ELEMENTOS
DE ÁLGEBRA,

REDACTADOS

*con arreglo al programa designado para la oposición á ingreso
en el Colegio Naval Militar,*

POR EL PROFESOR DEL MISMO,

Teniente de Navío,

DON RAFAEL MARTINEZ Y CANO.

SAN FERNANDO:

Imprenta y Librería Española, calle Real, num. 47.
1864.

ELEMENTOS

DE

ÁLGEBRA,

REDACTADOS

CON ARREGLO AL PROGRAMA DESIGNADO PARA LA OPOSICION;

POR EL PROFESOR DEL COLEGIO NAVAL MILITAR,

TENIENTE DE NAVÍO,

D. RAFAEL MARTINEZ Y CANO.

San Fernando.

—

Imprenta y Librería Española, calle Real, núm. 47.

1864.

PRÓLOGO.

Al redactar el presente *Tratado elemental de álgebra*, solo he procurado reunir todas las teorias indispensables, siguiendo el programa mandado observar por el Gobierno en el exámen de oposicion para ingreso en el Colegio Naval Militar, para facilitar el estudio de los diversos ramos que deben completar la instruccion de sus alumnos.

Para ello, me he valido de la doctrina espuesta por diversos autores tenidos á la vista como Meunier-Joannet, Francœur, Lista, Montojo, Cirodde y en algunos casos por lo que me ha dictado la esperiencia de mas de treinta años dedicados á la enseñanza.

Mi objeto principal ha sido presentar las teorias sin salir de los límites mas elementales, y sus demostraciones y análisis todo lo mas condensado posible, á fin de que teniendo presente las premisas, sea fácil á los alumnos deducir las consecuencias, sin distraer su imaginacion con razonamientos demasiado largos, que les hacen á veces olvidar la idea principal del raciocinio.

Á la esposicion de la parte doctrinaria, seguirá un apéndice de ejemplos por el órden en que se han presentado las teorias, para ejercicios de los alumnos, y dando el resultado final para que les sirva de comprobacion. Tambien van como ejercicio algunos problemas, y separadamente algunos de bastante uso en la pràctica de la Cosmografía y navegacion.

Sin pretensiones de ningun genero presento á mis discípulos este *tratado*, todos mis deseos quedarán satisfechos si encuentra una acogida benévola, y si llena el objeto que me he propuesto en su redaccion.

ERRATAS.

Pág.	Lin.	Dice.	Léase.
4	6	$(a+b)$	$(a-b)$
13	9	$11a^3$	$3a^3$
15	19	cuociente.	producto
17	12	$+c$	$-c$
18	9	$(a+b^2)$	$(a+b)^2$
»	21	suma	diferencia
89	12	$a+d=c-b$	$a+d>c-b$
109	4	$t>-\frac{3}{7}$	$t<-\frac{3}{7}$
111	última	$\frac{27a^6c}{64b^3d^6}$	$\frac{27a^6c^3}{64b^3d^6}$
122	4	$+75\sqrt{3}$	$+15\sqrt{3}$
«	«	$=47\sqrt{3}$	$=-13\sqrt{3}$
«	última	$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{s}{t}}$	$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}}$
«	«	$\frac{c}{d}\sqrt{\frac{y}{z}}$	$\frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{y}{z}}$
«	«	$\frac{ad}{cb}\sqrt{\frac{s^nz^m}{t^ny^m}}$	$\frac{ad}{cb}\sqrt[mn]{\frac{s\,z^m}{t^ny^m}}$

Pág.	Lin.	Dice.	Léase.
137	7	$\sqrt{\frac{1}{4}p^3 - q}$	$\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$
«	9	x^3	x^2
«	25	$\frac{1}{4}p^3$	$\frac{1}{4}p^2$
«	última	$(x + \frac{1}{2}p)^3 = \frac{1}{4}p^3 - q$	$(x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$
138	2	$\frac{1}{4}p^3$	$\frac{1}{4}p^2$
«	4	p^3	p^2
«	10	$\frac{1}{4}p^3$	$\frac{1}{4}p^2$
«	11	$\frac{1}{4}p^2$	$\frac{1}{4}p^2$
145	2	x^2	x''
148	16	$\mp \frac{1}{2}p \mp \frac{1}{2}p$	$\mp \frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p$
«	última	$\sqrt{\mp q}$	$\sqrt{\pm q}$
149	2	bc	bx
177	5	procede	precede
201	7	b^a	b^x
219	3	$L^\beta.b$	$L_\beta.b$
«	12	$L^\beta.b$	$L_\beta.b$

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TRATADO.

ALGEBRA.

Definiciones y principios convencionales.

1. **Álgebra** es aquella ciencia que espresa, por medio de caractéres generales, las operaciones que deben hacerse con las cantidades *dadas* en el enunciado de un problema, para deducir los valores de las que se buscan, segun las condiciones de la cuestion.

2 **Datos** son las cantidades conocidas del problema, é **incógnitas** las que se tratan de encontrar.

3 Los símbolos de que usa el álgebra, para representar las cantidades y generalizar los resultados de las cuestiones, son las letras de los diferentes alfabetos, ligadas por medio de los signos que indican las diversas operaciones que han de ejecutarse con ellas; y esto constituye todo el artificio algebráico.

4 Para indicar las operaciones usa el àlgebra de los mismos signos que la aritmética, y de algunos otros, como daremos á conocer mas adelante.

El signo $+$ *mas* indica la adicion: así, para espresar que a se ha de sumar con b, se escribe

$$a + b$$

y se lee a mas b.

El signo $-$ *menos* indica la sustraccion: para espresar que de a se ha de restar b, se escribe

$$a - b$$

y se lee a menos b.

Observaciones. 1.ª Los signos $+$ y $-$ sirven tambien para indicar el carácter positivo ó negativo de las cantidades, como luego veremos.

2.ª Á toda cantidad que va sin signo se le supone el signo $+$

El signo $\pm$, llamado de *ambigüedad*, indica que una cantidad ha de ser sumada con otra, ó restada de ella: así, $a \pm b$ se lee a mas menos b.

El signo $\times$, ó la colocacion de una letra á continuacion de otra con un punto entre ellas, ó sin signo alguno, indica la multiplicacion: así, para espresar que a se ha de multiplicar por b, se escribe

$$a \times b\,; \quad a \, . \, b\,; \quad \text{ó} \quad ab$$

leyéndose, en todo caso, a multiplicado por b.

El signo $:$ ó $-$ indica la division: así, para espresar que a se ha de partir por b, se escribe

$$a : b \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b},$$

y se lee a dividido por b.

El signo $\sqrt{}$ indica la estraccion de raices, colocándose entre sus ramas el número que indica el grado de la raiz, escepto en la del segundo grado, cuyo número se llama *índice* ó *esponente* del radical: así,

$$\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt[n]{a}$$

significa que de a se ha de estraer la raiz cuadrada, cúbica ó del grado n; y se lee, raiz cuadrada de a, raiz cúbica de a, raiz n ó del grado n de a.

El signo $=$ es el de igualdad: la cantidad que le antecede se llama *primer miembro*, y la que le sigue *segundo miembro*; así, para espresar que a vale tanto como b, se escribe

$$a = b$$

y se lee a igual b.

Los signos $>$, que se llama de *mayoría*, y el $<$ que se llama de *minoría*, indica que la cantidad escrita entre las ramas es mayor que la que está en el vértice ó punta; así, para espresar que a es mayor que b, ó que a es menor que b, se escribe

$$a > b \text{ y } a < b$$

y se lee, a mayor que b, y a menor que b.

Ambos signos sirven para espresar lo que se llama *desigualdad ó inecuacion*; llamándose tambien primer miembro la cantidad que precede al signo $>$ ó $<$, y segundo miembro á la que le sigue.

El paréntesis ( ) se usa para espresar que la cantidad contenida dentro de él ha de someterse á la operacion indicada por el signo que le precede; ó lo que es lo mismo, que la operacion, indicada por el signo, afecta al resultado de las operaciones indicadas dentro del paréntesis. Se usa tambien, en lugar del paréntesis, del *vínculo*, que es una simple raya puesta sobre los términos que debiera abrazar el paréntesis: así,

1.ª $= (a+b)+(c-d)$ ó $\overline{a+b}+\overline{c-d}$
2.ª $= a-(c-d)$ ó $a-\overline{c-d}$
3.ª $= (a+b)\times c$, ó $(a+b)c$
4.ª $= (a-b)\times(c-d)$, ó $(a+b)\ (c-d)$, ó $\overline{a-b}\times\overline{c-d}$
5.ª $= (a-b):(c+d)$ ó $\overline{a-b}:\overline{c+d}$
6.ª $= (ab)^4$ ó $\overline{ab}^4$
7.ª $= \sqrt{}(a^2-b^2)$ ó $\sqrt{a^2-b^2}$

La 1.ª quiere decir que á la suma de a con b se ha de agregar la diferencia entre c y d; la 2.ª, que de a se ha de restar la diferencia entre c y d; la 3.ª, que la suma de a y b se ha de multiplicar por c, y así de los demas.

5 Llámase **coeficiente** de una cantidad algebráica al factor numérico colocado á la izquierda, y manifiesta las veces que dicha cantidad entra como sumando. Entiéndese tambien, en general, por *coeficiente* de una cantidad todo lo que la multiplica, sea número, letra ó cualquiera espresion algebráica, mas ó menos complicada.

Así, en las espresiones $4mnz$, $\frac{p(p-1)}{q+r}z$, y $7z$, son respectivamente coeficientes de z, las cantidades

$$4mn.\ \frac{p(p-1)}{q+r},\ \text{y}\ 7$$

Observacion. A toda cantidad que no lleva coeficiente espreso, se le supone que lleva el coeficiente 1.

6 Se llama **esponente** de una cantidad al número ó etra colocada á su derecha y un poco elevado, y espresa las veces que esta cantidad entra como factor.

Observacion. A toda cantidad que no lleva esponente espreso, se le supone el esponente 1.

7 Se llaman **términos** las cantidades comprendidas entre los signos + ó —

Monomios son las espresiones que constan de un solo término.

Se dá el nombre de **binomio** á la espresion algebráica que consta de dos términos; de **trinomio,** si consta de tres términos; y, en general, se llama **polinomio,** á la espresion algebráica que pasa de dos términos.

Observacion. El signo que afecta á cualquier término es siempre el que le precede por su izquierda; si le afectase el signo +, el término se llama *positivo*, si el signo —, el término se llama *negativo*.

8 Por **dimension** de un término se entiende cada uno de los factores literales de que consta; y **grado,** al número de dimensiones, que es igual á la suma de los esponentes de dichos factores.

Cuando todos los términos de un polinomio son de un mismo grado, se dice que son **homogéneos.**

9 **Ordenar** un polinomio con relacion á una misma letra, es disponer sus términos de modo que los esponentes de dicha letra vayan disminuyendo desde el primer término hasta el último, ó vayan aumentando desde el primero hasta el último.

En el primer caso el polinomio se dice que está ordenado en sentido *decrecente*, y en sentido *crecente* en el segundo.

Tambien puede estar ordenado un polinomio al mismo tiempo en sentido crecente respecto de una letra, y decrecente respecto de otra; y si en este caso, *permutándose* las letras ordenatrices, no se alterasen los polinomios, se dice que son *simétricos*.

Observacion. La letra por la cual está ordenado un polinomio se llama *letra principal* ú *ordenatriz*.

10 Llámase **identidad** la espresion de la igualdad de dos cantidades numéricas, ó de dos cantidades que permanecen iguales, cualesquiera que sean los valores que se den á las letras que en ellas entren.

Así, $$9+3=12$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$ son identidades.

11 Por **ecuacion** se entiende la espresion de la igualdad de dos cantidades, que no pueden ser iguales sino en el caso de que se den á ciertas letras, que en ellas entren, valores particulares.

Así, $$4x=32$$
es una ecuacion; porque solamente dando á x el valor numérico 8 se puede verificar, y entonces se convierte en la identidad
$$4.8=32.$$

Las letras que, como la x, deben recibir en una ecuacion valores particulares, para que pueda existir la igualdad entre las dos partes separadas por el signo $=$, se llaman *incógnitas* de la ecuacion.

12 Las partes situadas á derecha é izquierda del signo $=$, se llaman *miembros* de la ecuacion.

13 Llámanse **fórmulas** las espresiones ó resultados finales de las soluciones de los problemas; é indican las operaciones que han de hacerse con los datos para tener el valor de las incógnitas.

14 Dos son las principales ventajas del álgebra; la primera, que simplificando los raciocinios que hay que hacer sobre las cantidades, estiende el dominio de las matemáticas á las cuestiones mas complicadas: la segunda, que el resultado algebráico ó la fórmula sirve de regla para resolver todas las cuestiones de la misma especie; pues tengan los datos el valor que tuvieren, las fórmulas indican las operaciones que deben hacerse sobre ellos para tener los valores de las incógnitas.

15 La traduccion de las fórmulas del lenguage algebráico al lenguage ordinario ó social, constituyen las reglas prácticas establecidas para resolver las cuestiones matemáticas ó consignar un teorema.

16 Llámase **valor numérico** de una espresion algebráica, al número que se obtiene sustituyendo á las letras de esta espresion los valores particulares que se le asignen.

17 Cuando una cantidad depende su valor de los de otras cantidades, se dice que esta cantidad es una *funcion* de las otras.

Así, $x=\frac{b}{a}$, x es una funcion de a y b.

18 Llámanse **términos semejantes** los que constan de un mismo número de factores literales é iguales, aunque sus signos y coeficientes sean desiguales.

19 Para reducir los términos semejantes á uno solo, se observarán las siguientes reglas:

1.ª Si los términos que se han de reducir tuvieren un mismo signo, se suman sus coeficientes, y á la suma se le pone el mismo signo y los mismos factores literales.

2.ª Si tuvieren signos contrarios, se restará del coeficiente mayor el menor, y al resíduo se le pone el signo del mayor y los mismos factores literales.

3.ª Si hay varios términos positivos y negativos, se reunirán en uno solo todos los positivos, en otro todos los negativos; se restará el menor coeficiente del mayor, y al resíduo se le pondrá el signo del mayor y la misma parte literal comun.

Ejemplos.

Reducir los términos semejantes de las espresiones siguientes.

1.ª $2a^3+5ab^2-8ab^2-4b^3+6ab^2+9ab^2-8ab^2$

Resultado$=2a^3+4ab^2-4b^3$

2.ª $4a^2b-5a^2b+3a^2b+8a^2b-15a^2b$

Resultado$=-5a^2b$

Cantidades positivas y negativas.

20 La generalidad con que el álgebra considera la cantidad, exige que en ella se tenga en cuenta, no solo su valor respecto de una unidad cualquiera, sino tambien su modo de ser ó de influir en el resultado á que se aspira en el procedimiento; por tanto las cantidades han de considerarse bajo el doble concepto de la *cantidad* y de la *cualidad*: así, para apreciar los grados de temperatura, no solo conviene saber cuantos son, sino tambien si están por encima ó por debajo del *cero* del termómetro: para fijar la situacion de un capital, hay que saber si las partidas ó cantidades del balance corresponden al *haber* ó al *deber*; y para calcular la posicion de un móvil es preciso conocer, además de su velocidad,

la direccion de su movimiento con relacion á un punto fijo de partida.

21 Bajo este concepto, se dividen las cantidades en *positivas* y *negativas*. Llámanse POSITIVAS *las que tienen un modo de ser determinado;* y NEGATIVAS *las que tienen un modo de ser contrario á ellas.* Si a representa los grados de calor sobre cero, ó la partida que corresponda al haber, ó la distancia andada hácia la derecha de un punto, $-a$ espresará los grados de temperatura bajo cero, ó la partida correspondiente al deber ó las deudas, ó la distancia andada hácia la izquierda del punto.

22 Para espresar el carácter positivo y negativo de las cantidades, se emplean los dos signos $+$ y $-$ que sirven para indicar la adicion y sustraccion. (4, Observacion 1.ª)

23 Las denominaciones de *positivo* y *negativo* son puramente relativas, y no denotan mayor escelencia de lo primero sobre lo segundo. Estas denominaciones se cambian cuando se muda de objeto en la consideracion algebráica; así, cuando consideramos el haber de un capital, es negativo el deber ó la deuda; y cuando consideramos el deber ó la deuda, es negativo el haber que antes era positivo: de modo que una cantidad, bajo su concepto absoluto de cantidad y sin relacion con ninguna otra, no es positiva ni negativa.

24 De las ideas atribuidas á las *cantidades positivas* y á las *negativas*, resulta que debemos distinguir dos clases de *cero:* el CERO ABSOLUTO, símbolo de NADA; esto es, de la carencia absoluta de cantidad alguna, y que no puede hallarse, por consiguiente, cosa inferior ó menor que él; y el CERO LÍMITE, que es el punto de partida de las cantidades de una

misma especie, ya sean positivas, ya negativas. Tal es, por ejemplo, el cero del termómetro.

25 Esto supuesto, si se imaginan todas las cantidades de una misma especie, cualquiera que esta sea, dispuestas por órden de magnitud en una misma línea desde *cero* hasta el *infinito positivo*; es decir, hasta el límite de las cantidades positivas, yendo de izquierda á derecha; y desde *cero* hasta el *infinito negativo*, yendo de derecha á izquierda, se deducirá:

1.° Que *toda cantidad negativa es menor que cero.*

2.° Que *de dos cantidades negativas, es menor la que tiene mayor valor absoluto.*

Adicion y sustraccion.

26 La *adicion* y la *sustraccion* de las cantidades algebráicas no se efectuan, solo se indican.

Axiomas. 1.° Una suma permanece la misma cualquiera que sea el órden de los sumandos.

2.° Una diferencia ó un resíduo no se altera, aunque á minuendo y sustraendo se le sume ó se le reste una misma cantidad.

3.° Un polinomio no cambia de valor cualquiera que sea el órden en que se escriban sus términos; y el valor del polinomio se halla, reuniendo los términos positivos, haciendo lo mismo con los negativos, restando del resultado mayor el menor, y dando al resíduo el signo del mayor.

Adicion ó suma.

27 Se llama **adicion ó suma algebráica** de varias espresiones á lo que resulta reuniéndolas con sus mismos signos.

28 Para *sumar* los polinomios se escriben los unos á continuacion de los otros, conservando cada uno de sus términos su propio signo, haciéndose antes ó despues la reduccion de términos semejantes, si los hay.

Ejemplo.

Sumar los polinomios.

$$\begin{array}{l}
(\ \ 8a^2-\tfrac{3}{2}ab-2b^2-\tfrac{3}{4}) \\
(-a^2+\tfrac{1}{4}ab+7c^2+2) \\
(\ \ ab+2b^2+4c^2+\tfrac{1}{2})
\end{array}$$

$$\text{Suma} = 7a^2-\tfrac{1}{4}ab+11c^2+\tfrac{7}{4}.$$

29 De la regla dada para sumar espresiones algebráicas, se deduce

1.° Que para sumar á una cantidad la *suma* de otras varias, hay que agregar sucesivamente cada una de estas.

En efecto, si queremos sumar á la cantidad a la suma $(b+c+d)$, tendrémos, segun la regla de sumar

$$a+(b+c+d)=a+b+c+d.$$

2.° Que para sumar á una cantidad la *diferencia* de otras dos, hay que sumar á la cantidad dada la que hace de minuendo, y de esta suma restar despues la que hace de sustraendo.

En efecto, si queremos sumar á la cantidad a la diferencia $(b-c)$, tendrémos, segun la regla,

$$a+(b-c)=a+b-c.$$

Sustraccion ó resta.

30 Restar un polinomio P de otro polinomio P', es hallar un tercero que, sumado con P, reproduzca P'; y siendo esta operacion inversa de la adicion, se sigue que la regla debe ser tambien inversa; esto es, que *para restar un polinomio de otro, se escribe el minuendo, á su continuacion el sustraendo con los signos cambiados, haciendo despues la reduccion de los términos semejantes, si los hay.*

Demostracion. Supongamos que se quiere restar $(b-c)$ de a.

Se sabe que el residuo no se altera, aunque á minuendo y á sustraendo se le sume ó se le reste una misma cantidad: sumando, pues, la cantidad c al minuendo a y al sustraendo $(b-c)$, el minuendo se convertirá en $(a+c)$; y el sustraendo en $(b-c+c)=b$; tendremos,

$$a-(b-c)=(a+c)-b=a+c-b=a-b+c;$$

y como este procedimiento es general para toda clase de cantidades se sigue que *para restar una espresion algebráica de otra, se escribe el minuendo, y á su continuacion el sustraendo con los signos cambiados, haciendo despues la reduccion de los términos semejantes, si los hay.*

31 Conviene muchas veces escribir una espresion algebráica dándole á su conjunto el signo $-$; y atendiendo á que este signo indica una sustraccion, se escribirá esta espresion dentro de un paréntesis, cambiando los signos de to-

dos sus términos, y escribiendo el signo — fuera del paréntesis; así, la espresion

$$a - b + c - d - m$$

puede espresarse así; $a - (b - c + d + m)$.

y tambien de este otro modo $a - b - (-c + d + m)$

Ejemplo de restar.

Minuendo $= 7a^3 + 8a^2b - 4ab^2 + 4b^3$

Sustraendo $= 4a^3 + 2a^2b - 4ab^2 + 5b^3$

Resíduo $= 11a^3 + 6a^2b - b^3$

32 De la regla dada para restar espresiones algebráicas se deduce que *para restar de una cantidad la suma de otras varias, hay que restar sucesivamente cada una de estas.*

En efecto, si queremos restar de la cantidad a la suma $(b + c + d)$, tendremos, segun lo dicho

$$a-(b+c+d)=a-b-c-d.$$

Multiplicacion

33 Se llama **multiplicacion algebráica,** aquella operacion que tiene por objeto reunir en una sola espresion, llamada *producto*, todos los factores que entran en el multiplicando y multiplicador.

