$, del mismo modo que este se forma de la funcion propuesta, concluiremos que el coeficiente de $\frac{h^2}{2}$ es la derivada de la derivada de la funcion, ó sea la *derivada segunda* de esta funcion, del mismo modo que el coeficiente que sigue, es la *derivada tercera* ó de tercer órden de la funcion propuesta, y así de los demás.

64. Segun esto podremos decir, que la derivada de una funcion racional y entera de una variable, es el coeficiente de la primera potencia de h en el desarrollo que se obtiene poniendo $x+h$ en vez de x en la funcion propuesta, y que esta derivada se halla *multiplicando cada término del polinómio propuesto por el exponente de x, y disminuyendo este exponente en una unidad.*

65. La igualdad [2], que manifiesta el modo de obtener el desarrollo de una funcion racional y entera de x, reemplazando esta variable por $x+h$ segun la ley de las derivadas sucesivas de dicha funcion, se conoce con el nombre de LEY DE TAYLOR Ó FÓRMULA DE TAYLOR.

66 De lo dicho anteriormente se deduce, que las derivadas de la funcion racional y entera $y=f(x)=3x^4-5x^3+6x-4$, son, representándolas por y', y'', y''', ó por $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)\ldots$

$$y'=f'(x)=12x^3-15x^2+6,\ y''=f''(x)=36x^2-30x,$$
$$y'''=f'''(x)=72x-30,\ y^{\text{IV}}=f^{\text{IV}}(x)=72.$$

67. Para demostrar de un modo general que en una funcion contínua

la razon de los incrementos h *y* k *tienden hácia una cantidad determinada, á medida que* h *tiende hácia cero*, consideraremos una funcion contínua cualquiera $y=f(x)$, la cual podremos suponer está representada por una cierta curva M N B (*fig.* 2.ª) Tomando en el eje O X una distancia O P igual á un valor cualquiera de x, y levantando en el punto P la perpendicular P M, esta representará el valor correspondiente de la funcion y, de modo que se tendrá P M$=f$(O P).

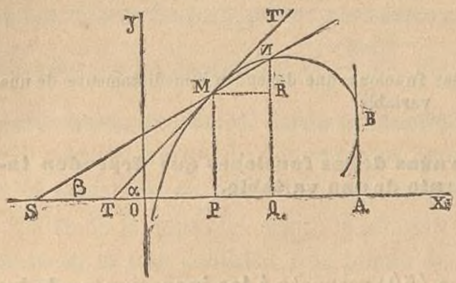

Fig. 2.ª

Si ahora damos á x un cierto incremento P Q$=$M R $=h$, la funcion y recibirá otro cierto incremento NQ—MP $=$NR$=k$. Tirando la secante N M S, resultará un triángulo rectángulo M R N, en el cual se verifica que la relacion $\frac{k}{h}$ de los incrementos h y k, que son los catetos de dicho triángulo, es igual á la tangente del ángulo N M R$=$N S X, que forma la secante con el eje O X, el cual hemos representado en la figura por β.

Supongamos ahora que el incremento h disminuye y va aproximándose á cero cuanto se quiera; el punto N se irá aproximando al punto M; el incremento k irá disminuyendo tambien indefinidamente, y la secante S N, girando alrededor del punto M, tenderá á tomar la posicion de la tangente T M T', cuya posicion tendrá cuando $h=$M R$=$P Q$=0$; esto supuesto, cualesquiera que sean las magnitudes de h y de k, la relacion $\frac{k}{h}$ es siempre igual á la tangente del ángulo β; pero el ángulo β tiende á valer el ángulo α que la tangente á la curva en el punto M, forma con el eje O X, á medida que h tiende hácia cero; luego la relacion $\frac{k}{h}$ tiende hácia el límite tg α, cuando h tiende á valer cero, y se tendrá por consiguiente

$$\frac{k}{h}=\frac{\text{N R}}{\text{M R}}=\text{tg}\,\beta,\ \text{y lím.}\,\frac{k}{h}=\text{tg}\,\alpha.$$

LECCION VII.

Teoremas relativos á las derivadas de las funciones que dependen inmediatamente de una variable.

Teoremas relativos á las derivadas de las funciones que dependen inmediatamente de una variable.

68. Segun lo expuesto ya (50) respecto á los incrementos de las funciones y variables, convendremos en representar por Δx un incremento cualquiera de la variable x, cuyo carácter especial es el ser una cantidad tan pequeña como se quiera, pero finita y fija; por dx se representará del mismo modo un incremento infinitamente pequeño de la variable x, cuyo carácter especial es el ser variable y poder llegar á ser menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea. La ventaja de introducir estas cantidades, llamadas *diferenciales*, en el cálculo, es la de obtener relaciones más sencillas que las que se obtendrian sin el auxilio de ellas.

69. *Si la variable de una funcion racional y entera varía de un modo contínuo, la funcion variará del mismo modo*; ó lo que es lo mismo, *las funciones racionales y enteras de una variable, son funciones contínuas.*

Sea una funcion racional y entera $y=f(x)$; si damos á x un cierto incremento Δx, se hallará por la fórmula de Taylor, llamando Δy al incremento correspondiente de la funcion,

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\,\Delta x+f''(x)\,\frac{(\Delta x)^2}{2}+\ldots$$
$$+f^{(m)}(x)\,\frac{(\Delta x)^m}{2.3\ldots m},$$

de donde se deduce el valor del incremento de la funcion

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+f''(x)\,\frac{(\Delta x)^2}{2}+\ldots$$
$$+f^{(m)}(x)\,\frac{(\Delta x)^m}{2.3\ldots m}.$$

El segundo miembro de esta igualdad está compuesto de un número finito de términos que tienden hácia cero, á medida que Δx se aproxima tambien á cero; puesto que los factores $f'(x)$, $f''(x)$, etc., son polinómios enteros de x; y por tanto, á valores finitos de x, corresponden valores finitos tambien para estos polinómios; los cuales, multiplicados por las cantidades $\Delta x, \frac{(\Delta x)^2}{2}$, etc., que pueden aproximarse á cero cuanto queramos, darán productos que tendrán por límite cero; y como el límite de una suma es igual á la suma de los límites de los sumandos cuando éstos son en número finito (56), se sigue que el límite de la suma del segundo miembro es cero; luego el incremento Δy es una cantidad que puede decrecer cuanto se quiera, decreciendo convenientemente Δx; luego la funcion racional y entera $y = f(x)$ es contínua, segun queríamos demostrar.

70. *Si la derivada de una funcion permanece finita en el intervalo de dos valores de la variable, la funcion es contínua entre los mismos límites.*

En efecto, cuando Δx tiende á valer cero, Δy tiene tambien por límite cero; porque si no, la relacion $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuyo límite es la derivada, no seria una cantidad finita, como se supone, si al aproximarse Δx á cero cuanto quisiéramos, Δy no se aproximase tambien indefinidamente á cero, y sí á una cierta cantidad finita, porque entónces dicha relacion seria infinita.

La recíproca no es cierta; es decir, que una funcion puede ser contínua entre ciertos límites de la variable, sin ser finita la derivada para valores de x comprendidos entre dichos límites. Por consiguiente, no es condicion necesaria que la derivada de una funcion sea finita entre ciertos límites de la variable, para que la funcion sea contínua; puede serlo siendo dicha derivada infinita, pero dejaria de serlo si al hacerse infinita la derivada, la funcion tomase tambien un valor infinito para el mismo valor de x. *

---

* Así sucede en la fig. 2.ª; en el intervalo próximo al punto B, la derivada se llega á hacer infinita; y sin embargo la curva, ó lo que es igual la funcion, no deja de ser contínua en ese intervalo. Por consiguiente, la derivada puede ser infinita siendo la funcion contínua; pero si suponemos que la funcion se hace infinita al mismo tiempo que la derivada, en ese caso la funcion deja de ser contínua.

71. *El incremento de una funcion es igual al incremento de la variable multiplicado por la derivada, aumentada de una cierta cantidad que se reduce á cero al mismo tiempo que este incremento.*

En efecto, siendo la derivada de una funcion el valor particular que tiene la relacion $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx se hace cero, es evidente que no siendo Δx igual á cero, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tampoco será igual á la derivada; entre ambas expresiones habrá una cierta diferencia ε, la cual podrá ser tan pequeña como se quiera, á medida que Δx se vaya aproximando indefinidamente á cero. Así, se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon, \text{ ó } \Delta y = \Delta x[f'(x) + \varepsilon].$$

Si en esta igualdad suponemos que Δx, en vez de un valor finito como ahora representa, pasa á representar un infinitamente pequeño tal como lo hemos definido (50), y teniendo presente que cuando Δx llega á su límite ε es igual á cero, se tendrá, haciendo uso de la notacion convenida,

$$\text{lím.} \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

72. *Una funcion es creciente ó decreciente aumentando* x, *segun que la derivada sea positiva ó negativa.*

En efecto, de la igualdad anterior $\Delta y = \Delta x[f'(x) + \varepsilon]$, se deduce que pudiendo ser ε tan poco diferente de cero como se quiera, la cantidad que hay dentro del paréntesis llegará á tener el mismo signo que $f'(x)$; y al multiplicar esta cantidad por el incremento positivo Δx, el resultado tendrá el mismo signo que $f'(x)$; luego Δy será positiva ó negativa, ó lo que es lo mismo, la funcion será creciente ó decreciente, segun que la derivada $f'(x)$ sea positiva ó negativa, como queriamos demostrar.

La recíproca es evidente.

73. *Si la derivada de una funcion es constantemente nula, esta funcion es constante.*

Sea una funcion $y = f(x)$, cuya derivada $f'(x)$ es constantemente nula; si damos á x un cierto incremento h, tendremos (71) la igualdad $f(x+h) - f(x = h[f'(x) + \varepsilon]$, siendo ε una cantidad que se reduce á cero al mismo tiempo que h.

Por hipótesis tenemos siempre $f'(x)=0$; luego la relacion anterior se convierte en $f(x+h)-f(x)=h\varepsilon$.

Consideremos dos valores cualesquiera x_0 y x_1 de la variable x, de los cuales x_1, supondremos ser mayor que x_0; dividamos el intervalo ó diferencia x_1-x_0 en un número n de partes iguales, y llamando h á cada una de estas partes, se tendrá, cualquiera que sea el valor de n,

$$x_1-x_0=nh.$$

Si ahora representamos por ε_0, ε_1, ε_2,... los valores que toma ε cuando x recibe los valores x_0, x_0+h, x_0+2h,... tendremos

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0)=h\varepsilon_0,\\
&f(x_0+2h)-f(x_0+h)=h\varepsilon_1,\\
&f(x_0+3h)-f(x_0+2h)=h\varepsilon_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f(x_1)-f[x_0+(n-1)h]=h\varepsilon_{n-1}.
\end{aligned}$$

Sumando estas igualdades y haciendo la reduccion y destruccion, se hallará

$$f(x_1)-f(x_0)=h(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{n-1}).$$

Esto supuesto, si representamos por ε_m la mayor en valor absoluto de las cantidades ε_0, ε_1, ε_2,... y por ε_p la menor de dichas cantidades, y consideramos la diferencia $f(x_1)-f(x_0)$ en su valor absoluto, prescindiendo del signo, tendremos

$$f(x_1)-f(x_0)<hn\varepsilon_m,$$

y

$$f(x_1)-f(x_0)>hn\varepsilon_p;$$

ó sustituyendo en vez de hn su valor finito x_1-x_0, se tendrá

$$\begin{aligned}
&f(x_1)-f(x_0)<(x_1-x_0)\varepsilon_m,\\
&f(x_1)-f(x_0)>(x_1-x_0)\varepsilon_p.
\end{aligned}$$

Estas desigualdades manifiestan, que la diferencia constante de $f(x_1)$ y $f(x_0)$, se halla comprendida entre las cantidades $(x_1-x_0)\varepsilon_m$ y $(x_1-x_0)\varepsilon_p$; y como estas cantidades tienden hácia el límite cero cuando h decrece indefinidamente, la diferencia $f(x_1)-f(x_0)$ tiene que ser necesariamente cero, y por consiguiente $f(x_1)=f(x_0)$; y si para dos valores cualesquiera x_1 y x_0 de la variable estas funciones son iguales, es claro que la funcion no cambiando de valor variando x, es una funcion constante, segun queriamos demostrar.

74 Tambien podemos ver geométricamente con claridad la exactitud de este teorema. En efecto, sea una funcion $y=f(x)$, cuya derivada sea constantemente nula, ya sea para valores cualesquiera de la variable x, ó ya para valores de esta variable comprendidos entre ciertos límites.

Supongamos construida la curva (*fig.* 3.ª) representada por esta funcion, y llamemos α el ángulo que forma la tangente á la curva en un punto cualquiera de la misma con el eje O X; de modo, que siendo la derivada de una funcion igual á la tangente del ángulo que forma el eje O X con la tangente á la curva en el punto que se considera, se tendrá $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$.

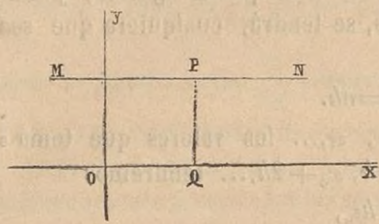

Fig. 3.ª

Esto supuesto, siendo $f'(x)$ constantemente nula, ya sea en general, ya para valores de x comprendidos entre ciertos límites, se sigue que tg α tendrá que ser cero tambien, y por consiguiente $\alpha=0$; lo que prueba, que las tangentes á la curva son paralelas al eje O X, siempre que $f'(x)$ sea igual á cero; y si las tangentes á una curva tiradas por puntos que pueden estar tan próximos como se quiera, son constantemente paralelas al eje O X, la curva no puede ser en este caso más que una línea recta M N paralela tambien al eje O X; y siendo la ordenada P Q de cualquiera de sus puntos una cantidad constante, la funcion tambien lo es, segun queriamos demostrar.

75. *Si dos funciones, crecientes ó decrecientes, tienen sus derivadas desiguales, la que tenga mayor derivada en valor numérico, crecerá ó decrecerá más rápidamente.*

Sean dos funciones $Y=F(x)$ é $y=f(x)$; demos á x un cierto incremento Δx, y se hallará (71)

$$\Delta Y=\Delta x[F'(x)+\varepsilon], \quad \text{y} \quad \Delta y=\Delta x[f'(x)+\varepsilon'],$$

siendo, como ya sabemos, ε y ε' cantidades que se anulan cuando Δx.

Restando estas igualdades, se tiene

$$\Delta Y-\Delta y=\Delta x[F'(x)-f'(x)+\varepsilon-\varepsilon'];$$

y como $F'(x) \gtrless f'(x)$, y $\varepsilon-\varepsilon'$ es la diferencia de dos cantidades que pueden decrecer cuanto se quiera, el signo de la cantidad que hay dentro del paréntesis grande dependerá del que tenga la diferencia $F'(x)-f'(x)$ multiplicada por Δx; así, si Δx es positiva, se tendrá

$$\Delta Y \gtrless \Delta y, \text{ segun que se tenga } F'(x) \gtrless f'(x);$$

luego la funcion que crece con más rapidez cuando crece x, es aquella cuya derivada, con relacion á x, tiene mayor valor numérico.

La recíproca es evidente.

76. *Si las derivadas de dos funciones crecientes ó decrecientes son iguales, las funciones crecen ó decrecen con la misma rapidez.*

En efecto, si las funciones creciesen ó decreciesen con rapidez distinta, la que más rápidamente creciera tendria mayor derivada, lo cual es contra la hipótesis.

Consecuencia. Si las funciones $F(x)$ y $f(x)$ crecen con igual rapidez, cuando $F'(x)=f'(x)$, es señal que los incrementos ΔY y Δy son iguales para un mismo incremento de la variable x, lo cual prueba que las funciones son tambien iguales ó no se diferencian más que en una constante; serán iguales, si ambas para un cierto valor de x, adquieren un valor comun; y se diferenciarán en una constante, si para un valor cualquiera de x, adquieren las funciones dos valores numéricos que se diferencien en una cierta cantidad k, la cual será la constante en que ambas funciones se diferencien; pues á partir de estos valores, las funciones aumentan ó disminuyen con incrementos iguales, y por consiguiente constantemente tendrán que ser iguales, ó constantemente se diferenciarán en la cantidad k.

Tambien se puede demostrar esta proposicion por reduccion al absurdo. En efecto, supongamos que siendo iguales las derivadas de dos funciones, estas no sean iguales, y sea $\varphi(x)$ su diferencia; de modo que tendremos la igualdad evidente

$$F(x)=f(x)+\varphi(x);$$

dando ahora un incremento Δx á la variable, hallaremos

$$F(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)+\varphi(x+\Delta x);$$

restando de esta igualdad la anterior, se hallará

$$F(x+\Delta x)-F(x)=f(x+\Delta x)-f(x)+\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x);$$

partiendo por Δx, y haciendo $\Delta x=0$, se hallará (62)

$$F'(x)=f'(x)+\varphi'(x);$$

pero $F'(x)=f'(x)$; luego $\varphi'(x)=0$. Siendo la derivada $\varphi'(x)=0$, la funcion $\varphi(x)$ será constante (73); luego ó $F(x)=f(x)$, ó de no ser iguales, se diferencian en una cantidad constante.

La recíproca es evidente.

77. Geométricamente puede hacerse comprender con claridad el teorema anterior. En efecto, consideremos dos ejes OX, OY (*fig.* 4.ª), y las

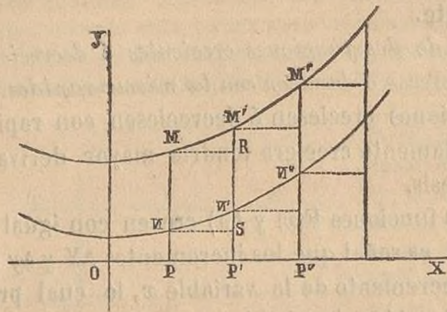

Fig. 4.ª

dos funciones $Y=F(x)$ ó $y=f(x)$, cuyas derivadas suponemos son iguales cualquiera que sea el valor que demos á x, y vamos á demostrar que dichas funciones son tambien iguales, ó se diferencian en una cantidad constante. Para ello demos á x un cierto valor $x=a=OP$, y podrá suceder una de dos cosas: que as dos funciones tomen un mismo valor para $x=a$, ó que los valores de estas funciones sean distintos; es decir, que $F(a=f(a)$, ó $F(a) \gtrless f(a)$

Sea, en primer lugar, $F(a)=f(a)=\beta$, y supongamos que este valor β esté representado por la ordenada MP; dando un cierto incremento $\Delta x=PP'$ á la variable x, las funciones $Y=F(x)$ é $y=f(x)$ recibirán los incrementos ΔY y Δy, que serán iguales, pues de lo contrario las derivadas no serian iguales tampoco: siendo iguales ΔY y Δy, al incremento de la variable x corresponde el mismo incremento para las funciones; luego el punto M' corresponde á las dos curvas representadas por las funciones dadas: lo mismo sucederá con el punto M'' y con tantos como queramos; luego todos los puntos de la una lo serán tambien de la otra, puesto que Δx puede ser tan pequeña como se quiera; y por consiguiente, las funciones que representan á estas dos curvas que se confunden en todos sus puntos, son iguales.

Sea, en segundo lugar, $F(a)>f(a)$, lo mismo se diria siendo $F(a)<f(a)$; en este caso, entre el valor numérico $F(a)$ y $f(a)$ habrá una diferencia k, la cual estará representada por la diferencia de las dos ordenadas MP y NP, y se tendrá

$$F(a)-f(a)=MP-NP=MN=k.$$

Dando á x el incremento $\Delta x=PP'$, ambas funciones recibirán incrementos iguales, de modo que se tendrá $\Delta Y=\Delta y$; ó lo que es lo mismo, siendo $\Delta Y=M'R$ y $\Delta y=N'S$, se tendrá $M'R=N'S$; los puntos M' y N' serán puntos de las curvas representadas por las funciones dadas, las cuales para este valor de $x=a+\Delta x$, ó lo que es lo mismo, para el valor de $x=OP'$, serán M'P' y N'P', cuya diferencia es

$$M'P'-N'P'=M'R+MP-N'S-NP=MP-NP=k,$$

por ser $M'R=N'S$.

Del mismo modo veriamos, que para otro valor cualquiera de la variable $x=OP''$, las funciones se diferenciarian en la misma cantidad $M''P''-N''P''=M'P'-N'P'=k$. Luego las funciones se diferencian constantemente en la cantidad numérica k. Y por tanto, cuando las derivadas de dos funciones son iguales, las funciones son iguales tambien, ó se diferencian en una constante k, segun queriamos demostrar.

LECCION VIII.

Derivadas de las funciones elementales algebráicas de la variable.—Derivada de la funcion exponencial de la variable.—Derivada de la funcion logarítmica de la variable.—Derivadas de las funciones circulares directas de la variable.—Derivadas de las funciones circulares inversas de la variable.

Derivadas de las funciones elementales algebráicas de la variable.

78. Siendo la derivada de una funcion cualquiera el límite de la razon del incremento de la funcion al de la variable cuando este se hace cero, se sigue que:

79. *La derivada de una constante es evidentemente cero.*

80. *La derivada de la variable independiente es igual á la unidad.*

En efecto, si se tiene $y=x$, dando á x un incremento Δx, y recibirá el mismo incremento, y se tendrá

$$y+\Delta y=x+\Delta x, \text{ ó } \Delta y=\Delta x;$$

de donde $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$, y lím. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$ tambien; luego la derivada de la variable x, es la unidad.

81. *La derivada del producto de la variable independiente por una constante, es igual á esta constante.*

Sea la funcion

$$y=mx;$$

dando á x el incremento Δx, se hallará

$$y+\Delta y=m(x+\Delta x)=mx+m\Delta x;$$

restando de esta igualdad la anterior, hallaremos

$$\Delta y=m\Delta x, \text{ de donde } \frac{\Delta y}{\Delta x}=m;$$

y pasando al límite, se hallará

$$\text{lím.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = m,$$

segun queríamos demostrar.

82. *La derivada de una potencia de la variable, es igual al exponente multiplicado por una potencia de la misma variable cuyo exponente viene disminuido en una unidad.*

Sea la potencia de exponente entero

$$y = x^m;$$

dando un incremento á x, se hallará por la fórmula del binómio,

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m = x^m + mx^{m-1}\Delta x + m\,\frac{m-1}{2}\,x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m;$$

restando de esta igualdad la anterior, y dividiendo por Δx, hallaremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + [m\,\frac{m-1}{2}\,x^{m-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{m-1}];$$

pasando al límite, cuando Δx se hace cero, los términos de dentro del paréntesis se anulan con Δx, y lo mismo la suma; por tanto, se tendrá

$$\text{lím.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = mx^{m-1};$$

luego la derivada de la potencia x^m, cuyo exponente m es entero y positivo, es mx^{m-1}, segun queríamos demostrar.

Acabamos de demostrar, que cuando m es un número entero y positivo, la derivada de x^m es mx^{m-1}; pero esto mismo se verifica cualquiera que sea el exponente m, como vamos á demostrar directamente. En efecto, segun la definicion de derivada, se tiene

$$y' = \text{lím.}\ \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \text{lím.}\ x^m\,\frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\Delta x}.$$

Si hacemos $\frac{\Delta x}{x} = h$, de donde $\Delta x = hx$, h se anulará con Δx, y se tendrá para valor de la derivada

$$y' = \text{lím.}\ x^m\,\frac{(1+h)^m - 1}{hx} = \text{lím.}\ \left(x^{m-1} \times \frac{(1+h)^m - 1}{h}\right).$$

El factor x^{m-1} es independiente de h, y por tanto tiene un cierto valor fijo; luego el límite de este producto será

$$y' = x^{m-1} \times \text{lím.} \frac{(1+h)^m - 1}{h};$$

pero cualquiera que sea el número m, el límite de $\frac{(1+h)^m - 1}{h}$, es (61) m; luego se tendrá

$$\text{derivada de } (y = x^m) = y' = mx^{m-1},$$

segun queríamos demostrar.

CONSECUENCIA. Si la potencia de la variable x tuviera un coeficiente numérico A, la derivada vendria expresada por

$$\text{lím. } A x^m \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\Delta x} = \text{lím. } A x^{m-1} \frac{(1+h)^m - 1}{h} = m\,A\,x^{m-1}.$$

83. *La derivada de la raiz enésima de la variable independiente* x, *es igual á esta raiz dividida por* nx.

En efecto, se tiene, segun el número anterior, que la derivada de x^m es, cualquiera que sea el exponente, mx^{m-1}; la raíz enésima de x, ó sea $\sqrt[n]{x}$, es igual á $x^{\frac{1}{n}}$; luego la derivada de $\sqrt[n]{x}$ será, llamándola y',

$$y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}} : x = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{nx} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

Donde vemos, que la derivada de $\sqrt[n]{x}$ es $\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$, segun queriamos demostrar.

Derivada de la funcion exponencial de la variable.

84. *La derivada de la exponencial* a^x, *es igual á esta exponencial multiplicada por el logaritmo neperiano de la base* a.

Sea la funcion exponencial

$$y = a^x.$$

Dando á x un incremento Δx, se hallará

$$y + \Delta y = a^{x+\Delta x};$$

de donde restando se tendrá

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1);$$

la relacion de los incrementos será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Hemos visto en el primer tomo de esta obra (74), que $a^{\Delta x}$ tiende á valer 1, á medida que Δx disminuye indefinidamente; de modo, que si hacemos $a^{\Delta x} - 1 = \alpha$, α será una cantidad que podrá ser menor que cualquier cantidad por pequeña que sea.

De esta relacion se deduce $a^{\Delta x} = 1 + \alpha$; y tomando logaritmos neperianos, se tendrá

$$\Delta x \mathrm{l}a = \mathrm{l}(1+\alpha), \quad \text{y} \quad \Delta x = \frac{\mathrm{l}(1+\alpha)}{\mathrm{l}a}.$$

Sustituyendo por $a^{\Delta x} - 1$ y Δx sus valores respectivos α y $\frac{\mathrm{l}(1+\alpha)}{\mathrm{l}a}$, en la relacion de los incrementos, hallaremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{\alpha}{\frac{\mathrm{l}(1+\alpha)}{\mathrm{l}a}} = a^x \frac{\alpha \mathrm{l}a}{\mathrm{l}(1+\alpha)} = \frac{a^x \mathrm{l}a}{\frac{1}{\alpha}\mathrm{l}(1+\alpha)};$$

pero $\frac{1}{\alpha}\mathrm{l}(1+\alpha) = \mathrm{l}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, y cuando Δx tiende hácia cero, α disminuye tambien cuanto se quiera, como hemos visto, y la expresion $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tiende hácia el límite e (60); luego $\mathrm{l}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tiene por límite $\mathrm{l}e = 1$, y por tanto se hallará para valor de la derivada y',

$$\text{lím.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{a^x \mathrm{l}a}{\mathrm{l}e} = a^x \mathrm{l}a;$$

luego, segun queriamos demostrar, la derivada de la exponencial a^x, es $a^x\mathrm{l}a$; es decir, igual á la misma exponencial multiplicada por el logaritmo neperiano de la base a.

85. Si la exponencial fuera $y = e^x$, se hallaria para valor de la derivada $y' = e^x \mathrm{l}e = e^x$, puesto que $\mathrm{l}e = 1$, por ser e la base del sistema de logaritmos neperianos.

Luego la derivada de la exponencial e^x, *es la misma funcion.*

Derivada de la funcion logarítmica de la variable.

86. *La derivada del logaritmo de la variable independiente, es igual á la cantidad recíproca de la variable multiplicada por log* e.

Sea la funcion $y=\log x$.

Dando un incremento á x, hallaremos

$$y+\Delta y=\log(x+\Delta x),\ \text{ó}\ \Delta y=\log(x+\Delta x)-\log x.$$

La relacion de los incrementos será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}=\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Haciendo $\frac{\Delta x}{x}=h$, ó $\Delta x=hx$, se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log(1+h)}{hx}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{h}\log(1+h)=\frac{1}{x}\times\log(1+h)^{\frac{1}{h}};$$

de donde pasando á los límites, y recordando que $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ tiende al límite e cuando h decrece indefinidamente, se tendrá

$$\text{lím.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\frac{1}{x}\log e.$$

Observacion. Si la funcion hubiera sido $y=\text{l}x$, se hallaria por derivada $y'=\frac{1}{x}\,\text{l}e=\frac{1}{x}$, puesto que $\text{l}e=1$; luego la derivada del logaritmo neperiano de la variable x, es la cantidad recíproca de esta variable; es decir, $\frac{1}{x}$.

Derivadas de las funciones circulares directas de la variable.

87. *La derivada del* seno *de la variable* x, *es el* coseno *de la misma.*

Sea $y=\text{sen}\ x$.

Dando á x el incremento Δx, se hallará

$y+\Delta y=\text{sen}(x+\Delta x)$, de donde $\Delta y=\text{sen}(x+\Delta x)-\text{sen}\ x$. La relacion de incrementos será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{sen}(x+\Delta x)-\text{sen}\ x}{\Delta x};$$

pero segun la trigonometría, se tiene, convirtiendo en producto la diferencia de los senos, y dividiendo por 2, los dos términos del quebrado,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Cuando Δx tiende hácia cero, la relacion $\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ tiende hácia 1, segun sabemos por la trigonometría; el factor $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ tiende al límite $\cos x$, cuando $\Delta x=0$; luego el límite de la relacion de los incrementos, ó sea la derivada, será lím. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\cos x$, segun queríamos demostrar.

88. *La derivada del* coseno *de la variable, es el* seno *de la misma tomado con signo contrario.*

Sea la funcion $y=\cos x$; el incremento será $\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$, y la relacion de los incrementos será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}.$$

De mismo modo que anteriormente, convirtiendo la diferencia de los cosenos en producto, y pasando al límite se hallará

$$\text{lím.}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\text{lím.}\ \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\times-\operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-\operatorname{sen} x.$$

Observacion. Si hallamos las derivadas sucesivas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, veremos que se reproducen periódicamente de cuatro en cuatro.

89. *La derivada de la* tangente *de la variable, es igual á la unidad partida por el cuadrado del* coseno *de la misma.*

Sea la funcion $y=\operatorname{tg} x$; dando un incremento á x, se hallará para valor del incremento de la funcion

$$\Delta y = \text{tg}\,(x+\Delta x) - \text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,\Delta x}{\cos\,(x+\Delta x)\cos\,x},$$

y se tendrá para valor de la derivada

$$\text{lím.}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{lím.}\,\frac{\text{sen}\,\Delta x}{\Delta x} \times \text{lím.}\,\frac{1}{\cos\,(x+\Delta x)\cos\,x};$$

pero los límites de los factores del segundo miembro son respectivamente la unidad y $\frac{1}{\cos^2 x}$; luego se tendrá

$$\text{lím.}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

segun queríamos demostrar.

90. *La derivada de la* cotangente *de la variable, es igual á ménos la unidad partida por el cuadrado del* seno *de la misma.*

Sea la funcion $y = \cot\,x$, de donde se hallará

$$\Delta y = \cot\,(x+\Delta x) - \cot\,x = -\frac{\text{sen}\,\Delta x}{\text{sen}\,(x+\Delta x)\,\text{sen}\,x},$$

y el valor de la derivada será

$$\text{lím.}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\text{lím.}\,\frac{\text{sen}\,\Delta x}{\Delta x} \times \text{lím.}\,\frac{1}{\text{sen}\,(x+\Delta x)\,\text{sen}\,x} = -\frac{1}{\text{sen}^2 x},$$

segun queriamos demostrar.

91. *La derivada de la* secante *de la variable, es igual á la* tangente *partida por el* coseno *de la misma.*

Sea la funcion $y = \sec\,x$, de donde deduciremos

$$\Delta y = \sec\,(x+\Delta x) - \sec\,x = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}\,\text{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cos\,(x+\Delta x)\cos\,x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \times \frac{1}{\cos\,x} \times \frac{\text{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cos\,(x+\Delta x)} \text{ y lím.}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{\text{tg}\,x}{\cos\,x};$$

luego la derivada de sec x es $\frac{\text{tg}\,x}{\cos\,x}$, segun queriamos demostrar.

92. *La derivada de la* cosecante *de la variable, es igual á ménos la* cotagente *partida por el* seno *de la misma.*

Sea la funcion $y = \text{cosec}\,x$, de donde se deducirá

$$\Delta y = \text{cosec}\,(x+\Delta x) - \text{cosec}\, x =$$

$$\frac{-2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}}{\text{sen}\,(x+\Delta x)\,\text{sen}\, x} = -2\,\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2} \times \frac{1}{\text{sen}\, x} \times \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\text{sen}\,(x+\Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\text{sen}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \times \frac{1}{\text{sen}\, x} \times \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\text{sen}\,(x+\Delta x)} \text{ y lím. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\cot x}{\text{sen}\, x};$$

luego la derivada de cosec x es $-\frac{\cot x}{\text{sen}\, x}$, segun queriamos demostrar.

Derivadas de las funciones circulares inversas de la variable.

93. Las funciones circulares inversas de una variable, son aquellas en las cuales la variable independiente es una línea trigonométrica, y su funcion es el arco de la misma; así hemos visto (47), que la funcion inversa de $y=\text{sen}\, x$, es $x=\text{arc sen}\, y$.

Esto supuesto, pasemos á determinar las derivadas de las funciones circulares inversas de aquellas directas cuyas derivadas hemos determinado ya. Para ello observaremos, que siendo la derivada de una funcion el límite de la razon del incremento de esta funcion al de la variable cuando este se hace cero, y siendo en las funciones inversas la variable independiente lo que en las directas es la funcion y vice-versa, se sigue que si la derivada de una funcion y, cuya variable es x, es lím. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, la de la inversa x, cuya variable es y, será lím. $\frac{\Delta x}{\Delta y}$; luego si la derivada de una funcion directa $y=f(x)$ es $f'(x)$, la de la inversa $x=\varphi(y)$ será $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$, en la cual tendremos que poner, en vez de x, su valor en funcion de y.

94. *La derivada de la funcion inversa* $y = \text{arc sen}\, x$, *es* $\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Sea la funcion $y=\text{arc sen}\, x$, de donde $x=\text{sen}\, y$.

En esta expresion sabemos que se tiene (87) lím. $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \cos y$; el de la inversa será lim. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos y}$.

Pero tenemos $\cos y = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$; luego el valor de la derivada será la expresion

$$\text{lím.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

en la cual se tomará el signo $+$ si el arco termina en el primero ó cuarto cuadrante, y el signo $-$ si termina en el segundo ó tercero.

95. *La derivada de la funcion inversa* y $=$ *arc. cos* x, *es* $+ \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Sea la funcion $y = \text{arc} \cos x$, de donde $x = \cos y$. Los límites de la relacion de los incrementos de la funcion directa é inversa, son

$$\text{lím.} \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\operatorname{sen} y, \text{ y lím.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{\operatorname{sen} y}.$$

Poniendo en vez de sen y su igual $\pm\sqrt{1 - \cos^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$, se hallará para valor de la derivada de la funcion inversa $y = \text{arc} \cos x$,

$$\text{lím.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \pm \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

segun queriamos demostrar.

96. *La derivada de la funcion inversa* y $=$ *arc tg* x, *es* $\frac{1}{1 + x^2}$.

Sea la funcion $y = \text{arc tg}\, x$, de donde deduciremos sucesivamente

$$x = \operatorname{tg} y,$$

$$\text{lím.} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\cos^2 y} \quad \text{y} \quad \text{lím.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos^2 y.$$

Pero $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$; luego la derivada de $y = \text{arc tg}\, x$, será lím. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{1}{1 + x^2}$.

97. *La derivada de la funcion* y $=$ *arc cot* x, *es* $- \frac{1}{1 + x^2}$.

Sea la funcion $y = \text{arc cot}\, x$, de donde se deducirá

$$x = \cot y,\ \text{lím.}\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{1}{\text{sen}^2 y},\ \text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\text{sen}^2 y.$$

Pero $\text{sen}^2 y = \frac{1}{1+\cot^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$; luego la derivada de $y = \text{arc}$ $\cot x$, será $\text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

98. *La derivada de la funcion* $y = \text{arc sec } x$, *es* $\pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Sea la funcion $y = \text{arc sec } x$, de donde se hallará

$$x = \sec y,\ \text{lím.}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\text{tg } y}{\cos y},\ \text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos y}{\text{tg } y}.$$

Pero $\cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{x}$, $\text{tg } y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$; luego la derivada de la funcion $y = \text{arc sec } x$, será

$$\text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

99. *La derivada de la funcion* $y = \text{arc cosec } x$, *es* $\pm\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Sea la funcion $y = \text{arc cosec } x$, de donde se tendrá

$$x = \text{cosec } y,\ \text{lím.}\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{\cot y}{\text{sen } y},\ \text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\text{sen } y}{\cot y}.$$

Pero $\text{sen } y = \frac{1}{\text{cosec } y} = \frac{1}{x}$, $\cot y = \pm\sqrt{\text{cosec}^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$; luego la derivada de la funcion inversa $y = \text{arc cosec } x$, será

$$\text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \pm\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

RESÚMEN.

100. Una vez halladas las derivadas de las funciones sencillas, tanto algebráicas como trascendentes, que dependen inmediatamente de una variable, conviene tenerlas muy presentes por el uso frecuente que de ellas se hace en matemáticas, para lo cual las reuniremos en el cuadro siguiente:

$y=$	$y'=$	$y=$	$y'=$
x......	1	$\sec x$.....	$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$
Ax......	A		
x^m......	mx^{m-1}	$\operatorname{cosec} x$....	$-\frac{\cot x}{\operatorname{sen} x}$
Ax^m.....	mAx^{m-1}		
$\sqrt[n]{x}$.....	$\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$	$\operatorname{arc\,sen} x$...	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x......	$a^x la$		
e^x......	e^x	$\operatorname{arc\,cos} x$...	$\pm\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x$....	$\frac{1}{x}\log_a e$	$\operatorname{arc\,tg} x$...	$\frac{1}{1+x^2}$
lx......	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arc\,cot} x$...	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sen} x$.....	$\cos x$		
$\cos x$.....	$-\operatorname{sen} x$	$\operatorname{arc\,sec} x$...	$\pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{tg} x$......	$\frac{1}{\cos^2 x}$		
$\cot x$....	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$\operatorname{arc\,cosec} x$..	$\pm\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

LECCION IX.

Derivada de la suma algebráica de varias funciones.—Derivada de un producto de varias funciones.—Derivada del cociente de dos funciones.—Derivada de una potencia de una funcion.—Derivada de una raíz de una funcion.—Ejemplos de derivadas.

Derivada de la suma algebráica de varias funciones.

101. En todas las derivadas que en esta leccion vamos á hallar, supondremos que se conocen las derivadas de las funciones cuya suma, producto, etc., se nos dan.

102. *La derivada de la suma algebráica de varias funciones, es igual á la suma algebráica de las derivadas de las funciones.*

Sea la suma algebráica de las funciones z, u, v, w, que dependen de la variable x,

$$y=z+u-v+w.$$

Demos á x un cierto incremento Δx, y segun la notacion convenida, hallaremos

$$y+\Delta y=(z+\Delta z)+(u+\Delta u)-(v+\Delta u)+(w+\Delta w);$$

restando de esta igualdad la anterior, y dividiendo despues por Δx, se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}-\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Tomando límites y teniendo presente lo dicho anteriormente (56 y 62), hallaremos

$$y'=z'+u'-v'+w',$$

que justifica el enunciado del teorema.

103. De esta regla se deduce inmediatamente, que la derivada de un polinómio cualquiera

$$y=Ax^m+Bx^n+Cx^p+\ldots+Tx^r+U,$$

en el cual A, B, C,... T, U, son cantidades constantes, y los exponentes m, n, p,... r, pueden ser enteros, fraccionarios, positivos ó negativos, será

$$y'=mAx^{m-1}+nBx^{n-1}+pCx^{p-1}+\ldots+rTx^{r-1}.$$

En efecto, este polinomio es la suma de las funciones elementales Ax^m, Bx^n, Cx^p,... cuyas derivadas son mAx^{m-1}, nBx^{n-1}, pCx^{p-1},... segun se tiene (82 CONS.); y conforme al teorema anterior, la derivada de la suma es la suma de las derivadas de los sumandos.

Derivada de un producto de varias funciones.

104. *La derivada de un producto es igual á la suma de los resultados que se obtienen multiplicando la derivada de cada factor por el producto de todos los demás.*

Sea, en primer lugar, el producto de las dos funciones uv, que depende de la variable x,

$$y=uv.$$

Dando un incremento á x, se hallará

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\ (v+\Delta v)=uv+v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\times\Delta v.$$

Restando de esta igualdad la anterior y dividiendo por Δx, se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\frac{\Delta v}{\Delta x}u+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Pasando al límite y observando que lím. $\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$, y por tanto que

lím. $\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right)=u'$ lím. Δv; siendo lím. $\Delta v=0$, se tendrá

lím. $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v=0$; y por consiguiente,

$$y'=u'v+v'u,$$

segun queríamos demostrar.

Sea, en segundo lugar, el producto de varios factores

$$y=u_1\,.\,u_2\,.\,u_3\,.\,...\,u_n.$$

Supongamos que el principio se verifique para $n-1$ factores, y vamos á demostrar que tambien se verifica cuando el número de factores sea n.

El producto propuesto se podrá poner bajo la forma

$$y=\mathrm{P}u_n,$$

haciendo $\mathrm{P}=u_1\,.\,u_2\,.\,u_3\,.\,...\,u_{n-1}$; y segun el caso anterior, se tendrá $y'=\mathrm{P}'u_n+u'_n\mathrm{P}$; pero por hipótesis se tiene

$$\mathrm{P}'=u'_1u_2u_3...u_{n-1}+u'_2u_1u_3...u_{n-1}+u'_3u_1u_2...u_{n-1}+...+u'_{n-1}u_1u_2...$$

y

$$\mathrm{P}=u_1u_2u_3\,...\,u_{n-1};$$

luego sustituyendo estos valores en la igualdad anterior, hallaremos

$$y'=u'_1u_2...u_n+u'_2u_1...u_n+...+u'_{n-1}u_1u_2...u_n+u'_nu_1u_2...u_{n-1};$$

luego si el principio es cierto para $n-1$ factores, lo es tambien para n.

Ahora bien, nosotros hemos visto que es cierto para el caso de ser dos los factores; luego lo será tambien cuando el número de factores sea tres: siendo cierto para tres factores, lo será tambien para cuatro, y lo mismo para cinco, seis, etc., y en general para n factores, segun queríamos demostrar.

Observaciones. 1.ª Si la igualdad anterior la dividimos por el producto y, se hallará

$$\frac{y'}{y}=\frac{u'_1}{u_1}+\frac{u'_2}{u_2}+\frac{u'_3}{u_3}+...+\frac{u'_n}{u_n};$$

que prueba, que *la relacion que hay entre la derivada de un producto y este producto, es igual á la suma de las relaciones que hay entre la derivada de cada factor y este factor.*

2.ª Si uno de los factores fuese constante, su derivada seria cero, y el producto de esta por el de todos los demás seria cero tambien, así, la derivada de $y = av$, en cuyo producto a es una constante y v una funcion de x, será av'.

Derivada del cociente de dos funciones.

105. *La derivada del cociente de dos funciones, es igual al producto de la derivada del dividendo por el divisor, ménos el del dividendo por la derivada del divisor, partido todo por el cuadrado del divisor.*

Sea el cociente $y = \frac{u}{v}$; multiplicando por v, se halla

$$vy = u.$$

Tomando las derivadas de ambos miembros, será

$$vy' + v'y = u', \text{ de donde } y' = \frac{u' - v'y}{v}.$$

Sustituyendo en vez de y su igual $\frac{u}{v}$, y multiplicando ambos términos por v, tendremos

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2},$$

que justifica la regla.

La derivada de una fraccion se halla del mismo modo, puesto que toda fraccion se puede considerar como el cociente de dividir el numerador por el denominador.

Derivada de una potencia de una funcion.

106. *La derivada de la* emésima *potencia de una funcion, es igual al exponente* m *multiplicado por el producto de la potencia* m—1 *de esta funcion, por la derivada de la misma.*

Es decir, que la derivada de la potencia $y = u^m$, en la que u es una funcion y m un exponente cualquiera, es $mu^{m-1}u'$.

En efecto, sea en primer lugar m un número entero; en este caso la potencia u^m se convierte en $y = uuu$... cuya derivada, segun el número anterior, será

$$y' = u'u^{m-1} + u'u^{m-1} + u'u^{m-1} + \ldots = mu^{m-1}u',$$

segun queríamos demostrar.

Sea m un número fraccionario $m=\frac{p}{q}$, y entónces se tendrá

$$y=u^{\frac{p}{q}} \text{ ó } y^q=u^p,$$

de donde se deduce evidentemente

$$qy'y^{q-1}=pu'u^{p-1}, \text{ ó } y'=\frac{p}{q}\frac{u^{p-1}u'}{y^{q-1}};$$

pero $y^{q-1}=\frac{y^q}{y}=\frac{u^p}{y}=\frac{u^p}{u^{\frac{p}{q}}}=u^{p-\frac{p}{q}}$; luego sustituyendo, será

$$y'=\frac{p}{q}\frac{u^{p-1}u'}{u^{p-\frac{p}{q}}}=\frac{p}{q}u^{\frac{p}{q}-1}u'.$$

Sea, por último, el exponente m un número negativo $-n$, ya tenga su valor numérico entero ó fraccionario; se tendrá

$$y=u^{-n}=\frac{1}{u^n};$$

de donde deduciremos (105)

$$y'=-\frac{nu^{n-1}u'}{u^{2n}}=-nu^{-n-1}u',$$

segun queriamos demostrar.

Derivada de una raíz de una funcion.

107. *La derivada de la* enésima *raíz de una funcion, es igual al producto de dicha raíz por la derivada de la funcion, partido por el índice multiplicado por la misma funcion.*

Es decir, que la derivada de $\sqrt[n]{v}$, es $\frac{v'\sqrt[n]{v}}{nv}$.

En efecto, de $y=\sqrt[n]{v}=v^{\frac{1}{n}}$ se deduce (106), que

$$y'=\frac{1}{n}v^{\frac{1}{n}-1}v'=\frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{v}}{v}v'=\frac{v'\sqrt[n]{v}}{nv},$$

segun queriamos demostrar.

Si consideramos como caso particular la raíz cuadrada $y=\sqrt{u}$, hallaremos, segun la regla anterior, la igualdad

$$y'=\frac{\sqrt{u}\,u'}{2u}=\frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

que expresa que la derivada de la raíz cuadrada de una funcion, *es igual á la derivada de la funcion partida por el doble del radical.*

Ejemplos de derivadas.

108. Por medio de las reglas precedentes, y teniendo presente el cuadro de derivadas (100) de las funciones elementales, tanto algebráicas como trascendentes, podremos hallar las derivadas de las funciones siguientes:

I. Sea, en primer lugar, la derivada del polinómio

$$f(y)=7y^4-5y^3+2y^2-3y+7.$$

Su derivada será, segun la regla dada (64), ó por la que se deduce del n.° 102.

$$f'(y)=28y^3-15y^2+4y-3.$$

II. Sea, en segundo lugar, hallar la derivada del producto

$$f(y)=(3y^2-5y+3)\,(2y^3-3y+7)\,(2y^2+4y-3)^3.$$

Segun la regla de la derivada de un producto (104) y la de la potencia (106), se hallará

$$\begin{gathered}f'(y)=(6y-5)\,(2y^3-3y+7)\,(2y^2+4y-3)^3+\\(6y^2-3)\,(3y^2-5y+3)\,(2y^2+4y-3)^3+\\3(2y^2+4y-3)^2(4y+4)\,(3y^2-5y+3)\,(2y^3-3y+7)=\\(2y^2+4y-3)^2[(6y-5)\,(2y^3-3y+7)\,(2y^2+4y-3)+\\(6y^2-3)\,(3y^2-5y+3)\,(2y^2+4y-3)+\\3(4y+4)\,(3y^2-5y+3)\,(2y^3-3y+7)].\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}f'(y)=(2y^2+4y-3)^2[(2y^2+4y-3)\{(6y-5)\,(2y^3-3y+7)+\\3(2y^2-1)\,(3y^2-5y+3)\}+12(y+1)\,(3y^2-5y+3)\,(2y^3-3y+7)]\end{gathered}$$

III. Sea la funcion $f(y)=\dfrac{2y^2-3y+2}{4y^3-3y^2+5y}$.

Segun la regla dada (105), se hallará

$$f'(y)=\frac{(4y-3)\,(4y^3-3y^2+5y)-(2y^2-3y+2)\,(12y^2-6y+5)}{(4y^3-3y^2+5y)^2}.$$

IV. Hallar la derivada de la potencia de la siguiente funcion

$$f(y)=(3y^2-5y+3)^4.$$

Se tendrá (106) $f'(y)=4(3y^2-5y+5)^3(6y-5)$.

V. La derivada de la raíz $f(y)=\sqrt[5]{7y^2-5y+3}$, será (107)

$$f'(y)=\frac{(14y-5)\sqrt[5]{7y^2-5y+3}}{5(7y^2-5y+3)}$$

VI. Propongámonos hallar la derivada de la expresion

$$f(y)=y^3(y^2+1)(3y-1)+\frac{5y^2-3y+4}{y^2-1}-y(a^2+y^2)\sqrt{a^2-y^2}+$$

$$\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{y}}+\sqrt[3]{(c^2-y^2)^2}\right)^3}.$$

Si cada uno de estos sumandos los consideramos como una funcion de y, y hallamos sus derivadas, la derivada de y será la suma algebráica de las derivadas de los sumandos (102); así se hallará

$$f'(y)=18y^5-5y^4+12y^3-3y^2+\frac{3y^2-18y+3}{(y^2-1)^2}-\frac{a^4+a^2y^2-4y^4}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$$+\frac{3}{4}\times\frac{\dfrac{b}{2y\sqrt{y}}-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{y}{\sqrt[3]{c^2-y^2}}}{\sqrt[4]{a-\dfrac{b}{\sqrt{y}}+\sqrt[3]{(c^2-y^2)^2}}}.$$

LECCION X.

Derivadas de las funciones de funciones.—Derivadas de las funciones compuestas.—Ejemplos de derivadas de funciones de funciones, y de funciones compuestas.

Derivadas de las funciones de funciones.

109. *La derivada de una funcion de funcion, es igual al producto de las derivadas de cada una de las funciones con relacion á la variable de que dependen inmediatamente.*

Sea la funcion $u=f(x)$, y la funcion de funcion

$$y=F(u)=F[f(x)]=\varphi(x).$$

Dando un incremento Δx á la variable independiente x, la funcion u recibirá un cierto incremento Δu y la funcion de funcion $y=\varphi(x)$ recibirá tambien otro, que representaremos por Δy; así, se tendrá

$$u+\Delta u=f(x+\Delta x),$$
$$y+\Delta y=\mathrm{F}(u+\Delta u)=\varphi(x+\Delta x),$$
$$\Delta u=f(x+\Delta x)-f(x),$$
$$\Delta y=\mathrm{F}(u+\Delta u)-\mathrm{F}(u),$$
$$\text{lím.}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\text{lím.}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$
$$\text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\text{lím.}\frac{\mathrm{F}(u+\Delta u)-\mathrm{F}(u)}{\Delta u}=\mathrm{F}'(u),$$

multiplicando estas igualdades, tendremos

$$\text{lím.}\frac{\Delta u}{\Delta x}\times\text{lím.}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(x)\times\mathrm{F}'(u)$$

pero $\text{lím.}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\times\text{lím.}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=\text{lím.}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\varphi'(x)$; luego

$$y'=\varphi'(x)=\mathrm{F}'(u)\times f'(x),$$

segun queriamos demostrar.

Si la funcion propuesta fuese una funcion de funcion de funcion, se hallaria, del mismo modo, que la derivada era igual al producto de las tres derivadas de las funciones, con relacion á la variable de que cada una depende inmediatamente. En efecto, sea la funcion de funciones

$$z=\psi(y),\quad \text{siendo}\quad y=\mathrm{F}(u),\quad \text{y}\quad u=f(x);$$

ó lo que es lo mismo,

$$z=\psi\{\mathrm{F}[f(x)]\}=\psi[\varphi(x)]=\pi(x).$$

Segun lo que acabamos de demostrar, se tendrá

$$z'=\pi'(x)=\psi'(y)\times\varphi'(x),$$
$$\varphi'(x)=\mathrm{F}'(u)\times f'(x);$$

luego tendremos

$$z'=\pi'(x)=\psi'(y)\times\mathrm{F}'(u)\times f'(x),$$

que está conforme con el enunciado del teorema.

Del mismo modo veremos que dicho teorema se verifica, cualquiera que sea el número de funciones que se consideren.

110. La regla que hemos dado (106) para hallar la derivada de la potencia de una funcion u^m, es una consecuencia del teorema que acabamos de demostrar. En efecto, se tiene

$$y=u^m, \quad \text{y} \quad u=f(x).$$

Donde vemos, que $F(u)=u^m$, y $F'(u)=mu^{m-1}$ (82); $f'(x)=u'$; luego como la derivada de una funcion de funcion es el producto de las derivadas con relacion á la variable de que dependen inmediatamente, se tendrá $y=mu^{m-1}\times u'$, conforme teníamos ya.

Derivadas de las funciones compuestas.

111. En las funciones compuestas entran generalmente diferentes funciones que varian con independencia las unas de las otras, ó dependiendo todas ellas de una misma variable x; en cualquiera de estos casos podemos en último análisis considerarlas como variables, con relacion á las cuales podremos hallar las derivadas de la funcion, cuyas derivadas se llaman *derivadas parciales*. Mas como la funcion se representa generalmente por una letra y, ó por $F(x, y, z...)$, es necesario que establezcamos una notacion que nos indique estas derivaciones parciales, el órden de derivacion y la variable con relacion á la cual se deriva.

Así, convendremos en acentuar la letra y, ó la característica de la funcion F, con un número de acentos igual al órden de la derivacion, poniendo á la primera por subíndice la variable ó variables respecto á las cuales se deriva, con un exponente igual al órden de la derivacion que se haya hecho con relacion á cada una; y si se usa de la característica de la funcion, poniendo á las variables con relacion á las cuales se deriva, un índice igual al grado de la derivacion que con relacion á ellas se hace.

Sea, por ejemplo, la funcion de tres variables

$$y=f(x, u, v);$$

$$y'_x=f'(x_1, u, v), \quad y'_u=f'(x, u_1, v), \quad y'_v=f'(x, u, v_1),$$

indica respectivamente cada una de las derivadas parciales de la funcion $y=f(x, u, v)$, con relacion á x, u y v; la expresion

$$y^{(m)}_{x^n u^p v^q}=f^{(m)}(x_n, u_p, v_q),$$

en la cual se supone $m=n+p+q$, indica la derivada del órden m de la funcion $y=f(x, u, v)$, la cual se ha derivado n veces con relacion á x, p con relacion á u, y q veces con relacion á v.

Esto bien entendido, pasemos á determinar la derivada de una funcion compuesta.

112. *La derivada de una funcion compuesta de varias funciones de una variable independiente* x, *es igual á la suma de las derivadas parciales de la funcion con relacion á cada una de las componentes, multiplicadas por las derivadas respectivas de dichas funciones.*

Es decir, que si se tiene la funcion $y=f(u, v, w...)$, compuesta de las funciones $u, v, w...$ dependientes de x, se hallará para la derivada y' de esta funcion,

$$y'=f'(u_1, v, w...)u'+f'(u, v_1, w...)v'+f'(u, v, w_1...)w'+...$$

En efecto, sea la funcion $y=f(u, v)$, compuesta de las dos funciones u y v, dependientes de la variable x.

Supongamos que en una de las funciones v, damos á x un cierto incremento Δx, y consideremos por un momento á la funcion u como constante. A este incremento corresponderá un incremento parcial ó *virtual* de la funcion y, el cual representaremos por Δy_v; de modo, que se tendrá

$$\Delta y_v=f(u, v+\Delta v)-f(u, v).$$

Si ahora suponemos que en la funcion u, damos á x el incremento Δx, y suponemos como constante á $v+\Delta v$, se hallará para el segundo incremento parcial de la funcion, debido al incremento de la funcion u,

$$\Delta y_u=f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v+\Delta v),$$

y el valor *final* de la funcion será

$$y+\Delta y=f(u+\Delta u, v+\Delta v),$$

de donde $\Delta y=f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v)$;

ó sumando y restando la cantidad $f(u, v+\Delta v)$, se tendrá

$$\Delta y=[f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v+\Delta v)]+[f(u, v+\Delta v)-f(u, v)].$$

Dividiendo ahora por Δx, y dividiendo y multiplicando al mismo tiempo cada uno de los sumandos del segundo miembro por los incrementos respectivos Δu y Δv, se tendrá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v+\Delta v)}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}+$$
$$\frac{f(u, v+\Delta v)-f(u, v)}{\Delta v}\times\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Si ahora pasamos al límite cuando Δx tiende hácia cero, las relaciones $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ y $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tienden á valer las derivadas u' y v' de las funciones u y v, que dependen inmediatamente de x.

La relacion $\frac{f(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-f(u,\ v+\Delta v)}{\Delta u}$, en la cual se supone que $v+\Delta v$ es constante, expresa la relacion que hay entre el incremento parcial que recibe la funcion y con respecto á u, y el incremento de u; su límite será la derivada parcial de y con relacion á u; es decir, $f'(u_1\ v)$, puesto que haciendo $\Delta x=0$, Δv es cero tambien.

Del mismo modo vemos que el límite de la relacion

$$\frac{f(u,v+\Delta v)-f(u,v)}{\Delta v},$$

es la derivada parcial de y con relacion á la funcion v; es decir, $f'(u\ v_1)$; luego la derivada total y' de la funcion compuesta, será

$$y'=f'(u_1 v)\,u'+f'(u\,v_1)v',$$

segun queriamos demostrar.

Sea ahora una funcion compuesta de otras tres que dependen de una misma variable x, $y=f(u,v,w)$.

Siguiendo el mismo método que anteriormente, hallaremos

$$\begin{gathered}\Delta y=f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)-f(u,v,w)=\\ [f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)-f(u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)]+\\ [f(u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)-f(u,\ v,\ w+\Delta w)]+\\ f(u,\ v,\ w+\Delta w)-f(u,\ v,\ w);\end{gathered}$$

y la relacion de los incrementos podrá ponerse bajo la forma

$$\begin{gathered}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)-f(u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}+\\ \frac{f(u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w)-f(u,\ v,\ w+\Delta w)}{\Delta v}\times\frac{\Delta v}{\Delta x}+\\ \frac{f(u,\ v,\ w+\Delta w)-f(u,\ v,\ w)}{\Delta w}\times\frac{\Delta w}{\Delta x}.\end{gathered}$$

Pasando al límite y observando que siendo constantes en la primera relacion todas las funciones, á excepcion de u, se obtiene la derivada parcial de y con relacion á u, puesto que siendo $\Delta x=0$, Δv y Δw tambien lo son; que el límite de la primera relacion del segundo sumando es la derivada parcial con relacion á v, y que el límite de la primera relacion del tercer sumando, es la derivada parcial de la funcion con relacion á w; y por último, que el límite de las relaciones

$\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}$ y $\frac{\Delta w}{\Delta x}$, son las derivadas respectivas de las funciones u, v y w, se tendrá

$$y' = f'(u_1, v, w)\,u' + f'(u, v_1, w)\,v' + f'(u, v, w_1)\,w',$$

segun queriamos demostrar.

Del mismo modo se veria que el teorema se verifica para cualquiera que sea el número de funciones.

113. Las reglas que hemos dado para hallar las derivadas de una suma, de un producto, de un cociente, etc., se deducen inmediatamente aplicando esta regla general, de la cual aquellas son casos particulares.

Así, la derivada del producto $y = u_1 \times u_2 \times u_3 \ldots$ será igual á la suma de las derivadas parciales con relacion á cada uno de los factores, multiplicada por la derivada de este factor; es decir,

$$y' = u'_1 \times u_2 u_3 \ldots + u'_2 \times u_1 u_3 \ldots + u'_3 \times u_1 u_2 \ldots + \ldots$$

Ejemplos de derivadas de funciones de funciones, y de funciones compuestas.

I. Sea en primer lugar la funcion de funcion $y = \operatorname{sen}^4 x$.

Hagamos $u = \operatorname{sen} x$, de donde $y = u^4$. Siendo u una funcion de x, é y una funcion de u, es claro que y será una funcion de funcion, de modo que su derivada será (109)

$$y' = 4u^3 \times u';$$

pero $4u^3 = 4\operatorname{sen}^3 x$, y $u' = \cos x$ (87); luego

$$y' = 4\operatorname{sen}^3 x \times \cos x.$$

II. Sea en segundo lugar la funcion $y = v^u$, en la cual v y u son funciones de una variable x; y es por consiguiente una funcion compuesta, cuya derivada será (112) la suma de las derivadas parciales con relacion á cada una de las funciones, multiplicadas por las derivadas respectivas de estas funciones. Así, se tendrá

$$y' = uv^{u-1}v' + u'v^u\, lv.$$

III. Sea en tercer lugar la funcion $y = \log \operatorname{tg}^3(1+x^2)^2$.

Hagamos sucesivamente	de donde
$u = \operatorname{tg}^3(1+x^2)^2$	$y = \log u$
$v = \operatorname{tg}(1+x^2)^2$	$u = v^3$
$w = (1+x^2)^2$	$v = \operatorname{tg} w$
$t = 1+x^2$	$w = t^2$

Y segun la regla de la derivada de una funcion de funciones, se tendrá (109) que y' será igual al producto de las derivadas de estas funciones con relacion á la variable de que inmediatamente dependen; es decir, que se tendrá

$$y'=\frac{1}{u}\log e\times 3v^2\times\frac{1}{\cos^2 w}\times 2t\times 2x;$$

y reemplazando las funciones u, v, w, t, por sus valores, hallaremos por último, haciendo todas las reducciones,

$$y'=24\log e\frac{x^3+x}{\operatorname{sen} 2(1+x^2)^2}.$$

IV. Sea, por último,

$$y=\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2})-\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+x\sqrt{1+x^2}.$$

Haciendo $u=\mathrm{l}\,(x+\sqrt{1+x^2})$, $v=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$w=x\sqrt{1+x^2}$, se tendrá

$$y=u-v+w\,,\quad\text{é}\quad y'=u'-v'+w'.$$

Pero segun las reglas que anteriormente hemos dado, se tiene

$$u'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$v'=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\times\frac{\sqrt{1+x^2}-x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=$$

$$\pm\sqrt{1+x^2}\times\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\pm\frac{1}{1+x^2},$$

$$w'=\sqrt{1+x^2}+x\times\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+x^2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Por consiguiente, la derivada de la funcion propuesta, será

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mp\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\mp\frac{1}{1+x^2}=$$

$$2\sqrt{1+x^2}\mp\frac{1}{1+x^2}=\frac{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\mp 1}{1+x^2}.$$

LECCION XI.

Derivadas de funciones implícitas.—Derivadas de funciones inversas.—Derivadas de una combinacion cualquiera de funciones.—Derivadas sucesivas de una funcion cualquiera.

Derivadas de funciones implícitas.

114. Si tenemos una funcion implícita

$$f(xy)=0 \qquad [1],$$

en la cual x es la variable independiente, é y la funcion, podremos hallar la derivada de y con relacion á x, sin necesidad de resolver esta ecuacion con relacion á y, que es lo que se necesita para obtener la funcion explícita correspondiente.

Para ello observaremos, que si imaginamos hallado el valor de y, deducido de esta ecuacion, y sea $y=\varphi(x)$, sustituyendo este valor en la ecuacion [1], la convertirá en la ecuacion idéntica $f[x, \varphi(x)] = 0$, en la cual, como se vé, x es una variable, y $\varphi(x)$ una cierta funcion de esta variable, la cual está representada por y; luego la ecuacion $f(xy)=0$, cuyo primer miembro podremos representar por z, nos dará

$$z=f(xy)=0,$$

siendo z una funcion compuesta, que constantemente es cero.

Además, cuando una funcion tiene un valor constante, su derivada es cero; porque si nó, la funcion seria creciente ó decreciente (72); luego siendo z constantemente cero, su derivada z' tambien lo será. Esto supuesto, pasemos á determinar la derivada y' de la funcion implícita $f(xy)=0$.

115. *La derivada* y' *de la funcion implícita* f(x y) = 0, *es igual á ménos la derivada parcial con relacion á* x, *partida por la derivada parcial con relacion á* y, *de la funcion propuesta.*

Es decir, que la derivada de la funcion implícita $f(xy)=0$, será

$$y'=-\frac{f'(x_1y)}{f'(xy_1)}.$$

En efecto, la derivada de la funcion compuesta

$$z = f(x\, y),$$

siendo, como sabemos, y una funcion de x, es

$$z' = f'(x_1\, y)x' + f'(x\, y_1)y' = f'(x_1\, y) + f'(x\, y_1)y';$$

y como se tiene $z = 0$, z' será cero tambien, de modo que se tendrá

$$f'(x_1\, y) + f'(x\, y_1)y' = 0, \quad \text{ó } y' = -\frac{f'(x_1\, y)}{f'(x\, y_1)},$$

segun queriamos demostrar.

Sea, por ejemplo, hallar la derivada de la funcion implícita de la variable x, dada por la ecuacion

$$6x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x = 0.$$

Segun la regla anterior, se tendrá

$$y' = -\frac{12x - 4y + 4}{-4x + 6y} = \frac{6x - 2y + 2}{2x - 3y}.$$

Sea, en segundo lugar, la funcion implícita y, dada por la ecuacion

$$x^n + y^x - 1 = 0,$$

de la cual deduciremos, segun la regla,

$$y' = -\frac{nx^{n-1} + y^x \,\mathrm{l}y}{xy^{x-1}}.$$

Derivadas de funciones inversas.

116. Ya hemos visto al ocuparnos de las funciones en general (47), y de las funciones circulares inversas, que si se tiene una funcion entre dos variables x é y, que ligue de tal modo á estas variables, que cada una pueda venir en funcion de la otra, y suponiendo que esta relacion sea

$$F(x\, y) = 0,$$

de la cual se pueda sacar indistintamente

$$y = f(x) \quad \text{ó} \quad x = \varphi(y),$$

se dice que una de estas funciones es inversa respecto de la otra.

En estas funciones es evidente, que á un cierto incremento Δx de x, y recibirá otro cierto incremento Δy; y recíprocamente, al incremento Δy, corresponderá el mismo incremento Δx, los cuales llamaremos *incrementos simultáneos.*

Esto supuesto, si la relacion de los incrementos simultáneos en la primera es $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, en la segunda será $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$; y como los límites de estas relaciones son las derivadas, se sigue que si la derivada de la funcion $y=f(x)$ es

$$\text{lím.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x),$$

la derivada de la funcion inversa $x=\varphi(y)$, será

$$\text{lím.} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \text{lím.} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[\varphi(y)]};$$

luego *la derivada de una funcion inversa, es igual á la unidad partida por la derivada de la funcion directa, en la cual se sustituye la variable que en ella entra por la funcion inversa.*

Esta misma regla se puede deducir fundándonos en el método para hallar la derivada de una funcion de funcion. En efecto, si se tiene $y=f(x)$ y $x=\varphi(y)$, y se quiere hallar la derivada de la funcion inversa $x=\varphi(y)$, suponiendo conocida la de la funcion directa $y=f(x)$, tendremos

$$y=f(x), \quad x=\varphi(y),$$

de donde $y=f[\varphi(y)]$.

Como lo que tratamos de hallar es la derivada de $x=\varphi(y)$, la variable independiente es y, cuya derivada es 1; la derivada de la funcion de funcion $f[\varphi(y)]$ tambien será 1, segun la igualdad anterior, de modo que se tendrá (109)

$$1 = f'(x) \times \varphi'(y),$$

de donde $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[\varphi(y)]}$;

luego la derivada $x' = \varphi'(y)$ de la funcion inversa de $y=f(x)$, es la misma que anteriormente hemos hallado.

Por medio de la regla anterior podremos hallar la derivada de una funcion inversa cualquiera, conociendo la derivada de la funcion directa correspondiente.

Así, la derivada de $y=$arc sen x, que es la inversa de $x=$sen y, será $y' = \frac{1}{\cos y}$;

pero $\cos y = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$;

luego $$y' = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Del mismo modo veremos, que $y=\sqrt[n]{x}$ es la inversa de la funcion $x=y^n$, cuya derivada x' es ny^{n-1}; luego la derivada de la funcion y, será

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}\times\frac{y}{y^n} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

Sea, por último, la funcion $y=\log_a x$, cuya directa es $x=a^y$. La derivada x' es $a^y \mathrm{l}a$; luego la derivada de la inversa, será

$$y' = \frac{1}{a^y \mathrm{l}a} = \frac{1}{a^y}\times\frac{1}{\mathrm{l}a} = \frac{1}{x}\times\log_a e,$$

porque $\mathrm{l}a = \log_a a \times \frac{1}{\log_a e}$ (*Algebra*, tomo I, núm. 467); pero $\log_a a = 1$;

luego $\mathrm{l}a = \frac{1}{\log_a e}$, de donde $\frac{1}{\mathrm{l}a} = \log_a e$.

Lo mismo se diria de cualquiera otra funcion inversa, de cuya directa conociésemos la derivada.

Derivadas de una combinacion cualquiera de funciones.

117. Si se trata de hallar la derivada de una combinacion cualquiera de funciones algebráicas ó trascendentes, pero que dependen de una misma variable x, se le aplica la regla de derivacion (112) correspondiente á las funciones compuestas, cuya regla reduce la cuestion á determinar la derivada de cada una de las funciones componentes que ya son más sencillas que la propuesta. Si estas funciones son á su vez combinaciones de otras, se les aplica la misma regla, y así se continúa hasta llegar al caso de ser todas funciones simples, cuyas derivadas sabemos hallar; ejecutando despues las operaciones que hayan quedado indicadas, se obtendrá el resultado final, ó sea la derivada de la combinacion de funciones que se nos haya dado.

Ejemplos de esto son los que hemos expuesto al final de la leccion anterior.

Derivadas sucesivas de una funcion cualquiera.

118. Como la derivada $f'(x)$ de $f(x)$ es á su vez otra funcion de la misma variable, podremos hallar la derivada $f''(x)$ de $f'(x)$, que será la derivada *segunda* ó de *segundo órden* de la funcion propuesta. La derivada de $f''(x)$ será la derivada *tercera* ó de *tercer órden*, y así sucesivamente.

El número de derivadas de una funcion depende en general de la naturaleza de esta funcion.

En las funciones racionales y enteras, el número de derivadas es finito; en las irracionales y trascendentes, son en número infinito.

119. Ya hemos visto (63), que las derivadas sucesivas de un polinómio del grado m, son polinómios cuyo grado va disminuyendo de unidad en unidad, hasta que se llega á una última derivada cero, que será la derivada del órden m.

120. Las derivadas sucesivas de a^x, serán $a^x \text{l}a$, $a^x(\text{l}a)^2$, $a^x(\text{l}a)^3$... $a^x(\text{l}a)^n$...

Las derivadas sucesivas de e^x, serán e^x, e^x, e^x... es decir, todas las derivadas son iguales.

Las derivadas de sen x, son: cos x,—sen x,—cos x, sen x, cos x, —sen x,... es decir, que se reproducen en períodos de cuatro en cuatro; así, la derivada del órden 38, será —sen x.

LECCION XII.

Teorema de Taylor aplicado á una funcion cualquiera de una variable.

eorema de Taylor aplicado á una funcion cualquiera de una variable.

121. El teorema de *Taylor* tiene por objeto desarrollar una funcion cualquiera $f(x)$ segun las potencias de h, cuando se sustituye x por el binómio $x+h$.

Ya hemos visto (63), que cuando $f(x)$ es una funcion racional y entera del grado m, si se sustituye x por el binómio $x+h$, se obtiene fácilmente, cualquiera que sea el valor de h,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\dots$$

$$+f^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2.3\dots m},$$

cuyo desarrollo no es otra cosa sino la fórmula de Taylor aplicada á una funcion racional y entera de x; el cual, componiéndose de un número finito $m+1$ de términos, expresa siempre el valor exacto de $f(x+h)$.

122. El teorema de Taylor puede hacerse extensible á una funcion cualquiera; pero como no siempre dará en el desarrollo un número finito de términos cuya suma algebráica sea el valor exacto del primer miembro, sino que en general dará orígen á una série compuesta de un número infinito de términos, será necesario, para poder hacer uso de esta fórmula, apreciar el error que se comete tomando por el valor total de la série, la suma de sus n primeros términos; error que estará determinado por el resto de la série. De manera, que si nosotros podemos determinar el valor, ó simplemente la forma, de este resto, en funcion de las cantidades x, h y n, número de términos que se consideran, y de ello podemos deducir que aumentando n indefinidamente, dicho resto tiene por límite cero, es evidente que la série á que da orígen la fórmula de Taylor será convergente, y la suma de sus n primeros términos dará el valor del desarrollo, tanto más aproximado, cuanto mayor sea el número de términos que se consideren.

123. Para la demostracion de la fórmula de Taylor y la determinacion de la forma del resto, necesitamos anteponer los dos lemas siguientes:

124. Primer lema. *Si se tienen dos funciones cualesquiera* $F(x)$ *y* $f(x)$, *de las cuales* $f(x)$ *sea siempre creciente ó decreciente, ó lo que es lo mismo* (72), *que su derivada sea constantemente positiva ó negativa para todos los valores de* x *comprendidos entre* x_0 *y* x_0+h, *y además la relacion* $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ *sea continua para todos los valores de* x *comprendidos entre los mismos límites, se verificará la relacion*

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)} \quad [1],$$

siendo θ un valor conveniente comprendido entre 0 y 1.

En efecto, supongamos, para fijar las ideas, que $f(x)$ sea creciente para valores de x comprendidos entre x_0 y x_0+h; ó lo que es lo mismo, que $f'(x)$ sea constantemente positiva para los valores de x comprendidos entre estos límites, y sean A y B el mayor y menor valor que tome la relacion $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ para valores de x comprendidos entre los mismos límites x_0 y x_0+h; de modo, que tendremos

$$\frac{F'(x)}{f'(x)}<A, \quad y \quad \frac{F'(x)}{f'(x)}>B;$$

ó quitando denominadores y dejando las desigualdades en el mismo sentido, puesto que $f'(x)$ es por hipótesis positiva, se tendrá

$$F'(x)<Af'(x), \quad y \quad F'(x)>Bf'(x);$$

ó lo que es lo mismo,

$$F'(x)-Af'(x)<0, \quad y \quad F'(x)-Bf'(x)>0.$$

Los primeros miembros de estas desigualdades son las derivadas respectivas de $F(x)-Af(x)$ y $F(x)-Bf(x)$; y como la primera de estas derivadas es negativa y la segunda positiva, la primera funcion será constantemente decreciente y la segunda creciente, para valores de x comprendidos entre x_0 y x_0+h; de modo, que se tendrá

$$F(x_0+h)-Af(x_0+h)<F(x_0)-Af(x_0),$$

y

$$F(x_0+h)-Bf(x_0+h)>F(x_0)-Bf(x_0);$$

de donde fácilmente se deduce

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}<A, \quad y \quad \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}>B.$$

Siendo, como suponemos, la relacion $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ contínua para los valores de x comprendidos entre x_0 y x_0+h, y siendo además A y B los valores límites de esta relacion, no habrá cantidad que hallándose comprendida entre estos límites, no pueda igualarse á la relacion $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, dando á x un valor conveniente comprendido entre x_0 y x_0+h.

Esto supuesto, la cantidad $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}$, que se halla comprendida entre A y B, será uno de los valores que tomará $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, cuando demos á x un cierto valor $x_0+\theta h$ comprendido entre x_0 y x_0+h; este valor se hallará comprendido entre estos límites, siempre que θ sea mayor que 0 y menor que 1; por consiguiente, podremos admitir que, segun las condiciones supuestas en el enunciado del lema, existe siempre un valor de θ comprendido entre 0 y 1, que verifica la relacion

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{F'(x_0+\theta h)}{f(x_0+\theta h)};$$

la cual expresa, que la relacion de los incrementos finitos de dos funciones $F(x)$ y $f(x)$, correspondientes á valores de x comprendidos entro x_0 y x_0+h, se puede siempre expresar por la relacion de las derivadas de estas funciones, con tal que se verifiquen las dos condiciones de ser $f'(x)$ constantemente de un mismo signo, y la relacion $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ contínua para valores de x comprendidos entre x_0 y x_0+h, que es lo que se queria demostrar.

125. Segundo lema. *Si para un valor particular* x_0 *de la variable* x, *se verifica que las funciones* F(x) *y* f(x) *y sus* n—1 *derivadas se reducen á cero, y que las relaciones de las derivadas del mismo órden, hasta la del órden* n *inclusive, son contínuas entre los valores mayor y menor que cada una de estas relaciones recibe, dando á* x *valores segun la ley de continuidad comprendidos entre* x_0 *y* x_0+h, *para lo cual basta que sean contínuas entre estos límites cada una de las derivadas* F'(x) *y* f'(x), F'' (x) *y* f''(x)... *se tendrá*

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{f^{(n)}(x_0+\theta h)} \qquad [2],$$

siendo θ *una cantidad comprendida entre* 0 *y* 1.

En efecto, si $F(x_0)=0$ y $f(x_0)=0$, la igualdad [1] se convertirá en

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}=\frac{F'(x_0+h_1)}{f'(x_0+h_1)},$$

siendo $h_1=\theta h<h$; pero se tiene, segun el lema anterior,

$$\frac{F'(x_0+h_1)-F'(x_0)}{f'(x_0+h_1)-f'(x_0)}=\frac{F''(x_0+\theta h_1)}{f''(x_0+\theta h_1)};$$

luego si $F'(x_0)=0$ y $f'(x_0)=0$, se verificará tambien

$$\frac{F'(x_0+h_1)}{f'(x_0+h_1)}=\frac{F''(x_0+\theta h_1)}{f''(x_0+\theta h_1)}=\frac{F''(x_0+h_2)}{f''(x_0+h_2)},$$

siendo $h_2=\theta h_1<h_1$; de donde tendremos

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F''(x_0+h_2)}{f''(x_0+h_2)}.$$

Continuando del mismo modo, y fundándonos siempre en las condiciones del lema, obtendremos en general

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F^{(n)}(x_0+h_n)}{f^{(n)}(x_0+h_n)},$$

verificándose la desigualdad $h_n<h$, y por tanto pudiéndose representar h_n por θh, siendo $\theta>0$ y <1; de modo que, segun queriamos demostrar, se verificará la relacion [2] enunciada en el lema.

126. Consecuencia. Si en la fórmula [2] hacemos $f(x)=(x-x_0)^n$, nos hallaremos en un caso particular comprendido en el segundo lema; pues $F(x)$ es la misma, y en $f(x)=(x-x_0)^n$ se verifica que $f(x)$ y sus $n-1$ derivadas se anulan para el valor particular de $x=x_0$. Además, las relaciones de las derivadas de un mismo órden son contínuas entre sus valores mayores y menores respectivos, por serlo cada una de estas derivadas; y por consiguiente tendremos

$$\frac{F(x_0+h)}{(x_0+h-x_0)^n}=\frac{F(x_0+h)}{h^n}=\frac{F^{(n)}(x_0+\theta h)}{1.2.3...n},$$

de donde deduciremos

$$F(x_0+h)=\frac{h^n}{1.2.3...n}F^{(n)}(x_0+\theta h);$$

y si en esta fórmula hacemos $x_0=0$, se tendrá

$$F(h)=\frac{h^n}{1.2.3...n}F^{(n)}(\theta h) \qquad [3].$$

127. Observacion importante. Esta igualdad [3], deducida de un caso particular comprendido en el segundo lema, tendrá lugar siempre que $F(h)$ y sus $n-1$ primeras derivadas se reduzcan á cero para el valor particular de $h=0$, y además dicha funcion y sus n primeras derivadas sean contínuas.

128. Teorema de Taylor. Sea $F(x+h)$ la funcion que queremos desarrollar segun las potencias enteras y positivas de h.

Escribamos un número n cualquiera de términos deducidos por la fórmula de Taylor, como si la funcion fuese racional y entera, y designemos por $\varphi(h)$ la funcion de x y h, que exprese la diferencia entre $F(x+h)$ y los n primeros términos formados, de modo que se tenga

$$F(x+h)-F(x)-F'(x)h-F''(x)\frac{h^2}{2}-F'''(x)\frac{h^3}{2.3}-\ldots$$

$$-F^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}=\varphi(h) \qquad (4).$$

Si en esta igualdad hacemos $h=0$, se hallará $\varphi(h)=0$.

Las derivadas con relacion á h de los dos miembros de esta igualdad, son iguales; de modo que se tendrá *

$$F'(x+h)-F'(x)-2F''(x)\frac{h}{2}-3F'''(x)\frac{h^2}{2.3}-\ldots$$

$$-(n-1)F^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-2}}{2.3\ldots(n-1)}=\varphi'(h);$$

que para el valor de $h=0$, se obtiene $\varphi'(h)=0$.

Derivando sucesivamente ambos miembros, hallaremos que $\varphi(h)$ y sus $n-1$ primeras derivadas se reducen á cero para el valor particular de $h=0$; y por último, que al llegar á efectuar la derivacion del órden n de la igualdad [4], se obtiene la relacion

$$F^{(n)}(x+h)=\varphi^{(n)}(h) \qquad [5].$$

Ahora bien, si $F(x)$ y todas sus derivadas son finitas y contínuas para valores de x comprendidos entre x y $x+h$, se tendrá que $\varphi(h)$ y sus derivadas serán tambien funciones finitas y contínuas entre estos límites de la variable, y como acabamos de ver anteriormente que para el valor de $h=0$, $\varphi(h)$ y sus $n-1$ primeras derivadas se reducen á cero, tenemos que $\varphi(h)$ se halla en las condiciones que se exigen para que se verifique la relacion [3], la cual se reduce en este caso á

$$\varphi(h)=\varphi^{(n)}(\theta h)\frac{h^n}{2.3\ldots n}.$$

Si en la igualdad [5] ponemos θh en vez de h, hallaremos

$$F^{(n)}(x+\theta h)=\varphi^{(n)}(\theta h);$$

y sustituyendo este valor en la igualdad anterior, se tendrá

$$\varphi(h)=F^{(n)}(x+\theta h)\frac{h^n}{2.3\ldots n}.$$

---

* La derivada con relacion á h de $F(x+h)$, es igual á la derivada de esta funcion, en la cual se considera como variable al binómio $x+h$; es decir, que $F'_h(x+h)=F'_{x+h}(x+h)$.

En efecto, sea $z=x+h$, é $y=F(z)=F(x+h)$. La derivada y' con relacion á h, será (109) $y'_h=F'_z(z)\times z'=F'_z(z)=F'_{x+h}(x+h)$.

Sustituyendo, por último, este valor de $\varphi(h)$—que no es otra cosa que la expresion de la forma que toma el resto de la série de Taylor aplicada á una funcion cualquiera del mismo modo que se aplica á las funciones racionales y enteras—en la igualdad [4], y trasponiendo al segundo miembro todos los términos del desarrollo, hallaremos la fórmula general de Taylor

$$F(x+h)=F(x)+F'(x)h+F''(x)\frac{h^2}{2}+\ldots$$

$$+F^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}+F^{(n)}(x+\theta h)\frac{h^n}{2.3\ldots n} \qquad [6].$$

129. Esta fórmula, que resuelve en general el problema de desarrollar una funcion $F(x+h)$ segun las potencias enteras y positivas de una de las dos cantidades, de h por ejemplo, nos manifiesta tambien en qué casos es posible este desarrollo y en qué casos no.

En efecto, si el resto de la série $\varphi(h)=F^{(n)}(x+\theta h)\dfrac{h^n}{2.3\ldots n}$ tiende hácia cero á medida que n crece indefinidamente, la funcion $F(x+h)$ es el límite hácia el cual tiende la série obtenida por la fórmula de Taylor, que se expresará en este caso por

$$F(x+h)=F(x)+F'(x)h+F''(x)\frac{h^2}{2}+\ldots+F^{(n)}(x)\frac{h^n}{2.3\ldots n}+\ldots$$

Mas para que esta série tenga lugar, se necesitan las condiciones exigidas en los lemas en que este desarrollo se apoya, las cuales, como ya hemos visto (127), se reducen en este caso á las dos siguientes: que sean contínuas $F(x)$ y todas sus derivadas, para valores de x comprendidos entre x y $x+h$, y además que la expresion del resto, ó sea $F^{(n)}(x+\theta h)\dfrac{h^n}{2.3\ldots n}$ tenga por límite cero; lo cual se expresa con la condicion de que $F(x)$ y cualquiera de sus derivadas sea finita, para valores de x comprendidos entre los mismos límites x y $x+h$.

En efecto, la expresion $\dfrac{h^n}{2.3\ldots n}$ tiene evidentemente por límite cero, cuando n crece indefinidamente (25); luego siendo en general $F^{(n)}(x)$ una cantidad finita para valores de x comprendidos entre x y $x+h$, $F^{(n)}(x+\theta h)$ será una cantidad finita, y el producto $F^{(n)}(x+\theta h)\dfrac{h^n}{2.3\ldots n}$ tendrá por límite cero, segun queriamos demostrar.

LECCION XIII.

Otra forma del resto en la fórmula de Taylor.—Fórmula de Taylor aplicada á una funcion de dos ó tres variables.—Fórmula de Maclaurin.

Otra forma del resto en la fórmula de Taylor.

130. La forma que hemos hallado para el resto en la série de Taylor [6],

$$\varphi(h)=\mathrm{F}^{(n)}(x+\theta h)\,\frac{h^n}{2.3\ldots\, n} \qquad [\mathrm{A}],$$

no siempre es á propósito para demostrar la convergencia de la série de Taylor en cada caso particular, ó más bien para justificar que esta expresion tiene por límite cero, cuando n crece indefinidamente, y por tanto que el límite de la suma de los n primeros términos del desarrollo, es la funcion que está en el primer miembro; por lo que conviene hallar otra forma para el valor del resto, que evita en general este inconveniente.