34 **Teorema.** Para multiplicar una suma por una cantidad, se multiplica cada uno de los sumandos por esta

cantidad, y se suman despues todos los productos parciales; esto es, que

$$(a+b+c)m = am+bm+cm.$$

En efecto, si m es entero, tendremos

$$(a+b+c)m = \left\{\begin{array}{l} \ \ a+b+c \\ +a+b+c \\ +a+b+c \\ \ \ .\quad .\quad . \\ \ \ .\quad .\quad . \\ \ \ .\quad .\quad . \\ \text{hasta } m \text{ veces} \end{array}\right.$$

pero

$$a+a+a \ldots\ \text{hasta } m \text{ veces es} = ma$$
$$b+b+b \ldots\ \text{hasta } m \text{ veces es} = mb$$

y así sucesivamente; luego

$$(a+b+c)m = ma+mb+mc = am+bm+cm.$$

Si m es fraccionario, esto es $=\frac{p}{q}$, será preciso dividir $(a+b+c)$ por q, y multiplicar el resultado por p; así, tendremos, dividiendo $(a+b+c)$ por q,

$$\frac{a+b+c}{q} = \frac{a}{q} + \frac{b}{q} + \frac{c}{q};$$

multiplicando ahora este resultado por p, será;

$$\frac{a+b+c}{q} \cdot p = (a+b+c)\frac{p}{q} = \frac{ap}{q} + \frac{bp}{q} + \frac{cp}{q};$$

resultado conforme con el enunciado del teorema.

Regla de los signos.

35 1.ª El producto de dos cantidades de un mismo signo es positivo.

2.ª El producto de dos cantidades de signos contrarios es negativo.

Estas dos reglas se enuncian generalmente diciendo: *mas* por *mas*, ó *menos* por *menos*, dan *mas*; *mas* por *menos*, ó *menos* por *mas*, dan *menos*.

Demostracion. Es evidente que $+a \times +b$, dá $+ab$; porque esto quiere decir que a se ha de sumar consigo mismo, tantas veces como esprese b; esto es:

$a + a + a + a + \ldots$ hasta b (veces) $= +a \times b = +ab$.

Vamos á demostrar que $(+a) \times (-b) = -ab$.

En efecto, a multiplicada por *cero* da *cero*; luego podrá escribirse.

$$+a(+b - b) = o. \quad (1)$$

pero como para multiplicar la suma algebráica $(+b - b)$ por a, es menester multiplicar cada una de sus partes por a y el cuociente debe ser además *cero*, como lo manifiesta la ecuacion (1); tendremos, pues, $+a$ por b, dá $+ab$; $+a$ por $-b$, debe ser $-ab$, para que la ecuacion (1) pueda reducirse á *cero*; pues este producto debe ser tal que, sumado con $+ab$, dé *cero* por suma, y ningun otro puede ser sino $-ab$: luego $+$ por $-$ produce $-$; y puesto que $+$ por $-$ dá $-$, es evidente que $-$ por $+$ dá tambien $-$

Finalmente $-a$ por $-b$, dá $+ab$: se tiene evidentemente

$$-a(+b - b) = o. \quad (2)$$

Para multiplicar la suma algebráica $(+ b - b)$ por $- a$, es preciso multiplicar cada una de sus partes por $- a$, y la suma de estos productos debe ser nula; el producto de $- a$ por la 1.ª parte $+ b$, dá $- ab$, luego el producto de $- a$ por $- b$ debe ser $+ ab$, para que sumado con $- ab$, se reduzca á cero, y se verifique la ecuacion (2): luego $-$ por $-$ dá $+$.

Observacion. Supuesto que $+$ por $+$ dá $+$ y que $-$ por $-$ dá $+$ se infiere que $(+ a)(+ a) = + a^2$; y $(- a)(- a) = + a^2$: de donde se sigue que si se pide la cantidad que, elevada al cuadrado, dé a^2, se hallarán *dos* que satisfarán á esta condicion; á saber: $+ a$ y $- a$; esto es, $\sqrt{a^2} = \pm a$; y en general, siendo m una cantidad tal que sea $m^2 = p$, se tendrá $\sqrt{p} = \pm m$; esto es, que *extrayendo la raiz cuadrada de una cantidad*, se hallan para su raiz dos valores, que solo difieren en el signo.

Reglas de la multiplicacion.

36 Para multiplicar entre sí dos potencias distintas de una misma letra, deben sumarse los esponentes de esta letra.

Así $a^m \times a^n = a^{m+n}$

En efecto $\begin{array}{l} a^m = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \ldots\ldots \text{ hasta } m \text{ veces.} \\ a^n = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \ldots\ldots \text{ hasta } n \text{ veces.} \end{array}$

luego $a^m \times a^n = (a.a.a.a \ldots \text{hasta } m \text{ veces}) \times (a.a.a\ldots\ldots$ hasta n veces); la letra a entrará, pues, como factor en el segundo miembro $(m + n)$ veces; por consiguiente $a^m \times a^n = a^{m+n}$

37 Para multiplicar dos monomios, se multiplican primero los coeficientes; las letras desiguales se escriben unidas,

y si hay una misma letra en ambos factores, se suman sus esponentes, dándole en fin al producto el signo que le corresponda, según la regla de los signos.

Ejemplos.

1.° $7\,ab^2\,c\,x \times 3\,a^2\,b^3\,m\,n^2 = 21\,a^3\,b^5\,c\,m\,n^2\,x$

2.° $2\,a^2\,b \times (-\,2\,a\,c) = -\,4\,a^3\,b\,c.$

38 Para multiplicar dos polinomios se multiplicará cada término del uno por todos los del otro, y la suma algebráica de estos productos parciales dará el producto total.

En efecto; supongamos que se trata de multiplicar

$$(a + b - c)\,(d - m - n);$$

supongamos que $a + b + c = A$, y tendremos

$$(a + b - c)\,(d - m - n) = A\,(d - m - n);$$

pero

$$A\,(d - m - n) = Ad - Am - An,$$

y sustituyendo por A el polinomio equivalente será

$$Ad - Am - An = \begin{cases} (a + b - c)\;d \\ +(a + b - c)\,(-\,m) \\ +(a + b - c)\,(-\,n) \end{cases}$$

pero

$$(a + b - c)\;d = ad + bd - cd;$$
$$(a + b - c)\,(-\,m) = -\,am - bm + cm;$$
$$(a + b - c)\,(-\,n) = -\,an - bn + cn;$$

luego sumando estos polinomios, productos parciales, será,

$$(a+b-c)(d-m-n) = ad + bd - cd - am - bm + cm - an - bn + cn$$

39 Para sacar una cantidad cualquiera como factor comun en una espresion algebráica polinomia, se escribirá esta cantidad fuera de un paréntesis, y dentro de él la suma algebráica de los cuocientes de cada uno de los términos del polinomio por la cantidad tomada por factor comun.

Asi:

$$3\,ab - 2\,c + abc = 3\,a\left(b - \frac{2\,c}{3a} + \frac{bc}{3}\right).$$

Consecuencias de la multiplicacion.

40 1.ª Si multiplicamos $(a+b)\,(a+b)$, se hallará

$$(a+b^2) = a^2 + 2\,ab + b^2$$
$$= a^2 + b^2 + 2\,ab.$$

Esta espresion nos dice que el cuadrado de un binomio que representa la suma de dos cantidades, es igual al cuadrado de su primera parte, mas el duplo de la primera por la segunda, mas el cuadrado de la segunda; ó bien, á la suma de los cuadrados de sus dos términos, mas el duplo del producto de los mismos términos.

2.ª Si multiplicamos $(a-b)$ por $(a-b)$, se tendrá

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2\,ab.$$

Esta espresion nos dice que el cuadrado de un binomio que representa la suma de dos cantidades, es igual al cuadrado de su primera parte, menos el duplo de la primera por la segunda, mas el cuadrado de la segunda; ó bien, á la suma de los cuadrados de sus dos términos, menos el doble producto de los mismos términos.

3.ª Si sumamos la espresion de $(a+b)^2$ con la de $(a-b)^2$ se tendrá:

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2).$$

Este resultado nos dice, que el cuadrado de la suma de dos cantidades, mas el cuadrado de la diferencia de las mismas es igual al doble de la suma de los cuadrados de dichas cantidades.

4.ª Si restamos de la espresion de $(a+b)^2$ la de $(a-b)^2$, se tendrá

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

Este resultado nos manifiesta, que el cuadrado de la suma de dos cantidades, menos el cuadrado de su diferencia es igual al cuádruplo del producto de dichas cantidades.

5.ª Si multiplicamos $(a+b)$ por $(a-b)$, se tendrá:

$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2.$$

Este resultado nos demuestra, que la suma de dos cantidades multiplicada por la diferencia de las mismas produce la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades.

Esta propiedad nos dá tambien los resultados siguientes:

$$(a^m+b^m)\ (a^m-b^m)=a^{2m}-b^{2m}$$

$$(a^m+b^n)\ (a^m-b^n)=a^{2m}-b^{2n}$$

$$(p+q+r+s)(p+q-r-s)=[(p+q)+(r+s)]\,[(p+q)-(r+s)]$$
$$=(p+q)^2-(r+s)^2$$

6.ª Si multiplicamos $(a+b)^2$ por $(a+b)$, se hallará:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Esta espresion nos dice, que el cubo de la suma de dos cantidades (de un binomio) es igual al cubo de su primera parte, mas triplo del cuadrado de la primera parte por la segunda, mas triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, mas el cubo de la segunda.

7.ª Si multiplicamos $(a-b)^2$ por $(a-b)$, se tendrá:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

De esta espresion se deduce, que el cubo de la diferencia de dos cantidades, es igual al cubo de su primera parte, menos triplo del cuadrado de la primera parte por la segunda, mas triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda.

8.ª Si elevamos al cuadrado el polinomio $(a+b+c-d+e-f)$ se obtendrá

$$\begin{aligned}(a+b+c-d+e-f)^2 = {} & a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \\ & +2ab+2ac-2ad+2ae-2af \\ & +2bc-2bd+2be-2bf \\ & -2cd+2ce-2cf \\ & -2de+2df \\ & -2ef\end{aligned}$$

Espresion que nos dice, que el cuadrado de un polinomio es igual á la suma de los cuadrados de todos sus términos, mas el duplo de cada término por cada uno de los que le siguen.

9.ª Si multiplicamos las espresiones

$$(a+b)^2 + (a-b)^2$$

y

$$(a+b)^2 - (a-b)^2$$

se hallará segun la consecuencia 5.ª

$$[(a+b)^2+(a-b)^2][(a+b)^2-(a-b)^2]=(a+b)^4-(a-b)^4$$

y segun las consecuencias 3.ª y 4.ª

$$=2(a^2+b^2).4ab$$
$$=8ab(a^2+b^2)$$

10.ª Si se multiplican varios factores binomios, cuya primera parte sea constante, y la segunda diferente, como

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ldots.$$

su producto, despues de ordenados sus términos con relacion á las potencias de x, y limitándolo á cuatro factores, será

$$x^4+(a+b+c+d)\,x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\,x^2$$
$$+(abc+abd+acd+bcd)\,x+abcd \qquad (1)$$

Este producto, como se vé, es fácil, atendida la ley de su formacion, escribirlo desde luego sin necesidad de ejecutarlo, observando las siguientes reglas:

1.ª El primer término del producto es la primera parte del binomio elevada á la potencia que indica el número de factores binomios que hay.

2.ª El último término es el producto de todas las segundas partes de los factores binomios.

3.ª Habrá tantos términos como factores hay mas uno, contándose como un solo término todos aquellos en que x tenga un mismo esponente.

4.ª Los esponentes de la primera parte van disminuyendo en todos los demas términos de unidad en unidad, hasta el último en que será *cero*, y desaparecerá la primera parte.

5.ª El coeficiente del segundo término es la suma todas las segundas partes.

6.ª El coeficiente del tercer término es la suma de todos los productos binarios, ó de dos en dos, que se pueden formar con las segundas partes.

7.ª El coeficiente del cuarto término es la suma de todos los productos ternarios, ó de tres en tres, que se pueden formar con las segundas partes.

8.ª El coeficiente del quinto término es la suma de los productos cuaternarios, ó de cuatro en cuatro, que se puedan formar con la segundas partes, y así sucesivamente.

Si en el ejemplo propuesto hacemos las segundas partes de los binomios iguales, seria lo mismo que proponer hallar una potencia cualquiera de un binomio, cuya ley de formacion podremos deducir *á posteriori* de la encontrada para el caso anterior.

En efecto para este caso, se tendrá haciendo iguales las segundas partes de los binomios

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots.=(x+a)(x+a)(x+a)\ldots.=(x+a)^m$$

Limitándonos á cuatro factores el producto representará una cuarta potencia del binomio $(x+a)$; esto es:

$$(x+a)^4=x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4\ldots. \qquad (2)$$

y razonando sobre ella deduciremos *á posteriori* la ley de formacion para cualquier potencia en general, esto es, para $(x+a)^m$.

Segun la regla 1.ª el primer término será x^m; y segun la 2.ª, el último término, que seria el producto de las segundas partes $a.\,b.\,c.\,d\ldots$, cuando estas sean iguales, será a^m.

El segundo término, que en el producto (1) es $(a+b+c+d)x^3$, para el caso de la cuarta potencia (2) en que $a=b=c=d$, será $4ax^3$

Este coeficiente se deduce fácilmente del primer término, multiplicando el esponente de la primera parte por su coeficiente numérico, y partiendo el producto por el número que indique el lugar de órden que ocupa dicho término: esto es, $\frac{4\times1}{1}=4$; y para la potencia m, será $\frac{m\times1}{1}=m$, y el segundo término de la potencia m será max^{m-1}

El tercer término, que en el producto (1) es

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$

para el caso de la cuarta potencia en que $a=b=c=d$, será $6a^2x^2$

Este coeficiente, como el anterior se deduce por la misma ley del término que le precede $4ax^3$; esto es, $\frac{3\times4}{2}=6$; y para la potencia m en que el término anterior es max^{m-1}, será $\frac{m(m-1)}{2}$, y el tercer término de dicha potencia m, será $\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}a^2$

Observando esta misma ley para la formacion de los respectivos coeficientes y atendiendo á que los esponentes de la primera parte disminuyen de unidad en unidad desde m hasta *cero*, y los de la segunda parte aumentan en el mismo órden desde *cero* hasta m, se tendrá

$$(x+a)^m=x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}a^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}a^3+\ldots.$$

$$+\ldots.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots.}{2.3.4\ldots.}xa^{m-1}+a^m$$

A esta formula se la dá el nombre de binomio de Newton, y sirve para hallar cualquier potencia de un polinomio cualqniera.

De lo espuesto se deduce empíricamente la siguiente regla para elevar un binomio á una potencia cualquiera.

El primer término será la primera parte del binomio elevada al esponente de la potencia que se pide; el último será la misma potencia de la segunda parte del binomio. En los términos intermedios la primera parte irá disminuyendo su esponente de unidad en unidad, y en la segunda parte vá aumentando en el mismo órden. El coeficiente que corresponda á cada término se formará multiplicando el esponente que tenga la primera par-

te del binomio en el último término hallado por el coeficiente del mismo, y este producto se partirá por el número que indique el lugar de órden de dicho término.

Division.

41. Se llama *division algebráica* á la operacion que se hace para obtener por resultado una espresion que, multiplicada por la espresion divisor, reproduzca la espresion dividendo.

Se dice que la division es exacta, ó que el dividendo es divisible por el divisor, cuando no deja residuo alguno.

Si designamos con D el dividendo, con d el divisor, con c el cuociente y con r el residuo, se tiene evidentemente

$$D = c \times d + r$$

Si $r = o$, se dice que la division es exacta, ó que D es divisible por d.

42. *Para dividir entre sí dos potencias de una misma letra, se restará el esponente de la letra divisor del esponente de la letra dividendo:* esto es, que

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Porque en toda division el dividendo es igual al producto del cuociente por el divisor; luego si el verdadero cuociente es a^{p-q}, deberemos tener:

$$a^p = a^{p-q} \times a^q$$

pero $a^{p-q} \times a^q = a^{p-q+q} = a^p$ luego la regla es exacta.

Consecuencias. 1.ª Toda cantidad elevada á *cero* es igual á la unidad

porque siendo $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

siendo $p = q$, se tiene $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0$

y $\frac{a^p}{a^p} = 1$

luego $a^0 = 1$

2.ª Toda cantidad, cuyo esponente es *negativo*, es igual á la unidad partida por la misma cantidad con esponente positivo

porque siendo $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

cuando sea $q = p + t$, será $\frac{a^p}{a^{p+t}} = a^{p-p-t} = a^{-t}$

tambien $\frac{a^p}{a^{p+t}} = \frac{a^p}{a^p . a^t} = \frac{1}{a^t}$

luego $a^{-t} = \frac{1}{a^t}$

43. De lo dicho se infiere que puede pasarse un factor cualquiera del númerador al denominador, y de este á aquel, cambiando el signo á su esponente

así: $\frac{2a^{-3}b^2}{3m\,n^{-1}} = \frac{2b^2n}{3a^3m}$

44. Para dividir un monomio por otro, se parten prime-

ro sus coeficientes, y se restan los esponentes de las letras iguales; las desiguales del dividendo aparecerán en el cociente; y para el signo que debe afectar al cuociente se observarán las reglas siguientes: si dividendo y divisor tienen signos iguales, se dará al cuociente el signo $+$, si tuvieren signos contrarios, se le dará el signo *menos*; porque el signo del cuociente debe ser tal que, multiplicado por el del divisor, reproduzca el del dividendo.

Así,

$$\frac{4a^2b}{2a}=2ab\,;\ \frac{-4a^2b}{2a}=-2ab\,;\ \frac{4a^2b}{-2a}=-2ab;\ \frac{-4a^2b}{-2a}=2ab$$

45 Si en ambos monomios hubiese letras distintas, y el coeficiente del dividendo no fuese múltiplo del coeficiente del divisor, se deja entonces la particion indicada en forma de quebrado, simplificando esta espresion todo lo posible, con la supresion de los factores comunes á los dos términos: así

$$\frac{40abc^4d^2h^4}{35d^2g^4h^2b^2}=\frac{8ac^4h^2}{7g^4b}$$

46 Para partir un polinomio por un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio divisor.

47 Para partir dos polinomios se observarán las reglas siguientes.

1.ª *Ordenar* ambos polinomios con relacion á las potencias decrecentes ó crecentes de una misma letra, si no lo estuvieren.

2.ª *Dividir* el primer término del dividendo por el pri–

mero del divisor, y el resultado será el primer término del cuociente pedido.

3.ª *Multiplicar* el divisor por el término obtenido en el cuociente, y *restar* este producto del dividendo, lo que nos dará el primer resíduo.

4.ª *Dividir* el primer término de este resíduo por el primero del divisor, y el resultado de esta particion es el segundo término del cuociente pedido.

5.ª *Multiplicar* el divisor por el segundo término hallado para cuociente, y *restar* este producto del primer resto obtenido, lo que nos dará un segundo resíduo.

6.ª *Dividir* el primer término del segundo resto por el primero del divisor, el resultado de esta division es el tercer término del cuociente; y así sucesivamente hasta llegar á un resíduo *cero*, en cuyo caso la division es *exacta*, ó hasta llegar á un resíduo cuyo primer término no sea divisible por el primero del divisor; esto es, un resíduo en que la letra que ordena tenga menor esponente en su primer término que en el primero del divisor, en cuyo caso la particion es *inexacta*, y el cuociente es una serie de términos indefinida.

Ejemplos.

$$
\begin{array}{l|l}
4a^6-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & 2a^3-5ab^2+2b^3 \\ \cline{2-2}
\underline{-4a^6+10a^4b^2-4^3b^3} & 2a^3+5ab^2-2b^3 \\
+10a^4b^2-4a^3b^3-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & \\
\underline{-10a^4b^2+25a^2b^4 \qquad -10ab^5} & \\
-4a^3b^3+10ab^2-4b^6 & \\
\underline{+4a^3b^3-10ab^5+4b^6} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a^4-b^4 & a-t \\ \cline{2-2}
\underline{-a^4+a^3b} & a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\
a^3b-b^4 & \\
\underline{-a^3b+a^2b^2} & \\
a^2b^2-b^4 & \\
\underline{-a^2b^2+ab^3} & \\
ab^3-b^4 & \\
\underline{-ab^3+b^4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Advertencia. Si la letra que ordena se hallase con un mismo esponente en varios términos, pueden considerarse todos ellos como si fuese uno solo, tomando por coeficiente de dicha letra, que será su factor comun, la suma de todas las cantidades que la multipliquen.

EJEMPLOS.

$$
\begin{array}{l|l}
a^4+(b-5c)a^3-(4b^2-6c^2)a^2+(b^3-5bc^2-5b^2c+c^3)a+b^4-c^4 & a^2-(2b+2c)a+b^2-c^2 \\
\underline{-a^4+(2b+2c)a^3-(b^2-c^2)a^2} & \overline{a^2+(3b-3c)a+b^2+c^2} \\
\quad +(3b-3c)a^3-(5b^2-7c^2)a^2+(b^3-5bc^2-5b^2c+c^3)a+b^4-c^4 & \\
\quad \underline{-(3b-3c)a^3+(6b^2-6c^2)a^2-(3b^2-3bc^2-3b^2c+3c^3)a} & \\
\qquad +(b^2+c^2)a^2-(2b^3+2bc^2+2b^2c+2c^3)a+b^4-c^4 & \\
\qquad \underline{-(b^2+c^2)a^2+(2b^3+2bc^2+2b^2c+2c^3)a-b^4+c^4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
(4b^2-4bc+c^2)a^4-(b^4+2b^3c+b^2c^2)a^2+(2b^5+2b^4c)a-b^6 & (2b-c)a^2-(b^2+bc)a+b^3 \\
\underline{-(4b^2-4bc+c^2)a^4+(2b^3+b^2c-bc^2)a^3-(2b^4-b^3c)a^2} & \overline{(2b-c)a^2+(b^2+bc)a-b^3} \\
(2b^3+b^2c-bc^2)a^3-(3b^4+b^3c+b^2c^2)a^2+(2b^5+2b^4c)a-b^6 & \\
\underline{-(2b^3+b^2c-bc^2)a^3+(b^4+2b^3c+b^2c^2)a^2-(b^5+b^4c)a} & \\
-(2b^4-b^3c)a^2+(b^5+b^4c)a-b^6 & \\
\underline{+(2b^4-b^3c)a^2-(b^5+b^4c)a+b^6} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

48 Para que un polinomio sea divisible exactamente por un monomio, es preciso que cada término del polinomio lo sea por el monomio propuesto; para lo cual es necesario que los coeficientes de cada término del polinomio sean múltiplos del coeficiente del monomio divisor, y que las letras del divisor estén contenidas en cada uno de los términos del dividendo.

Ejemplo.

$$\frac{24a^3b^2xz^3-8a^5b^3x^2z+12a^4b^2xz^2}{4a^3b^2xz}=6z^2-2a^2bx+3az$$

Consecuencias de la division.

49 1.ª La diferencia de dos potencias partida por la diferencia de sus raices dá un cuociente exacto y de la forma siguiente:

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3+\ldots\ldots$$
$$+a^2b^{m-3}+ab^{m-2}+b^{m-1} \quad (\alpha)$$

Demostracion. Verificando la division, tendremos:

$$\begin{array}{l|l} a^m-b^m & a-b \\ \hline -a^m+a^{m-1}b & a^{m-1} \\ \hline \end{array}$$

1.er resíduo . $ba^{m-1}-b^m=b\left(a^{m-1}-b^{m-1}\right)$

Este primer resíduo, puesto bajo la segunda forma, tiene un factor que representa, como el dividendo, la diferencia de dos potencias; luego si este factor es divisible por $(a - b)$ tambien lo será $(a^m - b^m)$.

Partiendo el primer resíduo por el divisor, se tendrá;

$$\begin{array}{l|l} ba^{m-1} - b^m & a - b \\ \hline -ba^{m-1} + a^{m-2}b^2 & a^{m-2}b \quad 2.^{\circ} \text{ térm. del cuo.} \end{array}$$

$$2.^{\circ} \text{ resíduo} \quad a^{m-2}b^2 - b^m = b^2\left(a^{m-2} - b^{m-2}\right)$$

Este segundo resíduo tiene la misma forma que el anterior; esto es, que tiene un factor que representa la diferencia de dos potencias; luego si este factor es divisible por $(a-b)$, tambien lo será $(a^m - b^m)$.

Partiendo el segundo resíduo por el divisor, tendremos:

$$\begin{array}{l|l} b^2a^{m-2} - b^m & a - b \\ \hline -b^2a^{m-2} + a^{m-3}b^3 & a^{m-3}b^2 \quad 3.^{er} \text{ térm. del cuo.} \end{array}$$

$$3.^{er} \text{ resíduo} \quad b^3a^{m-3} - b^m = b^3\left(a^{m-3} - b^{m-3}\right)$$

Si continuamos la division hallaremos resíduos de la misma forma, esto es, que contendrán un factor que representa la diferencia de dos potencias.

Examinando los resíduos hallados, se tiene

$$\begin{array}{lll}
\text{Primer resíduo} & « & b\left(a^{m-1}-b^{m-1}\right) \\
\text{Segundo resíduo} & « & b^2\left(a^{m-2}-b^{m-2}\right) \\
\text{Tercer resíduo} & « & b^3\left(a^{m-3}-b^{m-3}\right) \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Observando la ley de su formacion, se vé fácilmente que el resíduo que se obtenga al cabo de $(m-1)$ particiones, tendrá la forma

$$b^{m-1}\left(a^{m-(m-1)}-b^{m-(m-1)}\right)=b^{m-1}\left(a-b\right):$$

al dividir este resíduo por $(a-b)$, resultará de cuociente b^{m-1} de resíduo *cero*, y la division está terminada; luego la diferencia de dos potencias partida por la diferencia de sus raices dá un cuociente exacto y de la forma espresada.

2.ª Si en la espresion (α)

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3+\ldots$$

$$+a^2b^{m-3}+ab^{m-2}+b^{m-1}$$

hacemos $b=1$, resultará

$$\frac{a^m-1}{a-1}=a^{m-1}+a^{m-2}+a^{m-3}+\ldots+a^3+a^2+a+1$$

$$=1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{m-4}+a^{m-3}+a^{m-2}+a^{m-1}$$

Esta espresion nos dice, que si una potencia, disminuida en una unidad, se divide por su raiz disminuida tambien en una unidad, resultará cuociente exacto é igual á la unidad sumada con las potencias sucesivas de la raiz, desde la primera hasta la que tiene un esponente menor en una unidad que el que dicha raiz tiene en el dividendo.

Ejemplos.

1.° Dada la espresion $\frac{3^5-1}{3-1}$, podemos decir desde luego que

$$\frac{3^5-1}{3-1}=1+3+3^2+3^3+3^4$$

2.° Dada la espresion

$$1+4+4^2+4^3,$$

podemos desde luego decir que

$$1+4+4^2+4^3=\frac{4^4-1}{4-1}$$

3.° $$1+q+q^2+q^3+q^4=\frac{q^5-1}{q-1}$$

3.ª Si un polinomio, ordenado con respecto á una letra x, se divide por el binomio $x-a$, el resto de la particion será el mismo polinomio, sustituyendo en él á la letra que lo ordena la letra a.

Demostracion. Sea el polinomio

$$Ax^{m}+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+V$$

dividido por el binomio

$$x-a$$

dará por resíduo el polinomio propuesto cambiando la x en a.

En efecto, ejecutando la division, se hallará cierto número de términos en el cuociente, que representaremos por Q, y un resíduo independiente de x, que llamaremos R; y se tendrá

$$Ax^{m}+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+V=Q(x-a)+R \quad (1)$$

Y como en la anterior igualdad x puede tener un valor cualquiera, susistirá aquella aunque se reemplace x por a, sin que R varie, por ser independiente de x; y entonces se tiene

$$Aa^{m}+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots\ldots+Ta+V=Q(a-a)+R \quad (2)$$

y como $a - a = 0$, el segundo miembro será R, esto es, que

$$Aa^{m} + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \;.\;.\;.\;.\;.\; + Ta + V = R$$

y como R en la (1) es igual al R en la (2), el polinomio

$$Aa^{m} + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \;.\;.\;.\;.\;.\; + Ta + V$$

es el resíduo que se pide, igual al polinomio propuesto, cambiando la x en a, segun se pedia demostrar.

Fundado en este teorema, se demuestra la primera consecuencia; esto es, la divisibilidad de $x^m - a^m$ por $x - a$; pues, segun dejamos demostrado, será el resíduo

$$R = a^m - a^m = 0,$$

esto es, que dará division exacta.

4.ª La diferencia de dos potencias pares dividida por la suma de sus raices dá cuociente exacto.

Fundados en la consecuencia 1.ª, siendo en la espresion (α) m par y b negativa, resultará

$$\frac{a^m - b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - a^{m-4}b^3 + \;.\;.\;.$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\; + ab^{m-2} - b^{m-1}$$

fórmula que no difiere de la (α) sino en que los signos son alternativamente positivos y negativos.

Así.

$$\frac{x^4 - a^4}{x + a} = x^3 - x^2a + xa^2 - a^3$$

5.ª La suma de dos potencias impares dividida por la suma de sus raices dá cuociente exacto.

Haciendo en la fórmula (α) m impar y b negativa, será

$$\frac{a^m + b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - a^{m-4}b^3 + \dots$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; - ab^{m-2} + b^{m-1}$$

espresion, que no difiere de la anterior sino en que el último término es positivo, siendo negativo en la precedente, por ser *par* el número de sus términos, y en esta *impar*.

Así,

$$\frac{x^5 + a^5}{x + a} = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$$

6.ª La suma de dos potencias pares ó la diferencia de dos potencias impares dividida por la suma de sus raices, no dá cuociente exacto, y su último resíduo será respectivamente $\pm 2b^m$.

En efecto, la espresion $\frac{a^m + b^m}{a - b}$, segun la consecuencia 3.ª no dá cuociente exacto, y su último resíduo

$$R = b^m + b^m = +2b^m$$

que será $\pm 2b^m$, segun que m sea par ó impar.

En efecto;

$$\frac{a^m + b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots$$

$$+ \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1} + \frac{2b^m}{a - b} \text{ (cons. 3.ª)}$$

Cambiando el signo de la b, siendo m par, la espresion anterior se convertirá en

$$\frac{a^m + b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - a^{m-4}b^3 + \ldots$$

$$+ \ldots + ab^{m-2} - b^{m-1} + \frac{2b^m}{a - b}:$$

y siendo m impar, se convertirá, siendo b negativa, en

$$\frac{a^m - b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - a^{m-4}b^3 + \ldots$$

$$+ \ldots - ab^{m-2} + b^{m-1} - \frac{2b^m}{a - b}$$

esto es, que el resíduo será $\pm 2b^m$, segun m sea par ó impar.

Divisibilidad de las espresiones algebràicas.

50 Se dice que una espresion algebráica A es divisible por otra B, ó que B es factor de A, cuando la division de A por B no deja resíduo alguno.

Ejemplo. Se quiere saber si la espresion $2b+bc-c^2$ es divisible por $(b+c)$.

Verificando la division se halla el cuociente exacto $(2b-c)$; luego el trinomio propuesto es divisible por $(b+c)$; y por consiguiente,

$$2b+bc-c^2=(2b-c)(b+c).$$

Espresiones algebráicas primas y compuestas.

51 Se dice que una espresion algebráica es *prima*, cuando no es divisible sino por sí misma ó por la unidad: así la espresiones

$$a, \quad (a+b), \quad (p-q) \text{ son primas.}$$

52 Una espresion algebráica es *compuesta*, cuando ademas de ser divisible por sí misma y por la unidad, lo es tambien por algun otro factor.

La espresion

$$(x^2-a^2)=(x+a)\ (x-a)$$

es compuesta, porque además de ser divisible por sí misma y por la unidad, lo es tambien por $(x-a)$ y por $(x+a)$.

Determinacion de los factores simples y compuestos de una espresion algebràica.

53 Los monomios pueden considerarse como espresiones descompuestas en sus factores simples y compuestos, porque todos están á la vista.

Los factores simples del monomio

$$27a^3bcd^2$$

son

1.° Los factores simples ó primos de 27.

2.° Los factores literales a, b, c, d.

Los factores compuestos del mismo monomio son todos los productos que pueden formarse con sus diversos factores simples.

54 Los polinomios no pueden descomponerse siguiendo una regla fija; solo la mucha práctica en tomar factores comunes es lo único que puede facilitar la descomposicion.

Ejemplos.

1.° Descomponer en factores el binómio

$$10bx - 5ab:$$

tomando el factor comun $5b$, será

$$10bx - 5ab = 5b\,(2x - a)$$

2.° Descomponer en factores el binomio $x^4 - a^4$.

Como $x^4 = (x^2)^2$ y $a^4 = (a^2)^2$, el binomio propuesto es la diferencia de dos cuadrados; tendremos, pues,

$$x^4 - a^4 = (x^2 + a^2)(x^2 - a^2);$$

y como $(x^2 - a^2)$ es tambien la diferencia de dos cuadrados, será

$$(x^4 - a^4) = (x^2 + a^2)(x + a)(x - a).$$

Máximo divisor comun de las espresiones algebráicas.

55 Se llama *máximo divisor comun* de dos ó mas espresiones algebráicas, á una espresion que divide exactamente á las propuestas, sin que en los cuocientes quede ningun factor comun, de modo que dichos cuocientes sean primos entre sí.

De aquí se sigue que el máximo divisor comun de dos ó mas espresiones algebráicas es el producto de todos los factores comunes á ellas.

56 Para hallar el máximo divisor comun de dos ó mas monomios, se descomponen los coeficientes numéricos en sus factores simples; y el producto de las menores potencias de todos los factores simples numéricos y literales comunes á los monomios, será el máximo divisor comun de los monomios propuestos.

Ejemplo.

Hallar el máximo divisor comun de los monomios

$$8a^3b^2c^2\ ,\quad 24a^3bcd\ ,\quad 14a^5b^6c^3$$

$$M.c.d = 2a^3bc$$

57 Para hallar el máximo divisor comun entre dos polinomios se tendrán presentes estos dos principios:

1.° Si un polinomio es divisible por un factor independiente de la letra que le ordena, este factor debe aparecer en todos los términos del polinomio.

2.° Siendo el máximo divisor comun de dos ó mas polinomios el producto de todos sus factores comunes, se sigue que:

Si un polinomio tiene un factor comun que no lo sea del otro, se puede dividir dicho polinomio por este factor comun, sin que por esto se altere el máximo comun divisor de ambos polinomios.

Un polinomio puede multiplicarse ó partirse por cualquier cantidad que no sea factor del otro, sin que por esto se altere el máximo divisor comun de ambos; pues no introduciendo la multiplicacion, ni suprimiendo la particion ningun factor comun á los dos polinomios, no se podrá alterar el máximo comun divisor, que es el producto de los factores comunes.

58 De lo espuesto se deduce, que para hallar el máximo comun divisor de dos polinomios, se observarán las reglas siguientes:

1.ª Se ordenarán ambos polinomios con respecto á una misma letra.

2.ª Si hay algun factor comun independiente de la letra que ordena, se dividen ambos polinomios por él, y se pondrá á parte, para formar luego parte del máximo comun divisor.

3.ª Hállese el máximo divisor comun dependiente de la letra que ordena por el método de la sucesiva particion, como se enseñó en la aritmética, preparándolos del modo siguiente:

Divídase uno de los polinomios por cualquier factor comun que tenga, y no lo sea del otro.

Para que el primer término del dividendo sea siempre exactamente divisible por el primer término del divisor, se multiplicará todo el dividendo por el factor conveniente, con tal que este factor no lo sea del otro polinomio.

Se continua la division, reiterando los cálculos de preparacion, hasta que la letra que ordena tenga en el resíduo menor esponente que en el divisor; en cuyo caso, el divisor pasará á ser dividendo, y el resíduo divisor; y así sucesivamente.

La operacion termina cuando se llega á un resíduo *cero*, en cuyo caso, el último divisor, multiplicado por el factor independiente, si lo hubo, será el máximo comun divisor que se pedía; pero si la letra que ordena llega á desaparecer en algun resíduo, esto manifiesta que los polinomios propuestos no tienen máximo comun divisor dependiente de la letra que ordena, y no tendrán, por tanto, mas factor comun que el independiente, si lo hubo.

Ejemplos.

Reducir á mínimos términos el quebrado

$$\frac{6a^3 - 6a^2y + 2ay^2 - 2y^3}{12a^2 - 15ay + 3y^2}.$$

No hay factor independiente; suprimo en el denominador el factor 3, y queda en

$$4a^2 - 5ay + y^2.$$

Multiplico el numerador por 2 para que su primer término sea divisible por $4a^2$: el numerador quedará en

$$12a^3 - 12a^2y + 4ay^2 - 4y^3.$$

Partiendo, tengo el cuociente $3a$ y el resto será

$$3a^2y + ay^2 - 4y^3.$$

Multiplícolo por 4 para que su primer término sea divisible por $4a^2$, y es

$$12a^2y + 4ay^2 - 16y^3.$$

Parto, y el cuociente es $3y$ y el resto

$$19ay^2 - 19y^3.$$

Como en este tiene la letra que ordena menor esponente que en el primer término del divisor, partiré el divisor por el resto, suprimiendo antes en este el factor independiente $19y^2$. Partiendo, pues,

$$4a^2 - 5a + y^2 \quad \text{por} \quad a - y,$$

sale el cuociente exacto $4a - y$: luego $a - y$ es el mayor divisor comun de los términos de la fraccion propuesta: partiéndolos por él quedará reducida á

$$\frac{6a^2 + 2y^2}{12a - 3y}.$$

Mínimo múltiplo.

59 Se llama *mínimo múltiplo* de varios números, al menor número que es divisible por todos ellos.

Es evidente, segun hemos visto en la aritmética, que el mínimo múltiplo de varios números es el producto de las mayores potencias de todos los distintos factores simples de dichos números.

60 Para hallar el mínimo múltiplo de varios números ó de varias espresiones algebráicas por medio de los factores simples, se prescinde de los números ó de las espresiones que sean divisores de todos los demás; se descomponen los restantes en sus factores simples, y el producto de las mayores potencias de todos los distintos factores simples que haya producido la descomposicion, es el mínimo múltiplo de los números ó espresiones algebráicas propuestas.

Ejemplo.

Hallar el mínimo múltiplo de

$$24a^2b^4c\,,\quad 45a^3b^6c^4\,,\quad 36a^2bm^2$$

$$M.\ m. = 360a^3b^6c^4m^2$$

61 Para hallar el mínimo múltiplo de dos ó mas números ó espresiones algebráicas por medio del máximo divisor comun, se multiplican dichos números ó espresiones, y el producto se parte por el máximo divisor comun.

Ejemplo.

Hallar el mínimo múltiplo de los polinomios

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 2, \quad \text{y} \quad 13x^2 - x - 50$$

$$M.\,m. = (2x^3 - 5x^2 + 3x - 2)\,(13x + 25)$$

Fracciones ó quebrados literales.

62 Las fracciones algebráicas se calculan por las mismas reglas que las numéricas.

63 La simplificacion de los quebrados literales se hace lo mismo que la de los numéricos, esto es, suprimiendo los factores comunes al numerador y al denominador, ó dividiendo el numerador y el denominador por su máximo divisor comun.

$$\frac{6a^3 - 6a^2y + 2ay^2 - 2y^3}{12a^2 - 15ay + 3y^2}$$

Dividiendo numerador y denominador por su máximo comun divisor, será

$$\frac{6a^2 + 2y^2}{12a - 3y}$$

el quebrado simplificado.

Ejemplos de operaciones con los quebrados.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(m+\frac{p}{q}\right)=\frac{ac+b}{c}\times\frac{mq+p}{q}=\frac{(ac+b)\,(mq+p)}{cq};$$

$$\frac{5b^2}{6a^3}:\frac{3b}{5ac}=\frac{25bc}{18a^2};$$

$$a+\frac{x-2a}{5}=\frac{5a+x-2a}{5}=\frac{3a+x}{5};$$

$$\frac{p}{y}-\frac{z^2}{3p^2}=\frac{3p^3-z^2y}{3p^2y};$$

$$3a-\frac{ab}{a+b}=\frac{3a^2+2ab}{a+b};$$

$$\frac{4c^2}{m^3}\times 3m=\frac{12c^2}{m^2};$$

$$\left(x-\frac{a+b}{p}\right):p=\frac{px-a-b}{p^2}.$$

Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita.

64 Se llama **ecuacion de primer grado** aquella

en que el mayor esponente de la incógnita es *uno*; **de segundo grado,** aquella en que el mayor esponente de la incógnita es *dos*; de **tercer grado,** cuando el máximo esponente de la incógnita es *tres*, y así sucesivamente; y en general, se llama **grado** de una ecuacion el mayor esponente que la incógnita tiene en dicha ecuacion, despues de haber despojado á la ecuacion de sus denominadores.

65 En toda ecuacion se designan comunmente las *cantidades conocidas ó datos* con las primeras letras del alfabeto, a, b, c, etc.; y las cantidades *desconocidas* ó *incógnitas* con las ùltimas letras del alfabeto, x, y, z, u.

66 Se llaman **raices** de una ó de varias ecuaciones á los valores de las incógnitas que entran en dichas ecuaciones.

67 **Resolver una ecuacion** es determinar los valores particulares que deben tener las incógnitas, para que la sustitucion de estos valores en lugar de las incógnitas convierta la ecuacion en identidad.

68 *Axiomas.* 1.° Se puede sumar ó restar á los dos miembros de una ecuacion una misma cantidad, sin alterar los valores de las incógnitas: así,

$$A = B$$

es lo mismo que

$$A \pm m = B \pm m$$

de donde se infiere, que se podrá suprimir de ambos miembros de una ecuacion cualquier cantidad comun á ellos.

2.° Se pueden multiplicar ó partir los dos miembros de una ecuacion por cualquier cantidad, sin que por esto se alteren los valores de las incógnitas; así, de la ecuacion

$$A = B$$

se deduce

$$Am = Bm$$

y tambien

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$$

De donde se sigue, que si hubiera en una ecuacion algun factor comun á sus dos miembros, se puede suprimir este factor, ya sea entero, ya fraccionario.

Modo de resolver los problemas y las ecuaciones del primer grado con una sola incógnita.

69 Para *resolver* un problema, es necesario, primero; hallar una ecuacion en que estén indicadas las relaciones de la incógnita con las cantidades conocidas; segundo, deducir de esta ecuacion el valor de la incógnita.

70 *Poner el problema en ecuacion* es cifar en una ecuacion las relaciones entre incógnitas y datos.

71 *Despejar la incógnita ó resolver la ecuacion* es ha-

llar el valor de la incógnita, deducido de la ecuacion del problema.

72 Para poner el problema en ecuacion *deben indicarse con la incógnita las mismas operaciones que se harían con su valor numérico, si fuera conocido, para comprobar las condiciones del problema.*

73 *Para despejar la incógnita ó resolver la ecuacion,* siendo esta del primer grado, se observarán los preceptos siguientes.

1.° Si hay quebrados en la ecuacion, reduzcanse estos á un mismo denominador, (por medio del mínimo múltiplo siempre que sea posible), y suprímase este; esto no altera la ecuacion, porque equivale á multiplicar ambos miembros por el denominador comun.

2.° Pásense á un miembro todos los términos que contienen la incógnita, y al otro todos los que no la contengan, mudando el signo al término que pase de uno á otro miembro: esto no altera la ecuacion, porque equivale á sumar ó á restar de ambos miembros una misma cantidad.

3.° Si hecha la trasposicion de los términos queda la incógnita con algun muiltiplicador numérico ó algebráico, la incógnita será igual al otro miembro dividido por dicho multiplicador.

Ejemplo.