Si en la fórmula de Taylor [6] reemplazamos x por z, y hacemos $h=x-z$, dicha fórmula se convertirá en

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(z)+\mathrm{F}'(z)(x-z)+\mathrm{F}''(z)\,\frac{(x-z)^2}{2}+\ldots$$

$$+\mathrm{F}^{(n-1)}(z)\frac{(x-z)^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}+\varphi(z) \qquad [a],$$

haciendo, para abreviar,

$$\varphi(z)=\mathrm{F}^{(n)}[z+\theta(x-z)]\frac{(x-z)^n}{2.3\ldots\, n}.$$

Hallando las derivadas con relacion á z, de los dos miembros de la igualdad [a], se tendrá

$$0=\mathrm{F}'(z)+\mathrm{F}''(z)(x-z)-\mathrm{F}'(z)+\mathrm{F}'''(z)\frac{(x-z)^2}{2}-\mathrm{F}''(z)(x-z)+\ldots$$

$$+\mathrm{F}^{(n)}(z)\frac{(x-z)^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}-\mathrm{F}^{(n-1)}(z)\frac{(x-z)^{n-2}}{2.3\ldots(n-2)}+\varphi'(z).$$

Simplificando y sacando el valor de $\varphi'(z)$, hallaremos

$$\varphi'(z)=-F^{(n)}(z)\frac{(x-z)^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)} \qquad [b].$$

Si en la igualdad [a] sustituimos z por x, se tendrá

$$\varphi(x)=0.$$

Haciendo en esta misma igualdad $n=1$, se tendrá, llamando θ_1 el valor particular de θ correspondiente á este caso,

$$F(x)=F(z)+F'[z+\theta_1(x-z)](x-z);$$

y reemplazando F por φ, lo cual es posible, por ser cierta la igualdad [6] de donde se ha deducido, para cualquiera que sea la funcion, se tendrá

$$\varphi(x)=\varphi(z)+\varphi'[z+\theta_1(x-z)](x-z);$$

pero en este caso se verifica que $\varphi(x)=0$; luego tendremos

$$\varphi(z)=-\varphi'[z+\theta_1(x-z)](x-z) \qquad [c].$$

Además, de la fórmula [b] se deduce

$$\varphi'[z+\theta_1(x-z)]=-F^{(n)}[z+\theta_1(x-z)]\frac{[x-z-\theta_1(x-z)]^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)},$$

ó $\varphi'[z+\theta_1(x-z)]=-F^{(n)}[z+\theta_1(x-z)]\dfrac{(1-\theta_1)^{n-1}(x-z)^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}$; cuyo valor sustituido en la fórmula [c], nos dá

$$\varphi(z)=F^{(n)}[z+\theta_1(x-z)]\frac{(1-\theta_1)^{n-1}(x-z)^n}{2.3\ldots(n-1)}.$$

Llamando R á esta expresion, haciendo $x=z+h$, y sustituyendo despues z por x, se tendrá para la nueva forma del resto

$$R=F^{(n)}(x+\theta_1 h)\frac{(1-\theta_1)^{n-1}h^n}{2.3\ldots(n-1)} \qquad [B],$$

y la fórmula de Taylor, haciendo las mismas hipótesis en la igualdad [a], tomará la nueva forma

$$F(x+h)=F(x)+F'(x)h+F''(x)\frac{h^2}{2}+\ldots+F^{(n-1)}(x)\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}+$$

$$F^{(n)}(x+\theta_1 h)\frac{(1-\theta_1)^{n-1}h^n}{2.3\ldots(n-1)} \qquad [7].$$

131. Observaciones. 1.ª Cuando todas las derivadas de $F(x)$, inclusa esta funcion, son finitas y contínuas para valores de x comprendidos entre x y $x+h$, la fórmula de Taylor es verdadera y da el valor aproximado de $F(x+h)$, tomando para dicho valor la suma

de los n primeros términos; y este valor será tanto más aproximado cuanto mayor sea el número n.

2.ª Si la funcion $F(x)$ y sus n primeras derivadas cumplen con la condicion de ser finitas y contínuas para valores de la variable comprendidos entre x y $x+h$, y las derivadas del órden superior al órden n pueden ser discontínuas en el mismo intervalo, la fórmula será exacta hasta el término del lugar n; pero podrá dejar de serlo de este término en adelante.

3.ª La fórmula de Taylor puede dar orígen á una série convergente, y sin embargo, ésta no expresar el valor de la funcion que la ha producido, lo cual sucederá cuando la expresion del resto no tenga por límite cero, creciendo n indefinidamente, y sí una cantidad finita, en cuyo caso, el valor de la funcion será el valor de la série mas el del resto.

4.ª La fórmula [6] puede dar el límite del error que se comete tomando los n primeros términos, para lo cual no hay más que calcular el mayor y el menor valor que tiene $F^{(n)}(x)$ en el intervalo de x y $x+h$, y el límite del error estará dado, llamando A y B á estos dos valores, por $\dfrac{h^n}{2.3\ldots n}(A-B)$.

Fórmula de Taylor aplicada á una funcion de dos ó tres variables.

132. La fórmula de Taylor puede hacerse extensible á funciones de dos, tres ó más variables; nosotros no consideraremos más que el caso de que tenga dos ó tres variables, y áun estas referidas á funciones racionales y enteras.

Sea, en primer lugar, una funcion de dos variables

$$z=f(x,\ y),$$

y veamos en qué se convierte cuando sustituimos en vez de x é y, los binómios $x+h$ é $y+k$.

Para esto, supongamos primero que se le dá á y un incremento k, permaneciendo x como constante, en cuyo caso la funcion z recibirá un incremento parcial Δz_y; de modo que, segun el teorema de Taylor para el caso de ser una la variable, tendremos, haciendo uso de la notacion indicada (111),

$$z+\Delta z_y=f(x,\ y+k)=f(x,\ y)+f'(x,\ y_1)k+f''(x,\ y_2)\frac{k^2}{2}+\ldots$$

Supongamos ahora constante el valor $y+k$, demos á x el incremento h, y obtendremos, para valor final de la funcion,

$$z+\Delta z=f(x+h,\ y+k)=f(x+h,\ y)+f'(x+h,\ y_1)k+$$
$$f''(x+h,\ y_2)\frac{k^2}{2}+\dots \qquad [1].$$

Desarrollando las funciones del segundo miembro por la fórmula de Taylor, se hallará

$$f(x+h,y)=f(x\,y)+f'(x_1y)h+f''(x_2y)\frac{h^2}{2}+f'''(x_3y)\frac{h^3}{2.3}+\dots$$

$$f'(x+h,y_1)=f'(x\,y_1)+f''(x_1y_1)h+f'''(x_2y_1)\frac{h^2}{2}+f^{\text{IV}}(x_3y_1)\frac{h^3}{2.3}+\dots$$

$$f''(x+h,\ y_2)=f''(x\,y_2)+f'''(x_1y_2)h+f^{\text{IV}}(x_2y_2)\frac{h^2}{2}+\dots$$

$$f'''(x+h,y_3)=f'''(x\,y_3)+f^{\text{IV}}(x_1y_3)h+f^{\text{V}}(x_2y_3)\frac{h^2}{2}+\dots$$

. . . .

. . . .

y sustituyendo, finalmente, estos desarrollos en la igualdad [1], se tendrá la fórmula

$$f(x+h,y+k)=$$
$$f(x\,y)+f'(x_1\,y)h+f''(x_2y)\frac{h^2}{2}+f'''(x_3y)\frac{h^3}{2.3}+\dots$$
$$+f'(x\,y_1)k+2f''(x_1y_1)\frac{hk}{2}+3f'''(x_2y_1)\frac{h^2k}{2.3}+\dots$$
$$+f''(x\,y_2)\frac{k^2}{2}+3f'''(x_1y_2)\frac{hk^2}{2.3}+\dots$$
$$+f'''(xy_3)\frac{k^3}{3.3}+\dots$$

cuya ley es bien sencilla y fácil de retener.

133. Conociendo la ley del desarrollo segun el teorema de Taylor, para funciones de una y dos variables, podremos deducir como anteriormente la ley de este desarrollo cuando la funcion tenga tres variables. En efecto, sea la funcion $f(x,\ y,\ z)$; suponiendo que x es constante, tendremos

$$f(x,\ y+k,\ z+l)=f(x,\ y,\ z)+f'(x,\ y_1,\ z)k+f''(x,\ y_2,\ z)\frac{k^2}{2}+\dots$$

$$+f'(x,\, y,\, z_1)l + 2f''(x, y_1, z_1)\frac{kl}{2} + \ldots$$

$$+f''(x,\, y,\, z_2)\frac{l^2}{2} + \ldots$$

Si ahora damos un incremento h á x, se hallará

$$f(x+k,\, y+h,\, z+l) =$$

$$f(x+h,\, y,\, z) + f'(x+h,\, y_1,\, z)k + f''(x+h,\, y_2,\, z)\frac{k^2}{2} + \ldots$$

$$+f'(x+h,\, y,\, z_1)l + 2f''(x+h, y_1,\, z_1)\frac{kl}{2} + \ldots$$

$$+f''(x+h,\, y,\, z_2)\frac{l^2}{2} + \ldots$$

Desarrollando estas funciones, y sustituyendo todos estos desarrollos en la igualdad anterior, hallaremos la fórmula

$$f(x+h, y+k, z+l) =$$

$$f(x,y,z) + f'(x_1, y, z)h + f''(x_2,\, y,\, z)\frac{h^2}{2} + \ldots$$

$$+f'(x, y_1, z)k + 2f''(x_1, y_1,\, z)\frac{hk}{2} + \ldots$$

$$+f'(x,\, y,\, z_1)l + f''(x,\, y_2,\, z)\frac{k^2}{2} + \ldots$$

$$+2f''(x_1, y, z_1)\frac{hl}{2} + \ldots$$

$$+2f''(x, y_1, z_1)\frac{kl}{2} + \ldots$$

$$+f''(x,\, y,\, z_2)\frac{l^2}{2} + \ldots$$

cuya ley, lo mismo que en el caso anterior, es fácil de comprender y retener, por la grande analogía que tiene con la de las potencias de un binómio ó trinómio, segun tenga la funcion dos ó tres variables.

Fórmula de Maclaurin.

134. La fórmula de *Maclaurin* no es sino una consecuencia de la de Taylor; se obtiene *haciendo en esta* x = 0, *y luégo cambiando* h *en* x.

Así, si en la fórmula [6] de Taylor (128) hacemos primero $x=0$, y luégo sustituimos h por x, hallaremos

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+F''(0)\frac{x^2}{2}+\ldots+F^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}+$$
$$F^{(n)}(\theta x)\frac{x^n}{2.3\ldots n} \qquad [M].$$

Del mismo modo hallaremos, haciendo las mismas sustituciones en la fórmula de Taylor puesta bajo la forma [7],

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+F''(0)\frac{x^2}{2}+\ldots+F^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}+$$
$$F^{(n)}(\theta_1 x)\frac{(1-\theta_1)^{n-1}x^n}{2.3\ldots(n-1)} \qquad [M'];$$

cuyas dos fórmulas, llamadas de Maclaurin, sirven para desarrollar una funcion cualquiera $F(x)$ en série, segun las potencias enteras y positivas de la variable x.

En estas fórmulas, lo mismo que en las de Taylor, es menester tener presente en su aplicacion que el límite de la expresion del resto sea cero cuando n crece indefinidamente, en cuyo caso el valor de la série expresa el de la funcion.

135. El teorema de Maclaurin puede hacerse extensible á funciones de muchas variables, pero nosotros no nos ocuparemos de ello.

LECCION XIV.

Aplicacion de las séries de Taylor y de Maclaurin.—Fórmula del binómio.—Série exponencial.—Séries trigonométricas.—Cálculo del número π.

Aplicacion de las séries de Taylor y de Maclaurin.

136. Las séries de Taylor y de Maclaurin nos suministran el medio de convertir cualquier funcion en série, siempre que ésta resulte convergente, y además el valor finito hácia el cual tienda sea el de

la funcion propuesta; para lo cual, una vez probado lo primero, basta demostrar, para que se verifique lo segundo, que la expresion del resto á que la série de Taylor ó de Maclaurin da orígen, tiene por límite cero cuando el número n de términos que se considera crece indefinidamente.

Fórmula del binómio.

137. Si en la fórmula [M] de Maclaurin (134) hacemos $F(x) = (1+x)^m$, tendremos

$$F(x) = (1+x)^m,\ F'(x) = m(1+x)^{m-1},\ \ldots\ F^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$F(0) = 1,\ F'(0) = m, \ldots F^{(n)}(\theta x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n};$$

y por consiguiente,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{2.3\ldots(n-1)}x^{m-n+1} +$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}.$$

Para que esta série represente el valor de $(1+x)^m$, es necesario que sea convergente, y además que la expresion del resto

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n},$$

tenga por límite cero cuando n crezca indefinidamente.

La série obtenida anteriormente de la expresion $(1+x)^m$, es la misma á que da orígen la fórmula del binómio aplicada como si m fuese entero y positivo; pero esta série no puede ser convergente sino para valores de x comprendidos entre -1 y $+1$ (26); es decir, para valores numéricos de x menores que la unidad.

Ahora bien, si para valores de x comprendidos entre -1 y $+1$, la expresion del resto tiene por límite cero cuando n crece indefinidamente, el valor finito hácia el cual dicha série converge será el valor de $(1+x)^m$, y la fórmula del binómio será cierta cualquiera que sea m, cumpliendo x con las condiciones enunciadas.

Para hallar el límite hácia el cual tiende el resto R que completa el valor de la série, le descompondremos en tres factores de la manera siguiente:

$$R=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots n}\times(1+\theta x)^{m-n}\times x^n.$$

El primer factor tiene por límite una cantidad finita, cuando n crece indefinidamente. En efecto, si llamamos i al número entero inmediatamente superior á m, dicho primer factor, que representaremos para abreviar por f, se podrá poner bajo la forma

$$f=\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{2.3\ldots i}\times\left(\frac{i-m}{i+1}\cdot\frac{i+1-m}{i+2}\cdots\frac{n-m-1}{n}\right).$$

El primer factor de este nuevo producto es evidentemente una cantidad finita; el segundo factor que está dentro del paréntesis, es el producto de un número de factores menores que la unidad; por consiguiente, su producto será tanto menor, cuanto mayor sea el número de factores; luego f es numéricamente menor que $\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{2.3\ldots i}$, y por tanto una cantidad finita, segun queriamos demostrar.

El segundo factor $(1+\theta x)^{m-n}$, se puede poner bajo la forma

$$(1+\theta x)^{m-n}=\frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}};$$

y en el caso de ser x positiva, vemos que esta expresion es constantemente menor que la unidad y tiene por límite cero; en el caso de ser $\theta=0$, se reducirá á la unidad: luego el segundo factor es numéricamente menor que la unidad, siempre que x sea positiva, cualquiera que sea n.

Por último, el tercer factor x^n tiene por límite cero, puesto que x suponemos ser numéricamente menor que 1; luego el producto de estos tres factores tendrá por límite cero, siempre que x sea positiva y menor que la unidad.

Si x tiene un valor negativo igual á $-x$, menor en valor numérico que la unidad, la expresion del resto tiene tambien por límite cero; mas para demostrarlo tenemos necesidad de recurrir á la otra forma que hemos dado á dicho resto, la cual en este caso se convierte en

$$R=\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots(n-1)}\times(1-\theta_1)^{n-1}\times(1-\theta_1 x)^{m-n}\times x^n,$$

ó

$$R = \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{2.3\ldots(n-1)} \times (1-\theta_1 x)^{m-1} \times \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_1 x}\right)^{n-1} \times x^n.$$

En esta expresion de R se vé fácilmente, que el primer factor es, como en el caso anterior, una cantidad finita; el segundo tambien lo es evidentemente; el tercero, ó tiene cero por límite, ó constantemente es menor que la unidad, á causa de ser $\frac{1-\theta_1}{1-\theta_1 x} < 1$; por último, el cuarto factor x^n tiene por límite cero, y por consiguiente el producto de los cuatro factores, ó sea el resto R, tiene por límite cero cuando n crece indefinidamente.

De donde se deduce, que la fórmula del binómio de Newton se verifica, y sirve para calcular el valor de la expresion $(1+x)^m$, cualquiera que sea m, siempre que x se halle comprendida entre -1 y $+1$; en los demás casos, á excepcion de aquellos en que el exponente m sea entero y positivo, la fórmula del binómio deja de ser cierta.

Observacion. Como todo binómio $x+a$ puede ponerse bajo la forma $x\left(1+\frac{a}{x}\right)$, la potencia de todo binómio puede tambien expresarse por $x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$; más para que el desarrollo á que da orígen la fórmula del binómio sea cierto, cuando m no sea un número entero y positivo, es menester que se tenga, como anteriormente hemos visto,

$$\frac{a}{x} > -1 \text{ y } \frac{a}{x} < 1, \text{ de donde } x > a;$$

luego a se ha de hallar comprendida entre $-x$ y $+x$, siendo como es consiguiente su valor numérico menor que el de x.

Série exponencial.

138. Aplicando la série de Maclaurin á la funcion a^x, hallaremos (120)

$$F(x)=a^x,\ F'(x)=a^x\,\mathrm{l}a,\ F''(x)=a^x\,\mathrm{l}^2a,\ldots\ F^{(n)}(x)=a^x\,\mathrm{l}^n a,$$

$$F(0)=1,\ F'(0)=\mathrm{l}a,\ F''(0)=\mathrm{l}^2a,\ldots\ F^{(n)}(\theta x)=a^{\theta x}.\,\mathrm{l}^n a;$$

y por consiguiente, se tendrá

$$a^x = 1 + x\mathrm{l}a + \frac{x^2\mathrm{l}^2a}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}\mathrm{l}^{n-1}a}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{x^n\mathrm{l}^n a}{1.2.3\ldots n} a^{\theta x}.$$

Esta série es convergente, cualquiera que sea el valor de x; pues la relacion de uno de sus términos al anterior, es $\frac{x\mathrm{l}a}{n}$, y tiene, como se ve, por límite cero: además, el límite del resto R de la série es tambien cero; porque el factor $a^{\theta x}$ es constante y necesariamente finito, y el factor $\frac{x^n\mathrm{l}^n a}{1.2.3\ldots n} = \frac{(x\mathrm{l}a)^n}{1.2.3\ldots n}$ tiene por límite cero, cualquiera que sea $x\mathrm{l}a$ (25); luego el límite del resto es siempre cero, y por tanto el de la série es a^x.

139. Si consideramos como caso particular la expresion e^x, hallaremos por igual procedimiento

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

Séries trigonométricas.

140. *Desarrollo en série de* sen x.

De la igualdad $\mathrm{F}(x) = \operatorname{sen} x$, se deduce (120)

$$\mathrm{F}'(x) = \cos x,\ \mathrm{F}''(x) = -\operatorname{sen} x,\ \mathrm{F}'''(x) = -\cos x,$$
$$\mathrm{F}^{\mathrm{iv}}(x) = \operatorname{sen} x = \mathrm{F}(x),\ \mathrm{F}^{\mathrm{v}}(x) = \mathrm{F}'(x) = \cos x, \ldots$$

y $\mathrm{F}(0)=0$, $\mathrm{F}'(0)=1$, $\mathrm{F}''(0)=0$, $\mathrm{F}'''(0)=-1$, $\mathrm{F}^{\mathrm{iv}}(0)=0$;... por consiguiente,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} \mp \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} \cos(\theta x).$$

Esta série es convergente cualquiera que sea el arco x (16); además se tiene $\lim. \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} \cos(\theta x) = 0$, por hallarse $\cos(\theta x)$ comprendido entre -1 y $+1$, y el factor $\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}$ tener por límite cero; luego el valor de la série anterior expresa el de la funcion sen x; de modo que se tiene, cualquiera que sea x,

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{1.2.3\ldots(2n-1)} \mp$$
$$\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} \pm \ldots$$

141. *Desarrollo en série de* cos x.

De la misma manera que anteriormente, hallaremos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{2n-2}}{1.2.3\ldots(2n-2)} \mp \frac{x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} \pm \ldots$$

Observacion. Si en la série exponencial e^x cambiamos x en $x\sqrt{-1}$, se obtiene

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x}{1}\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\sqrt{-1} - \ldots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + \left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)\sqrt{-1},$$

ó
$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\ \text{sen}\, x.$$

Si en esta fórmula cambiamos x en nx, se tendrá

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \cos nx + \sqrt{-1}\ \text{sen}\, nx;$$

y si la elevamos á la potencia n, hallaremos

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1}\ \text{sen}\, x)^n,$$

de cuyas dos igualdades se deduce la *fórmula de Moivre*

$$(\cos x + \sqrt{-1}\ \text{sen}\, x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\ \text{sen}\, nx.$$

142. Por medio de las séries del seno y coseno de un arco, se puede calcular fácilmente el valor numérico de una cualquiera de estas líneas, conocida la longitud del arco, ó sea la relacion del arco al cuadrante valuada en unidades lineales. Así, suponiendo que el radio de una circunferencia es la unidad, la longitud del cuadrante, ó sea del arco de 90°, será $\frac{\pi}{2} = 1{,}57079632679489661923$.

Si ahora, en las séries del seno y coseno, hacemos $x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{n}$, y calculamos los coeficientes con veinte cifras decimales, obtendremos las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}.\frac{m}{n}\right)=\operatorname{sen}\left(90^\circ.\frac{m}{n}\right)=$$

$$\begin{aligned}
&1,57079632679489661923\frac{m}{n}\\
&-0,64596409750624625366\frac{m^3}{n^3}\\
&+0,07969262624616704512\frac{m^5}{n^5}\\
&-0,00468175413531868810\frac{m^7}{n^7}\\
&+0,00016044118478735982\frac{m^9}{n^9}\\
&-0,00000359884323521209\frac{m^{11}}{n^{11}}\\
&+0,00000005692172921968\frac{m^{13}}{n^{13}}\\
&-0,00000000066880351093\frac{m^{15}}{n^{15}}\\
&+0,00000000000606693573\frac{m^{17}}{n^{17}}\\
&-0,00000000000004377065\frac{m^{19}}{n^{19}}\\
&+0,00000000000000025714\frac{m^{21}}{n^{21}}\\
&-0,00000000000000000125\frac{m^{23}}{n^{23}}
\end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}.\frac{m}{n}\right)=\cos\left(90^\circ.\frac{m}{n}\right)=$$

$$\begin{aligned}
&1,00000000000000000000\\
&-1,23370055013616982735\frac{m^2}{n^2}\\
&+0,25366950790104801364\frac{m^4}{n^4}\\
&-0,02086348076335296087\frac{m^6}{n^6}\\
&+0,00091926027483942658\frac{m^8}{n^8}\\
&-0,00002520204237306061\frac{m^{10}}{n^{10}}\\
&+0,00000047108747788182\frac{m^{12}}{n^{12}}\\
&-0,00000000638660308379\frac{m^{14}}{n^{14}}\\
&+0,00000000006565963115\frac{m^{16}}{n^{16}}\\
&-0,00000000000052944002\frac{m^{18}}{n^{18}}\\
&+0,00000000000000343774\frac{m^{20}}{n^{20}}\\
&-0,00000000000000001836\frac{m^{22}}{n^{22}}\\
&+0,00000000000000000008\frac{m^{24}}{n^{24}}
\end{aligned}$$

La relacion $\frac{m}{n}$ podemos siempre suponerla menor que $\frac{1}{2}$, pues los senos y cosenos de los arcos comprendidos entre 0 y 45°, comprenden los cosenos y senos de los arcos mayores que 45° y menores que 90°.

Siendo la relacion $\frac{m}{n}$ igual ó menor que $\frac{1}{2}$, las séries anteriores dan, con un corto número de términos, el valor del seno ó coseno de un arco mayor que 0 y menor que 90^0.

Así, haciendo sucesivamente $\frac{m}{n}=\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{2}$, se obtendrán los resultados siguientes:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(90^0.\tfrac{1}{10})=\operatorname{sen}\ 9^0 &&=\cos 81^0=0,1564344650\\
&\operatorname{sen}(90^0.\tfrac{2}{10})=\operatorname{sen}\ 18^0 &&=\cos 72^0=0,3090169944\\
&\operatorname{sen}(90^0.\tfrac{3}{10})=\operatorname{sen}\ 27^0 &&=\cos 63^0=0,4539904997\\
&\operatorname{sen}(90^0.\tfrac{4}{10})=\operatorname{sen}\ 36^0 &&=\cos 54^0=0,5877852523
\end{aligned}$$

$$\text{sen}\,(90^0.\tfrac{1}{2}) = \text{sen}\ 45^0 = \cos 45^0 = 0,7071067812$$
$$\text{sen}\ 54^0 = \cos(90^0.\tfrac{4}{10}) = \cos 36^0 = 0,8090169944$$
$$\text{sen}\ 63^0 = \cos(90^0.\tfrac{3}{10}) = \cos 27^0 = 0,8910065242$$
$$\text{sen}\ 72^0 = \cos(90^0.\tfrac{2}{10}) = \cos 18^0 = 0,9510565163$$
$$\text{sen}\ 81^0 = \cos(90^0.\tfrac{1}{10}) = \cos\ 9^0 = 0,9876883406$$

Observacion. Las séries que dan los valores del seno ó coseno de un arco presentan la particularidad de ser periódicas en los valores que adquieren, creciendo x indefinidamente.

En efecto, acabamos de ver que por medio de las fórmulas anteriores podemos hallar los valores del seno ó coseno de un arco cualquiera comprendido entre 0 y 90^0, dando á $\frac{m}{n}$ valores comprendidos entre 0 y $\frac{1}{2}$; pero los valores de los senos de los arcos mayores que $90°$ y menores que 180^0, son iguales á los de los arcos mayores que 0 y menores que 90^0, y los cosenos iguales y de signo contrario; luego dando á $\frac{m}{n}$ valores mayores que 1 y menores que 2, hallaremos los mismos valores para los senos, y los mismos valores, pero negativos, para los cosenos.

Lo mismo se verá que dando á $\frac{m}{n}$ valores mayores que 2 y menores que 4, se reproducen los mismos valores numéricos de los senos y cosenos, con sólo la diferencia de signos; despues, si damos á $\frac{m}{n}$ valores mayores que 4 y menores que 8, obtendremos absolutamente los mismos valores para la série, y lo mismo sucederá si á $\frac{m}{n}$ se le dan valores comprendidos entre 8 y 12, 12 y 16, 16 y 20, etc.; luego las séries del seno y coseno, que son polinómios algebráicos, si bien de un número infinito de términos, dan valores que se repiten periódica é indefinidamente, creciendo x.

Así, hemos visto que haciendo $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, se obtiene

$$\text{sen}\ 45^0 = 0,7071067812;$$

y si hacemos $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$, hallaremos que el valor de la série se convierte en

$$\operatorname{sen}\left(90^\circ.\frac{3}{2}\right)=\operatorname{sen} 135^\circ=$$

$$\begin{array}{l}2{,}356194490192-2{,}180128829084\\+0{,}605165880557-0{,}079992158546\\+0{,}006167898125-0{,}000311291154\\+0{,}000011078079-0{,}000000292865\\+0{,}000000005978-0{,}000000000097\\\hline\end{array}$$

$$=2{,}967539352931-2{,}260432571746=$$

$$\operatorname{sen} 135^\circ=0{,}707106781185=\operatorname{sen} 45^\circ.$$

Donde vemos, que para los valores $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ de la relacion $\frac{m}{n}$, la série da los mismos valores, como debia suceder, pues corresponden á los valores de los senos de 45° y 135°, que deben ser iguales.

143. *Desarrollo en série de* arc tg x.

De la igualdad $F(x)=\text{arc. tg } x$, se deduce

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots\pm x^m\mp\ldots$$

cuya série es convergente, y expresa el valor de $F'(x)$, siempre que demos á x valores comprendidos entre 0 y 1; además, á valores crecientes de x, la série constantemente es decreciente; pero se observa que esta misma série es la derivada de esta otra,

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\pm\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\mp\ldots$$

luego esta última série es igual á $F(x)=\text{arc tg } x$, ó no difiere más que en una constante (76, CONS.), que podremos representar por C, de modo que se tendrá

$$\text{arc tg } x=C+\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\pm\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\mp\ldots$$

Si ahora observamos que para el valor de $x=0$, arc tg x es igual cero tambien, se tendrá $C=0$; y por consiguiente, la série del arco tg x, será

$$\text{arc gt } x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\pm\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\mp\ldots$$

Siendo arc tg $(-x)=-$arc tg x, la igualdad anterior se verifica cambiando x en $-x$, no olvidando que el valor numérico de esta variable se ha de hallar comprendido entre 0 y 1.

Cálculo del número π.

144. Si en la fórmula anterior hacemos $x=1$, y observamos que arc tg $1=\frac{\pi}{4}$, la série es todavía convergente, y da la igualdad

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\pm\frac{1}{2n+1}\mp\ldots$$

de la cual podremos deducir el valor de π, aunque con mucho trabajo, por ser la série muy poco convergente.

Para obtener el valor de π con más sencillez, ha sido necesario buscar otras séries más convergentes; muchas son las que con este objeto se han determinado, y muchos los procedimientos que se han seguido; nosotros expondremos tan sólo la série por medio de la cual podremos hallar más fácilmente el valor de π. Para ello, si hacemos

$$\operatorname{tg} a=\frac{1}{5},$$

se tendrá $\operatorname{tg} 2a=\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}=\frac{5}{12}$,

y
$$\operatorname{tg} 4a=\frac{2\operatorname{tg} 2a}{1-\operatorname{tg}^2 2a}=\frac{120}{119};$$

donde vemos, que siendo $\frac{120}{119}$ poco diferente de la unidad, $4a$ se diferencia muy poco de $\frac{\pi}{4}$; de modo, que si llamamos b á esta diferencia, se tendrá

$$\frac{\pi}{4}=4a-b, \text{ ó } b=4a-\frac{\pi}{4};$$

de donde deduciremos

$$\operatorname{tg} b=\frac{\operatorname{tg} 4a-1}{1+\operatorname{tg} 4a}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}.$$

De esta igualdad, y de $\operatorname{tg} a=\frac{1}{5}$, se saca

$$a=\text{arc tg}\frac{1}{5},\ \text{y}\ b=\text{arc tg}\frac{1}{239};$$

cuyos valores, sustituidos en la série del arc tg x (143), dan

$$a=\text{arc tg}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\dots$$

$$b=\text{arc tg}\frac{1}{239}=\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\dots$$

De la primera de estas desigualdades sacaremos el valor de $4a$; y sustituyéndole con el de b en la expresion $\frac{\pi}{4}=4a-b$, se tendrá

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\dots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\dots\right)$$

por cuya fórmula se puede hallar el valor de π con bastante aproximacion y no con mucho trabajo.

LECCION XV.

Séries logarítmicas.--Construccion de unas tablas de logaritmos.

Séries logarítmicas.

145. *Desarrollo en série de* $l(1+x)$.

De la igualdad $F(x)=l(1+x)$, se deduce

$$F'(x)=(1+x)^{-1},\ F''(x)=-(1+x)^{-2},\ F'''(x)=1.2(1+x)^{-3},\dots$$

$$F^{(n-1)}(x)=\mp 1.2.3\dots(n-2)\,(1+x)^{-(n-1)},$$

$$F^{(n)}(x)=\pm 1.2.3\dots(n-1)(1+x)^{-n};$$

además,

$$F(0)=0,\ F'(0)=1,\ F''(0)=-1,\ F'''(0)=1.2,\ \dots$$

$$F^{(n-1)}(0)=\mp 1.2.3\dots(n-2),\ F^{(n)}(\theta x)=\pm 1.2.3\dots(n-1)\,(1+\theta x)^{-n};$$

y sustituyendo estos valores en la série [M] de Maclaurin (134), hallaremos

$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\mp\frac{x^{n-1}}{n-1}\pm\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}.$$

Para que el valor de la série exprese el de la funcion $l(1+x)$, es necesario, como ya sabemos, que dicha série sea convergente, y además que el resto de la misma, ó sea $\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$, tenga por límite cero. Para que la primera condicion sea satisfecha, basta que el valor numérico de x sea menor que la unidad; en cuanto á la segunda, distinguiremos dos casos, segun que el valor de x sea positivo ó negativo.

Si el valor de x es positivo y se halla comprendido entre 0 y 1, se tendrá evidentemente $\frac{x}{1+\theta x}<1$; y por tanto, la expresion del resto $\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}=\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ tendrá por límite cero, y la série convergerá hácia el valor de $l(1+x)$; de modo, que si x se halla comprendida entre 0 y 1, se tendrá

$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\pm\frac{x^n}{n}\mp\ldots \qquad [L].$$

Si el valor de x es negativo y se halla comprendido entre 0 y -1, la expresion del resto toma la forma $\frac{x^n}{n(1-\theta x)^n}=\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1-\theta x}\right)^n$, de la cual no podemos deducir el límite, porque cuando n se hace infinito, toma la forma indeterminada.

Pero si empleamos la fórmula [M'] del núm. 134, hallaremos para expresion del resto, cuando x tenga un valor negativo $-x$,

$$R=\frac{(1-\theta_1)^{n-1}x^n}{(1-\theta_1 x)^n}=\frac{x}{1-\theta_1 x}\left(\frac{x-\theta_1 x}{1-\theta_1 x}\right)^{n-1}.$$

Si ahora suponemos que el valor numérico de x se halla comprendido entre 0 y 1, la fraccion $\frac{x-\theta_1 x}{1-\theta_1 x}$ es menor que la unidad; luego la potencia $n-1$ de esta fraccion tiene por límite cero, y por consiguiente la expresion del resto tiene tambien cero por límite, y la série converge hácia el valor de la funcion $l(1-x)$.

Por lo tanto, la série [L] puede emplearse siempre que á x se le den valores positivos ó negativos comprendidos entre $+1$ y -1. Dando á x el valor $-x$, se tendrá

$$-l(1-x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots \quad [L'].$$

Observacion. Si en las fórmulas [L] y [L'] hacemos $x=1$, hallaremos

$$l2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

y
$$+\infty=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

lo cual nos prueba, que la igualdad [L] se verifica tambien para el valor $x=1$, puesto que la série todavía es convergente y el límite del resto es cero; la segunda igualdad viene á justificarnos que la série armónica es divergente.

Construccion de unas tablas de logaritmos

146. Las séries logarítmicas [L] y [L'] halladas anteriormente son muy poco convergentes, y además sólo pueden servir para calcular los logaritmos de los números menores que 2, por lo que son inútiles para calcular unas tablas de logaritmos; pero combinándolas convenientemente, se pueden obtener séries bastante convergentes, por medio de las cuales podemos calcular fácilmente los logaritmos neperianos de la série natural de los números; y una vez hallados estos logaritmos neperianos, podremos obtener los de otro sistema cualquiera, multiplicando éstos por el módulo correspondiente (*Álgebra*, tomo I, núm. 467).

147. Para obtener una série por medio de la cual podamos calcular con facilidad unas tablas de logaritmos, sumemos las dos séries [L] y [L'], y tendremos

$$l(1+x)-l(1-x)=l\,\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right)$$

Si ahora hacemos

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+p}{n}, \quad \text{de donde } x=\frac{p}{2n+p},$$

vemos que x se halla en las condiciones prescritas de ser menor que la unidad, de modo que se tendrá

$$\mathrm{l}(n+p)-\mathrm{l}n=2\left\{\frac{p}{2n+p}+\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2n+p}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{p}{2n+p}\right)^5+\dots\right\} \quad [1].$$

por cuya fórmula podremos conocer el logaritmo de un número cualquiera $n+p$, conociendo el logaritmo de n; y si en esta fórmula hacemos $p=1$, se tendrá

$$\mathrm{l}(n+1)=\mathrm{l}n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right) \quad [2].$$

Por medio de esta série podremos calcular los logaritmos de los números naturales 2, 3, 4,... partiendo de la igualdad conocida $\mathrm{l}1=0$, para lo cual bastará dar á n los valores sucesivos 1, 2, 3, 4,...; pero como estos logaritmos los hemos de obtener con un cierto grado de aproximacion, conviene calcular de antemano el error que se comete tomando por el valor de la série la suma de sus m primeros términos.

148. Para calcular el error que se comete tomando por valor de la série la suma de los m primeros términos, y poder de aquí deducir el número de términos que se ha de tomar para obtener, con una aproximacion dada, el logaritmo de un número, observaremos, que el error que se comete, el cual llamaremos E, está dado por la suma de los términos restantes de la série, á partir del $m+1$; de modo, que se tendrá

$$\mathrm{E}=2\left(\frac{1}{(2m+1)(2n+1)^{2m+1}}+\frac{1}{(2m+3)(2n+1)^{2m+3}}+\dots\right);$$

y por tanto, tendremos sucesivamente

$$\mathrm{E}<\frac{2}{(2m+1)(2n+1)^{2m+1}}\left(1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right),$$

$$\mathrm{E}<\frac{2}{(2m+1)(2n+1)^{2m+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}},$$

$$\mathrm{E}<\frac{2(2n+1)^2}{(2m+1)(2n+1)^{2m+1}[(2n+1)^2-1]},$$

$$\mathrm{E}<\frac{1}{2(2m+1)(n^2+n)(2n+1)^{2m-1}};$$

y como m por lo ménos vale 1, si hacemos $2(2m+1)=6$, con más razon se tendrá

$$E < \frac{1}{6(n^2+n)(2n+1)^{2m-1}};$$

luego si el error que se comete ha de ser menor que $\frac{1}{\delta}$, se tendrá la relacion

$$\frac{1}{6(n^2+n)(2n+1)^{2m-1}} \overset{=}{<} \frac{1}{\delta},$$

$$\text{de donde } (2n+1)^{2m-1} \overset{=}{>} \frac{\delta}{(6n^2+n)} \qquad [3].$$

Para saber el número de términos que hay que considerar en la série [2] para obtener en ménos de $\frac{1}{\delta}$ el logaritmo de un número $n+1$, conociendo el de n, no hay más que elevar el número $2n+1$ á sus potencias sucesivas, hasta llegar á una que sea igual ó mayor que δ partido por $6(n^2+n)$. Sea p el exponente de esta potencia, en cuyo caso se tendrá $2m-1=p$, ó $m=\frac{p+1}{2}$. Si el valor de m deducido de esta fórmula es fraccionario, se tomará el inmediato superior.

149. Con lo que llevamos dicho podremos calcular unas tablas de logaritmos con una aproximacion dada; así, los logaritmos de los números mayores que 10 y menores que 100, se calcularán en ménos de una unidad del décimo órden tomando cuatro términos de la série; los de los números comprendidos entre 100 y 10000, tomando dos términos, y sólo uno para los logaritmos de los números mayores que 10000.

Si hacemos $n=1$ en la série [2], se tendrá

$$l2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3.3^3}+\frac{2}{5.3^5}+\frac{2}{7.3^7}+\ldots$$

de cuya série, calculando once términos, hallaremos para valor de $l2$ el número 0,6931471806, aproximado en ménos de media unidad del órden décimo.

Cálculo del número $l2$.

Para calcular $l2$, principiaremos por reducir á decimal las fracciones que forman los términos de la série, lo cual se consigue fácilmente dividiendo por 9 la primera y los cocientes sucesivos, y dividiendo despues cada una por los números respectivos 1, 3, 5,... Así, hallaremos con doce cifras decimales,

$$\frac{2}{3}=0,666666666666$$
$$\frac{2}{3.3^3}=0,024691358024$$
$$\frac{2}{5.3^5}=0,001646090535$$
$$\frac{2}{7.3^7}=0,000130642106$$
$$\frac{2}{9.3^9}=0,000011290058$$
$$\frac{2}{11.3^{11}}=0,000001026369$$
$$\frac{2}{13.3^{13}}=0,000000096488$$
$$\frac{2}{15.3^{15}}=0,000000009292$$
$$\frac{2}{17.3^{17}}=0,000000000911$$
$$\frac{2}{19.3^{19}}=0,000000000090$$
$$\frac{2}{21.3^{21}}=0,000000000009$$
$$l2=0,693147180558$$

Despreciando las dos últimas cifras y aumentando una unidad á la anterior, hallaremos para valor de $l2$ la expresion $l2=0,6931471806$.

150. Si en la misma fórmula hacemos $n=2$, se tendrá

$$l3=l2+\frac{2}{5}+\frac{2}{3.5^3}+\frac{2}{5.5^5}+\ldots$$

Por un procedimiento análogo al anterior, y observando que para hacer las divisiones por 25, basta dividir por 100 y multiplicar por 4, se hallará

$$l3=1,0986122887.$$

El logaritmo de 4 se hallará multiplicando por 2 el logaritmo de 2 hallado con 11 cifras; así tendremos

$$l4=1,3862943611$$

El logaritmo de 5 se calculará por la série

$$l5=l4+\frac{2}{9}+\frac{2}{3.9^3}+\frac{2}{5.9^5}+\ldots$$

y hallaremos con seis términos de la série

$$l5=1,6094379124.$$

El logaritmo de 6 se hallará sumando el de 3 con el de 2; el de

7 se calculará por la fórmula haciendo $n=6$, y así podremos ir determinando todos los demás.

151. Una vez calculadas unas tablas de logaritmos neperianos como anteriormente hemos indicado, no habrá más que multiplicar cada logaritmo por el módulo correspondiente á un sistema cualquiera, y se tendrán los logaritmos de los mismos números en este sistema.

Así, la série [2] del número 147 se convertirá, multiplicándola por el módulo del sistema decimal, que en este caso es $\frac{1}{l10}=M$, en

$$\log(n+1)=\log n+2M\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right).$$

152. Para calcular el valor de $2M$, se observará que siendo $l2=0,6931471806$ y $l5=1,6094379124$, el logaritmo neperiano de 10 será la suma de estos dos; así,

$$l10=2,3025850930;$$

y por consiguiente, el módulo M será el cociente de dividir la unidad por $l10$, ó sea

$$M=0,4342944819;$$

de donde, $$2M=0,8685889638.$$

153. Para hacer uso de la fórmula anterior, se principiará por calcular el logaritmo vulgar de 2, multiplicando el neperiano por el módulo M, y se hallará

$$\log 2=0,3010299956.$$

Una vez calculado el logaritmo de 2, se hallará el de 3 por la fórmula

$$\log 3=\log 2+\frac{2M}{5}+\frac{2M}{3.5^3}+\frac{2M}{5.5^5}+\ldots$$

y por un procedimiento análogo al empleado anteriormente, calcularemos los logaritmos de los demás números, haciendo uso además de lo expuesto en el primer tomo de esta obra, para no calcular los logaritmos de los números compuestos, y sí obtenerlos mediante los logaritmos de los factores que le formen.

Como la série logarítmica (151) se hace cada vez más convergente á medida que n crece, cada vez tambien se necesitará menor número de términos para calcular un logaritmo dado; así es, que pasando del número 100, se podrán obtener los logaritmos con ocho decimales tomando tan sólo dos términos de la série, y con mucha más razon para los números mayores que este límite.

LECCION XVI.

Proporcion logarítmica; límite del error que se comete en el manejo de las tablas.

Proporcion logarítmica; límite del error que se comete en el manejo de las tablas.

154. En el uso de las tablas de logaritmos se admite como exacto el principio de *ser las diferencias de los números proporcionales á las diferencias de sus logaritmos respectivos*, cuando los números pasan de cierto límite y las diferencias son bastante pequeñas; pero como dijimos al hablar de este asunto, semejante principio no es rigorosamente exacto; se comete por consiguiente un error, cuyo límite vamos en esta leccion á determinar.

Desde luégo no debemos olvidar que los logaritmos que hay consignados en las tablas no son rigorosamente exactos, sino que se hallan aproximados con un error menor que media unidad del último órden decimal marcado; así, considerando las tablas de Callet, que son las más usadas, los logaritmos se hallan en general aproximados en ménos de media unidad del séptimo órden decimal. Esto debe considerarse como una causa de error en todos los cálculos que se hagan con los logaritmos; por lo tanto, al tratar de hallar el límite del error que se comete por el empleo de la *proporcion logarítmica*, al calcular los logaritmos de los números, ya sean enteros ó decimales, que no se hallan comprendidos en las tablas, debemos considerar dos causas de error: 1.ª, la de considerar como exacto el principio de la proporcionalidad entre las diferencias de los números y logaritmos; 2.ª, de suponer exactos los logaritmos de las tablas.

Supongamos, en primer lugar, que los logaritmos son exactos, y en esta hipótesis calculemos el límite del error debido al principio de la proporcionalidad. Para ello, multiplicando las igualdades [1] y [2] (147) por el módulo M del sistema vulgar, se tendrá

$$\log(n+p)-\log n=2M\left(\frac{p}{2n+p}+\frac{p^3}{3(2n+p)^3}+\frac{p^5}{5(2n+p)^5}+\ldots\right),$$

$$\log(n+1)-\log n=2M\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right);$$

multiplicando ahora la segunda por el número p, y restando, se hallará

$$\log(n+p)-\log n-p[\log(n+1)-\log n]=$$
$$2M\left(\frac{p}{2n+p}+\frac{p^3}{3(2n+p)^3}+\frac{p^5}{5(2n+p)^5}+\ldots\right)-$$
$$2M\left(\frac{p}{2n+1}+\frac{p}{3(2n+1)^3}+\frac{p}{5(2n+1)^5}+\ldots\right).$$

Si suponemos que p es una fraccion propia, $n+p$ será un número comprendido entre n y $n+1$; de modo, que llamando δ á la diferencia entre los logaritmos de los números $n+p$ y n, y Δ á la de los logaritmos $n+1$ y n, Δ será la diferencia tabular, y δ la parte que debe agregarse al logaritmo de n para obtener el de $n+p$; parte que, lo mismo que Δ, se supondrán estar referidas á unidades del último órden decimal de las tablas, considerado como unidades enteras. *

Si además representamos el segundo miembro por ε, se tendrá

$$\delta-\Delta p=\varepsilon;$$

de donde,

$$\delta=\Delta p+\varepsilon, \quad \text{y} \quad p=\frac{\delta}{\Delta}-\frac{\varepsilon}{\Delta}.$$

La primera de estas igualdades manifiesta, que ε es el error que se comete tomando por el valor de δ la cantidad Δp, que se obtiene por la proporcion

$$1:p::\Delta:\delta;$$

* Esto no altera en nada la proporcion, pues al considerar los logaritmos como enteros no hacemos más que multiplicarlos por la unidad seguida de siete ceros, si son siete las decimales con que están calculadas las tablas; sus diferencias aparecerán tambien multiplicadas por el mismo número, y la razon que entre ellas existe no variará.

la segunda indica que la parte fraccionaria $p=\frac{\delta}{\Delta}$, que se debe agregar á n para obtener el número cuyo logaritmo es $\log n+\delta$, deducida de la proporcion

$$\Delta : \delta :: 1 : p,$$

es mayor que la verdadera en la cantidad $\frac{\varepsilon}{\Delta}$; y por tanto, el error que se comete es la cantidad $\frac{\varepsilon}{\Delta}$.

Ahora bien, considerando á Δ como unidades enteras, se tendrá

$$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{\Delta};$$

pero

$$\varepsilon = 2M\left\{\left(\frac{p}{2n+p}+\frac{p^3}{3(2n+p)^3}+\ldots\right)-\left(\frac{p}{2n+1}+\frac{p}{3(2n+1)^3}+\ldots\right)\right\};$$

y observando que todos los términos del minuendo, á partir del segundo, son menores que sus correspondientes del sustraendo, tendremos, representando la suma de los primeros por S y la de los segundos por S′,

$$\varepsilon = 2M\left(\frac{p}{2n+p}-\frac{p}{2n+1}+S-S'\right)=2M\frac{p(1-p)}{(2n+p)(2n+1)}-2M(S'-S);$$

por consiguiente, se tendrá

$$\varepsilon > 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon < 2M\frac{p(1-p)}{(2n+p)\,(2n+1)},$$

y con más razon $\varepsilon < \frac{p(1-p)}{4n^2}$;

luego el error que se comete por el uso de la proporcion logarítmica, ya para calcular la parte δ de los logaritmos, ya para calcular la parte p de los números, es menor que la expresion $\frac{p(1-p)}{4n^2}$.

155. Supongamos ahora que la proporcion es exacta, y calculemos el error que se comete al considerar los logaritmos como números exactos.

Sean, como ántes, n y $n+1$ dos números consecutivos, y $n+p$ un número intermedio cuyo logaritmo queremos hallar; representemos por L' y L los logaritmos de n y $n+1$ tales como están en las tablas; es decir, aproximados en ménos de media unidad del séptimo órden decimal, y sean r' y r lo que les falta á estos logaritmos para ser iguales á los verdaderos: de modo, que tendremos $\log(n+1)=L+r$, $\log n=L'+r'$, y $\log(n+1)-\log n=L-L'+r-r'=\Delta+r-r'$. El número $n+p$ comprendido entre n y $n+1$, tendrá su logaritmo comprendido entre $L'+r'$ y $L+r$; por consiguiente, será igual á $L'+r'$, mas una cierta cantidad incógnita x, que se determinará por la proporcion

$$1 : p :: \Delta+r-r' : x, \quad \text{de donde} \quad x=p(\Delta+r-r');$$

pero en la práctica la proporcion que se emplea, es

$$1 : p :: \Delta : x, \quad \text{de donde} \quad x=p\Delta;$$

de modo, que el valor de x determinado por este medio, diferirá del verdadero en $p(r-r')$, y el logaritmo hallado, que será $\log(n+p)=L'+p\Delta$, se diferenciará del verdadero en

$$L'+r'+p(\Delta+r-r')-L'-p\Delta=r'+p(r-r');$$

r y r' son á lo más iguales respectivamente á $\frac{1}{2}$; por consiguiente, $p(r-r')$ es menor que $\frac{1}{2}$, y el error cometido es menor que 1; luego el error que se comete al considerar como exactos los logaritmos de las tablas, tiene por límite una unidad del último órden decimal.

Por lo tanto, el error final debido al empleo de la proporcion logarítmica, tiene en general por límite

$$E=1+\frac{p(1-p)}{4n^2},$$

expresando E unidades del séptimo órden decimal; resultado que viene á probarnos, que al determinar el logaritmo de un número $n+p$ comprendido entre los números n y $n+1$, se comete en la práctica un error que sólo influye en la última cifra del logaritmo, pues nunca puede llegar á valer dos unidades de esta especie.

156. Si el problema fuese hallar la parte fraccionaria p que hay que agregar á un número n para obtener el que corresponde á un logaritmo dado, que se halla entre los logaritmos de n y $n+1$, representaríamos como ántes por L' y L los logaritmos que hay en las tablas, correspondientes á los números n y $n+1$, r' y r los restos de estos logaritmos, $L'+\delta$ un logaritmo comprendido entre L' y L, y últimamente por r'' el resto de este logaritmo.

La parte fraccionaria que hay que agregar al número n para obtener el número correspondiente al logaritmo $L'+\delta+r''$, se determinará por la proporcion

$$\Delta+r-r' : \delta+r''-r' :: 1 : p, \text{ de donde } p=\frac{\delta+r''-r'}{\Delta+r-r'};$$

pero el valor de p, que se halla en la práctica por la proporcion $\Delta : \delta :: 1 : p$, es $p=\frac{\delta}{\Delta}$; luego estos dos valores se diferenciarán en

$$E=\frac{\delta+r''-r'}{\Delta+r-r'}-\frac{\delta}{\Delta} \quad \text{ó} \quad E=\frac{\delta}{\Delta}-\frac{\delta+r''-r'}{\Delta+r-r'},$$

segun que se tenga

$$\frac{\delta+r''-r'}{\Delta+r-r'}>\text{ ó }<\frac{\delta}{\Delta}.$$

Para obtener un límite superior en el primer caso, tenemos que hallar el valor máximo del minuendo $\frac{\delta+r''-r'}{\Delta+r-r'}$; y para ello, si aumentamos los dos términos de esta fraccion propia en una cierta cantidad, la fraccion que resulte será mayor; por lo tanto, como el valor numérico de r' es á lo más un medio, se tendrá $\frac{\delta+r''+\frac{1}{2}}{\Delta+r+\frac{1}{2}}>\frac{\delta+r''-r'}{\Delta+r-r'}$. Si ahora damos á r'' el mayor valor que puede tener, que es $+$, y á r el menor, que será $-\frac{1}{2}$, se hallará con más razon

$$\frac{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\Delta-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}>\frac{\delta+r''-r'}{\Delta+r-r'}, \quad \text{ó} \quad \frac{\delta+1}{\Delta}>\frac{\delta+r''-r'}{\Delta+r-r'};$$

luego se tendrá para un límite del error E,

$$E<\frac{\delta+1}{\Delta}-\frac{\delta}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}.$$

En el segundo caso, es decir, cuando el error E venga dado por la igualdad $E=\frac{\delta}{\Delta}-\frac{\delta+r''-r'}{\Delta+r-r'}$, se hallará el límite cuando el sustraendo sea lo más pequeño posible; así, dando á r' el valor mayor que puede tener, que es $+\frac{1}{2}$, á r'' el menor valor, que es $-\frac{1}{2}$, y á r el mayor valor, que es $\frac{1}{2}$, se tendrá para el límite de E,

$$E<\frac{\delta}{\Delta}-\frac{\delta-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\Delta+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{\delta}{\Delta}-\frac{\delta-1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta};$$

donde vemos, que en ambos casos el límite del error que se comete en la parte decimal del número, es menor que $\frac{1}{\Delta}$; y como Δ expresa la diferencia tabular, y ésta va disminuyendo cada vez más, el límite $\frac{1}{\Delta}$ va aumentando.

Segun el límite hallado del error debido al empleo de la proporcion, vemos que no influye en general ni aun en la última cifra del logaritmo; por lo tanto, se debe considerar como exacta en el manejo de las tablas. La segunda causa de error, que consiste en considerar como exactos los logaritmos que hay en las tablas, sólo influye en la última cifra decimal, que puede ser alterada en una unidad á lo más, ya sea por defecto ó exceso, cuando se trate de hallar el logaritmo de un número; y si por el contrario se trata de hallar el número correspondiente á un logaritmo dado, el error cometido tiene por límite la cantidad $\frac{1}{\Delta}$.

157. Si queremos saber en qué cifra debemos parar cuando tratemos de convertir en decimales la fraccion $\frac{\delta}{\Delta}$ hallada por la proporcion ordinaria, observaremos que, si representamos por 10^x la potencia de 10 que debe expresar el denominador de la fraccion decimal obtenida, se tendrá para límite del error hallado $\frac{1}{\Delta}$; y además, suponiendo que en la division cometemos otro error menor que media unidad del órden x, se tendrá que el límite del error cometido vendrá expresado por $\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{2.10^x}$; y como este error ha de ser menor que una unidad decimal del órden x, si hacemos

$$\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{2.10^x} \overset{=}{<} \frac{1}{10^x} \quad ó \quad \frac{1}{\Delta} \overset{=}{<} \frac{1}{2.10^x},$$

de donde

$$\Delta \overset{=}{>} 2.10^x \quad ó \quad \frac{\Delta}{2} \overset{=}{>} 10^x,$$

podremos deducir el valor entero de x, que expresa el número de cifras decimales que se deben tomar en cada caso; pues si suponemos $\frac{\Delta}{2} \overset{=}{>} 10^n$, haciendo $x=n$, se tendrá el límite buscado.

LECCION XVII.

Máximos y mínimos de funciones de una variable.

Máximos y mínimos de funciones de una variable.

158. Ya hemos dicho en el álgebra elemental, que se llama *máximo* ó *mínimo* de una funcion, aquel valor que dicha funcion recibe para un cierto valor a de la variable, mayor ó menor que el que dicha funcion recibe para valores inmediatamente superiores é inferiores á este valor a de la variable.

159. *Todo valor de la variable de una funcion contínua que reduce á esta á un máximo ó mínimo, reduce á cero á la derivada de la funcion.*

Sea a un valor de la variable que reduce á la funcion $y=f(x)$ á un máximo ó á un mínimo. Si para un valor $x=a$ la funcion se reduce á un máximo, ésta irá creciendo con x hasta valer $f(a)$, y á partir de este valor decrecerá, siguiendo x aumentando; luego para el valor $x=a-h$, la funcion es creciente, y por tanto la derivada $f'(a-h)$ es positiva (72); para el valor $x=a+h$, la derivada $f'(a+h)$ es negativa, puesto que la funcion es decreciente; pero siendo contínua la funcion propuesta, la derivada no puede pasar de positiva á negativa, sino pasando por cero en el intervalo tan pequeño como queramos, de $a-h$ al valor $a+h$ de x; luego la derivada se anula para el valor a de la variable que reduce á la funcion á un máximo. Del mismo modo veremos que si a reduce á un mínimo á la funcion propuesta, la derivada de esta funcion tendrá que pasar de negativa á positiva en el intervalo tan pequeño como se quiera de los valores de x comprendidos entre $a-h$ y $a+h$; y como la funcion es contínua, la derivada no puede cambiar de signo en este intervalo sino pasando por cero, que es lo que se queria demostrar.

160. La recíproca no siempre es verdadera. Es decir, que la derivada de una funcion puede anularse por un cierto valor a de la variable, y sin embargo este valor no reducir á un máximo ni mínimo á la funcion. En efecto, si al mismo tiempo que $f'(a)=0$, suponemos que $f''(a)=0$ tambien, sin que para este valor de x se reduzca á cero la tercera derivada, se tendrá

$$f(a+h)-f(a)=h^3\left(\frac{f'''(a)}{2\,.\,3}+h\frac{f^{\text{IV}}(a)}{2\,.\,3\,.\,4}+\dots\right).$$

El signo de la cantidad que hay dentro del paréntesis, depende del que tenga $f'''(a)$, que suponemos no ser cero; pero estando multiplicada dicha cantidad por h^3, el segundo miembro cambiará de signo cuando h cambie; por consiguiente, si se tiene

$$f(a-h) \gtrless f(a), \quad \text{se tendrá} \quad f(a+h) \lessgtr f(a);$$

y por tanto, la funcion no pasa ni por un máximo ni por un mínimo, pues para que así sucediese seria menester que siendo h tan pequeña como quisiéramos, para los dos valores $a-h$ y $a+h$ inmediatamente inferior y superior al valor a de la variable, la funcion recibiese en ambos casos valores mayores ó menores que $f(a)$; luego *puede anularse la derivada de una funcion contínua por un cierto valor* a *de la variable, y sin embargo este valor* a *no reducir á la funcion ni á un máximo ni á un mínimo; lo cual, como hemos visto, sucederá cuando el valor que anule á la primera derivada, anule tambien á la segunda, sin anular á la tercera.*

161. La idea de los máximos y mínimos de una funcion, así como la exactitud del teorema anterior, se puede comprender perfectamente por una construccion geométrica.

Sea una funcion contínua $y=f(x)$, que supondremos representada por la curva A B C D E (*fig.* 5.ª); admitamos que dando á x valores

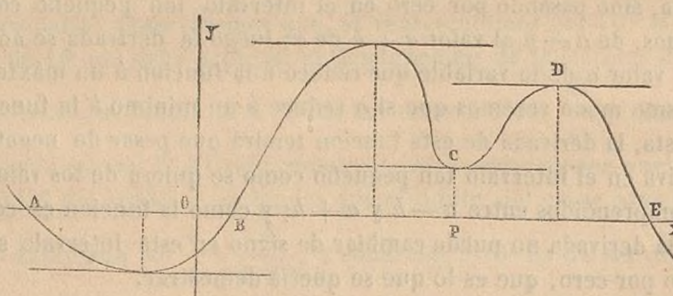

Fig. 5.ª

crecientes, á partir de un cierto valor $x=-$ O A, la funcion decrece; pero que llega un momento en que deja de decrecer y empieza á crecer, en cuyo caso habrá un cierto valor de la funcion, que será menor que el inmediatamente anterior y posterior, el cual constituye lo que se llama un *mínimo.* Si continuando siempre creciendo x, la funcion sigue creciendo, y llega á otro valor en el que deja de crecer y comienza á ser decreciente, ese valor particular de la funcion, que será mayor que el inmediatamente anterior y posterior, es un *máximo;* y como esto puede ocurrir en una funcion contínua cuantas veces queramos, es claro que dicha funcion podrá pasar por muchos mínimos y por muchos máximos, verificándose siempre que cada máximo se hallará comprendido entre dos mínimos consecutivos, y cada mínimo entre dos máximos consecutivos tambien.

Además, la tangente á la curva representada por esta funcion, correspondiente al valor máximo ó mínimo, será evidentemente paralela al eje de abscisas O X; es decir, formará con este eje un ángulo cero, y por tanto la tangente trigonométrica de este ángulo será cero tambien; pero esta tangente trigonométrica es (67) el valor que toma la derivada para el valor de x, que reduce á la funcion á un máximo ó mínimo; luego *esta derivada es nula para el valor de la variable que reduce á la funcion á un máximo ó mínimo*.

Así, si suponemos que dando á x el valor $a=$ O P, la funcion toma un cierto valor P C menor que los que dicha funcion recibe para los valores $a-h$ y $a+h$ inmediatamente próximos inferior y superior, diremos que el valor de la funcion $y=$CP$=f($OP$)$ será un mínimo. La tangente á la curva en el punto C será la perpendicular á la ordenada C P, y por tanto será paralela al eje O X; es decir, formará con este eje un ángulo cero, la tangente trigonométrica será cero tambien, y por consiguiente la derivada de $f(x)$ se anulará para el valor $x=$ O P. Lo mismo sucederá en el punto D, y en todos aquellos en que la funcion pase por un máximo ó un mínimo.

162. Por lo que llevamos dicho vemos que, en general, siempre que la funcion pase por un máximo ó un mínimo, la tangente á la curva en ese punto es paralela al eje de abscisas O X; ó lo que es lo mismo, la derivada tiene que anularse por el valor de x, que reduce á la funcion á un máximo ó un mínimo. Sin embargo, debemos exceptuar ciertas funciones que presentan en sus representaciones geométricas circunstancias especiales, constituyendo lo que en ellas se entiende por *puntos singulares*, en cuyas funciones puede caer en defecto lo dicho anteriormente.

Supongamos una curva A B C D (*fig.* 6.ª), en la que se verifica que creciendo x, la funcion es creciente, y por lo tanto su derivada positiva, lo cual indica que la tangente á la curva en cualquiera de estos puntos, forma un ángulo agudo con el eje de las x. Supongamos que para el valor $x=$ O P, la funcion toma un valor PB mayor que todos los anteriores, y que la tangente á la curva en el punto B, es perpendicular á O X, en cuyo caso la derivada se hace infinita

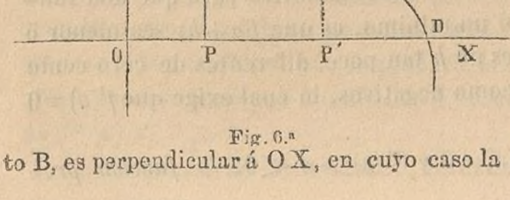

Fig. 6.ª

para el valor O P de la variable. Finalmente, admitamos que creciendo x, la funcion deja de crecer y principia á decrecer, á partir del punto B. Todo esto supuesto, vemos que para los valores inmediatamente próximos al valor de $x=$O P, la funcion recibe valores menores que B P; luego este valor B P es un máximo de la funcion, pero un máximo singular en el cual no se verifica que la tangente á la curva en el punto B sea paralela al eje O X, sino que por el contrario es perpendicular; lo cual sucede siempre en las curvas que presentan puntos de la especie de B, llamados *puntos de retroceso*. Luego puede una funcion pasar por un máximo ó un mínimo, sin que la derivada pase por cero, y sí por infinito, como acabamos de ver; á excepcion de este caso, si la funcion es contínua y pasa por un máximo ó un mínimo, la tangente á la curva en ese punto es paralela al eje O X, y la derivada se reduce por lo tanto á cero.

163. En la misma curva de la figura 6.ª podemos observar cómo la tangente puede ser paralela al eje O X, sin que el punto de tangencia pertenezca á un máximo ni mínimo; ó lo que es lo mismo, cómo puede anularse la derivada de una funcion por un cierto valor a de la variable, y sin embargo, este valor a no reducir á la funcion á un máximo ni á un mínimo. En efecto, si á x damos valores siempre crecientes á partir de O P, la curva decrece, la tangente á la misma en cualquier punto del intervalo B C forma con el eje O X un ángulo obtuso, y por tanto la derivada es negativa; llega á ser $x=$O P', el valor de la funcion es en este caso P' C, en el punto C la tangente es paralela á O X, la derivada por consiguiente es cero. Sigue creciendo x, el valor de la derivada sigue siendo negativo, puesto que las tangentes tiradas á la curva en el intervalo inmediato C D, continúan formando ángulos obtusos con el eje O X; luego la funcion sigue decreciendo, y por tanto el punto C en que la derivada es cero, no constituye ni un máximo ni un mínimo; por consiguiente, no basta que la derivada se anule por un cierto valor de la variable, para poder concluir que la funcion se reducirá por este valor á un máximo ó un mínimo; para que pueda afirmarse esto, es menester agregar la condicion de que el valor que anule á la primera derivada no anule á la segunda. En la representacion geométrica de este caso especial, el punto C en que esto se verifica constituye otro de los puntos singulares que se consideran, llamado *punto de inflexion*. Cuando una curva tiene de estos puntos singulares, ya sean de *retroceso*, ya de *inflexion*, se dice que tiene *soluciones de continuidad*, y el teorema de máximos y mínimos (159) puede caer en defecto.

164. Hemos visto que el carácter distintivo para que una funcion pase por un máximo ó un mínimo, es que $f(a+h)$ sea menor ó mayor que $f(a)$ para valores de h tan poco diferentes de cero como se quiera, tanto positivos como negativos, lo cual exige que $f'(a)=0$ y que $f''(a) >$ ó <0.

Recíprocamente, *si* $f'(a)=0$ y $f''(a) >$ *ó* <0, *la funcion pro-*

puesta pasará por un máximo ó un mínimo. En efecto, se tiene, puesto que $f'(a)=0$,

$$f(a+h)-f(a)=f''(a)\frac{h^2}{2}+f'''(a)\frac{h^3}{2.3}+\ldots$$

donde vemos que $f(a+h)$ es mayor ó menor que $f(a)$ cualquiera que sea el signo de h, y por tanto $f(a)$ es un mínimo ó un máximo; de aquí se deduce que para hallar los valores de x que pueden reducir á la funcion propuesta á un máximo ó un mínimo, se iguala á cero la derivada, y los valores de x que verifiquen á $f'(x)=0$, serán los únicos que podrán reducir á $f(x)$ á un máximo ó á un mínimo; mas para conocer si es un máximo ó un mínimo, ó no sucede ninguna de estas dos cosas, sustituiremos los valores de x que anulen á $f'(x)$ en la segunda derivada, y entónces podrá suceder una de dos cosas: ó que nó se anule $f''(x)$, ó que se reduzca tambien á cero para estos valores. Si $f''(x)$ no se reduce á cero para el valor de $x=a$, siendo a un valor que anula á $f'(x)$, la funcion propuesta se reducirá á un máximo ó un mínimo, segun que se tenga $f''(a) <$ ó > 0. En efecto, si se tiene $f''(a) < 0$, seguirá siendo tambien menor que cero en el intervalo de $x=a-h$ á $x=a+h$, siendo h infinitamente pequeña para que entre $a-h$ y $a+h$ no haya ningun valor que anule á $f''(x)$; y por tanto, $f'(x)$ será siempre decreciente; luego pasando por cero, deberá pasar de positiva á negativa. Pero cuando la derivada de una funcion es positiva, la funcion es creciente; y cuando es negativa, decreciente (72); luego la funcion es primero creciente y despues pasa á ser decreciente, en el intervalo de $x=a-h$ á $x=a+h$; por consiguiente, pasa por un máximo que corresponde al valor $x=a$, en el cual deja de ser la derivada positiva, y pasa á ser negativa.

Del mismo modo se demostraria, que cuando $f''(a)>0$, la funcion pasa por un mínimo.

Supongamos, en segundo lugar, que el valor a de x anula al mismo tiempo que á la primer derivada á la segunda, y que se tiene $f'(a)=0$ y $f''(a)=0$. En esta hipótesis podrá suceder tambien una de dos cosas: ó que $f'''(a)$ sea tambien cero, ó que no lo sea. Si $f'''(a)$ no es igual á cero, el valor a no reduce á la funcion ni á máximo ni á mínimo (160). Si $f'''(a)=0$, se probaria lo mismo que anteriormente, que la funcion pasa por un máximo ó un mínimo, segun que se tenga $f^{\text{IV}}(a) <$ ó > 0.

Continuando del mismo modo, veremos que la regla general para saber si el valor a que anula á la derivada de una funcion reduce á ésta á un máximo ó á un mínimo, es *sustituir este valor en las derivadas segunda, tercera, cuarta, etc., hasta llegar á la primera que no se reduzca á cero; si ésta es de grado impar, la funcion no pasa ni por máximo ni mínimo: si la primer derivada que no se reduce á cero es de grado par, la funcion propuesta pasará por un máximo ó un mínimo, segun que el valor que toma esta derivada sea negativo ó positivo.*

LECCION XVIII.

Determinacion de los valores de una funcion cuando tienen la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc. — Casos en que no es aplicable el teorema de Taylor en la investigacion de los valores de una expresion de la forma $\frac{0}{0}$.

Determinacion de los valores de una funcion cuando tienen la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc.

165. Ya hemos visto en el Álgebra elemental, que las expresiones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, etc., son en general símbolos de indeterminacion; pero no siempre las cantidades que dan orígen á estas expresiones son indeterminadas, sino que á veces tienen un cierto valor determinado, que puede ser finito, cero ó infinito, y este valor es el que nosotros vamos á ver cómo se halla en los casos que sea posible.

166. Sea en primer lugar una funcion $\frac{F(x)}{f(x)}$, la cual se reduce á la forma $\frac{0}{0}$ cuando sustituimos x por a. Si $F(x)$ y $f(x)$ son funciones racionales y enteras, al anularse haciendo $x = a$, ambas serán divisibles por el binómio $x - a$; de modo, que efectuando la division y llamando $F_1(x)$ y $f_1(x)$ á los cocientes respectivos, tendremos

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Si alguna de las funciones $F_1(x)$ ó $f_1(x)$, ó las dos, no se anulan haciendo $x=a$, el valor $\frac{F_1(a)}{f_1(a)}$ expresará el de la funcion propuesta, que será finito, si ninguno de los dos términos de esta fraccion se reduce á cero; y será cero ó infinito, segun que el numerador sea cero sin serlo el denominador, ó al contrario.

Si $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$ se reduce todavía á la forma $\frac{0}{0}$, se hará lo mismo que anteriormente; es decir, dividiremos por $x-a$, y se tendrá que la funcion propuesta vendrá representada por $\frac{F_2(x)}{f_2(x)}$, la cual expresará el valor de $\frac{F(x)}{f(x)}$ cuando $x=a$, si este valor de x no anula á ninguno de los dos términos $F_2(x)$ y $f_2(x)$, ó por lo ménos á uno de ellos; y continuando así sucesivamente, podremos decir: que

Para hallar el valor de la funcion $\frac{F(x)}{f(x)}$ *que se reduce á la forma* $\frac{0}{0}$, *haciendo* $x=a$, *se dividen las funciones* $F(x)$ *y* $f(x)$ *y los cocientes sucesivos por el binómio* $x-a$ *, *hasta llegar á una fraccion en la cual uno de sus términos por lo ménos no sea ya divisible por* $x-a$; *y el valor que tome esta fraccion, sustituyendo en ella* x *por* a, *será el valor de la funcion propuesta, cuyo valor será finito si ninguno de sus dos términos se reduce á cero; será cero, si se anula el numerador, é infinito si el término que se anula es el denominador.*

EJEMPLO I. Hallar el verdadero valor de la fraccion

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^5-9x^4+35x^3-74x^2+84x-40}{x^6-3x^5-2x^4+6x^3+12x^2-8x-16},$$

la cual toma la forma de $\frac{0}{0}$, cuando se hace $x=2$.

Dividiendo los dos términos de esta fraccion y los cocientes que resulten por el binómio $x-2$, hallaremos

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)}=\frac{x^4-7x^3+21x^2-32x+20}{x^5-x^4-4x^3-2x^2+8x+8}=\frac{0}{0}, \text{ haciendo } x=2;$$

* Estas divisiones se ejecutan fácilmente por medio de la regla práctica que ya conocemos. (*Algebra*, tomo I, núm. 89.)

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)}=\frac{x^3-5x^2+11x-10}{x^4+x^3-2x^2-6x-4}=\frac{0}{0},\text{ haciendo } x=2;$$

$$\frac{F_3(x)}{f_3(x)}=\frac{x^2-3x+5}{x^3+3x^2+4x+2}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10},\text{ haciendo } x=2.$$

Luego el verdadero valor de la funcion propuesta cuando hacemos $x=2$, es, segun acabamos de ver, $\frac{1}{10}$.

Ejemplo II. Sea la funcion que para el valor de $x=a$ se reduce á la forma $\frac{0}{0}$,

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^5-ax^4-4a^2x^3+8a^3x^2-5a^4x+a^5}{x^5+ax^4-5a^2x^3+8a^3x^2-10a^4x+5a^5}.$$

Dividiendo sucesivamente por el binómio $x-a$, se hallará

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)}=\frac{x^4-4a^2x^2+4a^3x-a^4}{x^4+2ax^3-3a^2x^2+5a^3x-5a^4}=\frac{0}{0},\text{ haciendo } x=a;$$

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)}=\frac{x^3+ax^2-3a^2x+a^3}{x^3+3ax^2+5a^3}=\frac{0}{9a^3}=0,\text{ haciendo } x=a.$$

Luego $\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{0}{0}=0$, cuando hacemos $x=a$.

Ejemplo III. Sea, por último, la expresion que toma la forma de $\frac{0}{0}$, haciendo $x=1$,

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^4-(2a+2)x^3+(a^2+4a+1)x^2-(2a^2+2a)x+a^2}{x^5-3x^4+(a^2+3)x^3-(3a^2+1)x^2+3a^2x-a^2}.$$

Dividiendo por $x-1$, se hallará

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)}=\frac{x^3-(2a+1)x^2+(a^2+2a)x-a^2}{x^4-2x^3+(a^2+1)x^2-2a^2x+a^2}=\frac{0}{0},\text{ haciendo } x=1;$$

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)}=\frac{x^2-2ax+a^2}{x^3-x^2+a^2x-a^2}=\frac{1-2a+a^2}{0}=\infty,\text{haciendo } x=1.$$

Luego el valor de la expresion dada, que se reduce á la forma $\frac{0}{0}$ cuando hacemos $x=1$, es infinito.

167. Cuando las dos funciones que constituyen los dos términos de la fraccion que se reduce á $\frac{0}{0}$ son, como hasta aquí hemos supuesto, racionales y enteras, puede hallarse el verdadero valor de esta expresion por medio del teorema de Taylor. En efecto, sea como ántes la expresion $\frac{F(x)}{f(x)}$, cuyos dos términos $F(x)$ y $f(x)$ son fun-

ciones racionales y enteras de x, las cuales suponemos se reducen á cero haciendo $x=a$.

Si ponemos en esta expresion, en vez de x, el binómio $x+h$, hallaremos por la fórmula de Taylor, aplicada á funciones racionales y enteras,

$$\frac{F(x+h)}{f(x+h)}=\frac{F(x)+F'(x)h+F''(x)\frac{h^2}{2}+\dots}{f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+\dots}.$$

Si en esta igualdad hacemos $x=a$, y observamos que $F(a)=0$ y $f(a)=0$, se tendrá, dividiendo por h los dos términos de la segunda fraccion,

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{F'(a)+F''(a)\frac{h}{2}+\dots}{f'(a)+f''(a)\frac{h}{2}+\dots} \qquad [1].$$

Haciendo ahora $h=0$, tendremos

$$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{0}{0}=\frac{F'(a)}{f'(a)} \qquad [2].$$

Donde vemos, que el valor de la fraccion $\frac{F(x)}{f(x)}$, cuyos dos términos se anulan haciendo $x=a$, viene representado por la fraccion $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, que tiene por términos las derivadas respectivas de $F(x)$ y $f(x)$.

Si la fraccion $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ se reduce tambien á la forma de $\frac{0}{0}$ haciendo $x=a$, hallaremos, como anteriormente, que este valor viene representado por la funcion $\frac{F''(x)}{f''(x)}$, en la que hacemos $x=a$. Y continuando del mismo modo llegaremos necesariamente á una fraccion formada por las derivadas de un mismo órden, de las cuales una por lo ménos no se anulará * ; de modo, que si suponemos que estas derivadas son del órden *enésimo*, se tendrá

---

* En efecto, si todas las derivadas de $F(x)$ y $f(x)$, ó de una de estas funciones, la primera por ejemplo, se anulasen haciendo $x=a$, se tendria $F(a+h)=0$ para cualquier valor que diéramos á h, lo cual es imposible.

$$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{0}{0}=\frac{F^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)} \qquad [3].$$

Si ninguno de los dos términos de esta última fraccion es cero, el valor finito y determinado que represente, será el de la expresion propuesta; si alguno de estos términos es cero, el valor de la fraccion propuesta será cero ó infinito, segun que sea el numerador ó el denominador el que se reduzca á cero.

Luego *para hallar el verdadero valor de la expresion* $\frac{F(x)}{f(x)}$, *cuando para un cierto valor* $x=a$ *toma la forma indeterminada* $\frac{0}{0}$, *se hallan las derivadas simultáneas y sucesivas de ambos términos, y se sustituye en ellas* x *por* a, *hasta llegar á dos, de las cuales una ó las dos no se reduzcan á cero, haciendo* $x=a$; *en cuyo caso, el valor que tiene esta última fraccion será el de la expresion propuesta.*

Aplicando esta regla á los ejemplos anteriores, hallaremos

I. $\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^5-9x^4+35x^3-74x^2+84x-40}{x^6-3x^5-2x^4+6x^3+12x^2-8x-16}=\frac{0}{0}$, haciendo $x=2$;

$\frac{F'(x)}{f'(x)}=\frac{5x^4-36x^3+105x^2-148x+84}{6x^5-15x^4-8x^3+18x^2+24x-8}=\frac{0}{0}$, idem;

$\frac{F''(x)}{f''(x)}=\frac{20x^3-108x^2+210x-148}{30x^4-60x^3-24x^2+36x+24}=\frac{0}{0}$, idem;

$\frac{F'''(x)}{f'''(x)}=\frac{60x^2-216x+210}{120x^3-180x^2-48x+36}=\frac{18}{180}=\frac{1}{10}$, idem.

II. $\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^5-ax^4-4a^2x^3+8a^3x^2-5a^4x+a^5}{x^5+ax^4-5a^2x^3+8a^3x^2-10a^4x+5a^5}=\frac{0}{0}$, haciendo $x=a$;

$\frac{F'(x)}{f'(x)}=\frac{5x^4-4ax^3-12a^2x^2+16a^3x-5a^4}{5x^4+4ax^3-15a^2x^2+16a^3x-10a^4}=\frac{0}{0}$, idem;

$\frac{F''(x)}{f''(x)}=\frac{20x^3-12ax^2-24a^2x+16a^3}{20x^3+12ax^2-30a^2x+16a^3}=\frac{0}{18a^3}=0$, idem.

III. $\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^4-(2a+2)x^3+(a^2+4a+1)x^2-(2a^2+2a)x+a^2}{x^5-3x^4+(a^2+3)x^3-(3a^2+1)x^2+3a^2x-a^2}=\frac{0}{0}$, para $x=1$;

$\frac{F'(x)}{f'(x)}=\frac{4x^3-3(2a+2)x^2+2(a^2+4a+1)x-2a^2-2a}{5x^4-12x^3+3(a^2+3)x^2-2(3a^2+1)x+3a^2}=\frac{0}{0}$, id.

$\frac{F''(x)}{f''(x)}=\frac{12x^2-6(2a+2)x+2(a^2+4a+1)}{20x^3-36x^2+6(a^2+3)x-2(3a^2+1)}=\frac{2a^2-4a+2}{0}=\infty$, id.

Donde vemos, que hemos venido á encontrar por este segundo método, los mismos valores numéricos que hallamos anteriormente, para las expresiones que se reducian á $\frac{0}{0}$.

Casos en que no es aplicable el teorema de Taylor en la investigacion de los valores de una expresion de la forma $\frac{0}{0}$.

168. El método que hemos seguido para hallar el valor de una expresion de la forma $\frac{0}{0}$, fundado en el teorema de Taylor, no ofrece dificultad alguna cuando las dos funciones $F(x)$ y $f(x)$, que constituyen los dos términos de la fraccion, son racionales y enteras; porque en este caso, los desarrollos obtenidos por la fórmula de Taylor, son de un número limitado de términos, y las derivadas sucesivas de estas funciones son siempre finitas, dando á x valores finitos; por consiguiente, no hay dificultad en admitir las igualdades [2] y [3]; pero si el número de términos á que da orígen el desarrollo fuese infinito, ó alguna de las derivadas se hiciese infinita para valores finitos de x, este método seria inaplicable; pues al hacer $h=0$, no se reduciria la fraccion del segundo miembro de la igualdad [1], á la que forman sus dos primeros términos, y en ese caso las igualdades [2] y [3] no serian ciertas.

169. Sin embargo, el método que hemos obtenido por la fórmula de Taylor en el caso de ser $F(x)$ y $f(x)$ funciones racionales y enteras, es todavía aplicable áun en el caso de ser funciones cualesquiera, siempre que las derivadas de un mismo órden de ambas funciones, no se hagan infinitas para el valor particular $x=a$, que reduce á la expresion á la forma $\frac{0}{0}$.

En efecto, sean $F(x)$ y $f(x)$ dos funciones contínuas cualesquiera, que se reducen á cero por el valor $x=a$. Sea h una cantidad que tiende hácia cero, y segun lo demostrado anteriormente (125), se tendrá

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{F'(a+\theta h)}{f'(a+\theta h)};$$

de donde se deduce, que cuando $h=0$ y x tiende hácia el valor a,

$$\text{lím.}\frac{F(x)}{f(x)}=\text{lím.}\frac{F'(x)}{f'(x)}, \quad \text{ó} \quad \frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

Si $F'(a)$ y $f'(a)$ no son cero ni infinitas, el valor que se busca será $\frac{F'(a)}{f'(a)}$.

Si $F'(a)=0$ y $f'(a)=0$, se hallaria del mismo modo, que el valor de $\frac{F'(a)}{f'(a)}$ seria $\frac{F''(a)}{f''(a)}$; y así sucesivamente.

Si suponemos por consiguiente que todas las derivadas, hasta las del órden $n-1$ inclusive, son cero, vendremos á concluir, como anteriormente, que el valor de la expresion indeterminada $\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{0}{0}$, será el de la fraccion $\frac{F^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)}$.

Si $F^{(n)}(a)$ y $f^{(n)}(a)$ no son ni cero ni infinito, el valor finito y determinado $\frac{F^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)}$ será el de la funcion propuesta.

Si una de estas derivadas fuese nula, el valor de $\frac{F(a)}{f(a)}$ sería cero ó infinito, segun se tuviese $F^{(n)}(a)=0$ ó $f^{(n)}(a)=0$.

Ejemplo I. Hallar el verdadero valor de la expresion $\frac{1-\cos x}{x^2}$, que se reduce á $\frac{0}{0}$, cuando $x=0$.

Aplicando el método anterior, se hallará

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}, \text{ haciendo } x=0;$$
$$\frac{F'(x)}{f'(x)}=\frac{\operatorname{sen} x}{2x}=\frac{0}{0}, \quad \text{idem};$$
$$\frac{F''(x)}{f''(x)}=\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}, \quad \text{idem}.$$

Luego el verdadero valor de $\frac{1-\cos x}{x^2}$, cuando $x=0$, es $\frac{1}{2}$.

Ejemplo II. Sea, en segundo lugar, la expresion cuyo verdadero valor queremos hallar $\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x+\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x+\cos x}$, cuando $x=\pi$.

Aplicando el método de las derivadas, hallaremos

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x+\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x+\cos x}=\frac{0}{0}, \text{ haciendo } x=\pi;$$
$$\frac{F'(x)}{f'(x)}=\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x-\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos x-\operatorname{sen} x}=\frac{0}{0}, \quad \text{idem};$$
$$\frac{F''(x)}{f''(x)}=\frac{-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{1}{2}x-\cos x}{2\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x-\cos x}=\frac{-\frac{1}{4}+1}{2+1}=\frac{\frac{3}{4}}{3}=\frac{1}{4}, \text{ si } x=\pi.$$

170. Supongamos ahora que $F(a)=\infty$ y $f(a)=\infty$, en cuyo caso se tendrá $\frac{1}{F(a)}=0$ y $\frac{1}{f(a)}=0$; la funcion $\frac{F(x)}{f(x)}$ se convertirá en $\frac{\infty}{\infty}$, cuando hagamos $x=a$. Esto supuesto, sustituyamos en la fraccion propuesta $a+h$ en vez de x, y se hallará evidentemente

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{\frac{1}{f(a+h)}}{\frac{1}{F(a+h)}};$$

pero tenemos en general (125).

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{F'(a+\theta h)}{f'(a+\theta h)};$$

luego aplicando esto á la expresion anterior, se hallará

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{\frac{1}{f(a+h)}}{\frac{1}{F(a+h)}}=\frac{\frac{f'(a+\theta h)}{[f(a+\theta h)]^2}}{\frac{F'(a+\theta h)}{[F(a+\theta h)]^2}};$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)}\times\frac{[F(a+\theta h)]^2}{[f(a+\theta h)]^2}.$$

Si ahora hacemos $\varphi(h)=\frac{F(a+h)}{f(a+h)}$, se tendrá

$$\varphi(h)=\frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)}\times\left(\frac{F(a+\theta h)}{f(a+\theta h)}\right)^2 \text{ ó } \varphi(h)=\frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)}\times[\varphi(\theta h)]^2;$$

de donde se deduce

$$\frac{F'(a+\theta h)}{f'(a+\theta h)}=\frac{[\varphi(\theta h)]^2}{\varphi(h)}=\varphi(\theta h)\times\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}.$$

Ahora bien, si $\frac{F(x)}{f(x)}$ tiende hácia un cierto límite finito, cuando x tiende á valer a, $\varphi(h)$ tenderá hácia el mismo límite cuando $h=0$; y si $\varphi(h)$ tiende hácia un cierto límite finito cuando h tiende á cero, $\varphi(\theta h)$ tenderá hácia el mismo límite; y por tanto, $\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}$ tenderá á valer la unidad, y la igualdad anterior se convertirá en

$$\text{lím.}\ \frac{F'(a+\theta h)}{f'(a+\theta h)}=\text{lím.}\ \varphi(\theta h)=\text{lím.}\ \varphi(h);$$

pero $$\text{lím}.\varphi(h)=\text{lím}.\frac{F(a+h)}{f(a+h)};$$

luego $$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

Donde vemos, que si $F'(a)$ y $f'(a)$ no son nulas ni infinitas, el valor verdadero de la expresion propuesta será $\frac{F'(a)}{f'(a)}$.