Sea la ecuacion

$$\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}+3+\frac{2x}{3}=\frac{7x}{8}+\frac{5x}{12}-x+10.$$

Observando que el mínimo múltiplo de los denominadores es 24, despéjese de quebrados y escríbanse tan solo los nuevos numeradores; y resultará

$$18x-20x+72+16x=21x+10x-24x+240.$$

Trasponiendo

$$18x-20x+16x-21x-10x+24x=240-72.$$

Reduciendo

$$7x=168.$$

Partiendo por el coeficiente de x

$$x=\frac{168}{7}=24$$

Otro ejemplo.

$$\frac{a-b}{a+b}x+\frac{a+b}{a-b}x=\frac{2(a^2+b^2)}{a-b}$$

Siendo el mínimo múltiplo (a^2-b^2), despéjese de quebrados, y se tendrá:

$$(a-b)^2x+(a+b)^2x=2(a^2+b^2)(a+b)$$

sacando factor comun x

$$x[(a-b)^2+(a+b)^2]=2(a^2+b^2)(a+b)$$

ó

$$2(a^2+b^2)x=2(a^2+b^2)(a+b)$$

y

$$x=a+b$$

74 Teorema. *En una ecuacion de primer grado la incógnita solo puede tener un valor; esto es, una raiz.*

Demostracion. Sea la ecuacion general del primer grado ya despejada de quebrados

$$ax + b = cx + d \qquad (1)$$

y supongamos que sea $x = m$; sustituyendo, tendremos:

$$am + b = cm + d \qquad (2)$$

Supongamos que tambien sea $x = n$, sustituyendo, tendremos;

$$an + b = cn + d \qquad (3)$$

Restando la (3) de la (2) tendremos,

$$a(m - n) = c(m - n)$$

reduciendo á *cero*, será

$$a(m - n) - c(m - n) = 0$$

sacando factor comun $(m - n)$, dará

$$(m - n)\,(a - c) = 0$$

Para que esta ecuacion se verifique es preciso que

ó bien $\left.\begin{matrix} m - n = 0 \\ a - c = 0 \end{matrix}\right\}$ ó $\left\{\begin{matrix} m = n \\ a = c \end{matrix}\right\}$

Pero $(a-c)$ no puede ser igual á *cero*, porque siendo entonces $a=c$, la ecuacion propuesta se reduciría á $b=d$, y no habría en ella incógnita, luego habrá de verificarse precisamente la segunda condicion, esto es, $m-n=0$, ó $m=n$, es decir, que m y n representan un mismo valor, y por tanto solo la cantidad m, sustituida por la incógnita, satisface á la ecuacion.

Otra demostracion del teorema anterior.

75 Toda ecuacion de primer grado, despues de despejar de quebrados, trasponer y reducir adquiere la forma

$$Ax=B,$$

de donde se deduce

$$x=\frac{B}{A},$$

division que, evidentemente, dá un solo valor para el cuociente de B dividido por A.

Discusion de las ecuaciones del primer grado con una sola incógnita.

76 Sea la ecuacion general del primer grado con una sola incógnita, ya despejada de quebrados

$$ax+b=cx+d \qquad (1)$$

de donde se deduce

$$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

Esta fórmula admite cinco casos esencialmente distintos, á saber;

1.° que sea $x = \quad +A$, esto es, positivo,

2.° $x = \quad -A$, esto es, negativo,

3.° $x = \dfrac{0}{\pm A} = 0$

4.° $x = \dfrac{0}{\pm A} = \pm\infty$

5.° $x = \dfrac{0}{0}$

Examinemos que condiciones de relacion debe haber en el valor de

$$x = \frac{d-b}{a-c},$$

entre las cantidades a, b, c, d, para que el valor de x resulte de una de las formas espresadas, y lo que representa en cada uno de estos casos el problema de que depende la ecuacion.

1.° Para que x resulte *positivo* es necesario que sea

$$\left.\begin{matrix} d > b \\ \text{con } a > c \end{matrix}\right\} \text{ ó bien } \left\{\begin{matrix} d < b \\ a < c \end{matrix}\right.$$

pero siendo entonces el numerador y el denominador de la fórmula ambos positivos, ó ambos negativos, el valor de x será positivo, valor que satisface al enunciado directo del problema.

2.° Para que x sea *negativo*, es preciso que sea

$$\text{con } \begin{matrix} d>b \\ a<c \end{matrix}\Big\}\text{ ó }\Big\{\begin{matrix} d<b \\ a>c \end{matrix}$$

pues teniendo en este caso el numerador y denominador de la espresion de x, signos contrarios, el valor de x resultará negativo; y cuando ocurra en la resolucion de un problema manifiesta que el problema es *imposible.*

Mas como este valor negativo ha de satisfacer algebráicamente á la ecuacion, si en ella variamos el signo de x, esto es, si sustituimos $-x$ en lugar de x en la ecuacion (1), será

$$-ax+b=-cx+d,$$

$$\text{ó}\qquad ax-b=cx-d$$

ecuacion posible, aunque perteneciente á otro problema distinto del que espresa la ecuacion (1).

Luego siempre que *el valor de la incógnita resulte negativo, no resolverá el problema propuesto, que dará por imposible; sino otro, cuya propuesta se inferirá de la ecuacion, mudando en ella solo el signo de x, ó esclusivamente el signo de las cantidades conocidas.*

3.° Para que x resulte de la forma de $\frac{0}{\pm A}=0$, es necesario que sea

$$d=b$$

$$\text{con } a \gtrless c$$

En este caso el valor de x es *cero*, y manifiesta que el problema de donde procede es un *absurdo*, porque volviendo á la ecuacion (1)

$$ax+b=cx+d,$$

siendo por la hipótesis $b=d$, se reduce á

$$ax=bx$$

y partiendo por x será,

$$a=c$$

luego la condicion de $d=b$, incluye necesariamente la de $a=c$, para que pueda existir la ecuacion; luego las dos condiciones establecidas como necesarias para que el valor de x tenga la forma de $\frac{0}{\pm A}$ son *incompatibles*, ó no pueden existir á un tiempo; y esta *incompatibilidad* manifiesta que el problema es un *absurdo*.

4.° Para que x resulte de la forma de $\frac{\pm A}{0}$ esto es, que su denominador sea *cero*, es preciso que sea

$$d \gtrless b$$

$$\text{con } a = c$$

y como el valor de x, deducido de la ecuacion (1) será entonces

$$x = \frac{d-b}{0},$$

y esta es la espresion del *infinito*, es evidente que la ecuacion (1) es imposible, si al mismo tiempo que sea $a = c$, no se tiene tambien $d = b$; luego las condiciones supuestas son incompatibles; luego el valor *infinito de la incógnita declara absurdo el problema.*

5.° Para que x sea de la forma de $\frac{0}{0}$ habrá de ser

$$d = b$$

$$\text{con } a = c$$

La espresion $\frac{0}{0}$ representa todos los números posibles, porque todo número, multiplicado por el divisor *cero*, produce el dividendo, que es *cero*. Luego *si el valor de la incógnita es* $\frac{0}{0}$, *cualquier valor que se dé á* x *satisface á la ecuacion, y el problema tendrá infinitas soluciones; esto es, que la espresion* $\frac{0}{0}$ *será indicio de la indeterminacion del problema.*

Mas no siempre la espresion $\frac{0}{0}$ es indicio cierto ó símbolo de indeterminacion; pues esta espresion puede provenir de algun factor comun que existe en la fracion que representa el valor de x, y que, reduciéndose á cero por la hipotesis hecha, reduce á cero los dos términos de la fraccion.

De esto se deduce que, para asegurarse de la verdadera significacion del símbolo $\frac{0}{0}$, se investigará si hay en la fraccion algun factor comun al numerador y al denominador, que se reduzca á *cero* con la hipotesis hecha; se parten por él los dos términos del quebrado, y haciendo la misma hipotesis sobre el nuevo resultado, hallaremos la verdadera significacion del valor de x en el problema de que procede la ecuacion.

Supongamos que de la solucion de un problema hubieramos deducido

$$x=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

Si hacemos $a=b$, esta espresion tomará la forma $\frac{0}{0}$, símbolo del infinito, ó de la existencia de algun factor comun á los dos términos del quebrado, que se reduce á *cero* por la suposicion de $a=b$, y que reduce por tanto á $\frac{0}{0}$ la espresion propuesta.

Mas examinando atentamente la espresion dada, se vé que puede transformarse del modo siguiente:

$$x=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)},$$

en la cual aparece el factor $(a-b)$ comun al numerador y denominador, que se reduce á *cero* por la suposicion $a=b$.

Dividiendo los dos términos del quebrado por dicho factor, resultará

$$x=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

y haciendo en este resultado $a=b$, se hallará

$$x=\frac{a^2+a^2+a^2}{a+a}=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3a}{2}$$

valor de la fraccion propuesta, cuando $a=b$.

Ecuaciones del primer grado con varias incognitas.

77 Se llama *sistema de ecuaciones* la reunion de dos ó mas ecuaciones, que deben ser satisfechas ó verificarse simultáneamente; esto es, á un mismo tiempo con los mismos valores de las incognitas.

78 Se llama *solucion* de un sistema de ecuaciones el conjunto de valores de las incognitas que verifican ó satisfacen á todas las ecuaciones del sistema.

79 *Resolver* un sistema de ecuaciones, es hallar todas sus soluciones.

80 Llámase sistema *determinado* al que solo admite un número limitado de soluciones; é *indeterminado* en el caso contrario.

81 Se dá el nombre de *sistemas equivalentes* á aquellos que tienen las mismas soluciones: de donde se sigue que puede sustituirse un sistema de ecuaciones por otro equivalente.

82 *Eliminar* una incognita entre dos ó mas ecuaciones, es deducir de ellas otra ú otras ecuaciones que no contengan á dicha incognita, conservando las demas incognitas los mismos valores que en las primitivas ecuaciones.

83 Tres son los principales métodos de eliminacion: el de *igualacion*, el de *sustitucion* y el de *adicion* ó *sustraccion*, que tambien se llama de *combinacion*.

84 Para eliminar una incognita entre dos ó mas ecuaciones por el método de *igualacion*, que tambien se llama de *comparacion*, se despeja una misma incognita en todas las ecuaciones, é igualando sus valores dos á dos, resultará una ecuacion menos y una incognita menos. Repitiendo la misma operacion sobre las ecuaciones que resulten, se llegará á una sola ecuacion con una sola incognita. Se despeja esta incognita con lo cual se obtiene su valor, que, sustituido en una de las ecuaciones precedentes, determinará el valor de otra incognita, y así sucesivamente.

85 Para eliminar una incógnita por el método de *sustitucion*, se despejará en una de sus ecuaciones una de las incógnitas, y sustituyendo su valor en las demas ecuaciones, llegarémos por este medio á obtener una ecuacion menos y una incógnita menos. Repitiendo la misma operacion sobre las ecuaciones resultantes, se llegará á una sola ecuacion con una sola incógnita, como en el método anterior,

86 Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones por l método de *adicion* ó *sustraccion*, multiplíquese cada ecuacion

por el coeficiente que dicha incógnita tiene en la otra; así resultarán dos ecuaciones en que dicha incógnita tendrá un mismo coeficiente; y restándolas si los términos que contienen la incógnita tuvieren un mismo signo, ó sumándolas, si los tuviesen contrarios, desaparecerá dicha incógnita, y resultará una sola ecuacion con una sola incógnita, que se puede despejar.

87 Si hubiere mas de dos ecuaciones se eliminará una misma incógnita, entre cada dos ecuaciones, y así quedará una ecuacion menos y una incógnita menos.

88 Tambien en el caso de mas de dos ecuaciones se puede dar un mismo coeficiente á los términos que contienen á la incógnita que se trata de eliminar, por un procedimiento análogo al que se emplea para reducir quebrados á un comun denominador, multiplicando cada ecuacion por el producto de los coeficientes que tenga dicha incógnita en las otras ecuaciones; y restando ó sumando despues dos á dos estas ecuaciones, segun tengan un mismo signo ó signos contrarios los términos de la incógnita que se trata de eliminar.

89 El método llamado de *Bezout*, ó *de los coeficientes indeterminados* consiste en multiplicar cada una de las ecuaciones menos una por una indeterminada distinta; se suman las ecuaciones multiplicadas, y de esta suma se resta la que no se multiplicó; el resultado será una ecuacion en que entrarán todas las incógnitas cuyos coeficientes estarán espresados en funcion de las indeterminadas introducidas; é igualando á cero los coeficientes de todas las incógnitas menos una, resultará una sola ecuacion con una sola incógnita, que sabremos despejar.

90 De las ecuaciones de condicion que se forman igualando á cero los coeficientes de todas las incógnitas menos una, se

deducen los valores de las indeterminadas; y sustituyendo estos valores en la espresion de la incógnita despejada, nos dará el valor de esta en funcion de los datos del problema.

91 Aplicacion de todo lo expuesto.

Igualacion ó comparacion.

Primer método.—Sean las ecuaciones del primer grado con dos incógnitas

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= s \\ a'x + b'y &= s' \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Despejando á x en ámbas ecuaciones, se tiene

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{s - by}{a} \\ x &= \frac{s' - b'y}{a'} \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Igualando estos dos valores de x, se halla

$$\frac{s - by}{a} = \frac{s' - b'y}{a'}$$

de donde $\quad a's - a'by = as' - ab'y$

trasponiendo, dá $\quad ab'y - a'by = as' - sa'$

y reduciendo, será $\quad y(ab' - ba') = as' - sa'$

despejando á y $$y=\frac{as'-sa'}{ab'-ba'}$$

Para obtener el valor de x en funcion de las cantidades cónocidas, sustituyo el valor hallado de y en una de las ecuaciones (a) y en ella despejo á x; ó bien sustituyo el valor de y en uno de los valores hallados (b), y simplifico despues de ejecutadas las operaciones indicadas.

Tomemos el primer valor (b) y será, poniendo en lugar de y su valor

$$x=\frac{s-b\left(\frac{as'-sa'}{ab'-ba'}\right)}{a}$$

efectuando

$$x=\frac{\frac{s(ab'-ba')-b(as'-sa')}{ab'-ba'}}{a}$$

ó

$$x=\frac{sab'-sba'-bas'+bsa'}{a(ab'-ba')}$$

ó

$$x=\frac{sab'-bas'}{a(ab'-ba')}=\frac{a(sb'-bs')}{a(ab'-ba')}$$

y

$$x=\frac{sb'-bs'}{ab'-ba'}$$

Los valores de las incógnitas son, pues,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{sb' - bs'}{ab' - ba'} \\ y &= \frac{as' - sa'}{ab' - ba'} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Sustitucion.

Segundo método.=Sean las mismas ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a\,x + b\,y &= s \\ a'x + b'y &= s' \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Despejando á x en una de las primeras ecuaciones v. g. en la primera, tendrémos;

$$x = \frac{s - by}{a} \quad (c)$$

sustituyendo su valor en la segunda, se tiene;

$$a'\left(\frac{s - by}{a}\right) + b'y = s'$$

efectuando

$$a's - a'by + ab'y = as'$$

trasponiendo

$$ab'y - a'by = as' - sa'$$

reduciendo

$$y(ab'-ba')=as'-sa'$$

$$y=\frac{as'-sa'}{ab'-ba'}$$

Para obtener el valor de x en funcion de cantidades conocidas, podemos repetir estas mismas operaciones, hallando primero el valor de y en una de las ecuaciones (a), y sustituyendo su valor en la otra, despejar á x; ó bien, sustituir el valor de y en el de x (c), como lo hemos ejecutado antes, y tendremos

$$x=\frac{sb'-bs'}{ba'-ba'}$$

por este método obtendrémos tambien para x y para y las espresiones (A)

Tercer método.—*Suma ó resta.* Sean las mismas ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=s \\ a'x+b'y=s' \end{array}\right\} \quad (a)$$

multiplicando la primera ecuacion (a) por a', la segunda por a, y restando estas ecuaciones resultantes miembro á miembro y término á término, tendrémos

$$aa'x+ba'y=sa'$$

$$a'ax+ab'y=as'$$

y por tanto

$$y(ab'-ba')=as'-sa'$$

de donde

$$y=\frac{as'-sa'}{ab'-ba'}$$

Si quisiéramos eliminar la y en las ecuaciones (a) y despejar á x, multiplicariamos la primera por b', la segunda por b, y restariamos las dos ecuaciones resultantes; y se hallará:

$$ab'x+bb'y=sb'$$

$$ba'x+bb'y=bs'$$

$$x(ab'-ba')=sb'-bs'$$

$$x=\frac{sb'-bs'}{ab'-ba'}$$

Tambien se vé que este método nos conduce á los valores de x é y representados en las espresiones (A).

Cuarto método.—*Método llamado de Bezout ó de coeficientes indeterminados.*

Sean las mismas ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} ax + b\,y = s \\ a'x + b'y = s' \end{array}\right\} (a)$$

multiplicando la primera por la indeterminada m, y restando del resultado la segunda, será

$$amx - a'x + bmy - b'y = sm - s'$$

reduciendo

$$x(am - a') + y(bm - b') = sm - s' \qquad (b)$$

Para despejar á x, eliminaré á y igualando á *cero* su coeficiente, esto es, haciendo

$$bm - b' = 0\,;$$

resultará

$$x = \frac{sm - s'}{am - a'} \qquad (c)$$

Deduciendo el valor de m de la ecuacion de condicion

$$bm - b' = 0$$

se halla

$$m = \frac{b'}{b}$$

y sustituyendo el valor de m en la ecuacion (c), resultará

$$x=\frac{s\,\frac{b'}{b}-s'}{a\,\frac{b'}{b}-a'}=\frac{sb'-bs'}{ab'-ba'}.$$

Operando del mismo modo para eliminar á x y despejar á y en la ecuacion (b), haremos

$$am-a'=0,$$

lo que dá

$$y=\frac{sm-s'}{bm-b'}\quad (d)$$

Despejando la indeterminada m en la ecuacion de condicion

$$am-a'=0$$

se halla

$$m=\frac{a'}{a}$$

y sustituyendo este valor de m en la ecuacion (d) se tendrá

$$y=\frac{s\,\frac{a'}{a}-s'}{b\,\frac{a'}{a}-b'}=\frac{sa'-as'}{ba'-ab'}$$

ó cambiando el signo de su numerador y denominador para dar la misma forma á este denominador que al del valor de x, se hallará

$$y = \frac{as' - sa'}{ab' - ba'}$$

En este método vemos tambien los dos valores de las incógnitas x é y representados por las espresiones (A).

92 Hagamos aplicacion de este método á tres ecuaciones con tres incógnitas.

Sean las tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} a\,x + b\,y + c\,z = s \\ a'x + b'y + c'z = s' \\ a''x + b''y + c''z = s'' \end{array}\right\} \quad (p)$$

Multiplicando la primera ecuacion por la indeterminada m, la segunda por n, sumando estas dos ecuaciones resultantes, restando de esta suma la tercera ecuacion, no multiplicada, miembro á miembro y término á término, y escribiendo el resultado final bajo la forma de producto, tendrémos los siguientes resultados

$$a\,mx + b\,my + c\,mz = s\,m$$

$$a'n\,x + b'n\,y + c'n\,z = s'\,n$$

$$x(am + a'n) + y(bm + b'n) + z(cm + c'n) = sm + s'n$$

$$a''x \quad + \quad b''y \quad + \quad c''z \quad = \quad s''$$

efectuando la resta y simplificando será;

$$(am+a'n-a'')\,x+(bm+b'n-b'')\,y+(cm+c'n-c'')\,z=sm+s'n-s'' \quad (q).$$

Si en esta ecuacion hacemos á la vez igual á *cero* los coeficientes de dos cualesquiera de las tres incógnitas, quedarán dos de ellas eliminadas, y la ecuacion resultante contendrá una sola incógnita, cuyo valor estará espresado en funcion de las cantidades conocidas y de las indeterminadas m y n, cuyos valores se deducirán de las ecuaciones de condicion, formadas al igualar á *cero*, los coeficientes de dos de las incógnitas.

Si queremos hallar el valor de x, eliminaremos á y y á z, igualando á *cero* sus coeficientes en la ecuacion (q) y tendrémos,

$$\left.\begin{aligned} bm+b'n-b''&=0\\ cm+c'n-c''&=0\end{aligned}\right\}\text{ ó bien }\left.\begin{aligned} bm+b'n&=b''\\ cm+c'n&=c''\end{aligned}\right\}\ (r)$$

y la ecuacion (q) se convertirá en

$$(am+a'n-a'')\ x=sm+s'n-s''$$

de donde

$$x=\frac{sm+s'n-s''}{am+a'n-a''}\quad (u)$$

Para hallar los valores de m y n, comparo las ecuaciones

(r) con las ecuaciones (a) y tendrémos

$$m=\frac{b''c'-b'c''}{b\,c'-c\,b'}$$

$$n=\frac{bc''-b''c}{bc'-c\,b'}$$

que sustituidos en la ecuacion (u), nos dará el valor de x en funcion de las cantidades conocidas y tendrémos,

$$x=\frac{s\,\dfrac{b''c'-b'c''}{b\,c'-c\,b'}+s'\,\dfrac{bc''-b''c}{bc'-c\,b'}-s''}{a\,\dfrac{b''c'-b'c''}{b\,c'-c\,b'}+a'\,\dfrac{bc''-b''c}{bc'-cb'}-a''};$$

efectuando y ordenando con relacion á los tildes, y alternando los términos positivos con los negativos, se hallará

$$x=\frac{sc'b''-sb'c''+bs'c''-cs'b''+cb's''-bc's''}{ac'b''-ab'c''+ba'c''-ca'b''+cb'a''-bc'a''}$$

y del mismo modo hallariamos

$$y=\frac{ac's''-as'c''+sa'c''-ca's''+cs'a''-sc'a''}{ac'b''-ab'c''+ba'c''-ca'b''+cb'a''-bc'a''}\qquad(p')$$

$$z=\frac{as'b''-ab's''+ba's''-sa'b''+sb'a''-bs'a''}{ac'b''-ab'c''+ba'c''-ca'b''+cb'a''-bc'a''}$$

93 Examinando con atencion las fórmulas (A) y (p'), y

comparándolas con las respectivas ecuaciones de que se han deducido, á saber, los sistemas (a) y (p) halló Cramer por *induccion* las siguientes reglas practicas para formar, sin cálculo prévio, las fórmulas que resuelven un número cualquiera de ecuaciones con igual número de incógnitas.

Estas reglas son las siguientes:

1.ª A la derecha del coeficiente a de la primera incógnita, escríbase el coeficiente b de la segunda; inviértase el órden de las letras, é interpóngase el signo — entre los dos productos ab y ba; así quedará formado el binomio

$$ab-ba$$

A la derecha de cada uno de los términos de este binomio escríbase el coeficiente c de la tercera incógnita, y en seguida hágase pasar este coeficiente por todos los lugares, yendo de derecha á izquierda, y teniendo cuidado de cambiar el signo cada vez que el c cambie de lugar: así se forma el polinomio de tres letras ó de tres dimensiones.

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba.$$

Si hubiere cuatro incógnitas, escríbase de la misma manera el coeficiente d de la cuarta incógnita á la derecha de cada término del polinomio anterior; hágasele luego pasar sucesivamente por todos los lugares yendo de derecha á izquierda, y teniendo cuidado de cambiar el signo cada vez que d cambie de lugar: así se hallará el polinomio siguiente de cuatro letras ó de cuatro dimensiones, y que contendrá 24 términos

$$abcd-abdc+adbc-dacb+acbd-acdb+\ \ldots\ ;$$

y así se continuará hasta que se haya empleado el coeficiente de la última incógnita.

Hecho esto, póngase, en cada término del polinomio resultante un tilde á la *segunda letra*, dos tildes á la *tercera*, y así sucesivamente; y de este modo se obtendrá el denominador comun de todos los valores de todas las incógnitas.

2.ª Para obtener el respectivo numerador de la espresion de cada incógnita reemplácese, en cada término del denominador comun, la letra coeficiente de la incógnita cuyo valor se escribe, por la cantidad conocida, conservando el mismo índice y el mismo lugar.

Discusion de las raices de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

94 No nos detendrémos mucho en la discusion de las raices de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas; examinarémos solo el caso en que una de las raices se presente bajo la forma de $\frac{0}{0}$, á causa de las particularidades notables que nos hará conocer.

Sean las ecuaciones

$$ax + by = s$$

$$a'x + b'y = s'$$

De ellas se deduce, como hemos visto,

$$x = \frac{sb' - bs'}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{as' - sa'}{ab' - ba'}$$

Supongamos, por ejemplo, que la raiz de y se presente bajo la forma de $\frac{0}{0}$; tendrémos las igualdades siguientes:

$$as' - sa' = 0 \quad (1)$$

$$ab' - ba' = 0 \quad (2)$$

La segunda de estas igualdades manifiesta que la raiz de x será entonces de la forma $\frac{m}{0}$, puesto que se tendrá

$$x = \frac{sb' - bs'}{0}$$

Vamos ahora á hacer ver que esta raiz se presenta tambien bajo la forma de $\frac{0}{0}$

En efecto, de las ecuaciones (1) y (2) se deduce

$$\left.\begin{aligned} as' &= sa' \\ ab' &= ba' \end{aligned}\right\} ;$$

que multiplicadas en cruz dan

$$as'ba' = sa'ab',$$

y suprimiendo los factores comunes a y a', se tiene

$$s'b = sb' ;$$

ó

$$s'b - sb' = sb' - s'b = 0 ;$$

Es, pues, nulo el numerador de x, luego la raiz de x se presenta tambien bajo la forma de $\frac{0}{0}$.

Luego *en un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, si una de las raices se presenta bajo la forma de* $\frac{0}{0}$, *la otra se presentará tambien bajo la misma forma* $\frac{0}{0}$.

95. Se puede ver ademas, en este caso, que una de las ecuaciones es tan solo una transformacion de la otra, y que, propiamente hablando, en lugar de tener dos ecuaciones distintas, no se tiene en realidad mas que una.

En efecto; de las igualdades anteriores (1) y (2) se deduce

$$\left.\begin{array}{l} as' = sa' \\ ab' = ba' \end{array}\right\} ;$$

dividiendo los dos miembros de la primera por $a's'$ y los de la segunda por $a'b'$ resultará

$$\left.\begin{array}{l} \frac{as'}{a's'} = \frac{sa'}{a's'} \\ \\ \frac{ab'}{a'b'} = \frac{ba'}{a'b'} \end{array}\right\} ;$$

de donde se deduce

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{a'} = \frac{s}{s'} \\ \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \end{array}\right\} ;$$

y por consiguiente

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{s}{s'} .$$

Si llamamos K á esta razon constante, tendrémos

$$\frac{a}{a'}=K ; \quad \frac{b}{b'}=K ; \quad \frac{s}{s'}=K$$

de donde se deduce

$$a=a'K , \quad b=b'K , \quad s=s'K \quad (m) .$$

Volviendo á considerar las ecuaciones dadas

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=s \\ a'x+b'y&=s' \end{aligned}\right\}$$

si multiplicamos la segunda por K, será

$$a'Kx+b'Ky=s'K ;$$

y á causa de las igualdades (m) se transformará en

$$ax+by=s$$

esto es, que la segunda ecuacion no es otra cosa más que la transformacion de la primera, y las dos ecuaciones propuestas estan representadas en este caso por una sola ecuacion.

96 *Observaciones*: 1.ª Fácil es ver que si se tiene que resolver una sola ecuacion con dos incógnitas, sus valores serán indeterminados.

En efecto, sea

$$ax + by = s$$

la ecuacion única que se quiere resolver y que contiene dos incógnitas x é y.

Si damos á x los valores arbitrarios 1, 2, 3.... m, la ecuacion propuesta dará lugar á las siguientes;

$$a + by = s$$

$$2a + by = s$$

$$3a + by = s$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$ma + by = s$$

las cuales, siendo todas del primer grado con una incógnita, cada una de ellas dará un solo valor; tendrémos, pues, para y los valores siguientes

$$y = \frac{s - a}{b}\ ;\ y = \frac{s - 2a}{b}\ ;\ y = \frac{s - 3a}{b}\ \ldots\ y = \frac{s - ma}{b}$$

y como á cada valor de y corresponderá un nuevo valor para x, se sigue que para ambos habrá una infinidad de valores.

2.ª El número ilimitado de valores deducidos de una sola ecuacion con dos incógnitas, esplica como la forma $\frac{0}{0}$, dada para una raiz y deducida por la otra en la primera parte de esta discusion, nos ha conducido á deducir que una de las ecuaciones dadas entraba inplícitamente en la otra.

3.ª Consideremos siempre la resolucion de una sola ecuacion con dos incógnitas

$$ax + by = S,$$

y supongamos que el término enteramente conocido sea *nulo*; entonces las raices en número ilimitado presentan la particularidad de que su razon es constantemente la misma.

En efecto, bajo tal suposicion, se tendrá.

$$ax + by = 0.$$

Sean α y β un sistema de valores de x é y dados por la ecuacion precedente; estas raices α y β deberán satisfacer á dicha ecuacion, y se tendrá

$$a\alpha + b\beta = 0$$

de donde se tiene

$$a\alpha = - b\beta$$

y

$$\alpha = - \frac{b\beta}{a}$$

y por consiguiente

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{b}{a};$$

y como la razon $\frac{b}{a}$ de las cantidades constantes b y a es constante, queda demostrado el principio enunciado.

4.ª En la resolucion de las ecuaciones con dos incógnitas,

$$ax + by = s \qquad (1),$$

hemos visto que los valores atribuidos á x eran *arbitrarios*; y de ellos hemos deducido por sustitucion en la ecuacion (1) los correspondientes de y.

De aquí resulta, que los valores variables de y *dependen* de los valores *independientes* y *arbitrarios* de x.

En este caso se dice que x es una *variable independiente*, es decir, que puede recibir cualquier valor arbitrario en tanto que y, cuyo valor depende del valor asignado á x, es una variable dependiente.

La ecuacion $ax + by = s$, resuelta con respecto á y dá

$$y = \frac{s - ax}{b}$$

Aquí se vé que la variable *dependiente* y está espresada por medio de la variable *independiente* x, y se dice que y es una funcion de x.

5.ª La espresion algebráica

$$ax + by = s$$

en la cual x é y son variables, está espresada, como se vé, por medio de estas variables, y entonces se dice que la espresion es una *funcion* de dichas variables.

97 En general, se llama *funcion de muchas variables una espresion algebráica en la cual entran estas variables.*

Ecuaciones de condicion.

98 Llámase ecuacion de *condicion* aquella igualdad que manifiesta que los valores de las incógnitas, deducidos de un sistema de ecuaciones, satisfacen á otra ecuacion, que no es necesaria para la determinacion de estos valores, y que contiene el mismo número de incógnitas que el sistema.

99 Hemos visto antes que si se dá un sistema de m ecuaciones, conteniendo m incógnitas, se llegará, por cualquiera de los cuatro métodos esplicados, á determinar los valores de las m incógnitas; de donde se infiere que, *para determinar el valor de cierto número de incógnitas, es necesario tener igual número de ecuaciones.*

100 Hemos visto ademas, que si no se dá mas que una sola ecuacion con dos incógnitas, se hallarán una infinidad de valores para estas incógnitas: este principio es general, esto es, que si se dán m ecuaciones conteniendo $m - n$ incógnitas,

se encontrarán una infinidad de valores para las $m-n$ incógnitas.

101 Examinemos ahora el caso en que, para determinar cierto número de incógnitas, se nos diesen mas ecuaciones que incógnitas.

102 Sin estendernos demasiado en este punto, pues solo queremos dar una idea, supongamos que se haya de resolver un sistema de tres ecuaciones en que solo entren dos incógnitas

$$ax+by=c \quad (1)$$

$$a'x+b'y=c' \quad (2)$$

$$a''x+b''y=c'' \quad (3)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) por uno de los métodos espuestos, se halla

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

103 Segun la índole de la cuestion que ha conducido al sistema de ecuaciones (1), (2) y (3), estos valores de x é y, deben satisfacer á las tres ecuaciones dadas; y estando seguros que satisfacen á las (1) y (2), de donde se han deducido estos valores, será preciso, para que satisfagan tambien á la (3), que, sustituidos en ella en lugar de x é y transformen la ecuacion (3) en una identidad.

Deberá, pues, tenerse

$$a''\left(\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}\right)+b''\left(\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\right)=c''$$

Límites.

104 Existen problemas que, á primera vista, parecen indeterminados, á causa de contener dos ó mas incógnitas en una sola ecuacion, y, sin embargo, pueden determinarse los valores de estas incógnitas, descomponiendo la ecuacion propuesta en dos ó mas, segun los casos, por ejemplo: la ecuacion

$$(2y + 3z - 5) + (6y - 4z - 4) = 0$$

no puede tener lugar mientras no se verifiquen las condiciones

$$2y + 3z - 5 = 0$$

$$6y - 4z - 4 = 0$$

Como se vé, ya la cuestion es determinada, toda vez que vemos dos ecuaciones con dos incógnitas; pues por cualquiera de los métodos de eliminacion se podrán obtener los valores de z é y.

105 Fácilmente se comprende que la cuestion podrá ser *indeterminada, determinada*, ó *mas que determinada*, segun que la ecuacion propuesta se pueda descomponer en *menor*, *igual* ó *mayor* número de ecuaciones que incógnitas contenga la primitiva.

106 Entre estos casos existe uno de gran importancia por el frecuente uso que de él hacemos, en el cual la ecuacion propuesta se descompone en *dos*.

107 Antes de tratar de él, diremos que se llama *can-*

tidad constante aquella que tiene un valor fijo y determinado; y *cantidad variable* la que no lo tiene.

108 Por *límite* de una cantidad variable se entiende una cantidad constante, á la que puede aproximarse la variable, tanto como se quiera, sin ser nunca igual á ella; de modo que cuando una magnitud *variable* $A-\alpha$ se puede ir aproximando á otra *fija* A, en términos que su diferencia α venga á ser menor que cualquier magnitud dada, sin que por ello llegue á desaparecer ó ser rigorosamente nula, entonces se dice que la constante A, es *límite* de la variable $A-\alpha$.

109 Ahora bien; «*siempre que los elementos de una cuestion estén enlazados por la ecuacion*

$$A+\alpha=B+\beta;$$

en la cual A y B representan cantidades constantes, α y β variables y disminuibles á voluntad simultáneamente, pero sin dejar de existir la ecuacion establecida, ha de haber forzosamente igualdad entre las cantidades constantes y entre las variables, esto es:

$$A=B \quad \text{y} \quad \alpha=\beta.$$

Supongamos por un momento que A y B no son iguales, en cuyo caso existirá entre estas cantidades una diferencia algebráica, que llamaremos K, esto es,

$$A-B=K$$

Si en la ecuacion

$$A + \alpha = B + \beta$$

pasamos al primer miembro las constantes y al segundo las variables, tendremos

$$A - B = \beta - \alpha$$

Pero como $A - B = K$ en virtud de la suposicion hecha, resultará

$$K = \beta - \alpha$$

Y despejando á cualquiera de las variables, se tendrá

$$\beta = K + \alpha$$

Ecuacion que nos dice que β no puede disminuir todo lo que se quiera puesto que ha de ser igual á $(K + \alpha)$; y estando esto en oposicion con la hipótesis sobre la naturaleza de α y β que pueden disminuir sin límites, la ecuacion anterior será absurda; luego no puede existir una diferencia K entre A y B: luego deberá ser $K = 0$, y por consiguiente,

$$A = B \qquad \alpha = \beta$$

Aplicacion de este principio.

110 1.º Se ha demostrado en la aritmética que el producto de dos cantidades comensurables no varía, cualquiera que sea el órden de los factores; y vamos á demostrar ahora que tampoco varia el producto de dos factores incomensurables, aun cuando se altere el órden de los factores; esto es, que

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{b} \times \sqrt{a}$$

siendo $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ raices inexactas ó incomensurables.

En efecto, $\sqrt{a}$ tendrá un valor aproximado que llamaremos A; y entre este valor y el verdadero existirá una diferencia α, cantidad variable y disminuible cuanto mayor sea el grado de aproximacion de A; de modo que tendremos

$$\sqrt{a} = A + \alpha$$

Del mismo modo, representando por B el valor aproximado de $\sqrt{b}$, y por β la diferencia entre este valor y el verdadero, y bajo las mismas condiciones anteriores, será

$$\sqrt{b} = B + \beta$$

Despejando en ambas á A y B, se tendrá,

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{a} - \alpha \\ B &= \sqrt{b} - \beta \end{aligned}\right\};$$

y siendo

$$A \times B = B \times A$$

sustituyendo en ambos miembros sus valores, se tiene

$$(\sqrt{a}-\alpha)(\sqrt{b}-\beta)=(\sqrt{b}-\beta)(\sqrt{a}-\alpha)$$

Efectuando la multiplicacion, conservando en ella el órden de colocacion en los factores, dará

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}-\alpha\sqrt{b}-\sqrt{a}\times\beta+\alpha\beta=\sqrt{b}.\sqrt{a}-\beta\sqrt{a}-\sqrt{b}\times a+\beta\alpha$$

Los términos $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ y $\sqrt{b}.\sqrt{a}$ son productos de cantidades constantes, los demás términos son productos de cantidades constantes por variables, que dan resultados *variables*; y representando para mayor sencillez la suma de los términos variables del primer miembro por α', y la de los del segundo por β', se tendrá

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}+\alpha'=\sqrt{b}.\sqrt{a}+\beta';$$

á la que aplicando el principio ya demostrado, se tendrá

$$\alpha=\beta$$

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{b}.\sqrt{a}$$

111 *Otra aplicacion*. Propongámonos hallar la espre-

sion *generatriz* de una *fraccion periódica pura,* tal como

$$0,545454...... = 0,[54]$$

Llamándola S y tomando dos períodos, será

$$S = 0,5454 + 0,0000[54]$$

Hagamos $K = 0,0000[54]$ y tendremos

$$S = 0,5454 + K;$$

ó

$$S - K = 0,5454 = 0,54 + 0,0054$$

multiplicando por 100 ambos miembros de esta ecuacion, resulta

$$100S - 100K = 54,54$$

y restando de esta ecuacion la anterior

$$99S - 99K = 54 - 0,0054 \qquad (a)$$

Si examinamos ahora esta última ecuacion, veremos que $99S$ es una cantidad constante, y $99K$ una cantidad variable; puesto que K varia segun se toma mayor ó menor número de períodos.

Representando, pues, por α la variable del primer miembro, y por β á 0,0054, variable del segundo miembro, la ecuacion (a) estará espresada por

$$99S-\alpha=54-\beta$$

y segun el principio de los límites, se deducirá que

$$99S=54$$

de donde

$$S=\frac{54}{99} \quad \text{espresion generatriz.}$$

Inecuaciones.

112 Se llama *inecuacion* ó *desigualdad* á la relacion de magnitud entre dos cantidades, espresada por medio del signo $>$, en cuyo vértice ó punta se escribe la cantidad menor: así $a>b$, se lee a mayor que b; y $a<b$, se lee a menor que b.

113 La mayor de dos cantidades es la que se separa *mas* de *cero* en el sentido *positivo*, ó la que se separa *menos* de *cero* en el sentido *negativo*.

114 De esto se deduce, 1.° que toda cantidad *positiva* es *mayor* que *cero*: 2.° que toda cantidad *negativa* es *menor* que *cero*: 3.° que de dos cantidades *positivas* es *mayor* la que tiene *mayor* valor numérico: 4.° que de dos cantidades

negativas es *mayor* la que tiene *menor* valor numérico: 5.° que de dos cantidades, una positiva y otra negativa, la positiva es siempre mayor que la negativa.

La teoria de las *ecuaciones* ó *desigualdades* se funda en el principio siguiente:

Si $a>b$, se tendrá $a-b>0$; y viceversa si $a-b>0$, se tendrá $a>b$.

Pueden ocurrir tres casos en que a sea mayor que b.

1.° Que a y b sean positivos.

2.° Que a y b sean negativos.

3.° Que a sea positivo y b negativo.

No puede suponerse que a sea negativo y b sea positivo, porque entonces no se verificaria la condicion fundamental de ser $a>b$, pues entonces seria $a<b$.

Primer caso.—Si a y b son positivos y $a>b$, es evidente que debe ser $a-b>0$.

Segundo caso.—Si a y b son negativos y $a>b$, el valor numérico de a será menor que el valor numérico de b; por tanto, $(a-b)$ será positivo ó mayor que *cero*, porque el signo de b se cambia al restarlo de a.

Tercer caso.—Si a es positivo y b negativo, es evidente que $(a-b)$ debe ser una cantidad positiva ó mayor que *cero*, porque el signo de b cambia al restarlo de a.

115 *Una inecuacion ó desigualdad no se altera sumando ó restando á sus dos miembros una misma cantidad.*

En efecto, supongamos que se tiene

$$a>b \quad ó \quad a-b>0.$$

Como la diferencia entre dos cantidades no se altera sumando ó restando una misma cantidad c á minuendo y sustraendo, tendremos

$$(a \pm c) - (b \pm c) > 0$$

ó bien

$$(a \pm c) > (b \pm c).$$

116 De esto se deduce que cualquier término de una desigualdad puede pasar de un miembro á otro, con tal que se le cambie el signo, sin que se altere la desigualdad.

Así la ecuacion

$$a + b > c - d$$

dará pasando b al segundo miembro y d al primero

$$a + d = c - b$$

117 *Si á todos los términos de una desigualdad se les cambia de miembro*, ó lo que es lo mismo, *si se cambian los signos de todos los términos de una desigualdad, resultará una desigualdad en sentido inverso.*

Así, la desigualdad

$$a - b > c - d$$

dá, pasando todos los términos de un miembro á otro, ó cambiando los signos á todos los términos,

$$-c+d>-a+b$$

ó

$$-a+b<-c+d$$

118 *Una desigualdad no no se altera multiplicando ó partiendo sus dos miembros por una cantidad positiva; pero si esta cantidad es negativa, se deberá invertir el signo de la desigualdad.*

En efecto: sea la desigualdad

$$a>b.$$

Sea m un factor; si $m>0$, esto es, si m es positivo digo que será

$$ma>mb \quad \text{y} \quad \frac{a}{m}>\frac{b}{m}$$

En efecto; de la desigualdad

$$a>b$$

se deduce

$$a-b>0$$

por consiguiente

y

$$\left.\begin{array}{l} ma-mb>0 \\ \dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{m}>0 \end{array}\right\} \quad (x)$$

De estas desigualdades se deduce

$$\left.\begin{array}{c} ma > mb \\ \\ \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m} \end{array}\right\}$$

lo que demuestra la primera parte.

Si el factor m fuere menor que *cero*, esto es, si m fuese *negativo*, siendo $a > b$, los valores absolutos ó numéricos de ma y $\dfrac{a}{m}$ son respectivamente mayores que los de mb y $\dfrac{b}{m}$ por consiguiente las inecuaciones (x) serán en sentido inverso; esto es,

$$\left.\begin{array}{c} ma - bm < 0 \\ \dfrac{a}{m} - \dfrac{b}{m} < 0 \end{array}\right\}$$

ó bien $$am < bm$$

$$\frac{a}{m} < \frac{b}{m}.$$

119 *Se pueden sumar á los dos miembros de una inecuacion los dos miembros análogos de otra, ó bien restar de los dos miembros de una inecuacion los dos miembros invertidos de otra, sin alterar el sentido de la inecuacion.*

En efecto; sean las desigualdades

$$a > b, \qquad \text{y} \qquad a' > b'$$

ó

$$a - b > 0 \qquad \text{y} \qquad a' - b' > 0\ ;$$

que pueden tambien espresarse del modo siguiente

$$\left.\begin{array}{l} a - b = \alpha^2 \\ a' - b' = \alpha'^2 \end{array}\right\}$$

porque α^2 y α'^2 son cantidades esencialmente positivas.

Sumando las ecuaciones precedentes se halla

$$(a + a') - (b + b') = \alpha^2 + \alpha'^2,$$

ó bien

$$(a + a') - (b + b') > 0,$$

ó

$$a + a' > b + b'\ ;$$

lo que demuestra la primera parte.