Si las derivadas simultáneas continúan haciéndose infinitas para el valor de $x=a$, hasta llegar á dos de un mismo órden, de las que una por lo ménos no sea infinita, el valor de la expresion propuesta será el que represente la fraccion formada por estas dos derivadas, cuyo valor será finito, cero ó infinito, segun que ninguna de las dos derivadas sea infinita, que lo sea el denominador, ó que lo sea el numerador.

171. Si las derivadas del mismo órden son siempre infinitas, el método anterior es ineficaz; en cuyo caso lo que se hace para hallar el valor de la expresion propuesta, que para el valor $x=a$ se reduce á $\frac{\infty}{\infty}$, es reemplazar x por $a+h$, efectuar las operaciones y reducciones que se presenten, y en seguida haciendo $h=0$, se tendrá el valor buscado.

EJEMPLOS. Sea la fraccion $\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x^2-1}}$, la cual se reduce á la forma $\frac{0}{0}$ haciendo $x=1$. Si para hallar su verdadero valor empleásemos el método de las derivadas, veríamos que todas se hacian infinitas por el valor $x=1$; pero si ponemos en vez de x el valor $1+h$, se hallará

$$\frac{F(1+h)}{f(1+h)}=\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{2h+h^2}}=\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{h}}\times\frac{1}{\sqrt[4]{2+h}},$$

ó $$\frac{F(1+h)}{f(1+h)}=\sqrt[12]{h}\times\frac{1}{\sqrt[4]{2+h}},\quad \text{ó}\quad \frac{F(1)}{f(1)}=\frac{0}{0}=0\times\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=0;$$

luego el verdadero valor de $\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x^2-1}}$, cuando $x=1$, es cero.

Sea, en segundo lugar, la expresion

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{(x-a)\sqrt{x-b}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}}=\frac{0}{0},\ \text{cuando } x=a.$$

Las derivadas sucesivas se hacen infinitas para el mismo valor de x; por tanto, haremos $x=a+h$, y se tendrá

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)}=\frac{h\sqrt{a+h-b}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}-\sqrt{2a+h}+\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{h}\sqrt{a+h-b}+1}{1-\dfrac{\sqrt{2a+h}-\sqrt{2a}}{\sqrt{h}}}.$$

Si en esta expresion hacemos $h=0$, la fraccion $\dfrac{\sqrt{2a+h}-\sqrt{2a}}{\sqrt{h}}$ toma la forma $\frac{0}{0}$; pero si hallamos las derivadas de ambos términos, tendremos, cuando $h=0$,

$$\text{lím.}\frac{\sqrt{2a+h}-\sqrt{2a}}{\sqrt{h}}=\text{lím.}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2a+h}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{h}}}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2a}}}{\dfrac{1}{0}}=0;$$

luego haciendo en la expresion anterior $h=0$, se hallará para valor de la expresion dada $\dfrac{F(a)}{f(a)}=\dfrac{1}{1+0}=1$.

172. Si suponemos que se tienen las expresiones $F(x)\times f(x)$, y para un cierto valor $x=a$, se verifica que $F(a)=0$ y $f(a)=\infty$, dando orígen así á la expresion $0\times\infty$, se reducirá inmediatamente á la forma $\frac{0}{0}$, poniendo en vez de $F(a)\times f(a)$, su igual $\dfrac{F(a)}{\dfrac{1}{f(a)}}$; de modo, que se tendrá

$$F(x)\times f(x)=\frac{F(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{0}{0},\text{ cuando } x=a.$$

Si fuese la expresion $F(x)-f(x)$, y para el valor $x=a$ se tuviese $F(a)=\infty$ y $f(a)=\infty$, se tendria evidentemente

$$F(x)-f(x)=\frac{1}{\dfrac{1}{F(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{F(x)}}{\dfrac{1}{F(x)\,f(x)}}=\frac{0}{0},\text{ cuando } x=a.$$

Una vez reducidas las expresiones $0\times\infty$ é $\infty-\infty$ á la forma $\frac{0}{0}$, se les aplicará el método ordinario.

SEGUNDA PARTE.

Principios relativos á las ecuaciones algebráicas, eliminacion, transformacion de ecuaciones y su reduccion.

LECCION XIX.

Clasificacion de las ecuaciones.—Teorema fundamental de la teoría de ecuaciones.

Clasificacion de las ecuaciones.

173. Las ecuaciones, lo mismo que las funciones, se dividen en dos clases: ecuaciones *algebráicas* y *trascendentes*.

174. ECUACION ALGEBRÁICA *es aquella que, reducida á la forma* $A=0$, *el primer miembro* A *es una funcion algebráica de la incógnita ó incógnitas que contiene.*

Si suponemos quitados los denominadores y radicales de una ecuacion algebráica de una sola incógnita x, la podremos escribir bajo la forma

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

siendo los coeficientes A_0, A_1, A_2, ... A_m, cantidades reales ó imaginarias de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, y el exponente m un número entero y positivo.

Si dividimos todos los términos de la ecuacion anterior por A_0, y representamos los nuevos coeficientes por P_1, P_2, ... P_m, obtendremos la misma ecuacion, puesta bajo la forma ordinaria

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots+P_{m-1}x+P_m=0.$$

Para abreviar se representa la primera de estas ecuaciones por $F(x)=0$, y la segunda por $f(x)=0$.

175. ECUACION TRASCENDENTE *es aquella que, reducida á la forma* $A=0$, *en su primer miembro* A *existen funciones trascendentes de la incógnita ó incógnitas que contiene.*

176. Se llama *raiz* de una ecuacion, ya sea algebráica ó trascendente, todo valor que puesto en vez de la incógnita satisface á dicha ecuacion.

177. Resolver *algebráicamente* una ecuacion, es hallar, por medio de una série de trasformaciones, una fórmula por la que se puedan determinar directamente, en funcion de los coeficientes y exponentes, todas las raíces de la misma.

Cuando por métodos particulares ó indirectos se hallan los valores que, puestos en vez de la incógnita de una ecuacion, la satisfacen, se dice que esta ecuacion se ha resuelto *numéricamente*.

Existe una gran diferencia entre la resolucion algebráica y numérica de una ecuacion. En la resolucion algebráica, una vez hallada la fórmula que da las raíces de una ecuacion, no hay más que sustituir los coeficientes por los valores particulares que tengan en cada caso, y ejecutar las operaciones indicadas; pero en la resolucion numérica de una ecuacion, la determinacion de cada una de sus raíces exige un cálculo especial y distinto del que se emplea en las demás.

Tanto una como otra resolucion están fundadas en una série de principios, que constituye lo que se llama *teoría general de ecuaciones*.

Teorema fundamental de la teoría de ecuaciones.

178. *Toda ecuacion algebráica de coeficientes reales ó imaginarios de la forma* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, *tiene por lo ménos una raíz real ó imaginaria de la misma forma.* *

Sean en primer lugar las ecuaciones binómias

$$x^m=1,\ x^m=-1,\ x^m=+\sqrt{-1},\ x^m=-\sqrt{-1}.$$

* La demostracion de este teorema es debida á M. Cauchy.

La primera de estas ecuaciones se verifica siempre por el valor $x=1$, cualquiera que sea el exponente m.

La segunda ecuacion queda verificada por el valor $x=-1$, cuando el exponente m es impar. Si el exponente es par, dividiéndole por la mayor potencia de 2 que sea posible, y llamando p al cociente, que será un número impar, tendremos $m=2^n.p$, y la ecuacion podrá ponerse bajo la forma

$$x^{2^n.p}=-1, \text{ ó } (x^{2^n})^p=-1.$$

Esta ecuacion se verificará evidentemente, si hallamos un valor de x real ó imaginario que satisfaga á la condicion

$$x^{2^n}=-1;$$

pues -1 elevado á una potencia p de grado impar, será igual á -1.

Ahora bien, de la ecuacion anterior se deduce $x=\sqrt[2^n]{-1}$, y se sabe (*Arit.* 297) que la raíz 2^n de una cantidad, se obtiene por una série de n raíces cuadradas sucesivas; por tanto, principiaremos por extraer la raíz cuadrada de -1, que dará $\pm\sqrt{-1}$; despues hallaremos la raíz cuadrada de $\pm\sqrt{-1}$, y obtendremos (*Alg.* tomo I, 211) una expresion de la forma $a+b\sqrt{-1}$; la raíz cuadrada de esta expresion será otra de la misma forma, y así sucesivamente; luego hallaremos para valor final de x la expresion $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, que sustituida en la ecuacion $x^{2^n}=-1$, la verifica; y por tanto, la ecuacion $x^m=-1$, en la que m es un número par, tiene una raíz de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

En la tercer ecuacion $x^m=+\sqrt{-1}$, consideraremos dos casos, segun que m sea impar ó par. Si m es un número impar, tendrá la forma $4n+1$ ó $4n+3$; pero se tiene, segun el álgebra elemental, que $(+\sqrt{-1})^{4n+1}=+\sqrt{-1}$, y $(-\sqrt{-1})^{4n+3}=+\sqrt{-1}$; luego la tercera ecuacion $x^m=+\sqrt{-1}$ quedará satisfecha, haciendo $x=+\sqrt{-1}$, ó $x=-\sqrt{-1}$, segun que se tenga $m=4n+1$, ó $m=4n+3$.

Si m es un número par, se hará como anteriormente $m=2^n.p$, siendo p un número impar, y la ecuacion propuesta tomará la forma

$$x^{2^n.p}=+\sqrt{-1}, \text{ ó } (x^{2^n})^p=+\sqrt{-1}.$$

Si ahora hallamos un valor de x real ó imaginario que verifique á la ecuacion $x^{2^n}=+\sqrt{-1}$, ó $x^{2^n}=-\sqrt{-1}$, segun que p sea de la forma $4n+1$ ó $4n+3$, este valor satisfará á la ecuacion propuesta;

pero el valor de x que verifica á cualquiera de las ecuaciones anteriores, se obtiene por medio de n raíces cuadradas sucesivas de $\pm\sqrt{-1}$, que, segun ya sabemos, son de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; luego la tercera ecuacion tiene por lo ménos una raíz.

Del mismo modo demostraremos que la cuarta ecuacion $x^m=-\sqrt{-1}$, tiene tambien una raíz de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

Probado el teorema para las ecuaciones binómias, pasemos á demostrarlo para una ecuacion cualquiera de coeficientes reales ó imaginarios, que representaremos por

$$f(x)=x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots+P_nx^{m-n}+\ldots+P_m=0 \ [1].$$

Hagamos en esta ecuacion $x=y+z\sqrt{-1}$, y hallaremos por la fórmula de Taylor,

$$f(y+z\sqrt{-1})=f(y)+f'(y)z\sqrt{-1}-\tfrac{1}{2}f''(y)z^2-\frac{1}{2.3}f'''(y)z^3\sqrt{-1}$$
$$+\frac{1}{2.3.4}f^{\text{iv}}(y)z^4+\ldots=0;$$

y si representamos por A la parte real de este desarrollo, y por $B\sqrt{-1}$ la parte imaginaria, se tendrá

$$f(y+z\sqrt{-1})=A+B\sqrt{-1}=0.$$

Ahora bien, para que una expresion de la forma $A+B\sqrt{-1}$ sea cero, es menester que su módulo lo sea; luego la cuestion queda reducida á probar que hay por lo ménos un sistema de valores reales y finitos de y y de z, que verifican á la ecuacion $\sqrt{A^2+B^2}=0$.

Para ello observaremos, que la expresion $\sqrt{A^2+B^2}$ es siempre una cantidad positiva, y que siendo funcion de y y de z, cambiará de valor con estas variables, y por consiguiente es susceptible de tener varios máximos y varios mínimos *; luego si probamos que uno de

---

* En efecto, á cada par de valores de y y de z, corresponde un solo valor del módulo $\sqrt{A^2+B^2}$; por consiguiente, si sobre un plano, que supondremos horizontal, tomamos dos ejes, y en él determinamos una série de puntos que tengan por coordenadas los diferentes sistemas de valores que podemos dar á y y á z, y por cada uno de estos puntos levantamos perpendiculares al plano, iguales en magnitud á los valores correspondientes del módulo, los extremos de estas perpendiculares determinarán una superficie convexa que se hallará toda por encima del plano; esta superficie, que se extiende indefinidamente, tiene límites de los cuales no pasa, y las ordenadas de estos límites son precisamente los mínimos de $\sqrt{A^2+B^2}$.

estos mínimos es cero, y que corresponde á valores finitos de y y de z, el teorema quedará demostrado.

Supongamos que $y+z\sqrt{-1}$ no reduce á cero á la expresion $\sqrt{A^2+B^2}$, y en este caso vamos á probar que siempre podremos dar á x otro valor de la misma forma, que puesto en la ecuacion $f(x)=0$, dé un resultado cuyo módulo sea menor que $\sqrt{A^2+B^2}$.

En efecto, hagamos $x=y+z\sqrt{-1}+\varepsilon t$, siendo ε una cantidad positiva que puede decrecer cuanto queramos, y t una indeterminada, de la cual dispondremos convenientemente.

Sustituyendo este valor de x en la ecuacion propuesta, y desarrollando por la fórmula de Taylor, considerando á $y+z\sqrt{-1}$ como variable y á εt como incremento de esta variable, hallaremos

$$f(y+z\sqrt{-1}+\varepsilon t)=f(y+z\sqrt{-1})+f'(y+z\sqrt{-1})\,\varepsilon t+\tfrac{1}{2}f''(y+z\sqrt{-1})\,\varepsilon^2 t^2+\ldots+\varepsilon^m t^m.$$

En esta igualdad podrá suceder que alguna de las derivadas de $f(x)$ se anule por el valor de $x=y+z\sqrt{-1}$; de modo, que si suponemos que la del órden n sea la primera que no se anula por este valor, y hacemos $\frac{1}{2.3.4\ldots n}f^{(n)}(y+z\sqrt{-1})=M+N\sqrt{-1}$, hallaremos, representando por $A'+B'\sqrt{-1}$ el resultado de $f(y+z\sqrt{-1}+\varepsilon t)$, y por $S\varepsilon^{n+1}t^{n+1}$ la suma de todos los términos en que entra εt elevada á una potencia superior á la del órden n,

$$A'+B'\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1}+(M+N\sqrt{-1})\varepsilon^n t^n+S\varepsilon^{n+1}t^{n+1} \quad [2].$$

Si ahora damos á la indeterminada t un valor de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, de modo que se tenga $t^n=\pm 1$, la igualdad anterior se trasformará en

$$A'+B'\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1}\pm M\varepsilon^n\pm N\varepsilon^n\sqrt{-1}\pm S\varepsilon^{n+1};$$

y separando las partes reales y las imaginarias, hallaremos

$$A'=A\pm M\varepsilon^n+S'\varepsilon^{n+1},\quad B'=B\pm N\varepsilon^n+S''\varepsilon^{n+1};$$

de donde se deduce, elevando al cuadrado,

$$A'^2=A^2\pm 2AM\varepsilon^n+S_1\varepsilon^{n+1},\quad B'^2=B^2\pm 2BN\varepsilon^n+S'_1\varepsilon^{n+1};$$

y sumando,

$$A'^2+B'^2=A^2+B^2\pm 2(AM+BN)\varepsilon^n+S_2\varepsilon^{n+1};$$

ó bien, sacando ε^n por factor comun,

$$A'^2+B'^2=A^2+B^2+[\pm 2(AM+BN)+S_2\varepsilon]\varepsilon^n.$$

Observemos ahora, que siendo ε una cantidad positiva, el signo de $[\pm 2(AM+BN)+S_2\varepsilon]\varepsilon^n$ es el mismo que el de la cantidad que hay dentro de los corchetes; pero el signo de esta podemos hacer que dependa del que tiene su primer término $\pm 2(AM+BN)$, puesto que $S_2\varepsilon$ puede decrecer con ε cuanto queramos; luego tomando de los dos signos $+$ y $-$ el que sea contrario al del binómio $AM+BN$, lo que se consigue haciendo $t^n=+1$ ó $t^n=-1$, tendremos

$$A'^2+B'^2<A^2+B^2, \quad \text{ó} \quad \sqrt{A'^2+B'^2}<\sqrt{A^2+B^2},$$

segun queriamos demostrar.

Si el binómio $AM+BN$ fuese cero, haríamos en la igualdad [2] $t^n=\pm\sqrt{-1}$, y obtendriamos como anteriormente

$$A'+B'\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1}\pm M\varepsilon^n\sqrt{-1}\mp N\varepsilon^n+S\varepsilon^{n+1},$$

$$A'=A\mp N\varepsilon^n+S_1\varepsilon^{n+1}, \quad B'=B\pm M\varepsilon^n+S'_1\varepsilon^{n+1},$$

de donde,

$$A'^2+B'^2=A^2+B^2\mp 2(AN-BM)\varepsilon^n+S_2\varepsilon^{n+1};$$

y lo mismo que en el caso anterior, demostraremos que se podrá dar á ε un valor positivo tan pequeño, que la suma de todos los términos que hay despues de A^2+B^2 sea negativa, haciendo $t^n=+\sqrt{-1}$ ó $t^n=-\sqrt{-1}$, segun que $AN-BN$ sea positivo ó negativo; luego tambien se tendrá

$$\sqrt{A'^2+B'^2}<\sqrt{A^2+B^2}.$$

Una vez admitido que $AM+BN=0$, no se puede suponer que $AN-BM$ sea cero tambien; porque entónces se tendria evidentemente

$$(AM+BN)^2+(AN-BM)^2=0,$$

de donde se deduce la igualdad

$$(A^2+B^2)(M^2+N^2)=0,$$

que no se puede satisfacer sino haciendo á la vez

$$A=0 \text{ y } B=0, \quad \text{ó} \quad M=0 \text{ y } N=0;$$

pero el segundo sistema no se puede verificar, porque en ese caso $f^{(n)}(y+z\sqrt{-1})=1.2.3\ldots n(M+N\sqrt{-1})$ seria igual á cero, lo cual es contra lo que hemos supuesto. Si $A=0$ y $B=0$, entónces el teorema quedaria demostrado, y se tendria $f(y+z\sqrt{-1})=0$.

Luego queda probado, que si el módulo $\sqrt{A^2+B^2}$ no es cero para un cierto valor $y+z\sqrt{-1}$ de x, podemos dar á esta incógnita otro valor de la misma forma tal, que el módulo correspondiente de $f(x)$ sea menor que el anterior.

De aquí se deduce, que el menor mínimo de la funcion $\sqrt{A^2+B^2}$ es cero. En efecto, ninguna cantidad P mayor que cero puede serlo; puesto que si este valor P corresponde á $x=y+z\sqrt{-1}$, podremos dar á x otro valor de la misma forma que dé un nuevo valor $\sqrt{A'^2+B'^2}$ menor que P; luego el menor mínimo es cero.

Ahora únicamente falta probar, que á este mínimo cero, corresponden valores finitos de y y de z; lo cual es muy fácil, haciendo ver que, para valores infinitos de una ó de las dos de estas variables, corresponden á la funcion $\sqrt{A^2+B^2}$ valores infinitos tambien.

Para ello, si en la ecuacion [1] sacamos x^m por factor comun, hallaremos

$$f(x)=x^m\left(1+\frac{P_1}{x}+\frac{P_2}{x^2}+\ldots+\frac{P_n}{x^n}+\ldots+\frac{P_m}{x^m}\right)=0;$$

y si reemplazamos x por la expresion $y+z\sqrt{-1}$, resultará, haciendo $f(y+z\sqrt{-1})=A+B\sqrt{-1}$,

$$f(y+z\sqrt{-1})=A+B\sqrt{-1}=$$

$$(y+z\sqrt{-1})^m\left\{1+\frac{P_1}{y+z\sqrt{-1}}+\ldots+\frac{P_n}{(y+z\sqrt{-1})^n}+\ldots+\frac{P_m}{(y+z\sqrt{-1})^m}\right\}$$

El coeficiente del término general de la ecuacion [1] es P_n, que podrá tener la forma $p+q\sqrt{-1}$; luego el término general de la cantidad que hay dentro de los corchetes de la igualdad anterior, será

$$\frac{p+q\sqrt{-1}}{(y+z\sqrt{-1})^n}=P+Q\sqrt{-1};$$

de donde se deduce (*Algebra*, tomo I, números 214 y 215),

$$\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{\frac{p^2+q^2}{(y^2+z^2)^n}}.$$

Si suponemos ahora que una de las cantidades y ó z, ó ambas á la vez, crecen indefinidamente, $\sqrt{P^2+Q^2}$ decrecerá indefinidamente tambien, teniendo por límite cero; y por tanto, P y Q se aproximarán á cero cuanto se quiera. Lo que se ha dicho del término general, se podrá decir de todos los demás, á excepcion del primero, que es la unidad; luego la cantidad que hay dentro de los corchetes podrá reducirse á una expresion de la forma $1+a+b\sqrt{-1}$, en la cual a y b se anulan, cuando una de las variables y ó z, ó las dos, se hacen infinitas.

De manera, que se tendrá

$$A+B\sqrt{-1}=(y+z\sqrt{-1})^m(1+a+b\sqrt{-1}),$$

de donde se deduce

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{(y^2+z^2)^m}\times\sqrt{(1+a)^2+b^2}.$$

Si suponemos ahora, que una de las cantidades y ó z, ó ambas, se hacen infinitas, el factor $\sqrt{(y^2+z^2)^m}$ se hará infinito, el otro factor $\sqrt{(1+a)^2+b^2}$, se reducirá á la unidad; luego el producto, ó sea la funcion $\sqrt{A^2+B^2}$, tomará un valor infinito para valores infinitos de y y de z. Por tanto, si á valores infinitos de y y de z, la funcion $\sqrt{A^2+B^2}$ se reduce á infinito, es evidente que al valor cero de esta funcion no pueden corresponder valores infinitos de y y de z, que es lo último que se debia probar; quedando por consiguiente demostrado el teorema fundamental.

LECCION XX.

Forma y número de las raíces de una ecuacion.—Relaciones que unen á las raíces de una ecuacion algebráica con los coeficientes de la misma.

Forma y número de las raíces de una ecuacion.

179. Si se trata de una ecuacion trascendente, la forma de sus raíces depende de la naturaleza de la ecuacion, y el número de ellas puede ser infinito; circunstancia notable que diferencia á las ecuaciones trascendentes de las algebráicas, pues en éstas el número de las raíces es siempre finito.

Las raíces de una ecuacion algebráica son de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, en la cual se hallan comprendidas tanto las reales como las imaginarias de la forma $\beta\sqrt{-1}$; pues no hay más que admitir, que cada una de las cantidades α y β pueden reducirse á cero.

180. *El primer miembro de una ecuacion racional y entera del grado* m, *reducida á la forma ordinaria, es igual al producto de* m *factores binómios de primer grado.*

Sea $f(x)=0$ esta ecuacion. Segun el teorema fundamental, tendrá por lo ménos una raíz por a, y consiguiente su primer miembro será divisible por $x-a$ (*Alg.* tomo I, 91); de modo, que llamando $f_1(x)$ al cociente, que será un polinómio del grado $m-1$, tendremos $f(x)=(x-a)f_1(x)$.

La ecuacion $f_1(x)=0$, tiene por lo ménos una raíz b; luego

$$f_1(x)=(x-b)f_2(x).$$

Continuando de la misma manera, se tendrá sucesivamente

$$f_2(x)=(x-c)f_3(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{m-2}(x)=(x-k)f_{m-1}(x),$$

$$f_{m-1}(x)=(x-l);$$

de donde se deduce, multiplicando ordenadamente y simplificando,

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l).$$

Observacion. Si la ecuacion no estuviera reducida á la forma ordinaria; es decir, si su primer coeficiente no fuera igual á la unidad, y sí á una cierta cantidad A, el producto de los factores binómios de la forma $x-a$, vendria multiplicado por A.

En efecto, sea la ecuacion

$$F(x)=Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Tx+V=0.$$

Sacando A factor comun, y representando por $f(x)$ el polinómio que resulte dentro del paréntesis, tendremos

$$F(x)=Af(x);$$

pero $\quad f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l);$

luego $\quad F(x)=A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l).$

181. *Toda ecuacion racional y entera del grado* m, *tiene* m *raíces, y no puede tener más.*

En efecto, sea la ecuacion $f(x)=0$. Segun el principio anterior, se tiene

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l).$$

Si hacemos sucesivamente $x=a$, $x=b$, $x=c$,... el producto $f(x)$ se anulará (*Alg.* tomo I, 217); luego la ecuacion propuesta tiene m raíces por lo ménos, y no puede tener más; porque si tuviera alguna otra raíz α distinta de las anteriores, su primer miembro $f(x)$ seria divisible por $x-\alpha$, lo que es imposible, pues de lo contrario se podria descomponer en dos sistemas de factores primos, lo cual no es cierto (*Alg.* tomo I, 120).

Observacion. Si son iguales entre sí algunos de los factores binómios en que el primer miembro de una ecuacion se descompone, se dice que ésta tiene *raíces iguales* ó *raíces múltiples*. Así, la ecuacion $(x-a)^3(x+b)^2(x-c)^4=0$, tiene *tres* raíces iguales á a, *dos* iguales á $-b$, y *cuatro* iguales á c.

182. De los principios anteriores se deducen varias consecuencias.

1.ª *El primer miembro de una ecuacion del grado* m, *es igual al producto de* m *factores binómios, que se obtienen restando de* x *cada una de las* m *raíces.*

Por consiguiente, dadas las raíces de una ecuacion, podremos formarla igualando á cero el producto de los factores que resultan, restando de x cada una de las raíces. Así, se verá que la ecuacion que tiene por raíces los números 1, 2 y -3, es

$$(x-1)(x-2)(x+3)=x^3-7x+6=0.$$

2.ª *La unidad tiene* m *raíces* emésimas; *ó lo que es lo mismo, hay* m *expresiones que, elevadas á la potencia* m, *nos reproducen la unidad.*

En efecto, si hacemos $y=\sqrt[m]{1}$, se tendrá, elevando á la potencia m y trasponiendo, $y^m-1=0$; cuya ecuacion queda satisfecha por m valores de y, que son las m raíces *emésimas* de la unidad. (Véase el *Algebra elemental*, núm. 195).

3.ª *No hay más funciones primas de* x, *que las de primer grado con relacion á esta variable.*

183. *Toda ecuacion algebráica, de coeficientes reales, que tiene una raíz imaginaria* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, *tiene otra conjugada* $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

En efecto, sea la ecuacion $f(x)=0$, que tiene la raíz $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Sustituyendo en ella este valor, se hallará

$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1})=$$

$$f(\alpha)+f'(\alpha)\beta\sqrt{-1}-f''(\alpha)\frac{\beta^2}{2}-f'''(\alpha)\frac{\beta^3}{2.3}\sqrt{-1}+f^{\text{IV}}(\alpha)\frac{\beta^4}{2.3.4}+\ldots=$$

$$[f(\alpha)-f''(\alpha)\frac{\beta^2}{2}+f^{\text{IV}}(\alpha)\frac{\beta^4}{2.3.4}-f^{\text{VI}}(\alpha)\frac{\beta^6}{2.3.4.5.6}+\ldots]+$$

$$[f'(\alpha)-f'''(\alpha)\frac{\beta^2}{2.3}+f^{\text{V}}(\alpha)\frac{\beta^4}{2.3.4.5}-f^{\text{VII}}(\alpha)\frac{\beta^6}{2.3.4.5.6.7}+\ldots]\beta\sqrt{-1}=0;$$

ó representando por A y B las cantidades reales que hay dentro de los paréntesis, tendremos

$$f(\alpha+\beta\sqrt{-1})=A+B\beta\sqrt{-1}=0.$$

Para que esta ecuacion se verifique, es menester que se tenga $A=0$ y $B=0$. Ahora bien, si nosotros sustituimos x por la expresion $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, lo que equivale á cambiar en el desarrollo anterior β en $-\beta$, tendremos

$$f(\alpha-\beta\sqrt{-1})=A-B\beta\sqrt{-1};$$

y como las cantidades A y B no han cambiado de valor, por no contener más que potencias pares de β, seguirán siendo cero, y por consiguiente se tendrá $A-B\beta\sqrt{-1}=0$; ó lo que es lo mismo,

$$f(\alpha-\beta\sqrt{-1})=0;$$

lo que nos prueba, que $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, es raíz de la ecuacion propuesta $f(x)=0$.

Consecuencia. Las raíces imaginarias de una ecuacion algebráica de coeficientes reales son conjugadas, y por tanto su número es par.

Análogamente se demostraria, que si una ecuacion de coeficientes conmensurables tiene una raíz de la forma $a+\sqrt{b}$, tiene otra conjugada $a-\sqrt{b}$.

Observacion. Si $f(x)$ contiene términos imaginarios, A y B no serán reales, la ecuacion $f(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ no se descompondrá como anteriormente en $A=0$ y $B=0$, y el teorema anterior no será siempre cierto. Pero no se vaya á creer por esto, que una ecuacion de coeficientes imaginarios, no pueda tener raíces imaginarias conjugadas.

184. *El primer miembro de una ecuacion algebráica de coeficientes reales, es igual al producto de tantos factores de primer grado como raíces reales tiene, y de tantos factores reales de segundo grado como pares de expresiones imaginarias conjugadas la verifican.*

Siendo a, b, c,... k, l, las raíces de la ecuacion $f(x)=0$, se tendrá (182, 1.ª)

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l).$$

Si todas las raíces son reales, el principio queda demostrado. Si hay raíces imaginarias, éstas se hallarán en número par, y serán conjugadas de dos en dos; de modo, que si k y l son dos de estas raíces, se tendrá, representándolas por $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$,

$$(x-k)(x-l)=(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta)\sqrt{-1}=$$
$$(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2);$$

donde vemos, que el producto de los dos factores correspondientes á dos raíces imaginarias conjugadas, es de segundo grado y de coeficientes reales. Esto se verifica para cualquier otro par de raíces conjugadas; luego el principio queda demostrado.

Relaciones que unen á las raíces de una ecuacion algebráica con los coeficientes de la misma.

185. *En toda ecuacion reducida á la forma ordinaria*

$$f(x)=x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots+P_m=0,$$

1.° *el coeficiente del segundo término es igual á la suma de las raíces, tomada con signo contrario;* 2.° *el coeficiente del tercer término es igual á la suma de sus productos binarios;* 3.° *el coeficiente del cuarto término es igual á la suma de los productos ternarios de las raíces, tomada con signo contrario, etc.; y finalmente, el último término es igual al producto de todas las raíces tomado con su signo ó con signo contrario, segun que sea par ó impar el grado* m *de la ecuacion.*

En efecto, sean a, b, c, ... k, l, las raíces de la ecuacion $f(x)=0$. Segun la primera consecuencia del número 182, se tendrá

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l);$$

pero representando por S_1 la suma de las raíces, por S_2 la de sus productos binarios, y en general por S_n la de los productos de estas raíces tomadas de n á n, tendremos (*Alg.* tomo I, número 155)

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)=$$
$$x^m-S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}-S_3x^{m-3}+\ldots\pm S_nx^{m-n}\mp\ldots\pm S_m=0;$$

y por consiguiente, identificando, se tendrá, segun queriamos demostrar,

$$P_1=-S_1,\ P_2=+S_2,\ P_3=-S_3,\ \dots\ P_n=\pm S_n,\ \dots\ P_m=\pm S_m.$$

186. *Las* m *relaciones que hay entre las* m *raíces de una ecuacion y los coeficientes de la misma, no bastan para determinar estas raíces.*

En efecto, como cada una de las raíces entra de la misma manera que las demás en la formacion de los coeficientes, si entre las m relaciones eliminamos todas las raíces ménos una, que llamaremos a, siempre hallaremos la misma ecuacion, cualquiera que sea la raíz que dejemos de eliminar; con la sola diferencia de que en cada una de ellas, la incógnita será la raíz que no se ha eliminado; luego esta ecuacion final en a, tiene que ser por lo ménos del grado m, puesto que ha de dar las m raíces de la propuesta. Mayor que m no puede ser; porque entónces excederia por lo ménos en una unidad, lo cual probará que además de las m raíces de la ecuacion, hay otro valor de a; y como lo mismo sucederia si hubiéramos dejado de eliminar b, c, etc., se sigue que además del sistema de raíces a, b, c,... tendriamos otro sistema distinto a', b', c',... que se hallaria contenido en dicha ecuacion final; y por tanto, esta seria por lo ménos del grado $2m$, lo cual no puede ser: porque si se tuvieran, como acabamos de ver, los dos sistemas anteriores de valores que verificasen á las relaciones que hay entre raíces y coeficientes; es decir, si se tuvieran los dos sistemas de ecuaciones

$$a+b+c\dots=S_1,\ ab+ac\dots=S_2,\ abc+abd\dots=S_3,\dots abc\dots l=S_m,$$
$$a'+b'+c'\dots=S_1,\ a'b'+a'c'\dots=S_2,\ a'b'c'+a'b'd'\dots=S_3,\dots a'b'c'\dots l'=S_m,$$

los dos productos

$$(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-l)\ \text{y}\ (x-a')(x-b')(x-c')\dots(x-l')$$

serian iguales, y se tendria descompuesto el primer miembro de la ecuacion dada $f(x)=0$, en dos sistemas distintos de factores primos, lo cual no puede ser; luego la ecuacion que resulta de eliminar todas las raíces ménos una entre las relaciones que ligan á las raíces de una ecuacion con los coeficientes de la misma, es la ecuacion propuesta, en la que se ha sustituido la incógnita x por la raíz que no se eliminó.

Esto mismo se puede comprobar efectuando la eliminacion.

Sea, para fijar las ideas, la ecuacion

$$x^4+P_1x^3+P_2x^2+P_3x+P_4=0.$$

Las ecuaciones de condicion serán, llamando a, b, c, d, á las raíces,

$$a+b+c+d=-P_1,$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=P_2,$$
$$abc+abd+acd+bcd=-P_3,$$
$$abcd=P_4.$$

Multiplicando la primera por $-a^3$, la segunda por $+a^2$, la tercera por $-a$, y sumando, hallaremos, despues de hecha toda reduccion,

$$-a^4=P_1a^3+P_2a^2+P_3a+P_4,$$

ó bien $$a^4+P_1a^3+P_2a^2+P_3a+P_4=0;$$

donde vemos, que la ecuacion resultante de la eliminacion es la propuesta, en la cual se ha sustituido la incógnita x por la letra a.

Del principio anterior se deduce el modo de hallar m números, conociendo su suma S_1, la suma S_2 de sus productos binarios, la de los productos ternarios S_3 y así sucesivamente y por último el producto S_m de todos ellos; pues evidentemente serán estos números las raíces de la ecuacion

$$x^m-S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}-S_3x^{m-3}+\ldots\pm S_m=0.$$

187. *Si todas las raíces de una ecuacion son enteras, los coeficientes de esta ecuacion serán tambien enteros.*

En efecto, la suma de números enteros, lo mismo que la de sus productos binarios, ternarios, etc., son tambien números enteros; luego los coeficientes de la ecuacion propuesta son enteros.

La recíproca no es cierta; porque puede suceder que todos los coeficientes de una ecuacion sean enteros, y sin embargo no tenga raíces enteras.

LECCION XXI.

Modo de variar una funcion racional y entera $f(x)$, cuando x varía por la ley de continuidad entre $-\infty$ y $+\infty$. Representacion geométrica de esta funcion.—Ecuaciones numéricas; casos en que una ecuacion tiene raíces reales.

Modo de variar una funcion racional y entera $f(x)$, cuando x varía por la ley de continuidad entre $-\infty$ y $+\infty$. Representacion geométrica de esta funcion.

188. Ya hemos visto anteriormente: 1.° Que si la variable de una funcion racional y entera varía por la ley de continuidad, la funcion aumenta ó disminuye segun la misma ley (69). 2.° Que esta funcion es creciente ó decreciente, aumentando x, segun que la derivada sea positiva ó negativa (72). 3.° Que una funcion cualquiera es contínua, cuando la derivada es constantemente finita para valores finitos de x (70).

Esto supuesto, sea la funcion racional y entera más sencilla

$$y = Ax^m.$$

Esta funcion es contínua, porque su derivada $y' = mAx^{m-1}$ permanece siempre finita para valores finitos de x. Además, varía desde 0 hasta $+\infty$, cuando x varía desde 0 á $\pm\infty$, si m es par; y desde 0 hasta $\pm\infty$, cuando x varía desde 0 á $\pm\infty$, si m es impar; de modo, que estará representada gráficamente por una curva de la forma de la figura 7.ª, si m es par; y si fuese impar, su forma seria la de la fig. 8.ª

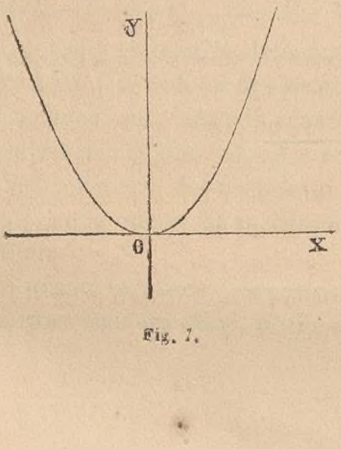

Fig. 7.

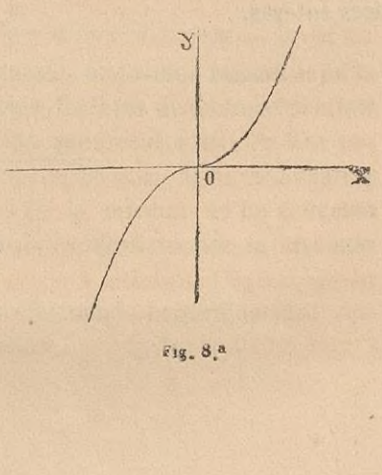

Fig. 8.ª

189. Si consideramos dos funciones de la misma especie, $y=Ax^m$, $y_1=Bx^n$, y hacemos que x varíe desde 0 hasta ∞, la relacion $\frac{y}{y_1}=\frac{Ax^m}{Bx^n}$ variará desde 0 hasta ∞, permanecerá constante, ó variará desde ∞ hasta 0, segun que se tenga $m>n$, $m=n$ ó $m<n$.

En efecto, si $m>n$, se tendrá $\frac{y}{y_1}=\frac{A}{B}x^{m-n}=A'x^d$; cuya expresion es cero para $x=0$, é infinito para $x=\infty$, siendo contínua entre estos límites.

Si $m=n$, $\frac{y}{y_1}=\frac{A}{B}$, cantidad constante.

Por último, si $m<n$, $\frac{y}{y_1}=\frac{A}{B}\times\frac{1}{x^{n-m}}=\frac{A}{B}\times\frac{1}{x^d}$: expresion que es igual á ∞, cuando $x=0$; é igual á cero, cuando $x=\infty$.

190. De lo dicho anteriormente se deduce, que si se tiene una funcion racional y entera

$$F(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m,$$

ordenada con relacion á las potencias decrecientes de x, podremos dar á esta variable un valor tal, que reduzca al primer término de dicha funcion á una cantidad mayor en valor numérico que la suma de todos los demás; puesto que podremos hacer que la relacion de este primer término á cualquiera de los restantes, sea mayor que cualquiera cantidad por grande que sea.

191. *Toda funcion racional y entera de* x *de grado par, conserva siempre un mismo signo para valores de* x *no comprendidos entre ciertos límites* $-l'$ *y* l, *pudiendo cambiar de signo tan sólo para valores de* x *comprendidos entre estos límites.*

En efecto, supongamos para fijar las ideas, que el primer coeficiente A_0 de la funcion $A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots$ sea positivo. Dando á x valores desde 0 á $+\infty$, llegaremos á uno l, á partir del cual el signo de la funcion será siempre el de su primer término, es decir, positivo. Si ahora damos á x valores que decrezcan desde 0 á $-\infty$, el primer término, como de grado par, será siempre positivo, y llegaremos á un cierto valor $-l'$, á partir del cual la funcion conservará el mismo signo que este primer término; es decir, será siempre positivo. Luego la funcion, á partir de estos valores $-l'$ y l de x, será constantemente positiva é irá creciendo sin límites, á medida que x crezca indefinidamente en valor numérico.

Si el primer coeficiente hubiera sido negativo, la funcion conservaria el signo negativo en iguales circunstancias.

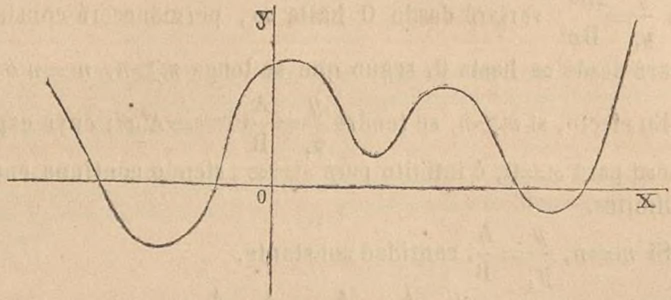

Fig. 9.ª

En el intervalo de $x=-l'$ á $x=l$, la funcion podrá crecer y decrecer un cierto número de veces, que dependerá del grado de la misma.

Una funcion de esta especie se hallará representada geométricamente por una curva (*fig.* 9.ª), que decrecerá desde $+\infty$, para volver á crecer hasta $+\infty$, presentando en el intervalo correspondiente á dos valores $-l'$ y l de la variable x, una série de ondulaciones.

Si la funcion es de grado impar, y hacemos crecer á x desde 0 á $+\infty$, se hallará un cierto valor l, á partir del cual la funcion será constantemente del mismo signo que su primer término (191), es decir, positiva. Si damos despues á x valores que decrezcan desde 0 á $-\infty$, el primer término será siempre negativo; y á partir de un valor mayor en valor numérico que l', pero negativo, la funcion tendrá el mismo signo que su primer término; es decir, será negativo, creciendo en valor numérico hasta infinito. Luego la funcion será constantemente positiva y creciente, á partir del valor positivo l; y será negativa, pero cada vez mayor en valor numérico, á partir del valor negativo $-l'$, presentando la circunstancia, como en el caso anterior, de poder crecer y decrecer varias veces en el intervalo de $x=l$ á $x=-l'$.

Así se representará gráficamente por una curva, que crecerá de $-\infty$ á $+\infty$, presentando un cierto número de ondulaciones en el intervalo de $x=l$ á $x=-l'$, como lo indica la figura 10.

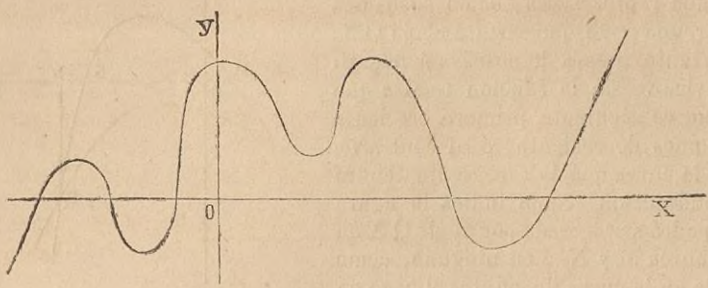

Fig. 10.

192. Hemos dicho que el número de veces que puede pasar una funcion á ser creciente y decreciente, entre dos límites l y $-l'$ de la variable, lo cual se representa gráficamente por las ondulaciones de la curva, depende del grado de la funcion. En efecto, *una funcion del grado* m, *puede crecer y decrecer entre dos límites dados tantas veces como unidades tiene el exponente* m, *y el número de ondulaciones que en su representacion podrá tener la curva, será* m—1.

Sea en primer lugar una funcion de primer grado

$$y=ax+b;$$

su derivada será $y'=a$, cantidad constante; luego la funcion y crecerá ó decrecerá constantemente, segun que se tenga $a>$ ó <0 *; luego la funcion no tendrá en su representacion geométrica ninguna ondulacion; es decir, será una línea recta, tal como AB (*fig.* 11), que cortará al eje OX, ó le será paralela, tal como A′ B′, segun que $a>$ ó <0, ó $a=0$. (72 y 73.)

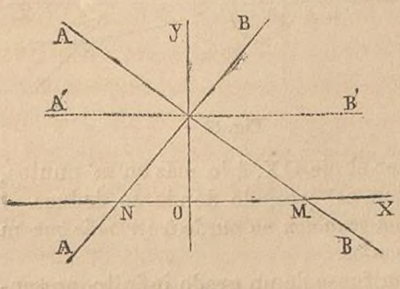

Fig. 11.

En el caso de no ser $a=0$, la funcion tiene que anularse por un sólo valor de x, que será $x=$O M ó $x=-$O N, correspondiente al punto M ó N en que la recta corta al eje.

Sea en segundo lugar la funcion de segundo grado

$$y=ax^2+bx+c;$$

su derivada es $y'=2ax+b$.

Si la funcion y es realmente de

* Cuando digamos que una funcion es constantemente creciente ó decreciente, se entenderá siempre que es para valores crecientes de la variable.

segundo grado, a no puede ser cero, y la derivada representará, como acabamos de ver, una recta, que cortará al eje O X; y por tanto, pasará de positiva á negativa, ó vice-versa: la funcion tendrá que ser, por consiguiente, primero creciente y despues decreciente, ó al contrario; luego la curva que la representa tendrá una ondulacion, como indica la figura 12, y podrá ser cortada por el eje O X en dos puntos M y N, ó en ninguno, como sucede en la curva de puntos. Luego en el intervalo de $x=-\mathrm{OL}'$ á $x=\mathrm{OL}$, la funcion cambia una vez de sentido, pasando de creciente á decreciente.

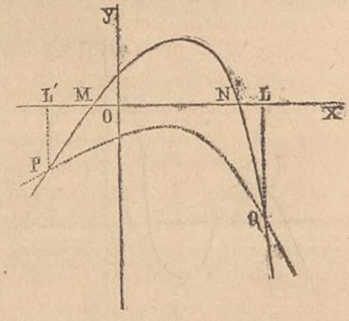

Fig. 12.

Si la funcion es de tercer grado, tal como $y=ax^3+bx^2+cx+d$; su derivada $y'=3ax^2+2bx+c$ será de segundo, y estará representada por una curva que presentará una ondulacion, y podrá ser cortada por una recta que tomaremos por eje de las x en dos puntos, como anteriormente hemos visto. Esta derivada podrá pasar, por ejemplo, de negativa á positiva, y luego otra vez de positiva á negativa. La funcion será, por consiguiente, primero decreciente, luego creciente, y despues volverá á ser decreciente, presentando tres cambios de sentido; la curva que la represente tendrá dos ondulaciones, pudiendo ser cortada, como lo indica la figura 13, en tres puntos P, Q, R.

Continuando del mismo modo, se ve que una funcion racional y entera del grado m, puede presentar m cambios de sentido en el intervalo comprendido entre dos límites, y que la curva que la representa puede tener $m-1$ ondulaciones en este mismo intervalo, dando orígen así á poder ser cortada por una recta, que supondremos ser el eje OX, á lo más en m puntos, para los cuales el valor de esta funcion es cero; de donde se deduce el teorema que ya conocemos, de que *una ecuacion no puede tener más que* m *raíces, que serán las abscisas de estos puntos.*

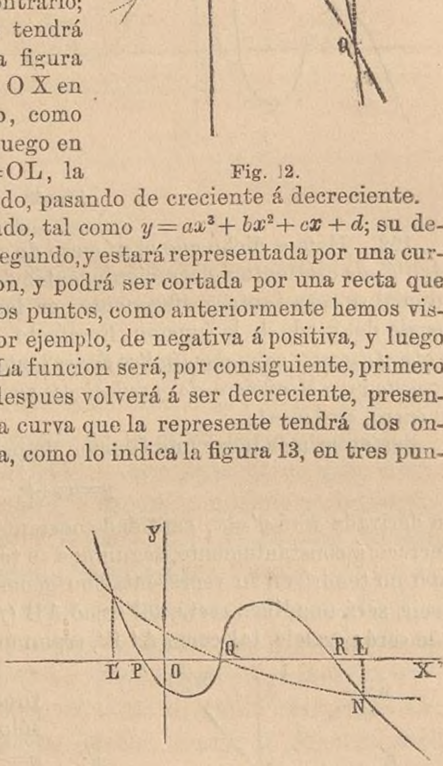

Fig. 13.

Observaciones. 1.ª Si la funcion fuese de un grado infinito, presentaria en su marcha un número infinito de variaciones; la curva que la representara tendria un número infinito de ondulaciones, y la funcion pasaria por una série de valores iguales; y si el polinómio que representa esta funcion cumple con ciertas condiciones, podrá suceder que estos valores iguales porque pasa la funcion se reproduzcan periódica é indefinidamente, como ha sucedido en los polinómios de grado infinito que constituyen las séries del seno y coseno de un arco.

2.ª Cuando los límites entre los cuales la curva presenta las ondulaciones se van estrechando, estas ondulaciones se van haciendo cada vez más pequeñas; y si estos límites se hacen iguales, las ondulaciones se reducen todas á una sola. Esto sucede cuando los puntos en que la curva corta al eje van aproximándose unos á otros, en cuyo caso las distancias que hay de estos al orígen tienden á ser iguales; pero estas distancias expresan las raíces de la ecuacion que resulta de igualar la funcion á cero; luego cuando estas raíces se hacen iguales, las $m-1$ ondulaciones se reducen á una sola, como ha sucedido en las figuras 7.ª y 8.ª, correspondientes á la funcion $y=Ax^m$, que se anula por m valores cero de x.

Ecuaciones numéricas; casos en que una ecuacion tiene raíces reales.

193. Se llama *ecuacion numérica*, aquella cuyos coeficientes y exponentes son números conocidos. Así,

$$x^3-5x^2+4x-7=0,$$

es una ecuacion numérica de tercer grado.

Se dice que una ecuacion del grado m es completa, cuando tiene todas las potencias de la incógnita, desde la *emésima* hasta la potencia *cero*; y faltando alguna, se dice que es *incompleta*.

Toda ecuacion incompleta puede hacerse completa, introduciendo las potencias de la incógnita que faltan, afectadas del coeficiente *cero*. Así, la ecuacion incompleta

$$x^5-3x^2+7=0,$$

podrá completarse, escribiéndola del modo siguiente:

$$x^5+0\,.\,x^4+0\,.\,x^3-3x^2+0\,.\,x+7=0.$$

Es necesario no despreciar la circunstancia de que la ecuacion sea ó no completa, porque podria, en algunos casos, dar orígen á errores.

194. *Si dos números cualesquiera* α *y* β, *sustituidos en vez de* x *en una funcion* f(x), *dan resultados de signos contrarios, la ecuacion* f(x)=0 *tiene una raiz real por lo ménos, comprendida entre* α *y* β, *y en general un número impar.*

Sea α el menor de los dos números, y supongamos que $f(x)$ tiene un valor negativo para $x=\alpha$, y un valor positivo para $x=\beta$.

Si ahora imaginamos que x crece de una manera contínua desde α hasta β, la funcion variará del mismo modo desde $f(\alpha)$, que es negativa, hasta $f(\beta)$, que es positiva; y como es finita en este intervalo, tendrá que pasar necesariamente, una vez á lo ménos, por el valor intermedio cero, el cual corresponderá á un cierto valor a de x, comprendido entre α y β; luego vemos que hay por lo ménos una raíz real de la ecuacion $f(x)=0$, comprendida entre estos dos números.

Si suponiendo que á partir de este primer valor a, que anula á $f(x)$, hallamos, ántes de llegar á darle á x el valor β, otra raíz real b de la ecuacion, la funcion tendrá que pasar de positiva á negativa en el intervalo de $x=b-h$ á $x=b+h$, siendo h suficientemente pequeña para que entre $b-h$ y $b+h$ no haya comprendida ninguna raíz de la derivada $f'(x)$ *; y si para el valor $x=b+h$ la funcion es negativa como al principio, tendrá que cambiar necesariamente una vez más de signo para que resulte positiva; luego si admitimos dos raíces comprendidas entre α y β, tiene que admitirse necesariamente una tercera raíz c. Si admitida esta tercera, supusiéramos una cuarta raíz d, tambien en este caso la funcion pasaria necesariamente de positiva á negativa, en el intervalo de $x=d-h$ á $x=d+h$; es decir, volveria á tener la funcion el mismo signo que al principio: y como para el valor de $x=\beta$, ha de tener signo contrario, es menester que cambie necesariamente otra vez más en el intervalo de $x=d$ á $x=\beta$, y así sucesivamente; luego en general, entre α y β habrá comprendidas un número impar de raíces reales de la ecuacion $f(x)=0$.

195. *Si dos números cualesquiera α y β, comprenden un número impar de raíces reales de la ecuacion* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$, *sustituidos en vez de* x *en* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$, *darán resultados de signos contrarios.*

---

* Hemos dicho que en el intervalo de $x=b-h$ á $x=b+h$, la funcion pasa de positiva á negativa, para lo cual se ha establecido la condicion de que h fuese suficientemente pequeña, con el objeto de que entre $b-h$ y $b+h$ no haya ninguna raíz de la derivada de $f(x)$. Cuando esto se verifica, es claro que no hay dificultad; porque no pasando la derivada por cero, no cambia de signo en este intervalo, y por consiguiente la funcion es constantemente creciente ó decreciente, y al pasar por cero tendrá necesariamente que cambiar de signo en este intervalo. Pero si para el valor b que anula la funcion, se anulase tambien la derivada, entónces la funcion pasaría en general por un mínimo cero, y la curva que representase esta funcion seria tangente en este punto al eje de las x; lo cuál supone que dos puntos de seccion se han reunido en uno sólo, por lo que se dice que la ecuacion tiene en este caso dos raíces iguales. El teorema no cae por consiguiente en defecto, aun suponiendo que $f'(x)$ se anule para el valor b.

Sean a, b, c,... l, un número impar de raíces reales de la ecuacion $f(x)=0$, que hay comprendidas entre α y β. El polinómio $f(x)$ se podrá poner bajo la forma

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)...(x-l)\varphi(x),$$

siendo $\varphi(x)$ el producto de los factores binómios correspondientes á las demás raíces de la ecuacion propuesta.

Si sustituimos en vez de x sucesivamente los números α y β, tendremos

$$f(\alpha)=(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)...(\alpha-l)\,\varphi(\alpha),$$
$$f(\beta)=(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)...(\beta-l)\,\varphi(\beta).$$

Las expresiones $\varphi(\alpha)$ y $\varphi(\beta)$ son de un mismo signo; pues si fueran de signos contrarios, los números α y β comprenderian, por lo ménos, una raíz real más de la ecuacion propuesta, lo que es contra la hipótesis.

Ahora, si suponemos $\alpha<\beta$, las raíces a, b, c,... l, serán mayores que α y menores que β; los factores $(\alpha-a)$, $(\alpha-b)$, $(\alpha-c)$,...$(\alpha-l)$, serán negativos; y como por suposicion son en número impar, su producto será negativo; luego $f(\alpha)$ será de signo contrario que $\varphi(\alpha)$ ó que $\varphi(\beta)$. Todos los factores $(\beta-a)$, $(\beta-b)$, $(\beta-c)$,...$(\beta-l)$, son positivos; su producto será, por consiguiente, positivo tambien; luego $f(\beta)$ tendrá el mismo signo que $\varphi(\beta)$: por lo tanto, $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ tienen signos contrarios.

196. *Si dos números cualesquiera α y β, sustituidos en una funcion entera* f(x), *dan resultados de un mismo signo, la ecuacion* f(x)=0 *tiene un número par de raíces reales comprendidas entre α y β, ó no tiene ninguna.*

En efecto, si tuviera una, ó en general un número impar, los resultados de sustituir α y β en $f(x)$ serian de signos contrarios (195), lo cual es contra el supuesto.

197. *Si dos números cualesquiera α y β no comprenden raíces reales de la ecuacion racional y entera* f(x)=0, *ó comprenden un número par, la sustitucion sucesiva de estos dos números en* f(x), *dará resultados de un mismo signo.*

En efecto, si diera resultados de signos contrarios, α y β comprenderian un número impar de raíces reales (194), lo cual es contra la hipótesis.

Observacion. Los teoremas (194 y 196), lo mismo que sus recíprocos, se verifican lo mismo para las funciones racionales y enteras, que para cualquiera otra funcion, siempre que tenga la propiedad de ser contínua para valores de x comprendidos entre α y β, pues en la demostracion no se ha exigido otra condicion; por consiguiente, estas propiedades no pertenecen exclusivamente á las funciones racionales y enteras.

198. Por consideraciones geométricas se puede ver fácilmente la exactitud de los teoremas anteriores que acabamos de demostrar.

Sea $f(x)$ una funcion contínua cualquiera, que supondremos representada por una curva N Q M (*fig.* 14).

Los puntos de interseccion de esta curva con el eje O X, corresponderán al valor cero de la funcion, y los valores de la abscisa x, correspondientes á estos puntos, serán las raíces de la ecuacion $f(x)=0$ (52). Así, si la curva corta al eje O X en un punto Q, la longitud O Q será una raíz de $f(x)=0$.

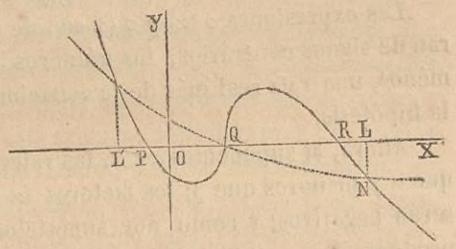

Fig. 14.

Esto supuesto, admitamos que para los valores $x=-\text{OL}'=\alpha$ y $x=\text{OL}=\beta$, la funcion tiene signos contrarios $+\text{L'M}$ y $-\text{L N}$; pero siendo la funcion contínua, no podrá pasar la curva del punto M al punto N, sin cortar necesariamente al eje O X en un cierto punto Q.

Si la curva corta al eje en varios puntos, como lo indica la línea marcada de lleno, el número de estos puntos será impar. En el caso presente son tres, P, Q y R.

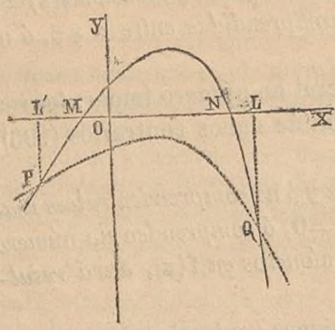

Fig. 15.

Supongamos ahora que los dos valores $-\text{O L}'=\alpha$ y $\text{O L}=\beta$ de la variable x (*fig.* 15), dan para la funcion valores de un mismo signo $-\text{L'P}$ y $-\text{LQ}$. En general, la curva irá del punto P al punto Q sin cortar al eje OX, y la ecuacion no tendrá ninguna raíz comprendida entre α y β; pero si corta al eje, lo hará en un número par de puntos M, N, y la ecuacion tendrá un número par de raíces reales comprendidas en este intervalo.

199. *Toda ecuacion racional y entera de grado impar, tiene por lo ménos una raíz real de signo contrario al de su último término.*

Sea la ecuacion

$$f(x)=x^m+P_1x^{m-1}+...+P_{m-1}x-P_m=0,$$

cuyo primer término es positivo, y negativo el último.

Si damos á x el valor 0, el resultado será $-P_m$; es decir, negativo. Si ahora damos á x un valor l, suficientemente grande, el resultado será positivo (191); luego entre 0 y l hay comprendida por lo ménos una raíz real de la ecuacion $f(x)=0$, y en general un número impar (194).

Del mismo modo se demostraria en el caso de ser el último término positivo.

200. *Toda ecuacion racional y entera de grado par, cuyo último término es negativo, tiene por lo ménos dos raíces reales, una positiva y otra negativa, y en general un número impar de cada clase.*

En efecto, haciendo $x=0$, se obtiene el último término, que por hipótesis es negativo; despues, dando á x dos valores l' y l, suficientemente grandes en valor numérico, uno negativo y otro positivo, se hallarán resultados positivos (191); luego entre 0 y $-l'$ habrá comprendida por lo ménos una raíz real, y otra entre 0 y l, y en general un número impar (194).

201. CONSECUENCIA. *Si una ecuacion no tiene más que raíces imaginarias, esta será de grado par, su último término será positivo, y el resultado que se obtiene sustituyendo en vez de* x *un número cualquiera, será positivo tambien.*

Las tres partes que este teorema comprende, se demuestran fácilmente por reduccion al absurdo.

202. OBSERVACION. La recíproca de la proposicion anterior no es siempre cierta, porque puede haber ecuaciones que cumplan con todas las condiciones indicadas, y no contengan raíces imaginarias.

LECCION XXII.

Regla de los signos de Descartes.—Límite del número de raíces imaginarias de una ecuacion.

Regla de los signos de Descartes.

203. Se dice que dos términos consecutivos de un polinómio de coeficientes reales y ordenado con relacion á x, forman una *variacion* cuando están afectados de signos diferentes; y que forman una *permanencia*, cuando tienen signos iguales.

Por ejemplo, la ecuacion

$$x^6+3x^5-4x^4+3x^2-5x-7=0,$$

presenta *dos* permanencias y *tres* variaciones.

204. *Una ecuacion, cuyo primer término supondremos siempre positivo, presenta un número par ó impar de variaciones, segun que el último término sea positivo ó negativo.*

En efecto, para pasar de un término positivo á otro que tambien lo es, se necesita evidentemente un número par de cambios de signos; y como cada cambio origina una variacion, habrá un número par: si todos los términos son positivos, habrá cero variaciones, y cero se considera siempre como número par.

Del mismo modo se vé, que cuando el último término es negativo, la ecuacion presenta un número impar de variaciones.

205. *Si se multiplica un polinómio de coeficientes reales y ordenado con relacion á* x, *por el binómio* x — a, *siendo* a *un número positivo, el polinómio que resulte tendrá por lo ménos una variacion más, y en general un número impar.*

Sea el polinómio ordenado con relacion á x,

$$A_m x^m \ldots + A_n x^n - A_{n-1} x^{n-1} \ldots - A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} \ldots + A_q x^q - A_{q-1} x^{q-1} \ldots$$
$$\pm A_s x^s \mp A_{s-1} x^{s-1} \ldots\ldots \mp A_1 x \mp A_0,$$

que principia por un grupo de términos positivos, despues sigue otro de términos negativos, luégo continúa un tercer grupo de términos positivos otra vez, y así sucesivamente, hasta llegar á un último grupo que principia en $\mp A_{s-1}x^{s-1}$, en el cual todos los términos son de un mismo signo — ó +. Cada uno de estos grupos podrá tener varios términos, ó uno solo. En este polinómio cada variacion se formará al pasar de un grupo cualquiera al siguiente, y el número de las variaciones que presente se hallará contenido entre el primer término y el $A_{s-1}x^{s-1}$; pues á partir de éste, todos tienen el mismo signo.

Efectuando la multiplicacion de este polinómio por $x - a$, hallaremos

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} A_m x^{m+1}\ldots -A_{n-1} & x^n \ldots + A_{p-1} & x^p \ldots -A_{q-1} & x^q \ldots \mp A_{s-1} & x^s \ldots \mp A_0 & x \pm A_0 a. \\ \quad -A_n a & \quad + A_p a & \quad -A_q a & \quad \mp A_s a & \quad \pm A_1 a & \end{array}$$

Comparando este resultado con el multiplicando, veremos que desde el primer término hasta la potencia x^s, hay por lo ménos tantas variaciones como en el polinómio dado; y si hay más, el exceso será un número par; pues el multiplicando y la parte del producto hasta la potencia x^s, están terminados por los mismos signos; luego hay en ambas partes un número par de variaciones ó un número impar (204), y la diferencia de dos números pares ó de dos impares es siempre par. Desde la potencia x^s del producto hasta el último término hay por lo ménos una variacion y en general un número impar, porque para pasar de un término positivo á un negativo ó viceversa, se necesita necesariamente un número impar de cambios de signos; luego si desde el primer término del producto hasta la potencia x^s hay tantas variaciones por lo ménos como en el multiplicando, y desde la potencia x^s hasta el último término hay por lo ménos una, es claro que este producto tiene por lo ménos una variacion más. Si tiene más, el exceso será un número impar; porque ya hemos visto, que el exceso de variaciones que puede haber en el producto desde su primer término hasta la potencia x^s sobre el multiplicando, es un número par; y agregando á éste el número de variaciones que hay entre x^s y el último, que acabamos de ver es número impar, tendremos la diferencia total de variaciones, que será un número impar.

206. Teorema de Descartes. *En toda ecuacion algebráica de coeficientes reales completa ó incompleta, el número de raíces positivas no es mayor que el número de variaciones.*

Sea $f(x)=0$ una ecuacion algebráica de coeficientes reales, cuyas raíces positivas son $a, b, c, \ldots l$. Representemos por $\varphi(x)$ el producto de los factores binómios correspondientes á las demás raíces, tanto negativas como imaginarias, y tendremos

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-l)\varphi(x).$$

La expresion $\varphi(x)$, que igualada á cero no tiene más que raíces negativas é imaginarias, tiene sus coeficientes reales, y su último término es positivo; pues si fuese negativo, tendria por lo ménos una raíz positiva, lo cual es contra la hipótesis. Ahora bien, si multiplicamos este polinómio sucesivamente por cada uno de los binómios $x-a$, $x-b$, ... $x-l$, que corresponden á las raíces positivas, cada producto contendrá por lo ménos una variacion más que el anterior; luego el producto final $f(x)$, tendrá por lo ménos tantas variaciones como raíces positivas hay.

207. Observacion. *Si el número de raíces positivas no es igual al número de variaciones, la diferencia será un número par.*

En efecto, acabamos de ver, que $\varphi(x)$ tiene su último término positivo; y por tanto, ó no presenta variaciones, ó presenta un número par (204). Además, el producto de $\varphi(x)$ por $(x-a)$, $(x-b)$, ... $(x-l)$, excede en variaciones á $\varphi(x)$ en un número par ó impar, segun que el número de raíces sea par ó impar tambien; luego el número de variaciones de $f(x)$ será par ó impar, segun que el número de raíces positivas sea tambien par ó impar; y por tanto, la diferencia que hay entre el número de raíces positivas de una ecuacion y el de variaciones, siendo la diferencia de dos números pares ó impares, será siempre un número par.

208. Consecuencia. *Una ecuacion algebráica de coeficientes reales, no puede tener más raíces negativas que variaciones presenta la trasformada en* $-$x.

En efecto, las raíces de la trasformada son iguales y de signos contrarios á las de la propuesta; y por consiguiente, el número de raíces negativas de esta, que son las positivas de la trasformada, no será mayor que el número de variaciones de esta trasformada.

209. *El número de variaciones que presenta una ecuacion y su trasformada en* $-$x, *no es mayor que el grado* m *de dicha ecuacion.*

En efecto, si la ecuacion es completa y del grado m, el número de sus términos será evidentemente $m+1$. Entre cada dos términos habrá una variacion ó una permanencia; luego el número de variaciones, más el número de permanencias, será igual á m. Ahora bien, cuando se sustituye x por $-x$, cambian de signo los términos de grado impar, y por consiguiente las variaciones se convierten en permanencias y recíprocamente; luego el número de variaciones de la ecuacion propuesta, más el de la trasformada, es igual al grado m de la ecuacion. Si la ecuacion es incompleta, el número de variaciones no aumentará, sino que por el contrario podrá disminuir; luego si representamos por v el número de variaciones de la propuesta, y por v' el de la trasformada, se tendrá en general $v+v'=$ ó $<m$.

210. *Si el número* $v+v'$ *de variaciones que presenta una ecuacion y su trasformada en* $-x$, *es menor que el grado* m *de la ecuacion, ésta tendrá, por lo ménos,* $m-(v+v')$ *raíces imaginarias.*

En efecto, el número de raíces positivas de la ecuacion, no es mayor que v; el número de raíces negativas no es mayor que v'; luego el número de raíces reales, que representaremos por r, no es mayor que $v+v'$; es decir, que se tendrá $r=$ ó $<(v+v')$; de donde $m-r=$ ó $>m-(v+v')$; pero $m-r$ representa el número de raíces imaginarias; luego el número de estas es igual ó mayor que la diferencia que hay entre el grado m de la ecuacion y la suma $v+v'$ de variaciones de la ecuacion propuesta y trasformada en $-x$.

211. *Si todas las raíces de una ecuacion son reales, el número* p *de raíces positivas es igual al número* v *de variaciones, y el número* n *de raíces negativas es igual al número* v' *de variaciones de la trasformada en* $-x$.

En efecto, si todas las raíces son reales, $v+v'$ no puede ser menor que m, porque entónces habria por lo ménos $m-(v+v')$ raíces imaginarias (210): mayor que m tampoco puede ser (209); luego será igual, y tendremos

$$\left.\begin{array}{r} p+n=m \\ v+v'=m \end{array}\right\}; \text{ de donde } p+n=v+v'.$$

Ahora bien, p no es mayor que v; luego será igual ó menor: menor no puede ser, porque si lo fuera, n tendria que ser mayor que v', lo cual es imposible (208); luego $p=v$, y $n=v'$.

CONSECUENCIAS. 1.ª *Cuando una ecuacion tiene todas sus raíces reales y positivas, dicha ecuacion es completa, y su primer miembro no presenta más que variaciones.* En efecto, si tuviera una permanencia, la trasformada en $-x$ tendria una variacion que acusaria una raíz negativa, lo cual es contra el supuesto.

2.ª *Si todas las raíces son reales y negativas, el primer miembro de la ecuacion no tendrá más que permanencias;* pues si tuviera una variacion, la propuesta tendria una raíz positiva.

Recíprocamente: 1.° *Cuando una ecuacion* COMPLETA *no tiene más que variaciones, todas sus raíces reales son positivas.* En efecto, si la propuesta tuviera una raíz negativa, la trasformada tendria por lo ménos una variacion, lo cual es imposible; porque una ecuacion *completa* que no tiene más que variaciones, su trasformada sólo puede tener permanencias.

2.° *Cuando una ecuacion* COMPLETA *ó* INCOMPLETA *no tiene más que permanencias, todas sus raíces reales son negativas.* En efecto, cualquier número positivo sustituido en vez de la incógnita, dará una suma de cantidades positivas, y por consiguiente nunca podrá ser igual á cero.

Límite del número de raíces imaginarias de una ecuacion.

212. Una ecuacion incompleta y su trasformada en $-x$, podrán presentar un número de variaciones $v+v'$, menor que el grado m de la ecuacion; y en ese caso, segun hemos visto anteriormente, dicha ecuacion podrá tener un número de raíces imaginarias igual por lo ménos á $m-(v+v')$.

213. *Una ecuacion incompleta tiene, por lo ménos, tantas raíces imaginarias, como unidades hay en la suma de los mayores números pares contenidos en la diferencia de los exponentes de cada dos términos consecutivos de un mismo signo, más el número de unidades que hay en la suma de los mayores números pares contenidos en la diferencia de los exponentes de cada dos términos consecutivos de signos contrarios, disminuida en una unidad.*

En efecto, sea la ecuacion

$$x^m+Ax^{m-n}+Bx^{m-n-n'}+Cx^{m-n-n'-n''}+\ldots=0.$$

Representemos por v, v', v'',... los números respectivos de variaciones formadas por el primero y segundo término, el segundo y tercero, tercero y cuarto, etc., tanto en la ecuacion propuesta como en la trasformada en $-x$, y tendremos, llamando V al número total de variaciones,

$$m=n+n'+n''+\ldots \quad V=v+v'+v''+\ldots$$

de donde

$$m-V=(n-v)+(n'-v')+(n''-v'')+\ldots$$

Las diferencias $(n-v)$, $(n'-v')$, $(n''-v'')$,... son todas positivas *; luego si alguna no es cero, $m-V$ tampoco lo será; y no siendo $m-V$ cero, habrá por lo ménos tantas raíces imaginarias como unidades expresa $m-V$; ó lo que es lo mismo, como indica la suma de las diferencias $n-v$, $n'-v'$, $n''-v''$, etc.

Esto supuesto, consideremos dos términos consecutivos de un mismo signo. Si la diferencia n de los exponentes de estos dos términos es par é igual $2k$, el número de variaciones v que forman en la propuesta y trasformada será cero; luego $n-v=2k$, número de raíces imaginarias que por lo ménos tendrá la ecuacion. Si n es impar é igual $2k+1$, se tendrá $v=1$, en cuyo caso $n-v=2k$. Donde vemos, que en ambos casos el número de raíces imaginarias que acusan dos términos consecutivos de un mismo signo, *es igual al mayor número par contenido en la diferencia de sus exponentes.*

Si los dos términos que se consideran tienen signos contrarios, y la diferencia n de sus exponentes es un número impar $2k+1$, estos dos términos presentarán en la trasformada una permanencia, y tendremos $v=1$; luego $n-v=2k$. Si la diferencia n de los exponentes es par é igual $2k$, se tendrá $v=2$, de donde $n-v=2k-2$; pero si en ambos casos quitamos á la diferencia n una unidad, y consideramos el mayor número par contenido en el resultado, éste será el menor número de raíces imaginarias que podrá tener la ecuacion propuesta. Luego si conforme al enunciado del teorema, hallamos el número de raíces imaginarias que acusa cada par de términos consecutivos, la suma de todos estos números será un límite inferior de las raíces imaginarias de una ecuacion.

---

* Porque *el número* v *de variaciones que presentan dos términos consecutivos cualesquiera en la propuesta y su trasformada, nunca es mayor que la diferencia* n *de los exponentes de estos términos*. En efecto, si n es un número par, los términos que se consideran serán ambos de grado par ó impar; en la trasformada no cambiarán de signo ó ambos cambiarán, de modo que se tendrá $v=0$, ó $v=2$; pero n es un número par, que por lo ménos es igual 2; luego v no puede ser mayor que n. Si n es impar, uno de los términos que se consideran será de grado par, y el otro de grado impar; por tanto, en la trasformada uno sólo cambiará de signo: de modo, que si en la propuesta presentan estos términos una variacion ó una permanencia, en la trasformada presentarán una permanencia ó una variacion, y se tendrá $v=1$; pero n es por lo ménos 1 tambien; luego v no puede ser en ningun caso mayor que n.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x^9-3x^5+4x^3+2x+1=0.$$

Los dos primeros términos de signos contrarios, manifiestan que la ecuacion tiene por lo ménos *dos* raíces imaginarias; el tercero y cuarto indican otras *dos*; luego esta ecuacion tiene por lo ménos cuatro raíces imaginarias.

214. MÉTODO DE STURM. *Si se multiplica una ecuacion* f (x)=0, *por un binómio* x—a, *siendo* a *una cantidad indeterminada, y el producto tiene* k *variaciones más ó* k *variaciones ménos que* f (x), *la ecuacion tendrá por lo ménos* k—1 *raíces imaginarias en el primer caso, y* k *en el segundo.*

En efecto, supongamos que damos á a un valor positivo, y hallamos que $f(x)(x-a)=0$ tiene k variaciones más que la ecuacion propuesta $f(x)=0$, que supondremos tiene V. La trasformada en $-x$ de esta ecuacion tendrá á lo más $m+1-(V+k)$ variaciones; por consiguiente, $f(x)=0$ no puede tener más de $m+1-(V+k)$ raíces negativas, puesto que siendo a positiva, no se introduce en $f(x)(x-a)=0$ ninguna raíz negativa; pero dicha ecuación no puede tener más de V raíces positivas; luego tendrá por lo ménos $m-[m+1-(V+k)+V]=k-1$ raíces imaginarias.

Si damos á a un valor negativo, y suponemos que para este valor $f(x)(x-a)=0$ tiene k variaciones de ménos que $f(x)=0$, que como anteriormente hemos supuesto tiene V, la ecuacion $f(x)(x-a)=0$ tendrá á lo más $V-k$ raíces positivas; y como al multiplicar $f(x)$ por $x-a$, siendo $a<0$, no introducimos ninguna raíz positiva, $f(x)=0$ tendrá tambien, á lo más, $V-k$ raíces positivas. Pero la trasformada en $-x$ tiene á lo más $m-V$ variaciones, y por tanto el número de raíces negativas no puede ser mayor que $m-V$; luego el número de raíces imaginarias de $f(x)=0$, será por lo ménos igual á $m-(V-k)-(m-V)=k$.

LECCION XXIII.

Condiciones para que dos ecuaciones racionales y enteras de x tengan raíces comunes.—Forma general de una ecuacion con dos incógnitas.—Principio importante relativo á estas ecuaciones.—Teoría de la eliminacion. Casos más sencillos que se pueden presentar.

Condiciones para que dos ecuaciones racionales y enteras de x tengan raíces comunes.

215. Antes de ocuparnos de la teoría de la eliminacion, vamos á examinar qué condiciones se necesitan para que dos ecuaciones racionales y enteras de una misma incógnita tengan raíces comunes.

Sean las dos ecuaciones racionales y enteras

$$f(x)=0 \quad y \quad \varphi(x)=0.$$

Si suponemos que estas dos ecuaciones tienen n raíces comunes $a, b, c, \ldots l$, sus primeros miembros $f(x)$ y $\varphi(x)$ serán divisibles por el producto $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)$ de los factores binómios correspondientes á cada una de estas raíces comunes; y por consiguiente, dichos primeros miembros *tienen un máximo comun divisor relativo del grado* n.

Recíprocamente, *si los dos primeros miembros* $f(x)$ y $\varphi(x)$ *de dos ecuaciones* $f(x)=0$ y $\varphi(x)=0$ *tienen un máximo comun divisor relativo del grado* n, *ambas ecuaciones tendrán* n *raíces comunes.*

En efecto, sea X_n el *m. c. d.* del grado n, de los dos polinómios $f(x)$ y $\varphi(x)$; llamemos $f_1(x)$ y $\varphi_1(x)$ los cocientes de dividir $f(x)$ y $\varphi(x)$ por X_n, y tendremos

$$f(x)=X_n f_1(x) \quad y \quad \varphi(x)=X_n \varphi_1(x);$$

las ecuaciones propuestas se convertirán en estas otras:

$$X_n f_1(x)=0 \quad y \quad X_n\varphi_1(x)=0,$$

las cuales se descomponen evidentemente en

$$X_n=0 \text{ y } f_1(x)=0, \quad X_n=0 \text{ y } \varphi_1(x)=0.$$

Los n valores de x que anulan á X_n, son raíces comunes á ambas ecuaciones; luego tienen n raíces comunes; y no pueden tener más, porque $f_1(x)$ y $\varphi_1(x)$ son dos polinómios primos entre sí, y si hubiera alguna otra raíz α, distinta de las anteriores, $f_1(x)$ y $\varphi_1(x)$ serian divisibles por $x-\alpha$, lo cual es imposible.

216. De lo dicho anteriormente se deduce, que para ver si dos ecuaciones racionales y enteras $f(x)=0$ y $\varphi(x)=0$ tienen raíces comunes, se les aplica á sus primeros miembros el procedimiento del *m. c. d.* relativo; y si lo tienen, igualándole á cero y resolviendo la ecuacion que resulta, tendremos las raíces comunes á ambas ecuaciones. Si los polinómios $f(x)$ y $\varphi(x)$ son primos entre sí, las ecuaciones propuestas no tienen raíces comunes.

217. Si se quiere que dos ecuaciones racionales y enteras $f(x)=0$ y $\varphi(x)=0$, de coeficientes indeterminados, tengan n raíces comunes, se les aplicará á sus dos primeros miembros el procedimiento del *m. c. d.* relativo, hasta llegar á un resto del grado $n-1$, el cual haciendo que sea cero con independencia de los valores que se le den á x, hará que el resto anterior, que será del grado n, sea un *m. c. d.* de $f(x)$ y $\varphi(x)$, y por tanto que las dos ecuaciones dadas tengan n raíces comunes. Mas para que este resto del grado $n-1$ sea cero con independencia de x, es menester que sus n coeficientes sean nulos (35); luego igualando á cero estos coeficientes, se tendrán las ecuaciones de condicion que se necesitan para que las propuestas tengan n raíces comunes.

218. Si dos ecuaciones racionales y enteras tienen comunes todas sus raíces, dichas ecuaciones serán de un mismo grado; y debiendo ser cada uno de sus primeros miembros un divisor relativo del otro, ambos tendrán que ser idénticos, ó ser el uno el resultado de multiplicar ó partir el otro por una constante.

Forma general de una ecuacion con dos incógnitas. Principio importante relativo á estas ecuaciones.

219. El grado de una ecuacion racional y entera de dos incógnitas x é y, es la suma de los exponentes de estas incógnitas en el término en que esta suma es la mayor.

Una ecuacion completa del grado m de dos incógnitas x é y, debe contener todos los términos cuyos grados, con relacion á estas dos incógnitas, no excedan á m; de modo, que ordenándola segun las potencias de x, se podrá poner bajo la forma

$$\mathrm{A}x^m+\mathrm{B}x^{m-1}+\mathrm{C}x^{m-2}+\ldots+\mathrm{T}x+\mathrm{U}=0.$$

En esta ecuacion, A es una cantidad independiente de y; pues si no lo fuera, el grado de la ecuacion seria mayor que m: B es un polinómio de primer grado en y, de la forma $b+b_1y$, en el cual b y b_1 son cantidades que no contienen á y: C es un polinómio de la forma $c+c_1y+c_2y^2$; y por último, el coeficiente U representa en general un polinómio del grado m, de la forma $u+u_1y+u_2y^2+\ldots+u_my^m$.

Cuando una ecuacion contiene todos los términos posibles desde el grado *cero* hasta el m, se dice que es *completa*; así, la forma de una ecuacion completa del grado m con dos incógnitas, ordenada con relacion á x, será

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} ax^m+b_1y & x^{m-1}+c_2y^2 & x^{m-2}+\ldots+p_ny^n & x^{m-n}+\ldots+u_my^m \\ \quad +b & \quad +c_1y & \quad +p_{n-1}y^{n-1} & \quad +u_{m-1}y^{m-1} \\ & \quad +c & \quad +p_{n-2}y^{n-2} & \quad +u_{m-2}y^{m-2} \\ & & \quad \vdots & \quad \vdots \\ & & \quad +p_1y & \quad \vdots \\ & & \quad +p & \quad \vdots \\ & & & \quad +u_1y \\ & & & \quad +u \end{array}\right\} = 0.$$

Toda ecuacion que no contiene todos estos términos, se dice que es *incompleta*.

El número de términos de una ecuacion completa del grado m con dos incógnitas, es evidentemente igual á la suma de los términos de la progresion de los $m+1$ primeros números enteros consecutivos, á partir de 1; así, el número de términos de semejante ecuacion, será igual á $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$.

Si la ecuacion general del grado m con dos incógnitas la dividimos por su primer coeficiente, resultarán tantas constantes como términos contiene dicha ecuacion ménos uno; es decir, el número de constantes indeterminadas que contiene una ecuacion completa del grado m con dos incógnitas, es

$$(m+1)(m+2)-1 = m(m+3).$$

220. *El primer miembro de una ecuacion general racional y entera de dos incógnitas, no se puede descomponer en factores de primer grado, á ménos que no se verifiquen entre los coeficientes de sus diferentes términos ciertas ecuaciones de condicion.* *

Sea la ecuacion racional y entera del grado m de dos incógnitas $f(xy)=0$.

---

* La demostracion de este teorema es debida á M. Comte.

Segun lo que hemos visto anteriormente, el número total de constantes indeterminadas que contiene su primer miembro $f(xy)$, será $\frac{1}{2}m(m+3)$. Ahora bien, si nosotros suponemos al polinómio $f(xy)$ descompuesto en dos factores, uno del grado n, en cuyo caso el otro será del grado $m-n$, el número de constantes del primero será $\frac{1}{2}n(n+3)$, el de las constantes del segundo será $\frac{1}{2}(m-n)(m-n+3)$; y como por la multiplicacion de estos dos factores no aumenta el número de constantes, sino que por el contrario podrá disminuir, se deberá tener

$$\tfrac{1}{2}m(m+3) = \text{ó} < \tfrac{1}{2}n(n+3) + \tfrac{1}{2}(m-n)(m-n+3),$$

de donde se deduce $m = \text{ó} < n$; lo que es imposible, puesto que $m > n$.

Teoría de la eliminacion. Casos sencillos que se pueden presentar.

221. *Resolver dos ecuaciones de un grado cualquiera con dos incógnitas, es hallar todos los pares de valores de estas incógnitas, que verifiquen á las dos ecuaciones.*

Se llama *sistema de valores* ó *solucion*, cada par de valores de las incógnitas que puestos en las dos ecuaciones las verifican.

222. *Eliminar entre dos ecuaciones de un grado cualquiera con dos incógnitas una de estas, es hallar una ecuacion que no contenga más que una de las incógnitas, y cuyas raíces, unidas con ciertos valores de la otra, nos den todas las soluciones de las ecuaciones propuestas.*

Esta ecuacion de una sola incógnita, cuyas raíces unidas á ciertos valores de la otra, nos dan todas las soluciones de las ecuaciones propuestas, se llama *ecuacion final.*

223. *Para que un valor dado á una de las incógnitas de un sistema determinado de dos ecuaciones, convenga á estas ecuaciones, es necesario que sustituyéndole en ambas, sus primeros miembros adquieran un divisor comun funcion de la otra incógnita; cuyo divisor comun, igualado á cero, dará una ecuacion, cuyas raíces serán los valores correspondientes de esta incógnita.*

Sean dos ecuaciones con dos incógnitas

$$f(xy)=0 \quad \text{y} \quad \varphi(xy)=0,$$

y sea β un valor dado á y. Si sustituimos y por β en estas ecuaciones, sus primeros miembros se convertirán en $f(x\beta)$ y $\varphi(x\beta)$, cuyos re–

sultados serán en general dependientes de x; y digo en general, porque podrá suceder, que haciendo $y=\beta$, $f(x\beta)$ ó $\varphi(x\beta)$ se reduzcan á un número.

Ahora bien, es evidente que el valor β de y no convendrá á las ecuaciones dadas mientras que no exista por lo ménos un valor de x, que reduzca á la vez á cero á las dos expresiones $f(x\beta)$ y $\varphi(x\beta)$; luego estos polinómios deben tener un divisor comun dependiente de x. Además, esta condicion es suficiente; porque si llamamos D á este comun divisor, y se hace $D=0$, cada valor $x=\alpha$, deducido de esta ecuacion, sustituido en $f(x\beta)$ y $\varphi(x\beta)$, reducirá estos polinómios á cero; por consiguiente, haciendo á la vez $x=\alpha$ é $y=\beta$ en $f(xy)=0$ y $\varphi(xy)=0$, estas ecuaciones quedarán satisfechas.