Para demostrar la segunda parte, consideremos las inecuaciones

$$a > b$$

$$a' > b'$$

Segun lo que se acaba de demostrar, se tiene

$$a + a' > b + b'$$

pasando de un miembro á otro las cantidades a' y b', se hallará

$$a-b'>b-a';$$

y pasando de un miembro á otro las cantidades a y b, se hallará

$$a'-b>b'-a,$$

lo que demuestra la segunda parte.

Si se multiplican miembro á miembro varias inecuaciones en un mismo sentido, con tal de que sus miembros sean todos positivos, resultará inecuacion en el mismo sentido; pero si fueren todos negativos, resultará inecuacion en sentido inverso.

En efecto; siendo las inecuaciones

$$a>b \quad \text{y} \quad c>d$$

ó

$$a<b \quad \text{y} \quad c<d$$

es evidente que

$$ac>bd$$

y

$$ac<bd$$

pues, siendo los primeros miembros del primer caso mayores que los segundos, el primer producto es mayor que el segundo: y por la misma razon en el segundo caso el primer producto es menor que el segundo; con lo que queda demostrado la primera parte.

Si tenemos para la segunda parte de la proposicion la inecuacion

$$-a > -b \quad \text{y} \quad -c > -d$$

ó

$$-a < -b \quad \text{y} \quad -c < -d$$

siendo en el primer caso los valores absolutos de los primeros miembros menores que los de los segundos, el producto de los primeros miembros, que resultará positivo, será menor que el producto (positivo) de los segundos; esto es, que en el primer caso resulta

$$ac < bd$$

y aplicando el mismo raciocinio en el segundo caso, el producto de los primeros miembros que resultará positivo, será mayor que el de los segundos, tambien positivo; esto es, que en el segundo caso resulta

$$ac > bd$$

120 *Si se elevan á una misma potencia los dos miembros de una desigualdad, si son positivos, resultará otra desigualdad en el mismo sentido: si los dos miembros son negativos y la potencia de grado impar, tampoco variará el sentido de la inecuacion resultante; pero si los dos miembros son negativos y la potencia de grado par, se cambiará el sentido de la inecuacion resultante.*

En efecto: sean las inecuaciones

$$a > b,\ a' > b',\ a'' > b'' \text{ etc.}$$

siendo a, a', a'' b, b', b'' etc. cantidades positivas.

Multiplicando miembro á miembro las inecuaciones precedentes se hallará

$$a . a' . a'' \ldots\ldots > b . b' . b'' \ldots\ldots ;$$

y suponiendo

$$a = a' = a'' \ldots, \quad b = b' = b'' \ldots,$$

tendremos

$$a^m > b^m$$

121 *Se pueden dividir los dos miembros de una inecuacion, sin alterarla, por los dos miembros invertidos de otra, siendo positivas las cantidades que en ellas entran.*

En efecto; de $a > b$, y $a' > b'$, siendo a, b, a' y b' cantidades positivas ó negativas, no puede deducirse que $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$, ni que $\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'}$; pues segun sea el cociente de $\frac{a}{a'}$ mayor ó menor que el de $\frac{b}{b'}$, se podrá establecer desigualdad en el mismo sentido ó en sentido inverso.

Si $a>b$ y $a'>b'$, ya sabemos que $aa'>bb'$, siendo positivas las cantidades a, a', b, y b'; y de aquí se sigue que siendo

$$aa'>bb'$$

dividiendo ambos miembros por a' b' se tendrá

$$\frac{a}{b'}>\frac{b}{a'}$$

122 *Si se extrae la raiz de grado par de los dos miembros de una desigualdad, siendo dichos miembros positivos, pues si son negativos no tienen raiz real, resultará una inecuacion en el mismo sentido.*

En efecto; estrayendo la raiz del grado $2m$ de los dos miembros de la desigualdad $a>b$, es evidente que tendremos $\sqrt[2m]{a}>\sqrt[2m]{b}$; porque a y b se consideran como potencias, y á menor potencia corresponde menor raiz.

Tengase presente que aun cuando toda raiz de grado par debe tener el signo $\pm$ aquí solo consideramos la raiz positiva.

El mismo principio se estiende á la raiz de grado *impar* de toda desigualdad cuyos miembros fuesen positivos; esto es, si

$$a>b$$

$$\sqrt[2m+1]{a}>\sqrt[2m+1]{b}.$$

Valores de las incognitas en las inecuaciones.

123 Los valores de las incognitas en las inecuaciones se deducen por las mismas reglas que las ecuaciones.

124 Toda inecuacion determina un límite para cualquiera de las cantidades que en ella entran; así

$x > \frac{3}{4}$, indica que el límite *inferior* ó minimo valor admisible para x, se puede aproximar cuanto se quiera á $\frac{3}{4}$ sin que jamas pueda igualarle.

No teniendo otra inecuacion que limite el maximo valor de x, queda indeterminado el límite superior, y por consiguiente todo valor de x mayor que $\frac{3}{4}$ es admisible.

125 Si hay mas datos ó condiciones con que poder formarse mas de una inecuacion en que entre la misma incognita, pueden ocurrir varios casos en la diversidad de límites que se le fijen.

Podemos tener

1.° dos límites inferiores del valor de la incógnita.

2.° dos límites superiores del valor de la incógnita.

3.° un límite superior y otro inferior, siendo el 1.° mayor que el 2.°

4.° un límite superior y otro inferior. siendo el 1.° menor que el 2.°

En el primer caso, basta atender al mayor de los dos límites, único que queda determinado: v. g. si tenemos $x>6$ y $x>12$ solo queda determinado el mayor límite inferior 12: con efecto, todo valor de x que sea mayor que 12, necesariamente ha de ser > 6.

En el segundo caso, solo hay que atender al menor de los dos límites: v. g. si tenemos $x<4$ y $x<8$, claro es que todo valor de x que sea menor que 4, será <8.

En el tercer caso, todos los valores intermedios son admisibles para x.

En el cuarto caso, se escluyen mutuamente ambos limites, é indican que el problema encierra condiciones contradictorias, y no hay valor admisible para x: v. g. si la resolucion de un problema nos diese para la incógnita x, los valores $x>9$ y $x<5$, desde luego se diria que el problema es absurdo, porque no hay ningun número que pueda ser á la vez menor que 5 y mayor que 9.

Ejemplos.

Se pide un número entero cuyo triplo menos 7 sea mayor que el mismo número mas 11.

Sea x el número que se pide: del enunciado del problema se deduce la inecuacion

$$3x-7>x+11$$

trasponiendo y reduciendo

$$3x-x>11+7$$

$$2x>18$$

$$x>9$$

Esta inecuacion nos fija el límite inferior, y nos dice que todo número mayor que 9 satisface á la condicion propuesta.

Si el número buscado hubiere de satisfacer ademas á la inecuacion siguiente:

$$2(x-1)>x+5$$

ó $$2x-2>x+5$$

ó $$2x-x>5+2$$

ó $$x>7$$

tendriamos así otro límite inferior comprendido en el ya determinado; de suerte que la nueva condicion está contenida en la primera y en nada contribuye al conocimiento del número que se busca

Si en vez de la última condicion se nos diese la siguiente

$$3x-2>4x-13$$

ó $$3x-4x>-13+2$$

ó $$-x>-11$$

ó $$x<11$$

en tal caso solo se podrian satisfacer á las condiciones del problema con los números enteros comprendidos entre 9 y 11; y como entre estos números solo existe el 10, este será el número que se busca y que satisface á las condiciones del problema; por lo tanto $x=10$

Finalmente, si á la condicion primera que nos dió $x > 9$, se agrega la siguiente

$$3(x-1) > 4(x-2)$$

ó $$3x-3 > 4x-8$$

ó $$3x-4x > -8+3$$

ó $$-x > -5$$

ó $$x < 5,$$

que dá un límite *superior* menor que el superior ya hallado, el problema sería un absurdo, porque las condiciones son contradictorias, toda vez que no hay ningun número que pueda ser al mismo tiempo mayor que 9 y menor que 5.

Observacion. Si en el caso en que hemos encontrado $x=10$, porque los límites eran $x>9$ y $x<11$, no se hubiera especificado la condicion de ser x un número *entero*, entonces pudiera tener x todos los valores fraccionarios comprendidos entre 9 y 11, como 9,1 9,2 93. . . . . etc. los cuales satisfacen al problema.

Problemas indeterminados.

126 Llámanse *problemas indeterminados* aquellos en que hay mas incógnitas que ecuaciones.

127 Ecuacion *indeterminada* es aquella en que hay mas de una incógnita, v. g.

$$ax+by=c$$

128 *Para resolver una ecuacion indeterminada con dos incógnitas en números enteros, los coeficientes de dichas incógnitas deben ser primos entre sí.*

Demostracion. Sea la ecuacion indeterminada con dos incógnitas

$$ax + by = c$$

Los coeficientes a y b deben ser primos entre sí, pues si no lo fuesen y tuvieren un factor comun d, que no lo fuese del segundo miembro c, se tendría

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d}$$

Como $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son enteros, si x é y fuesen enteros tambien, el primer miembro seria entero, no siéndolo el segundo, segun la hipótesis, lo que es absurdo; luego a y b no puede tener factor comun, esto es, que han de ser *entre sí primos*, para que x é y puedan ser números enteros.

Método de resolucion.

129 *Para resolver un problema indeterminado ó hallar los valores de las incógnitas en números enteros, esto es, hallar una solucion entera del problema, se seguirán las reglas siguientes.*

1.ª Despéjese la incógnita que tenga menor coeficiente.

2.ª Sáquese del valor de la incógnita la parte entera y la fraccionaria.

3.ª Iguálese la parte fraccionaria ó resto á un entero cualquiera.

4.ª En esta nueva ecuacion despéjese la incógnita que tenga menor coeficiente, sáquese á su valor la parte entera, y la fraccionaria iguálese á otro número entero.

5.ª Procédase del mismo modo con esta nueva ecuacion y las que vayan resultando, hasta llegar á una ecuacion en que la incógnita que se ha de despejar no tenga coeficiente alguno, y su valor será por consiguiente entero, y en funcion de la última indeterminada supuesta.

6.ª Dándose un valor arbitrario á esta última indeterminada se hallará el de la penúltima, y con el de esta se hallará el de la anterior, y siguiendo así sucesivamente en el órden inverso, llegaremos á encontrar el valor de las incógnitas del problema en números enteros, y este resultado será *una solucion del problema en números enteros.*

130 *Observacion.*—Como el valor de la última indeterminada es arbitrario, fácilmente se concibe que, á cada nuevo valor que le asignemos corresponderán nuevos valores enteros á las incógnitas del problema y el número de soluciones será infinito.

131 Con el objeto de no tener que repetir todas estas operaciones para hallar cada una de las infinitas soluciones que puede tener el problema, vamos á hallar fórmulas para que, *dada una solucion del problema en números enteros, se puedan hallar en funcion de una sola indeterminada todas las demas.*

En efecto: supongamos la ecuacion indeterminada con dos incógnitas, y cuyos coeficientes sean primos entre sí,

$$ax + by = c \qquad (1)$$

Sean $x = \alpha$, $y = \beta$, valores obtenidos en una solucion, es claro que sustituidos en la ecuacion (1) la deben satisfacer, y se tendrá

$$a\alpha + b\beta = c \qquad (2)$$

Restando de la (1) la (2) será

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$$

Despejando á x

$$x = \alpha - \frac{b(y-\beta)}{a} \qquad (3)$$

Y como x ha de ser número entero, el segundo miembro deberá serlo tambien y el término $\frac{b(y-\beta)}{a}$ será entero; y no pudiendo ser b divisible por a por ser *primos entre sí*, lo será el factor $y - \beta$;

haciendo $\frac{y-\beta}{a} = t,$

se deduce que $\quad y=\beta+at$
y sustituyendo en la (3) $\quad x=\alpha-bt$

$$\left.\begin{array}{l} y=\beta+at \\ x=\alpha-bt \end{array}\right\} \quad (4)$$

Las fórmulas (4) nos dan todas las soluciones enteras positivas y negativas de una ecuacion indeterminada con dos incógnitas, con solo dar valores enteros arbitrarios positivos ó negativos á la indeterminada t, conocido un sistema de valores para x é y.

Soluciones positivas.

132 A veces las condiciones del problema escluyen toda solucion que no sea positiva, y ya en tal caso no se pueden tomar en las ecuaciones (4) todos los valores enteros de t, sino solo aquellos que nos den soluciones *enteras y positivas*, para lo cual es preciso determinar los límites entre los cuales han de estar comprendidos los valores de la indeterminada t por medio de las inecuaciones

$$\alpha-at>0$$

$$\beta+bt>0$$

Ahora, pues, segun lo dicho (125), 1.° Si estos límites son en un mismo sentido se reducen á uno solo, y la cuestion admite un número infinito de soluciones, siendo preciso entonces que los coeficientes a y b sean de contrario signo en la ecuacion propuesta, para que pueda verificarse con los valores hallados. 2.° Si dichos límites son en sentido inverso, señalan entonces los valores intermedios que puede admitir t; el número de soluciones es limitado, y así queda definido: x crece disminuyendo y, ó viceversa, para lo cual es necesario que los coeficientes a y b tengan un mismo signo.

Si estos límites se escluyen mútuamente, la cuestion no se puede resolver en números enteros y positivos.

Observaciones.—1.ª Cuando alguno de los coeficientes de las incógnitas tenga un factor comun con la cantidad conocida, se simplifica la solucion, haciendo la incógnita, cuyo coeficiente no tiene factor comun con la cantidad conocida, igual á otra incógnita multiplicada por el factor comun, y sustituyendo este valor en la ecuacion dada resultará otra mas sencilla y de fácil solucion.

Ejemplo, $$1200x - 67y = 1000$$

El coeficiente de x y la cantidad conocida 1000, tienen el factor comun 200; haciendo, pues, $y = 200y'$ y sustituyendo será:

$$1200x - 67 \times 200y' = 1000$$

ó $$6x - 67y' = 5$$

que fácilmente dá

$$y' = -5, \quad y = -1000, \quad x = -55,$$

y por consiguiente la solucion completa (131, fórm. 4)

$$\begin{cases} x = -55 + 67t \\ y = -1000 + 1200t \end{cases}$$

2.ª Cuando alguno de los coeficientes es un submúltiplo exacto de la cantidad conocida, se obtiene inmediatamente la primera solucion, haciendo la incógnita no afectada de dicho coeficiente igual á cero.

Ejemplo $3x+17y=27$

El coeficiente de x es submúltiplo de la cantidad conocida 27; haciendo, pues, $y=0$, se tentrá $x=9$ y por consiguiente la solucion completa será: (131, fórm. 4)

$$x=9-17t$$

$$y=0+3t$$

Aplicacion de estas teorías á varios ejemplos.

Sea la ecuacion

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{11}=\frac{58}{77}$$

ó $$11x+7y=58$$

despejando á y, será

$$y=\frac{58-11x}{7}=8-x+\frac{2-4x}{7}$$

y como el segundo miembro ha de ser entero, la fraccion $\frac{2-4x}{7}$ lo será tambien.

Igualándola, pues, á una nueva indeterminada t, será

$$\frac{2-4x}{7} \quad \text{ó} \quad \frac{1-2x}{7}=t$$

de donde

$$x=\frac{1-7t}{2}=-2t+\frac{1-t}{2}$$

y haciendo la fraccion igual al entero t', será

$$\frac{1-t}{2}=t' \quad \text{ó} \quad 1-t=2t'$$

y $$t=1-2t'$$

Haciendo ahora

$$t'=0$$

se tiene $$t=1$$

$$x=-2$$

$$y=13$$

Hallada ya una solucion en valores enteros, ó lo que es lo mismo, un sistema de valores enteros para x é y, podemos hallar las fórmulas que nos dén todas las soluciones enteras en funcion de una sola indeterminada t.

Tenemos para ello las fórmulas generales (4)

$$x = \alpha - bt$$

$$y = \beta + at$$

que para este caso particular y teniendo hallada la solucion

$$x = -3, \quad y = 13$$

será

$$x = -3 - 7t$$

$$y = 13 + 11t$$

En estas fórmulas se vé que dando á t sucesivamente los valores 0, 1, 2, etc. se tendrán infinitas soluciones del problema, ó valores enteros positivos y negativos para x é y.

Pero si solo se tratase de hallar las soluciones enteras y positivas que tiene el problema, estableceriamos las condiciones que son consiguientes con los valores de x é y á saber:

$$-3 - 7t > 0$$

$$13 + 11t > 0$$

Estas dos inecuaciones me darán dos límites para la indeterminada t (125)

Despejando á t en ambas inecuaciones, dá

$$-3 > 7t$$

$$11t > -13$$

ó

$$t > -\frac{3}{7}$$

$$t > -\frac{13}{11}$$

esto nos dice que hay para t dos límites, uno inferior y otro superior: de modo que para obtener soluciones enteras y positivas del problema de quien depende la ecuacion, solo podremos dar á t los valores enteros comprendidos entre ambos límites, y este es -1.

El problema queda limitado en este caso á un solo valor para t, y por tanto solo tiene una solucion entera y positiva.

Siendo $t = -1$

será $x = 4$

$y = 2$

El problema queda, pues, para esta solucion determinado.

Sea la ecuacion

$$3x + 5y = 25$$

Siendo el coeficiente de y factor del segundo miembro se halla inmediatamente una solucion en números enteros, haciendo

$x = 0$ que reduce la ecuacion á

$$5y = 25$$

ó

$$y = 5$$

y

$$x = 0$$

Sustituyendo en las fórmulas (4) se tendrán dispuestas para obtener todas las soluciones enteras del problema de que dependa la ecuacion, y será

$$x = -5t$$

$$y = 5 + 3t$$

haciendo $t = 0, 1, 2,$ etc., se tendrán las infinitas soluciones que se pedian en funcion de una sola indeterminada.

Hallando los límites para t, tendremos como en el anterior el número de las soluciones enteras y positivas

$$\left.\begin{array}{r} -5t > 0 \\ 5 + 3t > 0 \end{array}\right\} \text{ ó } \begin{array}{l} t < 0 \\ t > -\frac{5}{3} \end{array}$$

Siendo estos dos límites superior é inferior compatibles, nos dice que el problema tiene una solucion entera y positiva.

Potencias y raices de los monomios.

133 Para elevar un monomio á una potencia cualquiera se elevarán sucesivamente cada uno de sus factores á di-

cha potencia. Para esto se hallarán las potencias de sus coeficientes numéricos, segun se ha dicho en la aritmética; y respecto á las letras se elevarán con facilidad multiplicando el esponente de cada letra por el de la potencia. Si el esponente de la potencia fuera de grado *impar* la potencia llevará el mismo signo que tenga la cantidad que se eleva á la raiz, pero si es *par* llevará siempre el signo mas; porque una cantidad positiva ó negativa, multiplicada por sí misma un número par de veces, dá por producto siempre una cantidad positiva; y multiplicada un número impar de veces el producto lleva siempre el signo de la cantidad propuesta.

En efecto,

$$(\pm2a^2bc^3)^4 = (\pm2a^2bc^3)(\pm2a^2bc^3)(\pm2a^2bc^3)(\pm2a^2bc^3)$$
$$= 16a^8b^4c^{12}$$

$$(\pm2a^2bc^3)^3 = (\pm2a^2bc^3)(\pm2a^2bc^3)(\pm3a^2bc^3)$$
$$= \pm8a^6b^3c^9$$

135 Si el monomio fuere una fraccion, se elevarán segun la regla anterior el numerador y el denominador.

Así,

$$\left(\pm\frac{3a^2c}{4bd^2}\right)^4 = \frac{81a^8c^4}{256b^4d^8}$$

$$\left(\pm\frac{3a^2c}{4bd^2}\right)^3 = \pm\frac{27a^6c}{64b^3d^6}$$

Raices.

136 Se sabe que estraer la raiz de una cantidad es *hallar otra cantidad que, elevada á la potencia de igual grado que el índice del radical, reproduzca la cantidad subradical.*

137 Para deducir el signo que debe llevar la raiz, nos fundaremos en lo que hemos dicho sobre los signos de las potencias; por tanto tendremos

1.° Que la raiz de grado *par* de toda cantidad positiva tendrá el doble signo $\pm$, esto es, que podrá ser positiva ó negativa.

Si designamos por $2n$ el índice general de las raices de grado par, por a la cantidad de que se quiere estraer la raiz, y con r el valor numérico de esta raiz, se tendrá

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm r \text{ porque } (\pm r)^{2n} = +a$$

2.° Que la raiz de grado *impar* de toda cantidad tendrá el mismo signo que dicha cantidad.

Si designamos con $(2n+1)$ el índice general de las raices de grado impar, se tendrá

$$\sqrt[2n+1]{+a} = +r, \text{ porque } (+r)^{2n+1} = +a$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -r, \text{ porque } (-r)^{2n+1} = -a$$

3.ª Que la raiz de grado *par* de toda cantidad negativa, á saber, $\sqrt[2n]{-a}$, indica una operacion imposible, porque no hay cantidad alguna, ya sea positiva, ya negativa, que, elevada á una potencia *par*, dé resultado negativo: por cuya razon se llaman *imaginarias* las raices de grado *par* de las cantidades negativas; y cuando ocurren en la resolucion de un problema, manifiestan que el problema es un *absurdo*.

138 Se llaman cantidades *reales* á las raices que pueden hallarse exacta ó aproximadamente; y, en general, á todas las que no son imaginarias.

139 Siendo la extraccion de raices una operacion inversa á la de elevar á potencias, se deduce que *para estraer una raiz cualquiera de un monomio, se estrae primero la del coeficiente numérico, dividiendo despues los esponentes de las letras por el índice del radical; y el signo que ha de llevar se deducirá de la regla anterior*

$$\sqrt[3]{\pm 8a^6b^3} = \pm 2a^2b$$

porque $(\pm 2a^2b)^3 = \pm 8a^6b^3$ segun se ha demostrado.

140 Si el monomio fuere un quebrado se le estraerá la raiz del numerador y del denominador y se partirá la primera por la segunda.