224. Puesto que el objeto de la eliminacion de una incógnita en un sistema determinado de dos ecuaciones, es hallar la ecuacion final con relacion á una de estas incógnitas, se sigue que podrá llegarse á conseguir esto de muchas maneras, dando orígen á diferentes métodos de eliminacion, de los cuales el más general y sencillo es el que en breve vamos á exponer, fundado en la teoría del máximo comun divisor; pero ántes consideraremos algunos casos particulares que no exigen recurrir á este método general de eliminacion.

225. Sea en primer lugar un sistema de dos ecuaciones

$$f(x)=0 \text{ y } \varphi(y)=0,$$

en que cada una no contiene más que una incógnita, y supongamos que se trata de hallar la ecuacion final en y.

Debiendo esta ecuacion final tener por raíces los valores de y, que unidos á los correspondientes de x, han de dar todos los sistemas de valores que verifican á las ecuaciones dadas, se sigue que si suponemos resueltas ambas ecuaciones, y llamamos a, a', a'',... á las n raíces de $f(x)=0$, y b, b', b'',... á las m de $\varphi(y)=0$, cada valor b de la segunda se podrá combinar con los n valores de la primera; luego la raíz b se hallará repetida en la ecuacion final n veces; es decir, tantas como indica el grado de la otra ecuacion, y por tanto el factor $y-b$ se hallará elevado á la enésima potencia. Lo mismo sucederá con los demás factores $y-b'$, $y-b''$...; luego la ecuacion final será

$$[\varphi(y)]^n=0.$$

Del mismo modo se veria, que la ecuacion final en x seria $[f(x)]^m$, siendo m el grado de $\varphi(y)=0$.

226. Sea en segundo lugar el sistema determinado de dos ecuaciones

$$f(x\,y)=0 \text{ y } \varphi(y)=0,$$

en el que una ecuacion contiene las dos incógnitas, y la otra no contiene más que una.

En este caso conviene hallar la ecuacion final con relacion á la incógnita que entre sola en una de las ecuaciones; si quisiéramos hallarla con relacion á la otra, tendriamos que aplicar el método general del *m. c. d.*

Si suponemos resuelta la ecuacion $\varphi(y)=0$, y sustituimos cada una de sus raíces en $f(x\,y)$, podrá suceder que el resultado de esta sustitucion sea un número, cero, ó un polinómio dependiente de x. En el primer caso, las ecuaciones son incompatibles; en el segundo son indeterminadas con relacion á x, pues quedan satisfechas con independencia de los valores de esta incógnita; por último, en el tercer caso, es decir, cuando la sustitucion del valor de y en $f(x\,y)$ dé un polinómio en x, el factor binómio en y se hallará repetido en la ecuacion final tantas veces como unidades tenga el exponente de la mayor potencia de x en el polinómio que se obtiene.

227. Cuando el polinómio $f(x\,y)$, ordenado con relacion á x, se reduzca á un número por la sustitucion de un valor β de y, deducido de $\varphi(y)=0$, todos los coeficientes de x, ménos la cantidad independiente de esta incógnita, tendrán en $f(x\,y)$ el factor comun $y-\beta$, y recíprocamente; luego si esto no se verifica, las ecuaciones propuestas no pueden ser incompatibles.

228. Para que un valor β de y, deducido de la ecuacion $\varphi(y)=0$, reduzca á cero á $f(x\,y)$, es necesario que, ordenando este polinómio con relacion á x, los coeficientes de todas las potencias de x y el polinómio $\varphi(y)$, tengan el factor comun $y-\beta$, y recíprocamente; luego si estos coeficientes no tienen factores comunes dependientes de y, las ecuaciones propuestas no podrán ser indeterminadas con relacion á x.

229. Por último, reduciéndose el polinómio $f(x\,y)$, por la sustitucion de β en vez de y, á otro polinómio funcion de x, el factor $y-\beta$ no puede ser comun á los $m-1$ primeros coeficientes, y recíprocamente; luego si ordenando $f(x\,y)$ con relacion á x, dichos coeficientes no tienen factores comunes en y con el polinómio $\varphi(y)$, las ecuaciones solo se verificarán por un cierto número determinado de sistemas de valores.

Para determinar en este caso la ecuacion final en y, ordenaremos $f(x\,y)$ con relacion á x; de modo, que llamando A, B, C,... T, U, á los coeficientes de las diversas potencias de esta incógnita, que serán funciones de y, se tendrá

$$f(x\,y)=\mathrm{A}x^n+\mathrm{B}x^{n-1}+\mathrm{C}x^{n-2}+\mathrm{D}x^{n-3}+\ldots+\mathrm{T}x+\mathrm{U}=0.$$

Descomponiendo ahora á $\varphi(y)$ en dos factores a y α, de los cuales a sea primo con A, y α no contenga más que factores primos de A*; descomponiendo despues α en otros dos factores b y β, el uno primo con B y el otro que no contenga más que factores primos de B; del mismo modo, descomponiendo á β en dos factores c y γ, siendo c primo con C, y γ una cantidad que sólo contiene factores primos de C, y así sucesivamente, hasta llegar á un factor que ya sea primo con el coeficiente que sigue en el polinómio $f(x\,y)$; y suponiendo que habiendo descompuesto á γ en los dos factores d y δ, de los cuales d es primo con D, y δ no tiene más que factores primos de D, el factor δ es primo con E, se tendrán las igualdades

$$\varphi(y)=a\alpha,\ \alpha=b\beta,\ \beta=c\gamma,\ \gamma=d\delta,$$

de donde se deduce

$$\varphi(y)=a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,\delta;$$

de modo, que las raíces de la ecuacion $\varphi(y)=0$, se reducen á las de las ecuaciones parciales

$$a=0,\ b=0,\ c=0,\ d=0,\ \delta=0.$$

Ahora bien, como δ no se compone más que de factores primos en y, comunes á los coeficientes A, B, C y D, toda raíz de la ecuacion $\delta=0$, sustituida en $f(x\,y)$, reducirá esta cantidad á un polinómio en x del grado $n-4$, y por tanto la ecuacion final deberá contener al factor δ elevado á la potencia $n-4$. De la misma manera se verá que toda raiz de la ecuacion $d=0$, reduce al polinómio $f(x\,y)$ á otro en x del grado $n-3$, y por tanto d se hallará en la ecuacion final, elevado á la potencia del grado $n-3$. Por iguales razonamientos se verá que c deberá hallarse elevado á la potencia $n-2$, el factor b á la potencia $n-1$, y por último, a á la potencia n; luego la ecuacion final del sistema propuesto, será

$$a^n b^{n-1} c^{n-2} d^{n-3} \delta^{n-4}=0.$$

* El factor α será igual al producto de los máximos comunes divisores de A y $f(y)$, de A y el cociente Q de dividir $f(y)$ por el *m. c. d.* hallado; de A y el cociente Q' de dividir Q por el *m. c. d.* anterior, y así sucesivamente.

230. Sea, por último, un sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$F(x\,y)=0 \text{ y } f(x\,y)=0,$$

de las cuales una por lo ménos se sabe resolver con relacion á una de las incógnitas.

Supongamos que de $f(x\,y)=0$, se puede deducir el valor de x en funcion de y, de modo que se tiene $x=\varphi(y)$.

Esto supuesto, si sustituimos x por $\varphi(y)$ en la ecuacion $f(x\,y)=0$, la reducirá á una identidad, cualquiera que sea el valor de y; pero esta incógnita y ha de recibir valores tales, que verifiquen á $F(x\,y)=0$ cuando sustituyamos x por $\varphi(y)$; luego se deberán tomar para valores de y, los que resulten de la ecuacion

$$F[\varphi(y),\, y]=0,$$

que se obtiene sustituyendo x por $\varphi(y)$ en la ecuacion $F(x\,y)=0$.

La ecuacion hallada de este modo, será la ecuacion final en y; cuyas raíces, sustituidas en la expresion $x=\varphi(y)$, darán á conocer los valores de x.

Este método, que ya conocemos con el nombre de *método de sustitucion*, exige algunas precauciones que es necesario no despreciar, para no obtener soluciones extrañas á la cuestion. (Véase *Álgebra*, tomo I, números 357 y 358.)

LECCION XXIV.

Aplicacion de la teoría del máximo comun divisor á la eliminacion.

Aplicacion de la teoría del máximo comun divisor á la eliminacion.

231. Propongámonos determinar la ecuacion final de un sistema de dos ecuaciones cualesquiera, que representaremos abreviadamente por $\left.\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right\}$. Si ordenamos el polinómio M con relacion á x,

hallamos el máximo comun divisor en y de todos sus coeficientes, y dividimos por este *m. c. d.*, que llamaremos Y, se tendrá, representando por M′ el cociente, $M=Y\,M'$. Ordenando ahora M′ con relacion á y, hallando el *m. c. d.* X de los coeficientes, y dividiendo por X, tendremos $M'=X\,A$; de manera, que M se hallará descompuesto en tres factores

$$M=Y\,X\,A,$$

que serán funciones respectivas de y, de x y de x é y.

Del mismo modo se podrá descomponer el polinómio N, y tendremos

$$N=Y'\,X'\,B.$$

Ahora podrá suceder que los polinómios M y N tengan factores comunes, que podrán ser dependientes sólo de la incógnita y, de la incógnita x ó de las dos incógnitas x é y. Los primeros se hallarán en Y é Y′, los segundos en X é X′, y los terceros en A y B; luego si hallamos los máximos comunes divisores de Y é Y′, X y X′, A y B, y los representamos por D′, D″ y D‴, los polinómios M y N podrán ponerse bajo la forma

$$M=D'D''D'''Y_1\,X_1\,A',$$
$$N=D'D''D'''Y'_1X'_1B'.$$

Para que los polinómios M y N se reduzcan á cero, es menester que sea cero uno cualquiera de los factores en que se han descompuesto; de modo, que las soluciones del sistema propuesto de ecuaciones, son las mismas que las de los sistemas que se pueden formar combinando cada uno de los factores de M igualado á cero, con todos los de N.

Esto supuesto, si en los polinómios M y N existen los factores D′, D″, D‴, ó aunque no todos cualquiera de ellos, es señal que las ecuaciones propuestas son indeterminadas. En efecto, todo valor de y, deducido de la ecuacion $D'=0$, verifica las ecuaciones $M=0$ y $N=0$, con independencia de los valores que demos á x; luego esta incógnita queda completamente indeterminada. Del mismo modo los valores de x, deducidos de la ecuacion $D''=0$, anulan á M y N, quedando indeterminada la y. Finalmente, si consideramos la ecuacion $D'''=0$, el número infinito de sistemas de valores de x é y que la verifican, satisfacen tambien á las ecuaciones dadas. De donde se deduce, que si el sistema propuesto de ecuaciones es determinado, no puede existir ninguno de los factores D', D'', D''', y las ecuaciones propuestas se convertirán, como ya hemos visto, en

$$M = Y X A = 0,$$
$$N = Y' X' B = 0,$$

siendo primos entre sí los factores Y é Y', X y X', A y B.

Si ahora igualamos á cero cada factor de M, y le combinamos con cada uno de los factores de N igualado á cero tambien, tendremos todos los sistemas de ecuaciones cuyas soluciones serán las de los sistemas dados.

De estas combinaciones deberemos excluir

$$\left.\begin{matrix} Y = 0 \\ Y' = 0 \end{matrix}\right\} \text{ y } \left.\begin{matrix} X = 0 \\ X' = 0 \end{matrix}\right\},$$

por ser incompatibles (216); de modo, que podremos escribir la igualdad

$$\left.\begin{matrix} M = 0 \\ N = 0 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} Y = 0 \\ X' = 0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} X = 0 \\ Y' = 0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} X = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\} +$$
$$\left.\begin{matrix} A = 0 \\ Y' = 0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} A = 0 \\ X' = 0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} A = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\},$$

que nos indica que la reunion de todas las soluciones de los sistemas que figuran en el segundo miembro, vienen á constituir todos los sistemas de valores de las ecuaciones propuestas $M=0$ y $N=0$.

Quedando reducida la resolucion del sistema dado de ecuaciones á la de los siete sistemas en que se ha descompuesto, y no ofreciendo dificultad alguna los seis primeros, por hallarse comprendidos en los casos particulares de que ya nos hemos ocupado en la leccion anterior, pasaremos á la resolucion del sistema $A=0$ y $B=0$, formado de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyos primeros miembros tienen sus coeficientes primos entre sí.

232. *El sistema de ecuaciones* $\left.\begin{matrix} A = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\}$, *cuyos primeros miembros* A y B *tienen sus coeficientes primos entre sí, se puede reemplazar por el sistema* $\left.\begin{matrix} R_{n-1} = 0 \\ R_n = 0 \end{matrix}\right\}$, *que resulta de igualar á cero los dos últimos restos que se obtienen aplicando á los polinómios* A y B *el procedimiento del* m. c. d., *siempre que los cocientes obtenidos en las diferentes divisiones sean enteros, sin necesidad de tener que multiplicar los dividendos por cantidades convenientes.*

En efecto, supongamos los dos polinómios A y B ordenados con relacion á la incógnita x, y dividamos el de mayor grado por el otro; admitamos que se llega á un resto R_1 de un grado menor que el divisor, y que los términos del cociente, que representaremos por Q, son enteros. De modo, que si se ha dividido A por B, se tendrá $A=BQ+R_1$.

De esta igualdad se deduce, que todo par de valores de x é y que reduzca á cero á los polinómios A y B, reduce á cero tambien á R_1; porque siendo $B=0$, y Q una cantidad finita, se tiene $BQ=0$, y por tanto $R_1=0$; luego las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$, se hallan comprendidas en las del sistema $\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\}$. Recíprocamente, las soluciones del segundo sistema se hallan en las del primero; puesto que todo par de valores que anula á B y R_1, tiene que reducir á cero al polinómio A; luego el sistema propuesto se puede reemplazar por otro formado de una de sus ecuaciones, y la que resulta de igualar á cero el resto que se obtiene de dividir sus primeros miembros, siendo entero el cociente de la division; lo que se expresa por la igualdad

$$\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\}.$$

Si ahora suponemos que son enteros tambien los cocientes que se obtienen dividiendo B por R_1, R_1 por el resto R_2 de la segunda division, R_2 por el resto R_3 de la tercera, y así sucesivamente, hasta llegar al último resto R_n independiente de x, se tendrá que las soluciones de cada uno de estos sistemas, serán las mismas que las del siguiente; es decir,

$$\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}R_1=0\\R_2=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}R_1=0\\R_2=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}R_2=0\\R_3=0\end{matrix}\right\},\ldots \left.\begin{matrix}R_{n-2}=0\\R_{n-1}=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}R_{n-1}=0\\R_n\ \ =0\end{matrix}\right\}$$

de donde deduciremos que las soluciones del sistema propuesto, son las mismas que las del último; ó lo que es lo mismo,

$$\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}R_{n-1}=0\\R_n\ \ =0\end{matrix}\right\},$$

segun queriamos demostrar.

En este último sistema, una de las ecuaciones $R_n=0$ no contiene más que la incógnita y; por consiguiente, podremos hallar la ecuacion final correspondiente, como ya sabemos (226). Si R_{n-1} fuese un polinómio de primer grado, á cada valor de y, deducido de la ecuacion $R_n=0$, corresponderia un solo valor de x, que seria el que se obtendria de la ecuacion de primer grado $R_{n-1}=0$; y por consiguiente, la ecuacion final del sistema propuesto, seria en este caso $R_n=0$.

Si un valor cualquiera β, deducido de la ecuacion $R_n=0$, sustituido en el polinómio R_{n-1}, lo redujese á un número, este valor β no seria conveniente, y por tanto la ecuacion final no deberá contener el factor $(y-\beta)$; así, la ecuacion $R_n=0$, la dividiremos por el factor $(y-\beta)$.

Ningun valor β de y, deducido de la ecuacion $R_n=0$, puede anular al polinómio R_{n-1}; porque si así sucediera, R_n y R_{n-1} tendrian el factor comun $(y-\beta)$; este mismo factor se hallaria tambien en R_{n-2}, R_{n-3},... R_1, B y A; lo cual es imposible, puesto que suponemos que A y B son primos entre sí.

Si el resto R_n, independiente de x, fuese independiente tambien de y; es decir, si R_n fuese un número, las ecuaciones R_{n-1} y R_n serian incompatibles, lo mismo que las propuestas $A=0$ y $B=0$.

233. El principio anterior está fundado en la condicion de ser enteros los cocientes que se obtienen al aplicar á los polinómios A y B el procedimiento del *m. c. d.*, sin necesidad de multiplicar los dividendos respectivos por las cantidades convenientes que para lograr este objeto se emplean en dicho procedimiento. En efecto, si el cociente de la division de A por B no fuera entero con relacion á la incógnita y, que es la que entra en los coeficientes de las potencias de x, se tendria, reduciendo todos los términos fraccionarios á un comun denominador, y representando el cociente por $\frac{C}{D}$, siendo D una funcion de y,

$$A=\frac{BC}{D}+R.$$

Si ahora sustituimos x é y por un par de valores que anulen á los polinómios A y B, podrá suceder que el valor de y anule tambien á D; en cuyo caso se tiene $\frac{BC}{D}=\frac{0}{0}$, cantidad indeterminada que puede ser diferente de cero, y por tanto no se puede concluir que para estos mismos valores de x é y, se tenga $R=0$; ó lo que es lo mismo, que las soluciones de $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$, sean las mismas que las del sistema $\left.\begin{matrix}B=0\\R=0\end{matrix}\right\}$.

Siendo de absoluta necesidad que los cocientes de que venimos hablando sean enteros con relacion á las incógnitas x é y, necesitamos, para llegar al último resto independiente de la letra ordenatriz x, aplicar á los polinómios A y B el procedimiento del máximo comun divisor, con las modificaciones convenientes para que los cocientes sucesivos sean todos enteros.

Estas modificaciones, que en nada alteran el *m. c. d.* de A y B, complican considerablemente la ecuacion final que vamos buscando, por las soluciones extrañas que se introducen al multiplicar los dividendos por las funciones de y, que es menester para que los cocientes sean enteros, y por las que se disminuyen al suprimir los factores en y, que puedan tener los coeficientes de los restos ántes de pasar á ser divisores.

234. Sea Y la cantidad más sencilla porque es necesario multiplicar el polinómio A para hacer que sean enteros todos los términos del cociente Q de dividir A por B; llamemos R_1 al resto de esta division, y tendremos

$$YA=BQ+R_1.$$

El resto R_1 ha de pasar á ser divisor; pero sabemos que ántes debe simplificarse, dividiéndole por el mayor factor comun que puedan tener los coeficientes de las potencias de x; llamando F_1 á este factor, y R'_1 al resto simplificado, se tendrá $F=F_1\,R'_1$, y la igualdad anterior se convertirá en

$$Y\,A=BQ+F_1R'_1.$$

Ahora bien, segun hemos visto ya (232), se tiene

$$\left.\begin{matrix}B=0\\F_1R'_1=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}Y\,A=0\\B=0\end{matrix}\right\};$$

y como estos sistemas se descomponen respectivamente en

$$\left.\begin{matrix}B=0\\F_1R'_1=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}B=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}B=0\\F_1=0\end{matrix}\right\} \quad y \quad \left.\begin{matrix}YA=0\\B=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\},$$

se tendrá, haciendo la sustitucion,

$$\left.\begin{matrix}B=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}B=0\\F_1=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\} \quad [1].$$

Esta igualdad nos prueba, que las soluciones de los sistemas $\left.\begin{matrix} B=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} B=0 \\ F_1=0 \end{matrix}\right\}$ contienen las soluciones del sistema propuesto $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$, mas las del sistema extraño $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$.

Siguiendo el procedimiento del *m. c. d.*, tendremos que dividir B por R'_1; y si todos los términos del cociente no son enteros, multiplicaremos el polinómio B por una cantidad conveniente Y_1 para que lo sean; de modo, que llamando Q_1 al cociente y R_2 al resto, se tendrá, representando por F_2 el mayor factor comun de los coeficientes de R_2, y por R'_2 el resto simplificado,

$$Y_1 B = R'_1 Q_1 + F_2 R'_2;$$

de donde deduciremos, como anteriormente,

$$\left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ R'_2=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ F_2=0 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} B=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\}.$$

Sumando esta igualdad con la anterior [1], y quitando de ambos miembros las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} B=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\}$, que resulta comun, se tendrá

$$\left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ R'_2=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} B=0 \\ F_1=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ F_2=0 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\} \quad [2].$$

Una tercera division segun el *m. c. d.*, nos dará, como en las anteriores, las igualdades

$$Y_2 R'_1 = R'_2 Q_2 + F_3 R'_3,$$

$$\left.\begin{matrix} R'_2=0 \\ R'_3=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} B=0 \\ F_1=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ F_2=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} R'_2=0 \\ F_3=0 \end{matrix}\right\} =$$

$$\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y_2=0 \\ R'_2=0 \end{matrix}\right\} \quad [3].$$

Continuando del mismo modo, llegaremos á un resto R_p, independiente de x, que como no ha de pasar á ser divisor no simplificaremos, y tendremos, por último,

$$Y_{p-1} R'_{p-2} = R'_{p-1} Q_{p-1} + R_p,$$

$$\left.\begin{matrix} R'_{p-1}=0 \\ R_p=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} B=0 \\ F_1=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ F_2=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} R'_2=0 \\ F_3=0 \end{matrix}\right\} + \dots + \left.\begin{matrix} R'_{p-2}=0 \\ F_{p-1}=0 \end{matrix}\right\} =$$

$$\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} Y_2=0 \\ R'_2=0 \end{matrix}\right\} + \dots + \left.\begin{matrix} Y_{p-1}=0 \\ R'_{p-1}=0 \end{matrix}\right\} \quad [p].$$

Por esta igualdad vemos, que las soluciones de los sistemas que forman el primer miembro comprenden las del sistema propuesto, y además las de los otros sistemas extraños que le siguen en el segundo miembro. Ahora bien, en los polinómios R_p, F_1, F_2, ... F_{p-1}, que dependen de la sola incógnita x, se hallan los factores binómios correspondientes á las raíces de esta incógnita que han de formar las ecuaciones finales de cada uno de estos sistemas, las cuales, si se quiere, podremos formar como ya se ha dicho (229); por consiguiente, el producto de estos polinómios, igualado á cero, nos dará una ecuacion

$$R_p \,.\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, F_3 \,.\,.\,.\, F_{p-1} = 0 \qquad [f],$$

cuyo primer miembro estará compuesto del producto de todos los factores binómios de que se ha de componer la ecuacion final del sistema propuesto, más una série de sistemas extraños, que son los que siguen á este en el segundo miembro de la igualdad anterior [p].

LECCION XXV.

Separacion de las soluciones extrañas.—Grado de la ecuacion final. Soluciones infinitas.

Separacion de las soluciones extrañas.

235. Acabamos de ver que la ecuacion

$$R_p \,.\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, F_3 \,.\,.\,.\, F_{p-1}=0,$$

tiene por raíces los valores convenientes de y, que unidos con sus correspondientes de x, han de formar las soluciones del sistema propuesto $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$, mas las de otros sistemas extraños

$$\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}Y_1=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}Y_2=0\\R'_2=0\end{matrix}\right\},\ldots \left.\begin{matrix}Y_{p-1}=0\\R'_{p-1}=0\end{matrix}\right\}.$$

Luego si dividimos la ecuacion [f] por el producto de los factores binómios correspondientes á las raíces de los sistemas extraños, la ecuacion resultante tendrá por raíces los valores convenientes de y, que unidos con los respectivos de x, darán las soluciones del sistema propuesto.

236. Esto supuesto, si hallamos el producto de los factores binómios de que se ha de componer cada una de las ecuaciones finales de los sistemas extraños, y dividimos la ecuacion $[f]$ por cada uno de estos productos, la última ecuacion que resulte sólo contendrá factores correspondientes á la ecuacion final del sistema $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$.

Consideremos uno cualquiera de los sistemas extraños, el primero por ejemplo $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$, y veamos cómo hallar el producto de los factores binómios correspondientes á valores de y, propios á formar soluciones de este sistema.

El polinómio B es de la forma

$$B=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\ldots+tx+u,$$

cuyos coeficientes a, b, c, ... son en general funciones de y.

El polinómio Y, dependiente de la sola incógnita y, está formado de factores contenidos todos en el primer coeficiente a, y además se sabe que ninguno de estos factores puede ser comun á los coeficientes restantes b, c, d, ... u.

Ahora podrá suceder una de dos cosas: que todos los coeficientes, ménos el último u, tengan factores comunes, ó que no los tengan. Si no tienen factores comunes, es claro que ninguno de los que entran en Y podrá estar contenido á la vez en todos estos coeficientes; y por consiguiente, cualquier valor β de y, deducido de la ecuacion $Y=0$, sustituido en B, dará por resultado un polinómio dependiente de x, y la ecuacion que se obtiene igualándole á cero, tendrá por raíces los valores de x, que unidos con el valor β, formarán soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$; luego Y será en este caso el producto de todos los factores binómios correspondientes á los valores de y, que forman soluciones del sistema extraño que se considera; y por tanto, dividiendo la ecuacion $[f]$ por Y, habremos quitado los factores extraños correspondientes á este sistema.

Si todos los coeficientes a, b, c, ... t, tienen factores comunes, podrá suceder que todos ó parte de ellos se hallen en Y, ó que no se hallen. Si ninguno de estos factores comunes se halla en Y, entónces, como en el caso anterior, Y será la cantidad porque se deberá dividir la ecuacion [f], para quitar las soluciones extrañas correspondientes al sistema $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$. Pero si los factores que hay comunes en los coeficientes a, b, c, ... t, ó alguno de ellos, se encuentra tambien en Y, en ese caso descompondremos el polinómio Y en dos factores P y Q, uno que sólo tenga factores primos comunes á estos coeficientes, y otro que sea primo con ellos *, de modo que se tendrá $Y=P\,Q$; así es, que el sistema que venimos considerando $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$, se descompondrá en estos otros $\left.\begin{matrix}P=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix}Q=0\\B=0\end{matrix}\right\}$. Ahora bien, cualquier valor de y deducido de la ecuacion $P=0$, sustituido en B, reducirá este polinómio á un número; luego las ecuaciones $P=0$ y $B=0$ son incompatibles. Por el contrario, cualquier valor de y deducido de la ecuacion $Q=0$, y sustituido en B, dará por resultado un polinómio en x, y por tanto las raíces de la ecuacion $Q=0$ serán convenientes al sistema $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$; de modo, que dividiendo la ecuacion [f] por Q, habremos quitado los factores extraños á este sistema.

Operando de la misma manera con los demás sistemas, llegaremos á obtener una ecuacion que ya no contendrá más factores primos en y que los correspondientes á la ecuacion final del sistema propuesto $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$.

237. *La ecuacion* $F_1=0$ *no puede dar para* y *valores extraños al sistema propuesto.* **

---

* Para hacer esta descomposicion, hallaremos primero el *m. c. d.* M de los coeficientes a, b, c, ... t; en seguida el de Y y M, que llamaremos D; dividiremos despues Y por M, y hallaremos el *m. c. d.* D′ del cociente q y M; se dividirá q por D′, y se hallará el del cociente q' y M, y así se continuará hasta llegar á un cociente Q que sea primo con M, en cuyo caso el producto DD D′′. . será el factor P, y el último cociente será el otro factor primo con los coeficientes.

** Al decir que $F_1=0$ no puede dar para y valores extraños al sistema propuesto, queremos expresar que todos los valores de y, deducidos de esta ecuacion, unidos con otros convenientes de x, dan sistemas de valores que verifican á las ecuaciones propuestas $A=0$, $B=0$, y por tanto el factor F_1 debe hallarse en la ecuacion [f], despues de privada de los factores correspondien-

En efecto, en el procedimiento que hemos seguido para llegar al resto R_p, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} YA &= BQ + F_1R'_1, \\ Y_1B &= R'_1Q_1 + F_2R'_2, \\ Y_2R'_1 &= R'_2Q_2 + F_3R'_3, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ Y_{p-1}R'_{p-2} &= R'_{p-1}Q_{p-1} + R_p. \end{aligned}$$

De la primera igualdad se deduce, que todo par de valores de x é y que verifique á las ecuaciones $F_1=0$ y $B=0$, tiene que verificar necesariamente á uno de los sistemas $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ ó $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$; al sistema $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ no puede verificarle; porque como Y y F_1 son polinómios dependientes de la sola incógnita y, si pudieran reducirse ambos á cero por un cierto valor $y=\beta$, ambos serian divisibles por $y-\beta$, y la igualdad primera se convertiria en

$$Y'A = \frac{BQ}{y-\beta} + F'_1R'_1;$$

$y-\beta$ es una cantidad prima con B, luego dividirá á Q; de modo, que llamando Q' al cociente, se tendrá

$$Y'A = BQ' + F'_1R'_1.$$

Esta igualdad nos prueba, que Y no era la cantidad más sencilla porque se debia multiplicar el polinómio A para obtener enteros los términos del cociente; por tanto, si la cantidad Y cumple con la condicion de ser la más sencilla que se puede emplear para que el cociente sea entero, no es posible que tenga Y y F_1 ningun factor comun en y; pero no teniendo estas cantidades factores comunes, las ecuaciones $Y=0$ y $F_1=0$ son incompatibles (216); luego las soluciones de $\left.\begin{matrix}F_1=0\\B=0\end{matrix}\right\}$, son soluciones del sistema $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$.

Este mismo raciocinio, hecho con F_2, nos da que las ecuaciones $F_2=0$ é $Y_1=0$ son incompatibles, y que por tanto las soluciones

---

tes á los sistemas extraños. Pero no se vaya á creer que en F_1 no puede haber factores primos correspondientes á estos sistemas extraños, porque podrá suceder que los contenga cuando el sistema $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ y cualquiera de los extraños, tenga soluciones comunes.

de $\left.\begin{matrix} F_2=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\}$ son soluciones de $\left.\begin{matrix} B=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\}$; pero como las soluciones de este sistema pueden pertenecer, sin inconveniente, á uno de los dos sistemas $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$ ó $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$, se sigue que F_2 puede contener factores que no correspondan á raíces del sistema propuesto; es decir, $F_2=0$ puede dar soluciones extrañas. Lo mismo sucede con cualquiera de los demás factores F_3, F_4, etc.

288. Si representamos en general por F'_n lo que resulta de dividir F_n por los factores primos correspondientes á las soluciones que no son del sistema propuesto, y que por esta razon llamaremos extraños; por R'_p lo que resulta de dividir R_p por los factores de esta especie que contenga R_p, y recordando que F_1 no tiene factores extraños, la ecuacion [f], privada de factores correspondientes á soluciones extrañas, será

$$R'_p \,.\, F_1 \,.\, F'_2 \,.\, F'_3 \ldots F'_{p-1}=0 \qquad [f'].$$

Esta ecuacion tendrá por raíces todos los valores de y que pueden formar soluciones de las ecuaciones propuestas; de manera, que las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$, quedan reducidas á las de estos otros:

$$\left.\begin{matrix} R'_{p-1}=0 \\ R'_p\;=0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} B=0 \\ F_1=0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ F'_2=0 \end{matrix}\right\}, \ldots \left.\begin{matrix} R'_{p-2}=0 \\ F'_{p-1}=0 \end{matrix}\right\} \qquad [a].$$

239. Si se quisiera hallar la ecuacion final del sistema propuesto $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$, hallariamos las de estos sistemas (226), y el producto de todas ellas seria la ecuacion pedida.

240. Si el producto $R'_p \,.\, F_1 \,.\, F'_2 \,.\, F'_3 \ldots F'_{p-1}$ es independiente de y, las ecuaciones propuestas $A=0$ y $B=0$ serán incompatibles. Del mismo modo lo serian si cada uno de los sistemas parciales [a] fuese incompatible; para lo cual bastaria que todos los coeficientes, ménos el último de cada uno de los polinómios R'_{p-1}, B, R'_1, R'_2, ... contuvieran todos los factores primos en y, que entran en los polinómios respectivos R'_p, F_1, F'_2, F'_3... (236).

En efecto, cualquiera raíz de la ecuacion $F'_3=0$, por ejemplo, sustituida en el polinómio correspondiente R'_2, le reducirá á un número, y el sistema $\left.\begin{matrix} R'_2=0 \\ F'_3=0 \end{matrix}\right\}$ será incompatible, lo mismo que todos los demás que se hallen en igual caso.

Grado de la ecuacion final. Soluciones infinitas.

241. Terminaremos esta teoría diciendo dos palabras respecto del grado de la ecuacion final de dos ecuaciones con dos incógnitas, y de las raíces infinitas de estas ecuaciones.

242. *El grado de la ecuacion final que resulta de eliminar entre dos ecuaciones con dos incógnitas una de estas, es á lo más igual al producto de los números que marcan los grados respectivos de estas ecuaciones.*

Muchas demostraciones se han dado de este importante teorema; una de las más sencillas, es la que resulta de la aplicacion de las funciones simétricas, de la cual nos ocuparemos al tratar de esta teoría.

Si las ecuaciones propuestas tuviesen soluciones en que el valor de una de las incógnitas fuese infinito, el método que hemos expuesto para determinarlas seria inaplicable; tendríamos, por consiguiente, que hallarlas por un procedimiento especial, que consiste en dividir cada una de las ecuaciones dadas por la mayor potencia de x que en ella está contenida, y haciendo despues $x=\infty$, obtendremos dos ecuaciones independientes de x, que serán las que resulten de igualar á cero los coeficientes de las mayores potencias de x en cada una de las propuestas; cuyas ecuaciones deberán tener por raíces comunes todos los valores de y, que unidos con $x=\infty$, verifican las ecuaciones dadas. Para determinar estas raíces comunes hallaremos el *m. c. d.* de los coeficientes de las mayores potencias de x en cada una de las ecuaciones, le igualaremos á cero, y las raíces de la ecuacion que se obtiene serán los valores de y que vamos buscando (216). Si dichos coeficientes son primos entre sí, ó tienen un *m. c. d.* numérico, es señal que las ecuaciones propuestas no admiten para x valores infinitos.

Del mismo modo hallaremos los valores de x que, unidos con $y=\infty$, satisfacen á las ecuaciones propuestas.

243. Si tenemos que resolver tres ecuaciones con tres incógnitas x, y, z, principiaremos por eliminar una de las incógnitas, z por

ejemplo, entre las tres ecuaciones, lo que dará dos ecuaciones en x é y, que tendrán por soluciones comunes todos los sistemas de valores que, unidos con un cierto valor de z, satisfarán á las ecuaciones propuestas. De modo, que si suponemos que α y β es una de estas soluciones, reemplazando en las ecuaciones propuestas x é y por los valores respectivos α y β, hallaremos tres polinómios en z que deberán tener un máximo comun divisor, el cual igualado á cero nos dará los valores de z que, unidos con el sistema $x=\alpha$, $y=\beta$, satisfacen á las ecuaciones dadas.

Los cálculos necesarios para la eliminacion de una incógnita entre dos ecuaciones son bastante pesados, y las dificultades aumentan con el número de incógnitas, llegando á ser casi impracticables; por lo que no haremos mencion del caso en que sean varias las ecuaciones con igual número de incógnitas, aunque seria fácil hacer extensible el método para cualquiera que fuese su número.

LECCION XXVI.

Ejemplo de eliminacion.—Ecuaciones irracionales.

Ejemplo de eliminacion.

244. Habiendo resuelto de un modo general la cuestion de hallar la ecuacion final que resulta de eliminar entre dos ecuaciones con dos incógnitas una de estas, conviene, para mejor fijar las ideas, aplicar las reglas dadas á un ejemplo, que elegiremos de modo que comprenda todos los casos más principales que se pueden presentar.

Ejemplo de tal naturaleza es bastante pesado; pero el alumno debe ejecutar todas las operaciones que no practicamos, porque así no solo comprenderá bien la teoría de eliminacion, sino que adquirirá práctica en el cálculo algebráico.

Sean las ecuaciones cuyas soluciones hemos de hallar

$$M=\left.\begin{array}{r|l|l|l|l|l} y^2 & x^5+2y^3 & x^4-y^4 & x^3-2y^5 & x^2+10y^5 & x-8y^5 \\ -5y & -13y^2 & +2y^3 & +24y^4 & -99y^4 & +76y^4 \\ +6 & +27y & -2y^2 & -116y^3 & +368y^3 & -256y^3 \\ & -18 & +37y & +281y^2 & -599y^2 & +332y^2 \\ & & -66 & -339y & +328y & -48y \\ & & & +162 & +60 & -144 \end{array}\right\}=0$$

$$N=\left.\begin{array}{r|l|l|l} y & x^3+4y^2 & x^2+3y^3 & x+3y^3 \\ -5 & -18y & -6y^2 & -10y^2 \\ & -10 & -46y & -27y \\ & & +5 & +10 \end{array}\right\}=0.$$

Estando ya ordenadas estas ecuaciones con relacion á x, podremos ver si en cada una de ellas tienen algun factor comun los coeficientes, y hallaremos que tienen respectivamente los factores

$$Y=y^2-5y+6,\quad Y'=y-5.$$

Si dividimos M y N por los factores respectivos Y é Y′, y llamamos M′ y N′ á los cocientes, tendremos

$$M=YM'=(y^2-5y+6)M',\quad N=Y'N'=(y-5)N'.$$

Ordenando ahora á M′ y N′ con relacion á y, y hallando el *m. c. d.* de los coeficientes en cada uno de estos polinómios, observaremos que en el primero se encuentra el factor comun $X=x^2-5x+4$, y en el segundo el factor $X'=x+1$; de modo, que dividiendo los polinómios M′ y N′ por los factores respectivos X y X′, y llamando A y B á los cocientes que resultan, tendremos

$$M'=XA=(x^2-5x+4)A,\quad N'=X'B=(x+1)B;$$

de donde

$$M=YXA=(y^2-5y+6)(x^2-5x+4)A,\quad N=Y'X'B=(y-5)(x+1)B.$$

Si ahora ordenamos los polinómios A y B con relacion á x, con objeto de hallar la ecuacion final en y, se tendrá

$$A=\begin{array}{l|l|l} x^3+2y & x^2-y^2 & x-2y^3 \\ +2 & +7y & +9y^2 \\ & -5 & -7y \\ & & -6 \end{array}\qquad B=\begin{array}{l|l} x^2+4y & x+3y^2 \\ +1 & +5y \\ & -2 \end{array}$$

de donde finalmente se deduce

$$M=YXA=(y^2-5y+6)(x^2-5x+4)\left\{\begin{array}{l|l|l} x^3+2y & x^2-y^2 & x-2y^3 \\ +2 & +7y & +9y^2 \\ & -5 & -7y \\ & & -6 \end{array}\right\}=0$$

$$N=Y'X'B=(y-5)(x+1)\left\{\begin{array}{l|l} x^2+4y & x+3y^2 \\ +1 & +5y \\ & -2 \end{array}\right\}=0.$$

245. Una vez descompuestos los primeros miembros de las ecuaciones dadas en los factores posibles, y siendo cada uno de los de M primos con sus correspondientes de N, pasaremos á formar todos los sistemas de ecuaciones en que el propuesto se puede descomponer, que son, como ya sabemos (231),

$$\left.\begin{matrix} Y=0 \\ X'=0 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} Y=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} X=0 \\ Y'=0 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} X=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} A=0 \\ Y'=0 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} A=0 \\ X'=0 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}.$$

Hallando ahora la ecuacion final en y de cada uno de estos sistemas, y las soluciones que les corresponden, el producto de aquellas será la ecuacion final del sistema propuesto, y la reunion de todas estas serán las soluciones del mismo sistema. Por consiguiente, hallemos las soluciones y ecuaciones finales de cada sistema.

1.^{er} SISTEMA. $Y=y^2-5y+6=0,\ X'=x+1=0.$

Como la ecuacion $X'=0$ es de primer grado, la ecuacion final de este sistema será

$$y^2-5y+6=0 \qquad [1],$$

cuyas raíces son $y=2$, $y=3$; luego las soluciones del primer sistema, serán

$$\left.\begin{matrix} y=2 \\ x=1 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=3 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \qquad [a].$$

2.° SISTEMA. $Y=y^2-5y+6=0,\ B=\left.\begin{matrix} x^2+4y \\ +1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x+3y^2 \\ +5y \\ -2 \end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}=0.$

Siendo la unidad el coeficiente de x^2 en la ecuacion $B=0$, cualquiera que sea el valor de y que sustituyamos en B, dará por resultado un polinómio de segundo grado; luego la ecuacion final de este sistema, será (229)

$$(y^2-5y+6)^2=0 \qquad [2].$$

Cada raíz de la ecuacion $Y=0$, sustituida en $B=0$, dará para x dos valores conjugados; de modo, que se tendrá

$$y=2,\qquad x^2+9x+20=0,\ \text{de donde } x=\begin{cases}-4\\-5\end{cases}$$

$$y=3,\qquad x^2+13x+40=0,\ \text{de donde } x=\begin{cases}-5\\-8\end{cases}$$

luego las soluciones de este sistema, serán

$$\left.\begin{matrix} y=2 \\ x=-4 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=2 \\ x=-5 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=3 \\ x=-5 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=3 \\ x=-8 \end{matrix}\right\} \qquad [b].$$

3.^{er} SISTEMA. $X=x^2-5x+4=0$, $Y'=y-5=0$.

Siendo $X=0$ de segundo grado, la ecuacion final en y será

$$(y-5)^2=0 \qquad [3];$$

las soluciones de este sistema, son

$$\left.\begin{matrix} y=5 \\ x=1 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=5 \\ x=4 \end{matrix}\right\} \qquad [c].$$

4.° SISTEMA. $X=x^2-5x+4=0$, $B=\left.\begin{matrix} x^2+4y \\ +1 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x+3y^2 \\ +5y \\ -2 \end{matrix}\right\} =0.$

Aplicando á este sistema el procedimiento del máximo comun divisor, para hallar la ecuacion final, tendremos que este sistema se puede reemplazar por este otro (232)

$y^4+10y^3+27y^2+18y=0$, $\quad (4y+6)x+3y^2+5y-6=0$;

y como la segunda de estas ecuaciones es de primer grado, la ecuacion final de este sistema, que unida con $(4y+6)x+3y^2+5y-6=0$, da las soluciones del que nos ocupa, será

$$y^4+10y^3+27y^2+18y=0 \qquad [4];$$

las soluciones serán

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=-1 \\ x=\ \ 4 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=-3 \\ x=\ \ 1 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=-6 \\ x=\ \ 4 \end{matrix}\right\} \qquad [d].$$

5.° SISTEMA. $A=\left.\begin{matrix} x^3+2y \\ +2 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x^2-y^2 \\ +7y \\ -5 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x-2y^3 \\ +9y^2 \\ -7y \\ -6 \end{matrix}\right\} =0$, $Y'=y-5=0$.

La ecuacion final en y, será

$$(y-5)^3=0 \qquad [5].$$

las soluciones se hallan combinando la raíz $y=5$ con cada una de las raíces de la ecuacion

$$x^3+12x^2+5x-66=0,$$

que resulta de sustituir la incógnita y por el valor 5, en la ecuacion $A=0$. Estas raíces se hallan fácilmente, observando que desde luégo 2 es una de ellas; de modo, que dividiendo por el factor $x-2$, hallaremos el cociente $x^2-14x+33$, que igualado á cero, dará las otras dos raíces -3 y -11; por tanto, las soluciones de este quinto sistema, serán

$$\left.\begin{matrix} y=5 \\ x=2 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=\ \ 5 \\ x=-3 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} y=\ \ 5 \\ x=-11 \end{matrix}\right\} \qquad [e].$$

6.° SISTEMA. $A = \left.\begin{array}{l|l|l} x^3+2y & x^2-y^2 & x-2y^3 \\ +2 & +7y & +9y^2 \\ & -5 & -7y \\ & & -6 \end{array}\right\} = 0,\quad X' = x+1 = 0.$

Aplicando el método general del *m. c. d.*, hallaremos la ecuacion final en y, de este sistema

$$y^3-5y^2+6y=0 \qquad [6];$$

las soluciones serán

$$\left.\begin{array}{l} y=\ \ 0 \\ x=-1 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} y=\ \ 2 \\ x=-1 \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} y=\ \ 3 \\ x=-1 \end{array}\right\} \qquad [f].$$

7.° SISTEMA.

$$A = \left.\begin{array}{l|l|l} x^3+2y & x^2-y^2 & x-2y^3 \\ +2 & +7y & +9y^2 \\ & -5 & -7y \\ & & -6 \end{array}\right\} = 0, \qquad B = \left.\begin{array}{l|l} x^2+4y & x+3y^2 \\ +1 & +5y \\ & -2 \end{array}\right\} = 0.$$

Aplicando á estas ecuaciones el procedimiento del *m. c. d.*, hallaremos en la primera division el cociente entero $Q = x - 2y + 1$ y el resto $R_1 = (4y^2-4y)x+4y^3+16y^2-16y-4$, sin necesidad de multiplicar el dividendo A por cantidad alguna.

El resto R_1 tiene el factor comun $4(y-1)$; de modo, que dividiendo por él, segun se sabe, tendremos

$$F_1 = 4(y-1) \quad \text{y} \quad R'_1 = (y+1)x+y^2+5y+1.$$

Dividiendo ahora B por R'_1, se hallarán términos fraccionarios en el cociente, lo que se evita multiplicando el dividendo por el factor

$$Y_1 = (y+1)^2.$$

Hecha esta multiplicacion y dividiendo despues el producto que resulte por R'_1, hallaremos el cociente $(y+1)x+3y^2$, y el resto independiente

$$R_2 = -4y^3+8y^2+y-2 = (y-2)(1-4y^2).$$

De modo que, segun lo que ya sabemos (234), se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} R'_1=0 \\ R_2=0 \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} B=0 \\ F_1=0 \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{l} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{array}\right\}.$$

Siendo $R'_1=0$ de primer grado en x, y teniendo los coeficientes primos entre sí, cualquiera raíz de la ecuacion $Y_1=0$, sustituida en R'_1, reducirá esta cantidad á un número, porque Y sólo se forma de factores del primer coeficiente de R'_1; y por consiguiente, el sistema $\left.\begin{matrix}Y_1=0\\ R'_1=0\end{matrix}\right\}$ es incompatible. Luego las soluciones del sistema $\left.\begin{matrix}A=0\\ B=0\end{matrix}\right\}$, serán todas las de los sistemas $\left.\begin{matrix}R'_1=0\\ R_2=0\end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix}B=0\\ F_1=0\end{matrix}\right\}$.

La ecuacion final del primer sistema, es

$$R_2=(y-2)(4y^2-1)=0 \qquad [7].$$

Sustituyendo cada una de las raíces de esta ecuacion en $R'_1=0$, y resolviendo las ecuaciones de primer grado que resultan, se hallarán los sistemas de valores

$$\left.\begin{matrix}y=2\\ x=-5\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=\frac{1}{2}\\ x=-\frac{5}{2}\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=-\frac{1}{2}\\ x=\frac{5}{2}\end{matrix}\right\} \qquad [g].$$

La ecuacion final del segundo de estos sistemas, será

$$(y-1)^2=0 \qquad [8].$$

Sustituyendo el valor $y=1$ en $B=0$, hallaremos los dos valores $x=-2$ y $x=-3$; luego las soluciones serán

$$\left.\begin{matrix}y=1\\ x=-2\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=1\\ x=-3\end{matrix}\right\} \qquad [h].$$

Por consiguiente, la ecuacion final del sistema $\left.\begin{matrix}M=0\\ N=0\end{matrix}\right\}$, será el producto de las ecuaciones finales [1], [2], [3]...

$$(y^2-5y+6)^2\times(y-5)^2\times(y^4+10y^3+27y^2+18y)\times(y-5)^3\times$$
$$(y^3-5y^2+6y)\times(y^2-2)\times(4y^2-1)\times(y-1)^2=0;$$

y las soluciones serán las de todos los sistemas parciales que hemos considerado, que son

$$\left.\begin{matrix}y=2\\ x=1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=3\\ x=1\end{matrix}\right\};\ \left.\begin{matrix}y=2\\ x=-4\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=2\\ x=-5\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=3\\ x=-5\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=3\\ x=-8\end{matrix}\right\};$$

$$\left.\begin{matrix}y=5\\ x=1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=5\\ x=4\end{matrix}\right\};\ \left.\begin{matrix}y=0\\ x=1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=-1\\ x=4\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=-3\\ x=1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=-6\\ x=4\end{matrix}\right\};$$

$$\left.\begin{matrix}y=5\\ x=2\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=5\\ x=-3\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=5\\ x=-11\end{matrix}\right\};\ \left.\begin{matrix}y=0\\ x=-1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=2\\ x=-1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=3\\ x=-1\end{matrix}\right\};$$

$$\left.\begin{matrix}y=2\\ x=-5\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=\frac{1}{2}\\ x=-\frac{5}{2}\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=-\frac{1}{2}\\ x=\frac{5}{2}\end{matrix}\right\};\ \left.\begin{matrix}y=1\\ x=-2\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=1\\ x=-3\end{matrix}\right\}.$$

Por un procedimiento análogo se hubiera hallado la ecuacion final en x.

Ecuaciones irracionales.

246. Todos los teoremas en que se funda la resolucion de las ecuaciones numéricas, lo mismo que los procedimientos que se siguen para hallar las raíces de una ecuacion, están fundados en que la incógnita de la cuestion no venga debajo de ningun radical, ni afectada de exponentes fraccionarios; por consiguiente, es muy importante saber trasformar una ecuacion que contiene radicales en otra que sólo tenga términos racionales.

El hacer desaparecer los radicales de una ecuacion, no es más que una aplicacion de la teoría de eliminacion.

247. Para hacer desaparecer de un modo general los radicales de una ecuacion, se iguala cada uno á una incógnita auxiliar, lo que dará orígen á tantas ecuaciones irracionales de condicion, como radicales hay; estas ecuaciones se harán racionales elevándolas respectivamente á la potencia que marque el índice del radical. Reemplazando luégo en la ecuacion propuesta cada radical por la incógnita que lo representa, y suponiendo que es m el número de radicales, se tendrá un sistema de $m+1$ incógnitas, que deberán verificarse por unos mismos valores; de modo, que eliminando entre ellas las incógnitas auxiliares, la ecuacion que resulte será la ecuacion de términos racionales que se busca.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+2}-1=0 \qquad [1].$$

Hagamos $y=\sqrt[3]{1-x}$, y $z=\sqrt{x+2}$, de donde elevando respectivamente al cubo y cuadrado, haciendo la trasposicion y reemplazando los radicales de la ecuacion [1] por las incógnitas y y z, tendremos

$$y^3+x-1=0,$$
$$z^2-x-2=0,$$
$$y+z-1=0.$$

De la tercera ecuacion se deduce $z=1-y$; la segunda se convierte por la sustitucion de z, en $y^2-2y-x-1=0$; y eliminando entre ésta y la primera la incógnita y, por el método del *m. c. d.*, hallaremos la ecuacion final que se busca

$$x^3-4x^2-3x+14=(x-2)(x^2-2x-7)=0,$$

cuyas raíces son

$$x=2,\quad x=1+\sqrt{8},\quad \text{y}\quad x=1-\sqrt{8}.$$

Todas las raíces de esta última ecuacion verificarán á la propuesta, siempre que se consideren á los radicales que contiene con toda generalidad; pero podrá suceder que no sea así, si sólo se consideran los valores aritméticos de dichos radicales.

Así, en el ejemplo precedente, sólo los dos primeros valores verifican á la ecuacion [1], el tercero no; pero si el segundo radical lo consideramos con el doble signo, por ser de grado par, y tomamos el signo —, obtendremos la ecuacion

$$\sqrt[3]{1-x}-\sqrt{x+2}-1=0,$$

que será satisfecha por el tercer valor $x=1-\sqrt{8}$.

Luego si sólo se quieren hallar los valores de x que satisfacen á la ecuacion propuesta, no considerando más que los valores aritméticos de los radicales que contiene, es necesario despreciar todas las raíces de la ecuacion trasformada que no verifiquen aquella. En el ejemplo que nos ocupa tendriamos que desechar el tercer valor $x=1-\sqrt{8}$.

248. Como los métodos de eliminacion son en general muy pesados, debemos eludirlos todas las veces que se pueda.

En el caso de que la ecuacion no contuviese más que un radical, es muy fácil hacerle desaparecer, aislándolo en un solo miembro, y elevando la ecuacion que resulte á una potencia marcada por el índice.

249. Elevando á una potencia cualquiera una ecuacion racional, la ecuacion que resulta tiene más soluciones que la primera, y lo mismo sucede aunque la ecuacion sea irracional, siempre que á los radicales que contenga se les considere bajo el aspecto aritmético; pero considerándolos con toda la generalidad, la ecuacion que resulta de elevar la primera á una potencia marcada por el índice del radical, tiene las mismas soluciones que esta, y ninguna más.

Sea la ecuacion

$$A=\sqrt[n]{B} \qquad [2],$$

que elevada, para hacer desaparecer el radical, á la *enésima* potencia, se convierte en

$$A^n=B \quad \text{ó} \quad A^n-B=0 \qquad [3].$$

Esto supuesto, si el radical $\sqrt[n]{B}$ se considera con toda su generalidad, es decir, que pueda representar cualquiera de sus n valores algebráicos, es claro que todos los valores de las incógnitas que verifiquen á la ecuacion [2], verificarán tambien á la ecuacion [3]. Veamos ahora si recíprocamente toda solucion de la ecuacion [3], lo es tambien de la primera.

Para ello consideremos la ecuacion $x^n=a$; designemos por a', a'', a'''... los n valores de $\sqrt[n]{a}$, y segun sabemos (180), se tendrá

$$x^n-a=(x-a')(x-a'')(x-a''')...=0.$$

En esta igualdad podremos reemplazar x y a por todas las cantidades que se quiera; por consiguiente, si llamamos B', B'', B'''... los n valores del radical $\sqrt[n]{B}$, y ponemos A, B, B', B''... en vez de x, a, a', a'',... tendremos

$$A^n-B=(A-B')(A-B'')(A-B''')...=0.$$

Esta ecuacion manifiesta, que la ecuacion [3] no puede ser satisfecha sino haciendo $A=B'$, $A=B''$, $A=B'''$, etc.; pero estas últimas ecuaciones son las que resultan de sustituir en la ecuacion [2], cada uno de los valores de $\sqrt[n]{B}$; luego las soluciones de la ecuacion [3], son las mismas que la de la propuesta.

250. Cuando una ecuacion no contiene más que dos radicales, y el índice de uno de ellos no es mayor que 3, se podrá hacer que desaparezcan elevando sucesivamente la ecuacion á potencias convenientes.

Sea la ecuacion que tratamos de hacer racional

$$A+\sqrt[3]{B}+\sqrt[n]{C}=0.$$

Pasando al segundo miembro el radical $\sqrt[n]{C}$, y elevando despues á la *enésima* potencia, hallaremos en el primer miembro un desarrollo que no contendrá más radicales que $\sqrt[3]{B}$ y $\sqrt[3]{B^2}$; porque los exponentes de las potencias á que debe elevarse $\sqrt[3]{B}$, tienen que ser de la forma $3p$, $3p+1$ y $3p+2$, cuyas potencias darán por resultado B^p, $B^p\sqrt[3]{B}$ ó $B^p\sqrt[3]{B^2}$. Por consiguiente, la ecuacion que resulte será de la forma

$$D+E\sqrt[3]{B}+F\sqrt[3]{B^2}=0;$$

pasando al segundo miembro el tercer término y elevando al cubo, hallaremos

$$D^3+3D^2E\sqrt[3]{B}+3DE^2\sqrt[3]{B^2}+E^3B=-F^3B^2,$$

de donde se deduce

$$D^3+E^3B+F^3B^2+3DE\sqrt[3]{B}(D+E\sqrt[3]{B})=0;$$

y reemplazando la cantidad que hay dentro del paréntesis por su igual $-F\sqrt[3]{B^2}$, se tendrá

$$D^3+E^3B+F^3B^2-3DEFB=0.$$

Este método es impracticable cuando la ecuacion contiene más de dos radicales, y áun conteniendo sólo dos, si el de menor grado tiene un índice mayor que 3. Unicamente en el caso de ser de segundo grado, podrá hacerse que desaparezcan tres radicales de una ecuacion, no conteniendo más que estos tres.

LECCION XXVII.

Diferentes trasformaciones de que es susceptible una ecuacion para resolverla más fácilmente.

Diferentes trasformaciones de que es susceptible una ecuacion para resolverla más fácilmente.

251. La trasformacion de que nos vamos á ocupar, tiene por objeto hacer depender la resolucion de una ecuacion dada $f(x)=0$ de la de otra $\varphi(y)=0$, cuyas raíces estén ligadas con las de la propuesta por una relacion cualquiera, y tengan la ventaja de poderse calcular más fácilmente.

La trasformacion de ecuaciones no es otra cosa sino una aplicacion de la teoría de la eliminacion, y está fundada en el siguiente principio:

252. *Para hallar una ecuacion* $F(y)=0$, *cuyas raíces estén ligadas con las de otra* $f(x)=0$ *por una relacion cualquiera* $\varphi(x\ y)=0$, *se*

elimina la incógnita x *entre* $f(x)=0$ *y* $\varphi(x\ y)=0$, *y la ecuacion final que resulte será la ecuacion pedida.*

En efecto, la ecuacion $F(y)=0$ que vamos buscando ha de ser tal, que sus raíces, unidas con las de $f(x)=0$, han de verificar á la relacion $\varphi(x\ y)=0$; pero la ecuacion final que resulta de eliminar x entre $\varphi(x\ y)=0$ y $f(x)=0$, goza de esta propiedad; luego dicha ecuacion final será la que se pide.

Las trasformaciones más principales por su frecuente aplicacion, son las siguientes:

253. *Dada una ecuacion algebráica, hallar otra cuyas raíces sean iguales en valor numérico, pero de signo contrario.*

Sea la ecuacion $f(x)=0$. La relacion que liga las raíces de esta ecuacion con las de la trasformada, es $y=-x$, de donde $x=-y$; luego dicha trasformada será $f(-y)=0$. Como el valor numérico de y ha de ser igual al de x, se deja la misma letra, obteniendo así la ecuacion $f(-x)=0$, que se llama la *trasformada en* $-$x.

254. *Para hallar la trasformada en* $-$x, *ó sea la ecuacion cuyas raíces son iguales pero de signos contrarios á los de otra ecuacion dada, no hay más que cambiar los signos de los términos de grado impar si la ecuacion es de grado par, y los de grado par si fuese de grado impar.*

En efecto, al sustituir x por $-x$, cambiarán todos los términos de grado impar; luego la primera parte es cierta. Si la ecuacion fuese de grado impar, uno de los términos que cambiarian de signo seria el primero; de modo, que cambiando los signos á toda la ecuacion, los términos de grado impar quedarian con sus signos primitivos, y sólo habrán cambiado los términos de grado par.

255. *Dada una ecuacion, hallar otra cuyas raíces sean los productos de las de la propuesta por un número conocido* k.

Sea la ecuacion

$$f(x)=x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots+P_{m-1}x+P_m=0;$$

la relacion que liga las raíces de esta ecuacion con las de la trasformada, es $y=kx$, de donde $x=\frac{y}{k}$; por consiguiente, la ecuacion que se busca será, despues de quitados los denominadores,

$$y^m+P_1ky^{m-1}+P_2k^2y^{m-2}+\ldots+P_{m-1}k^{m-1}y+P_mk^m=0.$$

OBSERVACION. Todos los términos de esta trasformada son del grado m con relacion á las letras k é y; luego para multiplicar por

k las raíces de una ecuacion del grado m, *se hace que todos sus términos sean de este grado con relacion á* k *é* y, *multiplicándolos por una potencia conveniente de* k.

256. *Dada una ecuacion reducida á la forma ordinaria, de coeficientes fraccionarios, trasformarla en otra de la misma forma, pero de coeficientes enteros.*

Sea la ecuacion reducida á la forma ordinaria

$$f(x) = x^m + P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} + \ldots + P_m = 0,$$

cuyos coeficientes son todos ó en parte fraccionarios. Multipliquemos todas las raíces por el número indeterminado k, y hallaremos la trasformada

$$y^m + P_1ky^{m-1} + P_2k^2y^{m-2} + \ldots + P_mk^m = 0.$$

Dando ahora á k un cierto valor que reduzca á números enteros todos los coeficientes, se tendrá la trasformada pedida. Este valor de k será por lo ménos igual al producto de todos los factores primos diferentes que hay en los denominadores, y á lo más igual al mínimo comun múltiplo de estos denominadores. El valor más conveniente será el menor que se pueda, y no es difícil hallarle en cada caso particular.

Sea, por ejemplo, trasformar la ecuacion

$$x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{47}{72} = 0,$$

que tiene sus coeficientes fraccionarios y está reducida á la forma ordinaria, en otra de coeficientes enteros y de igual forma.

La ecuacion que tiene sus raíces k veces mayores, será

$$y^4 - \frac{3k}{2}y^3 + \frac{2k^2}{9}y^2 + \frac{5k^3}{12}y - \frac{47k^4}{72} = 0.$$

Los factores primos diferentes que hay en los denominadores, son 2 y 3; y haciendo $k = 2 \cdot 3 = 6$, se ve que los coeficientes se hacen enteros; luego la trasformada será

$$y^4 - 9y^3 + 8y^2 + 90y - 846 = 0.$$

257. *Dada una ecuacion, hallar otra cuyas raíces sean las de la propuesta, disminuidas en una cierta cantidad* h.

Sea la ecuacion $f(x)=0$; la relacion dada entre las raíces de la propuesta y trasformada, es $y=x-h$; de donde $x=y+h$. Sustituyendo este valor de x en $f(x)$, y desarrollando por la fórmula de Taylor, se hallará

$$f(y+h)=f(h)+f'(h)y+\frac{1}{1.2}f''(h)y^2+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(h)y^m.$$

Sea, por ejemplo, disminuir en 3 unidades las raíces de la ecuacion $x^4+3x^3-10x^2-4x-6=0$. Hallando las derivadas y sustituyendo despues x por 3, tendremos

$f(x)=x^4+3x^3-10x^2-4x-6$	$f(3)=54$
$f'(x)=4x^3+9x^2-20x-4$	$f'(3)=125$
$\frac{1}{1.2}f''(x)=6x^2+9x-10$	$\frac{1}{1.2}f''(3)=71$
$\frac{1}{1.2.3}f'''(x)=4x+3$	$\frac{1}{1.2.3}f'''(3)=15$
$\frac{1}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(x)=1$	$\frac{1}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(3)=1.$

Luego la ecuacion pedida será

$$y^4+15y^3+71y^2+125y+54=0.$$

Cuando el número h que se debe disminuir á cada raiz es un número entero, conviene hallar la trasformada por la regla siguiente:

258. *Para disminuir en* h *unidades las raíces de una ecuacion dada, se halla otra de la forma* $a+by+cy^2+\ldots+uy^m$, *cuyos coeficientes* a, b, c,... u, *son los restos que se obtienen de dividir el primer miembro de la ecuacion dada y los cocientes sucesivos por el binómio* x—h; *el coeficiente* u, *es el último cociente.*

Aplicando al ejemplo anterior esta regla, hallaremos que las divisiones sucesivas dan (*Álgebra*, tomo I, números 89 y 90)

$$\begin{array}{ll} x^3+6x^2+8x+20+ & (R_1=54) \\ x^2+9x+35+ & (R_2=125) \\ x+12+ & (R_3=71) \\ 1+ & (R_4=15) \\ & (Q_4=1); \end{array}$$

luego la ecuacion trasformada será, como anteriormente hemos hallado,

$$54+125y+71y^2+15y^3+y^4.$$

Para demostrar esta regla, dividiremos $f(x)$ y los cocientes sucesivos por $x-h$, y hallaremos

$$\begin{aligned} f(x)&=(x-h)Q_1+R_1 \\ Q_1&=(x-h)Q_2+R_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_{m-1}&=(x-h)Q_m+R_m. \end{aligned}$$

Multiplicando ahora la segunda igualdad por $x-h$, la tercera por $(x-h)^2$, etc., y sumando, con el objeto de eliminar los cocientes Q_1, Q_2, ... Q_{m-1}, tendremos

$$f(x)=R_1+R_2(x-h)+R_3(x-h)^2+\ldots$$
$$+R_m(x-h)^{m-1}+Q_m(x-h)^m;$$

donde, vemos, que la trasformada en $x-h=y$, será

$$R_1+R_2y+R_3y^2+\ldots+R_my^{m-1}+Q_my^m=0.$$

259. *Trasformar una ecuacion en otra que carezca de uno de sus términos.*

Sea la ecuacion

$$f(x)=x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots+P_{m-1}x+P_m=0.$$

Disminuyamos en h unidades la raíces de esta ecuacion, siendo h un número indeterminado, y tendremos, segun el número anterior,

$$f(y+h)=$$
$$(y+h)^m+P_1(y+h)^{m-1}+P_2(y+h)^{m-2}+\ldots+P_{m-1}(y+h)+P_m=0.$$

Desarrollando por la fórmula del binómio cada una de estas potencias, y ordenando con relacion á y, hallaremos

$$f(y+h)=y^m+\left.\begin{array}{l}mh\\+P_1\end{array}\right| y^{m-1}+\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}m(m-1)h^2\\+(m-1)P_1h\\+P_2\end{array}\right| y^{m-2}+\ldots+\left.\begin{array}{l}h^m\\+P_1h^{m-1}\\+P_2h^{m-2}\\ \vdots\\+P_m\end{array}\right\}=0.$$

Si ahora queremos que desaparezca uno de los términos de este desarrollo, dispondremos de la indeterminada h, de modo que reduzca á cero el coeficiente del término que se quiera.

Así, para hacer desaparecer el segundo término, haremos

$$mh+P_1=0, \text{ de donde } h=-\frac{P_1}{m};$$

por consiguiente, poniendo en la relacion $x=y+h$ el valor de h, se tendrá $x=y-\frac{P_1}{m}$; expresion que, puesta en la ecuacion dado, hace desaparecer el segundo término. De donde se deduce, que *para hacer desaparecer el segundo término de una ecuacion, se sustituye su incógnita por otra aumentada en el cociente de dividir el coeficiente del segundo término tomado con signo contrario, por el grado* m *de la ecuacion.*

Las raíces de esta trasformada serán iguales á las de la propuesta aumentadas ó disminuidas en $\frac{P_1}{m}$, segun sea el signo de P_1.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x^4-8x^3+6x^2-3x+4=0.$$

Sustituyendo la incógnita x por $y+2$, obtendremos, por la fórmula de Taylor,

$$f(y+2)=f(2)+f'(2)y+\frac{1}{1.2}f''(2)y^2+\frac{1}{1.2.3}f'''(2)y^3+\frac{1}{1.2.3.4}f^{\text{iv}}(2)y^4=0.$$

$$\begin{array}{l|l}
f(x)=x^4-8x^3+6x^2-3x+4 & f(2)=-26 \\
f'(x)=4x^3-24x^2+12x-3 & f'(2)=-43 \\
\frac{1}{1.2}f''(x)=6x^2-24x+6 & \frac{1}{1.2}f''(2)=-18 \\
\frac{1}{1.2.3}f'''(x)=4x-8 & \frac{1}{1.2.3}f'''(2)=\ 0 \\
\frac{1}{1.2.3.4}f^{\text{iv}}(x)=1 & \frac{1}{1.2.3.4}f^{\text{iv}}(2)=\ 1.
\end{array}$$

Luego la trasformada pedida será

$$y^4-18y^2-43y-26=0.$$

Si quisiéramos que desapareciera el tercer término de la ecuacion, haríamos

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)h^2+(m-1)P_1h+P_2=0.$$

de donde deduciríamos en general dos valores para h, obteniendo por consiguiente dos trasformadas, correspondientes á estos valores.

La desaparicion del cuarto término depende de una ecuacion de tercer grado en h, y así sucesivamente. El valor de h que anula al último término, depende de una ecuacion del grado m, que se obtiene reemplazando en la propuesta x por h, lo que es muy sencillo explicar. En efecto, igualar á cero el último término, es suponer que uno de los valores de y es cero; por consiguiente, la relacion $x=y+h$, se convierte en $x=h$; luego el valor de h es uno de los valores de x, es decir, una de las raíces de la ecuacion propuesta.

260. Podrá suceder que el valor de h, determinado con la condicion de anular á uno de los términos, anule tambien á otro ú otros varios; pero esto no se verificará sino mediante algunas ecuaciones de condicion. Si quisiéramos hallar estas ecuaciones de condicion, no habria más que, una vez determinado el valor de h que anula un coeficiente, sustituirlo en los demás que se han de anular, y obtendremos las relaciones que se han de verificar entre los coeficientes de la ecuacion propuesta para que desaparezcan á la vez dos ó más términos.

La condicion para que desaparezcan el segundo y tercer término, será $2mP_2=(m-1)P_1^2$.

Sea la ecuacion $x^4+4x^3+6x^2-8x-3=0$, cuyos primeros coeficientes satisfacen á la condicion anterior, pues la reducen á la identidad $6=6$.

Haciendo ahora $x=y-1$, con el objeto de anular el segundo término, hallaremos, despues de toda reduccion, la trasformada $y^4-12y+8=0$, que carece de segundo y tercer término.

261. Podria creerse que haciendo desaparecer el segundo término, luégo el tercero, en seguida el cuarto, y así los demás llegaríamos á una ecuacion que solo contuviese dos términos; pero esto no es cierto, porque cada operacion haria aparecer el término anulado en la anterior. En efecto, sea la trasformada que ya carece de segundo término,

$$x^m+P_2x^{m-2}+\text{etc.}=0.$$

Sustituyamos x por $y+h$, con el objeto de hacer desaparecer el término del grado $m-2$, y hallaremos, despues de hecho el desarrollo,

$$y^m+mhy^{m-1}+[\tfrac{1}{2}m(m-1)h^2+P_2]y^{m-2}+\ldots=0;$$

donde vemos, que el valor de h que anula al término del grado $m-2$, no puede anular en general al término mhy^{m-1}; luego al anular un término cualquiera, aparece el que se anula en la operacion anterior.

262. *Dada una ecuacion, hallar otra cuyas raices sean una cierta potencia de las raices de la propuesta.*

Sea la ecuacion $f(x)=0$, y n el exponente de la potencia á que se ha de elevar cada una de sus raíces para obtener las de la trasformada; por tanto, la relacion que une á x con y, será $y=x^n$. Eliminando ahora x entre las ecuaciones

$$y=x^n \quad \text{y} \quad f(x)=0,$$

hallaremos la trasformada pedida.

263. *Dada una ecuacion, hallar otra cuyas raices sean recíprocas de las raices de la propuesta.*

Sea la ecuacion $f(x)=0$. Haciendo $y=\dfrac{1}{x}$, de donde $x=\dfrac{1}{y}$, y sustituyendo este valor en $f(x)=0$, hallaremos la trasformada pedida.

Observacion. Para obtener esta trasformada, no hay más que invertir el órden de los coeficientes, y multiplicarlos por la potencia conveniente de y. Así, la ecuacion cuyas raíces son recíprocas de las de $x^4-3x^3+5x+2=0$, será

$$2y^4+5y^3-3y+1=0.$$

LECCION XXVIII.

Ecuaciones cuyas raíces son una combinacion dada de las de la propuesta.

Ecuaciones cuyas raíces son una combinacion dada de las de la propuesta.

264. *Dada una ecuacion cualquiera del grado* m, *hallar otra cuyas raíces sean una cierta combinacion de* n *raíces de la propuesta.*

Sea $f(x)=0$ la ecuacion propuesta; a, b, c, etc., n raíces cualesquiera de esta ecuacion, y $\varphi(a, b, c, \ldots y)=0$ la relacion que debe verificarse entre dichas raíces y cada una de las de la ecuacion en y que se busca; de modo, que estas cantidades deberán verificar simultáneamente á las ecuaciones

$$\varphi(a, b, c, \ldots y)=0,\ f(a)=0,\ f(b)=0,\ f(c)=0, \text{ etc.}$$

Ahora, si eliminamos las n cantidades a, b, c, etc. entre estas ecuaciones, se obtendrá una ecuacion final $F(y)=0$ que tendrá por raíces todos los valores de y, que unidos con ciertos valores de a, b, c, etc., satisfarán á las ecuaciones anteriores; pero todos estos valores de a, b, c, etc. no pueden ser sino raíces de $f(x)=0$; luego la ecuacion final $F(y)=0$ tendrá por raíces los valores que resultan de todas las combinaciones expresadas por la relacion dada $\varphi(a, b, c, \ldots y)=0$, entre las n raíces cualesquiera de la ecuacion propuesta.

Apliquemos este problema general á algunos casos particulares, que suelen presentarse con frecuencia en la práctica.

265. ECUACION DE LAS SUMAS DE DOS RAÍCES. *Dada una ecuacion, hallar otra cuyas raíces sean las sumas de dos raíces cualesquiera de la propuesta.*

Sea $f(x)=0$ la ecuacion dada del grado m; a y b dos cualesquiera de sus raíces, y finalmente, sea y la incógnita de la ecuacion pedida.

Las ecuaciones de condicion que se han de verificar, son

$$y=a+b,\ f(a)=0,\ f(b)=0.$$

De la primera se saca $a=y-b$, cuyo valor, sustituido en la segunda, da $f(y-b)=0$, y la cuestion queda reducida á eliminar b entre las ecuaciones $f(y-b)=0$ y $f(b)=0$; y como b es una raíz cualquiera de $f(x)=0$, será lo mismo que eliminar la x entre las ecuaciones

$$f(x)=0 \text{ y } f(y-x)=0.$$

La ecuacion final será evidentemente del grado m^2, porque el número de sus raíces es igual al número de arreglos de dos letras que se pueden formar con m, combinando cada letra consigo misma y con cada una de las $m-1$ restantes. Pero se podrá reducir á otra del grado $m(m-1)$, observando que entre las raíces de esta ecuacion final se hallan las raíces dobles de la propuesta, que corresponden á los arreglos $a+a=2a$, $b+b=2b$, etc.; luego si formamos la ecuacion cuyas raíces sean dobles de las raíces de la propuesta (255), y dividimos por ella la ecuacion final anterior, la que resulte será del grado $m^2-m=m(m-1)$, y tendrá por raíces las sumas que se obtienen combinando cada raíz de la propuesta con cada una de las $m-1$ restantes.

Se podria evitar la ecuacion de las raíces dobles de la propuesta, y obtener directamente la ecuacion del grado $m(m-1)$, que tiene por raíces las diferentes sumas que se forman combinando cada raíz con las $m-1$ restantes, eliminando la x entre las ecuaciones

$$f(x)=0 \text{ y } f(y-x)-f(x)=0.$$

En efecto, esta última ecuacion queda satisfecha evidentemente por $y=2x$; luego su primer miembro es divisible por $y-2x$, efectuando la division y eliminando en seguida la x entre

$$f(x)=0 \text{ y } \frac{f(y-x)-f(x)}{y-2x}=0,$$

se hallará la ecuacion del grado $m(m-1)$, de que anteriormente hemos hablado.

Esta ecuacion puede todavía reducirse al grado $\frac{1}{2}m(m-1)$, si se observa que las raíces de esta última ecuacion son iguales de dos en dos, pues si tiene la raíz $a+b$, tambien tendrá otra igual $b+a$: el primer miembro será por consiguiente un cuadrado perfecto; de modo, que extrayendo la raíz cuadrada, se obtendrá la verdadera ecuacion final, que será, como ya hemos dicho, del grado $\frac{1}{2}m(m-1)$.

266. Si en esta última ecuacion hallada hacemos $y=2z$, la ecuacion en z que se obtiene es la trasformada, cuyas raíces son las medias diferenciales entre cada dos de la propuesta.

267. Ecuacion de las diferencias de dos raíces. *Dada una ecuacion, hallar otra que tenga por raíces las diferencias de dos cualesquiera de la propuesta.*

Sea $f(x)=0$ una ecuacion del grado m; a y b dos cualesquiera de sus raíces, é y la incógnita de la ecuacion pedida, que será la que resulte de eliminar a y b entre las ecuaciones

$$y=a-b,\quad f(a)=0 \quad \text{y} \quad f(b)=0.$$

Para efectuar esta eliminacion, saquemos de la primera ecuacion el valor de a, sustituyámoslo en la segunda, y quedará reducida la cuestion á eliminar b entre las ecuaciones $f(b)=0$ y $f(b+y)=0$; y como b es una raíz cualquiera de la ecuacion propuesta, será lo mismo que eliminar la x entre

$$f(x)=0 \quad \text{y} \quad f(x+y)=0.$$

Si en vez de eliminar primero a y luégo b, hubiéramos principiado por eliminar b y despues a, habria quedado la cuestion reducida á eliminar x entre las ecuaciones

$$f(x)=0 \quad \text{y} \quad f(x-y)=0;$$

donde vemos, que para hallar la ecuacion de las diferencias, no hay más que eliminar la x entre la ecuacion propuesta y la que resulta de sustituir $x+y$ ó $x-y$ en vez de x. Esto prueba que la ecuacion de las diferencias no debe cambiar, sustituyendo y por $-y$; luego todos sus términos han de ser de grado par ó de grado impar. Además, será como la de las sumas (265) del grado m^2; pero se podrá reducir á otra del grado $m(m-1)$, observando que dicha ecuacion debe tener m raíces nulas, correspondientes á las m diferencias $a-a$, $b-b$, etc.; luego dividiendo por el factor y^m, la ecuacion que resulte será del grado $m^2-m=m(m-1)$, que evidentemente es par.

Siendo la ecuacion obtenida últimamente de grado par, todos los términos, segun hemos visto, serán tambien de grado par, y podrán reducirse á otra del grado $\frac{1}{2}m(m-1)$, haciendo $y^2=z$.

268. La ecuacion que por este medio se obtiene en z, se llama *ecuacion de los cuadrados de las diferencias de las raíces de la propuesta*; y para obtenerla, segun acabamos de ver, *no hay más que reemplazar* y^2 *por* z *en la ecuacion de las diferencias.*

Observacion. La ecuacion de las diferencias, privada ya de las m raíces iguales á cero, podíamos haberla obtenido directamente eliminando la x entre las ecuaciones

$$f(x)=0 \text{ y } f(x+y)-f(x)=0.$$

En efecto, esta segunda ecuacion se verifica evidentemente por el valor $y=0$; luego será divisible por y, y efectuando esta division quedará reducido á eliminar la x entre

$$f(x)=0 \text{ y } \frac{f(x+y)-f(x)}{y}=0;$$

la ecuacion final que resulte será la trasformada que se queria hallar.

El grado de esta ecuacion no es un número par cualquiera $2n$; es menester que n cumpla con la condicion de reducir á un cuadrado perfecto la cantidad $1+8n$, circunstancia necesaria para que m sea un número entero cualquiera.

269. *Hallar una ecuacion que tenga por raíces los productos binarios de las raíces de una ecuacion dada.*

Sea la ecuacion del grado m, $f(x)=0$; a y b dos de sus raíces, é y la incógnita de la ecuacion pedida, que será la que resulte de eliminar a y b entre las ecuaciones

$$y=ab,\ f(a)=0 \text{ y } f(b)=0.$$

De la primera se saca $a=\frac{y}{b}$. Sustituyendo este valor en la segunda, la cuestion queda reducida á eliminar b entre $f(b)=0$ y $f\left(\frac{y}{b}\right)=0$; ó lo que es lo mismo, á eliminar x entre $f(x)=0$ y $f\left(\frac{y}{x}\right)=0$.

Lo mismo que en los casos anteriores, la ecuacion resultante será del grado m^2, y se podrá reducir al grado $m(m-1)$, observando que en en ella deben estar como raíces los cuadrados de las raíces de $f(x)=0$; de modo, que hallando la ecuacion de estos cuadrados

(262), y dividiendo por ella la anterior, encontraremos la ecuacion trasformada del grado $m(m-1)$, que podrá reducirse á un grado mitad, observando que su primer miembro debe ser un cuadrado perfecto, por tener sus raíces iguales de dos en dos.

La ecuacion de los productos binarios de las raíces de la propuesta se podia haber hallado directamente sin tener que calcular la de los cuadrados, eliminando la x entre las ecuaciones

$$f(x)=0 \text{ y } f\left(\frac{y}{x}\right)-f(x)=0.$$

Pero la segunda queda satisfecha haciendo $y=x^2$, y por tanto es divisible por $y-x^2$; luego la ecuacion que sólo tenga los productos binarios sin contar los cuadrados, será la ecuacion final que resulte de eliminar x entre

$$f(x)=0 \quad \text{y} \quad \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)-f(x)}{y-x^2}=0.$$

Si quisiéramos hallar la ecuacion cuyas raíces fueran las medias proporcionales de dos cualesquiera de la propuesta, haríamos en la ecuacion final obtenida últimamente, $y=z^2$.

270. *Hallar la ecuacion que tiene por raíces los cocientes de dos raíces de una ecuacion dada.*

Por iguales procedimientos que en los casos anteriores, veremos que no hay más que eliminar x entre las ecuaciones

$$f(x)=0 \text{ y } f(xy)=0.$$

La ecuacion final tendrá m raíces iguales á la unidad; de modo, que siendo del grado m^2, podrá reducirse al grado $m(m-1)$, dividiendo su primer miembro por $(y-1)^m$, ecuacion que por tener sus raíces recíprocas dos á dos, podrá reducirse al grado $\frac{1}{2}m(m-1)$, como veremos más adelante.

Ejemplo. Aplicando las reglas dadas anteriormente á la ecuacion

$$x^3-9x^2+26x-24=0,$$

hallaremos las trasformadas siguientes:

Ecuacion de las sumas de dos raíces cualesquiera de la ecuacion propuesta: $y^3-18y^2+107y-210=0$

Id. de las diferencias: $y^6-6y^4+9y^2-4=0$

Id. de los cuadrados: $y^3-6y^2+9y-4=0$

Id. de los productos: $y^3-26y^2+216y-576=0$

Id. de los cocientes:

$$y^6-\frac{27}{4}y^5+\frac{653}{36}y^4-\frac{3569}{144}y^3+\frac{653}{36}y^2-\frac{27}{4}y+1=0.$$

LECCION XXIX.

Ecuaciones que tienen raíces iguales.—Modo de reducir una ecuacion que tiene raíces iguales, á otras cuyas raíces sean diferentes.

Ecuaciones que tienen raices iguales.

271. Al hablar en la Leccion XX del número de raíces de una ecuacion del grado m, hemos visto que su primer miembro $f(x)$ se puede descomponer en m factores binómios de primer grado correspondientes á cada una de sus m raíces, de modo que se tiene

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)...(x-l);$$

y tambien se dijo en esta Leccion, que cuando algunos de estos factores eran iguales entre sí, la ecuacion $f(x)=0$ tenia raíces iguales ó raíces múltiples, y que el grado de multiplicidad era igual al exponente de la potencia que indica las veces que uno de estos factores se halla repetido. Así, cuando el factor $x-a$ por ejemplo, se halla repetido n veces, se dice que la raíz a es múltiple y su grado de multiplicidad es n.

272. *Toda raíz múltiple del órden* n *de una ecuacion* f(x)=0, *anula á las* n—1 *primeras derivadas de su primer miembro, y recíprocamente.*

Sea a una raíz múltiple del órden n de la ecuacion $f(x)=0$. Si formamos otra cuyas raíces sean iguales á las de la propuesta disminuidas en a, esta ecuacion tendrá evidentemente tantas raíces nulas, como raíces iguales á a tiene la propuesta; es decir, n. Ahora bien, esta trasformada es (257)

$$f(y+a)=f(a)+f'(a)y+\frac{1}{1.2}f''(a)y^2+\frac{1}{1.2.3}f'''(a)y^3+...=0.$$

En esta igualdad se tiene por hipótesis $f(a)=0$; luego la ecuacion trasformada en y, tiene la raíz $y=0$. Si la raíz a, como suponemos, se halla repetida n veces en $f(x)=0$, la trasformada en y tendrá n raíces iguales á cero, y por tanto su primer miembro será divisible por y^n, lo que exige que sean nulos todos los coeficientes de las potencias de y hasta la del órden $n-1$; pero estos coeficientes son, como indica la igualdad anterior, las derivadas primera, segunda, etc., hasta la del órden $n-1$ del primer miembro $f(x)$ de la ecuacion propuesta, en las cuales se ha sustituido a por x; luego si la raíz a se halla repetida en una ecuacion n veces, todas las derivadas del primer miembro, hasta la del órden $n-1$, se reducen á cero, para $x=a$.

Recíprocamente, si a es raíz de una ecuacian $f(x)=0$, y las $n-1$ primeras derivadas de $f(x)$ se reducen á cero haciendo $x=a$, sin que por este valor se anule la del órden n, la raíz a se hallará repetida en la ecuacian propuesta n veces. En efecto, la trasformada en y que tiene por raíces las mismas de la propuesta disminuidas en a, tiene n raíces nulas, puesto que siendo $f(a)=0, f'(a)=0, \ldots f^{(n-1)}(a)=0$, existirá el factor comun y^n; la propuesta tendrá por consiguiente n raíces iguales á a.

CONSECUENCIA 1.ª Si a es raíz de la ecuacion $f(x)=0$, se verá si es múltiple y cuál es su grado de multiplicidad, sustituyendo esta raíz a en las derivadas sucesivas $f'(x)$, $f''(x)\ldots$; si no las anula, es señal que a no es raíz múltiple; pero sí lo será, en el caso de anular á las derivadas sucesivas primera, segunda, tercera, etc.: el índice de la primera que no se reduzca á cero, será el grado de multiplicidad de la raíz a.

CONSECUENCIA 2.ª *Las raíces múltiples del órden* n *de una ecuacion* $\mathrm{f(x)=0}$, *son múltiples del órden* n—1 *de la ecuacion derivada* $\mathrm{f'(x)=0}$.

Sea a una raíz múltiple del órden n de la ecuacion $f(x)=0$. Segun el principio anterior, a anulará á $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n-1)}(x)$, sin anular á $f^{(n)}(x)$; pues si anulase tambien á esta derivada del órden n, la propuesta tendria $n+1$ raíces iguales á a. Ahora bien, como la derivada primera de $f'(x)$ es $f''(x)$, la segunda es $f'''(x)$, y en general la del órden $n-2$ es $f^{(n-1)}(x)$, vemos que la raíz a de la ecuacion $f'(x)=0$, anula á las $n-2$ derivadas primeras de $f'(x)$, sin anular á la del órden $n-1$; luego segun la recíproca anterior, la raíz

a se hallará repetida en la ecuacion $f'(x)=0$, $n-1$ veces. Por consiguiente, la raíz múltiple del órden n de una ecuacion $f(x)=0$, lo es del órden $n-1$ de la derivada $f'(x)=0$.

273. Este principio se puede comprender fácilmente por consideraciones geométricas; más para ello observaremos, que *entre cada dos raíces consecutivas de una ecuacion* $f(x)=0$, *hay por lo ménos una, y en general un número impar de la derivada* $f'(x)=0$.

Sea $f(x)=0$ una ecuacion cuyo primer miembro está representado gráficamente por la curva (*fig.* 16). Sean $-a$, b y e tres raíces de esta ecua-

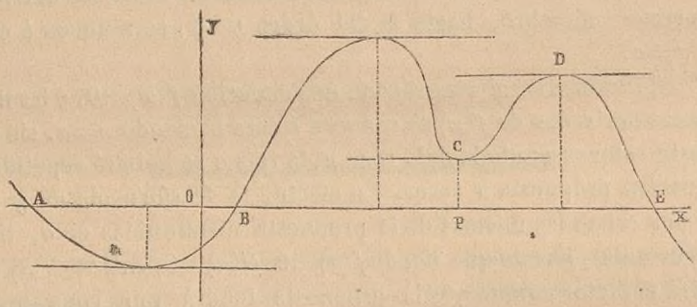

Fig.16.

cion, que serán las abscisas—OA, OB y OE, correspondientes á los puntos A, B y E, en que la curva corta al eje OX. A la simple inspeccion de la figura, se ve que entre cada dos raíces consecutivas de $f(x)=0$, la curva presenta una ondulacion, y en general un número impar; así, entre A y B hay *una* sola ondulacion; en el intervalo de B á E, hay *tres*. En cada una de estas ondulaciones hay siempre un punto en el que la tangente á la curva es pararelela al eje OX, el cual, como ya sabemos, corresponde en general á un máximo, á un mínimo, y á veces á un punto de inflexion. La derivada se reduce, por consiguiente, á cero una vez por lo ménos, y en general un número impar, para valores de x comprendidos entre dos raíces consecutivas de $f(x)=0$. Así, entre la raíz $-a$ y b de $f(x)=0$, hay una raíz de $f'(x)=0$; entre las raíces b y e de la primera, hay tres de la segunda.

Esto supuesto, consideremos una ecuacion contínua cualquiera $F(x)=0$, cuyas raíces sean $a, b, c, d, \ldots$; representemos gráficamente su primer miembro $F(x)$, y supongamos que dá orígen á la curva (*fig.* 17).

Acabamos de ver, que entre cada dos raíces de la ecuacion $F(x)=0$, hay comprendida, por lo ménos, una de la derivada $F'(x)=0$. Sean $a', b', c', \ldots$ estas raíces.

Esto supuesto, imaginemos que haciendo variar los coeficientes de la ecuacion $F(x)=0$, el intervalo $b-a$ disminuye hasta reducirse á cero, y las dos raíces a y b se hacen en este caso iguales á una cierta cantidad α, de modo que se tiene $a=b=\alpha$; la ecuacion correspondiente $f(x)=0$ tiene en este caso dos raíces iguales á α. Pero entre las raíces a y b, por pequeño que sea el intervalo $b-a$, hay siempre por lo ménos una raíz a' de la derivada $f'(x)=0$; y por consiguiente, cuando $a=b=\alpha$, a', que se halla siempre comprendida entre a y b, se reduce tambien al valor α. Donde vemos, que si α es una raíz doble de la ecuacion $f(x)=0$, α es raíz tambien de $f'(x)=0$, de modo que se tendrá al mismo tiempo

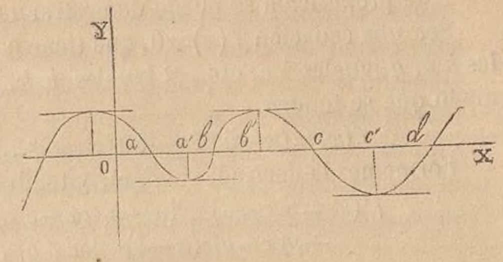

Fig. 17.

$$f(\alpha)=0 \text{ y } f'(\alpha)=0.$$

De la misma manera veremos, que si las diferencias $b-a$ y $c-b$ tienden hácia cero, $b'-a'$ tenderá tambien hácia cero; y cuando se tenga $a=b=c=\alpha$, se tendrá tambien $a'=b'=\alpha$. Por consiguiente, si la ecuacion propuesta tiene tres raíces iguales á α, la derivada primera $f'(x)=0$ tendrá dos, y la derivada segunda $f''(x)=0$, que tiene una raíz por lo ménos comprendida entre a' y b', se hará igual á α, cuando a' y b' sean tambien iguales; y por tanto, siendo α una raiz triple de $f(x)=0$, se deberán verificar á la vez las ecuaciones

$$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0 \ y \ f''(\alpha)=0.$$

Y en general, si α es n veces raíz de la ecuacion $f(x)=0$, se tiene

$$f(\alpha)=0,\quad f'(\alpha)=0,\quad f''(\alpha)=0,\ldots\quad f^{(n-1)}(\alpha)=0.$$

274. *Si una ecuacion* f(x)=0 *tiene raíces iguales, el primer miembro* f(x) *y su derivada* f'(x) *tienen un máximo comun divisor igual al producto de todos los factores binómios correspondientes á las raíces múltiples de la ecuacion, elevados respectivamente á una potencia cuyo exponente viene disminuido en una unidad.*

En efecto, acabamos de ver que si una ecuacion $f(x)=0$ tiene n raíces iguales á a, la derivada $f'(x)=0$ tiene la raíz a repetida $n-1$ veces; luego todo factor binómio que se encuentre en $f(x)$ elevado á la potencia n, se hallará en $f'(x)$ elevado á la potencia $n-1$; y por tanto, $f(x)$ y $f'(x)$ tendrán un divisor comun, compuesto de los factores binómios correspondientes á las raíces múltiples, elevados respectivamente á una potencia cuyo exponente viene disminuido en una unidad.

Esta proposicion se puede demostrar tambien directamente.

Sea una ecuacion $f(x)=0$, que tiene n raíces iguales á a, p iguales á b, q iguales á c, etc., 2 iguales á k, y una raíz sencilla l, de modo que se tendrá

$$f(x)=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k)^2(x-l).$$

Formemos la derivada de $f(x)$, y tendremos (104)

$$\begin{aligned} f'(x)=&n(x-a)^{n-1}(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k)^2(x-l)\\ &+p(x-a)^n(x-b)^{p-1}(x-c)^q\ldots(x-k)^2(x-l)\\ &+q(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^{q-1}\ldots(x-k)^2(x-l)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+2(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k)(x-l)\\ &+(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k)^2. \end{aligned}$$

Todos los sumandos de $f'(x)$ contienen el factor

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots(x-k),$$

que podremos representar por D. Este producto se halla tambien en $f(x)$; luego D es un divisor comun á $f(x)$ y $f'(x)$.

Los cocientes de dividir $f(x)$ y $f'(x)$ por D, son

$$\frac{f(x)}{D}=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)$$

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{D}=&n(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)+p(x-a)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)\\ &+q(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)+\ldots+2(x-a)(x-b)\ldots(x-l)\\ &+(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).\end{aligned}$$

Ninguno de los factores binómios del primer cociente divide al segundo; por tanto, estos cocientes son primos entre sí; luego no sólo D es un divisor comun de $f(x)$ y $f'(x)$, sino que es el máximo.

275. *Si una ecuacion* f(x)=0 *no tiene raíces iguales, el primer miembro y su derivada no tienen factores comunes en* x.

En efecto, si la ecuacion propuesta no tiene raíces iguales, los exponentes $n, p, q, \ldots$ serán iguales á la unidad, y el divisor comun D se reduce tambien á la unidad, y por tanto $f(x)$ y $f'(x)$ son primos entre sí.

Recíprocamente, si $f(x)$ y $f'(x)$ tienen un máximo comun divisor en x, la ecuacion $f(x)=0$ tendrá raíces iguales; y si dichos polinómios son primos entre sí ó tienen un factor comun numérico, la ecuacion propuesta no tendrá raíces iguales.

276. De lo dicho anteriormente se deduce, que para ver si una ecuacion $f(x)=0$ tiene raíces iguales, se busca el *m. c. d.* de $f(x)$ y

su derivada $f'(x)$. Si estos dos polinómios son primos entre sí ó tienen un *m. c. d.* numérico, la ecuacion propuesta no tiene raíces iguales. Si tienen un *m. c. d.* de primer grado, la ecuacion propuesta tendrá dos raíces iguales. Si el *m. c. d.* es de segundo grado, igualándole á cero dará orígen á una ecuacion que tendrá dos raíces iguales á a, ó dos raíces diferentes a y b; en el primer caso, la ecuacion propuesta tendrá tres raíces iguales á a: en el segundo, tendrá dos raíces iguales á a, y otras dos iguales á b.

Cuando el *m. c. d.* es un polinómio D de un grado superior al segundo, se igualará á cero y obtendremos una ecuacion $D=0$, cuyas raíces se hallarán en la propuesta repetidas una vez más de las que están en esta. Así, las raíces simples de esta ecuacion, serán dobles en la propuesta; en general, las raíces que se hallen repetidas n veces en $D=0$, se hallarán en la propuesta $n+1$.

Modo de reducir una ecuacion que tiene raíces iguales, á otras cuyas raíces sean diferentes.

277. *Para reducir una ecuacion* $f(x)=0$ *que tiene raíces iguales, á otras cuyas raíces sean distintas ó desiguales, se busca el* m. c. d. *del primer miembro* $f(x)$ *y su derivada* $f'(x)$; *despues el* m. c. d. *de* D *y su derivada* D', *que llamaremos* D_1, *y así continuaremos hasta llegar á un polinómio primo con su derivada. En seguida se divide* $f(x)$ *por el primer* m. c. d. D; *éste por el segundo* D_1, *y así sucesivamente. Se divide, por último, cada uno de estos cocientes por el que le sigue, y los nuevos cocientes, igualados á cero, serán las ecuaciones pedidas. La primera dará las raíces simples, la segunda las dobles, la tercera las triples, y en general la enésima las del órden* n.

Sea la ecuacion $f(x)=0$, que tiene raíces múltiples de diferentes órdenes, por ejemplo, raíces simples, dobles, triples, cuádruples y quíntuples. Representemos por X_1 el producto de los factores binómios correspondiente á las raíces simples; por X_2 el de los factores binómios que corresponden á las raíces dobles; por X_3 el de las triples, etc.; de modo, que si la ecuacion es

$$f(x)=$$
$$(x-4)(x+3)(x-1)^2(x-2)^2(x+1)^3(x+2)^4(x-3)^4(x+4)^4(x+8)^5,$$

se tendrá

$$X_1=(x-4)(x+3),\ X_2=(x-1)(x-2),\ X_3=x+1,$$
$$X_4=(x+2)(x-3)(x+4),\ \text{y}\ \ X_5=x+8.$$

Esto supuesto, la ecuacion $f(x)=0$ se podrá poner bajo la forma

$$f(x)=X_1X_2^2\,X_3^3\,X_4^4\,X_5^5\,,$$

y la cuestion queda reducida á determinar los diferentes polinómios X_1, X_2, X_3,... que igualados á cero, darán las ecuaciones cuyas raíces serán todas las diferentes de la propuesta, las cuales se hallarán repetidas en ésta tantas veces como indique el índice del polinómio á que corresponde; así, toda raíz de la ecuacion $X_4=0$, se hallará repetida en la propuesta *cuatro* veces.

Esto supuesto, si buscamos el *m. c. d.* entre $f(x)$ y su derivada $f'(x)$, hallaremos (274)

$$D=X_2X_3^2X_4^3X_5^4.$$

De la misma manera, el *m. c. d.* del polinómio D y su derivada, será

$$D_1=X_3X_4^2X_5^3.$$

El del polinómio D_1 y su derivada, será, segun el mismo principio,

$$D_2=X_4X_5^2.$$

Y finalmente, el *m. c. d.* del polinómio D_2 y su derivada, será

$$D_3=X_5.$$

Dividiendo ahora cada una de estas igualdades por la siguiente, y despues cada cociente por el que le siga, se tendrá

$$\begin{array}{l||l}
\dfrac{f(x)}{D}=Q=X_1X_2X_3X_4X_5 & \dfrac{Q}{Q_1}=X_1 \\
\dfrac{D}{D_1}=Q_1=X_2X_3X_4X_5 & \dfrac{Q_1}{Q_2}=X_2 \\
\dfrac{D_1}{D_2}=Q_2=X_3X_4X_5 & \dfrac{Q_2}{Q_3}=X_3 \\
\dfrac{D_2}{D_3}=Q_3=X_4X_5 & \dfrac{Q_3}{D_3}=X_4 \\
D_3=X_5 & D_3=X_5.
\end{array}$$

Donde vemos que, como la regla anterior lo indica, los polinómios X_1, X_2, X_3,... se obtienen por una série de máximos comunes divisores, y por dos séries de divisiones.

Una vez hallados estos polinómios, la resolucion de la ecuacion $f(x)=0$ queda reducida á la de las ecuaciones parciales

$$X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ X_4=0,\ X_5=0.$$

que ya no tienen raíces iguales. La primera, da las raíces simples de la ecuacion propuesta; la segunda, las raíces dobles, y así sucesivamente.

Ejemplo. Sea la ecuacion de octavo grado

$$f(x)=x^8-x^7-8x^6+6x^5+21x^4-9x^3-22x^2+4x+8=0.$$

Buscando el *m. c. d.* de $f(x)$ y su derivada $f'(x)$, se hallará

$$D=x^4-x^3-3x^2+x+2.$$

Buscando ahora el de D y su derivada D′, hallaremos

$$D_1=x+1.$$

Siendo este polinómio primo con su derivada, pasaremos á dividir cada igualdad por la siguiente, y luégo cada uno de los cocientes que se obtenga por el que le siga, y tendremos

$$\frac{f(x)}{D}=Q=x^4-5x^2+4 \qquad\qquad \frac{Q}{Q_1}=X_1=x+2$$

$$\frac{D}{D_1}=Q_1=x^3-2x^2-x+2 \qquad\qquad \frac{Q_1}{D_1}=X_2=x^2-3x+2$$

$$D_1=X_3=x+1 \qquad\qquad D_1=X_3=x+1.$$

Luego la resolucion de la ecuacion propuesta $f(x)=0$, se reducirá á la de las tres ecuaciones parciales

$$X_1=x+2=0,\quad X_2=x^2-3x+2=0,\quad X_3=x+1=0.$$

La primera, da la raíz simple $x=-2$; la segunda, dos raices dobles 1 y 2; la tercera, la raíz triple -1; luego la ecuacion propuesta tendrá la raíz -2, dos raíces iguales á 1, otras dos iguales á 2, y tres iguales á -1.

278. *Si una ecuacion de coeficientes conmensurables tiene una sola raíz múltiple, esta raíz es conmensurable; si tiene varias raíces múltiples, cuyos grados de multiplicidad son todos distintos, estas raíces son conmensurables; por último, si hay varias raíces múltiples y sólo una del grado* n, *esta será conmensurable.*

En efecto, si la ecuacion de coeficientes conmensurables sólo tiene una raíz múltiple, y el grado de multiplicidad es n, la ecuacion $X_n=0$ que la contiene será de primer grado, y de coeficientes conmensurables; luego esta raíz será conmensurable. Si la ecuacion tiene varias raíces múltiples, pero cuyos grados de multiplicidad son todos distintos, estas raíces serán todas conmensurables, por depender de ecuaciones de primer grado y de coeficientes conmensurables tambien. Lo mismo sucede si sólo una raíz es de grado n de multiplicidad.

279. De este principio se deduce, que *las ecuaciones de segundo, tercero y quinto grado que no tienen raíces conmensurables, no pueden tener raíces iguales.*

En efecto, si la ecuacion de segundo grado tuviera sus dos raíces iguales, estas serian conmensurables, lo que es contra la hipótesis. Si la ecuacion de tercer grado tuviera raíces múltiples, ó fueran las tres iguales, ó dos iguales y una desigual, en ambos casos las raíces serian conmensurables. La ecuacion de quinto grado, si tuviera raíces múltiples, serian las cinco iguales, una simple y cuatro iguales, dos simples y tres iguales, tres simples y dos iguales, dos dobles y una sencilla, ó por último, una doble y otra triple; pero en todos estos casos tendria por lo ménos una raíz conmensurable, lo cual es contra la hipótesis.

La ecuacion de cuarto grado, que no tiene raíces conmensurables, puede tener dos raíces dobles; pero en ese caso su primer miembro será un cuadrado perfecto, de modo que, en vez de aplicarle la teoría de las raíces iguales, se verá si dicho primer miembro es un cuadrado perfecto: si lo es, extrayendo la raíz cuadrada é igualándola á cero, dará dos valores para x; y repitiendo dos veces cada uno, obtendremos las cuatro raíces de la ecuacion propuesta.

Propongamos como ejercicios los siguientes:

PROBLEMAS. 1.° Hallar las condiciones necesarias y suficientes que deben verificarse entre los coeficientes indeterminados de una ecuacion $f(x)=0$, para que todas sus raíces sean iguales.

2.° Hallar las relaciones que deben existir entre los coeficientes de una ecuacion, para que tenga n raíces iguales.

EJEMPLO. Hallar las condiciones que deben verificarse entre los coeficientes de la ecuacion $x^3+px^2+qx+r=0$, para que tenga dos raíces iguales.

LECCION XXX.

Ecuaciones recíprocas y negativamente recíprocas.—Modo de reducir una ecuacion recíproca ó negativamente recíproca á otra de un grado inferior.

Ecuaciones recíprocas y negativamente recíprocas.

280. Se llaman *ecuaciones recíprocas* ó *negativamente recíprocas*, aquellas que no cambian reemplazando la incógnita x por $\frac{1}{x}$ ó por $-\frac{1}{x}$.

De esta definicion se deduce, que una ecuacion cuyas raíces sean todas iguales á la unidad positiva ó negativa, será *recíproca*; porque no cambiará reemplazando x por $\frac{1}{x}$. Toda ecuacion de grado par cuyas raíces sean iguales á la unidad, afectada alternativamente del signo $+$ y $-$, será *negativamente recíproca*; porque en ella se verificará la condicion de no cambiar cuando se sustituya x por $-\frac{1}{x}$.

Si todas las raíces de una ecuacion no son iguales á la unidad, será necesario, para que sea recíproca, que si hay una raíz α distinta de la unidad, haya otra recíproca $\frac{1}{\alpha}$, que se obtiene dividiendo la unidad por α; el número de raíces iguales á la unidad puede ser en estas ecuaciones par ó impar.

Si una ecuacion tiene raíces distintas de la unidad, será necesario, para que sea negativamente recíproca, que si hay una raíz α, haya otra $-\frac{1}{\alpha}$, que se obtiene dividiendo -1 por α; el número de raíces que esta ecuacion puede tener iguales á la unidad será par, la mitad afectadas del signo $+$, y la otra mitad del signo $-$. Tanto en unas como en otras ecuaciones, conviene, ántes de tratar de reducir-las á otras de grado inferior por el método que más adelante expondremos, suprimir las raíces iguales á ± 1, dividiendo por los factores binómios correspondientes á estas raíces.

Para mayor claridad nos ocuparemos primero de las ecuaciones recíprocas, y despues de las negativamente recíprocas.

281. Ecuaciones recíprocas. *Una ecuacion de grado par es recíproca, cuando los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales y de un mismo signo, ó iguales y de signos contrarios, con tal que en este segundo caso falte el término medio.*

Sea en primer lugar la ecuacion de grado par

$$P_0x^{2n}\pm P_1x^{2n-1}\pm P_2x^{2n-2}\pm\ldots\pm P_nx^n\pm\ldots\pm P_2x^2\pm P_1x+P_0=0,$$

cuyos términos, equidistantes de los extremos, tienen coeficientes iguales y de un mismo signo.

Si cambiamos x en $\frac{1}{x}$, hallaremos, despues de quitados los denominadores, la misma ecuacion propuesta; luego ésta será recíproca segun la definicion.

Del mismo modo se verá que es recíproca toda ecuacion de grado par, cuyos términos equidistantes de los extremos tienen coeficientes iguales y de signos contrarios, y que además falta el término medio.

282. *Toda ecuacion recíproca de grado par tiene los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos iguales y de un mismo signo, ó iguales y de signos contrarios, faltando en este segundo caso el término medio.*

En efecto, sea una ecuacion recíproca cualquiera de grado par

$$P_0x^{2n}+P_1x^{2n-1}+P_2x^{2n-2}+\ldots+P_nx^n+\ldots$$
$$+P_{2n-2}x^2+P_{2n-1}x+P_{2n}=0 \qquad [1].$$

En esta ecuacion el número total de términos es evidentemente $2n+1$, y el término medio que equidista de los extremos, es P_nx^n.

Sustituyamos x por $\frac{1}{x}$, y hallaremos

$$\frac{P_0}{x^{2n}}+\frac{P_1}{x^{2n-1}}+\frac{P_2}{x^{2n-2}}+\ldots+\frac{P_n}{x^n}+\ldots+\frac{P_{2n-2}}{x^2}+\frac{P_{2n-1}}{x}+P_{2n}=0;$$

multiplicando ahora por x^{2n}, dividiendo despues por P_{2n}, y escribiendo los términos en un órden inverso, se tendrá

$$x^{2n}+\frac{P_{2n-1}}{P_{2n}}x^{2n-1}+\frac{P_{2n-2}}{P_{2n}}x^{2n-2}+\ldots+\frac{P_n}{P_{2n}}x^n+\ldots$$

$$+\frac{P_2}{P_{2n}}x^2+\frac{P_1}{P_{2n}}x+\frac{P_0}{P_{2n}}=0 \qquad [2].$$

Ahora bien, si la ecuacion [1] es recíproca, la ecuacion [2], que se obtiene reemplazando x por $\frac{1}{x}$, debe ser idéntica á la propuesta, por tanto se deberán verificar las ecuaciones de condicion

$$1=P_0,\ \frac{P_{2n-1}}{P_{2n}}=P_1,\ \frac{P_{2n-2}}{P_{2n}}=P_2,\ldots\ \frac{P^n}{P_{2n}}=P_n,\ldots$$

$$\frac{P_2}{P_{2n}}=P_{2n-2},\ \frac{P_1}{P_{2n}}=P_{2n-1},\ \frac{P_0}{P_{2n}}=P_{2n}.$$

De la primera y última relacion, se deduce $P_{2n}=\pm1$; y sustituyendo sucesivamente cada una de estos valores de P_{2n} en las demás relaciones, hallaremos para $P_{2n}=1$,

$$P_0=1,\ P_1=P_{2n-1},\ P_2=P_{2n-2},\ldots\ P_n=P_n;$$

y para $P_{2n}=-1$,

$$P_0=1,\ P_1=-P_{2n-1},\ P_2=-P_{2n-2},\ldots\ P_n=-P_n.$$

Todas las igualdades de la primera línea pueden siempre verificarse: las de la segunda tambien pueden verificarse, con la sola condicion que exige la última $P_n=-P_n$, de ser $P_n=0$; y todas ellas vienen á justificar, que si una ecuacion de grado par es recíproca, los términos equidistantes de los extremos tienen coeficientes iguales y de un mismo signo, ó iguales y de signos contrarios, en cuyo último caso debe faltar el término medio.

283. Del mismo modo se demostrará, que *toda ecuacion de grado impar cuyos términos equidistantes de los extremos tienen los coeficientes iguales y de un mismo signo, ó iguales y de signos contrarios, es recíproca; y al contrario, que toda ecuacion recíproca de grado impar*

$$Ax^{2n+1}+Bx^{2n}+Cx^{2n-1}+\ldots+Tx+U=0,$$

tiene los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos iguales y de un mismo signo, ó iguales y de signos contrarios.

284. ECUACIONES NEGATIVAMENTE RECÍPROCAS. *Para que una ecuacion de grado par* 2n *sea negativamente recíproca, es necesario que los coeficientes de las potencias pares de* x *equidistantes de los extremos sean iguales y de un mismo signo, y los de las potencias impares*

sean iguales y de signos contrarios, debiendo faltar el término medio en el caso de ser impar el número n; ó bien, *sean iguales y de signos contrarios los coeficientes primeros, é iguales y de un mismo signo los segundos, debiendo faltar en este caso el término medio, cuando* n *sea un número par.*

Así, las ecuaciones

$$x^4+3x^3\pm 5x^2-3x+1=0 \text{ y } x^6+3x^5-5x^4-5x^2-3x+1=0,$$

son negativamente recíprocas; porque tienen iguales y de un mismo signo los coeficientes de las potencias pares equidistantes de los extremos, é iguales y de signos contrarios los de las potencias impares, y además falta el término medio en la segunda, por ser impar la mitad de su grado.

De la misma manera son negativamente recíprocas las ecuaciones

$$x^4+3x^3+3x-1=0 \text{ y } x^6+3x^5-5x^4\pm x^3+5x^2+3x-1=0,$$

que tienen iguales y de signos contrarios los coeficientes de las potencias pares equidistantes de los extremos, é iguales y de un mismo signo los de las potencias impares, y además falta el término medio de la primera, por ser par la mitad de su grado.

Para justificar esta regla, sustituiremos en la ecuacion [1] x por $\frac{1}{x}$, y se tendrá

$$\frac{P_0}{x^{2n}}-\frac{P_1}{x^{2n-1}}+\frac{P_2}{x^{2n-2}}-\ldots\pm\frac{P_n}{x^n}\mp\ldots+\frac{P_{2n-2}}{x^2}-\frac{P_{2n-1}}{x}+P_{2n}=0.$$

El término medio llevará el signo $+$ ó el signo $-$, segun que la mitad n del grado de la ecuacion sea par ó impar.

Quitando denominadores, haciendo la inversion de términos y dividiendo por P_{2n}, se hallará

$$x^{2n}-\frac{P_{2n-1}}{P_{2n}}x^{2n-1}+\frac{P_{2n-2}}{P_{2n}}x^{2n-2}-\ldots\pm\frac{P_n}{P_{2n}}x^n\mp\ldots$$
$$+\frac{P_2}{P_{2n}}x^2-\frac{P_1}{P_{2n}}x+\frac{P_0}{P_{2n}}=0 \qquad [3].$$

Ahora bien, si la ecuacion [1] ha de ser negativamente recíproca, la ecuacion [3], que se obtiene sustituyendo x por $\frac{1}{x}$, debe ser idéntica á la propuesta; y por tanto, se deberán verificar las ecuaciones de condicion

$$1=P_0,\ -\frac{P_{2n-1}}{P_{2n}}=P_1,\ \frac{P_{2n-2}}{P_n}=P_2,\ldots\pm\frac{P_n}{P_{2n}}=P_n,\ldots$$

$$\frac{P_2}{P_{2n}}=P_{2n-2},\ -\frac{P_1}{P_{2n}}=P_{2n-1},\ \frac{P_0}{P_{2n}}=P_{2n}.$$

De la primera y última relacion se deduce

$$P_{2n}=\pm1;$$

y sustituyendo sucesivamente cada uno de estos valores de P_{2n} en las demás relaciones, hallaremos para $P_{2n}=1$,

$$P_0=1,\ P_1=-P_{2n-1},\ P_2=P_{2n-2},\ P_3=-P_{2n-3},\ldots P_n=\pm P_n;$$

y para $P_{2n}=-1$,

$$P_0=1,\ P_1=P_{2n-1},\ P_2=-P_{2n-2},\ P_3=P_{2n-3},\ldots P_n=\mp P_n;$$

Todas las condiciones de la primera línea pueden verificarse siempre; á excepcion del caso en que n sea impar, que exige para que se verifique la última condicion $P_n=-P_n$, que sea $P_n=0$. Del mismo modo se verificarán siempre las condiciones de la segunda línea, á excepcion del caso en que n sea par, que exige para que la última $P_n=\mp P_n$ sea satisfecha, que se tenga $P_n=0$, cuyas condiciones vienen á justificar la regla dada.

285. Por un procedimiento análogo se probaria, que *las ecuaciones de grado impar de coeficientes reales, no pueden ser negativamente recíprocas.*

Modo de reducir una ecuacion recíproca ó negativamente recíproca, á otra de un grado inferior.

286. Antes de pasar á reducir una ecuacion recíproca ó negativamente recíproca á otra de grado inferior, por el método general de que en breve nos ocuparemos (287), conviene hacer las siguientes observaciones:

1.ª *Toda ecuacion recíproca de grado impar, tiene por lo ménos una raíz igual á* $+1$ ó -1.

En efecto, siendo la ecuacion de grado impar y recíproca, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos serán iguales y de un mismo signo, ó iguales y de signos contrarios. En el primer caso, quedará satisfecha haciendo $x=-1$; porque dos términos cualesquiera equidistantes de los extremos, serán uno de grado par y otro de grado impar; de modo, que al sustituir x por -1, el uno se reducirá á sus coeficientes, y el otro al suyo con signo cambiado; y como ambos son iguales en valor numérico, se destruirán, y el primer miembro de la ecuacion quedará reducido á cero. En el segundo caso, el valor $x=1$ verifica evidentemente á la ecuacion; luego toda ecuacion recíproca de grado impar, tiene por lo ménos una raíz igual á $+1$ ó -1, segun queriamos demostrar.

2.ª *Toda ecuacion recíproca de grado par, que tiene iguales y de signos contrarios los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos, y que carece, como ya se sabe, del término medio, queda satisfecha por lo ménos una vez por el valor* $x=+1$, *y otra por* $x=-1$.

En efecto, haciendo en la ecuacion $x=1$, el primer miembro se reducirá á la suma algebráica de sus coeficientes; y como estos son iguales de dos en dos y de signos contrarios, dicho primer miembro será cero, y la ecuacion quedará satisfecha por $x=1$. Si hacemos $x=-1$, los coeficientes de las potencias impares cambiarán de signo; y como éstas se hallan equidistantes de los extremos, permanecerán en la suma, siendo iguales y de signos contrarios: los de las potencias pares tambien lo son; luego su suma algebráica será cero, y la ecuacion quedará tambien satisfecha por $x=-1$. Por consiguiente, la ecuacion propuesta tiene por lo ménos una raíz igual á $+1$, y otra igual á -1.

3.ª *Toda ecuacion recíproca que no tiene raíces iguales á la unidad positiva ó negativa, tiene que ser necesariamente de grado par, y los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos serán iguales y de un mismo signo.*

En efecto, de grado impar no puede ser; porque tendria por lo ménos una raíz igual á $+1$ ó -1, segun la observacion 1.ª; luego tiene que ser de grado par. Además, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos serán iguales y de un mismo signo; porque si fuesen iguales y de signos contrarios, careceria del término medio; y segun la 2.ª observacion, tendria por lo ménos una raíz igual á $+1$, y otra igual á -1, los que es contra el supuesto.

Consecuencia. *Si se divide el primer miembro de una ecuacion recíproca por el producto de los factores binómios, correspondientes á todas las raíces iguales á $+1$ ó -1 que dicha ecuacion contiene, la que resulte de igualar á cero el cociente será recíproca tambien, de grado par, y los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos serán iguales y de un mismo signo.*

Que ha de ser recíproca, es evidente; porque si la propuesta tiene una raíz cualquiera α distinta de la unidad, tiene necesariamente otra $\frac{1}{\alpha}$; y como estas raíces no se han suprimido, deben hallarse en la ecuacion cociente; luego es recíproca. Debe ser de grado par; porque si fuese de grado impar, tendria por lo ménos una raíz igual á $+1$ ó -1, lo cual no puede ser. Además, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos serán iguales y de un mismo signo; porque si fueran de signos contrarios, tendria por lo ménos una raíz igual á $+1$ y otra igual á -1; lo que tampoco es posible, segun la hipótesis.

287. Hechas las anteriores observaciones, pasemos á reducir una ecuacion recíproca á otra de un grado inferior, y sea en primer lugar una que no tenga raíces iguales á $+1$ ni á -1, la cual, como acabamos de ver, será de grado par, y los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos serán iguales y de un mismo signo; de modo, que podremos representarla de un modo general, por

$$x^{2n}+P_1x^{2n-1}+P_2x^{2n-2}+\ldots+P_nx^n+\ldots+P_2x^2+P_1x+1=0 \quad [1].$$

Pudiéndose formar con las $2n$ raíces de esta ecuacion, n grupos que cada uno contenga dos raíces recíprocas a y $\frac{1}{a}$, b y $\frac{1}{b}$, c y $\frac{1}{c}$, ecétera, cuyo producto es igual á la unidad; si hallamos una trasformada en y, cuyas raíces estén ligadas con las de la propuesta por la relacion $x+\frac{1}{x}=y$, esta trasformada será evidentemente del grado n, y cada una de sus raíces, sustituida en la relacion anterior, dará dos valores para x, que se obtendrán por la ecuacion

$$x^2-yx+1=0,$$

ó sea por la fórmula que de esta se deduce,

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}.$$

Estos valores de x serán raíces de la ecuacion propuesta, y por tanto su resolucion dependerá de esta trasformada en y, que como ya hemos dicho es del grado n, igual á la mitad del grado de la ecuacion dada.

Para hallar la trasformada de la ecuacion [1], cuyas raíces están ligadas por la relacion $y=x+\frac{1}{x}$, no hay más que eliminar la x entre esta relacion y la ecuacion propuesta; y aunque podria hallarse la ecuacion final por el método del *m. c. d.*, la obtendremos más fácilmente por otro medio especial.

Para ello, dividamos la ecuacion [1] por x^n, y agrupando los términos equidistantes de los extremos, hallaremos

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+P_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+P_2\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\ldots+P_n=0 \quad [2].$$

Si ahora observamos que evidentemente se tiene

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}\right)+\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right),$$

de donde se deduce

$$x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)y-\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right),$$

se hallará, haciendo sucesivamente $m=-1, 0, 1, 2, \ldots n$,

$$x^0+\frac{1}{x^0}=2,\quad x+\frac{1}{x}=y,\quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y,\quad x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2,$$

. . . .

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)y-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right).$$

Y sustituyendo los valores de estos binómios en la ecuacion anterior, hallaremos la ecuacion pedida en y, que como evidentemente se ve, es del grado n, igual á la mitad del grado de la propuesta.

De lo dicho anteriormente se deduce, que:

288. *Para reducir una ecuacion recíproca cualquiera á otra de grado inferior, se ve primero si tiene las raíces* $+1$ *y* -1, *y si son múltiples, se halla el grado de multiplicidad de cada una* (272, CONS. 1.ª); *despues se divide el primer miembro de la ecuacion por el producto de los factores binómios correspondientes á todas las raíces iguales* $+1$ *y* -1, *é igualando á cero el cociente, se hallará una ecuacion que ya no tendrá estas raíces, y por tanto será de grado par* 2n, *y se podrá reducir, segun el caso anterior, á otra de grado mitad* n.

Sea, por ejemplo, la ecuacion recíproca

$$x^9+4x^8-x^7-9x^6-5x^5+5x^4+9x^3+x^2-4x-1=0.$$

Esta ecuacion tiene la raíz $+1$ repetida *tres* veces, porque $+1$ anula al primer miembro y á sus dos primeras derivadas; y la raíz -1 se halla repetida *dos* veces, por anular al primer miembro de la ecuacion y á su derivada; de modo, que dividiendo por el producto

$$(x-1)^3(x+1)^2=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1,$$

se hallará el cociente, que igualado á cero da la ecuacion recíproca

$$x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0.$$

Aplicando el método general (287), hallaremos, dividiendo por x^2 y agrupando los términos equidistantes de los extremos,

$$x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0.$$

Haciendo ahora $x+\frac{1}{x}=y$, se tendrá $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$; cuyos valores, sustituidos en la ecuacion anterior, darán

$$y^2+5y+4=0, \quad \text{de donde} \quad y=\begin{cases}-1\\-4\end{cases}$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2},$$

hallaremos

para $y=-1$, $\qquad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$;

para $y=-4$, $\qquad x=-2\pm\sqrt{3}.$

Sea, por segundo ejemplo, la ecuacion recíproca de grado par

$$x^6-\frac{20}{3}x^5+\frac{71}{4}x^4-\frac{145}{6}x^3+\frac{71}{4}x^2-\frac{20}{3}x+1=0.$$

En esta ecuacion se halla la raíz $+1$ repetida *dos* veces; de modo, que dividiendo por $(x-1)^2=x^2-2x+1$, se tendrá la nueva ecuacion recíproca

$$x^4-\frac{14}{3}x^3+\frac{89}{12}x^2-\frac{14}{3}x+1=0.$$

Dividiendo por x^2 y agrupando los términos equidistantes de los extremos hallaremos

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{14}{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{89}{12}=0.$$

Haciendo ahora $y=x+\frac{1}{x}$, de donde $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$, y sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, hallaremos la trasformada en y

$$12y^2-56y+65=0, \text{ de donde } y=\begin{cases}\frac{5}{2}\\ \frac{13}{6}\end{cases}$$

y segun la fórmula $x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$, tendremos

$$\text{para } y=\tfrac{5}{2}, \qquad x=\begin{cases}2\\ \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\text{para } y=\tfrac{13}{6}, \qquad x=\begin{cases}\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3}\end{cases}$$

289. En la reduccion de las ecuaciones negativamente recíprocas, debemos considerar cuatro casos: 1.° Que los coeficientes de las potencias pares equidistantes de los extremos sean iguales y de un mismo signo, y los de las potencias impares iguales y de signos contrarios, siendo par la mitad del grado de la ecuacion; 2.° que sean iguales y de signos contrarios los coeficientes de las potencias pares equidistantes de los extremos, é iguales y de un mismo signo los de las potencias pares, siendo impar la mitad del grado de la ecuacion; 3.° que siendo par la mitad del grado de la ecuacion, los coeficientes de las potencias pares equidistantes de los extremos sean iguales y de signos contrarios, é iguales y de un mismo signo los de las potencias impares; y 4.° que siendo impar la mitad del grado de la ecuacion, los coeficientes de las potencias pares sean respectivamente iguales y de un mismo signo, é iguales y de signos contrarios los de las potencia impares. En estos dos últimos casos debe faltar el término medio.

Los dos primeros casos se resuelven como las ecuaciones recíprocas, dividiendo por una potencia de x, cuyo exponente sea la mitad del grado de la ecuacion, agrupando los términos equidistantes de los extremos; y haciendo en seguida

$$x-\frac{1}{x}=y,$$

se elimina la x entre esta relacion y la ecuacion anterior, calculando los binómios que en aquella entran por la fórmula general

$$x^{n+1}\mp\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n\pm\frac{1}{x^n}\right)y+\left(x^{n-1}\mp\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

De este modo se halla una ecuacion en y, cuyas raíces, sustituidas en la ecuacion $x^2-yx-1=0$, ó en la fórmula que de ella se deduce,

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2},$$

darán para cada valor de y, dos valores para x, que serán raíces negativamente recíprocas de la propuesta.

Los casos 3.° y 4.° se resuelven eliminando la x entre la ecuacion final propuesta y el trinómio x^2-yx-1, por el método del *m. c. d.*; la ecuacion final en y que hallemos será de un grado mitad del que tiene la ecuacion dada, y sus raíces, sustituidas en la fórmula anterior, darán todos los pares de raíces negativamente recíprocas de la ecuacion propuesta.

El 3.° y 4.° caso tambien pueden reducirse á uno de los dos primeros observando que toda ecuacion que se halle en uno de estos casos contiene las raíces $+\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ por tanto su primer miembro será divisible por el binómio x^2+1 y el cociente igualado á ceros dará una ecuacion que se hallará en uno de los dos primeros casos.

LECCION XXXI.

Condiciones á que deben satisfacer los coeficientes indeterminados de una ecuacion, para que entre varias de sus raíces se verifiquen ciertas condiciones.—Método general para reducir una ecuacion á otra de menor grado, cuando existen relaciones entre varias de sus raíces.

Condiciones á que deben satisfacer los coeficientes indeterminados de una ecuacion, para que entre varias de sus raíces se verifiquen ciertas condiciones.

290. Cuando se quiere determinar los coeficientes de una ecuacion, de modo que tenga varias raíces que cumplan con ciertas condiciones, se forma con estas un sistema de ecuaciones que deben ser

satisfechas simultáneamente por unos mismos valores de las incógnitas; de manera, que eliminando entre estas ecuaciones ménos una, todas las incógnitas que contiene ménos una, y expresando que la ecuacion final y la restante tengan un divisor comun de un grado igual al número de combinaciones que se han de formar, hallaremos las condiciones pedidas.

291. *Sea, por ejemplo, hallar las condiciones á que deben satisfacer los coeficientes indeterminados de la ecuacion* f (x)=0, *para que tenga dos raíces iguales y de signos contrarios.*

Sean estas raíces a y b; la relacion que se debe verificar entre ellas es $b=-a$, y además, como son raíces de $f(x)=0$, se tendrá el sistema de ecuaciones que ha de quedar satisfecho por unos mismos valores de a y b,

$$b=-a, \quad f(a)=0 \quad y \quad f(b)=0.$$

Eliminando b entre la primera y segunda, se hallará el nuevo sistema

$$f(a)=0 \quad y \quad f(-a)=0,$$

que debe verificarse para un mismo valor de a; pero si estas ecuaciones tienen una raíz a comun, tambien tendrán evidentemente otra igual á $-a$; luego sus primeros miembros tendrán un factor comun de segundo grado, de modo que empleando el procedimiento para hallarlo, y continuando la operacion hasta llegar á un resto de primer grado de la forma $Ma+N$, se hará que se reduzca á cero con independencia del valor a, lo cual dará las dos ecuaciones de condicion

$$M=0 \quad y \quad N=0,$$

que expresan las relaciones que deben verificarse entre los coeficientes indeterminados de $f(x)=0$, para que dos de sus raíces sean iguales y de signos contrarios.

Observacion. El sistema de dos ecuaciones $A=0$ y $B=0$, puede reemplazarse por el sistema

$$A+B=0 \quad y \quad A-B=0,$$

que se obtiene sumando y restando las dos ecuacionas dadas; porque evidentemente dichos sistemas tienen las mismas soluciones, y por tanto son equivalentes.

Ahora bien, si $A=f(a)=0$ y $B=f(-a)=0$, las ecuaciones $A+B=f(a)+f(-a)=0$ y $A-B=f(a)-f(-a)=0$, se reducen á las que resultan de igualar á cero la suma de los términos de grado par de la ecuacion $f(a)=0$, y la suma de los términos de grado impar de la misma; la segunda es evidentemente divisible por a, que corresponde al valor $a=0$; y como este valor no verifica á la primera $f(a)+f(-a)=0$, las raíces comunes de las ecuaciones $f(a)=0$ y $f(-a)=0$, se hallarán tambien en estas otras:

$$f(a)+f(-a)=0 \quad \text{y} \quad \frac{f(a)-f(-a)}{a}=0;$$

es decir, entre las ecuaciones que resultan de igualar á cero la suma de los términos de grado par de la ecuacion $f(a)=0$, y la diferencia de los de grado impar divididos por a; luego *para hallar las condiciones que deben verificarse entre los coeficientes indeterminados de una ecuacion* f(x)=0, *para que dos de sus raíces sean iguales y de signos contrarios, no hay más que expresar la condicion de que exista un* m. c. d. *entre la suma de los términos de grado par de la ecuacion dada, y la de los términos de grado impar dividida por* x.

292. *Sea, en segundo lugar, hallar las condiciones que deben verificarse entre los coeficientes indeterminados de una ecuacion* f(x)=0, *para que dos de sus raíces* a *y* b *satisfagan á la relacion* pa+qb=r, *siendo* p, q *y* r, *números conocidos.*

Puesto que a y b son raíces de la ecuacion $f(x)=0$, y además han de verificar á la relacion $pa+qb=r$ se tendrá el sistema de ecuaciones que se han de verificar simultáneamente

$$pa+qb=r, \quad f(a)=0 \quad \text{y} \quad f(b)=0.$$

Eliminando b entre la primera y segunda, hallaremos el nuevo sistema

$$f(a)=0 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{r-pa}{q}\right)=0;$$

luego las dos ecuaciones

$$f(x) \quad \text{y} \quad f\left(\frac{r-px}{q}\right)=0,$$

deben tener la raíz comun a, y por tanto sus primeros miembros tendrán un *m. c. d.* Esto supuesto, aplicaremos á $f(x)$ y $f\left(\frac{r-px}{q}\right)$ el procedimiento del *m. c. d.*, y se continuará la operacion hasta llegar á un resto independiente de x, que igualado á cero, dará la relacion pedida.

Si $f(x)=0$ debe tener n pares de raíces que verifique á la relacion dada $py+qz=r$, el *m. c. d.* de $f(x)$ y $f\left(\frac{r-px}{q}\right)$ deberá ser del *enésimo* grado; de modo, que cuando lleguemos á un resto del grado $n-1$, se establecerá la condicion de que sea cero con independencia de x, lo que dará n ecuaciones de condicion, igualando á cero sus n coeficientes (35).

293. *Sea, en tercer lugar, hallar las condiciones que deben verificarse entre los coeficientes indeterminados de una ecuacion* $f(x)=0$, *para que tres de sus raíces* a, b *y* c, *verifiquen á la relacion* $pa+qb+rc=s$, *siendo* p, q, r *y* s *números conocidos.*

El sistema de ecuaciones que deben verificarse á la vez, será

$$pa+qb+rc=s,\quad f(a)=0,\quad f(b)=0 \quad \text{y} \quad f(c)=0.$$

Eliminando b y c entre las dos últimas ecuaciones y la primera, se obtendrá una que no contendrá más que la incógnita a, tal como $F(a)=0$; esta ecuacion y la segunda $f(a)=0$, deben verificarse por un mismo valor de a; por lo tanto, $F(a)$ y $f(a)$ deben tener un *m. c. d.* D, cuyo grado será igual al número de combinaciones de tres raíces que satisfacen á la relacion dada; de modo, que si no hay más que un sistema que cumpla con esta condicion, D será de primer grado.

Esto supuesto, apliquemos á $F(x)$ y $f(x)$ el procedimiento del *m. c. d.*, y continuemos la operacion hasta llegar á un resto independiente de x, el cual, igualado á cero, dará la condicion pedida.

294. *Sea, por último, hallar las condiciones á que deben satisfacer los coeficientes indeterminados de una ecuacion* $f(x)=0$, *para que* n *de sus raíces estén en progresion por cociente.*

Sean $a, b, c, \ldots l$, las raíces de la ecuacion $f(x)=0$ que han de estar en progresion geométrica, las cuales se podrán representar por $a, aq, aq^2, \ldots aq^{n-1}$, llamando q á la razon de la progresion.

Si ahora trasformamos la ecuacion $f(x)=0$ en otra $f\left(\frac{y}{q}\right)=0$, cuyas raíces sean los productos de las de $f(x)=0$ por el número q, entre las de esta trasformada se hallarán $aq, aq^2, aq^3, \ldots aq^{n-1}, aq^n$, de las cuales $n-1$ son comunes á la propuesta y trasformada; por consiguiente, entre los polinómios $f(x)$ y $f\left(\frac{x}{q}\right)$, debe existir un *m. c. d.* del grado $n-1$; si hacemos las operaciones necesarias para hallarlo, y continuamos hasta llegar á un resto del grado $n-2$, haciendo que éste sea cero con independencia de x, para lo cual igualaremos á cero sus $n-1$ coeficientes, tendremos $n-1$ ecuaciones de condicion que deben verificarse entre los coeficientes indeterminados de la ecuacion y la razon q, para que dicha ecuacion tenga n raíces en progresion geométrica.

Si q no es un número conocido, entónces deberemos eliminarla entre las $n-1$ ecuaciones de condicion halladas anteriormente, para lo cual estableceremos la nueva condicion que los dos primero miembros de dos cualesquiera de ellas tengan un divisor comun de primer grado en q, y luégo que este divisor comun divida tambien á todas las demás ecuaciones.

Si quisiéramos que todas las raíces de la ecuacion del grado m $f(x)=0$, estuvieran en progresion geométrica, hariamos en el problema anterior $n=m$.

Método general para reducir una ecuacion á otra de menor grado, cuando existen relaciones entre varias de sus raices.

295. Cuando se conocen relaciones particulares entre varias raíces de una ecuacion, se puede hacer depender la resolucion de ésta de la de otra ú otras de grados inferiores. Las ecuaciones en que esto se verifica, se dice que son susceptibles de *reduccion*.

296. *Sea una ecuacion* f(x)=0, *en la cual se verifica que uno ó más pares de raíces cumplen con la condicion* pa+qb=r, *siendo* p, q *y* r *números conocidos*.

Segun hemos visto (292), debe haber entre $f(x)$ y $f\left(\frac{r-px}{q}\right)$ un máximo comun divisor D, que igualado á cero dará tantas raíces como unidades tenga su grado, las cuales, sustituidas en la relacion $b=\frac{r-pa}{q}$, darán á conocer los valores de otra raíz b; y cada par de raíces a y b, que por este medio hallemos, lo serán de la ecuacion $f(x)=0$, que podrá dividirse por el producto de los factores binómios correspondientes á estas raíces, quedando la ecuacion reducida á otra de un grado inferior.

Si la ecuacion $f(x)=0$ tiene una raíz a que satisface á la condicion $pa+qa=r$, ó se tiene $a=\dfrac{r}{p+q}$, esta raíz verificará tambien á la ecuacion $f\left(\dfrac{r-px}{q}\right)=0$; por tanto, deberá hallarse tambien en la ecuacion D=0.

Recíprocamente, toda raíz a de la ecuacion D=0, será una raíz de la propuesta, para la que habrá otra b, deducida de la relacion $b=\dfrac{r-pa}{q}$, ó que satisfará á la condicion $pa+qa=r$, ó $a=\dfrac{r}{p+q}$. En efecto, esta raíz a verifica á la ecuacion $f\left(\dfrac{r-px}{q}\right)=0$; por consiguiente, $\dfrac{r-pa}{q}$ será una raíz de la ecuacion dada $f(x)=0$; si $a=\dfrac{r}{p+q}$, se tendrá $f\left(\dfrac{r}{p+q}\right)=0$; pero haciendo en $f\left(\dfrac{r-pa}{q}\right)=0$, $a=\dfrac{r}{p+q}$, se obtiene $f\left(\dfrac{r-p\dfrac{r}{p+q}}{q}\right)=f\left(\dfrac{pr+qr-pr}{q(p+q)}\right)=f\left(\dfrac{r}{p+q}\right)=0$, que es lo que se queria demostrar. Cuando la ecuacion $f(x)=0$ tiene raíces iguales á $\dfrac{r}{p+q}$, conviene principiar por quitar estas raíces, dividiendo por la potencia del binómio $\left(x-\dfrac{r}{p+q}\right)$, cuyo exponente sea el grado de multiplicidad de esta raíz.

297. Si se tiene $p=q$, la relacion $pa+qb=r$ se convierte en $a+b=s$, haciendo, para abreviar, $\dfrac{r}{p}=s$; y la cuestion queda reducida á buscar el *m. c. d.* de los polinómios $f(x)$ y $f(s-x)$. Sea D este *m. c. d.*, que igualado á cero dará la ecuacion D=0.

Como las dos raíces a y b entran de la misma manera en la relacion $a+b=s$, la ecuacion D=0 no debe dar la una con preferencia á la otra; debe por consiguiente dar las dos. Además, las raíces de la propuesta que satisfagan á la condicion $a+a=s$, ó $a=\frac{1}{2}s$, tambien se hallarán contenidas en la ecuacion D=0.

Si todas las raíces pueden agruparse de dos en dos, de modo que la suma de las dos raíces de cada grupo sea igual á s, la ecuacion $f(s-x)=0$ será la misma que la propuesta $f(x)=0$, y no podrá entónces reducirse por este medio á otra de grado inferior. En este caso se podrán disminuir las raíces de $f(x)=0$ en $\frac{1}{2}s$; la suma de las raíces de cada grupo vendrá disminuida en s, de modo que esta suma será cero; luego $a-\frac{1}{2}s=-(b-\frac{1}{2}s)$, y por tanto las raíces de la trasformada serán de dos en dos iguales en valor numérico, pero de signos contrarios; por consiguiente, se podrá reducir á otra de un grado mitad.

Si la ecuacion $f(x)=0$ tiene raíces iguales á $\frac{1}{2}s$, la trasformada tendrá tantas raíces iguales á cero, como raíces iguales á $\frac{1}{2}s$ tiene la propuesta.

298. Cuando una raíz cualquiera a está ligada con otra b, por medio de la relacion $ab=p$, las ecuaciones $f(x)=0$ y $f\left(\frac{p}{x}\right)=0$ son idénticas, y no puede efectuarse la reduccion por el método general.

En este caso, se representa por y la suma de dos raíces correspondientes á un par, y el número de valores de y será la mitad del número de raíces; por consiguiente, estos valores dependerán de una ecuacion de un grado mitad que el de la propuesta.

Siendo p el producto de dos raíces de la propuesta, é y la suma de estas dos raíces, la ecuacion $f(x)=0$ deberá ser divisible por el trinómio de segundo grado x^2-yx+p. Efectuando la division y expresando que el resto de primer grado que se obtenga sea nulo independientemente de los valores de x, hallaremos dos ecuaciones de condicion $M=0$ y $N=0$, que deberán verificarse para unos mismos valores de y. Hallaremos por consiguiente el *m. c. d.* de M y N, y la ecuacion que resulte de igualarle á cero, será la que se pide.

299. Si las raíces de una ecuacion han de ser tales que se puedan agrupar de dos en dos, de modo que el producto de las que forman un grupo sea igual á p, esta ecuacion será evidentemente de grado par, de la forma

$$x^{2n}+P_1x^{2n-1}+P_2x^{2n-2}\ldots+P_nx^n\ldots+P_{2n-2}x^2+P_{2n-1}x+P_{2n}=0,$$

y deberán verificarse entre los coeficientes las relaciones

$$P_{2n}=p^n,\ P_{2n-1}=p^{n-1}P_1,\ P_{2n-2}=p^{n-2}P_2,\ \ldots\ P_{n+1}=pP_{n-1};$$

de modo, que la forma general de estas ecuaciones, será

$$x^{2n}+P_1x^{2n-1}+P_2x^{2n-2}\ldots+P_nx^n\ldots+p^{n-2}P_2x^2+p^{n-1}P_1x+p^n=0.$$

Si ahora dividimos todos los términos de esta ecuacion por x^n, y agrupamos los equidistantes de los extremos, se hallará

$$\left(x^n+\frac{p^n}{x^n}\right)+P_1\left(x^{n-1}+\frac{p^{n-1}}{x^{n-1}}\right)+P_2\left(x^{n-2}+\frac{p^{n-2}}{x^{n-2}}\right)+\ldots+P_n=0.$$

Como todos los binómios en x son de la forma $x^m+\frac{p^m}{x^m}$ si hacemos $x+\frac{p}{x}=y$, la incógnita y representará la suma de todos los pares de raíces cuyo producto es p; de modo, que eliminando x entre la ecuacion anterior y $x+\frac{p}{x}=y$, la ecuacion que resulte será la reducida que se busca.

Pero esta eliminacion se puede hacer muy fácilmente, calculando los binómios $x+\frac{p}{x}$, $x^2+\frac{p^2}{x^2}$, etc., por la fórmula general

$$x^{m+1}+\frac{p^{m+1}}{x^{m+1}}=\left(x^m+\frac{p^m}{x^m}\right)y-p\left(x^{m-1}+\frac{p^{m-1}}{x^{m-1}}\right).$$

Conocidos los valores de y, hallaremos los de x, por la fórmula

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4p}}{2},$$

deducida de la ecuacion $x^2-yx+p=0$.

Observacion. Las ecuaciones recíprocas no son sino un caso particular de este que acabamos de resolver.

TERCERA PARTE.

Resolucion de las ecuaciones numéricas, binómias, trinómias y trascendentes.

LECCION XXXII.

Determinacion de los límites de las raíces reales de una ecuacion numérica.

Determinacion de los límites de las raíces reales de una ecuacion numérica.

300. La resolucion de las ecuaciones numéricas la divideremos en tres partes: en la primera nos ocuparemos de la investigacion de de las raíces conmensurables tanto enteras como fraccionarias; en la segunda, de las raíces inconmensurables; y en la tercera, de las raíces imaginarias.

Como la resolucion numérica de una ecuacion se reduce á determinar, por medio de sustituciones, los valores de las incógnitas, conviene que el número de estas sustituciones sea el menor posible; por cuya razon debemos calcular de antemano dos números que comprendan á todas las raíces reales de una ecuacion, que se llaman *límites de las raíces*.

La investigacion de los límites de las raíces reales de una ecuacion es un problema indeterminado; pues una vez hallados dos números que comprendan todas las raíces, otros dos números que comprendan á los anteriores, lo serán tambien. Así, al hablar de límites de raíces, no se debe decir *el límite* a de las raíces, sino *un límite* a. De todos los límites que se hallen, conviene elegir aquellos que comprendan el menor número de números enteros.

En la investigacion de los límites de las raíces de una ecuacion, debemos distinguir dos casos, segun se trate de hallar los dos números que comprendan todas las raíces reales tanto positivas como negativas, en cuyo caso estos límites son en general de signos contrarios, ó bien se trate de hallar los límites de las raíces positivas y los de las negativas. Desde luégo se ve que el primer caso comprende al segundo, pues hallado un límite superior de las raíces positivas, y otro inferior de las negativas, estos dos límites comprenderán todas las raíces reales.

Pasemos, pues, á determinar un límite superior de las raíces positivas de una ecuacion. Muchas reglas se han dado para determinar este límite; pero las más principales son las siguientes:

301. 1.ª REGLA (del mayor coeficiente negativo). *Se obtiene un límite superior de las raíces de una ecuacion reducida á la forma ordinaria, agregando una unidad al valor absoluto del mayor coeficiente negativo.*

Para demostrar esta regla, observaremos que si el primer miembro $f(x)$ de una ecuacion $f(x)=0$, se reduce á una cantidad positiva por la sustitucion de un número L y por la de todos los números mayores, este número L será *un límite superior* de las raíces.

Esto supuesto, sea una ecuacion reducida á la forma ordinaria

$$f(x)=x^m \pm Ax^{m-1} \pm Bx^{m-2} \pm Cx^{m-3} \pm \ldots \pm U=0 \quad [1],$$

cuyo primer término es positivo, y los restantes pueden ser positivos ó negativos.

Sea N el valor absoluto del mayor coeficiente negativo. Si suponemos que todos los coeficientes son negativos é iguales en valor absoluto al mayor de ellos N, hallamos un valor de x que verifique la relacion

$$x^m = \text{ ó } > Nx^{m-1} + Nx^{m-2} + \ldots + Nx + N = N\frac{x^m-1}{x-1},$$

este valor reducirá evidentemente el primer miembro de la ecuacion [1] á una cantidad positiva. Ahora bien, esta relacion queda satisfecha haciendo $x = \text{ ó } > 1+N$; porque quitando denominadores, trasponiendo los términos y sacando x^m factor comun, se halla

$$x^m(x-1-N)+N = \text{ ó } > 0.$$

Luego *un límite superior* de las raíces de la ecuacion $f(x)=0$, es $1+N$; es decir, el mayor coeficiente negativo N tomado positivamente, aumentado de una unidad.

302. 2.ª REGLA (de la raíz del mayor coeficiente negativo). *Se obtiene un límite superior de las raíces, agregando una unidad á la raiz del valor absoluto del mayor coeficiente negativo, cuyo índice es la diferencia entre el grado de la ecuacion y el exponente del primer término negativo.*

Sea la ecuacion

$$f(x)=x^m+Ax^{m-1}+\ldots-Px^{m-n}\pm Qx^{m-n-1}\pm\ldots\pm U=0 \quad [2],$$

cuyo primer término negativo no sea el que sigue al término x^m, pues en tal caso esta segunda regla se reduce á la anterior.

Supongamos que el primer término negativo sea $-Px^{m-n}$, y que á partir de éste, pueden ser los demás indiferentemente positivos ó negativos.

Representemos como ántes por N el valor absoluto del mayor coeficiente negativo.

Admitamos tambien que los términos, á partir del primero negativo, sean todos negativos, y que lleven por coeficientes números iguales al mayor N; en cuyo caso, si hallamos el número que verifique la relacion

$$x^m = \text{ó} > Nx^{m-n}+Nx^{m-n-1}+\ldots+N \text{ ó } x^m = \text{ó} > \frac{N(x^{m-n+1}-1)}{x-1},$$

este número hará que el primer miembro de la ecuacion [2] sea una cantidad positiva, y por tanto un límite superior.

Para hallar este límite, quitemos denominadores en la relacion anterior, y suponiendo $x>1$, se tendrá

$$x^m(x-1) = \text{ó} > N(x^{m-n+1}-1) = x^m\times\frac{N}{x^{n-1}}-N.$$

Sacando x^m factor comun, se hallará

$$x^m\left(x-1-\frac{N}{x^{n-1}}\right)+N = \text{ó} > 0;$$

cuya relacion queda satisfecha, haciendo

$$x-1-\frac{N}{x^{n-1}} = \text{ó} > 0, \quad \text{ó} \quad x^{n-1}(x-1)-N = \text{ó} > 0;$$

si hallamos ahora el valor de x que verifique la relacion

$$(x-1)^{n-1}(x-1)-N = \text{ó} > 0, \quad \text{ó} \quad (x-1)^n-N = \text{ó} > 0,$$

este valor reducirá, con más razon, á una cantidad positiva el primer miembro de la ecuacion propuesta; pero esta última relacion se verifica haciendo $x = \text{ó} > 1+\sqrt[n]{N}$; luego un límite superior de las raíces de la ecuacion [2], será $1+\sqrt[n]{N}$, segun queriamos demostrar.

303. 3.ª REGLA (de los grupos). *Se obtiene un límite superior de las raíces, descomponiendo el primer miembro de la ecuacion en polinómios ordenados con relacion á* x, *que no tengan más que una variacion, y que el primer término de cada una sea positivo; se halla el número que hace que todos estos polinómios sean positivos, y se tendrá el límite superior buscado.*

Sea $f(x)=0$ la ecuacion, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... varios polinómios ordenados con relacion á x, que no tienen más que una variacion, y que sus primeros términos son todos positivos, y además que se tiene

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots=0.$$

Segun la regla de Descartes, cada uno de estos polinómios no puede anularse más que por un solo valor positivo. Para el valor $x=0$, el polinómio es negativo ó cero; luego hallando un valor de x que haga positivo á cualquiera de ellos, otro valor mayor tambien lo hará, y aquel número que haga positivos á todos, hará positivo tambien al primer miembro $f(x)$ de la ecuacion propuesta; y como todo número mayor que él tambien lo hace positivo, este número es su límite superior.

304. 4.ª REGLA (de Newton). *Se halla un límite superior de las raíces de una ecuacion* f(x)=0, *determinando un número que haga positivas á* f(x) *y á todas sus derivadas.*

En efecto, si h hace que sean positivas $f(x)$ y todas sus derivadas, cualquier número $h+k$ mayor que h, tambien hace que $f(x)$ lo sea; porque se tiene

$$f(h+k)=f(h)+f'(h)k+\tfrac{1}{2}f''(h)k^2+\ldots$$

y como $f(h)$, $f'(h)$, $f''(h)$, ... son por hipótesis positivas, $f(a+h)$ tambien lo será; luego h es un límite superior.

305. 5.ª REGLA (de Bret). Se *obtiene un límite superior de las raíces de una ecuacion, dividiendo cada coeficiente negativo tomado positivamente, por la suma de los coeficientes positivos que le preceden, y agregando una unidad á la mayor de las fracciones que resulten.*

Sea, para fijar las ideas, una ecuacion de grado determinado, tal como

$$Ax^5+Bx^4-Cx^3-Dx^2+Ex-F=0,$$

pues lo que de esta ecuacion digamos se podrá decir de otra cualquiera.

Se tiene evidentemente, para cualquier valor entero y positivo de n,

$$x^n-1=(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)(x-1);$$

ó bien, haciendo $x-1=y$, efectuando la multiplicacion y agregando una unidad á los dos miembros,

$$x^n=yx^{n-1}+yx^{n-2}+\ldots+yx+y+1.$$

Si ahora hacemos esta trasformacion en todos los términos positivos de la ecuacion propuesta, dejando tal como están los negativos, hallaremos que dicha ecuacion se podrá poner bajo la forma

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} Ayx^4+Ay & x^3+Ay & x^2+Ay & x+Ay+A \\ \quad +By & \quad +By & \quad +By & \quad +By+B \\ \quad -C & \quad -D & & \quad +Ey+E \\ & & & \quad -F \end{array}\right\}=0.$$

Dando á y un valor positivo cualquiera, los coeficientes de esta ecuacion que no tienen términos negativos, siempre conservarán un valor positivo; luego si igualamos á cero los coeficientes que contienen un término negativo y se resuelven las ecuaciones, el valor mayor de y que los verifique ú otro número cualquiera mayor que él, hará que el primer miembro de la ecuacion sea una cantidad positiva, y por tanto el valor correspondiente de $(x=y+1)$ será un límite superior. Así, en la ecuacion que consideramos se igualarán á cero los coeficientes de x^3, de x^2 y el término conocido, de modo que se tendrán las ecuaciones

$$Ay+By-C=0,\quad Ay+By-D=0,\quad Ay+By+Ey-F=0,$$

de las cuales se reducen los valores

$$y=\frac{C}{A+B},\quad y=\frac{D}{A+B},\quad y=\frac{F}{A+B+E}.$$

Agregando una unidad á la mayor de estas fracciones, se hallará el valor de $(x=y+1)$, que puesto en la ecuacion propuesta, reducirá su primer miembro á un número positivo; y como cualquier número mayor tambien lo hace positivo, dicha fraccion, aumentada en una unidad, será el límite.

306. *Hallar un límite inferior de las raíces positivas de una ecuacion* $f(x)=0$.

Si hacemos en la propuesta $x=\frac{1}{y}$, y hallamos por cualquiera de las reglas anteriores el límite superior L de las raíces de la trasformada, se tendrá $L>y$, de donde $\frac{1}{L}<\frac{1}{y}=x$; luego el límite pedido se halla dividiendo la unidad por el límite superior de las raíces de la trasformada, que se obtiene reemplazando en la propuesta x por $\frac{1}{y}$.

307. Si representamos por N el mayor coeficiente de signo contrario al del último término de la ecuacion $f(x)=0$, se tendrá

$$f(x)=x^m\ldots\pm Nx^n\ldots\mp U=0;$$

la trasformada en $\frac{1}{y}$, será

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y^m}\ldots\pm N\frac{1}{y^n}\ldots\mp U=0;$$

de donde se deduce

$$y^m\ldots-\frac{N}{U}y^{m-n}\ldots\mp\frac{1}{U}=0.$$

El mayor coeficiente de esta ecuacion es $\frac{N}{U}$; luego el límite superior, segun la primera regla, será

$$1+\frac{N}{U}=\frac{U+N}{U};$$

y por tanto, el límite inferior de las raíces positivas de la propuesta, será $\frac{U}{U+N}$. Así, *se tiene un límite inferior de las raíces positivas de una ecuacion, dividiendo el último término por la suma aritmética de éste y del mayor coeficiente de signo contrario.*

308. Los límites superior é inferior de las raíces negativas, se hallan trasformando la ecuacion dada en otra cuyas raíces sean iguales y de signos contrarios; se determinan los límites de las raíces positivas de esta trasformada, y estos límites, tomados con el signo —, serán los de las raíces negativas de la propuesta.

Sea, por ejemplo, hallar los límites de las raíces de la ecuacion

$$x^7+3x^6-5x^4-6x^3+8x^2-12x-20=0.$$

Se tiene, para uno de los límites superiores:

Por la regla 1.ª, $L=20+1=21$.

Por la regla 2.ª, $L=\sqrt[3]{20}+1=4$.

Por la regla 3.ª, $L=3$.

Por la regla 4.ª, $L=2$.

Por la regla 5.ª, $L=2\frac{2}{3}$.

Un límite inferior de las raíces positivas será $\frac{5}{7}$, segun la regla del número (307).

Cambiando ahora x en $-x$ se hallará la trasformada

$$x^7-3x^6+5x^4-6x^3-8x^2-12x+20=0.$$

Un límite superior de las raíces positivas de esta, es, segun la primera y segunda regla, $L=13$. Por la de los grupos y de Newton, se halla $L=3$. Por la de Bret, $L=4$.

Un límite inferior, es $L=\frac{20}{20+12}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$; luego dos límites de las raíces positivas, son 2 y $\frac{5}{7}$; y dos de las raíces negativas, son -3 y $-\frac{5}{8}$. Por consiguiente, dos límites de las raíces, serán 2 y -3.

LECCION XXXIII.

Método para la determinacion de las raíces enteras, y abreviaciones de que es susceptible.— Investigacion de las raíces fraccionarias.

Método para la determinacion de las raíces enteras, y abreviaciones de que es susceptible.

309. Como las raíces de una ecuacion numérica no se pueden calcular siempre por medio de una fórmula algebráica, en la cual estén consignadas las operaciones necesarias y suficientes que hay que ejecutar para obtener cada uno de los valores de la incógnita, sino que hay que determinarlos por medio de tanteos, sustituyendo números y viendo cuáles satisfacen á la ecuacion y cuáles no, conviene, para que el número de sustituciones sea el menor posible, hallar

caractéres á que debe satisfacer un número cualquiera para que sea ó no raíz de una ecuacion dada.

De estos caractéres, unos indican desde luégo los números que no pueden ser raíces y que por tanto no deben someterse á más pruebas, por lo cual se les llama *caractéres de exclusion*; y otros manifiestan por cálculos más sencillos que los de sustitucion, qué números son raíces de una ecuacion dada.

310. Caractéres de exclusion. *Un número entero cualquiera* a, *no puede ser raiz de la ecuacion* $F(x)=0$, *si disminuido algebráicamente en una unidad, no divide á* $F(1)$. *

En efecto, si a fuera raíz de la ecuacion $F(x)=0$, su primer miembro seria divisible por $x-a$; y llamando $\varphi(x)$ al cociente, que seria un polinómio de coeficientes enteros, se tendria la igualdad $F(x)=-(a-x)\varphi(x)$, que se convertiria, sustituyendo x por 1, en $F(x)=-(a-1)\varphi(1)$; y como $\varphi(1)$ es un número entero, la division de $F(1)$ por $a-1$ seria exacta, lo cual es contra el supuesto; luego a no puede ser raíz de la ecuacion dada.

Del mismo modo se demostraria, que *un número entero cualquiera* a *no puede ser raiz de la ecuacion* $F(x)=0$, *si aumentado algebráicamente en una unidad, no divide exactamente á* $F(-1)$.

Observacion. Se ha demostrado que si $a\mp1$ no divide á $F(\pm1)$, a no puede ser raíz de la ecuacion $F(x)=0$; pero no se vaya á creer que sí lo será en el caso de que la division fuera exacta; porque podrá suceder que cumpla con esta condicion, y sin embargo a no sea raíz de la ecuacion.

311. Caractéres de las raíces enteras de una ecuacion. *Toda raíz entera de una ecuacion* $F(x)=0$ *de coeficientes enteros, divide al último término; al coeficiente de* x, *aumentado del cociente de la primera division; al coeficiente de* x^2, *aumentado del cociente de la segunda; y así sucesivamente, hasta dividir al coeficiente de* x^{m-1}, *aumentado del cociente de la* $m-1$ *division. Este último cociente, aumentado del coeficiente del primer término, es igual á cero.*

Y recíprocamente, *todo número que satisface á todas las anteriores condiciones, es raiz de la ecuacion dada.*

En efecto, siendo a una raíz de la ecuacion

---

* En toda esta Leccion supondremos que son enteros los coeficientes de la ecuacion dada.

$$F(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0 \quad [1],$$

su primer miembro será divisible por $x-a$; de modo, que representando el cociente por $B_0x^{m-1}+B_1x^{m-2}+\ldots+B_{m-2}x+B_{m-1}$, tendremos

$$F(x)=(x-a)(B_0x^{m-1}+B_1x^{m-2}+\ldots+B_{m-2}x+B_{m-1});$$

ó efectuando la multiplicacion indicada,

$$F(x)=B_0x^m+\left.\begin{array}{l}B_1\\ -B_0a\end{array}\right|x^{m-1}+\ldots+\left.\begin{array}{l}B_{m-2}\\ -\ldots-B_{m-3}a\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}B_{m-1}\\ -B_{m-2}a\end{array}\right|x-B_{m-1}a.$$

Identificando ahora las dos expresiones anteriores de $F(x)$, hallaremos

$$\begin{aligned}
A_m &= -B_{m-1}a\\
A_{m-1} &= -B_{m-2}a+B_{m-1}\\
A_{m-2} &= -B_{m-3}a+B_{m-2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_1 &= -B_0a+B_1\\
A_0 &= B_0
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
&\frac{A_m}{a}=-B_{m-1}\\
&\frac{A_{m-1}-B_{m-1}}{a}=-B_{m-2}\\
&\frac{A_{m-2}-B_{m-2}}{a}=-B_{m-3} \qquad [2].\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{A_1-B_1}{a}=-B_0\\
&A_0-B_0=0
\end{aligned}$$

La primera igualdad de la segunda série manifiesta, por ser B_{m-1} una cantidad entera, que el último término á A_m es divisible por la raíz a de la ecuacion; la suma del cociente $-B_{m-1}$, con el coeficiente A_{m-1} de x, es tambien divisible por a, y da el cociente entero $-B_{m-2}$, como lo indica la segunda igualdad, y así sucesivamente; el último cociente $-B_0$, aumentado del primer coeficiente A_0, da el resultado cero, como lo indica la última igualdad; con lo cual queda demostrado el teorema.

Para probar la recíproca, es decir, que *cualquier número entero a que cumple con todas las condiciones anteriores, es raiz de la cuacion*, no hay más que eliminar las cantidades B_0, B_1,...B_{m-1} entre las ecuaciones [2], que son las que expresan estas condiciones.

Para hacer esta eliminacion, multiplicaremos la primera ecuacion por a, la segunda por a^2, la tercera por a^3, etc.; las dos últimas las multiplicaremos por a^m. Sumaremos los productos, y hallaremos la igualdad

$$A_m+A_{m-1}a+A_{m-2}a^2+\ldots+A_1a^{m-1}+A_0a^m=0,$$

que viene á demostrar, que si a cumple con las condiciones expresadas por las ecuaciones [2], a es raíz de la ecuacion [1], segun queríamos demostrar.

312 Las igualdades [2] prueban además, que los cocientes sucesivos que se hallan dividiendo por a el último término; la suma de agregar al cociente que se halle el coeficiente de x; la de este segundo cociente con el coeficiente de x^2, etc., tomados con signos contrarios, son precisamente los coeficientes sucesivos de los diferentes términos del cociente de dividir $F(x)$ por el binómio $x-a$; de manera, que al someter el número entero a á las condiciones á que debe satisfacer para que sea raíz de la ecuacion dada, no solamente hallamos si es ó no raíz, sino que tambien, en caso de serlo, encontramos el cociente de dividir el primer miembro de la ecuacion propuesta por el factor correspondiente $x-a$; quedando reducida la ecuacion, por este medio, á otra de grado inferior.

De lo dicho anteriormente se deduce la regla práctica siguiente:

313. *Para calcular las raíces conmensurables enteras, tanto positivas como negativas, de una ecuacion, se principia por despojarla de todas las raíces iguales á* $+1$ *y* -1.

Despues se hallan, por cualquiera de las reglas explicadas en la Leccion anterior, dos límites que comprendan todas las raíces reales de la ecuacion que resulte; se formarán los divisores simples y compuestos del último término, de los cuales sólo se tendrán en cuenta aquellos que se hallen comprendidos entre dichos límites.

En seguida se sustituirá sucesivamente x *por* $+1$ *y* -1 *en el primer miembro de la ecuacion, y hallaremos dos números, que representaremos por* $F(1)$ *y* $F(-1)$. *Obtenidos estos dos números, se verá qué factores de los comprendidos entre los límites, disminuidos algebráicamente en una unidad, dividen á* $F(1)$, *y los que no le dividan se desecharán. De los que queden se despreciarán todos aquellos que, aumentados algebráicamente en una unidad, no dividan á* $F(-1)$; *y de este modo habremos limitado de una manera considerable el número de factores que hemos de someter á las pruebas ulteriores, para saber cuáles son raíces de la ecuacion.*

Hecho esto, se pasa á ver qué números de estos son definitivamente raíces de la ecuacion dada, y para ello se les somete, en órden de magnitud principiando por los más sencillos, á las condiciones que marcan las igualdades [2], *para lo que se dividirá el último térmi-*

no por el factor que se ensaya a; *al cociente se le agrega, con el signo que tenga, el coeficiente de* x, *y la suma algebráica ha de ser divisible por* a; *al nuevo cociente que resulta se le agrega el coeficiente de* x^2, *y la suma ha de ser tambien divisible por* a, *y así se continúa hasta llegar á un último cociente, que sumado con el coeficiente del primer término, dé un resultado cero, en cuyo caso* a *es raíz de la ecuacion; pero no lo será si falta alguna de estas condiciones, y entónces debe desecharse.*

314. Como una vez hallada una raíz debemos dividir la ecuacion propuesta por el factor binómio correspondiente, conviene, en la práctica, hacer uso de lo que anteriormente hemos dicho (312); así, principiaremos por escribir en una línea horizontal los coeficientes de la ecuacion con los signos que tengan, cuidando de reemplazar por cero los de los términos que falten.

De modo, que considerando la ecuacion [1], se tendrá la série

$$[a] \qquad A_0+A_1+A_2+A_3+\ldots+A_{m-1}+A_m.$$

Sea a uno de los divisores del último término que hemos de someter á la prueba, y supongamos que es raíz, en cuyo caso el primer miembro de la ecuacion será divisible por $x-a$. Así, si representamos por B_{m-1}, B_{m-2}, ... B_2, B_1, A_0, los cocientes sucesivos hallados segun las ecuaciones [2], pero cambiados de signo, la ecuacion privada de la raíz a, ó sea el cociente de dividir $F(x)$ por $x-a$, será

$$A_0x^{m-1}+B_1x^{m-2}+B_2x^{m-3}+\ldots+B_{m-2}x+B_{m-1}=0;$$

la cual podremos someter á las mismas pruebas que la ecuacion propuesta, ya sea para ver si todavía la raíz a la satisface, ya para ensayar otro de los factores b.

De modo, que ensayando tambien el factor b, y luégo el c, d, etc., y suponiendo que todos ellos vayan siendo raíces, iremos hallando sucesivamente las séries de coeficientes que indica el siguiente cuadro, coeficientes que corresponderán á las ecuaciones que resulten de dividir sucesivamente por los factores $x-a$, $x-b$, etc., el primer miembro $f(x)$ de la ecuacion dada.

$$\begin{array}{r|l}
A_0+A_1+A_2+A_3+\ldots+A_{m-1}+A_m & \\
A_0+B_1+B_2+\ldots+B_{m-2}+B_{m-1} & a \\
A_0+C_1+\ldots+C_{m-3}+C_{m-2} & b \\
A_0+\ldots+D_{m-4}+D_{m-3} & c \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

La ecuacion privada de las raíces a, b, c, será, siguiendo la misma marcha,

$$A_0x^{m-4}+E_1x^{m-5}+\ldots+E_{m-5}x+E_{m-4}=0.$$

Tal es el procedimiento que debe seguirse para hallar las raíces enteras de una ecuacion; y para que se comprenda mejor lo aplicaremos á varios ejemplos.

Ejemplo I. Hallar las raíces enteras de la ecuacion

$$f(x)=x^4-27x^2-14x+120=0.$$

La trasformada en $-x$, será

$$f(-x)=x^4-27x^2+14x+120=0.$$

Segun la regla de Descartes, puede tener la ecuacion propuesta dos raíces positivas y dos negativas.

Un límite superior de las raíces de esta ecuacion, es (302) $1+\sqrt{27}$, ó lo que es lo mismo, 7; segun la misma regla, un límite inferior, será -7.

Los divisores del último término comprendidos entre 7 y -7, son 1, 2, 3, 4, 5 y 6; los cuales deberemos tomarlos primero con el signo $+$, y luégo con el $-$.

Los resultados de sustituir x por $+1$ y -1, son

$$f(1)=80,\quad f(-1)=108;$$

y como $4-1=3$ no divide á 80, se debe desechar el 4; del mismo modo deberemos desechar los númesos -2 y -5, que tampoco pueden ser raíces; pues $-2-1=-3$ no divide á 80, ni $-5-1=-6$ tampoco le divide; asimismo se debe desechar el número 6, pues $6+1=7$ no divide á 108. Luego los números que se deberán someter á las pruebas finales [2], son -3, -4, 2, 3 y 5.

Esto supuesto, dispondremos la operacion del modo siguiente:

$1+0-27-14+120$	
$+1-3-18+40$	-3
$+1-7+10$	-4
$+1-5$	2
$+1$	5

El cuadro anterior se ha formado escribiendo primero los coeficientes de la ecuacion dada: los números de la segunda línea son los cocientes cambiados de signo que dan las ecuaciones [2], cuando se ensaya el número -3 que tiene á su derecha, cuyos cocientes se calculan diciendo:

120 dividido por -3, da -40; y cambiando el signo, $+40$; $-40-14=-54$.
-54 dividido por -3, da $+18$; y cambiando el signo, -18; $+18-27=-9$.
-9 dividido por -3, da $+3$; y cambiando el signo, -3; $+3+0=+3$.
3 dividido por -3, da -1; y cambiando el signo, $+1$; luego -3 es raíz.

Del mismo modo se calculan todos los demás, y se halla que las raíces de la ecuacion propuesta, son -3, -4, 2 y 5.

Ejemplo II. Sea la ecuacion cuyas raíces enteras hemos de hallar

$$f(x)=x^5-4x^4-25x^3+64x^2+108x-144=0.$$

Desde luégo se ve, que 1 es raíz de esta ecuacion; de modo, que dividiendo por $x-1$, se hallará la nueva ecuacion

$$x^4-3x^3-28x^2+36x+144=0.$$

La trasformada en $-x$, será

$$x^4+3x^3-28x^2-36x+144=0.$$

Por la regla de Newton se halla, que 6 es la mayor raíz positiva entera, y -4 la menor negativa; de modo, que dividiendo el primer miembro por $(x-6)(x+4)=x^2-2x-24$, hallaremos el cociente x^2-x+6, que igualado á cero, da las otras dos raíces 3 y -2; luego las cuatro raíces serán -4, -2, 1, 3 y 6.

EJEMPLO III. Sea la ecuacion

$$f(x)=x^4-48x^3+375x^2+4700x+7500=0.$$

La trasformada en $-x$, es $x^4+48x^3+375x^2-4700x+7500=0.$

Un límite superior de la primera es (301) 49, y un límite superior de la segunda es, segun el método de los grupos, 7; luego los límites son -7 y 49.

Los divisores del último término comprendidos entre los límites, son -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30.

De estos factores deberemos excluir -6, -4, 6, 12, 15 y 20, porque disminuidos en una unidad, no dividen á $f(1)=12528$; y además debemos excluir los factores 2, 4, 5 y 10, porque aumentados en una unidad, no dividen á $f(-1)=3224$. Luego los factores que debemos someter á la prueba final, son -5, -3, -2, 3, 25 y 30.

Escribamos, por lo tanto, los coeficientes de $f(x)$, y tendremos lo mismo que en el ejemplo primero, el cuadro

$$\begin{array}{r|l}
1-48+375+4700+7500 & \\
+\ 1-\ 53+\ 640+1500 & -5- \\
+\ 500 & -3 \\
+\ \ 1-\ \ 55+\ 750 & -2- \\
-\ \ 65-\ 250 & \ \ 3 \\
+\ \ \ 1-\ \ 30 & 25- \\
+\ \ \ 1 & 30-
\end{array}$$

que expresa que los números -5, -2, 25 y 30, son las raíces enteras de la ecuacion dada.

EJEMPLO. IV. Sea, por último, la ecuacion

$$f(x)=x^6-7x^5+4x^4+56x^3-80x^2+112x+192=0,$$

de donde

$$f(-x)=x^6+7x^5+4x^4-56x^3-80x^2+112x+192=0.$$

Dos límites de las raíces son -6 y 7. Los factores del último término comprendidos entre estos límites, son -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4 y 6. De estos se separan, por la regla de exclusion, los factores -4, -3 y 6; de modo, que los números que someteremos á la prueba, son -2, 2, 3 y 4.

Hagamos esto, y hallaremos

1—7+4+56—80—112+192	
+1—9+22+12—104+ 96	—2
+1— 7+ 8+ 28— 48	2
+ 1— 4— 4+ 16	3
+ 1— 0— 4	4

Los números —2, 2, 3 y 4, son raíces de la ecuacion propuesta; y la que resulta de dividir por los factores correspondientes á estas raíces, será

$$x^2-4=0, \text{ de donde } x=\pm 2;$$

luego las raíces serán *dos* iguales á —2, *dos* iguales á 2, 3 y 4.

Investigacion de las raíces fraccionarias.

315. *Para que un número fraccionario* $\frac{a}{b}$ *sea raíz de una ecuacion algebráica de coeficientes enteros, es necesario que el numerador* a *sea un divisor del último término, y el denominador* b, *lo sea del primer coeficiente.*

En efecto, sea

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0,$$

una ecuacion algebráica de coeficientes enteros. Supongamos que la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$ sea una raíz de esta ecuacion, de modo que se deberá tener

$$A_0\frac{a^m}{b^m}+A_1\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+\ldots+A_{m-1}\frac{a}{b}+A_m=0 \qquad [1].$$

Si ahora multiplicamos esta igualdad por b^{m-1}, se podrá poner bajo la forma

$$\frac{A_0a^m}{b}=-(A_1a^{m-1}+A_2ba^{m-2}+\ldots+A_mb^{m-1});$$

y como el segundo miembro es una cantidad entera, el primero tambien lo será; pero b es primo con a, y por tanto con a^m; luego b tiene que dividir al primer coeficiente A_0, que es lo primero que debiamos demostrar.

Multiplicando ahora la igualdad [1] por b^m, y dividiendo despues por a, hallaremos

$$A_0a^{m-1}+A_1ba^{m-2}+\ldots+A_{m-1}b^{m-1}=-\frac{A_mb^m}{a}.$$

El primer miembro de esta igualdad es entero; luego el segundo tambien lo será: pero a es primo con b^m; luego a dividirá necesariamente al último término A_m, segun queriamos demostrar.