141 Si el coeficiente numérico no fuese una potencia exacta del mismo grado que el índice de la raiz, ó el esponente de cada letra no fuese divisible por dicho índice, la raiz no se podrá efectuar, y solo se dejará indicada, simpli-

ficando esta esta esp.esion todo lo posible.

Simplificacion de los radicales.

142 Para simplificar una cantidad radical se dividen los esponentes de los factores subradicales por el índice del radical, quedando por coeficiente de este las letras con el cuociente entero, por esponente, y debajo del radical las mismas letras con el resto por esponente. Si la cantidad subradical tuviese coeficiente numérico, se descompone si es posible, en dos factores, uno de los cuales tenga raiz exacta; se le estrae y se pone esta raiz por coeficiente del radical, dejando debajo de él al factor irracional.

$$\sqrt{9a^5b^2c} = 3a^2b\sqrt{ac} \qquad \sqrt[3]{a^7b^5c^8} = a^2bc^2\sqrt[3]{ab^2c^2}$$

143 Si conviniere hacer desaparecer el coeficiente de un radical, no habrá mas que elevarle á la potencia del mismo grado que el índice del radical, y multiplicar esta potencia por la cantidad subradical.

$$2ab\sqrt{3a} = \sqrt{(2ab)^2 3a^3} = \sqrt{12a^3b^2}$$

144 Si los esponentes de las letras y el índice del radical tuvieren algun factor comun, se partirán por él; lo que no altera el valor del radical

$$\sqrt[4]{25a^6b^2c^4} = \sqrt{5a^3bc^2}$$

Radicales semejantes.

145 Se llaman *radicales semejantes* los que tienen un mismo índice y la misma cantidad subradical (antes ó despues de simplificados), diferenciándose solo en el signo y coeficiente que los acompañen.

146 Los radicales semejantes se reducen á uno solo como los demás términos semejantes; esto es, sumando algebráicamente sus coeficientes, cuya suma será el coeficiente del radical.

Así,

$$4\sqrt[4]{a^3b^2}-2\sqrt[4]{a^3b^2}+2\sqrt[4]{a^3b^2}=4\sqrt[4]{a^3b^2}$$

$$2a\sqrt[3]{ab^2}-b\sqrt[3]{ab^2}+(c-b)\sqrt[3]{ab^2}=(2a-b+c-b)\sqrt[3]{ab^2}=$$

$$=(2a-2b+c)\sqrt[3]{ab^2}$$

Cálculo de radicales.

147 Para multiplicar dos radicales de un mismo grado, se multiplican las cantidades subradicales, y al producto se le pone el mismo signo radical; esto es, que

$$\sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$$

En efecto, supongamos

$$x = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

$$y = \sqrt[m]{ab}$$

Elevando á la potencia m estas ecuaciones, será

$$\left.\begin{array}{l} x^m = ab \\ y^m = ab \end{array}\right\} ;$$

luego $x^m = y^m$ ó bien $x = y$ ó bien sus valores

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$$

Observacion.—Este principio manifiesta que «la raiz de un producto es igual al producto de las raices del mismo grado de sus factores.»

148 Segun este principio se tiene que

$$\sqrt[m]{a^m b} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b} = a \cdot \sqrt[m]{b}$$

Espresion que nos dice que «si una cantidad a está multiplicada por un radical, se la puede pasar como factor debajo del radical, elevándola á la potencia del mismo radical.»

149 Para partir dos radicales de un mismo grado, se parten las cantidades subradicales, y al cuociente se le pone el mismo signo radical: esto es, que

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Supongamos

$$x=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \quad ; \qquad y=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Elevando á la potencia m los dos miembros de estas ecuaciones, será

$$x^m=\frac{a}{b} \quad ; \qquad y^m=\frac{a}{b}$$

luego $x^m=y^m$ ó bien $x=y$; ó bien sus valores

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Observacion.—De aquí se deduce que «la raiz de un cuociente es igual al cuociente de las raices del mismo índice de los factores dividendo y divisor» ó que «la raiz de un quebrado es igual á la raiz del numerador partido por la raiz del denominador.

150 Segun este principio se tiene, que

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b^m}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b^m}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{b}.$$

Esta espresion nos manifiesta que para dividir un radical «por una cantidad b, se puede dividir la cantidad subradical por la cantidad b elevada á la potencia del mismo índice del radical.»

Así:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}}\,,\quad \frac{1}{2}\sqrt{2}\,,=\sqrt{\frac{1}{2}}\,;$$

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{4+4a^2}=\sqrt[3]{\frac{4+4a^2}{27}}=\sqrt[3]{\frac{4}{27}(1+a^2)}$$

151 Un radical no varia de valor cuando el esponente de la raiz y el de las cantidades subradicales se multiplican por una misma cantidad: pues esto equivale á elevar la cantidad subradical á una potencia y estraerle luego al resultado la raiz del mismo grado, esto es,

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[mn]{A^m}$$

$$\sqrt[mn]{A^n}=\sqrt[m]{A}$$

En efecto, es evidente que siendo A un valor absoluto, se tiene:

$$A = (\sqrt[n]{A})^n$$

elevando á la potencia m los dos miembros, será,

$$A^m = (\sqrt[n]{A})^{mn}$$

Estrayendo de ambos miembros la raiz mn, será,

$$\sqrt[mn]{A^m} = \sqrt[n]{A}$$

152 De aquí se deduce tambien que «un radical no varia de valor partiendo el esponente de la raiz y el de las cantidades subradicales por una misma cantidad.

Reduccion de radicales à un mismo indice ó grado.

153 Para reducir dos ó mas radicales á un mismo índice ó grado se multiplican el de cada radical por el producto de los índices de los demás radicales elevándose la cantidad subradical á la potencia del grado de este producto; esto es, se multiplican los esponentes de los factores subradicales y del radical por el producto de los índices de los demás radicales; esto no altera el radical, pues equivale á elevar á

una potencia y estraerle la raiz del mismo órden que manifiesta el factor por quien se multiplica.

Ejemplos.

Reducir á un mismo índice

$$\sqrt[m]{a^n} \quad \text{y} \quad \sqrt[p]{a^q}$$

En efecto, elevando el primer radical á la potencia p y estrayéndole la raiz del grado p será,

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$$

y elevando el segundo radical á la potencia m y estrayéndole la raiz del mismo grado no alterará su valor, y se tendrá

$$\sqrt[m]{a^q} = \sqrt[mp]{a^{mq}}$$

en donde se vé que las dos equivalencias resultantes de los radicales propuestos, son radicales de un mismo grado.

Del mismo modo

$$\sqrt[3]{a^2} \quad \text{y} \quad \sqrt{b} \quad \text{equivalen á} \quad \sqrt[6]{a^4} \quad \text{y} \quad \sqrt[6]{b^3}$$

Tambien puede efectuarse esta operacion por medio del *mínimo múltiplo*, hallando el correspondiente á los índices de los radicales propuestos y este será el índice comun; parto luego el mínimo múltiplo por el índice de cada radical, y el cuociente será la potencia á que ha de elevarse la cantidad subradical, ó el factor por quien ha de multiplicarse el esponente de los factores literales y el del radical.

Ejemplo.

Reducir á un mismo índice los siguientes radicales.

$$\sqrt[8]{a^3},\quad \sqrt[12]{b^7},\quad \sqrt[4]{c^3}$$

El mínimo múltiplo de los índices de los radicales es 24, por tanto se multiplicará el esponente del radical y de la cantidad subradical del primero por el factor 3, el del segundo por el factor 2, y el del tercero por el factor 6, lo que dará las siguientes equivalencias espresadas en radicales de un mismo grado

$$\sqrt[24]{a^9},\quad \sqrt[24]{b^{14}} \quad y \quad \sqrt[24]{c^{18}}$$

Suma, resta, multiplicacion y particion de los radicales de distintos grados.

154 Los radicales se suman y restan como las demás cantidades algebraicas simplificándolas todo lo posible.

Ejemplos.

1.° $6\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}-5\sqrt{2}=\frac{7}{4}\sqrt{2}$

2.° $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}=2\sqrt{3}+6\sqrt{3}+$
$+75\sqrt{3}-36\sqrt{3}=47\sqrt{3}$

3.° $6\sqrt{a}-5\sqrt{a}+7\sqrt{a}-4\sqrt{a}=4\sqrt{a}$

4.° $4\sqrt{a^5c}+4\sqrt{a^3b^2c}+\sqrt{ab^4c}=4a^2\sqrt{ac}+4ab\sqrt{ac}+$
$+b^2\sqrt{ac}=(4a^2+4ab+b^2)\sqrt{ac}=(2a+b)^2\sqrt{ac}$

5.° $\sqrt[6]{a^{14}b^2}-\sqrt[6]{a^2b^{14}}=a^2\sqrt[6]{a^2b^2}-b^2\sqrt[6]{a^2b^2}=(a^2-b^2)\sqrt[3]{ab}$

6.° $\sqrt{18a^5b^3}+\sqrt{50a^3b^3}=3a^2b\sqrt{2ab}+5ab\sqrt{2ab}=$
$=ab(3a+5)\sqrt{2ab}$

155 Para multiplicar ó partir radicales de distintos grados se reducirán á uno mismo; se multiplicarán ó partirán luego las cantidades subradicales y al producto ó cuociente se se les dará el radical comun.

Ejemplos.

$$\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2}.$$

$$\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[n]{b^q}=\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qm}};\quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}.$$

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{s}{t}}:\frac{c}{d}\sqrt{\frac{y}{z}}=\frac{ad}{cb}\sqrt{\frac{s^nz^m}{t^ny^m}}.$$

156 Para elevar un radical á una potencia, se elevará á dicha potencia la cantidad subradical, poniéndole el mismo signo radical; y si le acompañare algun coeficiente se elevará tambien este: ó bien se dividirá el índice del radical por el esponente de la potencia, cuando la division sea posible.

En efecto

$$(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{A} \;.\;.\;.\;.$$

$$= \sqrt[n]{A \times A \times A}$$

$$= \sqrt[n]{A^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{A}$$

así

$$(\sqrt{2ab^2})^3 = \sqrt{8a^3b^6}$$

$$(3\sqrt[3]{a^2cx^2})^2 = 9\sqrt[3]{a^4c^2x^4}$$

$$(2\sqrt[4]{a-b})^2 = 4\sqrt[4]{(a-b)^2} = 4\sqrt{a-b}$$

157 Para estraer la raiz de un radical se multiplicará el índice del radical propuesto por el de la raiz, permaneciendo la misma cantidad subradical, y si le acompañare algun coeficiente se le estraerá, si la tuviere exacta, ó se introducirá debajo del radical si fuere inexacta.

En efecto,

$$\sqrt[n]{A}=\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}\right)^m$$

elevando ambos miembros á la potencia n, se tendrá

$$A=\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}\right)^{mn}$$

luego $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$ es una cantidad que, elevada á la potencia $m\,n$, produce A; y por tanto será la raiz $m\,n$ de A: luego

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[mn]{A}.$$

así

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{ab^2}}=\sqrt[15]{ab^2};\ \sqrt{9\sqrt[3]{ab^2}}=3\sqrt[6]{ab^2}$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt{bc}}=\sqrt[6]{a^2bc}$$

158 Observaciones. 1.ª Si el esponente de una po-

tencia es descomponible en factores, se podrá efectuar esta operacion elevando sucesivamente la cantidad á la potencia que indique cada uno de los factores del esponente
así

$$(A)^{mnp} = \left((A^m)^n\right)^p$$

Segunda. Si el índice de un radical fuera desconponible en factores, se podrá extraer sucesivamente de la cantidad propuesta la raiz indicada por cada uno de los factores del esponente del radical propuesto
así

$$\sqrt[mnp]{A} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}}$$

Esponentes fraccionarios y negativos.

159 La regla de los esponentes para la estraccion de raizes dá cuando son divisibles

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Y si convenimos en la equivalencia de estas espresiones aunque m no sea divisible por n, tendremos que *toda canti-*

dad con esponente fraccionario es equivalente á la misma cantidad elevada á la potencia que indica el numerador y estraida de ella la raiz que indica el denominador.

160 En las consecuencias de la particion se ha hecho ver que toda cantidad con esponente negativo es igual á la unidad dividida por la misma cantidad con esponente positivo.

161 Estas transformaciones nos proporcionan los medios de ejecutar la multiplicacion, particion, elevacion á potencias y estraccion de raices con cantidades de esponentes negativos ó fraccionarios; y nos prueban además que las relativas á los esponentes, sean estos enteros, ó fraccionarios, positivos ó negativos, son generales.

asi

$$1.^{\circ} = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}}$$

porque

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{p}}$$

luego

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq} \times a^{np}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

$$2.^{\circ} = a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$$

porque

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

luego

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$$

Calculo de las cantidades imaginarias de segundo grado.

162 Se llaman *cantidades imaginarias* de segundo grado, á la raiz cuadrada de una cantidad negativa.

Estas cantidades pueden someterse á las leyes del cálculo de las cantidades reales y de su combinacion se obtienen resultados muy importantes.

163 Toda cantidad imaginaria de segundo grado se puede reducir á la reforma de $a\sqrt{-1}$; esto es á la raiz cuadrada de la cantidad subradical, considerada como positiva, multiplicada por $\sqrt{-1}$:
porque

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$$

164 Los resultados de las cuatro operaciones fundamentales con las espresiones de la forma $a\sqrt{-1}$ son las siguientes:

$$1.^{\circ} = a\sqrt{-1} + b\sqrt{-1} = (a+b)\sqrt{-1}$$

$$2.^{\circ} = a\sqrt{-1} - b\sqrt{-1} = (a-b)\sqrt{-1}$$

$$3.^{\circ} = a\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1} = ab(\sqrt{-1})^2 = ab \times -1 = -ab$$

$$4.^{\circ} = \frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = \frac{a}{b}$$

De lo que antecede se sigue que, *la suma y diferencia de dos cantidades imaginarias de la forma indicada* $a\sqrt{-1}$ *son espresiones imaginarias de la misma forma*; *el producto y el cociente son cantidades reales.*

165 Si se tratase de multiplicar varios factores imaginarios ó hallar la potencia n de uno de ellos, la determina-

cion del resultado dependeria de los valores de las diferentes potencias de $\sqrt{-1}$
porque

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}\times\sqrt{-c}\times\sqrt{-d}\times\sqrt{-m}\ \ldots$$
$$=\sqrt{abcdm}(\sqrt{-1})^n$$

y $$(a\sqrt{-1})^n = a^n(\sqrt{-1})^n$$

Hallando, pues, estas potencias de $\sqrt{-1}$, se tiene:

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4 = +1$$

Las cuatro potencias siguientes se hallarán multiplicando $+1$ por la 1.ª, 2.ª, 3.ª y 4.ª; y como esto se repetiria indefinidamente tambien se repetirian indefinidamente los valores hallados $\sqrt{-1}$, -1, $-\sqrt{-1}$, $+1$.

De aqui se sigue, que *para hallar una de las cuatro primeras potencias de $\sqrt{-1}$ equivalente á otra cualquiera potencia dada, se partirá su esponente por 4, y el resíduo de la particion será el esponente de la potencia equivalente; y cuando este resíduo sea cero, su equivalente será la cuarta.*

así

$$(\sqrt{-1})^{10}=(\sqrt{-1})^{2}=-1\ ;\ (\sqrt{-1})^{8}=(\sqrt{-1})^{4}=+1$$

166 Si las espresiones imaginarias van acompañadas de un sumando real, como la espresion $A+B\sqrt{-1}$, su suma, resta, producto y cociente son tambien espresiones imaginarias de la misma forma; asi

$$1.^{\circ}=(A+B\sqrt{-1})+(C+D\sqrt{-1})=(A+C)+(B+D)\sqrt{-1}$$

$$2.^{\circ}=(A+B\sqrt{-1})-(C+D\sqrt{-1})=(A-C)+(B-D)\sqrt{-1}$$

$$3.^{\circ}=(A+B\sqrt{-1})\,(C+D\sqrt{-1})=AC\left\{\begin{array}{l}+BC\sqrt{-1}\\ +AD\sqrt{-1}-BD\end{array}\right.$$

$$=(AC-BD)+(BC+AD)\sqrt{-1}$$

$$4.^{\circ}=(A+B\sqrt{-1}):(C+D\sqrt{-1})=\frac{A+B\sqrt{-1}}{C+D\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{A+B\sqrt{-1}}{C+D\sqrt{-1}}\cdot\frac{C-D\sqrt{-1}}{C-D\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{(AC+BD)+(BC-AD)\sqrt{-1}}{C^2+D^2}$$

$$=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}+\frac{BC-AD}{C^2-D^2}\sqrt{-1}$$

167 Si en el producto tercero suponemos $A=C$ y $D=B$

se tendrá

$$(A+B\sqrt{-1})\ (A-B\sqrt{-1} = A^2+B^2$$

168 La raiz cuadrada de la suma de dos cuadrados esto es, $\sqrt{(A^2+B^2)}$ se llama *módulo* de la espresion imaginaria $A+B\sqrt{-1}$. Asi el módulo de

$$1+\sqrt{-1} \text{ será } \sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

(módulo de)

$$4+3\sqrt{-1}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

169 A dos espresiones imaginarias de la forma $A+B\sqrt{-1}$ y $A-B\sqrt{-1}$, que solo se diferencian en el signo del coeficiente de $\sqrt{-1}$, se les dá el nombre de *imaginarias conjugadas*.

De lo espuesto se deduce que el producto de dos imaginarias conjugadas es una cantidad real é igual á la suma de los cuadrados de la parte real de dichas espresiones; y que la suma de dos cantidades se puede descomponer en el producto de dos factores de la forma de dos imaginarias conjugadas, tales que la parte real sea la raiz cuadrada de una de dichas cantidades, y la parte imaginaria la otra multiplicada por $\sqrt{-1}$.

asi

$$A+B=(\sqrt{A}+\sqrt{B}\sqrt{-1})\ (\sqrt{A}-\sqrt{B}\sqrt{-1})$$

$$=(\sqrt{A}+\sqrt{-B})\ (\sqrt{A}-\sqrt{-B})$$

Cuadrados y raices cuadradas de los polinomios.

170 Se sabe que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Del mismo modo $(a+b+c)^2$, haciendo $b+c=p$, se tendrá:

$$(a+b+c)^2=(a+p)^2=a^2+2ap+p^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$

$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

que tambien se puede escribir

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

171 Es evidente que con este procedimiento obtendriamos el cuadrado de un polínomio, cualquiera que fuera el número de sus términos, y de su generalizacion se deducirá la siguiente regla práctica.

El cuadrado de un polinomio es igual al cuadrado de su primer término, mas el doble producto del primer término por todos los que le siguen, mas el cuadrado del segundo; mas el doble producto del segundo por todos los que le siguen, mas el cuadrado del tercero, y asi se continúa hasta *cuadrar el último; observando la regla de los signos. La regla anterior se puede enunciar tambien como sigue:*

El cuadrado de un polinómio es igual á la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos, mas el duplo de cada término por todos los que les siguen.

172 *Observaciones.* 1.ª Si un polinómio y su cuadrado se ordenan con respecto á una letra, el primer término del cuadrado será el cuadrado del primer término del polinómio; y el último del cuadrado será el cuadrado del último término del polinómio.

2.ª Si del cuadrado del polinómio $a+b+c+d+e$, cuyos términos a, b, c. etc. supondremos ordenados con relacion á las potencias descendentes de una letra x, se resta el cuadrado del primer termino, ó sea a^2, el resíduo será

$$2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

en el cual, teniendo la letra que ordena mayor esponente en a que en b, y en esta mayor que en c, es evidente que en $2\,ab$ tiene mayor esponente que en los términos siguientes; y por tanto $2ab$ es el primer término del resto ordenado con relacion á la misma letra x; luego si se parte este término por el duplo de la raiz hallada, el cuociente será el segundo término del polinómio raiz, esto es, b.

Si cuádramos este binómio hallado y lo restamos del polinómio cuadrado propuesto, quedará por resíduo.

$$2ac+2bc+c^2,$$

en el que, por igual razon que en el anterior, el término $2\,ac$ será el primer término del resto ordenado con relacion á las potencias descendentes de x; y asi de todos los demás.

De aqui se deduce la siguiente regla para la estraccion de la raiz cuadrada de un polinómio.

173 Regla. *Para extraer raiz cuadrada de un polinómio, despues de ordenado con respecto á una letra en órden descendente, se estrae la raiz de su primer término y se tendrá el primer término de la raiz; pártase el segundo término por el duplo de la raiz hallada y el cuociente será el segundo término de la raiz.* Cuadrese el binómio hallado, restese del polinómio propuesto, y el resíduo que resulte, ordenado con respecto á la misma letra, se considera como dividendo, cuyo divisor será el duplo de la raiz hallada; el cuociente que resulte de esta particion será el tercer término de la raiz, cuyo término multiplicado por el divisor y sumándole el cuadrado del cuociente se restará del dividendo.

Esta operacion se repetirá hasta destruir todos los términos del polinómio propuesto, en cuyo caso se tendrá la raiz exacta; ó hasta que resulte un resíduo en que la letra que ordena tenga menor esponente que en el primer término del divisor, en cuyo caso la raiz será inexacta; y si se continúa la estraccion, resultará una série de términos indefinida.

$$\sqrt{(4a^6-4a^5+a^4+8a^3-4a^2+4)}=2a^3-a^2$$

$$\begin{array}{lr|l}
 & -4a^6 & \\
1^{er}.\ \text{resto} & -4a^5+a^4+8a^3-4a^2+4 & (4a^3-a^2)\times a^2 \\
 & +4a^5-a^4 & -a^2 \\
2.^{o}\ \text{resto} & +8a^3-4a^2+4 & (4a^3-2a^2+2)\times 2 \\
 & -8a^3+4a^2-4 & 2 \\
3^{er}.\ \text{resto} & 0 &
\end{array}$$

Ecuaciones del segundo grado.

174 Llámase *ecuacion* de segundo grado aquella en que el máximo esponente de la incógnita es 2. Estas pueden ser completas ó incompletas.