CONSECUENCIA. *Una ecuacion algebráica de coeficientes enteros reducida á la forma ordinaria, no puede tener raíces fraccionarias.*

En efecto, el denominador de una raíz fraccionaria cualquiera, debe dividir al primer coeficiente; y como éste es la unidad, dicho denominador no puede ser otro que 1. Por consiguiente, la raíz es entera; luego todas las raíces conmensurables son, en este caso, números enteros.

La investigacion de las raíces fraccionarias de una ecuacion queda reducida, segun el teorema anterior, á la de las raíces enteras. En efecto, sea la ecuacion

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

cuyas raíces conmensurables podrán ser tanto enteras como fraccionarias.

Si dividimos esta ecuacion por su primer coeficiente A_0, y despues la trasformamos en otra de coeficientes enteros, siendo el primero igual á la unidad (256), tendremos una ecuacion de la forma

$$y^m + P_1y^{m-1} + \ldots + P_{m-1}y + P_m = 0,$$

cuyas raíces conmensurables serán todas enteras. Ahora bien, para llegar á esta ecuacion, habremos tenido que hacer $x = \frac{y}{k}$; luego dividiendo todas sus raíces conmensurables por el número k, tendremos tanto las raíces enteras como fraccionarias de la ecuacion propuesta.

EJEMPLO. Hallar las raíces enteras y fraccionarias de la ecuacion

$$36x^7 - 108x^6 - 223x^5 + 600x^4 + 324x^3 - 712x^2 - 32x + 160 = 0.$$

Como esta ecuacion no está reducida á la forma ordinaria, y todos sus coeficientes no son divisibles por el primero, podrá tener raíces conmensurables fraccionarias; mas para determinarlas, principiaremos por reducirla á la forma ordinaria, y trasformándola despues en otra de la misma forma, pero de coeficientes enteros, para lo cual nos valdremos de la relacion $y=6x$, hallaremos la ecuacion

$$y^7 - 18y^6 - 223y^5 + 3600y^4 + 11664y^3 - 153792y^2 - 41472y + 1244160 = 0,$$

cuyas raíces conmensurables son todas enteras.

Aplicándole el procedimiento para hallar las raíces positivas, veremos, segun el siguiente cuadro,

1	−18	−223	+3600	+11664	−153792	−41472	+1244160	
			−21780	−39960	−68256	−290304	−622080	2
			−1408	−624	+9792	−124416	−414720	3
	+1	−14	−279	+2484	+21600	−67392	−311040	4—
		+1	−9	−324	+864	+25920	+62208	5—
						−3648	−6912	9
			+1	+3	−288	−2592	−5184	12—

que los números 4, 5 y 12 son raíces de esta ecuacion trasformada, y la que resulta de dividir por los factores correspondientes, es

$$y^4+3y^3-288y^2-2592y-5184=0.$$

Si aplicamos á ésta el procedimiento, para hallar las raíces conmensurables negativas, encontraremos para valores de y los números -3 y -12; y la ecuacion que resulta de privar á la anterior de estas raíces, será

$$y^2+12y-144=0;$$

que resuelta por el método ordinario, dá las dos restantes $6\pm6\sqrt{5}$.

Halladas estas raíces, las de la ecuacion propuesta serán, segun la relacion $y=6x$,

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ 2,\ -\frac{1}{2},\ -2,\ 1+\sqrt{5},\ \text{y}\ 1-\sqrt{5}.$$

LECCION XXXIV.

Teorema de Sturm y sus aplicaciones.—Casos en que la ecuacion tiene raíces iguales.

Teorema de Sturm y sus aplicaciones.

316. Para calcular con un cierto grado de aproximacion las raíces inconmensurables de una ecuacion algebráica, conviene hacer primero la separacion, que consiste en hallar pares de números que sólo comprendan una raíz; y aun cuando esto se puede hacer fácilmente en algunas ecuaciones, en otras no se puede saber directamente, si la separacion de las raíces está hecha; en cuyo caso hay que recurrir al teorema de Sturm, que tiene por objeto hallar el número de raíces reales de una ecuacion que hay comprendidas entre dos números cualesquiera α y β. El enunciado del teorema es el siguiente:

317. *Si se aplica al primer miembro de una ecuacion de coeficientes reales* f(x)=0, *y á su derivada* f′(x), *el procedimiento del* m. c. d. * *con la condicion de cambiar los signos á los restos ántes de pasar á ser divisores en la operacion siguiente, y los polinómios que resulten, llamados* FUNCIONES DE STURM, *que representaremos por* $f(x)$, $f'(x)$, X_1, X_2, X_3, ... X_r, *los escribimos en una línea horizontal; despues sustituimos en ellos el número* α, *anotamos la série de signos que dan los resultados, y contamos las variaciones que ésta presenta; sustituimos luégo el número* β, *y contamos tambien el número de variaciones que presenta la nueva série de signos, la diferencia de los dos números de variaciones será precisamente igual al número de raíces reales de la ecuacion dada, comprendidas entre* α *y* β.

En efecto, sean, como hemos indicado, X_1, X_2, X_3, ... X_r, los restos de signos cambiados que se obtienen aplicando el procedimiento del *m. c. d.* á los dos polinómios $f(x)$ y $f'(x)$. Entre estas funciones se verificarán las igualdades

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f'(x)\,Q - X_1\\
f'(x) &= X_1\,Q_1 - X_2\\
X_1 &= X_2\,Q_2 - X_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_{n-1} &= X_n\,Q_n - X_{n+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_{r-2} &= X_{r-1}\,Q_{r-1} - X_r.
\end{aligned}
$$

Estas funciones de Sturm satisfacen á ciertas condiciones, que para la demostracion del teorema necesitamos conocer, y que se deducen inmediatamente de la hipótesis de no tener raíces iguales la ecuacion propuesta $f(x)=0$.

1.ª *Todas las funciones intermedias* $f'(x)$, X_1, X_2, ... X_{r-1} *son dependientes de* x; *la última* X_r, *es un número*. En efecto, los restos que en el procedimiento del *m. c. d.* aplicado á $f(x)$ y $f'(x)$ se obtienen, son todos dependientes de x; el último es un número ó cero: cero no puede ser, porque entónces la ecuacion propuesta tendria raíces iguales, lo que es contra el supuesto; luego tiene que ser un número.

---

* Si para hacer que los coeficientes sean enteros multiplicamos los dividendos por factores convenientes, cuidaremos que éstos sean positivos, para que no vengan alterados los signos de los restos.

2.ª *Para un mismo valor de* X *no se pueden reducir á cero dos funciones consecutivas.* Porque si suponemos que X_{n-1} y X_n se reducen á cero para un cierto valor α de x, este mismo valor anularia á X_{n+1}; reduciéndose á cero X_n y X_{n+1}, se anularia tambien X_{n+2}, y así sucesivamente veriamos que se anulaban todas las restantes, inclusa X_r, lo que es imposible, segun hemos visto anteriormente, pues X_r es un número que no es cero.

3.ª *Si una funcion intermedia cualquiera* X_n *se anula para un cierto valor de* X, *las dos funciones que la comprenden* X_{n-1} y X_{n+1} *son iguales y de signos contrarios.* Así lo demuestra la igualdad $X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1}$, pues si suponemos $X_n = 0$, como Q_n es finito para el mismo valor de x, se tendrá $X_{n-1} = -X_{n+1}$.

Esto supuesto, demos á x el valor α, en cada una de las funciones de Sturm, y escribamos en una línea horizontal los signos de los resultados, lo cual constituirá una série que presentará cierto número de variaciones y otro de permanencias. Si ahora hacemos variar á x por la ley de continuidad, á partir del valor α, la série de signos no cambiará mientras no cambie el de alguna de las funciones; mas para que esto suceda, es menester que ántes pase por cero.

Dos casos deberemos considerar: que para un cierto valor de x se anule una cualquiera de las funciones intermedias, sin anularse $f(x)$, ó que se anule $f(x)$, pudiéndose anular al mismo tiempo cualquiera de las demás.

PRIMER CASO. *Si para un cierto valor de* X *se reduce alguna de las funciones intermedias á cero, el número de variaciones que presenta la série de signos no cambia.*

Sea X_n la funcion que se anula para el valor $x=a'$, y segun hemos visto anteriormente, las funciones X_{n-1} y X_{n+1} son, para este valor de x, iguales en valor numérico, pero de signos contrarios. Demos á x los dos valores $x=a'-h$ y $x=a'+h$, siendo h una cantidad suficientemente pequeña para que entre $a'-h$ y $a'+h$ no haya comprendida ninguna raiz de las ecuaciones $X_{n-1}=0$ y $X_{n+1}=0$, de modo que los signos de estas funciones no cambien en el intervalo de $x=a'-h$ y $x=a'+h$; mas para $x=a'$, X_n se anula, y X_{n-1} y X_{n+1} son de signos contrarios; luego tambien lo serán para los valores $x=a'-h$ y $x=a'+h$; y por tanto, las tres funciones X_{n-1}, X_n y X_{n+1} presentarán una permanencia y una variacion, ó una variacion y una permanencia; es decir, que entre ellas habrá una variacion cuando demos á x el valor $a'-h$; pero esta variacion existe tambien siendo $x=a'$ y $x=a'+h$; luego el número de variaciones que presenta la série de signos de las funciones de Sturm, no cambia, aunque pase por cero ó cambie de signo cualquiera de las funciones intermedias.

Segundo caso. *Si para un cierto valor de* x *la primera funcion se reduce á cero, el número de variaciones que presenta la série de signos, á partir de este valor, viene disminuido en una unidad.*

Sea a una raíz de la ecuacion $f(x)=0$, y h una cantidad tan pequeña cuanto sea necesario para que entre $a-h$ y $a+h$ no haya comprendida ninguna raíz de la ecuacion $f'(x)=0$, y por tanto $f'(a-h)$, $f'(a)$ y $f'(a+h)$ son siempre de un mismo signo.

Esto supuesto, dando á x el valor $a-h$, se halla

$$f(a-h)=-h[f'(a)-f''(a)\frac{h}{2}+f'''(a)\frac{h^2}{2.3}-\ldots];$$

y como se puede hacer á h tan pequeña como queramos, el signo de la cantidad que hay dentro de los corchetes dependerá del que tenga su primer término $f'(a)$; y como éste viene multiplicado por $-h$, el resultado, ó sea $f(a-h)$, tendrá signo contrario que $f'(a)$; y como $f'(a)$ y $f'(a-h)$ son de un mismo signo, $f(a-h)$ y $f'(a-h)$ serán de signos contrarios.

Si ahora cambiamos $-h$ en $+h$, se tendrá

$$f(a+h)=h[f'(a)+f''(a)\frac{h}{2}+f'''(a)\frac{h^2}{2.3}+\ldots];$$

lo que prueba, que $f(a+h)$ tiene el mismo signo que $f'(a)$; y como $f'(a)$ y $f'(a+h)$ tienen el mismo signo, $f(a+h)$ y $f'(a+h)$ tambien serán de un mismo signo; luego podremos formar con los signos de $f(x)$ y $f'(x)$, el cuadro siguiente:

		$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
Para	$x=a-h$,	$+$	$-$		$-$	$+$
	$x=a$,	0	$-$	ó bien	0	$+$
	$x=a+h$,	$-$	$-$		$+$	$+$

De manera que, segun vemos, para valores infinitamente próximos pero inferiores á aquel que anula á $f(x)$, las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ son de signos contrarios, ó lo que es lo mismo, presentan una variacion, y ésta se cambia en permanencia para valores inmediatamente superiores.

La variacion que habia entre la primera y segunda funcion, se ha perdido en el tránsito de $x=a-h$ á $x=a+h$; luego hay una variacion ménos en la série de los signos cuando x pasa por una raíz de $f(x)=0$, y solamente se pierde en este caso; pues ya hemos visto que en nada se altera el número de estas variaciones; cuando es una cualquiera de las intermedias la que se anula. Por el cambio de signos de éstas, sólo se altera el órden; mientras que por cada cambio de signo de la primera, desaparece una variacion.

Si habiendo pasado x por una raíz de la ecuacion, y habiéndose por consiguiente perdido una variacion de las que forma la série de los signos, suponemos que x continúa creciendo, cuantas veces pase por un valor que anule á $f(x)$, tantas veces hará que esta funcion cambie de signo, y otras tantas variaciones habrá perdido la série; de modo, que se podrá contar el número de raíces porque ha pasado en el tránsito de α á β, por el número de variaciones de ménos que resulten de la sustitucion de β en las funciones de Sturm, respecto de las que habia al hacer $x=\alpha$.

OBSERVACION. Podrá suceder que una ó varias de las funciones intermedias $f'(x)$, X_1, X_2, ... X_{r-1}, se reduzcan á cero para $x=\alpha$ ó $x=\beta$, en cuyo caso se considerarán las variaciones que presenten los signos de las funciones restantes que no se anulen; porque ya hemos visto, que si una funcion cualquiera X_n se reduce á cero haciendo $x=\alpha$, si sustituimos en vez de x cantidades que difieran poco de α, las tres funciones consecutivas X_{n-1}, X_n y X_{n+1} presentan siempre una variacion y una permanencia; de modo, que áun cuando X_n desaparezca, siempre habrá entre X_{n-1} y X_{n+1} una variacion, lo mismo que cuando X_n no es cero.

318. *Cuando una de las funciones intermedias* X_n *no cambia de signo dando á* x *valores comprendidos entre* α *y* β, *el número de raíces reales de la ecuacion que estos números comprenden es igual á la diferencia de los números de variaciones que presentan los signos de las funciones de Sturm, contados desde la primera hasta la que se supone que no cambia de signo.*

En efecto, aplicando á las funciones $f(x)$, $f'(x)$, X_1, ... X_n, la demostracion anterior, hallaremos que siendo siempre X_n de un mismo signo, podremos descomponer la série de variaciones en dos grupos: uno las formadas por las primeras funciones hasta X_n, y otro las que se obtienen desde la X_n hasta la última X_r. Ahora bien, en la série de valores que recibe x desde α hasta β, suceda lo que quiera á las funciones X_{n+1}, X_{n+2}, ... X, siempre darán el mismo número de variaciones, y ninguna podrá pasar al que corresponde al primer grupo, porque X_n no cambia de signo. En cuanto á los que presentan los signos de $f(x)$, $f'(x)$, ... X_n, van arreglándose de modo que por cada valor de x que anule á $f(x)$, se pierde una variacion; luego la diferencia entre los números de variaciones que presentan todas las funciones por la sustitucion sucesiva de α y β en vez de x, es la misma que la de los números de las que presentan las funciones desde la primera hasta la X_n; y por tanto, en la práctica prescindiremos de las restantes, á partir de la X_n.

319. Se podrian formar las funciones de Sturm, considerando por segunda funcion, no la derivada de la primera, como se ha supuesto, sino un polinómio cualquiera, siempre que cumpla con dos condiciones: primera, ser primo con $f(x)$; segunda, adquirir para valores de x inmediatamente inferiores á aquellos que anulan á $f(x)$ signo contrario del que tiene esta funcion. En efecto, con un polinómio de estas condiciones y con el primer miembro de la ecuacion dada, podremos formar las restantes funciones de Sturm, que gozarán de las mismas propiedades, como probaríamos de la misma manera que se hizo anteriormente.

320. Por el teorema de Sturm podremos hallar el número de raíces reales que tiene una ecuacion. En efecto, si en vez de dos números cualesquiera α y β, sustituimos dos límites de las raíces L y — L', la diferencia de los números de variaciones que presenten las dos séries de signos, será igual al número de raíces reales.

Pero si recordamos que una funcion algebráica conserva el mismo signo que su primer término para valores de x que pasan de cierto límite L, deduciremos que *para hallar las raíces reales positivas de una ecuacion, se cuenta las variaciones que presentan los signos de sus últimos términos, que es lo que se obtiene haciendo* $x=0$; *despues se resta de este número el de las variaciones que presentan los primeros términos, y se tendrán las raíces positivas.*

Las negativas se hallaran por la misma regla, cambiando ántes x en $-x$ en las funciones de Sturm.

321. Por medio del teorema de Sturm se pueden hallar las condiciones á que deben satisfacer los coeficientes de una ecuacion, para que todas sus raíces sean reales; lo cual se consigue estableciendo las

necesarias para que de $x=-L'$ á $x=L$, la série $f(x)$, $f'(x)$, X_1, etcétera, pierda un número de variaciones igual al grado de la ecuacion.

Ahora bien, para que la série de los signos que dan las funciones, pueda perder m variaciones, es necesario que haya por lo ménos m; porque mal podrian perderse m variaciones, si la série no llegase á tener este número. Esto exige que el número de funciones sea por lo ménos $m+1$; y como la primera es del grado m, y cada una es de un grado menor que la anterior por lo ménos en una unidad, el mayor número de estas funciones será $m+1$; luego $f(x)$, $f'(x)$, X_1, X_2, ... X_n han de ser en número $m+1$, y por tanto sus grados serán los números respectivos m, $m-1$, $m-2$, ... 2, 1, 0.

Esto supuesto, sea la ecuacion reducida á la forma ordinaria

$$f(x)=x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\dots+P_m=0.$$

Como á partir de un cierto límite, un polinómio conserva siempre el mismo signo que su primer término, sólo tendremos en cuenta los primeros términos de las funciones de Sturm.

El primer término de $f(x)$, será x^m; el de $f'(x)$, será mx^{m-1}; en cuanto á los primeros términos de los demás polinómios X_1, X_2,... serán funciones de los coeficientes P_1, P_2, P_3, etc., las cuales se obtendrán por las divisiones sucesivas, segun el procedimiento del *m. c. d.* Representemos estas funciones por f_2, f_3, ... f_m, y escribamos ordenadamente los $m+1$ términos

$$x^m,\ mx^{m-1},\ f_2x^{m-2},\ f_3x^{m-3},\dots f_m.$$

La cuestion queda, pues, reducida á buscar las condiciones suficientes para que la série de los signos que presentan estos términos, pierdan m variaciones en el intérvalo de $x=-L'$ á $x=L$; para lo cual se necesita que la sustitucion de x por $-L'$ no presente más que variaciones, y haciendo $x=L$, todos estos términos no tengan más que permanencias. Pero como los grados de estos términos van disminuyendo, segun hemos visto, de unidad en unidad, se sigue que si para $x=L$ la série no presenta más que permanencias, la sustitucion de x por $-L'$ no presentará más que variaciones; luego las condiciones que se buscan quedan reducidas á las que son necesarias para que esta série no presente más que términos positivos; es decir, á establecer que se verifiquen las desigualdades $f_2>0$, $f_3>0$, ... $f_m>0$.

322. Sea, por ejemplo, hallar las condiciones necesarias para que la ecuacion $x^3+Qx+R=0$, tenga sus tres raíces reales.

Calculemos las funciones de Sturm, y se hallará

$$f(x)=x^3+Qx+R,\ f'(x)=3x^2+Q,\ X_1=-2Qx-3R,$$
$$X_2=-4Q^3-27R^2.$$

Por tanto, las condiciones de realidad, serán

$$-2Q>0 \text{ y } -4Q^3-27R^2>0.$$

Cambiando los signos y observando que la primera condicion está implícitamente comprendida en la segunda, tendremos que la condicion que debe verificarse entre los coeficientes de la ecuacion dada para que tenga sus raíces reales, será

$$4Q^3+27R^2<0.$$

Caso en que la ecuacion tiene raíces iguales.

323. El teorema de Sturm, tal como lo hemos demostrado, sólo es aplicable á ecuaciones cuyas raíces sean todas diferentes; sin embargo, se puede demostrar que es igualmente cierto, aun en el caso de que la ecuacion tenga raíces iguales.

Sea la ecuacion que contiene raíces iguales

$$f(x)=(x-a)^n(x-b)^p\ldots(x-k)(x-l)=0.$$

Aplicando el procedimiento expuesto en el caso anterior, para hallar las funciones X_1, X_2, ... hallaremos el divisor exacto X_r funcion de x, que será el *m. c. d.* de $f(x)$ y $f'(x)$; de modo, que dividiendo por él las funciones de Sturm, y llamando á los cocientes $f_1(x)$, $f'_1(x)$, X'_1, X'_2, ... tendremos:

$$f_1(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l)$$
$$f'_1(x)=\begin{cases} n(x-b)(x-c)\ldots(x-l)+p(x-a)(x-c)\ldots(x-l)+\ldots \\ +(x-a)(x-b)\ldots(x-l)+(x-a)(x-b)\ldots(x-k)\end{cases}$$
$$X'_1=\frac{X_1}{X_r},\quad X'_2=\frac{X_2}{X_r},\ \ldots\ X'_r=1.$$

Sea a una raíz real de la ecuacion $f(x)=0$; hagamos

$$H=(x-b)(x-c)\ldots(x-l)$$
$$H_1=p(x-c)\ldots(x-l)+\ldots+(x-b)\ldots(x-k),$$

y se tendrá

$$f_1(x)=(x-a)H,\quad f'_1(x)=nH+(x-a)H_1.$$

Las funciones $f_1(x)$, $f'_1(x)$, H y H_1, tienen sus coeficientes reales. Esto supuesto, se ve que variando x, podemos hacer que se aproxime á valer a cuanto queramos; y por tanto, pudiendo ser $x-a$ tan poco diferente de cero como se quiera, el signo de $f'_1(x)$ podremos hacerle depender del que tenga H, cuyo signo es evidentemente contrario al que tiene $f_1(x)$, cuando x es inmediatamente inferior al valor a; luego $f'_1(x)$ es un polinómio primo con $f_1(x)$, y además adquiere signo contrario al que tiene $f_1(x)$ para valores de x inmediatamente inferiores á las raíces reales de la ecuacion; por tanto, si aplicamos á $f_1(x)$ y $f'_1(x)$ el procedimiento para hallar las funciones de Sturm, las que hallemos, que no serán otras que los cocientes de dividir por X_r cada una de las funciones X_1, X_2, ... gozarán de las propiedades que ya sabemos, y darán, lo mismo que en el caso anterior, las raíces reales que hay comprendidas entre dos números dados α y β (319). Ahora bien, los cocientes de dividir $f(x)$, $f'(x)$, X_1, X_2, ... por X_r, tendrán los mismos signos que estas funciones, ó signos contrarios, segun que X_r sea positivo ó negativo; luego las mismas variaciones que presente la série de estos cocientes, presentará la de las funciones anteriores; y como la pérdida de variaciones que se obtiene al pasar de $x=\alpha$ á $x=\beta$, expresa las raíces reales de $f_1(x)$ comprendidas entre α y β, esa misma disminucion habrá en las séries que producen $f(x)$, $f'(x)$, X_1 etc., y expresará tambien, prescindiendo del carácter de multiplicidad, el número de raíces reales de la ecuacion $f(x)=0$, comprendidas entre los dos números α y β; porque las raíces de la ecuacion $f_1(x)=0$, lo son tambien de la propuesta $f(x)=0$. Luego se puede aplicar el teorema de Sturm á una ecuacion que tenga raíces iguales, teniendo presente que éste sólo indica el número de las raíces distintas, prescindiendo de su grado de multiplicidad.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$f(x)=x^5-8x^4+25x^3-38x^2+28x-8=0.$$

Aplicándole el teorema de Sturm, hallaremos

$$f'(x)=5x^4-32x^3+75x^2-76x+28$$

$$X_1=x^3-5x^2+8x-4,$$

lo cual muestra que la ecuacion tiene raíces iguales; y como los últimos términos de estas funciones presentan *dos* variaciones, y los primeros no presentan *ninguna*, se sigue que la ecuacion tiene dos raíces reales distintas, que fácilmente veremos son 2 y 1, y que la primera se halla repetida *tres* veces, y la segunda *dos*.

LECCION XXXV.

Separacion de las raíces reales de una ecuacion.

Separacion de las raíces reales de una ecuacion.

324. El cálculo de las raíces inconmensurables de una ecuacion se divide en dos partes: la primera trata de la *separacion de las raíces*; la segunda de *su aproximacion*, en ménos de una cierta cantidad.

La separacion de las raíces reales de una ecuacion tiene por objeto determinar para cada una, dos números que comprendan esta sola raíz. Así, cuando se sabe que entre 2 y 3 hay comprendida una sola raíz real de la ecuacion $f(x)=0$; que entre 5 y 6 hay otra, y entre 0 y -1 una tercera; y se sabe además que la ecuacion dada no tiene más que estas tres raíces reales, entónces se dice que está hecha la separacion de las raíces.

325. Ya hemos dicho (194), que si dos números, sustituidos en el primer miembro de una ecuacion, dan resultados de signos contrarios, estos números comprenden por lo ménos una raíz real de dicha ecuacion, y en general un número impar; y que si dan resultados de un mismo signo, comprenden en general un número par, que puede ser cero (196). Fundados en estos teoremas, y con el auxilio de la regla de Descartes, podremos en muchos casos efectuar la separacion de las raíces reales de una ecuacion; en algunos casos no bastarán estas reglas, y entónces tendremos necesidad de recurrir al teorema de *Rolle* (273); y si éste fuese ineficaz, aplicariamos el de *Sturm*, ó bien el método de *Lagrange*, que aunque muy pesados y laboriosos, son infalibles y dan siempre por resultado la separacion de las raíces, como en breve veremos.

326. *Cuando se nos da una ecuacion y se nos pide la separacion de sus raíces reales, se principia por sustituir en su primer miembro la série natural de los números enteros comprendidos entre dos límites de las raíces; y si obtenemos en los resultados tantos cambios de signo como unidades tiene el grado de la ecuacion, la separacion estará he-*

cha, y entre cada dos números que han dado signos contrarios habrá una raíz, y no habrá más que una.

En efecto, sea una ecuacion del grado m, y supongamos que hemos hallado m pares de números, que sustituidos en el primer miembro de la ecuacion, han dado resultados de signos contrarios; entre cada dos de estos números habrá por lo ménos una raíz, y no puede haber más; porque entónces la ecuacion tendria más de m raíces, lo cual no puede ser.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x^4-10x^3+24x^2-2x-1=0.$$

Dos límites de sus raíces son $L=10$ y $L'=-1$; sustituyendo los números enteros comprendidos entre estos límites, hallaremos que

para $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,$

el signo del resultado es $+,\ -,\ +,\ +,\ +,\ -,\ -,\ -,\ +$;

y como hemos hallado ya tantos cambios de signo como unidades tiene el grado de la ecuacion, se sigue que la separacion de las raíces queda efectuada, y resulta que son las cuatro reales, una negativa y tres positivas: la primera se halla comprendida entre -1 y 0; las positivas se hallan, una entre 0 y 1, otra entre 3 y 4, y la tercera entre 6 y 7.

327. *Si el número de cambios de signo que se obtiene al sustituir los números enteros que hay comprendidos entre los límites de las raíces, no es igual al grado de la ecuacion, recurriremos al teorema de Descartes, y determinaremos un límite del número de raíces reales; y si el número de cambios de signo es igual á este límite, la separacion está hecha.*

En efecto, si por la regla de Descartes sabemos que el número de raíces positivas, por ejemplo, puede ser á lo más n, y hallamos n pares de números positivos que dan cambios de signo, es claro que cada uno de estos pares de números comprenderá una raíz, y nada más que una; luego la separacion quedará efectuada.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x^3+x-20=0.$$

Dos límites de las raíces positivas, son 0 y 4; sustituyendo los números enteros comprendidos entre estos límites, hallaremos que

para $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$

el resultado lleva el signo $-,\ -,\ -,\ +\ +,$

El número de cambios de signo es uno; y como el grado de la ecuacion es tres, no estamos seguros que la separacion esté efectuada; pero segun la regla de los signos de Descartes, el número de raíces positivas no puede ser mayor que uno, pues la ecuacion no presenta más que una variacion; luego la ecuacion propuesta no tiene más que una raíz real positiva, y se halla comprendida entre 2 y 3.

La trasformada en $-x$, es $x^3+x+20=0$; la cual, segun la misma regla de Descartes, no tiene raíces positivas; por consiguiente, la separacion de las raíces está totalmente efectuada.

328. A veces, por el teorema de Rolle, puede uno convencerse de estar hecha la separacion de las raíces. En efecto, sea la ecuacion

$$x^5-5x^3+10x^2-20x-15=0.$$

Dos límites de las raíces positivas, son 0 y 3; sustituyendo los números comprendidos entre estos límites, hallaremos que

para $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,$
el signo del resultado es $-,\ -,\ -,\ +$.

El número de cambios de signo es *uno*, el grado de la ecuacion es *cinco;* luego no estamos seguros si la separacion de las raíces positivas está hecha, pues entre 2 y 3, que dan resultados de signo contrario, puede haber comprendidas una ó tres raíces. La regla de Descartes tampoco nos indica que la separacion esté efectuada, porque sólo sabemos por ella que el número de raíces positivas no es mayor que tres, número de variaciones que presenta el primer miembro de la ecuacion; luego entre 2 y 3 puede haber una sola raíz comprendida, ó tres.

Si suponemos que hay tres, la ecuacion derivada

$$x^4-3x^2+4x-4=0$$

tendrá por lo ménos, segun el teorema de Rolle, dos raíces reales comprendidas entre los mismos números 2 y 3; y segun el mismo teorema, la derivada de esta

$$2x^3-3x+2=0,$$

tendrá por lo ménos una raíz comprendida entre los mismos números; pero aplicando el teorema de Sturm (317), veremos que esta ecuacion no tiene más que una raíz real, y esta es negativa; es decir, de signo contrario al de su último término. Luego la ecuacion $x^4-3x^2+4x-4=0$ no puede tener dos raíces comprendidas entre 2 y 3, y por tanto la ecuacion propuesta sólo puede tener una raíz real comprendida entre 2 y 3; luego la separacion de las raíces positivas se halla efectuada.

Para separar las raíces negativas, cambiaremos x en$-x$, y se tendrá la trasformada

$$x^5-5x^3-10x^2-20x+15=0;$$

que, segun la regla de Descartes, no puede tener más que dos raíces positivas, de las cuales una se halla comprendida entre 0 y 1, y la otra entre 3 y 4; luego la separacion de las raíces reales de la ecuacion propuesta se halla efectuada, y se tiene que estas raíces están comprendidas, una entre 2 y 3, otra entre 0 y-1, y la tercera entre -3 y -4.

329. Si ninguna de estas reglas bastase para verificar la separacion, se recurre al teorema de Sturm, y por él se halla el número de raíces reales que tiene la ecuacion; y una vez conocido este número, se ve si la sustitucion de los números enteros comprendidos entre dos límites de las raíces, da tantos cambios de signos como raíces reales tiene la ecuacion, en cuyo caso la separacion está efectuada; pues entre cada dos números que hayan dado resultados de signo contrario, habrá una raíz comprendida, y no habrá más que una.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x^4-3x^3+x^2-10x+4=0.$$

Dos límites de las raíces positivas, son 0 y 6; sustituyendo los números enteros comprendidos entre estos límites, se halla que 0 y 1, 3 y 4, dan resultados de signos contrarios.

El grado de la ecuacion es 4, y el número de raíces que segun la regla de Descartes puede tener, es *cuatro* tambien; luego no podemos asegurar que la separacion esté hecha.

Apliquemos el teorema de Sturm, y hallaremos

$$f(x)=x^4-3x^3+x^2-10x+4, f'(x)=4x^3-9x^2+2x-10;$$
$$X_1=19x^2-114x-34,\ X_2=-9348x+3541,\ X_3=-C.$$

Sustituyamos en estas funciones los límites de las raíces, y se tendrá el cuadro siguiente:

x	$f(x)$	$f'(x)$	X_1	X_2	X^3	V
0	+	—	—	+	—	3
L	+	+	+	—	—	1

Luego la ecuacion propuesta tiene $3-1=2$ raices reales positivas; y como hemos hallado anteriormente dos cambios de signo, estas raíces se hallan separadas, una entre 0 y 1, y la otra entre 3 y 4.

Cambiando en la ecuacion x en $-x$, tendremos la trasformada

$$x^4+3x^3+x^2+10x+4=0,$$

que no tendrá raíces positivas, segun la regla de Descartes; y por tanto, la propuesta no tiene raíces negativas.

330. Si el número de cambios de signo que se obtiene por la sustitucion de los números enteros comprendidos entre los límites de las raíces, es menor que el de estas raíces; es señal que entre dos que han dado resultados de signo contrario, hay más de una raíz real comprendida; ó que entre dos números que han dado resultados de un mismo signo, hay dos raíces por lo ménos, por consiguiente, la separacion no está hecha. En este caso se averiguará por el teorema de Sturm, entre qué números se hallan comprendidas las raíces; y despues, sustituyendo otros intermedios, se llegará á obtener la separacion de todas ellas.

Sea la ecuacion

$$x^4-15x^2+12x-2=0.$$

Dos límites de sus raíces positivas, son 0 y 4; sustituyendo los números enteros comprendidos entre estos límites, hallaremos que

para $x=$ 0, 1, 2, 3, 4,

el signo del resultado es $-, -, -, -, +$;

donde vemos, que sólo hay un cambio de signo correspondiente á la sustitucion de los números 3 y 4; pero el grado de la ecuacion es *cuatro*, y segun la regla de Descartes, tendrá á lo más *tres* raíces reales positivas; por consiguiente, podrá suceder que entre 3 y 4 haya *tres* raíces, ó que no haya más que una, pudiendo haber entre dos números que han dado resultados de un mismo signo, dos raíces. Para salir de dudas, apliquemos el teorema de Sturm, y veamos cuántas raíces positivas tiene la ecuacion y entre qué números se hallan comprendidas. Las funciones son

$$f(x)=x^4-15x^2+12x-2,\quad f'(x)=4x^3-30x+12;$$
$$X_1=15x^2-18x+4,\quad X_2=949x-402,\quad X_3=+C.$$

Sustituyendo en estas funciones los números enteros comprendidos entre los límites hallados, tendremos

x	$f(x)$	$f'(x)$	X_1	X_2	X_3	V
0	—	+	+	—	+	3
1	—	—	+	+	+	1
2	—	+	+	+	+	1
3	—	+	+	+	+	1
4	+	+	+	+	+	0

Luego entre 0 y 1 hay dos raíces comprendidas, y la tercera se halla entre 3 y 4; esta última se encuentra por consiguiente separada. Veamos cómo se separan las que hay entre 0 y 1.

Sustituyendo un número comprendido entre estos dos, tal como 0,5, hallaremos que el resultado de $f(x)$ es positivo; y como 0 ha dado negativo, y 1 tambien, se sigue que la separacion queda efectuada, habiendo una raíz entre 0 y 0,5, y otra entre 0,5 y 1.

La cuarta raíz es negativa, y se halla comprendida entre —4 y —5

331. Hay un método general para la separacion de las raíces reales de una ecuacion, debido á *Lagrange*, que rara vez se usa por los cálculos tan laboriosos que hay que ejecutar. Consiste en calcular de antemano una cantidad que sea menor que la menor de las diferencias que hay entre dos raíces cualesquiera de la propuesta, y una vez hallada, sustituir en el primer miembro de la ecuacion los números comprendidos entre dos límites de las raíces que se diferencien en esa cantidad, en cuyo caso entre dos números que dan resultados de signos contrarios habrá una raíz, y no habrá más que una, y por tanto la separacion estará efectuada.

La investigacion de esta cantidad, que es la razon de la progresion de los números que se sustituyen, exige que se forme la ecuacion de los cuadrados de las diferencias, la cual, como ya sabemos, se obtiene por cálculos que son bastante pesados.

Sea la ecuacion $f(x)=0$, cuyas raíces reales queremos separar. Si hallamos la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de las raíces de la ecuacion dada, y despues un límite inferior de sus raíces positivas, y llamamos á este límite $\frac{1}{\delta}$, la menor de las diferencias de dos raíces cualesquiera de la propuesta, será mayor que $\frac{1}{\sqrt{\delta}}=\frac{1}{\delta'}$.

Si ahora hallamos dos límites l y L de las raíces positivas de la ecuacion dada, y sustituimos en el primer miembro de la misma la série de números

$$l,\ l+\frac{1}{\delta'},\ l+\frac{2}{\delta'},\ l+\frac{3}{\delta'},\ \ldots L,$$

entre cada dos números que den resultados de signos contrarios habrá una raíz, y no habrá más que una; porque la diferencia de cada dos números consecutivos cualesquiera, es siempre menor que la de dos raíces reales de la ecuacion.

Para evitar las sustituciones de números fraccionarios, se halla la trasformada cuyas raíces sean δ' veces mayores que las de la propuesta; en cuyo caso, si las dos raíces cuya diferencia es la menor, son a y b, se tendrá $a-b>\frac{1}{\delta'}$, y en la trasformada cuyas raíces son δ' veces mayores, se verificará $a\delta'-b\delta'>1$; relacion que se deduce de la anterior, multiplicando por δ'. Esto prueba, que la menor diferencia de las raíces de la trasformada, es mayor que la unidad; luego sustituyendo en dicha trasformada los números enteros comprendidos entre dos límites de sus raíces, estaremos seguros que cada dos números que den resultados de signos contrarios comprenderán una raíz, y no comprenderá más que una, y la separacion quedará efectuada.

Para evitar sustituciones inútiles, conviene parar en el momento que hallemos tantos cambios de signos como raíces reales deba tener la ecuacion.

Este método de Lagrange, aunque más pesado, tiene sin embargo la ventaja de darnos los valores de las raíces con bastante aproximacion.

LECCION XXXVI.

Aproximacion de las raíces inconmensurables de una ecuacion.—Método de Lagrange.

Aproximacion de las raíces inconmensurables de una ecuacion.

332. Una vez hecha la separacion de las raíces inconmensurables de una ecuacion, podemos pasar á calcular estas raíces con un cierto grado de aproximacion.

Muchos son los métodos que se pueden emplear para conseguir este objeto, de los que sólo expondremos los más sencillos y elementales.

Lo primero que se ocurre para calcular con un cierto grado de aproximacion las raíces de una ecuacion, es sustituir números intermedios á aquellos que comprenden una raíz, por cuyo medio pueden hallarse pares de números que vengan diferenciándose cada vez ménos y que comprendan á dicha raíz; de modo, que cuando la diferencia que haya entre estos dos números sea por ejemplo $\frac{1}{\delta}$, tomando cualquiera de ellos por el valor de la raíz que comprenden, se cometerá un error menor que $\frac{1}{\delta}$.

Este método, que como acabamos de ver, consiste en ir hallando, por medio de sustituciones intermedias, límites que comprendan una raíz y que cada vez se vayan aproximando más, se conoce con el nombre de *método de las sustancias intermedias*, ó *método de los límites*.

La marcha general que debe seguirse es la siguiente: Sea la ecuacion $f(x)=0$, a y b dos números que comprenden una sola raíz inconmensurable, la cual se quiere calcular con un cierto grado de aproximacion. Sustituyamos un número intermedio d, que puede ser un medio diferencial, y por el signo del resultado sabremos si la raíz que vamos buscando, y que llamaremos α, se halla comprendida entre a y d ó entre d y b. Supongamos que la sustitucion del número d en el primer miembro de la ecuacion dá un resultado de signo contrario al que dá el número b, en cuyo caso la raíz α se hallará comprendida entre d y b; sustituyamos un número d' comprendido entre d y b; veamos por el signo del resultado si α se halla entre d y d' ó entre d' y b; supongamos que está entre d y d'; sustituyamos despues un número d'' comprendido entre d y d', y continuemos así hasta obtener dos números d_1 y d'_1 que comprendan á la raíz α, y que se diferencien en una cierta cantidad $\frac{1}{\delta}$; en cuyo caso, tomando por el valor de α uno de estos dos números, se cometerá un error menor que $\frac{1}{\delta}$.

Ejemplo. Sea la ecuacion $x^3+x-20=0$, que tiene, como hemos visto (327), una raíz real comprendida entre 2 y 3, la cual queremos obtener con un cierto grado de aproximacion.

Sustituyamos en vez de x el número intermedio 2,5, y hallaremos un resultado negativo; luego la raíz se hallará comprendida entre 2,5 y 3. Sustituyendo nuevamente el número 2,7 comprendido entre estos dos, hallaremos un resultado positivo, y por consiguiente la raíz se hallará comprendida entre 2,5 y 2,7. Por sustituciones sucesivas se verá que la raíz en cuestion se halla comprendida entre 2,5 y 2,6; entre 2,55 y 2,6; entre 2,57 y 2,6; entre 2,58 y 2,6; entre 2,59 y 2,6; entre 2,59 y 2,595; entre 2,59 y 2,592; entre 2,591 y 2,592; y así sucesivamente; y como estos dos últimos límites se diferencian en una milésima, la raíz que comprenden se diferenciará de cada uno de ellos en ménos de una milésima.

Método de Lagrange.

333. El método de aproximacion de Lagrange consiste en expresar en fraccion contínua cada una de las raíces inconmensurables de la ecuacion.

La aplicacion de este método exige que la raíz inconmensurable que se quiere calcular con un cierto grado de aproximacion, se halle sólo comprendida entre dos números enteros consecutivos; así, distinguiremos dos casos: 1.º, que al hacer la separacion de las raíces, dos números enteros consecutivos no comprendan más que una raíz; y 2.º, que comprendan dos ó más.

Primer caso. Sea $f(x)=0$ una ecuacion, a y $a+1$ dos números consecutivos que comprenden la sola raíz inconmensurable α, la cual queremos calcular con un error menor que una cierta cantidad.

Hallándose α comprendida entre a y $a+1$, su parte entera será evidentemente a; luego haciendo $\alpha=a+\frac{1}{y}$, y sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta, la deberá satisfacer; de modo que se tendrá la trasformada en y

$$f\left(a+\frac{1}{y}\right)=\mathrm{F}(y)=0,$$

cuyas raíces negativas corresponderán á las raíces de la propuesta menores que a; las raíces positivas, pero menores que la unidad, nos darán las raíces de la propuesta mayores que $a+1$, y las raíces mayores que la unidad nos darán las raíces comprendidas entre a y $a+1$; y como entre estos límites hemos supuesto que no hay comprendida más que una raíz α, la trasformada F $(y)=0$ no podrá tener más que una raíz positiva mayor que la unidad.

Esto supuesto, si en la trasformada F $(y)=0$ sustituimos la série natural de los números enteros 2, 3, 4, etc. *, hasta llegar á dos números b y $b+1$ que den resultados de signos contrarios, entre estos dos números habrá una raíz de F $(y)=0$, y no habrá más que una; pues si hubiera dos ó más, la relacion $x=a+\frac{1}{y}$ daria dos ó más raíces de la ecuacion propuesta $f(x)=0$, comprendidas entre a y $a+1$, lo que es contra el supuesto.

Haciendo $y=b+\frac{1}{z}$, y sustituyendo esta expresion en F $(y)=0$, hallaremos una segunda trasformada $F_1(z)=0$, que no tendrá más que una sola raíz mayor que la unidad; en ella sustituiremos, como ántes, los números 2, 3, 4, etc., hasta llegar á dos c y $c+1$ que den resultados de signos contrarios, en cuyo caso la raíz que buscamos se hallará comprendida entre estos dos números.

Haremos $z=c+\frac{1}{u}$, sustituiremos esta expresion en $F_1(z)=0$, y hallaremos la nueva trasformada $F_2(u)=0$, con la cual se hará lo mismo que se ha hecho con las anteriores, y así sucesivamente; por cuyo medio obtendremos la raíz α expresada por una fraccion contínua

$$x=\alpha=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

que dará su valor con el grado de aproximacion que se quiera.

---

* No hay necesidad de sustituir el número 1; porque como la raíz que se busca ha de ser mayor que 1, y sólo hay una que cumpla con esta condicion, la sustitucion de 1 dará siempre un resultado de signo contrario al que debe dar un número cualquiera mayor que dicha raíz; y como el signo de este resultado será el del primer término de la ecuacion, la sustitucion de 1 dará siempre un resultado de signo contrario al que tiene dicho primer término.

Si deseamos obtener, por ejemplo, la raíz en ménos de una cierta cantidad $\frac{1}{\delta}$, se extraerá la raíz cuadrada de δ, se formarán las reducidas conforme se vayan obteniendo los cocientes incompletos, y cuándo lleguemos á una en la cual el denominador sea igual ó mayor que $\sqrt{\delta}$, esta última reducida será el valor de la raíz con la aproximacion pedida.

EJEMPLO. Sea la misma ecuacion cuya raíz hemos hallado en el número anterior, $x^3+x-20=0$. La raíz cuyo valor vamos á calcular en ménos de una milésima, se halla, como ya sabemos, entre 2 y 3; por consiguiente, haremos $x=2+\frac{1}{y}$, cuya expresion, sustituida en la ecuacion propuesta, dará, ya sea por la fórmula del binómio, ya por la de Taylor, la trasformada

$$F(y)=10y^3-13y^2-6y-1=0.$$

Sustituyendo el número 2, se obtiene un resultado positivo; luego el valor de y se halla comprendido entre 1 y 2.

Hagamos $y=1+\frac{1}{z}$; sustituyamos este valor en la ecuacion anterior, y hallaremos la nueva trasformada

$$F_1(z)=10z^3+2z^2-17z-10=0.$$

Por la sustitucion del número 2 se ve que la raíz se encuentra entre 1 y 2; por tanto, haremos $z=1+\frac{1}{u}$, y hallaremos la trasformada

$$F_2(u)=15u^3-17u^2-32u-10=0.$$

Sustituyendo los números 2 y 3, vemos que la raíz de esta ecuacion mayor que la unidad está comprendida entre 2 y 3; luego haremos $u=2+\frac{1}{w}$, y encontraremos la trasformada

$$F_3(w)=22w^3-80w^2-73w-15=0,$$

que dará para valores de w la expresion $w=4+\frac{1}{t}$; y la nueva trasformada,

$$F_4(t)=179t^3-343t^2-184t-22=0,$$

nos da $t=2+\frac{1}{s}$.

Por tanto, el valor de la raíz, será

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}}$$

cuyas reducidas son $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{57}{22}$ y $\frac{127}{49}$; y como esta última tiene un denominador mayor que la raíz cuadrada de 1000, nos dará el valor de x aproximado en ménos de una milésima, de modo que reduciéndola á decimales, hallaremos la fraccion 2,591, conforme se encontró por el método de los límites.

Segundo caso. Que entre dos números enteros consecutivos haya comprendidas más de una raíz real de la ecuacion propuesta. Hecha la separacion de las raíces, supongamos que entre los números a y $a+\frac{1}{q}$ se halla comprendida la sola raíz α cuyo valor queremos determinar con un cierto grado de aproximacion. Trasformemos la ecuacion dada $f(x)=0$ en otra cuyas raíces sean q veces mayores, y entónces la raíz α, que en la propuesta se hallaba comprendida entre a y $a+\frac{1}{q}$, se encontrará en la trasformada entre los números enteros consecutivos aq y $aq+1$; y por tanto, este segundo caso queda reducido al primero.

Sea, por ejemplo, la ecuacion $f(x)=x^4-15x^2+12x-2=0$, que segun hemos visto ya (330), tiene dos raíces comprendidas entre 0 y 1, una entre 0 y 0,5, y otra entre 0,5 y 1. Hallemos la ecuacion cuyas raíces sean dobles de las de la propuesta, y hallaremos (255) la trasformada

$$y^4-60y^2+96y-32=0,$$

que tendrá una raíz comprendida entre 0 y 1, y otra entre 1 y 2. Se calcularán estas raíces, segun el primer caso, con el grado de aproximacion que se quiera, y las mitades de los números que se hallen serán las raíces de la ecuacion propuesta.

334. El método de Lagrange, como hemos visto, dá el valor de las raíces de la ecuacion propuesta bajo la forma de una fraccion

contínua, y en la práctica podrá suceder que los cocientes incompletos se reproduzcan periódicamente, y esto podrá hacernos creer que la fraccion contínua sea periódica; pero como no basta que lo creamos para darlo ya por hecho, hay que demostrar si realmente es ó no periódica. Para ello recordaremos (*Alg.* tomo I, núm. 431), que toda fraccion contínua periódica es una de las raíces de una ecuacion de segundo grado de coeficientes reales, y recíprocamente; por consiguiente, si suponemos que una de las raíces de la ecuacion $x^2+px+q=0$, sea la que vamos buscando, su primer miembro y el de la ecuacion propuesta deberán tener un divisor comun de primer grado. Por tanto, dividiremos $f(x)$ por x^2+px+q, y obtendremos un resto de la forma $Mx+N$, el cual deberá reducirse á cero, si en vez de x ponemos la raíz de que se trata, que será de la forma $\alpha+\sqrt{\beta}$; luego hallaremos

$$M(\alpha+\sqrt{\beta})+N=0 \quad \text{ó} \quad M\alpha+N+M\sqrt{\beta}=0,$$

cuya ecuacion no puede verificarse sino mediante estas dos $M=0$ y $N=0$; luego si la fraccion contínua es efectivamente periódica, la division de $f(x)$ por x^2+px+q debe ser exacta, y de ningun modo lo será en el caso contrario.

LECCION XXXVII.

Método de aproximacion de Newton.—Regla de falsa posicion, ó sea método de aproximacion por partes proporcionales.

Método de aproximacion de Newton.

335. El método de aproximacion de Newton exige que la raíz que vamos á calcular se dé ya con una cierta aproximacion, por lo ménos de una décima, la cual se puede hallar por cualquiera de los métodos anteriores.

Sea a este valor aproximado en ménos de una décima, é y el valor de la *correccion*, positiva ó negativa, que hay que hacer para obtener la raíz, que llamaremos α; de modo, que se tendrá

$$\alpha=a+y,\ f(\alpha)=f(a+y)=0;$$

y por tanto,

$$f(a)+f'(a)y+\frac{1}{2}f''(a)y^2+\frac{1}{1.2.3}f'''(a)y^3+\ldots+y^m=0,$$

de donde

$$y=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{1}{f'(a)}\left(\frac{f''(a)}{2}y^2+\frac{f'''(a)}{1.2.3}y^3+\ldots+y^m\right).$$

Esto supuesto, el *método de Newton* consiste en despreciar todos los términos que van afectados de las potencias respectivas y^2, y^3, etcétera, admitiendo que el error que se comete es menor que el cuadrado del error anterior; es decir, menor que y^2, lo cual sucede ordinariamente, aunque hay casos excepcionales en que no se verifica, por lo que es menester justificar esta hipótesis en todos los casos que en la práctica se emplea.

Habiendo supuesto que a se diferencia de α en ménos de una *décima*, se tendrá $y<0{,}1$, $y^2<0{,}01$, $y^3<0{,}001$, y así sucesivamente; de modo, que admitiendo por un momento la hipótesis de ser la cantidad despreciada menor que y^2, ó sea menor que 0,01, la fórmula

$$y=-\frac{f(a)}{f'(a)},$$

dará el valor de la correccion y en ménos de una *centésima*. Reduciremos, pues, esta fraccion á centésimas, y añadiéndola al valor a con el signo que tenga, se obtendrá la raíz aproximada con dos cifras decimales.

Hecha esta correccion, y llamando b al nuevo valor aproximado, é y' á la correccion correspondiente, que en este caso es menor que una *centésima*, se tendrá por el mismo procedimiento el valor de esta correccion

$$y'=-\frac{f(b)}{f'(b)},$$

el cual, segun el principio hipotético de Newton, será menor que $(0{,}01)^2=0{,}0001$.

Hecha la nueva correccion, y llamando c al nuevo valor aproximado é y'' á la correccion correspondiente, se tendrá por el mismo principio, que el valor hallado por la fórmula

$$y''=-\frac{f(c)}{f'(c)},$$

nos dará una tercera correccion aproximada en ménos de $(0{,}0001)^2=0{,}00000001$, ó sea en ménos de una unidad del órden *octavo decimal*, y así sucesivamente.

Si observamos las fórmulas que dan las correcciones sucesivas, veremos que se deducen de la general

$$y=-\frac{f(x)}{f'(x)},$$

en la cual se reemplaza sucesivamente x por los números aproximados a, b, c, etc.

336. Hemos dicho que hay casos excepcionales en que la cantidad que se desprecia al hallar el valor de una correccion, no es menor, como el método de Newton exige, que el cuadrado del error con que se halla calculada la raíz; y aunque lo fuera, como se comete un cierto error al reducir á fraccion decimal el quebrado ordinario $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, que da el valor de la correccion, no podemos estar seguros de cuál será el grado de aproximacion con que se obtiene la raíz en una operacion cualquiera para pasar á la correccion siguiente. Para apreciar el grado de aproximacion con que se obtiene una raíz despues de hecha la correccion, supondremos que sea r el valor aproximado que se obiene por el método, el cual se diferenciará por defecto de la raíz α en ménos de una unidad del último órden, si la sustitucion de x por $r+\frac{1}{10^n}$, siendo n el órden de la última cifra decimal, y r, dan resultados de signos contrarios, y por exceso si son de signos contrarios los resultados de sustituir los números r y $r-\frac{1}{10^n}$. Si la primera y segunda sustitucion, lo mismo que la segunda y tercera, dan resultados de un mismo signo, es señal de que la aproximacion no es la marcada por el método, en cuyo caso se sustituirán los números $r-\frac{2}{10^n}$ y $r+\frac{2}{10^n}$, $r-\frac{3}{10^n}$ y $r+\frac{3}{10^n}$, etc., hasta que lleguemos á obtener un número que dé resultados de signo contrario de los hallados hasta ahora, y entre los dos números diferentes en una unidad del último órden que han dado signos contrarios, se hallará la raíz; luego uno de estos números expresará el valor de dicha raíz aproximda en ménos de una unidad decimal del último órden.

Ejemplo. Sea la ecuacion $x^3+x-20=0$, que como ya sabemos tiene una raíz real comprendida entre 2 y 3, y que además hemos calculado por los métodos anteriores en ménos de una *milésima*. Considerémosla aproximada en ménos de una *décima*, y continuemos la aproximacion por el método de Newton, para comparar el resultado y la rapidez con que se obtiene.

Esta raíz aproximada en ménos de una décima, es 2,5; por tanto, el valor de la correccion que hay que hacer, será

$$y=-\frac{f(2,5)}{f'(2,5)}=\frac{1,875}{19,75}=0,09;$$

luego la raíz aproximada en ménos de una *centésima*, será 2,59.

Para asegurarnos de que la raíz está aproximada en ménos de una centésima, sustituiremos en la ecuacion los números 2,59 y 2,60, y hallaremos dos resultados de signos contrarios; luego la raíz se halla comprendida entre 2,59 y 2,60 y por tanto el número 2,59 se diferencia en ménos de una *centésima*.

La segunda correccion se hallará por la fórmula

$$y=-\frac{f(2,59)}{f'(2,59)}=\frac{0,036021}{21,1243}=0,0017;$$

luego la raíz aproximada, será 2,5917.

Para ver si la aproximacion está hecha en ménos de una *diez milésima*, sustituiremos los números 2,5917 y 2,5918, y hallaremos dos resultados de un mismo signo; sustituiremos 2,5916, y veremos que la raíz se halla entre 2,5916 y 2,5917; luego tomando por valor aproximado el primero de estos dos números, tendremos la raíz aproximada en ménos de una unidad de cuarto órden decimal. Por una nueva operacion hallaremos la raíz aproximada con ocho cifras decimales, y una nueva correccion nos dará diez y seis, y así sucesivamente.

337. El método de Newton puede interpretarse perfectamente por consideraciones geométricas, por cuyo medio se puede demostrar que no sólo es aplicable á las ecuaciones algebráicas, sino tambien á las trascendentes, siempre que sean contínuas las funciones expresadas por sus primeros miembros. Tambien se vé claramente cómo puede caer en defecto en algunos casos.

338. Sea la ecuacion

$$F(x)=0,$$

de la cual queremos calcular una raíz inconmensurable, que suponemos se halla comprendida entre dos números a y $a+h$. Si la funcion $F(x)$

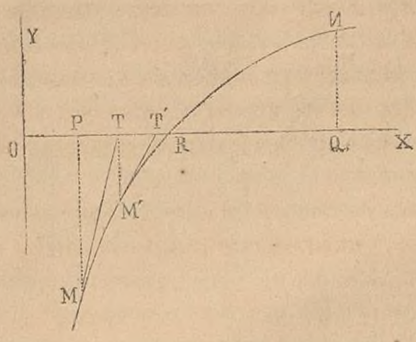

Fig. 18.

es contínua, y suponemos que h es suficientemente pequeña para que entre a y $a+h$ no haya comprendida ninguna raíz de la derivada $F'(x)=0$, la curva representada por $F(x)=0$ no tendrá ninguna ondulacion en ese intervalo, y tendrá por ejemplo, la forma marcada en la figura 18; además, como $F'(x)$ no pasa por cero y es contínua tambien, no cambiará de signo en el mismo intérvalo.

Sea $OP=a$, y $PQ=h$. La curva corta en este intérvalo al eje OX en un punto R, cuya distancia al orígen es el valor de la raíz α que vamos á calcular. Tiremos por el punto M una tangente MT, que cortará á OX en un punto T, determinando una distancia PT, que tomaremos por valor aproximado de la correccion exacta PR que hay que hacer para obtener la raíz.

La expresion del valor de esta primera correccion, se obtiene inmediatamente por el triángulo MPT, el cual nos da $PT=\frac{MP}{\operatorname{tg}PTM}$; pero

$$MP=F(OP)=-F(a),\ \operatorname{tg}PTM=F'(a);\ \text{luego}\ PT=-\frac{F(a)}{F'(a)}.$$

Una vez hallado el valor de esta correccion, podremos calcular el de la línea TM, que expresa el valor de $F(x)$ haciendo $x=OT$; hallado este valor, podremos hacer una nueva correccion de la misma manera, tirando por el punto M' la tangente M' T', lo que dará una nueva correccion T T', cuyo valor, unido al hallado anteriormente, dará otro más aproximado de la raíz, el cual estará representado por la longitud OT', y así sucesivamente. Donde vemos, que el método de aproximacion de Newton, consiste en *reemplazar la curva por la tangente tirada en el punto cuya abscisa es el número* a.

339. Por el exámen de la figura se verá que el método de Newton puede en algunos casos caer en defecto, obteniendo por su medio valores que cada vez se alejen más de la raíz que vamos buscando, si bien es cierto que dándose ya el valor de ésta con un grado de aproximacion suficiente para que en el intérvalo de a á $a+h$ no presente la curva ninguna ondulacion, en ese caso el método da siempre valores que se aproximan cada vez más; la primera correccion es la que podrá no ser conveniente, segun que se

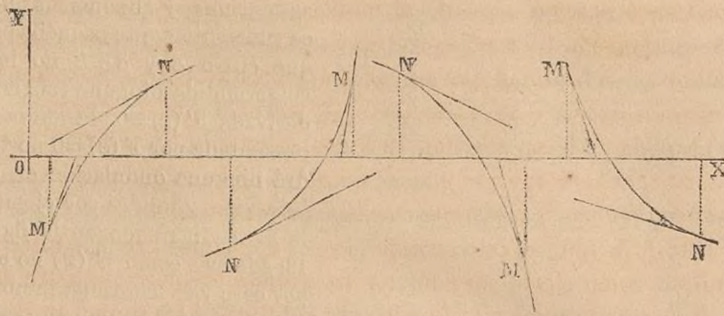

Fig. 19.

tire la tangente en el punto cuya abscisa es a ó $a+h$; pero siempre se podrá elegir éste, de modo que la tangente venga á cortar al eje OX en un punto T que sea el más próximo al punto R, cuya distancia al orígen expresa el valor de la raíz, y con solo inspeccionar la figura 19, en los cuatro casos distintos que se pueden presentar, veremos que dicho punto será el M, cuya abscisa a, sustituida en $F(x)$ y $F''(x)$, da resultados de un mismo signo.

Regla de falsa posicion, ó método de aproximacion por partes proporcionales.

340. La REGLA DE FALSA POSICION se define diciendo, que *es aquella en que tomando un número arbitrario, pero conocido, por el valor de la cantidad que se busca, y haciendo con él las operaciones indicadas en el enunciado de un problema, llegamos á obtener exacta ó aproximadamente dicha cantidad, por medio de correcciones convenientes.*

La regla de falsa posicion se divide en *simple ó doble*, segun que sólo se tomen uno ó dos números supuestos.

Las ecuaciones que, consideradas como la expresion fiel de todas las condiciones exigidas en el enunciado de un problema, se han de resolver por medio de la regla de falsa posicion, supondremos que están reducidas á la forma

$$f(x)=K \qquad [1],$$

siendo $f(x)$ un polinómio formado de todos los términos que están afectados de la incógnita x, y K la reunion de todos aquellos que no contienen dicha incógnita.

Si sustituimos en $f(x)$ un número a que no es raíz de la ecuacion [1], dará un cierto resultado K' diferente de K, en cuyo caso llamaremos *número supuesto* al número a; *error* correspondiente á este supuesto á la diferencia positiva ó negativa $K'-K$, y *correccion* del número a, á la cantidad que agregada algebráicamente á este número, da el valor exacto ó aproximado de la cantidad que se busca.

La regla de falsa posicion se funda en que *los resultados que se obtienen sustituyendo en el primer miembro de la ecuacion* [1] *dos números cualesquiera, son proporcionales á estos números.*

Este principio, exacto cuando $f(x)$ es de primer grado, puede ser admitido como cierto sin cometer un grande error, cualquiera que sea $f(x)$, siempre que esta funcion sea contínua y los números que se sustituyan difieran poco entre sí.

341. Admitido como cierto el principio anterior, podemos deducir las reglas siguientes:

1.ª *En la regla de falsa posicion simple, el número que se busca es igual al cuarto término de la proporcion, cuyos tres primeros son* $f(a)$, K *y el número supuesto* a.

2.ª *En la regla de falsa posicion doble, el número que se busca es igual á la diferencia algebráica de los productos de cada supuesto por el error del otro, dividida por la difererciaalgebráica de los errores correspondientes.*

La primera regla es evidente, segun el principio admitido; para demostrar la segunda, representaremos por x el número que se busca, por a y b los dos números supuestos, y por α y β los errores correspondientes; de modo, que se tendrá

$$\alpha=f(a)-K \quad \text{y} \quad \beta=f(b)-K;$$

pero segun la hipótesis, se tiene

$$f(a):[f(x)=K]::a:x \quad \text{y} \quad f(b):[f(x)=K]::b:x;$$

de donde

$$f(a)-K:K::a-x:x \quad \text{y} \quad f(b)-K:K::b-x:x.$$

Siendo iguales los consecuentes de estas proporciones, se tendrá

$$f(a)-K:f(b)-K::a-x:b-x,$$

ó

$$\alpha:\beta::a-x:b-x;$$

de donde se deduce, $x=\dfrac{\alpha b-\beta a}{\alpha-\beta}$ cuya fórmula justifica la regla.

342. Si representamos por C la correccion que hemos de hacer á uno de los supuestos a, se tendrá

$$C=x-a=\frac{\alpha b-a\beta}{\alpha-\beta}-a=-\frac{b-a}{\beta-\alpha}\times\alpha \qquad [2];$$

cuya fórmula, traducida al lenguaje vulgar, manifiesta que conocidos dos números supuestos y los errores que producen, la correccion hecha sobre uno de ellos para obtener el número que se busca, *es igual á menos el cociente de dividir la diferencia de supuestos por la diferencia de los errores correspondientes, multiplicado por el error del número que se va á corregir.*

343. Las ecuaciones de primer grado podrán resolverse por la regla de falsa posicion, y hallar el valor exacto de la incógnita, puesto que en estas ecuaciones se verifica el principio fundamental. Sea, por ejemplo, el problema II que hemos resuelto en Algebra elemental, página 157, que dice: *Una persona tiene impuesta la mitad de su capital al* 3 *por* 100; *la tercera parte al* 5, *y el resto al* 8; *gana en todo* 21600 *reales al año. Se quiere saber qué capital tiene.*

Supongamos que sea el capital 3000 rs. Impuesta la mitad al 3 por 100, produce 45 rs.; la tercera parte al 5, da 50 rs.; y el resto impuesto al 8, produce 40. Ganancia total, 135 rs.; luego segun la primera regla, se tendrá

$$135 : 21600 : : 3000 : x;$$

de donde $x=480000$ rs., resultado que está conforme.

En las ecuaciones de un grado superior no es exacto el principio fundamental, por cuya razon no se puede hallar el verdadero valor de la cantidad que buscamos; pero si logramos hacer que esta cantidad se halle comprendida entre dos números que no se diferencien en mucho, podremos determinar su valor con todo el grado de aproximacion que se quiera, por medio de la regla de falsa posicion doble.

Sea, por ejemplo, la ecuacion $x^2+x-20=0$, de la que hemos calculado ya por los métodos anteriores la raíz que se halla comprendida entre 2 y 3. Si suponemos que sea 1 el valor de x, se encontrará el error -18; suponiendo ahora que el valor de x sea 2, el error será -10.

Calculemos por la fórmula [2] la correccion correspondiente al supuesto 2, y hallaremos $C=-\frac{1}{8}\times-10=\frac{10}{8}=1,25$; lo que nos da, suprimiendo la parte decimal, el tercer número supuesto 3. Sustituyámoslo, y hallaremos el error correspondiente $+10$, que por ser de signo contrario al que tiene el del supuesto 2, se deduce que entre 2 y 3 hay por lo ménos una raíz (194). Hallemos la correccion correspondiente al supuesto 2, y tendremos $C=-\frac{1}{20}\times-10=0,5$; luego el cuarto número supuesto será 2,5, el cual da el error

$-3,975$. La correccion de este número será $C=-\frac{0,5}{13,975}\times-3,975$ $=0,1$, y tendremos 2,6 por quinto número supuesto.

Sustituyendo este número, hallaremos el error $+0,173$; luego la raíz se encuentra comprendida entre 2,5 y 2,6. Determinando la correccion del supuesto 2,5, tendremos $C=-\frac{0,1}{4,148}\times-3,975=$ 0,095; lo que dará el número 2,59 por sexto número supuesto, el cual, sustituido en la ecuacion, dará el error $-0,036021$; ó despreciando las tres últimas decimales, se tendrá por error el número 0,036.

La correccion del número 2,59, será

$$C=-\frac{0,01}{0,209}\times-0,036=\frac{0,00036}{0,209}=0,0017;$$

lo que da por valor aproximado de la raíz el séptimo número supuesto 2,5917, que está conforme con el número hallado por los métodos anteriores.

344. Este método, que Vallejo vino á deducir partiendo de la regla de falsa posicion, y apoyándose tan sólo en la verificacion de muchos ejemplos de ecuaciones complicadas, hasta llegar á resolver algunas de grados muy elevados, y áun otras trascendentes, pero que de ninguna manera demostró, tiene sin embargo una interpretacion clara por consideraciones geométricas; viene á reducirse á la *sustitucion del arco de la curva comprendida entre dos límites, por la cuerda de este arco*; así como el método de Newton consiste *en reemplazar dicho arco por la tangente tirada en uno de sus extremos*.

En efecto, sea la ecuacion $F(x)=0$, de la cual queremos calcular una raíz, y que para mayor sencillez supondremos que se halla sola comprendida entre los dos números a y b. Supongamos que el intérvalo $b-a$ es tan pequeño cuanto sea necesario para que la curva no presente en él ondulacion alguna, y no cambie por consiguiente de sentido, para lo que basta que entre a y b no haya cnmprendida ninguna raíz de $F'(x)=0$, y que, por ejemplo; presente la forma que marca la figura 20.

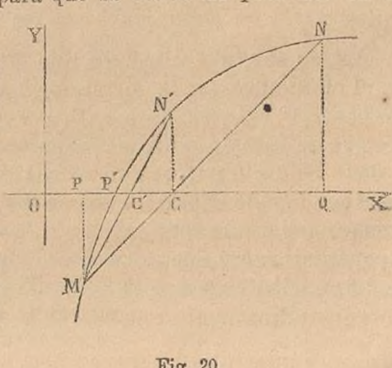

Fig. 20.

Sean $OP=a$ y $OQ=b$; tracemos la cuerda MN, que encontrará al eje OX en un punto tal como C; la longitud OC la tomaremos como un valor corregido de la raíz x.

La correccion hecha por este medio es la longitud PC, cuya expresion vamos á determinar. Para ello consideraremos los triángulos MPC y NCQ, que son semejantes, y dan

$$PM:NQ::PC:CQ, \text{ ó } PM+NQ:PM::PQ:PC;$$

de donde se deduce $PC=\frac{PQ}{PM+NQ}\times PM$; pero se tiene $PQ=b-a$, $PM=-F(a)$ y $NQ=F(b)$; luego la fórmula anterior se convertirá en

$$PC=\frac{b-a}{F(b)-F(a)}\times -F(a)=-\frac{b-a}{F(b)-F(a)}\times F(a);$$

cuya fórmula de correccion es la misma que usaba Vallejo, pues $F(b)$ y $F(a)$ no son otra cosa que los errores que se cometen al sustituir x por a y b en la ecuacion $F(x)=0$.

Si ahora levantamos en el punto C una perpendicular, y calculamos el valor CN', que no es otra cosa que el valor de $F(x)$ cuando ponemos en vez de x la longitud OC, podremos hacer una nueva correccion, lo que dará un valor OC' más aproximado á la raíz x; y así sucesivamente podremos ir hallando valores que cada vez se aproximen más á la raíz que se busca.

345. Examinando los cuatro casos que se pueden presentar, veremos que la correccion hallada por la fórmula anterior dará valores aproximados por defecto ó exceso, segun que $F'(x)$ y $F''(x)$ sean de un mismo signo ó de signos contrarios, como se deduce inmediatamente á la sola inspeccion de la figura 21 en los cuatro casos que presenta.

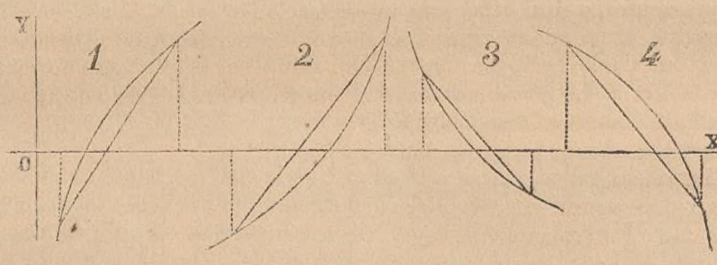

Fig. 21.

Así, en el 1.° y 3.° caso, en que $F'(x)$ y $F''(x)$ son de signos contrarios en el intérvalo $b-a$, la correccion da un valor aproximado por exceso; los casos 2.° y 4.°, en los que $F'(x)$ y $F''(x)$ tienen un mismo signo, la correccion da valores aproximados por defecto.

346. Si los números que se sustituyen no comprenden ninguna raíz, pero que uno de ellos ó los dos no distan mucho de valer una de ellas, podremos hallar una correccion, y luégo otra, y otras, hasta que lleguemos á conseguir tener una raíz comprendida entre dos números supuestos que se diferencien en tan poco como se quiera.

Sean, por ejemplo (*figura* 22), OP=a y OQ=b dos números, que sustituidos en F(x) dan dos resultados de un mismo signo. Calcularemos la correccion PC por medio de los triángulos MPC y NQC, que son semejantes, y que dan por un procedimiento análogo al anterior.

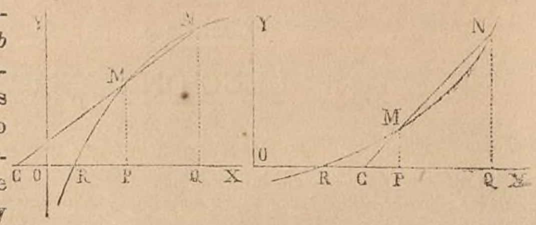

Fig. 22.

$$PC=\frac{PQ}{QN-PM}\times MP \text{ ó } PC=\frac{b-a}{F(b)-F(a)}\times F(a);$$

fórmula que sólo difiere de la anterior en el signo, y que deberá sumarse ó restarse al valor a, segun que la derivada sea para este valor positiva ó negativa, como inmediatamente se ve por la figura.

Una vez hecha la primera correccion, podremos hacer otras, y llegar á tener el valor de la raíz con el grado de aproximacion que se quiera.

Si la sustitucion de dos números dan un mismo error, la correccion será infinita; en cuyo caso hay que sustituir otro número distinto.

Este método, si se aplica partiendo del supuesto de que entre dos número a y $a+h$ hay comprendida una sola raíz, que es lo que generalmente se exige en los demás, da aproximaciones tan rápidas como el de Newton, y con ménos trabajo, como por el ejemplo anterior hemos visto. Cuando se aplica principiando por dos números cualesquiera, no tenemos seguridad en las correcciones, ni se puede marcar el grado de aproximacion; por lo que sólo se aplicará despues de hecha la separacion de las raíces.

347. Si en la figura 23 comparamos el método que llamaremos *de las partes proporcionales*, con el de Newton, veremos que el punto R correspondiente á la raíz, se halla siempre comprendido entre los puntos T y C, que se obtienen por ambos métodos; de modo, que combinando los dos á la vez, obtendremos con suma rapidez el valor de la raíz que se busca, el cual se halla siempre comprendido entre dos resultados consecutivos obtenidos por ambos métodos; luego la parte comun á los dos valores hallados, uno por defecto y otro por exceso, nos marcará la raíz aproximada en ménos de una unidad del último órden.

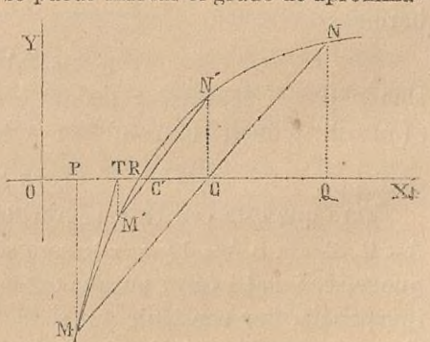

Fig. 23.

LECCION XXXVIII.

Determinacion de las raíces imaginarias por la teoría de la eliminacion.—Determinacion de las raíces imaginarias de una ecuacion por la de los cuadrados de las diferencias. Soluciones extrañas.—Divisores conmensurables de segundo grado.

Determinacion de las raíces imaginarias por la teoría de la eliminacion.

248. Ya hemos visto cómo se determinan exactamente las raíces enteras y fraccionarias de una ecuacion, y cómo se simplifica, reduciéndola á otra que carezca de estas raíces. Tambien acabamos de ver en las Lecciones anteriores, cómo se determinan, con el grado de aproximacion que se quiera, las raíces inconmensurables; sólo nos queda, para resolver completamente una ecuacion, ver el modo de determinar las raíces imaginarias.

Sea la ecuacion, que no contiene raíces conmensurables, $f(x)=0$, cuyas raíces imaginarias queremos hallar. Siendo las raíces imaginarias de una ecuacion racional y entera de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, haremos

$$x=y+z\sqrt{-1} \qquad [1];$$

siendo y y z cantidades reales, y sustituyendo esta expresion en $f(x)=0$, se tendrá un resultado de la forma (183)

$$f(y+z\sqrt{-1})=A+Bz\sqrt{-1}=0.$$

Para que esta ecuacion se verifique, es necesario que se tenga $A=0$, $B=0$, ó $A=0$ y $z=0$; pero siendo y una cantidad real, z no puede ser igual á cero, porque entónces x no representaria una raíz imaginaria. Por consiguiente, se hallarán todas las raíces imaginarias de la ecuacion $f(x)=0$, determinando todos los sistemas de valores reales de y y de z, que verifican al sistema de ecuaciones.

$$A=0,\ B=0.$$

y sustituyendo despues todos estos valores en la relacion [1]

Haciendo la sustitucion de x por $y+z\sqrt{-1}$, en la ecuacion $f(x)=0$, hallaremos (183) que las ecuaciones $A=0$, $B=0$, son

$$f(y)-\frac{1}{2}f''(y)z^2+\frac{1}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(y)z^4-\frac{1}{1.2.3.4.5.6}f^{\text{VI}}(y)z^6+\ldots=0,$$

$$f'(y)-\frac{1}{1.2.3}f'''(y)z^2+\frac{1}{1.2.3.4.5}f^{\text{V}}(y)z^4-\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}f^{\text{VII}}(y)z^6+\ldots=0.$$

De modo, que eliminando entre estas ecuaciones una de las incógnitas y ó z, hallaremos una ecuacion final que no contendrá más que una incógnita, se determinarán las raíces reales de esta ecuacion, y sustituyéndolas en $A=0$ ó $B=0$, determinaremos los valores correspondientes de la incógnita eliminada. Una vez hallados los sistemas de valores reales que verifican á estas dos ecuaciones, los sustituiremos en la igualdad [1], y obtendremos las raíces imaginarias de la propuesta.

Determinacion de las raíces imaginarias de una ecuacion, por la de los cuadrados de las diferencias. Soluciones extrañas

349. Sean $a, b, c, d,\ldots$ las raíces reales de la ecuacion $f(x)=0$, y $p\pm q\sqrt{-1}$, $p'\pm q'\sqrt{-1},\ldots$ las raíces imaginarias; hallemos las diferencias consecutivas de dos cualesquiera de estas raíces, y tendremos cuatro clases distintas, á saber:

1.ª Diferencias entre *dos raíces reales*, tales como $a-b$, $a-c$, $b-c$, $b-d$, etc.

2.ª Diferencias entre *dos raíces imaginarias conjugadas*, tales como $p+q\sqrt{-1}-(p-q\sqrt{-1})=2q\sqrt{-1}$, $2q'\sqrt{-1}$, $2q''\sqrt{-1}$, etc.

3.ª Diferencias entre *una raiz real y otra imaginaria*, tal como $a-p-q\sqrt{-1}$, $a-p+q\sqrt{-1}$, $a-p'+q'\sqrt{-1}$, $b-p-q\sqrt{-1}$, etc.

4.ª Diferencias de *raíces imaginarias no conjugadas*, tales como $p+q\sqrt{-1}-(p'+q'\sqrt{-1})=p-p'+(q-q')\sqrt{-1}$, $p-p''+(q-q'')\sqrt{-1}$, etc.

Elevando cada una de estas diferencias al cuadrado, se tendrá que los cuadros de la diferencia de las primera especie, son esencialmente *números positivos*; los cuadrados de las diferencias de la segunda especie son *negativos*, é iguales á $-4q^2$, $-4q'^2$, $-4q''^2$,— etc.; los cuadrados de la tercera y cuarta especie son generalmente *expresiones imaginarias*.

Por consiguiente, si nosotros suponemos formada la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de las raíces de la propuesta, las raíces reales negativas de esta ecuacion son, generalmente, *los cuadrados de las diferencias de dos raíces imaginarias conjugadas.*

Esto supuesto, sean $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, etc., las raíces negativas de la ecuacion de los cuadrados de las diferencias, las cuales se podrán obtener segun las reglas dadas en las lecciones anteriores; y por lo dicho se tendrá

$$4q^2=\alpha,\ 4q'^2=\beta,\ 4q''^2=\gamma,\ 4q'''^2=\delta,\ldots$$

de donde se deduce

$$q=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha},\ q'=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta},\ q''=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\gamma},\ldots$$

Una vez conocidos los valores q, q', q'', etc., se obtendrán los correspondientes p, p', p'', etc., sustituyendo z por $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{\beta}$, etc., en las ecuaciones $A=0$, $B=0$, obtenidas anteriormente, y sus primeros miembros adquirirán por cada una de estas sustituciones un divisor comun en y, que igualado á cero dará los valores p, p', p'', etc.

350. Si aconteciese que alguna de las raíces reales fuera igual á la parte real de una imaginaria, ó que dos imaginarias no conjugadas tuviesen comun la parte real; es decir, que si se tuviera, por ejemplo, $a=p$ ó $p=p'$, los cuadrados de las diferencias de estas raíces serian cantidades esencialmente negativas, é iguales el uno á $-q^2$, y el otro á $-(q-q')^2$; por consiguiente, tomando las mitades de las raíces cuadradas de estas cantidades, no hallaremos, como por el método general se ha dicho, valores convenientes de z, que unidos con otros de y, den las raíces imaginarias de la propuesta.

Para conocer si una raíz negativa de la ecuacion de los cuadrados de las diferencias dará valores convenientes de z, no hay más que sustituirla en las ecuaciones $A=0$ y $B=0$; y si sus primeros miembros adquieren por esta sustitucion un divisor comun que igualado á cero dá valores reales para y, la raíz será buena, y de ningun modo lo será en el caso contrario.

Tambien se pueden obtener las solas raíces negativas convenientes, observando que si $a=p$, habrá en la ecuacion de los cuadrados de las diferencias dos raíces negativas por lo ménos iguales á $-q^2$; y si $p=p'$, otras dos por lo menos iguales á $-(q-q')^2$. Sólo las raíces simples de esta ecuacion serán las convenientes; luego hallando por medio de la teoría de las raíces iguales la ecuacion $X_1=0$, que no contiene más que raíces sencillas de la propuesta, y tomando de ésta las negativas, tendremos las cantidades que, igualadas respectivamente á $-4q^2$, $-4q'^2$, etc., nos darán los valores q, q', q'', etc., que se buscan.

Divisores conmensurables de segundo grado.

351. Se tendria la resolucion completa de una ecuacion algebráica cualquiera $x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\text{etc.}=0$, si su primer miembro pudiera descomponerse en el producto de dos factores. En efecto, sea la ecuacion propuesta

$$f(x)=0,$$

y supongamos que su primer miembro se puede descomponer en el producto de los dos factores X é Y, en cuyo caso se tendrá

$$XY=0.$$

Para que se verifique esta ecuacion, es menester que por lo ménos se reduzca á cero uno de los factores; de modo, que se podrá descomponer en las dos ecuaciones

$$X=0,\quad Y=0,$$

que evidentemente son de un grado inferior que el de $f(x)=0$.

De la misma manera podriamos descomponer cada una de estas en otras dos de menor grado, y así sucesivamente, de manera que la resolucion de la ecuacion propuesta vendria á reducirse á la de varias ecuaciones de primero y segundo grado, que se saben resolver completamente.

Desgraciadamente este método es impracticable, porque en general se necesita resolver una ecuacion de un grado superior que el de la propuesta, para verificar la descomposicion de su primer miembro en el producto de dos factores, de los cuales uno de ellos sea por lo ménos de segundo grado.

En efecto, sea $f(x)=0$ la ecuacion del grado m, cuyo primer miembro queremos descomponer en el producto de los dos factores X é Y. Representemos X por el polinómio del grado n, $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+\text{etc.}$, y hallemos p, q, r, etc., con la condicion de que X sea un divisor de $f(x)$.

Para ello dividamos $f(x)$ por X, y continuemos la operacion hasta obtener un resto del grado $n-1$, el cual, como debe ser nulo con independencia de x, igualaremos á cero sus n coeficientes, lo que nos dará n ecuaciones, de las cuales deduciremos los valores de las indeterminadas p, q, r, ...

Para resolver este sistema de ecuaciones, tenemos que principiar por eliminar todas las indeterminadas ménos una, lo que dará una ecuacion final en p, por ejemplo, que será del grado

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{2\,.\,3\,.\,4\ldots n}.$$

Porque siendo el primer miembro $f(x)$ igual al producto de m factores binómios correspondientes á las raíces de la ecuacion propuesta, el divisor $X=x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+$etc. será el producto de n de estos factores; y como productos de n factores se pueden formar tantos como combinaciones se pueden hacer con m cosas tomadas de n en n, se sigue que habrá un número de estos productos representado por $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{2\,.\,3.\,4\ldots n}$, y por tanto, cada una de las interminadas p, q, r, etc., tendrá tantos valores como indica ese número de combinaciones; luego la ecuacion que dé uno de estos valores, p por ejemplo, debe darnos los demás, y por consiguiente será del grado que hemos marcado.

Ahora bien, sólo cuando demos á n los valores 1 y $m-1$, se reducirá la expresion $\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{2\,.\,3\ldots n}$ al valor m; y para valores de n comprendidos entre estos dos límites, esta expresion recibirá un valor mayor que m; luego la descomposicion del primer miembro de una ecuacion en factores, de los cuales uno de ellos sea por lo ménos de segundo grado, depende de una ecuacion de un grado mayor que el de la propuesta.

352. Si queremos descomponer el primer miembro de una ecuacion $f(x)=0$ en factores conmensurables de segundo grado, de la forma x^2+px+q, dividiremos $f(x)$ por x^2+px+q, y continuaremos los cálculos hasta llegar á un resto de primer grado, que será de la forma $Ax+B$; y como este resto debe ser cero con independencia de x, igualaremos á cero los coeficientes A y B, lo que dará las dos ecuaciones

$$A=0 \quad \text{y} \quad B=0.$$

Eliminando ahora una de las indeterminadas, q por ejemplo, hallaremos la ecuacion final $P=0$; que dará todos los valores de p, que serán tantos como factores de segundo grado de la forma

x^2+px+q pueden dividir á $f(x)$; y como estos son tantos como combinaciones se pueden hacer con m cosas tomadas de 2 en 2, el grado de dicha ecuacion final será $\frac{1}{2}m(m-1)$. Si en vez de eliminar q hubiéramos eliminado p, la ecuacion final $Q=0$ á que llegaríamos, sería por la misma razon del mismo grado $\frac{1}{2}m(m-1)$.

Ahora bien, si se tiene $m=3$, $\frac{1}{2}m(m-1)$ será igual 3; y si m es mayor que 3, la expresion $\frac{1}{2}m(m-1)$ será mayor que m; luego la determinacion de una de las cantidades p ó q, dependerá de una ecuacion de un grado mayor que m, si el grado de la ecuacion propuesta $f(x)=0$ es mayor que 3. La descomposicion en factores del primer miembro de una ecuacion, no es por consiguiente un método eficaz para la resolucion completa de las ecuaciones, como á primera vista pudiera creerse.

Con todo, si hallamos, por los medios expuestos en las lecciones anteriores, las raíces conmensurables de la ecuacion $P=0$, las sustituimos en una de las ecuaciones $A=0$ y $B=0$, y determinamos los valores conmensurables correspondientes de q, cada uno de los sistemas que hallemos dará un divisor conmensurable de segundo grado del primer miembro $f(x)$, factor que, igualado á cero, dará dos raíces de la ecuacion propuesta, la cual se podrá reducir á otra de un grado inferior dividiendo por el producto de todos estos factores.

Este método de reduccion se emplea con poca frecuencia, por los cálculos tan prolijos que hay que hacer para hallar la ecuacion final $P=0$ ó $Q=0$.

353. Sea, por ejemplo, hallar los divisores de segundo grado de la ecuacion de tercero, la cual, privada de su segundo término, podrá siempre reducirse á la forma

$$x^3+Qx+R=0.$$

Segun lo expuesto anteriormente, dividiremos su primer miembro por el trinómio x^2+px+q, lo que dará el resto de primer grado $(p^2+Q-q)x+pq+R$, el cual, como ya se ha dicho, debe ser cero con independencia de x, y por tanto se deberá tener

$$p^2+Q-q=0 \text{ y } pq+R=0.$$

De la segunda ecuacion se saca $q=-\frac{R}{p}$; y sustituyendo este valor en la primera, da la ecuacion

$$p^3+Qp+R=0 \qquad [1];$$

de donde deduciremos los valores de p, que sustituidos en la expresion $q=-\frac{R}{p}$, darán á conocer los valores correspondientes de q.

La ecuacion final [1] es la misma ecuacion propuesta, en la que se ha reemplazado x por p; lo cual debe ser así, porque cada divisor de segundo grado debe ser el producto de dos factores de primero, y el coeficiente del segundo término de cada uno de estos factores es la suma de dos raíces de la ecuacion propuesta tomada con signo contrario; de modo, que si estas raíces son α, β y γ, los divisores de segundo grado serán

$$(x-\alpha)(x-\beta),\ (x-\alpha)(x-\gamma),\ (x-\beta)(x-\gamma),$$

y los diversos valores de p serán

$$-(\alpha+\beta),\ -(\alpha+\gamma),\ -(\beta+\gamma);$$

pero puesto que el coeficiente del segundo término de la ecuacion propuesta es cero, se tendrá

$$\alpha+\beta+\gamma=0,$$

de donde se deduce

$$\gamma=-(\alpha+\beta),\ \beta=-(\alpha+\gamma),\ \alpha=-(\beta+\gamma);$$

luego los valores de p, no son otra cosa que las raíces mismas de la ecuacion propuesta, y por tanto la ecuacion [1] debe ser la misma ecuacion dada $x^3+Px+Q=0$.

354. Sea en segundo lugar la ecuacion de cuarto grado privada de su segundo término

$$x^4+Qx^2+Rx+S=0.$$

Dividiendo su primer miembro por el trinómio x^2+px+q, llegaremos á obtener el resto

$$(R-Qp+2pq-p^3)x+S-Qq+q^2-p^2q,$$

que como debe ser nulo, cualquiera que sea el valor de x, igualaremos á cero sus coeficientes, lo que dará las dos ecuaciones

$$p^3-2pq+Qp-R=0 \text{ y } q^2-(p^2+Q)q+S=0.$$

Si ahora eliminamos la indeterminada q entre estas ecuaciones, hallaremos una ecuacion final P=0, que será, como ya sabemos, del grado $\frac{1}{2}\times4\times3=6$; pero que no contendrá más que potencias pares, y por tanto podrá reducirse á una de tercero, haciendo $p^2=z$. En efecto, si designamos por α, β, γ, δ, las cuatro raíces de la ecuacion propuesta, los valores de p serán

$$-(\alpha+\beta),\ -(\alpha+\gamma),\ -(\alpha+\delta),\ -(\beta+\gamma),\ -(\beta+\delta),\ -(\gamma+\delta).$$

Siendo cero el coeficiente del segundo término, se deberá tene

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0,$$

de donde

$$(\alpha+\beta)=-(\gamma+\delta),\ (\alpha+\gamma)=-(\beta+\delta),\ (\alpha+\delta)=-(\beta+\gamma);$$

lo cual prueba, que los tres últimos valores de p son iguales y de signos contrarios á los tres primeros; luego la ecuacion final en p que resulte de la eliminacion, no contendrá sino potencias pares de p; y por tanto, segun hemos dicho, se podrá reducir á un grado mitad.

Haciendo la eliminacion, hallaremos la ecuacion final

$$P^6+2Qp^4+(Q^2-4S\,p^2-R^2=0,$$

la cual se convertirá, haciendo $p^2=z$, en la de tercer grado

$$z^3+2Qz^2+(Q-4S)z-R^2=0.$$

355. Sea, por último, la ecuacion completa de cuarto grado.

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0.$$

Si aplicamos á esta ecuacion el procedimiento anterior para descomponer su primer miembro en factores de segundo grado de la forma x^2+px+q, las ecuaciones de condicion serán

$$p^3+Pp^2+Bp-(2p+P)q+R=0,\quad q^2-(p^2+Pp+Q)q+S=0.$$

Sacando el valor de q de la primera, y sustituyéndolo en la segunda, hallaremos la ecuacion final en p, que será, segun sabemos, de *sexto* grado, pero que se podrá reducir fácilmente á otra de grado mitad. En efecto, sean, como en el caso anterior, α, β, γ, δ, las cuatro raíces de la ecuacion propuesta, entre las cuales se verificará la igualdad

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-P.$$

Los seis valòres de p serán, como en el caso anterior,

$$-(\alpha+\beta),\ -(\alpha+\gamma),\ -(\alpha+\delta),\ -(\beta+\gamma),\ -(\beta+\delta),\ -(\gamma+\delta),$$

y la suma, tomada con signo contrario, será evidentemente igual al triplo de la suma de las raíces de la ecuacion propuesta; pero la suma de estos seis valores es igual tambien al coeficiente del segundo término de la ecuacion final en p, tomado con signo contrario, de modo que si lo representamos por P', se tendrá

$$P'=3(\alpha+\beta+\gamma+\delta).$$

Si ahora trasformamos la ecuacion final en p, en otra que carezca de su segundo término, tendremos que tomar una nueva incógnita p', y hacer $p=p'-\frac{1}{6}P'$; de donde se deduce

$$p'=p+\tfrac{1}{6}P'.$$

Reemplazando p por cada uno de sus seis valores, y P' por $3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, se tendrán los seis valores de p', que serán

$$p'=-(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta),$$
$$p'=-(\alpha+\gamma)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=-\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)+\tfrac{1}{2}(\beta+\delta),$$
$$p'=-(\alpha+\delta)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=-\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)+\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma),$$
$$p'=-(\beta+\gamma)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=-\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta),$$
$$p'=-(\beta+\delta)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=-\tfrac{1}{2}(\beta+\delta)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma),$$
$$p'=-(\gamma+\delta)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=-\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)+\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

donde vemos, que los tres últimos valores de p' son iguales y de signos contrarios á los tres primeros; luego la ecuacion en p' que hallemos, no deberá contener más que potencias pares de p'; y por tanto, haciendo $p'^2=z$, se hallará una ecuacion de tercer grado, cuyas raíces, sustituidas en la relacion anterior, darán los seis valores de p'; y estos valores, sustituidos á su vez en la relacion $p=p'-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, darán á conocer los valores que se buscan de p.

Luego la resolucion de una ecuacion cualquiera de cuarto grado, puede por este medio, debido á *Descartes*, reducirse á la de una ecuacion de tercero.

356. Terminaremos esta leccion, indicando la marcha que se debe seguir en la resolucion general de una ecuacion algebráica cualquiera, que es la siguiente:

1.° Se hará racional en el caso de no serlo (247), y se reducirá á la forma ordinaria $f(x)=0$ (174).

2.° Si sus coeficientes son fraccionarios, se trasformará en otra ecuacion de la misma forma ordinaria, pero cuyos coeficientes sean enteros (256).

3.° Se hallarán las raíces conmensurables de esta ecuacion (313), que serán todas enteras; y sustituyéndolas en la fórmula que ha servido para hallar esta trasformada, obtendremos las raíces conmensurables de la propuesta, tanto enteras como fraccionarias.

4.° Si la ecuacion que resulta despues de dividir por los factores conmensurables de primer grado, correspondientes á las raíces conmensurables, es de un grado mayor que el quinto, se le aplicará el procedimiento de las raíces iguales; por cuyo medio se reducirá, si es que tiene raíces múltiples, á otras de raíces diferentes (277).

5.° Se hará la separacion de las raíces inconmensurables por cualquiera de los métodos explicados en la Leccion XXXV.

6.° Una vez hecha la separacion, se procederá á la investigacion de las raíces con un cierto grado de aproximacion por cualquiera de los métodos, ya sea el de los *límites*, ya el de *Lagrange* (332 y 333), y por ellos se calcula la raiz que se busca con una aproximacion menor que una décima.

7.° Despues se continuará la aproximacion de esta raíz por el método de *Newton* ó por el de las *partes proporcionales*, ó bien por la combinacion de los dos explicados en la Leccion XXXVII.

8.° Ultimamente, se pasará á determinar las raíces imaginarias, como se ha dicho al principio de esta leccion.

LECCION XXXIX.

Resolucion algebráica de las ecuaciones binómias.—Condiciones que deben existir entre los exponentes de dos ecuaciones binómias para que tengan raíces comunes.—Ecuaciones trinómias.

Resolucion algebráica de las ecuaciones binómias.

357. Se llama *ecuacion binómia ó de dos términos*, aquella que por medio de las operaciones ordinarias del Algebra puede reducirse á la forma

$$x^m-A=0 \qquad [1].$$

Las raíces de esta ecuacion son los diversos valores de cualquiera naturaleza que sean, que elevados á la potencia m, reproducen el número A; es decir, son los diversos valores de la expresion $\sqrt[m]{A}$. Ahora bien, la ecuacion [1], siendo del grado m, tiene m raíces (181), y todas son desiguales; porque x^m-A, y su derivada mx^{m-1}, no tienen factores comunes. Luego todo radical del emésimo grado tiene m valores diferentes, como se ha dicho ya en el Algebra elemental.

Sea α uno de los valores de $\sqrt[m]{A}$, ó lo que es lo mismo, una de las raíces de la ecuacion [1], de modo que se tendrá $\alpha^m=A$; hagamos $x=\alpha y$, sustituyamos este valor de x en la ecuacion, y tendremos $\alpha^m y^m - A = 0$, ó $\alpha^m y^m = A$; de donde, dividiendo por la igualdad anterior $\alpha^m = A$, resultará

$$y^m - 1 = 0 \qquad [2].$$

De aquí se deduce, que para obtener todas las raíces de la ecuacion propuesta, ó sea para hallar todos los valores de $\sqrt[m]{A}$, se multiplicará uno cualquiera de ellos por las m raíces *emésimas* de la unidad.

358. Si suponemos que la cantidad A sea real, y consideramos los dos casos que pueden presentarse, segun que sea positiva ó negativa, tendremos que resolver las dos ecuaciones

$$x^m - A = 0, \quad x^m + A = 0.$$

Si ahora suponemos que α sea la *raíz aritmética* de A, y hacemos como anteriormente $x = \alpha y$, la resolucion de las dos ecuaciones anteriores se reducirá respectivamente á la de estas otras

$$y^m - 1 = 0, \quad y^m + 1 = 0,$$

á las cuales, por ser recíprocas, se les podrá aplicar el método indicado en la Leccion XXX.

Como m puede ser par ó impar en cada una de las anteriores ecuaciones, tendremos que considerar los cuatro casos siguientes:

$$y^{2n} - 1 = 0, \quad y^{2n} + 1 = 0, \quad y^{2n+1} - 1 = 0, \quad y^{2n+1} + 1 = 0.$$

Primer caso. $y^{2n} - 1 = 0$.

Siendo esta ecuacion recíproca y de grado par, cuyos coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales y de signos contrarios, tendrá las raíces reales $+1$ y -1 (286—2.ª), y no podrá tener otras de esta especie; pues cualquiera otra cantidad real distinta de la unidad, positiva ó negativa, elevada á una potencia de grado par, dá un resultado positivo distinto de 1.

Siendo $+1$ y -1 raíces de esta ecuacion, su primer miembro será divisible por $(y-1)(y+1) = y^2 - 1$; de modo, que efectuando esta division, obtendremos una ecuacion recíproca, que no teniendo la raíz $+1$ ni -1, se le podrá aplicar la regla del núm. 288.

Ejemplo. Sea la ecuacion binómia $x^6 - 8 = 0$, la que queremos resolver. Hallando la raíz *aritmética* de $\sqrt[6]{8}$, tendremos (*Aritmética* 297) $\sqrt[6]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$. Haciendo ahora $x = y\sqrt{2}$, y sustituyendo este valor, hallaremos, despues de dividir por $(\sqrt{2})^6=8$, la ecuacion

$$y^6-1=0.$$

Siendo raíces de esta ecuacion $+1$ y -1, dividiremos su primer miembro por y^2-1, lo que dará la nueva ecuacion recíproca

$$y^4+y^2+1=0,$$

que podrá reducirse á una ecuacion de segundo grado, ya sea aplicándole el método de las ecuaciones recíprocas, ya considerándola como una ecuacion bicuadrada; de cualquiera manera que la consideremos, hallaremos para valores de y las expresiones

$$y=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2} \text{ é } y=\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2},$$

y los seis valores de la ecuacion propuesta serán por consiguiente

$$+\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2}\times\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ \sqrt{2}\times\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$\sqrt{2}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},\ \sqrt{2}\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

359. La resolucion de la ecuacion $y^{2n}-1$, puede reducirse á la de otras dos de grado mitad, observando que su primer miembro es la diferencia de los cuadrados de y^n y 1; de modo, que se descompondrá en

$$y^{2n}-1=(y^n+1)(y^n-1)=0;$$

y por tanto, la propuesta quedará resuelta cuando lo estén las dos ecuaciones más sencillas $y^n+1=0$ é $y^n-1=0$.

Aplicando este método á la ecuacion anterior $y^6-1=0$, hallaremos que las ecuaciones en que se descompone, son

$$y^3+1=0 \quad \text{é} \quad y^3-1=0,$$

cuyas ecuaciones dan fácilmente los seis valores de y

$$-1,\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ 1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

y multiplicando estos valores por $\sqrt{2}$, hallaremos los de x en la ecuacion $x^6-8=0$.

Segundo caso. $y^{2n}+1=0$.

Esta ecuacion no tiene raíces reales, y se podrá reducir, segun la teoría de las ecuaciones recíprocas, á otra del grado mitad, dividiendo por y^n y haciendo despues $y+\frac{1}{y}=z$.

Ejemplo. Sea la ecuacion $y^6+1=0$.

Aplicando á esta ecuacion la teoría de las recíprocas, hallaremos la trasformada

$$y^3+\frac{1}{y^3}=0.$$

Haciendo $y+\frac{1}{y}=z$, y calculando el valor de $y^3+\frac{1}{y^3}$, se tendrá

$$z^3-3z=0;$$

de donde

$$z=0;\ z=\sqrt{3},\ z=-\sqrt{3}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresion $y=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2}$, hallaremos

$$\text{para } z=0, \qquad y=\pm\sqrt{-1};$$

$$\text{para } z=\sqrt{3}, \quad y=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2};$$

$$\text{para } z=-\sqrt{3}, y=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{-1}}{2}.$$

Tercer caso. $y^{2n+1}-1=0$.

Esta ecuacion tiene evidentemente la raíz $+1$, y no puede tener ninguna otra real.

Dividiendo por el factor $y-1$, se hallará la ecuacion recíproca

$$y^{2n}+y^{2n-1}+y^{2n-2}+\ldots+y+1=0,$$

que por no tener ya la raíz real $+1$ ni -1, se le puede aplicar la regla de las ecuaciones recíprocas para reducirla á otra de un grado mitad.

Ejemplo. Sea la ecuacion $y^7-1=0$. Partiendo su primer miembro por $y-1$, hallaremos la nueva ecuacion

$$y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1=0.$$

Para resolver esta ecuacion, dividiremos por y^3, y agrupando los términos equidistantes de los extremos, tendremos

$$\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=0.$$

Haciendo ahora $y+\frac{1}{y}=z$, de donde (287) $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$, $y^3+\frac{1}{y^3}=z^3-3z$, y sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, hallaremos, despues de toda reduccion, esta otra

$$z^3+z^2-2z-1=0,$$

que ya se sabe resolver, como más adelante veremos.

Cuarto caso. $y^{2n+1}+1=0$.

Si hallamos la trasformada en $-y$, tendremos la ecuacion del tercer caso $y^{2n+1}-1=0$; de modo, que hallando las raíces de esta ecuacion segun se ha dicho, y tomándolas con signos cambiados, se tendrán las raíces de la ecuacion propuesta.

Ejemplo. Sea la ecuacion $y^5+1=0$. Cambiando y en $-y$, se hallará $y^5-1=0$.

Partiendo por $y-1$, é igualando el cociente á cero, se tendrá la ecuacion

$$y^4+y^3+y^2+y+1=0.$$

Aplicando ahora el método de las ecuaciones recíprocas, hallaremos

$$\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+1=0.$$

Hagamos $y+\frac{1}{y}=z$, de donde $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$, sustituyamos estos valores en la ecuacion anterior, y hallaremos

$$z^2+z-1=0.$$

De esta ecuacion se deducen los valores de z

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

los cuales, sustituidos en la expresion $y+\frac{1}{y}=z$, dan para valores de y

$$y=\tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{-1},$$

$$y=\tfrac{1}{4}(-1-\sqrt{5})\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sqrt{-1}.$$

Luego las raíces de la ecuacion propuesta, serán estos valores tomados con signos cambiados.

360. *Despues de suprimidas las raices reales de la ecuacion* $y^m \pm 1 = 0$, *la trasformada en* z *que resulta de la relacion* $y + \frac{1}{y} = z$, *tiene todas sus raices reales.*

En efecto, sea $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ uno de los valores imaginarios de y; el valor recíproco, será

$$\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Pero siendo $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ una raíz de la ecuacion dada $y^m \pm 1 = 0$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ será tambien raíz de esta ecuacion; de modo, que se tendrá

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m = \pm 1, \quad (\alpha-\beta\sqrt{-1})^m = \pm 1,$$

de donde se deduce

$$[(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha-\beta\sqrt{-1})]^m = 1 \quad \text{ó} \quad (\alpha^2+\beta^2)^m = 1;$$

y puesto que $\alpha^2+\beta^2$ es una cantidad esencialmente positiva, es necesario, para que la igualdad anterior se verifique, que se tenga $\alpha^2+\beta^2 = 1$; luego

$$\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{\alpha^2+\beta^2} = \alpha-\beta\sqrt{-1}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresion que da los de z, se tendrá

$$z = \alpha+\beta\sqrt{-1} + \frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \alpha+\beta\sqrt{-1} + \alpha-\beta\sqrt{-1} = 2\alpha,$$

cantidad esencialmente real, segun queriamos demostrar.

Condiciones que deben existir entre los exponentes de dos ecuaciones binomias para que tengan raices comunes.

361. *El número de raices comunes á las dos ecuaciones binómias* $y^m - 1 = 0$, $y^n - 1 = 0$, *es igual al máximo comun divisor de los exponentes* m *y* n; *de modo, que si este máximo comun divisor es* d, *ambas ecuaciones tendrán* d *raices comunes; si* m *y* n *son primos entre sí, no tendrán más raiz comun que la unidad.*

En efecto, suponiendo que $m > n$, y efectuando la division de $y^m - 1$ por $y^n - 1$, hallaremos los restos sucesivos $y^{m-n} - 1$, $y^{m-2n} - 1$, $y^{m-3n} - 1$, etc.; de modo, que si suponemos que n está contenido exactamente en m, llegaremos á un último resto $y^0-1=0$, y por tanto la division será exacta, y probará que todas las raíces de la segunda ecuacion lo son tambien de la primera. Si n no está contenido exactamente en m, se tendrá $m=nq+r$, siendo r un número menor que n, y la division se podrá continuar hasta llegar al resto y^r-1.

De la misma manera, si suponemos $n=rq'+r'$, la division de y^n-1 por y^r-1, dará el resto $y^{r'}-1$, y así sucesivamente. Luego si suponemos que sea d el $m.\ c.\ d.$ de los exponentes m y n, el último divisor será y^p-1, y el resto correspondiente será $y^0-1=0$; por consiguiente, las dos cantidades y^m-1 é y^n-1, tendrán el $m.\ c.\ d.$ y^d-1; y las ecuaciones $y^m-1=0$ é $y^n-1=0$, tendrán d raíces comunes, que serán las de la ecuacion $y^d-1=0$ (215).

Si m y n son primos entre sí, no tendrán más raíz comun que la unidad.

362. *Si α es una raíz de la ecuacion* y^m-1, *todas las potencias enteras positivas ó negativas de α serán tambien raíces de esta ecuacion.*

En efecto, siendo α raíz de la ecuacion y^m-1, se tendrá $\alpha^m=1$. Sea n un número entero positivo ó negativo, y tendremos

$$(\alpha^m)^n=1;$$

pero $(\alpha^m)=\alpha^{mn}=(\alpha^n)^m$; luego $(\alpha^n)^m=1$, y por tanto α^n es raíz de la ecuacion propuesta.

Las potencias de α no pueden dar más de m raíces diferentes de la ecuacion propuesta, y estas corresponderán á los valores de n comprendidos entre 1 y m; porque de $\alpha^m=1$, se deduce

$$\alpha^{m+1}=\alpha^m\times\alpha=\alpha,\quad \alpha^{m+2}=\alpha^m\times\alpha^2=\alpha^2,\ \text{etc.};$$

y si damos á n valores negativos, tendremos

$$\alpha^{-1}=\alpha^m\times\alpha^{-1}=\alpha^{m-1},\quad \alpha^{-2}=\alpha^m\times\alpha^{-2}=\alpha^{m-2},\ \text{etc.}$$

363. *Si el exponente* m *de la ecuacion* $y^m-1=0$ *es un número primo, cualquiera raíz α de esta ecuacion, distinta de la unidad, reproduce todas las demás elevándola sucesivamente á las potencias primera, segunda, etc., hasta la* emésima.

En efecto, acabamos de ver, que si α es raíz de $y^m-1=0$, cualquiera potencia entera de α tambien lo es; por tanto, las m potencias que se obtienen elevando α á la primera, segunda, etc., hasta la *emésima*, serán todas raíces de la ecuacion dada: ahora sólo falta probar que estas m raíces son desiguales; porque si no lo fueran, y se tuviera, por ejemplo, $\alpha^n = \alpha^{n'}$, siendo n y n' menores que m, se tendria tambien $\alpha^{n-n'}=1$, y por tanto α sería una raíz comun á las ecuaciones

$$y^m - 1 = 0 \quad \text{é} \quad y^{n-n'} - 1 = 0,$$

lo que es imposible, pues siendo m un número primo, es primo con n y n'; luego las m potencias de α desde la primera á la enésima, son raíces diferentes de $y^m = 1$; y como esta ecuacion no tiene más que m raíces diferentes, es claro que todas se han obtenido por la elevacion á potencias de una de ellas α, segun queriamos demostrar.

364. *Si el exponente* m *de la ecuacion* $y^m - 1 = 0$ *se puede descomponer en el producto de varios números primos* p, q, r, *etc., todas las raíces de la ecuacion propuesta se obtendrán multiplicando las de la ecuacion* $y^p - 1 = 0$ *por las de* $y^q - 1 = 0$, *los productos de estas dos por las de* $y^r - 1 = 0$, *y así sucesivamente.*

Sea en primer lugar $m=pq$; p y q son dos números primos entre sí. Representemos por β una raíz de la ecuacion $y^p - 1 = 0$, y por γ una raíz de $y^q - 1 = 0$; de modo, que se tendrá

$$\beta^p = 1 \quad \text{y} \quad \gamma^q = 1,$$

de donde

$$\beta^{pq} = 1 \quad \text{y} \quad \gamma^{pq} = 1;$$

y por tanto, β y γ son raíces de la ecuacion propuesta $y^m = y^{pq} = 1$.

El producto $\beta\gamma$ tambien será raíz de dicha ecuacion; porque de las igualdades anteriores, se deduce

$$\beta^{pq} \times \gamma^{pq} = (\beta\gamma)^{pq} = 1.$$

Ahora bien, la raíz β tiene p valores; la raíz γ tiene q, y por tanto el producto $\beta\gamma$ tendrá pq valores, los cuales vamos á demostrar que son todos diferentes. En efecto, sea β' una raíz de $y^p - 1 = 0$ diferente de β, y γ' otra raíz de $y^q - 1 = 0$ diferente de γ, y supongamos que pudiera tenerse $\beta\gamma = \beta'\gamma'$. En este caso, se tendria tambien $\beta^p\gamma^p = \beta'^p\gamma'^p$; y puesto que $\beta^p = \beta'^p = 1$, seria $\gamma^p = \gamma'^p$; luego $\frac{\gamma^p}{\gamma'^p} = \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)^p = 1$. Pero siendo γ y γ' raíces de la ecuacion $y^q - 1 = 0$, se tendrá $\gamma^q = \gamma'^q$, de donde $\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)^q = 1$; luego si los dos productos $\beta\gamma$ y $\beta'\gamma'$ fueran iguales, las dos ecuaciones $y^p = 1$ é $y^q = 1$ tendrian la raíz comun $\frac{\gamma}{\gamma'}$; y puesto que p y q son primos entre sí, dicha raíz comun seria la unidad, de donde se deduciria $\gamma=\gamma'$ (360), lo cual es contra el supuesto. Luego todas las m raíces de la ecuacion $y^m=y^{pq}=1$, se obtienen multiplicando las p raíces de $y^p=1$ por las q raíces de $y^q=1$, segun queriamos demostrar.

Del mismo modo se demostraria que las m raíces de la ecuacion $y^m=y^{pqr}=1$, en que p, q y r son números primos entre sí, se obtendrian multiplicando las raíces de $y^p=1$ por las de $y^q=1$, y luégo multiplicando estos productos por las raíces de $y^r=1$, y así sucesivamente.

365. Consideremos ahora el caso general en que se tenga

$$m=\alpha^a\beta^b\gamma^c,$$

siendo α, β, y γ números primos. La resolucion de la ecuacion $y^m-1=0$ equivaldrá, segun el número anterior, á la de las ecuaciones

$$y^{\alpha^a}-1=0,\quad y^{\beta^b}-1=0,\quad y^{\gamma^c}-1=0;$$

de modo, que resolviendo estas ecuaciones, la propuesta se tendrá resuelta.

Consideremos una cualquiera de ellas

$$y^{\alpha^a}-1=0 \qquad [1],$$

y veamos cómo se resuelve.

Hagamos $y^{\alpha^{a-1}}=z$; sustituyamos este valor en la anterior, y se obtendrá esta otra

$$z^a-1=0.$$

Esto supuesto, sea r una de las α raíces de esta ecuacion, v_1 el valor aritmético de $\sqrt[\alpha^{a-1}]{r}$, y hagamos $y=v_1y_1$. Los valores de y se hallarán, por consiguiente, multiplicando sucesivamente cada uno de los α valores que puede tener v_1 por los de y_1, que no son otra cosa que las raíces de la ecuacion

$$y_1^{\alpha^{a-1}}-1=0 \qquad [2];$$

porque sustituyendo el valor $y=v_1y_1$ en la ecuacion $y^{\alpha^{a-1}}=z$, y observando que $v_1^{\alpha^{a-1}}=r$, y que r es uno de los α valores de z, siempre podremos dividir la ecuacion que resulte $v_1^{\alpha^{a-1}}y_1^{\alpha^{a-1}}=z$, por la igualdad $v_1^{\alpha^{a-1}}=z$, lo que nos da la ecuacion $y_1^{\alpha^{a-1}}-1=0$; luego, como habiamos dicho, los valores de y_1 son las raíces de la ecuacion [2]. Por consiguiente, la resolucion de la ecuacion propuesta [1], depende de la resolucion de la ecuacion [2], en la cual el exponente de α viene disminuido en una unidad. La resolucion de la ecuacion [2] podrá reducirse, de la misma manera, á la resolucion de otra ecuacion $y^{\alpha^{a-2}}-1=0$, en la cual el exponente de α venga disminuido en otra unidad, y así sucesivamente, hasta llegar á la ecuacion $y^{\alpha}-1=0$, cuyo exponente α es un número primo, que podremos resolver como ya se ha dicho anteriormente.

Ejemplo. Sea la ecuacion $y^8-1=0$, ó $y^{2^3}-1=0$.

Haciendo $y^{2^2}=z$, y sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, hallaremos la nueva ecuacion $z^2-1=0$, cuyas raíces son $r=+1$ y $r=-1$. Los valores de v_1, serán

$$v_1=\sqrt[2^2]{1}=+1,\quad v_1=\sqrt[2^2]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

(*Algebra*, tomo I, núm. 364). Los valores de y serán, segun la relacion $y=v_1 y_1$,

$$y=y_1,\quad y=y_1\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\qquad [3],$$

siendo los valores de y_1 las raíces de la ecuacion $y^{2^2}-1=0$.

Para resolver esta ecuacion, haremos $y^2=z_1$, cuyo valor, sustituido en la anterior, dará la nueva ecuacion $z_1^2-1=0$; las raíces de esta ecuacion son $r_1=1$, $r_1=-1$. Los valores de v_2 serán $v_2=\sqrt{1}=+1$, $v_1=\sqrt{-1}$, y los valores de y_1 serán, segun la relacion $y_1=v_2 y_2$,

$$y_1=y_2,\quad y_1=y_2\sqrt{-1}\qquad [4],$$

siendo los valores de y_2 las raíces de la ecuacion $y_2^2-1=0$, las cuales son evidentemente $y_2=+1$ é $y_2=-1$.

Sustituyendo estos valores en las igualdades [4], hallaremos los de y_1

$$y_1=+1,\ y_1=-1,\ y_1=+\sqrt{-1},\ y_1=-\sqrt{-1},$$

que sustituidos en las igualdades [3], dan los valores de y, ó sean las raíces de la ecuacion dada

$$y=+1,\ y=-1,\ y=+\sqrt{-1},\ y=-\sqrt{-1};$$

$$y=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\ y=-\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\ y=\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\ y=-\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

Aplicando á esta ecuacion el procedimiento indicado en el número 359, se hallará la siguiente:

$$y^8-1=(y^4-1)(y^4+1)=(y^2-1)(y^2+1)(y^2-\sqrt{-1})(y^2+\sqrt{-1})=0,$$

que manifiesta que la resolucion de la propuesta, se reduce á la de las ecuaciones parciales

$$y^2-1=0,\ y^2+1=0,\ y^2-\sqrt{-1}=0,\ y^2+\sqrt{-1}=0,$$

las cuales dan los valores

$$y=\pm 1,\ y=\pm\sqrt{-1},\ y=\pm\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

que son los mismos que hemos hallado anteriormente.

Ecuaciones trinómias.

366. Se da el nombre de *ecuacion trinómia* ó de *tres términos*, á la ecuacion que puede reducirse, por medio de las operaciones ordinarias del Algebra, á la forma

$$Ax^{2m}+Bx^m+C=0 \qquad [1].$$

Las ecuaciones bicuadradas son un caso particular de las ecuaciones trinómias.

Para resolver la ecuacion trinómia [1], haremos $x^m=y$, y dicha ecuacion se convertirá en

$$Ay^2+By+C=0.$$

Sean α y β las dos raíces de esta ecuacion; los valores de x se deducirán de las ecuaciones binómias

$$x^m=\alpha \text{ y } x^m=\beta.$$

Ahora bien, si las cantidades α y β son reales, la resolucion de estas ecuaciones binómias no ofrece dificultad, y se podrá hacer que dependa de la resolucion de la ecuacion binómia $z^m=\pm 1$. Si α y β son imaginarias, podremos obtener la expresion exacta de las raíces de la ecuacion propuesta, por medio de los procedimientos algebráicos, en el caso de ser m un número par; en los demás casos hay que recurrir á expresiones trascendentes.

La resolucion trigonométrica de las ecuaciones binómias y trinómias, puede verse en mis Lecciones de trigonometría.

LECCION XL.

Resolucion algebráica de las ecuaciones de tercer grado.—Discusion de las raíces de la ecuacion de tercer grado.—Resolucion de las ecuaciones de cuarto grado.—Discusion de las raíces de la ecuacion de cuarto grado.

Resolucion algebráica de las ecuaciones de tercer grado.

367. El caso más sencillo que se puede presentar en la resolucion de una ecuacion de tercer grado, es aquel en el que la ecuacion dada sea de la forma

$$x^3=A,$$

en la cual A representa una cantidad real positiva ó negativa.

Aplicando á esta ecuacion el procedimiento indicado en la leccion anterior, tendremos que hacer

$$x=ay,$$

siendo a la raíz cúbica de A obtenida por los procedimientos indicados en Aritmética ó Algebra elemental, segun que A sea un número ó un polinómio; la sustitucion de este valor en la ecuacion propuesta, nos dá

$$a^3y^3=A \quad \text{ó} \quad a^3y^3=a^3,$$

de donde se deduce

$$y^3=1 \quad \text{ó} \quad y^3-1=0.$$

El primer miembro y^3-1 de esta ecuacion es divisible por $y-1$, y dá de cociente y^2+y+1, de modo que la ecuacion anterior se podrá poner bajo la forma de

$$(y-1)\,(y^2+y+1)=0;$$

por consiguiente, se obtendrán todas las raíces de la ecuacion $y^3-1=0$, resolviendo separadamente las dos ecuaciones

$$y-1=0, \quad y^2+y+1=0.$$

La primera da $y=1$, y se deduce de la segunda

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}, \quad \text{ó bien} \quad y=\frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}.$$

La unidad tiene por consiguiente, segun ya sabiamos, tres raíces, que son 1, $\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$. Multiplicando estas tres raíces cúbicas de la unidad por a, se tendrán todas las expresiones de la raíz cúbica de A.

368. Si representamos por α una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad, y observamos que α^2 es igual á la otra, las tres expresiones de la raíz cúbica de A serán

$$\sqrt[3]{A}=a,\ =\alpha a,\ =\alpha^2 a.$$

369. Pasemos á resolver la ecuacion general de tercer grado, que sabemos puede reducirse á la forma

$$y^3+ay^2+by+c=0.$$

Esta ecuacion siempre podremos trasformarla en otra que carezca de segundo término; para lo cual haremos $y=x-\frac{a}{3}$ (259), y se obtendrá una ecuacion privada del segundo término, que podremos representar de un modo general por

$$x^3+3px+2q=0 \qquad [1],$$

siendo p y q cantidades reales, para lo cual basta que a, b y c, lo sean. Ocioso seria el decir que una vez obtenidas las raíces de esta ecuacion, se hallarian las de la propuesta por medio de la relacion $y=x-\frac{a}{3}$, ó sea por $x=y+\frac{a}{3}$.

Entre los diferentes medios que se emplean para resolver una ecuacion de tercer grado, uno de los más sencillos consiste en formar otra que, como la [1], carezca de su segundo término, y de la cual conozcamos una raíz expresada por indeterminadas, de las cuales nos hemos de aprovechar para identificar ambas ecuaciones.

Si de esta identificacion resultan ecuaciones cuya resolucion sea conocida, la ecuacion de tercer grado se hallará resuelta.

Como son dos los coeficientes que contiene la ecuacion [1], se necesitarán dos ecuaciones de condicion para identificarla con otra de la misma forma, por cuya razon nos valdremos de dos indeterminadas para expresar una de las raíces de la ecuacion que hemos de formar.

Con este objeto, hagamos

$$x=m+n \qquad [2];$$

y elevando al cubo, tendremos

$$x^3=m^3+n^3+3m^2n+3mn^2=m^3+n^3+3mn(m+n).$$

Reemplazando ahora el binómio $m+n$ por x, y trasponiendo, se hallará la ecuacion

$$x^3-3mn.x-(m^3+n^3)=0 \qquad [3],$$

que tiene evidentemente la raiz $x=m+n$, y que por tener la misma forma que la ecuacion [1], se podrá identificar con ella, y dará orígen á las ecuaciones de condicion

$$mn=-p, \quad m^3+n^3=-2q \qquad [4].$$

Elevando la primera de estas ecuaciones al cubo, hallaremos el nuevo sistema

$$m^3n^3=-p^3, \quad m^3+n^3=-2q \qquad [5].$$

Por este sistema se conoce el producto y la suma de las cantidades m^3 y n^3; luego los valores de estas cantidades serán las raíces de la ecuacion de segundo grado, en la cual el coeficiente de segundo término sea $2q$, y el último término igual á $-p^3$; de modo que esta ecuacion, llamada *la reducida* de la ecuacion propuesta, será, representando por z la incógnita,

$$z^2+2qz-p^3=0.$$

Las raíces de esta ecuacion son $z=-q\pm\sqrt{q^2+p^3}$; y como las cantidades m^3 y n^3 entran de la misma manera en las ecuaciones de condicion [5], se podrá tomar indistintamente una ú otra de estas raíces para valores de m^3 ó n^3; así, haciendo $m^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$, se tendrá $n^3=-q-\sqrt{q^2+p^3}$, y por consiguiente los valores de m y n serán

$$m=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}, \quad n=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

Cada uno de estos radicales tiene tres valores, que serán, representando el valor aritmético de cada uno por r y r' (368),

$$m=r, \quad m=\alpha r, \quad m=\alpha^2 r;$$
$$n=r', \quad n=\alpha r', \quad n=\alpha^2 r'.$$

Sustituyendo ahora cada uno de estos valores de m y n en la relacion [2], que expresa el valor de una de las raíces de la ecuacion [3], ó de su idéntica, que es la propuesta, hallaremos evidentemente nueve valores, mientras que dicha ecuacion propuesta no debe tener sino tres.

Fácil es explicar por qué es este aumento de valores, y cómo se deben desechar las soluciones extrañas.

Para ello observaremos, que las ecuaciones que identifican la ecuacion [1] con la [3], y de las cuales debemos deducir los valores de m y n, son las ecuaciones [4]; pero los valores de m y n los hemos deducido del sistema [5], el cual no es equivalente al [4], puesto que la primera ecuacion de éste expresa que el producto mn es igual á $-p$, mientras que la primera del sistema [5] indica que el producto mn tiene que ser una de las raíces cúbicas de $(-p)^3$, que son, como ya se sabe, $-p$, $-p\alpha$, $-p\alpha^2$; por consiguiente, los valores de m y n que verifican al sistema [5], tienen que verificar á uno de los tres sistemas

$$\left.\begin{matrix} mn=-p \\ m^3+n^3=-2q \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} mn=-p\alpha \\ m^3+n^3=-2q \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} mn=-p\alpha^2 \\ m^3+n^3=-2q \end{matrix}\right\};$$

donde vemos, que el sistema [5] no sólo comprende las soluciones del sistema [4], que es el primero de los tres anteriores, sino tambien las de otros dos sistemas; por cuya razon no nos debe extrañar haber hallado más raíces de las que corresponden á la ecuacion propuesta. Para obtener las verdaderas raíces de la ecuacion [1], es menester elegir entre las soluciones del sistema [5], aquellas que sólo correspondan al [4], lo cual es muy sencillo, observando que el producto de los valores de m y n ha de ser igual á la cantidad real $-p$.

Combinando el primer valor de m con el primero de n, hallamos

$$mn=rr'=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}\times\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{q^2-q^2-p^3}=-p;$$

luego una de las raíces de la ecuacion propuesta, será, segun la relacion [2],

$$x=r+r'=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

La solucion $m=r$, $n=\alpha r'$, debe desecharse, puesto que da por producto la expresion imaginaria $mn=\alpha rr'=-\alpha p$.

Asimismo se deberán desechar las soluciones

$$\left.\begin{matrix} m=r \\ n=\alpha^2 r' \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} m=\alpha r \\ n=r' \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} m=\alpha r \\ n=\alpha r' \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} m=\alpha^2 r \\ n=r' \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} m=\alpha^2 r \\ n=\alpha^2 r' \end{matrix}\right\}.$$

Sólo deberán sustituirse en la igualdad [2], para obtener las raíces de la ecuacion propuesta, las soluciones

$$\left.\begin{matrix} m=\alpha r \\ n=\alpha^2 r' \end{matrix}\right\} \text{ y } \left.\begin{matrix} m=\alpha^2 r \\ n=\alpha r' \end{matrix}\right\}.$$

que dan los productos reales é iguales á $-p$.

Las raíces de la ecuacion [1] serán por consiguiente

$$x=r+r'=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$x=\alpha r+\alpha^2 r'=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}},$$

$$x=\alpha^2 r+\alpha r'=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}.$$

Discusion de las raíces de la ecuacion de tercer grado.

370. Acabamos de ver que las tres raíces de la ecuacion de tercer grado

$$x^3+3px+2q=0,$$

tienen por expresion

$$x=r+r',\quad x=\alpha r+\alpha^2 r',\quad x=\alpha^2 r+\alpha r';$$

ó poniendo en vez de α y α^2 sus valores (368), y efectuando los cálculos, tendremos

$$x=r+r',$$
$$x=-\tfrac{1}{2}(r+r')+\tfrac{1}{2}(r-r')\sqrt{-3},$$
$$x=-\tfrac{1}{2}(r+r')-\tfrac{1}{2}(r-r')\sqrt{-3}.$$

Siendo la ecuacion, cuyas raíces vamos á discutir, de grado impar, tendrá por lo ménos una raíz real de signo contrario al de su último término; las otras dos raíces podrán ser reales tambien ó imaginarias. Ya hemos visto por el teorema de *Sturm*, á qué condiciones deben satisfacer los coeficientes de una ecuacion de tercer grado, para que sus tres raíces sean reales: veamos ahora de qué clase son en cada caso particular.

Desde luégo podremos observar, que las cantidades r y r' serán ó no imaginarias, segun lo sea ó no el radical $\sqrt{q^2+p^3}$; y este radical será ó no imaginario, segun el signo que tenga la cantidad q^2+p^3; así, pues, consideraremos los tres casos siguientes:

1.º. . . . $q^2+p^3>0$;
2.º. . . . $q^2+p^3=0$;
3.º. . . . $q^2+p^3<0$.

Primer caso. Si $q^2+p^3>0$, los valores de r y r' son reales y desiguales; luego la primera raíz de la ecuacion propuesta será real: las otras dos son imaginarias, puesto que $\frac{1}{2}(r-r')$ es una cantidad real diferente de cero, que se halla afectada del factor imaginario $\sqrt{-3}$. Estas raíces son además, como deben ser, conjugadas.

La raíz real será *positiva* ó *negativa*, segun que q sea *negativa* ó *positiva* (199), lo cual se ve comprobado tambien por las fórmulas; porque si q es, por ejemplo, un número negativo, $-q$ será positivo, $\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}$ será una cantidad positiva, $\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$ tendrá un valor negativo; pero el mayor de estos números en valor absoluto es el primero, que es positivo, luego positiva será la raíz. Lo mismo se verá, que si q es positivo, la raíz real será negativa.

Segundo caso. Cuando $q^2+p^3=0$, los radicales r y r' son iguales á $\sqrt[3]{-q}$; por consiguiente, las tres raíces se reducen á

$$x=r+r'=2\sqrt[3]{-q},$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(r+r')=-\sqrt[3]{-q},$$

$$x=-\tfrac{1}{2}(r+r')=-\sqrt[3]{-q}.$$

Por tanto, las tres raíces son en este caso reales; dos iguales á la mitad de la tercera, y de signo contrario al de esta.

Tercer caso. Si $q^2+p^3<0$, se debe tener $p<0$, y el valor absoluto de p^3 mayor que el de q^2. En este caso r y r' son expresiones imaginarias, y por tanto las tres raíces vienen complicadas de imaginarias, lo cual podria hacer creer que dichas raíces tambien lo eran; pero no es así.

En efecto, siendo la ecuacion de grado impar, debe tener por lo ménos una raíz real de signo contrario al de su último término. Supongamos que r y r' son las determinaciones de los radicales de tercer grado, cuya suma $r+r'$ represente la raíz real de que acabamos de hablar. Siendo $r+r'$ una cantidad real, sólo falta probar que la parte $\tfrac{1}{2}(r-r')\sqrt{-3}$, que se halla en los otros dos valores de x, debe ser real tambien.

Esto es sumamente fácil. En efecto, se tiene evidentemente

$$r-r'=\frac{r^3-r'^3}{r^2+rr'+r'^2}=\frac{r^3-r'^3}{(r+r')^2-rr'}.$$

Pero $r^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$, $r'^3=-q-\sqrt{q^2+p^3}$, de donde $r^3-r'^3=2\sqrt{q^2+p^3}$; además, $rr'=-p$; luego la igualdad anterior se convertirá en

$$r-r'=\frac{2\sqrt{q^2+p^3}}{(r+r')^2+p},$$

y por tanto se tendrá

$$\tfrac{1}{2}(r-r')\sqrt{-3}=\frac{\sqrt{q^2+p^3}\times\sqrt{-3}}{(r+r')^2+p}=\frac{\sqrt{-3(q^2+p^3)}}{(r+r')^2+p}.$$

Ahora bien, se tiene por suposicion $q^2+p^3<0$; luego la cantidad que hay debajo del radical es positiva, y los tres valores de x son por consiguiente reales.

Las fórmulas halladas anteriormente son de muy poca utilidad para hallar los valores de las raíces de la ecuacion de tercer grado cuando se halla en este tercer caso; porque es necesario para ello desarrollar en série cada uno de los radicales de que se compone, por cuya razon se dice que la ecuacion se halla en el *caso irreducible* cuando se verifica la relacion $q^2+p^3<0$. Para hallar los valores de las raíces en este caso, es más fácil recurrir á las fórmulas que se obtienen en la resolucion trigonométrica de estas ecuaciones.

Resolucion de las ecuaciones de cuarto grado.

371. Para resolver una ecuacion general de cuarto grado

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

principiaremos por trasformarla en otra que carezca de su segundo término, la cual podrá reducirse á la forma

$$x^4+4px^2+8qx+4r=0 \qquad [1];$$

despues, siguiendo la misma marcha que en las ecuaciones de tercer grado, haremos

$$x=l+m+n \qquad [2],$$

elevaremos esta igualdad al cuadrado, y obtendremos

$$x^2=l^2+m^2+n^2+2(lm+ln+mn);$$

ó haciendo la trasposicion de los cuadrados,

$$x^2-(l^2+m^2+n^2)=2(lm+ln+mn).$$

Elevando de nuevo al cuadrado, se tiene

$$x^4-2(l^2+m^2+n^2)x^2+(l^2+m^2+n^2)^2=$$
$$4(l^2m^2+l^2n^2+m^2n^2)+8lmn(l+m+n);$$

de donde reemplazando por x el trinómio $l+m+n$, y haciendo la trasposicion de todos los términos, deduciremos

$$x^4-2(l^2+m^2+n^2)x^2-8lmn\,.\,x$$
$$+(l^2+m^2+n^2)^2-4(l^2m^2+l^2n^2+m^2n^2)=0 \qquad [3].$$

Identificando las ecuaciones [1] y [3], se hallarán las relaciones de condicion

$$\begin{aligned} l^2+m^2+n^2&=-2p, \\ lmn&=-q, \qquad [4] \\ (l^2+m^2+n^2)^2-4(l^2m^2+l^2n^2+m^2n^2)&=4r, \end{aligned}$$

cuyo sistema se podrá reemplazar por este otro,

$$\begin{aligned} l^2+m^2+n^2&=-2p, \\ lmn&=-q, \\ l^2m^2+l^2n^2+m^2n^2&=p^2-r, \end{aligned}$$

sustituyendo en la tercer ecuacion $(l^2+m^2+n^2)^2$ por su valor $4p^2$ deducido de la primera, y simplificando despues.

Siendo idénticas las ecuaciones [1] y [3], ambas serán satisfechas por unos mismos valores de la incógnita; y como la segunda queda satisfecha haciendo $x=l+m+n$, la primera tambien tendrá por raíz la suma $l+m+n$; y por tanto, la cuestion queda reducida á deducir el valor de estas indeterminadas, por medio del sistema [4] de ecuaciones de condicion.

Si elevamos la segunda de estas ecuaciones al cuadrado, se conocerá la suma $2p$ de los cuadrados de l, m y n; la suma p^2-r de los productos binarios de estos cuadrados, y su producto q^2; de modo, que dichos cuadrados l^2, m^2 y n^2, serán (185) las raíces de la ecuacion de tercer grado

$$z^3+2pz^2+(p^2-r)z-q^2=0,$$

que se llama la *reducida* de la ecuacion propuesta.

Supongamos que se ha resuelto esta ecuacion, y que se han hallado las tres raíces z', z'', z'''; en ese caso se tendrá, que cada una de estas raíces representará indistintamente uno de los cuadrados l^2, m^2, n^2, puesto que entran cada uno, de la misma manera que los demás, en las ecuaciones de condicion; así, tendremos, extrayendo la raíz cuadrada,

$$l=\pm\sqrt{z'}, \quad m=\pm\sqrt{z''}, \quad n=\pm\sqrt{z'''}.$$

Si combinamos los signos de estos radicales de todas las maneras posibles, hallaremos para la suma $l+m+n$, que expresa una raíz cualquiera de la ecuacion [1], ocho valores; por lo tanto, cuatro combinaciones deben desecharse, puesto que dicha ecuacion no puede tener más que cuatro raíces (181).

El aumento de estos cuatro valores de x, que forman una solucion extraña del sistema [4], proviene de haber elevado al cuadrado la ecuacion $lmn=-q$, dando orígen á la nueva ecuacion $l^2m^2n^2=q^2$, de la cual no sólo se deduce el valor verdadero del producto $lmn=-q$, sino tambien el valor extraño que se introduce al elevar al cuadrado $lmn=q$; por tanto, el valor de los tres radicales que se combinan ha de dar el producto $-q$, es decir, un resultado igual en valor numérico á q, pero de signo contrario. Así, cuando q sea positivo, se tomará un número impar de valores negativos; y se tomará un número par de estos factores negativos, cuando q sea positivo. Por consiguiente, se tendrá:

$$\text{Si } q>0,\quad \left\{\begin{array}{l} x=+\sqrt{z'}+\sqrt{z''}-\sqrt{z'''} \\ x=+\sqrt{z'}-\sqrt{z''}+\sqrt{z'''} \\ x=-\sqrt{z'}+\sqrt{z''}+\sqrt{z'''} \\ x=-\sqrt{z'}-\sqrt{z''}-\sqrt{z'''} \end{array}\right\} \quad [5];$$

$$\text{Si } q<0,\quad \left\{\begin{array}{l} x=+\sqrt{z'}+\sqrt{z''}+\sqrt{z'''} \\ x=+\sqrt{z'}-\sqrt{z''}-\sqrt{z'''} \\ x=-\sqrt{z'}+\sqrt{z''}-\sqrt{z'''} \\ x=-\sqrt{z'}-\sqrt{z''}+\sqrt{z'''} \end{array}\right\} \quad [6].$$

No consideramos el caso en que $q=0$, porque la ecuacion propuesta se reduce entónces á una ecuacion bicuadrada, la cual sabemos cómo se resuelve.

Discusion de las raices de la ecuacion de cuarto grado.

372. Siendo negativo el último término de la ecuacion $z^3+2pz^2+(p^2-r)z-q^2=0$, deberá tener un número impar de raíces reales positivas; luego tendrá las tres raíces positivas, una positiva y dos negativas, ó una positiva y dos imaginarias.

PRIMER CASO. Si las tres raíces z', z'', z''', son positivas, las cuatro raíces de la ecuacion de cuarto grado serán reales.

SEGUNDO CASO. Si una de las raíces z' es positiva y las otras dos negativas, la ecuacion propuesta tendrá sus cuatro raíces imaginarias, si las dos raíces negativas son desiguales; y dos raíces reales y otras dos imaginarias, cuando dichas dos raíces negativas son iguales. En este último caso las dos raíces reales ofrecen la particularidad de ser iguales á $+\sqrt{z'}$ ó $-\sqrt{z'}$, segun que se tenga $q>$ ó <0;

y como no hay otra raíz múltiple del mismo grado de multiplicidad, $\sqrt{z'}$ será una cantidad conmensurable (278).

Tercer caso. Si una de las raíces z' es positiva y las otras dos imaginarias, que podremos representar por

$$z''=a+b\sqrt{-1},\quad z'''=a-b\sqrt{-1},$$

se tendrá, puesto que las raíces cuadradas de expresiones imaginarias de la forma $a+b\sqrt{-1}$ son expresiones de la misma forma,

$$\sqrt{z''}=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \sqrt{z'''}=\alpha-\beta\sqrt{-1},$$

cuyas expresiones, sustituidas en las fórmulas [5] y [6], darán dos valores reales de x, y otros dos imaginarios.

LECCION XLI.

Ecuaciones trascendentes.

Ecuaciones trascendentes.

373. La investigacion de las raíces reales de una ecuacion trascendente, lo mismo que la de las ecuaciones algebráicas, se descompone en dos partes: la primera tiene por objeto hacer la separacion de las raíces; la segunda calcular éstas con un cierto grado de aproximacion.

Como en general no es posible calcular de antemano límites que comprendan en número y magnitud las raíces de una ecuacion trascendente, no es posible ni hacer la separacion completa de todas las raíces, ni obtenerlas todas aproximadamente. Por medio de un exámen detenido hecho en cada caso particular, y con el auxilio de algunos principios comunes tanto á las ecuaciones algebráicas como trascendentes, se llegan á calcular algunas de las raíces reales de estas últimas, en los casos particulares que se pueden presentar.

374. Como los teoremas (194 y 196), igualmente que sus recí-

procos, se verifican lo mismo para las ecuaciones algebráicas que para las trascendentes, siempre que las funciones que forman el primer miembro de cada una sean contínuas, al ménos entre dos límites α y β, es claro que se podrán aplicar á una ecuacion cualquiera que cumpla con esta condicion.

375. Esto supuesto, veamos cómo con el auxilio de estos teoremas y algunas propiedades demostradas respecto á las derivadas, podemos en muchos casos hallar dos números que comprendan una sola raíz real de una ecuacion trascendente.

Sea, por ejemplo, una ecuacion trascendente $f(x)=0$, de la cual queremos calcular una raíz real con un cierto grado de aproximacion. Segun lo dicho anteriormente, deberemos principiar por hallar dos números que comprendan una sola raíz, para lo cual sustituiremos números particulares en vez de la incógnita, hasta llegar á encontrar dos a y b que den resultados de signos contrarios, en cuyo caso, si en el intervalo de a á b es contínua $f(x)$, entre estos números habrá comprendida por lo ménos una raíz real, y en general un número impar (197, OBSERV.). Si la derivada $f'(x)$ no cambia de signo en el intervalo de $f'(a)$ á $f'(b)$, se puede asegurar que entre a y b no hay comprendida más que una raíz real de la propuesta. En efecto, siendo $f'(x)$ constantemente positiva ó negativa en el intervalo de $f'(a)$ á $f'(b)$, el primer miembro $f(x)$ de la ecuacion propuesta será constantemente creciente ó decreciente para valores de x comprendidos entre a y b; y como en este intervalo pasa de positiva á negativa, ó vice-versa, y además es contínua, tendrá que pasar una sola vez por cero; luego entre a y b habrá una raíz real comprendida, y no habrá más que una.

Si la derivada $f'(x)$ cambia de signo en el intervalo de $f'(a)$ á $f'(b)$, no podemos asegurar cuál sea el número de raíces reales de la ecuacion propuesta que haya comprendidos entre a y b, pues podrá ser un número impar cualquiera. En este caso, lo que se hace es sustituir números intermedios, teniendo en cuenta tan sólo aquellos que dan resultados de signos contrarios, y cuando lleguemos á dos números que cumplan con esta condicion, y además se tenga que la derivada $f'(x)$ conserva un mismo signo para valores de x comprendidos entre estos números, se tendrá que entre dichos dos números sólo habrá comprendida una raíz de la ecuacion propuesta.

376. Cuando se tenga ya una sola raíz comprendida entre dos números a y b, podremos calcularla con el grado de aproximacion que queramos, empleando el método de las sustituciones intermedias, de Newton ó de las partes proporcionales, aplicables como son, segun hemos visto, á cualquier ecuacion $f(x)=0$, cuyo primer miembro es una funcion contínua.

Como las sustituciones son algo complicadas en las ecuaciones trascendentes, conviene resolver algunos ejemplos para que puedan servir de regla á los alumnos.

EJEMPLO I. *Sea en primer lugar la ecuacion* $x^x=10$.

Desde luégo se ve, que los números 2 y 3 dan resultados de signos contrarios; y como la derivada es constantemente positiva entre estos dos límites, se sigue que entre 2 y 3 habrá una raíz real de la ecuacion propuesta, y no habrá más que una. Para calcularla con un cierto grado de aproximacion, sustituiremos números intermedios, y con el objeto de que las sustituciones puedan hacerse con facilidad, tomaremos logaritmos de ambos miembros, por cuyo medio se trasformará la ecuacion propuesta en

$$x\times\log x=1,\quad \text{ó}\quad f(x)=x\times\log x-1=0.$$

Sustituyendo el número 2,5, hallaremos

$$f(2,5)=2,5\times\log 2,5-1=-0,005149975.$$

Sustituyendo el número 2,6, tendremos

$$f(2,6)=2,6\times\log 2,6-1=0,078930705.$$

Aplicando ahora el método de las partes proporcionales, tendremos, llamando C á la correccion que hay que hacer al número 2,5,

$$C=-\frac{2,6-2,5}{f(2,6)-f(2,5)}\times f(2,5)=\frac{0,0005149978}{0,084080683}=0,0061.$$

Luego un valor aproximado de x, será $x=2,5061$; sustituyendo este número en la ecuacion, se hallará

$$f(2,5061)=2,5061\times\log 2,5061-1=-0,0000701.$$

Por el método de Newton hallaremos, llamando y al valor de la correccion que hay que hacer al número 2,5061,

$$y=-\frac{f(2,5061)}{f'(2,5061)}=\frac{0,0000701}{0,8332929}=0,0000841.$$

Por tanto, el nuevo valor aproximado será $x=2,5061841$. Aplicando de nuevo el método de Newton, se halla que son exactas las seis primeras cifras decimales, y que la séptima debe aumentarse en 2 unidades, lo que nos da el valor aproximado $x=2,5061843$.

Sustituyendo este valor, se halla un resultado negativo; la sustitucion del número 2,5061844, da un resultado positivo; luego el valor de x, aproximado en ménos de una unidad del órden séptimo decimal, será $x=2,5061843$.

EJEMPLO II. *Sea la ecuacion trascendente* $x-tg\,x=0$, *cuya menor raíz positiva queremos hallar.*

Desde luégo se ve, que haciendo $x=0$, la ecuacion queda satisfecha; pero puesto que tratamos de hallar la menor raíz positiva, debemos buscar un arco mayor que cero que verifique á esta ecuacion. Para ello observaremos, que si damos á x un valor α mayor que cero y menor que 90^0, la tangente de α será siempre mayor que α, y por tanto obtendremos resultados negativos para valores de x, comprendidos entre 0^0 y 90^0.

Para valores de x comprendidos entre 90 y 180^0, la tangente es negativa; y por tanto, $x-\mathrm{tg}x$ se reducirá á una cantidad positiva, de modo que esta funcion ha pasado de negativa á positiva, pero pasando no por el valor *cero*, sino por el valor *infinito*.

Continuemos dando á x valores mayores que 180^0 y menores que 270^0, y en este intervalo la tangente vuelve á ser positiva y crece desde cero hasta infinito, la funcion $x-\mathrm{tg}x$ volverá á pasar de positiva á negativa, pasando por lo ménos una vez por el valor cero. Siendo la derivada de esta funcion igual á $1-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ y permaneciendo finita para valores de x comprendido entre 180^0 y 270^0, dicha funcion será contínua en este intervalo. Además, como $1-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ tiene constantemente el signo negativo en este intervalo, la funcion al pasar de positiva á negativa, pasará una sola vez por cero, y por tanto habrá un valor de x comprendido entre 180^0 y 270^0, que verificará á la ecuacion propuesta, valor que es el que se nos pide, y que vamos á calcular con un cierto grado de aproximacion.

Los arcos de 180^0 y 270^0, reducidos á unidades de radio, son próximamente

$$180^0=3,1 \quad \text{y} \quad 270^0=4,7.$$

Por tanto, sustituyendo un número intermedio, tal como 4, hallaremos que el arco igual á 4 equivale próximamente á 229^0, y tg 229°=tg 49°=1,15; por consiguiente, la sustitucion del número 4, da un resultado positivo; luego el valor de la raíz se halla comprendido entre 4 y 4,7.

Por medio de sustituciones sucesivas, llegaremos á ver que la raíz se halla comprendida entre 4,4 y 4,5.

Para aplicar ahora el método de las partes proporcionales, sustituiremos los números 2,4 y 2,5, que equivalen próximamente á $252^{\circ},7'$ y $257^{\circ},49'$, y obtendremos

$$f(4,4)=4,4-3,0991=1,3009;$$
$$f(4,5)=4,5-4,6317=-0,1317.$$

Llamando ahora C al valor de la correccion que hay que hacer sobre el número 4,4, tendremos, segun la fórmula conocida (342),

$$C=\frac{0,1}{1,4326}\times 1,3009=\frac{0,13009}{1,4326}=0,09;$$

cuyo valor, aumentado al número 4,4 nos dá el nuevo valor de x más aproximado 4,49, que equivale próximamente á $257^{\circ}, 16'$.

Sustituyendo este valor en la ecuacion, hallaremos

$$f(4,49)=4,49-4,4253=0,0647.$$

Aplicando ahora el método de las partes proporcionales, tendremos

$$C'=-\frac{4,5-4,49}{f(4,5)-f(4,49)}\times f(4,49)=\frac{0,01}{0,1964}\times 0,0647=\frac{0,000647}{0,1964}=0,0032;$$

y tomando la primera cifra significativa de esta correccion, tendremos, por un valor más aproximado de x, el número 4,493, que corresponde próximamente al arco de $257^{\circ}, 25', 40''$.

Sustituyendo este número en la ecuacion, hallaremos

$$f(4,493)=4,493-4,4839=0,0091.$$

Aplicando á este número el método de aproximacion de Newton ó el de las partes proporcionales, hallamos la nueva correccion 0,0004; y por tanto, un valor de x más aproximado que los anteriores, será x=4,4934, que equivale á $257^{\circ}, 27', 10''$, cuyo número, sustituido en la ecuacion, nos da

$$f(4,4934)=4,4934-4,4932=0,0002.$$

Calculando la correccion por el método de Newton, hallaremos el número 0,000009; y por tanto, tendremos por nuevo valor de x, el número 4,493409, que equivale próximamente al arco de $275^{\circ}, 27', 12''$. Luego el ángulo, cuyo arco trazado con la unidad por radio es igual á la tangente, es próximamente de 275°, 27′, 12″, cuya longitud viene á ser, con un error menor que una unidad del sexto órden decimal, $x=4,493409$.

Propongamos para resolver los ejemplos siguientes:

I. Resolver la ecuacion $x=\text{sen}\,x+\text{sen}\,2x$.
Resultado: $x=1,3703$ ó $x=78^0, 30', 44''$.

II. Resolver la ecuacion $x\times lx=1100$.
Resultado: $x=3,597...$

III. Resolver la ecuacion $x=\cos x$.
Resultado: $x=0,739085...$

IV. Resolver la ecuacion $2^x=x\,\text{tg}\,x$.
Resultado: $x=62^0, 51'$.

APÉNDICE.

Funciones simétricas, diferencias finitas y descomposicion de fracciones racionales en fracciones simples.

LECCION XLII.

Funciones simétricas.—Determinacion de las potencias semejantes de las raíces de una ecuacion.—Determinacion de las funciones simétricas dobles, triples, etc., de las raíces de una ecuacion.

Funciones simétricas.

377. Se dice que una funcion de varias cantidades es *simétrica*, cuando no cambia su valor permutando las cantidades que la forman. Así, los coeficientes de una ecuacion son funciones simétricas de las raíces de la misma; porque como todas entran del mismo modo en la formacion de cada coeficiente, el valor de estos no cambiará aunque una raíz cualquiera se sustituya por otra de las demás.

Las funciones simétricas pueden ser *racionales* é *irracionales*: nosotros sólo nos ocuparemos de las primeras.

Una funcion racional y simétrica, podrá ser entera ó fraccionaria; pero como esta última se puede considerar como el cociente de dividir dos funciones simétricas enteras, de aquí que no tengamos necesidad de ocuparnos más que de las funciones simétricas racionales y enteras.

Como las cantidades que constituyen una funcion simétrica han de entrar todas del mismo modo en la formacion de los términos de dicha funcion, se sigue que una funcion simétrica cualquiera de varias cantidades ha de ser homogénea, ó ha de estar compuesta de la suma de varias funciones homogéneas, por lo que sólo daremos reglas para calcular funciones simétricas homogéneas.

Por último, en las funciones simétricas homogéneas, podrá suceder que todos los términos sean de una misma forma ó de formas distintas, en cuyo caso, reuniendo en grupos todos los términos de una misma forma, el conjunto de estos grupos formarán la funcion propuesta. Cada uno de estos grupos que forma una funcion simétrica homogénea y cuyos términos son todos de una misma especie, los llamaremos *funciones simétricas elementales*.

Como todos los términos se han de formar del mismo modo respecto á cada una de las letras que entran en él, se sigue que podremos formar una funcion simétrica elemental, siempre que conozcamos uno de sus términos y todas las letras que han de entrar en la funcion. Así, la funcion simétrica elemental de las letras a, b, c, cuyos términos son todos de la forma a^3b^5, será

$$a^3b^5+a^3c^5+b^3a^5+b^3c^5+c^3a^5+c^3b^5,$$

y se representa abreviadamente por $S(a^3b^5)$; la letra S se emplea para indicar la suma de todos los términos.

Cuando cada término se forma de una sola letra elevada á una cierta potencia p, entónces se representa abreviadamente la funcion simétrica por S_p; de modo, que se tendrá

$$S(a^p)=S_p=a^p+b^p+c^p+\ldots$$

378. Las funciones simétricas elementales se dividen en órdenes, segun el número de letras que entran en cada término. Así, $S_p=a^p+b^p+c^p+\ldots$ se dice que es una funcion simétrica elemental de *primer órden*; $S(a^mb^n)$, es una funcion *doble* ó de *segundo órden*; $S(a^mb^nc^p)$, es una funcion *triple* ó de *tercer órden*; en general, si en cada término entran n letras, se dice que la funcion es del órden n.

Si quisiéramos obtener el desarrollo de la funcion de tercer órden $S(a^mb^nc^p)$, seria necesario formar las coordinaciones de tres en tres de las letras a, b, c, d, etc., que deben estar contenidas en la funcion; en seguida afectaríamos el exponente m á la primera letra de cada coordinacion; el exponente n, á la segunda; y el exponente p, á la tercera.

379. *Toda funcion racional y simétrica de las raíces de una ecua-*

cion, se puede expresar racionalmente por medio de los coeficientes de esta ecuacion.

En efecto, sea la ecuacion

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots+P_m=0.$$

Designemos por a, b, c,... l, sus raíces, de modo que se tendrá (185)

$$\left.\begin{aligned} a+b+c+\ldots+l&=-P_1\\ ab+ac+\ldots\quad&=+P_2\\ \ldots\ldots\ldots&\\ abc\ldots l&=\pm P_m\end{aligned}\right\}\qquad [1].$$

Si designamos por V una funcion simétrica y racional de las raíces de la ecuacion anterior, de modo que tengamos

$$V=F(abc\ldots l)\qquad [2],$$

y eliminamos las raíces a, b, c, ... l, entre las ecuaciones [1] y [2], se obtendrá una ecuacion en V, que será de primer grado, puesto que V no tiene más que un solo valor; por consiguiente, V estará expresada racionalmente por medio de los coeficientes P_1, P_2, etc., de la ecuacion.

La comprobacion de este teorema se halla en los dos problemas que á continuacion vamos á resolver.

Determinacion de las potencias semejantes de las raíces de una ecuacion.

380. Sea la ecuacion

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots+P_{m-1}x+P_m=0,$$

que para mayor sencillez representaremos, como ya se sabe, por $f(x)=0$, y cuyas raíces supondremos que son a, b, c,... k, l.

Esto supuesto, tendremos

$$f'(x)=mx^{m-1}+(m-1)P_1x^{m-2}+\ldots+2P_{m-2}x+P_{m-1}.$$

Por otra parte, como $f(x)$ es igual al producto de los factores que se obtienen restando de x cada una de las raíces (182), y la derivada de un producto es igual á la suma de los que resultan de multiplicar la derivada de cada factor por el producto de los demás, se sigue que otra de las expresiones de la derivada de $f(x)$, será

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\ldots+\frac{f(x)}{x-l};$$

pero segun las reglas de la division algebráica, se tiene

$$\frac{f(x)}{x-a}=\begin{array}{r|r|r|r}
x^{m-1}+a & x^{m-2}+a^2 & x^{m-3}+a^3 & x^{m-4}+\dots+a^{m-1}\\
+P_1 & +P_1a & +P_1a^2 & +P_1a^{m-2}\\
 & +P_2 & +P_2a & +P_2a^{m-3}\\
 & & +P_3 & +\dots\\
 & & & +P_{m-2}a\\
 & & & +P_{m-1}
\end{array}$$

Reemplazando sucesivamente en esta igualdad la raíz a, por cada una de las demás raíces, se tendrá, sumando todos los desarrollos y haciendo uso de la notacion convenida,

$$f'(x)=\begin{array}{r|r|r|r}
mx^{m-1}+S_1 & x^{m-2}+S_2 & x^{m-3}+S_3 & x^{m-4}+\dots+S_{m-1}\\
+mP_1 & +P_1S_1 & +P_1S_2 & +P_1S_{m-2}\\
 & +mP_2 & +P_2S_1 & +P_2S_{m-3}\\
 & & +mP_3 & +\dots\\
 & & & +P_{m-2}S_1\\
 & & & +mP_{m-1}
\end{array}$$

Comparando las dos expresiones de $f'(x)$, hallaremos, despues de toda reduccion, las relaciones siguientes:

$$[3]\quad\left\{\begin{array}{l}
S_1+P_1=0\\
S_2+P_1S_1+2P_2=0\\
S_3+P_1S_2+P_2S_1+3P_3=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
S_{m-1}+P_1S_{m-2}+P_2S_{m-3}+\dots+P_{m-2}S_1+(m-1)P_{m-1}=0.
\end{array}\right.$$

Por medio de estas relaciones se podrán conocer las sumas de las potencias semejantes de las raíces de la ecuacion, desde las de primer grado hasta las del grado $m-1$. En efecto, la primera da á conocer S_1. Sustituyendo el valor de S_1 en la segunda, hallaremos el de S_2. Sustituyendo los valores de S_1 y S_2 en la tercera, hallaremos el de S_3; y así sucesivamente podremos llegar á obtener el valor de S_{m-1}, ó sea la suma de las potencias del grado $m-1$ de las raíces de la ecuacion.

Para obtener las sumas de las potencias cuyo grado sea mayor que $m-1$, multiplicaremos la ecuacion propuesta por x^n, y se tendrá

$$x^{m+n}+P_1x^{m+n-1}+P_2x^{m+n-2}+\dots+P_{m-1}x^{n+1}+P_mx^n=0.$$

Como las raíces de la ecuacion propuesta verifican á esta última, si reemplazamos sucesivamente x por cada una de las raíces a, b, c, etc., y sumamos todos los resultados, se tendrá

$$S_{m+n}+P_1S_{m+n-1}+P_2S_{m+n-2}+\dots+P_{m-1}S_{n+1}+P_mS_n=0 \quad [4].$$

Haciendo ahora sucesivamente $n=0, 1, 2,...$ y observando que $S_0=a^0+b^0+c^0+...=1+1+1+...=m$, hallaremos

$$[5]\quad \begin{cases} S_m \;+P_1S_{m-1}+P_2S_{m-2}+...+P_{m-1}S_1+mP_m=0 \\ S_{m+1}+P_1S_m \;+P_2S_{m-1}+...+P_{m-1}S_2+P_mS_1=0 \\ S_{m+2}+P_1S_{m-1}+P_2S_m \;+...+P_{m-1}S_3+P_mS_2=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Conociendo por las relaciones [3] las sumas S_1, S_2, S_3,... S_{m-1}, y sustituyendo sus valores en la primera de las relaciones [5], hallaremos S_m; despues determinaremos por la segunda S_{m+1}, y así sucesivamente.

Vemos, pues, que mediante las relaciones [3] y [5], se puede conocer la suma de potencias semejantes de las raíces de una ecuacion, cuyos exponentes son enteros y positivos, por medio de funciones racionales y enteras de los coeficientes de la misma.

Recíprocamente, si se conociesen m sumas de potencias semejantes de las raíces de una ecuacion, por ejemplo S_1, S_2, S_3,... S_m, se podrian determinar los coeficientes P_1, P_2, P_3, etc., de dicha ecuacion, por medio de las relaciones [3] y [5].

381. Si quisiéramos calcular la suma de las potencias semejantes de exponentes negativos, de las raíces de una ecuacion, dariamos á n en la fórmula [4] los valores sucesivos -1, -2, -3, etcétera, y hallariamos unas fórmulas por medio de las cuales podriamos calcular dichas potencias; pero se podrán obtener más fácilmente, sustituyendo x por $\frac{1}{x}$ en la ecuacion propuesta; y calculando las sumas de las potencias semejantes de exponentes positivos de esta trasformada, se obtendrán las de exponentes negativos de la propuesta.

382. Las sumas de potencias semejantes se pueden además obtener fácilmente por una simple division de polinómios. En efecto, sea como siempre $f(x)=0$, una ecuacion cuyas raíces supondremos sean a, b, c, ... l. Segun lo dicho anteriormente de la derivada, se tendrá la igualdad

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+...+\frac{1}{x-l}$$

Además, se tiene

$$\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\ldots$$

reemplazando ahora sucesivamente a por cada una de las demás raíces, y sumando todos los resultados, se obtendrá

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{m}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\ldots$$

ó multiplicando por x, será

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=m+\frac{S_1}{x}+\frac{S_2}{x^2}+\ldots$$

Si ahora, para mayor comodidad en los cálculos, sustituimos x por $\frac{1}{z}$ y representamos la fraccion $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ por $\frac{F_1(z)}{F(z)}$, se hallará, por último.

$$\frac{F_1(z)}{F(z)}=m+S_1z+S_2z^2+S_3z^3+\ldots$$

Donde vemos, que los coeficientes que resultan para las diferentes potencias de z en la division del polinómio $F_1(z)$ por $F(z)$, ordenados segun las potencias ascendentes de z, son las sumas S_1, S_2, etcétera, de las raíces de la ecuacion propuesta.

Ejemplo. Sea hallar las sumas de las potencias 5.as y —5.as de las raíces de la ecuacion numérica.

$$x^3-x^2-14x+24=0.$$

Segun las fórmulas [3] y [5], se hallará

$S_1-1=0$	$S_1=\ \ 1$
$S_2-S_1-2\times 14=0$	$S_2=\ \ 29$
$S_3-S_2-14S_1+3\times 24=0$	$S_3=-29$
$S_4-S_3-14S_2+24S_1=0$	$S_4=\ \ 353$
$S_5-S_4-14S_3+24S_2=0$	$S_5=-749$

Para hallar las sumas de las potencias semejantes de exponente negativo, se hará en la ecuacion $x=\frac{1}{x}$, lo que dará la trasformada $24x^3-14x^2-x+1=0$, á la que aplicando las mismas fórmulas, y observando que las potencias de exponente positivo de las raíces de esta ecuacion son las potencias de exponente negativo de la propuesta, tendremos

$$
\begin{array}{l|l}
24S_{-1}-14=0 & S_{-1}=\frac{7}{12} \\
24S_{-2}-14S_{-1}-2=0 & S_{-2}=\frac{61}{144} \\
24S_{-3}-14S_{-2}-S_{-1}-3=0 & S_{-3}=\frac{253}{1728} \\
24S_{-4}-14S_{-3}-S_{-2}+S_{-1}=0 & S_{-4}=\frac{1633}{20736} \\
24S_{-5}-14S_{-4}-S_{-3}+S_{-2}=0 & S_{-5}=\frac{8557}{248832}
\end{array}
$$

Por el segundo método hallaremos, que efectuando la division de $F_1(z)=3-2z-14z^2$ por $F(z)=1-z-14z^2+24z^3$, se tendrá

$$\frac{3-2z-14z^2}{1-z-14z^2+24z^3}=3+z+29z^2-29z^3+353z^4-749z^5+\ldots$$

y como en general el coeficiente de x^n expresa la suma de las *enésimas* potencias de las raíces de la ecuacion, el coeficiente -749 será igual á S_5.

Para calcular la suma de las potencias—5.as de la ecuacion dada, principiaremos por hallar la trasformada $24x^3-14x^2-x+1$, cuyas raíces son recíprocas de las de la propuesta. De esta deduciremos $F_1(z)=72-28z-z^2$ y $F(z)=24-14z-z^2+z^3$; y efectuando la division del primer polinómio por el segundo, hallaremos

$$\frac{72-28z-z^2}{24-14z-z^2+z^3}=3+\frac{7}{12}z+\frac{61}{144}z^2+\frac{253}{1728}z^3+\frac{1633}{20736}z^4+\frac{8557}{248832}z^5+\ldots$$

Y como en general se tiene que el coeficiente de x^n expresa la suma S_{-n} de las potencias semejantes cuyo exponente es $-n$, se tendrá $S_{-5}=\frac{8557}{248832}$, cuyos resultados están conformes con los hallados por el primer método.

Determinacion de las funciones simétricas dobles, triples, etc., de las raíces de una ecuacion.

383. Por medio de las fórmulas [3] y [5], llamadas de Newton, por ser este geómetra el primero que las dedujo, se pueden calcular fácilmente las funciones simétricas dobles, triples, etc., de las raíces de una ecuacion.

Sean, como siempre, a, b, c,... las raíces de la ecuacion $f(x)=0$, y veamos cómo se halla la funcion doble $S(a^nb^p)$.

Si se multiplican ordenadamente las igualdades

$$S_n=a^n+b^n+c^n+\ldots$$
$$S_p=a^p+b^p+c^p+\ldots$$

el producto contendrá evidentemente dos clases de términos: unos serán de la forma a^{n+p}, cuya suma se representará por S_{n+p}; los otros serán de la forma $a^n b^p$, cuya suma será la funcion simétrica que se busca $S(a^n b^p)$. Luego se tendrá

$$S_n \times S_p = S_{n+p} + S(a^n b^p),$$

de donde se deduce

$$S(a^n b^p) = S_n \times S_p - S_{n+p} \qquad [6]$$

Para calcular la funcion de tercer órden $S(a^n b^p c^q)$, supondremos efectuado el producto de las dos igualdades

$$S(a^n b^p) = a^n b^p + a^n c^p + a^n d^p + \ldots + b^n a^p + b^n c^p + \ldots$$
$$S_q = a^q + b^q + c^q + \ldots$$

y se tendrán en el producto tres clases de términos: 1.° términos formados de dos letras con los exponentes $n+q$ y p, cuya suma será $S(a^{n+q} b^p)$; 2.° términos formados de dos letras con los exponentes $p+q$ y n, cuya suma será $S(a^{p+q} b^n)$; 3.° términos formados de tres letras diferentes, cuya suma será $S(a^n b^p c^q)$. Luego se tendrá

$$S(a^n b^p) \times S_q = S(a^{n+q} b^p) + S(a^{p+q} b^n) + S(a^n b^p c^q).$$

Sustituyendo $S(a^n b^p)$, $S(a^{n+q} b^p)$ y $S(a^{p+q} b^n)$ por sus valores, deducidos de la igualdad [6], y despejando el valor de $S(a^n b^p c^q)$, hallaremos

$$S(a^n b^p c^q) = S_n S_p S_q - S_{n+p} S_q - S_{n+q} S_p - S_{p+q} S_n + 2(S_{n+p+q}) \; [7].$$

Del mismo modo se podrian calcular las funciones simétricas cuyos términos contuviesen mayor número de letras.

384. Cuando algunos de los exponentes de que van afectadas las raíces de la ecuacion se hacen iguales, es necesario modificar las fórmulas anteriores.

Hagamos $n=p$ en la funcion $S(a^n b^p)$, y la fórmula [6] se convertirá en

$$S(a^n b^n) = \tfrac{1}{2}(S_n^2 - S_{2n}) \qquad [8].$$

En efecto, $S(a^n b^p)$ se compone de tantos términos como coordinaciones de dos letras se pueden hacer con m. Todos estos términos son diferentes cuando n y p son desiguales; pero dichos términos son iguales de dos en dos, cuando $n=p$; y por tanto, haciendo $n=p$, se tiene $S(a^n b^p) = 2S(a^n b^n)$; $S_n \times S_p$ se reduce á $S_n \times S_n = S_n^2$, y S_{n+p} se convierte en $S_{n+n} = S_{2n}$; luego $S(a^n b^n) = \frac{1}{2}(S_n^2 - S_{2n})$, segun hemos dicho.

De la misma manera veremos, que si en la fórmula [7] hacemos primero $n=p$ y luégo $n=p=q$, hallaremos

$$S(a^n b^n c^q) = \tfrac{1}{2}(S_n{}^2 S_q - S_{2n} S_q - 2S_{n+q} S_n + 2S_{2n+q}) \qquad [9],$$

y

$$S(a^n b^n c^n) = \tfrac{1}{6})(S_n{}^3 - 3S_{2n} \times S_n + 2S_{3n}) \qquad [10].$$

En general, cuando se hacen iguales α exponentes, el valor de la funcion que resulta es igual al de la funcion general del mismo órden, dividida por el producto $2.3.4\ldots\alpha$.

385. Por las fórmulas halladas anteriormente, se ve que toda funcion simétrica entera y homogénea de las raíces de una ecuacion, se puede expresar racionalmente por los coeficientes de esta ecuacion; y como segun hemos dicho al principio, cualquiera otra funcion simétrica y racional, se formará de las consideradas como elementales de un modo racional tambien, se sigue que este teorema se verifica para cualquiera que sea la funcion simétrica racional.

LECCION XLIII.

Aplicacion de la teoría de las funciones simétricas á la formacion de las ecuaciones de las diferencias, sumas, productos y cocientes de las raíces de una ecuacion dada.—Aplicacion de las funciones simétricas á la eliminacion. Grado de la ecuacion final.

Aplicacion de la teoría de las funciones simétricas á la formacion de las ecuaciones de las diferencias, sumas, productos y cocientes de las raíces de una ecuacion dada.

386. Por medio de las funciones simétricas, se puede resolver el problema de *dada una ecuacion, hallar otra que tenga por raíces una combinacion racional y determinada de dos, tres, etc., raíces de la propuesta.*

Supongamos que, dada una ecuacion $f(x)=0$, se quiere trasformar en otra, cuyas raíces están ligadas con las suyas por la relacion $y=\varphi(x', x'')$, representando x' y x'' dos raíces cualesquiera de la propuesta, y $\varphi(x', x'')$ una funcion racional y conocida de dichas raíces.

Dos métodos se pueden seguir en la resolucion de este problema, que son los siguientes:

PRIMER MÉTODO. Sean $a, b, c, \ldots$ las m raíces de la ecuacion propuesta $f(x)=0$; las raíces de la nueva ecuacion serán

$$\varphi(a, b), \varphi(a, c), \ldots \varphi(b, a), \varphi(b\ c), \ldots \varphi(c, a), \varphi(c, b), \ldots$$

De modo, que si representamos la ecuacion que se busca por $\psi(y)=0$, se tendrá

$$\psi(y)=[y-\varphi(ab)]\,[y-\varphi(ac)]\ldots[y-\varphi(ba)]\,[y-\varphi(bc)]\ldots=0.$$

Ahora bien, el primer miembro de esta ecuacion es evidente que no cambia, permutando dos cualesquiera de las cantidades $a, b, c, \ldots$ de modo, que si efectuamos los cálculos y ordenamos el resultado segun las potencias de y, el coeficiente de cada una de estas potencias será una funcion simétrica y racional de las raíces de $f(x)=0$; así es, que calculando estos coeficientes por medio de las fórmulas de Newton, deducidas en la leccion anterior, se tendrá el problema resuelto.

SEGUNDO MÉTODO. Consiste en determinar de antemano el grado de la ecuacion que se busca; y una vez conocido, y suponiendo que sea n, se tendrá que la ecuacion buscada será de la forma

$$y^n+P'_1x^{n-1}+P'_2x^{n-2}+\ldots+P'_n=0.$$

Siendo los coeficientes P'_1, P'_2, P'_3, ... cantidades indeterminadas, cuyos valores, una vez determinados, se tiene el problema resuelto.

Para determinar estos valores, usaremos de las fórmulas

$$S'_1+P'_1=0,$$
$$S'_2+P'_1S'_1+2P'_2=0,$$
$$S'_3+P'_1S'_2+P'_2S'_1+3P'_3=0,$$

en las cuales se tiene, que S'_p representa en general las potencias del grado p de las raíces de la ecuacion que se busca. Por lo tanto, la cuestion queda reducida á calcular S'_1, S'_2, S'_3, etc., en funcion racional de los coeficientes de la ecuacion propuesta. Pero siendo estas cantidades funciones simétricas y racionales de las raíces de la ecuacion $f(x)=0$, no habrá inconveniente en hallar sus valores por medio de funciones racionales de dichos coeficientes.

387. ECUACION DE LOS CUADRADOS DE LAS DIFERENCIAS. Vamos á calcular la ecuacion cuyas raíces sean los cuadrados de las diferencias de las raíces de una ecuacion dada. Sea esta ecuacion

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots+P_m=0.$$

Si restamos sucesivamente cada raíz de todas las demás, se hallarán evidentemente $m(m-1)$ diferencias, que serán iguales y de signo contrario de dos en dos; los cuadrados diferentes de estas diferencias serán por lo tanto $\frac{1}{2}m(m-1)$, y por consiguiente el grado de la ecuacion final será $\frac{1}{2}m(m-1)$, el cual, para mayor sencillez, designaremos por n, y la ecuacion buscada será, pues, de la forma

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_n = 0,$$

y todo queda reducido á calcular los coeficientes indeterminados $A_1, A_2, \dots A_n$.

Representemos por S_1, S_2, S_3, etc., las sumas de las potencias semejantes de las m raíces a, b, c, d, etc., de la ecuacion propuesta, y por s_1, s_2, s_3, etc., las sumas de las potencias semejantes de las n raíces $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(b-c)^2$, etc., de la ecuacion de los cuadrados de las diferencias. Esto supuesto, tendremos que como S_1, S_2, S_3, etc., se pueden expresar por medio de los coeficientes conocidos P_1, P_2, P_3, ... (380), todo queda reducido á determinar s_1, s_2, s_3, ... en funcion de S_1, S_2, S_3, ... ; porque entónces se podrian determinar los coeficientes A_1, A_2, A_3, etc., en funcion de s_1, s_2, s_3, ... (381), y por tanto en funcion de los coeficientes de la ecuacion propuesta.

Para ello, desarrollaremos cada una de las cantidades $(x-a)^{2p}$, $(x-b)^{2p}$, etc., y se tendrá, sumando todos los desarrollos,

$$(x-a)^{2p} + (x-b)^{2p} + (x-c)^{2p} + \dots (x-l)^{2p} =$$
$$mx^{2p} - 2pS_1x^{2p-1} + \frac{2p(2p-1)}{1.2} S_2x^{2p-2} - \frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3} S_3x^{2p-3} + \dots$$

Reemplazando ahora sucesivamente x por a, b, c, etc., y observando que el primer miembro se convierte en el doble de la suma de las potencias del grado p de las raíces $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, de la ecuacion de los cuadrados de las diferencias, tendremos, haciendo uso de la anotacion indicada,

$$2s_p = mS_{2p} - 2pS_1S_{2p-1} + \frac{2p(2p-1)}{1.2} S_2S_{2p-2} - \frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3} S_3S_{2p-3} + \dots$$

En el segundo miembro de esta igualdad, se observa que los términos á igual distancia de los extremos son iguales y de un mismo signo; por tanto, si el término medio

$$\pm \frac{2p(2p-1)\dots(p+1)}{1.2.3\dots p} S_p^2$$

lo representamos por T, se tendrá, haciendo la reduccion y dividiendo por 2,

$$s_p = mS_{2p} - 2pS_1S_{2p-1} + \frac{2p(2p-1)}{1.2} S_2S_{2p-2} - \dots + \tfrac{1}{2}T \quad [1].$$

El término T será positivo ó negativo, segun que p sea un número par ó impar.

Por medio de la fórmula [1] se pueden calcular las potencias semejantes de las raíces de la ecuacion buscada, dando á p los valores 1, 2, 3, etc. Sustituyendo despues los valores de S_1, S_2, S_3, etc., en funcion de P_1, P_2, P_3, etc., se tendrán expresadas en funcion de estas mismas cantidades las sumas s_1, s_2, s_3, etc.; y por último, hallando los valores de A_1, A_2, A_3, etc., en funcion de s_1, s_2, s_3, etc. (380), se tendrá el problema resuelto.

388. Para mayor comprension del método anterior, lo aplicaremos á un ejemplo, y sea hallar la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de las raíces de la ecuacion de tercer grado

$$x^3+px+q=0.$$

La ecuacion que vamos buscando será de la forma

$$z^3+A_1z^2+A_2z+A_3=0.$$

Se halla por las fórmulas [3] y [5] del núm. 380,

$$\left.\begin{aligned} A_1&=-s_1\\ A_2&=\tfrac{1}{2}(s_1^2-s_2)\\ A_3&=\tfrac{1}{6}(3s_1s_2-2s_3-s_1^3)\end{aligned}\right\}\quad[2].$$

Las cantidades s_1, s_2, s_3, etc., se obtendrán en funcion de S_1, S_2, S_3, etc., por medio de las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} s_1&=3S_2-S_1^2\\ s_2&=3S_4-4S_1S_3+3S_2^2\\ s_3&=3S_6-6S_1S_5+15S_2S_4-10S_3^2\end{aligned}\right\}\quad[3],$$

deducidas de la fórmula [1].

Haciendo en las fórmulas de Newton

$$P_1=0,\ P_2=p,\ P_3=q,\ P_4=0,\ P_5=0,\ldots$$

se tendrá

$$S_1=0,\ S_2=-2p,\ S_3=-3q,$$
$$S_4=2p^2,\ S_5=5pq,\ S_6=3q^2-2p^3.$$

Sustituyendo ahora estos valores en las igualdades [3], hallaremos

$$s_1=-6p,\ s_2=18p^2,\ s_3=66p^3-81q^2;$$

y sustituyendo, por último, estos valores en las igualdades [2], tendremos

$$A_1=6p,\ A_2=9p^2,\ A_3=4p^3+27q^2.$$

Por consiguiente, la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de la ecuacion $x^3+px+q=0$, será

$$z^3+6pz^2+9p^2z+4p^3+27q^2=0.$$

Si consideramos como caso particular la ecuacion $x^3-7x+7=0$, haremos $p=-7$, $q=7$, y tendremos que la ecuacion de los cuadrados de las diferencias será

$$z^3-42z^2+441z-49=0.$$

389. Por un procedimiento análogo se calcularian las ecuaciones cuyas raíces fuesen la suma, el producto y el cociente de dos raíces cualesquiera de una ecuacion dada.

Aplicacion de las funciones simétricas á la eliminacion. Grado de la ecuacion final.

390. La teoría de las funciones simétricas da un medio de hallar la ecuacion que resulta de la eliminacion de una incógnita entre dos ecuaciones con dos incógnitas; pero aunque siempre se llega á la verdadera ecuacion final, los cálculos que es necesario practicar son tan pesados cuando las ecuaciones son de un grado superior al segundo, que casi nunca se emplea este método. Nosotros solo haremos ver en qué consiste, y deduciremos el teorema de Bezout relativo al grado de la ecuacion final.

391. Sean las dos ecuaciones con dos incógnitas x é y

$$\left.\begin{array}{l} x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m=0 \\ x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots+B_n=0 \end{array}\right\} \quad [1],$$

cuyos grados respectivos son m y n, de los cuales supondremos que n no es mayor que m; los coeficientes A_1, A_2, A_3, ... B_1, B_2, B_3, ... son funciones enteras de y, que á lo más son del grado que indica el índice.

Supongamos que se ha resuelto la primera de las ecuaciones [1] con relacion á x, y sean a, b, c, etc., las raíces expresadas en funcion de y. Si sustituimos sucesivamente cada una de estas raíces en la segunda ecuacion, se hallarán las m ecuaciones siguientes, que sólo contendrán la incógnita y:

$$\begin{array}{l} a^n+B_1a^{n-1}+B_2a^{n-2}+\ldots+B_n=0 \\ b^n+B_1b^{n-1}+B_2b^{n-2}+\ldots+B_n=0 \\ c^n+B_1c^{n-1}+B_2c^{n-2}+\ldots+B_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \quad [2].$$

Esto supuesto, tendremos que si $x=\alpha$ é $y=\beta$ es una solucion del sistema propuesto [1], es evidente que $y=\beta$ verificará necesariamente á una de las ecuaciones [2]. Por el contrario, todo valor $y=\beta$ que satisfaga á una de estas ecuaciones, tiene que ser un valor conveniente del sistema propuesto. Porque si β es, por ejemplo, una raíz de la primera ecuacion $a^n + B_1a^{n-1} + B_2a^{n-2} + \dots = 0$, y si α es el valor de x que resulta de sustituir β en vez de y en la raíz a, los valores $y=\beta$, $x=\alpha$, satisfarán evidentemente á la segunda de las ecuaciones del sistema propuesto; tambien satisfarán á la primera, puesto que se verifica con independencia de y para el valor de $x=a$. Luego si todo valor de y, deducido del sistema de ecuaciones [2], es un valor conveniente, que unido con un cierto valor de x dá todas las soluciones del sistema propuesto, el producto de todas estas ecuaciones será la ecuacion final en y que se busca.

392. Este método parece que exige en su aplicacion el tener resuelta una de las ecuaciones dadas con relacion á la incógnita que se quiere eliminar, lo que le haria ineficaz para ecuaciones de un grado superior al cuarto; pero esto no es así: porque los factores cuyo producto constituye la ecuacion final, no varían aunque se permuten entre sí de todas las maneras posibles las raíces a, b, c, etc.; por tanto, el producto será una funcion racional simétrica de estas raíces, y se podrá expresar racionalmente por los coeficientes A_1, A_2, A_3, etc., de la primera de las ecuaciones dadas.

393. *El grado de la ecuacion final que resulta de la eliminacion de una incógnita entre dos ecuaciones con dos incógnitas, es á lo más igual al producto de los grados de las dos ecuaciones.*

El primer miembro de la ecuacion final, que, como hemos visto, es el producto de las ecuaciones [2], está compuesto de una suma de términos de la forma

$$B_h a^{n-h} \times B_k a^{n-k} \times B_l a^{n-l} \times \dots = B_h B_k B_l \dots \times a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \dots$$

y como dicho producto es una funcion simétrica de las raíces a, b, c, etc., el coeficiente $B\ B_k B_l \dots$ multiplicará á una suma que se compone de términos de la forma $a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \dots$ que, como ya sabemos, se representa por $S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \dots)$; por lo tanto, la cuestion queda reducida á demostrar que el exponente de y en el producto

$$(B_h B_k B_l \dots) \times S(a^{n-h} b^{n-k} c^{n-l} \dots),$$

no es mayor que $m \times n$.

Para esto, tenemos que la primera de las ecuaciones dadas es del grado m, y la segunda del grado n; y por tanto, los coeficientes que entran en cada una de ellas son funciones de y, que no exceden en grado al índice que llevan; así, A_p es una funcion de y, que á lo más será del grado p, y lo mismo de los demás coeficientes. De aquí se deduce, que el producto $B_h B_k B_l \ldots$ será á lo más del grado $h+k+l+\ldots$ Además, si recordamos las fórmulas de Newton que dan los valores de S_1, S_2, S_3, etc., se verá que en general S_p no puede ser de un grado superior á p; luego el producto $S_{n-h}\times S_{n-k}\times S_{n-l}\times\ldots$ es á lo más del grado $(n-h)+(n-k)+(n-l)+\ldots=n\times m-(h+k+l+\ldots)$. Por consiguiente, segun las fórmulas que dan los valores de las funciones dobles, triples, etc., la funcion $S(a^{n-h}b^{n-k}c^{n-l}\ldots)$ será tambien á lo más del mismo grado $m\times n-(h+k+l+\ldots)$; luego el mayor exponente de y en el término general que hemos considerado, será á lo más del grado

$$(h+k+l+\ldots)+m\times n-(h+k+l+\ldots)=m\times n,$$

segun queriamos demostrar.

Hemos supuesto, al considerar las ecuaciones generales, que la incógnita x se hallaba en ambas ecuaciones con un exponente igual á los m y n que marcan los grados respectivos; pero el teorema es igualmente cierto aunque esto no suceda: porque una vez demostrado para cuándo las ecuaciones se consideran en toda su generalidad, se verá, que pudiéndose deducir la ecuacion final relativa á ecuaciones que no tienen las mayores potencias de x, igualando á cero un cierto número de coeficientes, es claro que esta ecuacion no podrá nunca ser de un grado mayor que el de la obtenida en el caso general; lo que podrá suceder es que sea de un grado inferior, y esto en nada se opone al enunciado del teorema.

LECCION XLIV.

Diferencias finitas.—Diferencias de funciones.

Diferencias finitas.

394. Consideremos una série cualquiera de cantidades

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n \qquad [1],$$

que pueden ó no formarse segun una ley constante.

Si ahora restamos de cada uno de estos números el que le antecede, tendremos formada otra série cuyos términos serán las *diferencias primeras* de las cantidades propuestas. Estos términos se designan con la letra Δ, antepuesta al número que se resta. Así, se tendrá

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0,\ \Delta u_1 = u_2 - u_1, \ldots \Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1}.$$

Asimismo, si hallamos las diferencias de la série

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \Delta u_3, \ldots \Delta u_{n-1},$$

se tendrán las *diferencias segundas* ó de segundo órden de la série [1], las cuales representaremos por Δ^2, de modo que tendremos

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0,\ \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1, \ldots \Delta^2 u_{n-2} = \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2}.$$

Continuando de la misma manera, iremos hallando las *diferencias terceras*, *cuartas*, *quintas*, etc., que se representarán por Δ^3, Δ^4, Δ^5, etc. El término general de la série formada por las diferencias del órden n, será $\Delta\, u_n$, y se hallará ligado con las diferencias del órden $n-1$, por la relacion

$$\Delta^n u_n = \Delta^{n-1} u_{n+1} - \Delta^{n-1} u_n.$$

Si la série [1] contiene n términos, la de las diferencias de primer órden contendrá $n-1$; la que originan las de segundo, tendrá $n-2$; y en general, la de las diferencias del órden $n-1$, sólo tendrá un término, y todas ellas se disponen ordinariamente como indica el cuadro siguiente:

u	Δ	Δ^2	...	Δ^{n-1}	Δ^n
u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	...	$\Delta^{n-1} u_0$	$\Delta^n u_0$
u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	...	$\Delta^{n-1} u_1$	
u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	...		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
u_{n-1}	Δu_{n-1}				
u_n					

cuya formacion es bien sencilla; pues la primera columna de la izquierda es la série de números que se conoce, las demás columnas se forman restando cada número de la inmediata de la izquierda del que tiene debajo, y colocando la diferencia á la derecha enfrente del que se resta.

Ejemplo. *Sea hallar las diferencias de los números* 3, 7, 9, 20, 31 y 50. Segun el cuadro anterior, se tendrá

u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
3	4	—2	11	—20	37
7	2	9	—9	17	
9	11	0	8		
20	11	8			
31	19				
50					

Tambien se puede disponer el cuadro del modo siguiente:

3......7......9......20......31......50
4......2......11......11......19
—2......9......0.......8
11....—9......8
—20.....17
37

395. *El primer término de la série que forman las diferencias de un órden cualquiera* n, *se obtiene en funcion de los términos de la série dada, por medio de la igualdad simbólica*

$$\Delta^n u_0=(u-1)^n,$$

en cuyo segundo miembro se reemplazan por índices los exponentes de u.

En efecto, segun la definicion, se tiene

$$\Delta u_0=u_1-u_0.$$

Restando esta igualdad de la siguiente $\Delta u_1=u_2-u_1$, se hallará

$$\Delta^2 u_0=\Delta u_1-\Delta u_0=u_2-2u_1+u_0.$$

Si aumentamos en una unidad los índices de esta igualdad, lo que en nada la altera, se tendrá

$$\Delta^2 u_1=\Delta u_2-\Delta u_1=u_3-2u_2+u_1;$$

y restando de ésta la anterior, hallaremos

$$\Delta^3 u_0=\Delta^2 u_1-\Delta^2 u_0=u_3-3u_2+3u_1-u_0.$$

Del mismo modo tendremos

$$\Delta^4 u_0=u_4-4u_3+6u_2-4u_1+u_0,$$

y en general

$$\Delta^n u_0=u_n-nu_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2}-\ldots\mp C_n^p\, u_{n-p}\pm\ldots\pm u_0 \quad [A].$$

Para probar la generalidad de esta fórmula, demostraremos que siendo cierta para una diferencia del órden $n-1$, lo es tambien para la del órden n; porque siendo cierta para $\Delta^3 u_0$, lo será para $\Delta^4 u_0$, y así sucesivamente.

Supongamos que la fórmula sea cierta para la diferencia del órden $n-1$, y que se tenga

$$\Delta^{n-1}u_0=u_{n-1}-(n-1)u_{n-2}+\ldots\pm C_{n-1}^{p-1}u_{n-p}\mp C_{n-1}^p u_{n-p-1}\pm\ldots\pm u_0;$$

además se tendrá, aumentando una unidad á los índices,

$$\Delta^{n-1}u_1=u_n-(n-1)u_{n-1}+\ldots\pm C_{n-1}^{p-1}u_{n-p+1}\mp C_{n-1}^p u_{n-p}\pm\ldots\pm u_1;$$

restando ordenadamente, y observando que $\Delta^{n-1}u_1-\Delta^{n-1}u_0=\Delta^n u_0$, tendremos

$$\Delta^n u_0=u_n-nu_{n-1}+\ldots\mp(C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1})u_{n-p}\pm\ldots\mp u_0.$$

Pero se tiene (*Alg.* tomo I, núm. 148)

$$C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}=C_n^p;$$

luego

$$\Delta^n u_0=u_n-nu_{n-1}+\ldots\mp C_n^p u^{n-p}\pm\ldots\mp u_0,$$

segun queriamos demostrar.

396. *Un término cualquiera de la série* [1], *se obtiene en funcion del primer término* u_0 *y de las diferencias sucesivas* Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, *etc., por medio de la igualdad simbólica*

$$u_n=(1+\Delta)^n u_0,$$

en la cual los exponentes de Δ *indican el grado de la diferencia.*

Desde luégo se tiene, segun la definicion,

$$u_1=u_0+\Delta u_0.$$

Sumando esta igualdad con la siguiente $\Delta u_1=\Delta u_0+\Delta^2 u_0$, se hallará

$$u_2=u_1+\Delta u_1=u_0+2\Delta u_0+\Delta u_0.$$

Si aplicamos el mismo raciocinio á la série de las primeras diferencias, hallaremos

$$\Delta u_2=\Delta u_0+2\Delta^2 u_0+\Delta^3 u_0;$$

pero $u_3=u_2+\Delta u_2$; luego

$$u_3=u_0+3\Delta u_0+3\Delta^2 u_0+\Delta^3 u_0.$$

Asimismo se hallará

$$u_4=u_0+4\Delta u_0+6\Delta^2 u_0+4\Delta^3 u_0+\Delta^4 u_0,$$

y en general

$$u_n=u_0+n\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots+C_n^p\Delta^p u_0+\ldots+\Delta^n u_0 \quad [B].$$

La generalidad de esta fórmula se demuestra lo mismo que en el número anterior, probando que es cierta para el término u_n, suponiendo que lo es para el u_{n-1}; porque como para el término u_2 es verdadera, lo será tambien para el término u_3, y así sucesivamente.

397. Por medio de las fórmulas [A] y [B] halladas anteriormente, se resuelven los dos problemas siguientes: 1.° *Dada una série de* m *números cualesquiera, hallar la diferencia del órden* n. 2.° *Dado el primer número de una série cualquiera y* m *diferencias consecutivas, hallar un término del órden* n *de esta série.*

EJEMPLO I. *Dados los seis números* 3, 7, 9, 20, 31, 50, *hallar la cuarta diferencia.*

Segun la fórmula [A], tendremos

$$\Delta^4 u_0 = (u-1)^4 = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0$$
$$= 31 - 80 + 54 - 28 + 3 = 88 - 108 = -20.$$

EJEMPLO II. *Dado el primer número* 3 *de una série y cinco de sus diferencias consecutivas* 4, —2, 11, —20, 37, *hallar el quinto término* u_4.

Segun la fórmula [B], tendremos

$$u_4 = (1+\Delta)^4 u_0 = u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0$$
$$= 3 + 16 - 12 + 44 - 20 = 63 - 32 = 31.$$

Diferencias de funciones.

398. Si á la variable x de una funcion cualquiera $u=f(x)$, damos $m+1$ valores x_0, x_1, x_2, ... x_m, la funcion tomará una série de valores correspondientes u_0, u_1, u_2, ... u_m, cuyas diferencias de diferentes órdenes podremos calcular como anteriormente hemos explicado.

Supongamos, por ejemplo, que los valores de x están en progresion por diferencia, cuya razon es h, y que dos términos consecutivos cualesquiera de esta progresion sean x y $x+h$; los valores correspondientes de u serán $f(x)$ y $f(x+h)$, cuya diferencia $f(x+h) - f(x)$ es una nueva funcion de x, que se llama la *diferencia primera* de la funcion propuesta, y se representa por $\Delta f(x)$. Si en esta funcion $\Delta f(x)$ reemplazamos sucesivamente cada uno de los $m+1$ valores de x, hallaremos las m diferencias primeras de los términos de la funcion propuesta.

Del mismo modo, si en $\Delta f(x)$ sustituimos por x dos números consecutivos cualesquiera x y $x+h$ de la progresion, hallaremos como anteriormente una nueva funcion $\Delta f(x+h)-\Delta f(x)$, que será la *diferencia segunda* de la funcion propuesta, que se designará por $\Delta^2 f(x)$, y así sucesivamente.

Sea, por ejemplo, la funcion exponencial

$$u=f(x)=a^x,$$

de la cual se deduce, segun lo dicho anteriormente,

$$\Delta u=a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1).$$

Donde vemos, que la diferencia primera de la exponencial a^x, se obtiene multiplicando dicha exponencial por la cantidad constante a^h-1.

Asimismo hallaremos

$$\Delta^2 u=a^{x+h}(a^h-1)-a^x(a^h-1)=a^x(a^h-1)(a^h-1)=a^x(a^h-1)^2.$$

De la misma manera se tendrá

$$\Delta^3 u=a^x(a^h-1)^3,$$

y en general

$$\Delta^n u=a^x(a^h-1)^n.$$

Sea, en segundo lugar, la funcion $u=\text{sen } x$. Dando á x los dos valores consecutivos x y $x+h$, hallaremos

$$\Delta u=\text{sen}(x+h)-\text{sen } x=2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}h \cos(x+\tfrac{1}{2}h).$$

Si la funcion propuesta fuera $y=\cos x$, tendriamos

$$\Delta y=\cos(x+h)-\cos x=-2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}h \text{ sen }(x+\tfrac{1}{2}h).$$

Por medio de estas dos igualdades podemos hallar las diferencias segundas de ambas funciones; así, tendremos

$$\Delta^2 u=2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}h\times -2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}h \text{ sen }(x+h)=-2^2 \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2}h \text{ sen }(x+h);$$

$$\Delta^2 y=-2 \text{ sen } \quad h\times 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}h \cos(x+h)=-2^2 \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2}h \cos(x+h).$$

Del mismo modo se hallará

$$\Delta^3 u=-2^3 \text{ sen}^3 \tfrac{1}{2}h \cos(x+\tfrac{3}{2}h);$$

$$\Delta^3 y=2^3 \text{ sen}^3 \tfrac{1}{2}h \text{ sen }(x+\tfrac{3}{2}h);$$

$$\Delta^4 u=2^4 \text{ sen}^4 \tfrac{1}{2}h \cos(x+2h);$$

$$\Delta^4 y=2^4 \text{ sen}^4 \tfrac{1}{2}h \text{ sen }(x+2h);$$

. . . .

. . . .

399. *Si la variable de una funcion entera del grado* m *recibe valores en progresion aritmética, la diferencia del órden* m *de dicha funcion será constante.*

Sea la funcion entera del grado m, $u=f(x)$; representemos por h el incremento constante que recibe la variable x, sustituyamos dos valores consecutivos x y $x+h$, y se tendrá, cualquiera que sea x,

$$\Delta u=f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots=f_1(x);$$

donde vemos, que la expresion de Δu es una funcion entera del grado $m-1$; es decir, inferior en una unidad al grado de la funcion propuesta.

Siendo la diferencia segunda de u igual á la diferencia primera de Δu, tendrá por expresion

$$\Delta^2 u=f_1(x+h)-f_1(x)=hf'_1(x)+\frac{h^2}{1.2}f''_1(x)+\ldots=f_2(x),$$

la cual, como se ve, es de un grado inferior en dos unidades al de la funcion u; la siguiente será de un grado $m-3$; y en general, la diferencia del órden n, será del grado $m-n$. La del órden m, ó sea $\Delta^m u$, será del grado $m-m=0$; es decir, independiente de x, y por consiguiente constante. Siendo la diferencia del órden m constante, la del órden $m+1$ será nula, y lo mismo todas las de un órden superior.

400. *La expresion de la diferencia del órden* m *de una funcion entera del mismo grado, es* $\Delta^m u=1.2.3\ldots mA_0h^m$.

Sea la funcion entera

$$u=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m.$$

Siendo esta funcion la suma de los términos que la componen, su diferencia de un órden cualquiera será igual á la suma de las diferencias del mismo órden de sus diferentes términos; de donde resulta, que la diferencia del órden m de un polinómio del mismo grado, no dependerá sino del primer término, pues la diferencia del grado m de los demás términos es nula, segun el número anterior.

Esto supuesto, observemos que la diferencia del grado $m-1$ de Δu, no depende sino del primer término de Δu; que la diferencia del órden $m-2$ de $\Delta^2 u$, no depende tambien sino del primer término de $\Delta^2 u$, y así sucesivamente.

Ahora bien, el primer término de Δu es la derivada del primer término de u multiplicada por h, ó lo que es lo mismo,

$$mA_0x^{m-1}h.$$

El primer término de $\Delta^2 u$, será igualmente

$$m(m-1)A_0x^{m-2}h^2.$$

En general, el primer término de $\Delta^n u$, será

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,A_0x^{m-n}h^n;$$

y por consiguiente, la expresion de la diferencia del órden m del polinómio propuesto será

$$\Delta^m u=1.2.3\ldots mA_0h^m,$$

segun queriamos demostrar.

LECCION XLV.

Aplicacion de la teoría de las diferencias á la resolucion de ecuaciones.—Aplicacion de las diferencias finitas á la formacion de tablas numéricas.

Aplicacion de la teoría de las diferencias á la resolucion de ecuaciones.

401. Fundados en la propiedad que tienen las funciones enteras de ser constantes las diferencias del mismo órden que su grado, cuando tambien es constante la diferencia de los valores de x, se deduce un medio fácil de hallar los resultados de sustituir en el primer miembro de una ecuacion números particulares que estén en progresion aritmética.

Ejemplo I. Sea la ecuacion $x^4-10x^3+24x^2-2x-1=0$, cuyo primer miembro representaremos por y.

Supongamos que para hacer la separacion de las raíces de esta ecuacion, tenemos necesidad de sustituir en ella la série natural de los números enteros, en cuyo caso vamos á ver que habiendo hecho por el método ordinario tantas sustituciones como unidades tiene el exponente que indica el grado de la ecuacion, pueden obtenerse todas las demás con mucha facilidad por medio de las diferencias.

En el presente ejemplo tendremos que hacer, por el método ordinario, cuatro sustituciones consecutivas, que para mayor sencillez serán las correspondientes á los valores $x=-1,0,1$ y 2. Hechas estas sustituciones, hallaremos los valores correspondientes de y, que son $y=36$, -1, 12 y 27.

La diferencia del órden cuarto será constante é igual á $\Delta^4y=$

1.2.3.4=24 (400); por lo tanto podremos formar el cuadro siguiente:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
—1	36	—37	50	—48	24
0	—1	13	2		
1	12	15			
2	27				

Siendo constantes las diferencias cuartas é iguales todas á 24, podremos prolongar indefinidamente este cuadro, ya sea para valores crecientes de x, tales como 3, 4, 5, etc., ya para valores decrecientes ó negativos como —2, —3, etc. Para ello observaremos, que *sumando cada número con el que tiene á su izquierda, se halla el inmediatamente inferior á este*; así, sumando con —48 el número 50 que tiene á su izquierda, se halla el número 2 que tiene debajo. De aquí se deduce que *un número cualquiera, se forma tambien restando del que tiene debajo el que hay á su derecha*; así, el número 13 se obtiene restando del número 15 que tiene debajo, el número 2 que está á su derecha. Segun esto, podremos prolongar indefinidamente el cuadro anterior, y obtener este otro:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
—4	1287	—715	338	—120	24
—3	572	—377	218	—96	24
—2	195	—159	122	—72	24
—1	36	—37	50	—48	24
0	—1	13	2	—24	24
1	12	15	—22	0	24
2	27	—7	—22	24	24
3	20	—29	2	48	24
4	—9	—27	50	72	⋮
5	—36	23	122	⋮	
6	—13	145	⋮		
7	132	⋮			
⋮	⋮				

en el cual los números que hay en la segunda columna, marcada con la letra y, expresan los resultados de sustituir en el primer miembro de la ecuacion dada, la série de los números que están á la izquierda. Por este cuadro se ve, que las raíces de la ecuacion dada se hallan comprendidas una entre —1 y 0, otra entre 0 y 1, otra entre 3 y 4, y la cuarta entre 6 y 7.

402. La prolongacion indefinida del cuadro, que nos da los resultados de sustituir en el primer miembro de una ecuacion números particulares que estén en progresion aritmética, y las diferencias sucesivas de diferentes órdenes de estos resultados, está fundada en que la de un cierto órden es constante, y podemos repetirla cuantas veces queramos. De esta propiedad gozan, segun ya hemos demostrado, las funciones enteras; pero no es cierta para una funcion cualquiera. Sin embargo, se observa en general, que sea cualquiera la funcion que se considere, á medida que se van hallando diferencias de un órden bastante elevado, estas son cada vez más pequeñas; de modo, que considerándolas como nulas, podemos admitir las del órórden precedente como iguales; y aplicando lo que se ha dicho respecto de las funciones enteras, hallaremos por este medio valores aproximados de la funcion para una *série limitada* de valores de la variable.

Supongamos, para fijar las ideas, que en una funcion cualquiera u, damos á la variable la série de valores x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, y hallamos que las diferencias cuartas, por ejemplo, son muy pequeñas, en cuyo caso podremos despreciarlas y considerar como constantes las diferencias terceras; aplicando entónces el procedimiento de las funciones enteras, podremos, prolongando el cuadro obtenido, hallar los valores u_5, u_6, etc., hasta un cierto límite u_{10}, por ejemplo. En estos valores cometeremos evidentemente un cierto error que cada vez irá en aumento, y que es necesario tener en cuenta para saber hasta qué punto podremos prolongar el cuadro. Para ello, de vez en cuando se hallarán sustituciones directas, y los resultados se compararán con las obtenidas por el cuadro; y de esta comparacion resultará el error que se comete, y deduciremos si se podrá continuar hallando valores por medio del cuadro; ó si deberemos hacer otra série de sustituciones directas, y formar otro nuevo cuadro que dé las sustituciones para otro intervalo de valores. Así, una vez hallado por medio del cuadro el resultado de la sustitucion x_{10}, ó sea el valor u_{10}, calcularemos directamente esta cantidad, y suponiendo que la sustitucion directa da el resultado v, veremos si la diferencia $v—u_{10}$ es de un órden superior á la aproximacion que se desea, en cuyo caso se podrán admitir los cálculos; pero si es del mismo órden, ó de un órden inferior, es necesario efectuar una nueva série de sustituciones sucesivas para obtener un nuevo cuadro que dé por otro cierto intérvalo los valores que se buscan.

Aplicacion de las diferencias finitas á la formacion de tablas numéricas.

403. Por medio de las diferencias finitas, se pueden calcular tablas numéricas, tales como de logaritmos, trigonométricas, etc.

Ejemplo I. *Sea hallar la suma de los cuadrados de la série natural de los números desde 1 hasta un cierto límite* n.

Calculando directamente las sumas de los cuadrados de los primeros números, y representándolas por u_0, u_1, u_2, etc., tendremos

$$u_0, =0^2,\ u_1=0^2+1^2,\ u_2=0^2+1^2+2^2,\ u_3=0^2+1^2+2^2+3^2, \ldots$$

de donde se deducen inmediatamente las diferencias

$$\Delta u_0=1^2,\ \Delta u_1=2^2,\ \Delta u_2=3^2,\ \Delta u_3=4^2 \ldots$$
$$\Delta^2 u_0=3,\ \Delta^2 u_1=5,\ \Delta^2 u_2=7 \ldots$$
$$\Delta^3 u_0=2,\ \Delta^3 u_1=2,\ \Delta^3 u_2=2 \ldots$$

Siendo, como se ve, constantes las diferencias terceras, é iguales todas á 2, podremos establecer el principio del cuadro con los tres primeros números, y obtendremos

u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0	1	3	2
1	4		
5			

Ahora, segun las reglas que tenemos, podremos prolongar este cuadro cuanto se quiera; los números de la primer columna serán las sumas pedidas.

Si quisiéramos obtener la expresion de una de estas sumas en funcion del número n, aplicariamos la fórmula [B] del número 396, que da el valor de un término cualquiera u_n de la série de números u_0, u_1, u_2, etc., en funcion del primer término y las diferencias sucesivas; y como en este caso son cero las diferencias de un órden superior al tercero, el desarrollo se reducirá á sus cuatro primeros términos; de modo que se tendrá

$$u_n=u_0+n\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0.$$

Reemplazando ahora las diferencias y el primer término por sus valores, que son $u_0=0$, $\Delta u_0=1$, $\Delta^2 u_0=3$, $\Delta^3 u_0=2$, hallaremos, despues de toda reduccion,

$$u_n=n+\frac{n(n-1)}{1.2}\times 3+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\times 2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Por un procedimiento análogo hallaremos que el principio del cuadro, que prolongado convenientemente da la suma de los cubos de la série natural de los números desde 1 hasta un cierto límite, es

u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$
0	1	7	12	6
1	8	19		
9	27			
36				

Las diferencias de un órden mayor que el cuarto son todas nulas; y por tanto, la fórmula citada anteriormente dará para valor de la suma pedida

$$u_n=u_0+n\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0;$$

y reemplazando los valores del primer término y de las diferencias sucesivas, que en este caso son $u_0=0$, $\Delta u_0=1$, $\Delta^2 u_0=7$, $\Delta^3 u_0=12$, $\Delta^4 u_0=6$, hallaremos

$$u_n=n+\frac{n(n-1)}{1.2}\times 7+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\times 12+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\times 6=$$
$$n+\frac{7n(n-1)}{2}+2n(n-1)(n-2)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Del mismo modo podríamos hallar la suma de las potencias cuartas, quintas, etc., de la série natural de los números enteros desde 1 hasta un cierto límite n.

EJEMPLO II. *Formar la suma de las terceras y cuartas potencias de los números pares y positivos.*

Si representamos por x un número par cualquiera, quedará la cuestion reducida á determinar los valores de y deducidos de la ecuacion $y=x^4+x^3$.

Para ello determinaremos directamente cuatro valores consecutivos de y, correspondientes á los números pares $x_0=0$, $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=6$, y hallaremos $y_0=0$, $y_1=24$, $y_2=320$, $y_3=1512$. De estos valores se deducirán fácilmente las diferencias sucesivas, y la última se obtendrá por la fórmula conocida (400) $\Delta^4 y_0=1.2.3.4.\ 2^4=384$. Con estos valores se formará el cuadro siguiente, que podrá prolongarse cuanto se quiera:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	24	272	624	384
2	24	296	896	1008	384
4	320	1192	1904	1392	384
6	1512	3096	3296	1776	384
8	4608	6392	5072	2160	. . . .
10	11000	11464	7232	. . . .	
12	22464	18696	. . . .		
14	41160	. . . . .			
⋮	. . . . .				

Del mismo modo hallaríamos, que la suma de las terceras y cuartas potencias de los números impares positivos, se obtienen por el siguiente cuadro:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	2	106	536	816	384
3	108	642	1352	1200	384
5	750	1914	2552	1584	384
7	2744	4546	4136	1968	. . . .
9	7290	8682	6104	. . . .	
11	15972	14786	. . . .		
13	30758	. . . . .			
⋮	. . . . .				

EJEMPLO III. *Construccion de unas tablas de logaritmos.*

Consideremos la funcion logarítmica $y=\log x$, y hallando sus diferencias sucesivas, tendremos

$$\Delta y=\log(x+h)-\log x=\log\frac{x+h}{x}=\log\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

Desarrollando en série $\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$, para lo cual haremos en la série [L] del número 145, $x=\frac{h}{x}$, y reemplazaremos en vez de $l\,(1+x)$ su igual $\frac{\log(1+x)}{\log e}$, se tendrá, multiplicando por $\log e$,

$$\Delta y=\log e\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\frac{h^4}{4x^4}+\frac{h^5}{5x^5}-\ldots\right).$$

Aplicando ahora la fórmula del núm. 395, se hallará

$$\Delta^2 y=\log(x+2h)-2\log(x+h)+\log x=$$
$$[\log(x+2h)-\log x]-2[\log(x+h)-\log x]=$$
$$\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)-2\log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

ó desarrollando en série y efectuando la resta,

$$\Delta^2 y=-\log e\left(\frac{h^2}{x^2}-\frac{2h^3}{x^3}+\frac{7h^4}{2x^4}-\frac{6h^5}{x^5}+\ldots\right).$$

Del mismo modo hallaremos la diferencia de tercer órden

$$\Delta^3 y=\log(x+3h)-3\log(x+2h)+3\log(x+h)-\log x=$$
$$[\log(x+3h)-\log x]-3[\log(x+2h)-\log x]+3[\log(x+h)-\log x]=$$
$$\log\left(1+\frac{3h}{x}\right)-3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)+3\log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

de donde, desarrollando y efectuando los cálculos, se deduce

$$\Delta^3 y=\log e\left(\frac{2h^3}{x^3}-\frac{9h^4}{x^4}+\frac{30h^5}{x^5}-\frac{90h^6}{x^6}+\ldots\right).$$

Por igual procedimiento obtendremos

$$\Delta^4 y=\log(x+4h)-4\log(x+3h)+6\log(x+2h)-4\log(x+4)+\log x=$$
$$\log\left(1+\frac{4h}{x}\right)-4\log\left(1+\frac{3h}{x}\right)+6\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)-4\log\left(1+\frac{h}{x}\right),$$

de donde

$$\Delta^4 y=-\log e\left(\frac{6h^4}{x^4}-\frac{48h^5}{x^5}+\ldots\right).$$

Por estas fórmulas se ve, que las diferencias sucesivas de $\log x$ van disminuyendo muy rápidamente á medida que x crece; así, partiendo del valor particular $x=1000$, se halla, haciendo $h=1$, para valores aproximados de las diferencias de $(y=\log x)$,

$$\begin{aligned}\Delta y &= 0{,}0004340774793l5\\ \Delta^2 y &= -0{,}000000433427410\\ \Delta^3 y &= 0{,}000000000864693 \qquad [1];\\ \Delta^4 y &= -0{,}000000000002585\end{aligned}$$

y como la diferencia 5.ª es ya una cantidad muy pequeña, podremos despreciarla y considerar como constantes, por un largo intérvalo, las diferencias 4.as

Esto supuesto, podremos formar el cuadro que da los logaritmos de los números de 1000 en adelante, partiendo de las igualdades [1], y además de

$$y=\log x=3,\ \ h=1;$$

de modo, que se tendrá:

x	$y=\log x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1000	3,000000000000000	0,000434077479315	—0,000000433427410	0,000000000864693	—0,000000000002585
1001	3,000434077479315	0,000433644051905	—0,000000432562717	0,000000000862108	—0,000000000002585
1002	3,000867721531220	0,000433211489188	—0,000000431700609	0,000000000859523	—0,000000000002585
1003	3,001300933020408	0,000432779788579	—0,000000430841086	0,000000000856938	—0,000000000002585
1004	3,001733712808987	0,000432348947493	—0,000000429984148	0,000000000854353	—0,000000000002585
1005	3,002166061756480	0,000431918963345	—0,000000429129795	0,000000000851768	—0,000000000002585
1006	3,002597980719825	0,000431489833550	—0,000000428278027	0,000000000849183	—0,000000000002585
1007	3,003029470553375	0,000431061555523	—0,000000427428844	0,000000000846598	—0,000000000002585
1008	3,003460532108898	0,000430634126679	—0,000000426581246	0,000000000844013	—0,000000000002585
1009	3,003891166235577	0,000430207545433	—0,000000425737233	0,000000000841428	
1010	3,004321373781010	0,000429781808200	—0,000000424895805		
1011	3,004751155589210	0,000429356912395			
1012	3,005180512501605				
etc.	etc.				

Fórmula para calcular el error E en unidades del último órden decimal de las que marca el cuadro en cada caso particular.

$$E<1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}+\ldots$$

Del segundo miembro de esta fórmula se deben tomar tantos términos más uno, como indica el órden de la primera diferencia que se desprecia. De ella se deduce, que podemos prolongar el presente cuadro hasta llegar al logaritmo del número 1060, obteniendo los logaritmos exactos con siete cifras decimales; pues el error que se comete para este número es mayor que media unidad del órden octavo, y menor que una.

Una vez calculados por el cuadro anterior los logaritmos de los números que hay desde 1000 hasta 1060, se formará un nuevo cuadro, para lo cual se calculará directamente el logaritmo del número 1060, así como tambien las diferencias primera, segunda, tercera y cuarta correspondientes, y por él se obtendrán los logaritmos de los números 1061, 1062, etc., hasta llegar al límite que indique la fórmula del error, teniendo cuidado de justificar de vez en cuando estos logaritmos, calculando directamente de intérvalo en intérvalo el de algunos números. Por este medio se pueden prolongar cuanto queramos las tablas de logaritmos.

LECCION XLVI.

De la interpolacion.—Fórmula de Lagrange.—Fórmula de Newton.

De la interpolacion.

404. Se da el nombre de *interpolacion*, á la operacion por medio de la cual, cuando se conoce un cierto número de valores de una funcion y los correspondientes de la variable, se calculan los valores de esta funcion para otros valores intermedios conocidos de dicha variable.

Como en general no se conoce la naturaleza de la funcion de que se trata, sino un cierto número de los valores que recibe correspondientes á otros de la variable, se sigue que los demás valores intermedios no se podrán obtener rigurosamente exactos. Además, el problema de la interpolacion, que consiste en determinar estos valores, no es determinado; es decir, que puede haber una infinidad de funciones que adquieran los valores dados correspondientes á unos mismos valores de la variable, y que sean diferentes todos los intermediarios. Para comprender esto bien, imaginemos que sobre un eje se toman distancias respectivamente iguales á los valores de la variable, y que en los diferentes puntos obtenidos se levantan ordenadas en las cuales se toman distancias iguales á los correspondientes de la funcion, en cuyo caso la cuestion queda reducida á hacer pasar una curva por los extremos de estas ordenadas, lo que es completamente indeterminado, porque por estos puntos pueden pasar una infinidad de curvas sin tener de comun más que dichos puntos. Cuando se emplea una curva para efectuar la interpolacion, lo cual es muy frecuente y cómodo en la práctica, se procura trazarla de modo que tenga el menor número de sinuosidades.

El problema de la interpolacion, considerado algebráicamente, consiste en hallar una funcion entera del grado m, que admita los $m+1$ valores dados, en cuyo caso la cuestion queda completamente determinada, como demostraremos probando que existe siempre una funcion entera del grado m que goza de esta propiedad, y que no existe más que una. Hallada esta funcion, podremos calcular los valores que recibe para valores intermediarios de la variable, y estos valores serán, con un cierto grado de aproximacion, los de la funcion incógnita. Desde luégo se comprende que el grado de aproximacion será tanto mayor, cuanto mayor sea el número de valores conocidos; ó lo que es lo mismo, cuanto más pequeño sea el intérvalo que haya entre estos valores.

Fórmula de Lagrange.

405. Sea una funcion cualquiera $u=f(x)$, que se reduce á $u_0, u_1, u_2, \ldots u_m$, dando á x los valores respectivos $x_0, x_1, x_2, \ldots x_m$, y tratemos de hallar una cierta funcion entera del grado m, que admita los mismos valores u_0, u_1, u_2, etc., cuando hagamos respectivamente x igual á $x_0, x_1, x_2, \ldots x_m$.

Para ello, principiemos por determinar una funcion entera del grado m, que se anule para los valores $x_1, x_2, \ldots x_m$ de x, y que se convierta en u_0, cuando hagamos $x=x_0$. Esta funcion, que representaremos por X_0, debiéndose anular por los valores $x_1, x_2, \ldots x_m$, será de la forma

$$X_0=A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m).$$

La constante A_0 se determinará con la condicion de reducirse el polinómio X_0 á u_0, haciendo $x=x_0$, lo que dará la relacion

$$u_0=A_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_m);$$

de donde

$$A_0=\frac{u_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_m)}.$$

Sustituyendo este valor en el de X_0, nos da

$$X_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_m)}u_0.$$

Del mismo modo hallaremos otro polinómio entero del grado m, que para el valor de $x=x_1$ se reduzca á u_1, y se anule para los demás valores x_0, x_2, x_3, ... de x. Este polinómio será por consiguiente

$$X_1=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}u_1.$$

Por igual procedimiento se hallarán los polinómios enteros del grado m X_2, X_3, ... X_m, que para los valores respectivos de $x=x_2$, $x=x_3$, etc., toman los valores u_2, u_3, etc., y que se anulan para los m valores restantes de x.

Hallados estos polinómios, y recordando que nosotros nos proponemos hallar una funcion entera del grado m, que para los $m+1$ valores $x_0, x_1, x_2, \ldots x_m$ de x adquiera los $m+1$ valores $u_0, u_1, u_2, \ldots u_m$, se ve inmediatamente que el polinómio que reune las condiciones exigidas es la suma de los hallados anteriormente; de modo, que se tendrá

$$u=X_0+X_1+X_2+\ldots+X_m.$$

En efecto, haciendo $x=x_0$, todas las funciones se reducen á cero, á excepcion de la primera X_0, que toma el valor u_0. En general, para el valor $x=x_n$, la funcion X_n se reducirá á u_n, y las demás se anularán para este valor, pues con esas condiciones las hemos determinado.

Sustituyendo en vez de X_0, X_1, X_2, ... sus valores, hallaremos la fórmula debida á Lagrange

$$u=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_m)}u_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}u_1+$$
$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\ldots(x_2-x_m)}u_2+\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}u_m.$$

406. Una vez demostrado que hay una funcion entera del grado m que cumple con las condiciones enunciadas anteriormente, se puede probar que esta funcion es única. En efecto, cualquiera otra funcion entera del grado m que adquiera los mismos $m+1$ valores correspondientes á los de $x=x_0, x_1, x_2, \ldots$ es idéntica á la primera; porque si no lo fuera, tendriamos, restando ambas funciones, un polinómio del grado m á lo más, que se anularia para $m+1$ valores distintos, lo cual no puede ser (181): es necesario por lo tanto que los coeficientes sean idénticos, en cuyo caso lo son tambien las dos funciones, segun queriamos demostrar.

Fórmula de Newton.

407. La fórmula de interpolacion que vamos á determinar, llamada de Newton, es ménos general que la de Lagrange; pues esta es verdadera, cualesquiera que sean los $m+1$ valores que demos á la variable, mientras que la de Newton se refiere especialmente al caso en que estos valores estén en progresion aritmética.

Sean, pues, los $m+1$ valores que damos á x

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h, \ldots\ x_0+nh, \ldots x_0+mh;$$

supongamos que para estos valores de la variable, la funcion toma los valores respectivos

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_n, \ldots u_m,$$

y que se han hallado las m diferencias sucesivas

$$\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \Delta^3 u_0, \ldots \Delta^m u_0.$$

Esto supuesto, recordemos la fórmula [B] del núm. 296, que da un término cualquiera u_n, en funcion del primero y de las diferencias sucesivas

$$u_n=u_0+\frac{n}{1}\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots+\Delta^n u_0.$$

El segundo miembro de esta fórmula se puede prolongar indefinidamente, pues los términos que siguen al último $\Delta^n u_0$ vendrán afectados del factor $n-n=0$, y por tanto todos los términos que se le agregan serán nulos, de modo que se tendrá

$$u_n=u_0+\frac{n}{1}\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}\Delta^m u_0.$$

Si ahora llamamos x á un término cualquiera x_0+nh de la progresion aritmética, y u al valor correspondiente de u_n, tendremos

$$x=x_0+nh;\quad \text{de donde}\quad n=\frac{x-x_0}{h};$$

este valor de n, sustituido en la igualdad anterior, da la fórmula

$$u=u_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta u_0+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}+$$
$$\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3}+\ldots+$$
$$\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots m}\quad [1],$$

cuyo segundo miembro es una funcion entera del grado m con relacion á x. Este segundo miembro goza además de la propiedad de reducirse á los $m+1$ valores u_0, u_1, u_2, ... u_m, cuando damos á x los valores respectivos x_0, x_0+h, x_0+2h, etc. En efecto, si damos á x el valor $x=x_0+nh$, lo que equivale á reemplazar $\frac{x-x_0}{h}$ por n, se halla otra vez la fórmula, que da el término u_n.

La fórmula [1] es la que nosotros deseábamos hallar, pues goza de las condiciones exigidas de que para los valores x_0, x_0+h, x_0+2h, etc., de la variable, toma los valores dados u_0, u_1, u_2, etc., de la funcion propuesta, siendo además entera y del grado m como queriamos. Esta fórmula de Newton vemos que no viene expresada en funcion de los valores u_1, u_2, u_3, etc., que se nos dan, sino en funcion del primer valor u_0 y de las diferencias sucesivas Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc.; y como estas diferencias decrecen en general con mucha rapidez, podremos despreciar muchos términos del segundo miembro, bastando tan solo calcular los primeros.

408. Con el objeto de simplificar los cálculos, se hace en la práctica $\frac{x-x_0}{h}=z$, en cuyo caso la fórmula [1] se convierte en

$$u=u_0+\frac{z}{1}\Delta u_0+\frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots+\frac{z(z-1)\ldots(z-m+1)}{1.2.3\ldots m}\Delta^m u_0.$$

Si suponemos que z está comprendida entre 0 y 1, ó lo que es lo mismo, si tratamos de hallar valores de la funcion para valores de x comprendidos entre x_0 y x_0+h, los coeficientes de las diferencias Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc., son alternativamente positivos ó negativos, y van decreciendo en valor absoluto.

Cuando las diferencias de un órden superior al primero sean bastante pequeñas que podamos despreciarlas sin error sensible, la fórmula anterior se reducirá á sus dos primeros términos

$$u=u_0+z\Delta u_0.$$

De aquí se deduce, que los incrementos $u-u_0$ de la funcion son proporcionales á los valores de z; cuando esto se verifica, se dice que se efectúa la interpolacion por partes proporcionales. De esta igualdad se deduce tambien el valor de x, que reduce á la ecuacion dada á una cierta cantidad u, para lo cual se despejará el valor de z, y hallaremos

$$z=\frac{u-u_0}{\Delta u_0}.$$

Si en vez de considerar sólo dos términos tuviéramos en cuenta tres, la fórmula de Newton se convertiria en

$$u=u_0+z\Delta u_0+\frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0,$$

en cuyo caso el valor de x, que reduce á la funcion á una cierta cantidad u, se obtiene resolviendo la ecuacion de segundo grado en z, que resulta efectuando las operaciones.

409. *Si la diferencia* h *y las cantidades* u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ... $\Delta^m u_0$ *son positivas*, $x_0+(m-1)h$ *es un límite superior de las raices positivas de la ecuacion* $u=f(x)=0$.

Supongamos que la funcion entera del grado m, $u=f(x)$, esté representada por la fórmula [1],

$$u=u_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta u_0+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}+\dots$$
$$+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\dots m},$$

lo que es posible, segun se ha explicado anteriormente; admitamos además que todas las cantidades u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ... $\Delta^m u_0$, sean positivas, y que lo sea tambien la razon h de la progresion aritmética.

Esto supuesto, si damos á x el valor $x^0+(m-1)h$, todos los binómios, á excepcion del último, se reducen evidentemente á una cantidad positiva: el último se hace cero para este valor de x; por consiguiente, componiéndose u de la suma de cantidades positivas, será tambien igual á una cantidad positiva. Si x recibe un valor mayor que $x_0+(m-1)h$, todos los binómios, incluso el último, son entónces positivos, y por tanto tambien lo es u ó su igual $f(x)$; luego si creciendo x desde el valor $x_0+(m-1)h$, la funcion $[u=f(x)]$ conserva siempre un valor positivo, la ecuacion $f(x)=0$ no puede tener raíz positiva igual ó mayor que la cantidad $x_0+(m-1)h$; por tanto, esta cantidad es un límite de las raíces positivas de la ecuacion $f(x)=0$, segun queriamos demostrar.

410. De aquí se deduce, que para hallar un límite de las raíces positivas de una ecuacion $f(x)=0$, se vé cuál es el valor de x que hace positiva á $f(x)$ y á todas las diferencias correspondientes; sustituyendo despues este número en vez de x_0 en la fórmula

$$L=x_0+(m-1)h,$$

se tendrá el límite buscado.

Sea, por ejemplo, hallar un límite superior de las raíces de la ecuacion $x^4-10x^3+24x^2-2x-1=0$.

Segun vemos por el cuadro relativo á esta ecuacion, formado en la página 343, el valor 7 de x hace positiva á $f(x)$ y dá el resultado 132; y por la continuacion de dicho cuadro veremos, que las diferencias consecutivas relativas á este valor, son todas positivas é iguales respectivamente á 363, 338, 144 y 24. Por tanto, haciendo en la fórmula anterior $h=1$ y $x_0=7$, se hallará que un límite de las raíces positivas de la ecuacion propuesta, será $L=7+3=10$.

LECCION XLVII.

Descomposicion de fracciones racionales en fracciones simples.

Descomposicion de fracciones racionales en fracciones simples.

411. Se llama *fraccion racional*, aquella cuyos términos son polinómios racionales y enteros con relacion á una letra x.

Toda fraccion racional $\frac{F(x)}{f(x)}$ podemos suponerla siempre irreducible; pues en el caso de que no lo fuese, dividiriamos por el producto de los factores comunes á sus dos términos. Además, siempre podemos suponer que el polinómio del numerador es de un grado inferior al del denominador; porque en el caso de no serlo, efectuariamos la division y tendriamos un cociente entero y un resto de un grado menor que el del divisor, y entónces la primera seria igual al cociente entero hallado, más una fraccion racional que podemos llamar propia. Prescindiendo ahora de la parte entera, consideraremos la fraccion propia racional $\frac{F(x)}{f(x)}$, cuyo numerador sea á lo más del grado $m-1$, y el denominador del grado m.

En el problema que tratamos de resolver, consideraremos tres casos principales: 1.° Que la ecuacion resultante de igualar á cero el denominador $f(x)$, sólo tenga raíces reales desiguales. 2.° Que tenga raíces iguales. 3.° Que tenga raíces imaginarias.

PRIMER CASO. *Que* $f(x)=0$ *solo tenga raices reales desiguales.*

412. *Toda fraccion propia racional* $\frac{F(x)}{f(x)}$, *cuyo denominador* $f(x)$ *sea igual al producto de* m *factores binómios de primer grado, tales como* $x-a$, $x-b$, $x-c$,... *se puede siempre descomponer en la suma de* m *fracciones simples de la forma* $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x-b}$, $\frac{C}{x-c}$, *etc., siendo* A, B, C, *etc., cantidades constantes.*

Sean a, b, c, etc., las m raíces reales y desiguales de la ecuacion $f(x)=0$, y hagamos

$$f(x)=(x-a)f_1(x).$$

Reemplazando ahora x por $a+(x-a)$, y desarrollando los polinómios $F(x)$ y $f_1(x)$ por la fórmula de Taylor, se tendrá

$$F(x)=F[a+(x-a)]=F(a)+F'(a)\frac{(x-a)}{1}+F''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+\ldots$$

$$f_1(x)=f_1[a+(x-a)]=f_1(a)+f'_1(a)\frac{(x-a)}{1}+f''_1(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+\ldots$$

Dividamos la primera igualdad por la segunda, y hallaremos, representando por R el resto de la division,

$$\frac{F(x)}{f_1(x)}=\frac{F(a)}{f_1(a)}+\frac{R}{f_1(x)} \qquad [1].$$

El resto R se obtiene restando de F (x) el producto de $f_1(x)$ por $\frac{F(a)}{f_1(a)}$; y como al efectuar esta resta desaparecerán los términos independientes del binómio $x—a$, dicho resto R será de la forma $R=(x-a)F_1(x)$. El polinómio $F_1(x)$ es á lo más del grado $m-2$; porque si hacemos $A=\frac{F(a)}{f_1(a)}$, se tendrá

$$R=F(x)-Af_1(x);$$

F (x) es á lo más, segun la hipótesis, del grado $m-1$; $Af_1(x)$ es evidentemente del grado $m-1$, puesto que $f_1(x)$ es el cociente de dividir $f(x)$, que es del grado m, por el binómio $x-a$; luego R será á lo más del grado $m-1$, y por tanto $F_1(x)$, que expresa el cociente de la division de R por $x-a$, será á lo más del grado $m-2$. Por consiguiente, sustituyendo este valor de R en la igualdad [1], y multiplicando por el divisor $f_1(x)$, se hallará

$$F(x)=\frac{F(a)}{f_1(a)}\times f_1(x)+(x-a)F_1(x)=Af_1(x)+(x-a)F_1(x) \quad [2].$$

Dividiendo esta igualdad por $f(x)=(x-a)f_1(x)$, tendremos

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{F_1(x)}{f_1(x)};$$

donde vemos, que la fraccion propuesta se halla descompuesta en dos: una que cumple con las condiciones enunciadas en el teorema, y otra $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$ de la misma forma que la dada, pero de menor grado. En efecto, esta fraccion es irreducible; porque si no lo fuera, sus dos términos serian divisibles por alguno de los factores del denominador, que son, como ya se sabe, $x-b$, $x-c$, etc.: pero ninguno de estos factores puede dividir al numerador; pues si lo dividiese segun la igualdad [2], dividiria tambien á $F(x)$, y la fraccion propuesta no seria irreducible como se ha supuesto. Los términos son además de menor grado, porque segun hemos visto, el numerador $F_1(x)$ es á lo más del grado $m-2$, y el denominador es del grado $m-1$.

Aplicando á la fraccion $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$ los mismos razonamientos, se tendrá, haciendo $f_1(x)=(x-b)f_2(x)$

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)}=\frac{B}{x-b}+\frac{F_2(x)}{f_2(x)};$$

la nueva fraccion $\frac{F_2(x)}{f_2(x)}$ será tambien irreducible, y su denominador del grado $m-2$, siendo su numerador á lo más del grado $m-3$.

Igualmente se hallará

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)}=\frac{C}{x-c}+\frac{F_3(x)}{f_3(x)};$$

y continuando del mismo modo, se llegará á una última fraccion

$$\frac{F_{m-1}(x)}{f_{m-1}(x)}=\frac{K}{x-k}.$$

Sumando ahora todas las igualdades anteriores, se tendrá, despues de hecha la reduccion, la igualdad

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{K}{x-k},$$

que justifica el enunciado del teorema.

413. *El valor numérico de los numeradores* A, B, C, *etc.*, *de las fracciones simples, son los diversos valores que toma la fraccion* $\frac{F(x)}{f'(x)}$ *cuando se reemplaza sucesivamente* x *por cada una de las raíces* a, b, c, *etc.*, *de la ecuacion* $f(x)=0$.

El valor de A hemos visto que se obtiene por la fórmula

$$A=\frac{F(x)}{f_1(x)}=\frac{F(x)}{\frac{f(x)}{x-a}},$$

en la cual se reemplaza x por a. Del mismo modo el numerador B es el valor de la fraccion $\frac{F(x)}{\frac{f(x)}{x-b}}$, cuando reemplazamos x por b; y así sucesivamente hasta el último K, que es el valor de la fraccion $\frac{F(x)}{\frac{f(x)}{x-k}}$, cuando se sustituye x por k.

Aunque por estas fracciones se pueden calcular los coeficientes, es sin embargo más cómodo calcularlos por medio de las derivadas, observando que en el caso que nos ocupa $f_1(x)=\frac{f(x)}{x-a}$, se reduce á la derivada $f'(a)$ cuando reemplazamos x por a. En efecto, de la igualdad

$$f(x)=(x-a)f_1(x),$$

se deduce, tomando derivadas de ambos miembros,

$$f'(x)=f_1(x)+(x-a)f'_1(x).$$

Sustituyendo ahora x por a, se tendrá

$$f'(a)=f_1(a),$$

puesto que $f'_1(x)$ se reduce á una cantidad finita haciendo $x=a$, y $x-a$ es cero.

Del mismo modo veremos, que $f_1(b)=f'(b)$, $f_1(c)=f'(c)$, etc.; luego las fracciones $\frac{F(a)}{f_1(a)}$, $\frac{F(b)}{f_1(b)}$, $\frac{F(c)}{f_1(c)}$, etc., que expresan los valores respectivos de A, B, C, etc., se convertirán, poniendo en vez de $f_1(a)$, $f_1(b)$, $f_1(c)$, etc., sus valores, en

$$A=\frac{F(a)}{f'(a)},\quad B=\frac{F(b)}{f'(b)},\quad C=\frac{F(c)}{f'(c)},\ldots$$

segun queriamos demostrar.

414. *Una fraccion racional no se puede descomponer más que en un solo sistema de fracciones simples.*

En efecto, supongamos que puedan hacerse dos descomposiciones de una fraccion racional en fracciones simples, de modo que se tenga

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{K}{x-k};$$

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots+\frac{K'}{x-k'}.$$

Estas dos igualdades, debiéndose verificar para cualquiera que sean los valores de x, nos dan

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots=\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots$$

Multipliquemos por el binómio $x-a$, y hallaremos

$$A+(x-a)\left(\frac{B}{x-a}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{K}{x-k}\right)=$$

$$(x-a)\left(\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\ldots+\frac{K'}{x-k'}\right).$$

Dando ahora á x el valor a, el primer miembro se reduce á la cantidad A, que no es cero, puesto que es el numerador de una de las fracciones simples en que se descompone la fraccion propuesta; luego el segundo miembro tampoco puede ser cero: más para que el segundo miembro no sea cero, siéndolo uno de sus factores, es necesario que el otro factor sea infinito; y como los numeradores A′, B′, C′, etc., son números finitos, es necesario que sea cero alguno de los denominadores cuando sustituyamos x por a. Supongamos que este denominador sea $x-a'$, en cuyo caso se tendrá $a=a'$ ó $x-a=x-a'$; siendo iguales estos factores, la igualdad anterior se convertirá en

$$\mathrm{A}+(x-a)\left(\frac{\mathrm{B}}{x-b}+\ldots+\frac{\mathrm{K}}{x-k}\right)=\mathrm{A}'+(x-a)\left(\frac{\mathrm{B}'}{x-b'}+\ldots+\frac{\mathrm{K}}{x-k}\right).$$

Si ahora hacemos $x=a$, se tendrá $\mathrm{A}=\mathrm{A}'$; y la fraccion $\dfrac{\mathrm{A}}{x-a}$ será igual á $\dfrac{\mathrm{A}'}{x-a'}$.

Suprimiendo estas dos fracciones simples que son iguales, se hallará

$$\frac{\mathrm{B}}{x-b}+\frac{\mathrm{C}}{x-c}+\ldots+\frac{\mathrm{K}}{x-k}=\frac{\mathrm{B}'}{x-b'}+\frac{\mathrm{C}'}{x-c'}+\ldots+\frac{\mathrm{K}'}{x-k'},$$

y demostrariamos de la misma manera que $\dfrac{\mathrm{B}}{x-b}=\dfrac{\mathrm{B}'}{x-b'}$, y lo mismo de todas las demás; de donde se deduce que ambos sistemas son idénticos; luego una fraccion racional no puede descomponerse más que en un solo sistema de fracciones simples, segun queriamos demostrar.

EJEMPLO I. Sea descomponer la fraccion racional

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}=\frac{x^3+x^2-14x-24}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}.$$

Resolviendo la ecuacion $x^4-5x^3+5x^2-6=0$, se hallarán las raíces -1, 1, 2, 3; y la fraccion propuesta se descompondrá en fracciones simples de la forma

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}=\frac{\mathrm{A}}{x+1}+\frac{\mathrm{B}}{x-1}+\frac{\mathrm{C}}{x-2}+\frac{\mathrm{D}}{x-3}.$$

Para calcular los numeradores, determinaremos primero la derivada

$$f'(x)=4x^3-15x^2+10x+5,$$

y obtendremos despues

$$A=\frac{F(-1)}{f'(-1)}=\frac{-10}{-24}=\frac{5}{12},\quad B=\frac{F(1)}{f'(1)}=\frac{-36}{4}=-9$$

$$C=\frac{F(2)}{f'(2)}=\frac{-40}{-3}=\frac{40}{3},\quad D=\frac{F(3)}{f'(3)}=\frac{-30}{8}=-\frac{15}{4};$$

por consiguiente, se tendrá

$$\frac{x^3+x^2-14x-24}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}=\frac{\frac{5}{12}}{x+1}-\frac{9}{x-1}+\frac{\frac{40}{3}}{x-2}-\frac{\frac{15}{4}}{x-3}.$$

Ejemplo II. Sea la fraccion impropia racional

$$\frac{x^4+3x^3+24x^2-16x+96}{x^3+2x^2-x-2}.$$

Efectuando la division del numerador por el denominador, se tendrá

$$\frac{x^4+3x^3+24x^2-16x+96}{x^3+2x^2-x-2}=x+1+\frac{23x^2-13x+98}{x^3+2x^2-x-2}.$$

Descomponiendo ahora la fraccion propia racional

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{23x^2-13x+98}{x^3+2x^2-x-2},$$

se hallará, siendo $-2, -1$ y 1 las raíces de $x^3+2x^2-x-2=0$,

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}.$$

La derivada del denominador es $f'(x)=3x^2+4x-1$; luego los valores de los numeradores serán

$$A=\frac{F(-2)}{f'(-2)}=\frac{216}{3}=72,\quad B=\frac{F(-1)}{f'(-1)}=\frac{134}{-2}=-67,$$

$$C=\frac{F(1)}{f'(1)}=\frac{108}{6}=18,$$

y la fraccion propuesta se descompondrá en

$$\frac{x^4+3x^3+24x^2-16x+96}{x^3+2x^2-x-2}=x+1+\frac{72}{x+2}-\frac{67}{x+1}+\frac{18}{x-1}.$$

Segundo caso. *Que la ecuacion* $f(x)=0$ *tenga raíces iguales.*

415. *Toda fraccion propia racional* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *cuyo denominador* $f(x)$ *igualado á cero, tiene la raíz* a *repetida* n *veces, se puede descomponer en la suma de dos fracciones de la forma*

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{n-1}f_1(x)},$$

siendo A_0 *una constante,* $F_1(x)$ *un polinómio racional entero, y* $f_1(x)$ *el cociente de dividir* $f(x)$ *por* $(x-a)^n$, *el cual no contiene ya al factor* $x-a$.

En efecto, se tiene evidentemente, cualquiera que sea el valor de A_0,

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x-a)^n f_1(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{F(x)}{(x-a)^n f_1(x)}-\frac{A_0}{(x-a)^n},$$

ó efectuando la resta indicada por las dos últimas fracciones,

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{F(x)-A_0 f_1(x)}{(x-a)^n f_1(x)} \qquad [3].$$

Ahora bien, si el denominador de la segunda fraccion que está en el segundo miembro, no ha de contener sino la potencia del grado $n-1$ del binómio $x-a$, es necesario que la diferencia $F(x)-A_0 f_1(x)$ sea divisible por $x-a$, para lo cual se necesita que se verifique la igualdad

$$F(a)-A_0 f_1(a)=0, \quad \text{de donde} \quad A_0=\frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Esta igualdad es posible, y nos da para A_0 un valor finito distinto de cero; porque $f_1(a)$ no es cero, por el supuesto: el numerador $F(a)$ tampoco es cero, porque siendo irreducible la fraccion propuesta, no puede contener $F(x)$ al factor $x-a$; luego segun hemos dicho, A_0 tiene un valor finito distinto de cero, representado por $\frac{F(a)}{f_1(a)}$.

Siendo la diferencia $F(x)-A_0 f_1(x)$ divisible por $x-a$, haremos

$$F(x)-A_0 f_1(x)=(x-a)\,F_1(x),$$

en cuyo caso la igualdad [3] se convertirá en

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{n-1} f_1(x)} \qquad [4],$$

segun queriamos demostrar.

Los polinómios racionales y enteros $F_1(x)$ y $f_1(x)$ son primos entre sí; pues si tuvieran algun factor comun, dividiendo por él y reduciendo á un comun denominador las dos fracciones que constituyen el segundo miembro de la igualdad [4], tendriamos que la fraccion propuesta se podria reducir á otra que tuviera un denominador de menor grado, lo cual no puede ser, pues por hipótesis es irreducible.

Se puede ver fácilmente que el polinómio $F_1(x)$ es á lo más del grado $m-2$.

Fundados en el mismo teorema, podremos descomponer la segunda fraccion del segundo miembro de la igualdad [4], en otras dos de la forma

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{n-1}f_1(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{F_2(x)}{(x-a)^{n-2}f_1(x)},$$

siendo $F_2(x)$ á lo más del grado $m-3$, y no teniendo factores comunes con $f_1(x)$; la cantidad $A_1=\frac{F_1(a)}{f_1(a)}$ podrá ser cero, porque $F_1(x)$ podrá, sin inconveniente alguno, contener el factor $x-a$.

Sustituyendo el valor de $\frac{F_1(x)}{(x-a)^{n-1}f_1(x)}$ en la igualdad [3], hallaremos

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{F_2(x)}{(x-a)^{n-2}f_1(x)}.$$

Continuando del mismo modo, se obtendrá

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a}+\frac{\varphi(x)}{f_1(x)} \quad [5].$$

La fraccion $\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}$, es racional é irreducible como la propuesta; de modo, que si suponemos que la ecuacion $f_1(x)=0$ tiene p raíces iguales á b, se tendrá $f(x)=(x-b)^p f_2(x)$, siendo por consiguiente b una raíz múltiple del órden p de la ecuacion $f(x)=0$. Aplicando á esta ecuacion los mismos razonamientos, tendremos

$$\frac{\varphi(x)}{f_1(x)}=\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}+\frac{\psi(x)}{f_2(x)},$$

siendo B_0, B_1, B_2, ... B_{p-1}, cantidades finitas que pueden ser cero, á excepcion de B_0, que nunca lo es.

Sustituyendo este valor en la igualdad [5], hallaremos

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a}$$
$$+\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}+\frac{\psi(x)}{f_2(x)}.$$

En general, si suponemos que $f(x)=(x-a)^n(x-b)^p\ldots(x-l)^r$, la fraccion racional propuesta se podrá descomponer de la manera siguiente:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a}$$
$$+\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{L_0}{(x-l)^t}+\frac{L_1}{(x-l)^{t-1}}+\ldots+\frac{L_{t-1}}{x-l}+\pi(x),$$

siendo A_0, A_1, ... A_{n-1}, B_0, B_1, ... B_{p-1}, L_0, L_1, ... L_{t-1}, cantidades finitas que pueden ser cero, á excepcion de A_0, B_0, ... L_0, que nunca lo son, y $\pi(x)$ una funcion racional y entera.

Luego *la fraccion racional propuesta* $\frac{F(x)}{f(x)}$, *se puede descomponer en la suma de fracciones simples cuyos numeradores son constantes, y que tienen por denominadores las potencias sucesivas de los factores binómios correspondientes á las raíces diferentes de la ecuacion* $f(x)=0$, *cuyos mayores exponentes son aquellos á que vienen dichos factores elevados en el denominador* $f(x)$.

Podria creerse, que si en vez de principiar por las fracciones correspondientes á la raíz a, hubiéramos principiado por las de otra raíz cualquiera, se llegaria á obtener un desarrollo distinto; pero no es así, como vamos á demostrar.

416. *Una fraccion racional no se puede descomponer más que en un solo sistema de fracciones simples.*

En efecto, supongamos que una vez hallado un desarrollo, pudiéramos por otro medio cualquiera obtener otro diferente, y que tengamos los dos sistemas

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_0}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots$$
$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A'_0}{(x-a')^{n'}}+\frac{A'_1}{(x-a')^{n'-1}}+\ldots+\frac{B'_0}{(x-b')^{p'}}+\frac{B'_1}{(x-b')^{p'-1}}+\ldots$$

Estas igualdades deben verificarse para cualquiera que sean los valores de x; por consiguiente, se podrán igualar los segundos miembros, lo que dará una nueva igualdad, que multiplicada por $(x-a)^n$ y haciendo despues en ella $x-a$, el primer miembro se reducirá á A_0, el cual, como ya sabemos, no es cero; pero el segundo miembro se reduciria evidentemente á cero, si alguno de los denominadores de las fracciones que contiene no fuera una cierta potencia del binómio $x-a$; luego es menester que algunos de los denominadores de las fracciones del segundo miembro sean potencias del binómio $x-a$, lo que exige que se verifique la igualdad $a'=a$. Siendo $a'=a$, vamos á probar que n tiene que ser igual á n'; porque si n fuese, por ejemplo, mayor que n', multiplicando por $(x-a)^n$, el primer miembro se reduciria á la cantidad A_0 cuando hiciésemos $x=a$, mientras que el segundo se anularia, lo cual, como hemos visto, no puede ser. Si n fuese menor que n', multiplicando por $(x-a)^{n'}$ y haciendo $x=a$, el primer miembro se anularia, mientras que el segundo se reduciria á A'_0, lo cual tampoco es posible; luego se tendrá $n=n'$, segun queriamos demostrar.

Siendo $a'=a$ y $n=n'$, la igualdad de que venimos hablando se reduciria, despues de multiplicar por $(x-a)^n$, á

$$A_0+A_1(x-a)+\ldots+(x-a)^n\left(\frac{B_0}{(x-b)^p}+\ldots\right)=$$

$$A'_0+A'_1(x-a)+\ldots+(x-a)^n\left(\frac{B'_0}{(x-b')^{p'}}+\ldots\right);$$

y haciendo ahora $x=a$, se deduce $A_0=A'_0$; lo cual nos prueba, que las fracciones $\dfrac{A_0}{(x-a)^n}$ y $\dfrac{A'_0}{(x-a')^{n'}}$ son idénticas en ambos sistemas.

Suprimiendo estas dos fracciones iguales y haciendo los mismos razonamientos, se veria que las dos segundas fracciones eran tambien idénticas, y lo mismo todas las demás; luego los dos sistemas son idénticos, segun queriamos demostrar.

417. Una vez probado que toda fraccion racional irreducible se puede descomponer en la suma de fracciones simples, y que esta descomposicion es única, nos resta ver cómo se calculan los valores numéricos de los numeradores $A_0, A_1, \ldots B_0, B_1, \ldots$ de las fracciones en que se descompone.

Muchos son los métodos que pueden seguirse para hallar los valores de estas cantidades; uno de los más sencillos es el siguiente:

418. *Los valores de las cantidades* $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$, *que sirven de numeradores á las fracciones simples correspondientes á la raíz múltiple* a, *son los* m *primeros coeficientes de las diferentes potencias de* y, *en el cociente de dividir* $f(x)$ *por* $f_1(x)$, *cuando se reemplaza* x *por* a+y.

En efecto, en la igualdad

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x-a)^n f_1(x)},$$

sustituyamos x por el binómio $a+y$, y se convertirá en

$$\frac{F(a+y)}{f(a+y)}=\frac{F(a+y)}{y^n f_1(a+y)}.$$

Efectuemos ahora la division del polinómio $F(a+y)$ por el polinómio $f_1(a+y)$, los cuales supondremos ordenados con relacion á las potencias crecientes de y, y prolonguemos la division hasta llegar al término del cociente del grado $n-1$; el resto será evidentemente de la forma $y^n R$, siendo R un polinómio entero; de modo, que representando por P_0, P_1, P_2,... los coeficientes de las potencias de y en el cociente hallado, se tendrá

$$\frac{F(a+y)}{f_1(a+y)}=P_0+P_1y+P_2y^2+P_3y^3+\ldots+P_{n-1}y^{n-1}+\frac{y^nR}{f_1(a+y)}.$$

Dividiendo esta igualdad por y^n, y reemplazando y por su valor $x-a$, se tiene

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n f_1(x)}=\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{P_0}{(x-a)^n}+\frac{P_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{P_{n-1}}{x-a}+\frac{R}{f_1(x)}.$$

Comparando este resultado con la igualdad [5], y recordando (446) que una fraccion racional irreducible no puede descomponerse en dos sistemas de fracciones simples, los correspondientes á una raíz múltiple a deben ser unos mismos siempre; luego tendremos $A_0=P_0$, $A_1=P_1$, $A_2=P_2$, etc., segun queriamos demostrar.

Una vez hallados los valores numéricos de los numeradores de las fracciones simples correspondientes á una raíz múltiple a, se hallarán los de las correspondientes á la raíz b, aplicando el mismo procedimiento á la fraccion propuesta ó á la fraccion más sencilla $\frac{R}{f_1(x)}$.

Ejemplo. Sea la fraccion racional irreducible

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^2-x-6}{(x+1)^3(x-1)^2(x-2)}.$$

Para hallar los numeradores de las fracciones correspondientes á la raíz -1, sustituiremos x por $-1+y$ en los dos términos de la fraccion $\frac{F(x)}{f_1(x)}=\frac{x^2-x-6}{(x-1)^2(x-2)}$, y tendremos

$$\frac{F(-1+y)}{f_1(-1+y)}=\frac{4+3y-y^2}{12-16y+7y^2-y^3}.$$

Efectuando esta division, hallaremos que los tres primeros coeficientes son $\frac{1}{3}$, $\frac{25}{36}$ y $\frac{35}{54}$; luego las fracciones simples correspondientes á la raíz -1, serán

$$\frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3}+\frac{\frac{25}{36}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{35}{54}}{x+1}=\frac{1}{3(x+1)^3}+\frac{25}{36(x+1)^2}+\frac{35}{54(x+1)}.$$

Los numeradores de las fracciones simples correspondientes á la raíz 1, se hallarán mediante la expresion $\frac{F(x)}{f_1(x)}=\frac{x^2-x-6}{(x+1)^3(x-2)}$, en la cual sustituiremos x por $1+y$. Así,

$$\frac{F(1+y)}{f_1(1+y)}=\frac{6-y-y^2}{8+4y-6y^2-5y^3-y^4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}y+\text{etc.}$$

De modo, que las fracciones simples correspondientes á esta raíz múltiple $+1$, serán

$$\frac{\frac{3}{4}}{(x-1)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{3}{4(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-1)}.$$

Por último, el numerador de la fraccion correspondiente á la raíz 2, será $-\frac{\frac{4}{27}}{x-2}=-\frac{4}{27(x-2)}$; luego la fraccion propuesta se descompondrá en

$$\frac{x^2-x-6}{(x+1)^3(x-1)^2(x-2)}=\frac{1}{3(x+1)^3}+\frac{25}{36(x+1)^2}+\frac{35}{54(x+1)}+$$
$$\frac{3}{4(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4}{27(x-2)}.$$

TERCER CASO. *Que la ecuacion* f(x) $=0$ *tenga raíces imaginarias.*

419. Todo cuanto hemos dicho anteriormente respecto al caso de ser reales las raíces de $f(x)=0$, es aplicable tambien á aquel en que esta ecuacion tiene raíces imaginarias; aunque conviene hacer algunas ligeras modificaciones, con el objeto de obtener fracciones que no contengan expresiones imaginarias.

Consideremos por lo tanto dos raíces imaginarias conjugadas de la ecuacion $f(x)=0$, tales como $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ y $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, y supongamos que los factores correspondientes á estas raíces no entran más que una vez en $f(x)$.

Los numeradores de las fracciones correspondientes á estas raíces, estarán dados por las fórmulas

$$A_0=\frac{F(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{f_1(\alpha+\beta\sqrt{-1})},\quad A'_0=\frac{F(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{f_1(\alpha-\beta\sqrt{-1})},$$

las cuales dan para valores de A_0 y A'_0 expresiones conjugadas de la forma $A+B\sqrt{-1}$ y $A-B\sqrt{-1}$; por tanto, á estas dos raíces corresponderán las dos fracciones simples.

$$\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}},\quad \frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}.$$

Si ahora sumamos estas dos fracciones, se tendrá

$$\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Donde vemos, que á un par de raíces imaginarias conjugadas, corresponde una fraccion real de la forma

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}.$$

420. Si las raíces imaginarias que hemos considerado, en vez de ser simples, como hemos supuesto, se hallasen repetidas un cierto número n de veces, el trinómio x^2+px+q, que expresa el producto de los factores correspondientes á estas raíces, se hallaria repetido por factor n veces en el denominador $f(x)$; de modo, que podremos establecer la igualdad $f(x)=(x^2+px+q)^n f_1(x)$, siendo $f_1(x)$ un polinómio entero que no contiene al factor $x+px+q$.

Esto supuesto, pasemos á demostrar que la fraccion propuesta se puede descomponer en la suma de fracciones de la forma

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\dots$$
$$+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{x^2+px+q}+\frac{F_n(x)}{f_1(x)}\qquad [6],$$

siendo M_0, N_0, M_1, N_1,... constantes reales, y $F_n(x)$ un polinómio real y entero.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, veremos que se puede disponer de las indeterminadas M_0 y N_0 de manera que el polinómio

$$F(x)-(M_0x+N_0)f_1(x)$$

sea divisible por x^2+px+q, para lo cual basta que dicho polinómio se anule haciendo $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ y $x=\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

Si reemplazamos x por cada uno de estos valores, y representamos por $A\pm B\sqrt{-1}$ y por $C\pm D\sqrt{-1}$ los resultados de estas sustituciones en los polinómios respectivos $F(x)$ y $f_1(x)$, tendremos las relaciones

$$A+B\sqrt{-1}-[M_0(\alpha+\beta\sqrt{-1})+N_0](C+D\sqrt{-1})=0,$$
$$A-B\sqrt{-1}-[M_0(\alpha-\beta\sqrt{-1})+N_0](C-D\sqrt{-1})=0,$$

de las cuales deduciremos, separando las partes reales de las imaginarias,

$$\begin{aligned} A&=(\alpha C-\beta D)M_0+CN_0 \\ B&=(\beta C+\alpha D)M_0+DN_0 \end{aligned} \qquad [7].$$

Estas ecuaciones son de primer grado con relacion á M_0 y N_0; el denominador comun $\beta(C^2+D^2)$ de estas incógnitas no puede ser cero, porque si lo fuese, se tendria $\beta=0$, ó $C^2+D^2=0$; en el primer caso las raíces no serian imaginarias, lo que es contra el supuesto: en el segundo $f_1(x)$ se anularia para los valores $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ y $x=\alpha-\beta\sqrt{-1}$, y por tanto contendria al factor x^2+px+q, que tambien es contra el supuesto; por consiguiente, se pueden deducir de estas ecuaciones valores finitos, reales y determinados para las cantidades M_0 y N_0.

Habiendo hallado valores determinados, reales y finitos de M_0 y N_0 que cumplen con la condicion de hacer que el polinómio $F(x)-(M_0x+N_0)f_1(x)$ sea divisible por x^2+px+q, podremos establecer la igualdad

$$F(x)-(M_0x+N_0)f_1(x)=(x^2+px+q)\varphi(x),$$

representando por $\varphi(x)$ el cociente de la division, que será un polinómio racional entero y de términos reales.

De esta igualdad se deduce, pasando al segundo miembro el término $(M_0x+N_0)f_1(x)$ y dividiendo por $f(x)=(x^2+px+q)^nf_1(x)$,

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}.$$

Del mismo modo se tendrá

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x_2+px+q)^{n-1}}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-2}f_1(x)}$$

y así sucesivamente; luego la fraccion propuesta se puede descomponer segun indica la igualdad [6].

Descomponiendo del mismo modo la fraccion $\frac{F_n(x)}{f_1(x)}$ y luégo las siguientes, se tendrá la fraccion dada descompuesta en la suma de una série de fracciones simples de la forma indicada.

De un modo análogo que en los casos anteriores, demostrariamos que la descomposicion es única; ó lo que es lo mismo, que una fraccion racional cuyo denominador contiene raíces imaginarias, no se puede descomponer más que en uno solo sistema de fraciones simples.

421. Si el denominador $f(x)$ de la fraccion propuesta tuviera raíces reales é imaginarias múltiples ó simples, se le aplicaria la descomposicion indicada en cada uno de los casos anteriores. Así, si se tuviera la fraccion racional $\frac{F(x)}{f(x)}$, cuyo denominador sea

$f(x)=(x-a)\ldots(x-b)^n\ldots(x^2+px+q)\ldots(x^2+rx+s)^p$, se tendrá

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\ldots+\frac{B_0}{(x-b)^n}+\frac{B_1}{(x-b)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_{n-1}}{x-b}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{P_0x+Q_0}{(x^2+px+q)}+\ldots+\frac{R_0x+S_0}{(x^2+rx+s)^p}+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{p-1}}+\ldots$$

$$+\frac{R_{p-1}x+S_{p-1}}{x^2+rx+s}+\ldots$$

422. Esta descomposicion será única; pues segun los casos anteriores, las fracciones correspondientes á cada especie de raíces serán siempre las mismas, y por tanto la fraccion propuesta no admitirá más que una sola descomposicion en fracciones simples de la forma indicada.

Ejemplo. Sea la fraccion

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^3+3}{x^4+x^3+x^2+x}=\frac{x^3+3}{x(x+1)(x^2+1)}.$$

Segun lo dicho (421), se tendrá

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Siendo las raíces de la ecuacion $f(x)=0$, $0, -1$ y $\pm\sqrt{-1}$, hallaremos para valor de A y B los números

$$A=\frac{F(0)}{f_1(0)}=\frac{3}{1}=3,\ B=\frac{F(-1)}{f_1(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$$

siendo para el primero $f_1(x)=(x+1)(x^2+1)$, y para el segundo $f_1(x)=x(x^2+1)$.

Para calcular las cantidades M y N, nos valdremos de las relaciones [7]

$$A=(\alpha C-\beta D)M_0+CN_0$$
$$B=(\beta C-\alpha D)M_0+DN_0$$

en las cuales haremos $\alpha=0$, $\beta=1$, $M_0=M$ y $N_0=N$, de modo que se tendrá

$$\left.\begin{aligned}A&=-DM+CN\\ B&=CM+DN\end{aligned}\right\}\quad [8]$$

Ahora tenemos que calcular los valores de A, B, C y D; para ello tenemos

$$f_1(x)=x(x+1),\ F(\alpha+\beta\sqrt{-1})=A+B\sqrt{-1}$$
$$f_1(\alpha+\beta\sqrt{-1})=C+D\sqrt{-1};$$

pero $$F(\alpha+\beta\sqrt{-1})=F(\beta\sqrt{-1})=-\beta^3\sqrt{-1}+3,$$
$$f_1(\alpha+\beta\sqrt{-1})=f_1(\beta\sqrt{-1})=-\beta^2+\beta\sqrt{-1},$$

de donde

$$A+B\sqrt{-1}=3-\beta^3\sqrt{-1},\ C+D\sqrt{-1}=-\beta^2+\beta\sqrt{-1},$$

y por consiguiente

$$A=3,\ B=-\beta^3,\ C=-\beta^2,\ D=\beta,$$

ó bien

$$A=3,\ B=-1,\ C=-1,\ D=1.$$

Las ecuaciones [8] se convertirán por estos valores en

$$3=-M-N,$$
$$-1=-M+N,$$

de donde deduciremos los valores

$$M=-1,\ N=-2;$$

luego la fraccion propuesta se descompondrá en

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^3+3}{x(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{x+2}{x+1}.$$

FIN

OBRAS DE MATEMÁTICAS

DE D. BERNARDINO SANCHEZ VIDAL.

Elementos de Aritmética, para uso de las escuelas de primera enseñanza (1860), 5 reales en Madrid y 6 en provincias.

Lecciones de Aritmética. Un tomo en 4.° tercera edicion (1878), 24 y 28.

Lecciones de Algebra. Tomo I. en 4.° tercera edicion (1878), 26 y 30.

Lecciones de Algebra. Tomo II. en 4.° (1878), 26 y 30.

Tablas de reduccion de las pesas y medidas legales de Múrcia á las métrico-decimales y vice-versa. (1867), 4 reales.

ECHEGARAY.

Problemas elementales de Geometría. Primera parte: Geometría plana (1865), 15 y 17 reales.

Problemas elementales de Geometría analítica. Primera parte. Analítica de dos dimensiones (1865), 8 y 10 reales.

Los pedidos se dirigirán á D. Eduardo Martinez (sucesor de Escribano), Príncipe, 25, librería; y Sres. de Anllo y Rodriguez, Olivo, 6 y 8, librería. Madrid.