175 Se dice que son *completas* cuando contienen términos en que la incógnita va afectada del esponente 2; términos en que lleva la unidad por esponente, y términos enteramente conocidos.
así

$$Ax^2+Bx+C=0 \quad (1)$$

es una ecuacion completa del segundo grado.

176 Se llama *incompleta* cuando le falta el término en que la incógnita tiene por esponente *uno*, ó cuando carece del término enteramente conocido; esto es, el término en que se puede considerar la incógnita elevada á *cero*.
así

$$Ax^2+Bx=0 \quad (2)$$

$$Ax^2+C\ =0 \quad (3)$$

son ecuaciones *incompletas* del segundo grado.

177 Como se vé, las ecuaciones (2) y (3,) no son mas que casos particulares de la ecuacion general (1) haciendo sucesivamente en ella $C=0$, $B=0$.

178 Es evidente que toda ecuacion completa del se-

gundo grado se puede reducir á una de las formas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2+Bx+C=0 \\ x^2+px+q=0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

reuniendo en un solo término todos los que dependan de x^2; en otro los que dependan de x, y en otro todos los términos conocidos; de este modo se tendrá la general.

$$Ax^2+Bx+C=0$$

y partiendo por el coeficiente de x^2, se tendrá

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0$$

y suponiendo

$$\frac{B}{A}=p, \qquad \frac{C}{A}=q,$$

se obtiene

$$x^2+px+q=0$$

179 En toda ecuacion de segundo grado puesta bajo la forma de

$$x^2+px+q=0$$

La incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término cambiado el signo, $\pm$ la raiz cuadrada del cuadrado de dicha mitad sumado con el tercer término mudado el signo.

Esto es que

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

Demostracion.—Pasando q al segundo miembro se tiene:

$$x^2+px=-q \quad (b)$$

Para reducir esta ecuacion al primer grado y obtener el valor de x es necesario que el primer miembro sea cuadrado perfecto para poderla extraer la raiz; y como un binómio no puede ser nunca cuadrado perfecto, será preciso completarlo agregándole el término que le falta. Para esto observemos que considerando á x como la primera parte del binómio raiz, tenemos los dos primeros términos de su cuadrado dependiente de la primera parte representados por x^2+px, y solo falta hallar el tercer término del trinomio cuadrado que se busca: y como el cuadrado de la segunda parte es siempre el cuadrado de la mitad del coeficiente de la primera en el segundo término, será en este caso

$$(\tfrac{1}{2}p)^2 \text{ ó bien } \tfrac{1}{4}p^2$$

Si añadimos á ambos miembros de la ecuacion (b) $\frac{1}{4}p^2$, será

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=\tfrac{1}{4}p^2-q$$

ó
$$(x+\tfrac{1}{2}p)^2=\tfrac{1}{4}p^2-q$$

estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, será:

$$x+\tfrac{1}{2}p=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^3-q}$$

y despejando á x, se tendrá:

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^3-q}=\frac{-p\pm\sqrt{p^3-4q}}{2}.$$

180 El doble signo $\pm$ antepuesto al radical nos dice que *toda ecuacion de segundo grado tiene dos raices, ó dos soluciones*; esto es, *dos valores para la incógnita*.

En efecto, tomando separadamente los dos signos $+$ y $-$, se tiene para valores de la incógnita x los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^3-q} \\ x=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^3-q} \end{array}\right\} (5)$$

Ejemplo.

Hallar las raices ó valores de la incógnita que satisfacen á la ecuacion

$$7x^2-12x-4=0$$

Poniendo esta ecuacion bajo la forma de

$$x^2+px+q=0$$

y aplicando las fórmulas halladas, se tendrá

$$x = 2\ ;\ x = -\tfrac{2}{7}$$

Verificacion de las raices.

181 Si sustituimos en la ecuacion

$$x^2 + px + q = 0$$

cualquiera de las dos raices ó valores hallados para x, la convertirán en una identidad. En efecto sustituyendo el primero de los valores (5) resultará

$$(-\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q})^2 + p(-\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}) + q = 0$$

de donde se deduce, verificando las operaciones indicadas

$$\tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 = 0$$

ó

$$\tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{1}{2}p^2$$

que es una identidad.

182 Si en vez de sustituir el primer valor (5) sustituimos el segundo, obtendríamos un resultado análogo.

183 *Toda ecuacion de segundo grado puede ser satisfecha por dos distintos valores de la incógnita*: esto es, *que puede tener dos raices.*

Aun cuando al resolver la ecuacion general de segundo grado $x^2+px+q=o$, hemos visto que habia dos raices ó valores para x, vamos á dar una demostracion especial de este principio.

Demostracion.—Sea la ecuacion general de segundo grado.

$$x^2+px+q=0 \quad (m)$$

y supongamos que $x=a$: sustituido este valor en la ecuacion la satisfará, y se tendrá

$$a^2+ap+q=0 \quad (n)$$

de donde

$$q=-a^2-ap \quad (r)$$

Restando de la ecuacion (m) la (n) será

$$x^2-a^2+px-ap=0$$

ó $$(x+a)(x-a)+p(x-a)=0$$

ó $$(x-a)(x+a+p)=0$$

Esta ecuacion solo puede satisfacerse con

$$x-a=0 \quad \text{ó} \quad x+a+p=0\,;$$

ó lo que es lo mismo, con

$$x=a \quad \text{ó} \quad x=-a-p$$

Propiedades de las raices.

184 1.ª *La suma de las raices de una ecuacion de segundo grado es igual al coeficiente del segundo término mudado el signo* $=$.

En efecto; si llamamos x' y x'' á cada uno de los valores de x, ó á cada una de las raices de la ecuacion general
$$x^2+px+q=o$$
tendremos

$$x'=a$$

$$x''=-a-p$$

Sumando se tiene

$$x'+x''=-p;$$

esto es, el coeficiente del segundo término mudado el signo.

2.ª *El producto de las raices de una ecuacion del segundo grado, es igual al tercer término*, término conocido, *independiente de x.*

En efecto, siendo

$$x'=a$$

$$x''=-a-p$$

multiplicando estas dos ecuaciones se tiene,

$$x'x''=-a^2-ap=q,$$

que es término conocido, segun la ecuacion (r).

185 Estas mismas propiedades hubieran podido deducirse de las verdaderas raices de la ecuacion

$$x^2+px+q=0$$

Se tiene, en efecto,

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q} \\ x'' &= -\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Sumando estas dos ecuaciones será

$$x'+x''=-p$$

esto es, el coeficiente del segundo término con el signo cambiado, como se halló antes.

Para deducir la segunda propiedad, pongamos para mayor facilidad las ecuaciones (α) como sigue

$$x'=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$x''=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Multiplicando estas dos ecuaciones, y observando que el producto de los segundos miembros es el producto de la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas, que es la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades, se tendrá:

$$x'x''=\frac{p^2-(p^2-4q)}{4}=q,$$

tercer término, como antes.

186. *Observaciones.*—1.ª La notable relacion que hemos encontrado entre las raices de una ecuacion del segundo grado reducida á la forma de

$$x^2+px+q=0$$

nos dá medios suficientes para poder resolver varios problemas.

Ejemplo.

Hallar dos números, conocida su suma s, y su producto p.

No puede caber duda alguna que las dos cantidades que se piden son las raices de la ecuacion.

$$x^2-sx+p=0$$

Porque si llamamos x' y x'' las dos raices de esta ecuacion, segun lo deducido en las consecuencias 1.ª y 2.ª se tendrá

$$x'+x''=-(-s)=s$$

y $$x'x''=p$$

y resuelta la ecuacion tendremos los dos valores de la incógnita que serán los dos números pedidos esto es;

$$x'=\frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2}$$

y

$$x''=\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}$$

2.ª *Toda ecuacion del segundo grado reducida á la forma* $x^2+px+=0$, *es igual al producto de dos factores binomios, cuya primera parte es la incógnita y la segunda cada una de sus raices tomadas con signos contrarios.*

En efecto, sea la ecuacion

$$x^2+px+q=0 \qquad (A)$$

y sean x' y x'' sus raices.

Segun lo demostrado se tiene,

$$x'+x''=-p \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$x'x''=q \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Sustituyendo en la ecuacion (A) los valores de p y q, deducidos de las ecuaciones (1) y (2) resultará

$$x^2+px+q=x^2-(x'+x'')x+x'x''$$

ó

$$=x^2-xx'-xx''+x'x''$$

Sacando el factor comun x en los dos primeros términos del segundo miembro, y $-x''$ en los dos últimos, será

$$x^2+px+q=x(x-x')-x''(x-x')$$

y sacando el factor comun $(x-x')$ resultará

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x'')$$

3.ª Examinada la consecuencia 3.ª que nos da la forma bajo la cual se puede poner una ecuacion del segundo grado, en la que el coeficiente de x^2 sea la unidad, se vé la posibilidad de dividir cualquier polinómio del segundo grado en dos factores del primero.

En efecto: sea el polinomio

$$Ax^2+Bx+C$$

en que x represente una cantidad variable.

Si en él sacamos A por factor comun se tiene

$$Ax^2+Bx+C=A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right) \quad (1)$$

Busquemos ahora los valores de x que reduzcan á *cero* el factor $x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}$, ó lo que es lo mismo, resolvamos la ecuacion

$$x^2+\frac{A}{B}x+\frac{C}{A}=0$$

y supongamos que sus raices sean α y β; no hay duda que podremos escribir la siguiente equivalencia

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=(x-\alpha)(x-\beta)$$

y la ecuacion (1) se convertirá por esta sustitucion en

$$Ax^2+Bx+C=A(x-\alpha)(x-\beta)$$

con lo que quedará el polinomio propuesto reemplazado por el producto de dos factores del primer grado

Discusion de la ecuacion de segundo grado.

$$x^2+px+q=0$$

Siendo las raices de esta ecuacion

$$x'=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

$$x''=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

vemos que pueden ser reales ó imaginarias, segun que $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ lo sea; y esto depende del valor y signo de q en la ecuacion, cualquiera que sea el signo que en ella tenga $-p$, pues siempre $\frac{1}{4}p^2$ será positivo.

Así pues, siendo positivo ó negativo p, y q positivo en la ecuacion, puede suceder que

$$q \text{ sea } < \tfrac{1}{4}p^2$$

$$q \quad > \tfrac{1}{4}p^2$$

$$q \quad = \tfrac{1}{4}p^2$$

1.° Si $q < \frac{1}{4}p^2$, la cantidad subradical será positiva, el radical será real y las dos raices de la ecuacion serán *reales, desiguales* y *de un mismo signo*; porque siendo el valor del radical esencialmente menor que el del término esterior $-\frac{1}{2}p$, en la suma algebráica habrá de dominar este signo.

2.° Si $q > \frac{1}{2}p^2$, la cantidad subradical será negativa, y el radical imaginario, luego las dos raices de la ecuacion serán *imaginarias*.

3.° Si $q = \frac{1}{4}p^2$, entonces el radical será *cero*, y las dos raices de la ecuacion son reales é iguales ambas á $-\frac{1}{2}p$: esto es á *la mitad del coeficiente del segundo término con el signo mudado*.

4.° Si q fuere negativo en la ecuacion, cualquiera que sea su valor respecto al de $\frac{1}{4}p^2$, la cantidad subradical será positiva, y el valor del radical será real y mayor que el término esterior $\frac{1}{2}p$; luego las dos raices de la ecuacion serán *reales, desiguales y de signos contrarios*; pues entonces en la suma algebráica de estos valores dominará el doble signo del radical.

En efecto, para este caso la ecuacion general será

$$x^2 \pm px - q = 0$$

y

$$x = \mp \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p + q^2}$$

5.° Si q fuese igual á cero, el valor del radical será $\frac{1}{2}p$; y por tanto una de las raices será cero, y otra $\mp p$; esto es, *el coeficiente del segundo término con el signo mudado.*

Para este caso la ecuacion general será la *incompleta* por carecer de tercer término

$$x^2 \pm px = 0$$

y

$$x = \mp \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2} = \mp \tfrac{1}{2}p \mp \tfrac{1}{2}p$$

ó

$$x' = 0 \quad \text{y} \quad x'' = \mp p$$

6.ª Si $p = 0$, con q positivo ó negativo, entonces las dos raices de la ecuacion serán *reales* y *de signos contrarios*, si q es negativo en la ecuacion, é *imaginarias* si q fuere positivo en la ecuacion.

Para este caso la ecuacion general será la *incompleta* por carecer de segundo término,

$$x^2 \mp q = 0$$

y

$$x = \pm \sqrt{\mp q}$$

Resolucion de la ecuacion general de 2.° grado.

$$ax^2 + bc + c = 0$$

Propongamos ahora resolver la ecuacion general del segundo grado conservando el coeficiente de x^2

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (m)$$

multiplicando por $4a$ sus dos miembros, será

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

ó

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

sumando b^2 á ambos miembros, se tendrá

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

ó

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

estrayendo raiz cuadrada *será*

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

y finalmente despejando á x tendremos

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (n)$$

En ella se vé que considerando el doble signo del radical en el numerador separadamente, da lugar á los dos distintos valores de x, que designándolos por x' y x'', será

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x'' &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}\right\} \quad (r)$$

La fórmula (n) nos dice que en toda ecuacion de segundo grado, de la forma $ax^2+bx+c=0$, *la incógnita es igual al coeficiente del segundo término con signo contrario mas ó menos la raiz cuadrada del cuadrado de dicho coeficiente, menos el cuadruplo producto del coeficiente de* x^2 *por el término conocido, dividido todo por el duplo del coeficiente de* x^2.

Ejemplo.

Sea la ecuacion de segundo grado

$$7x^2 - 12x - 4 = 0$$

Resuelta segun la regla anterior, se tiene

$$x' = 2\,; \qquad x'' = -\tfrac{2}{7}$$

Discusion de la ecuacion de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las raices de la ecuacion de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ están dadas, segun hemos visto, por las fórmulas siguientes (r),

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Observando atentamente estas raices, se verá

1.° Que si $b^2-4ac>0$, esto es, positiva, el radical será real y los dos valores de la ecuacion, ó las dos raices serán *iguales y de un mismo signo.*

2.° Si $b^2-4ac=0$, las dos raices serán *iguales* á $-\frac{b}{2a}$

3.° Si $b^2-4ac<0$, esto es, negativa, el radical será imaginario, y las dos raices de la ecuacion tambien *imaginarias*.

Ecuaciones bicuadradas.

187 Llámanse *ecuaciones bicuadradas* aquellas que despues de preparadas convenientemente toman la forma de

$$Ax^4+Cx^2+E=0$$

ó la de

$$x^4+px^2+q=0 \qquad (1)$$

188 Estas ecuaciones se resuelven por las mismas fórmulas que hemos hallado para resolver las del segundo grado, como vamos á manifestar.

En efecto; haciendo $x^2=y$, y sustituyendo en la ecuacion (1) se tendrá

$$y^2+py+q=0$$

de donde

$$y=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

ó bien

$$x^2=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

Extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros será

$$x=\pm\sqrt{\left[-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}\right]}$$

ó bien

$$x=\pm\sqrt{\frac{-p\pm\sqrt{p^2-q}}{2}}$$

ó bien poniendo esta fórmula en funcion de los coeficientes de la ecuacion propuesta, será

$$x=\sqrt{\left\{\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4AE}}{2A}\right\}} \qquad (2)$$

189 Esta fórmula contiene cuatro valores distintos para x, que dan lugar á las cuatro raices siguientes:

$$x' = \sqrt{-\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}} \qquad x'' = -\sqrt{-\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}}$$

$$x''' = \sqrt{-\tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}} \qquad x'''' = -\sqrt{-\tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}}$$

las cuales, como fácilmente se vé, son iguales y de signos contrarios.

190 *Observacion.*=La fórmula (2) nos dice que para obtener los valores de x, se debe *extraer la raiz cuadrada de un binomio compuesto de dos términos, de los cuales el uno, $-C$, es racional* y *el otro, $\sqrt{C^2 - 4AE}$ es, en general, una cantidad irracional del segundo grado* pero como el valor de este término irracional solo se puede obtener aproximadamente, es evidente que los valores de x estarán afectados de dos causas de error. Si pudiésemos transformar la espresion de x en otra, cuyos dos valores fuesen entre sí independientes, extrayendo una raiz por esceso y la otra por defecto, si estos radicales tuviesen signos semejantes, ó extrayendo las dos raices en el mismo sentido, si los radicales tuviesen signos contrarios, se compensarian en parte los errores cometidos en las dos raices, y asi se obtendrian con mas exactitud los valores de x.

Sea, pues, $A + \sqrt{B}$ la cantidad cuya raiz cuadrada se pide, y vamos á buscar dos números *racionales* x é y tales, que se tenga

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

ecuacion que no contiene ningun absurdo; porque si se elevan sus dos miembros al cuadrado se tiene

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy} \qquad (a)$$

Esta ecuacion puede subdividirse en dos (109)

$$A=x+y \quad (b) \qquad \sqrt{B}=2\sqrt{xy} \quad (c)$$

la ecuacion (b) es la formada de los términos racionales; y la (c) la formada de los términos irracionales; porque si A no fuese igual á $x+y$, existiria una diferencia d, y se tendria

$$A=x+y+d$$

sustituyendo en (a) será

$$x+y+d+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}$$

ó bien

$$d+\sqrt{B}=2\sqrt{xy}$$

elevando al cuadrado

$$d^2+2d\sqrt{B}+B=4xy$$

de donde

$$\sqrt{B}=\frac{4xy-d^2-B}{2d}$$

resultado absurdo; pues siendo $\sqrt{B}$ una cantidad irracional, seria igual á otra racional; luego tambien es un absurdo que entre A y $x+y$ pueda existir diferencia alguna; por tanto las ecuaciones (b) y (c) se verifican, y nos dan á conocer la suma y el producto de x é y.

Elevando la ecuacion (c) al cuadrado, dá

$$B = 4xy$$

ó

$$\tfrac{1}{4}B = xy \qquad (d)$$

esto es, el producto de x é y

$$A = x + y \qquad (b)$$

y como las ecuaciones (b) y (d) nos dan conocidos el producto y la suma de dos cantidades, se puede formar una ecuacion de segundo grado, cuyas raices sean estas mismas cantidades. (**185**, observacion 1.ª)

Los valores de x é y serán, pues, las raices de la ecuacion del segundo grado,

$$z^2 - Az + \tfrac{1}{4}B = 0$$

cuyas dos raices x é y serán

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad ; \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

y por consiguiente

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad (f)$$

vemos que los dos radicales de segundo grado, deben tener signos semejantes; pues si nó, elevando este segundo miembro al cuadrado, no se reproduciria el término $+\sqrt{B}$. Lo contrario sucederia si $\sqrt{B}$ fuese precedida del signo $-$; luego

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \quad (g)$$

En estas ecuaciones se vé que, si la cantidad subradical. (A^2-B) *no es un cuadrado perfecto*, las fórmulas que acabamos de hallar serán mas complicadas que las que se querian sustituir; y entonces será mas conveniente efectuar directamente el cálculo indicado por la fórmula $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

Otras ecuaciones que se resuelven à modo de las del segundo grado.

191 Sea la ecuacion

$$Ax+B\sqrt{x}+C=0$$

ó bien

$$x+p\sqrt{x}+q=0 \quad (3)$$

estas ecuaciones se pueden resolver tambien por las fórmulas de las del segundo grado.

En efecto: haciendo

$$x=y^2, \text{ será } \sqrt{x}=y;$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion (3), se tendrá

$$y^2 + py + q = 0$$

de donde

$$y = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}$$

y sustituyendo $\sqrt{x}$ por y será

$$\sqrt{x} = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}$$

elevando al cuadrado, será

$$x = \left\{-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}\right\}^2$$

Razones y proporciones.

192 Se llama *razon* la relacion que existe entre dos cantidades de una misma especie, y puede ser de dos modos: *aritmética* y *geométrica*.

193 Se dice que la razon es *aritmética*, cuando se trata de hallar el esceso que lleva una de las cantidades á la otra: y *geométrica*, cuando se trata de hallar las veces que la una contiene á la otra.

194 La cantidad que se compara, se llama *antecedente*, y aquella con quien se compara *consecuente*.

195 Se llama *valor de la razon*, *esponente de la razon*, ó simplemente *razon*, al número que espresa el resultado de la comparacion.

196 La razon aritmética se halla restando del antecedente el consecuente. A este resultado se le dá el nombre de *esponente* de la razon aritmética.

197 La razon geométrica se halla partiendo el antecedente por el consecuente. A este resultado se le llama *esponente* de la razon geométrica.

198 Se dice que una razon es *inversa* con relacion á otra, cuando se comparan sus términos en sentido contrario: asi la razon aritmética entre las cantidades a y b, siendo $a > b$ se espresa

$$\left.\begin{matrix} a \,.\, b \\ \text{ó} \quad a - b \end{matrix}\right\} \text{directa} \qquad \left.\begin{matrix} b \,.\, a \\ \text{ó} \quad b - a \end{matrix}\right\} \text{inversa:}$$

y siendo d el resíduo absoluto entre a y b el esponente de la directa seria $+ d$, y el de la inversa $- d$.

199 Del mismo modo la razon geométrica entre a y b, siendo $a > b$ se espresa así

$$\left.\begin{matrix} a : b \\ \text{ó} \quad \frac{a}{b} \end{matrix}\right\} \text{directa:} \qquad \left.\begin{matrix} b : a \\ \text{ó} \quad \frac{b}{a} \end{matrix}\right\} \text{inversa.}$$

y siendo q el cuociente de a partido por b, el esponente de la directa será q, y el de la inversa $\frac{1}{q}$

200 Es evidente que la suma de dos razones aritméticas inversas es igual á *cero*, y que el producto de dos razones geométricas inversas es igual á la *unidad*.

201 La razon ó relacion entre dos números ó cantidades incomensurables é irracionales es la de sus valores aproximados. Algunas veces esta relacion es racional ó comensurable. En efecto: la relacion entre las dos cantidades incomensurables $\sqrt{12}$ y $\sqrt{3}$ es

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$$

202 Puesto que la razon aritmética no es otra cosa que la diferencia entre dos cantidades, y la geométrica el cuociente de ambas cantidades, pueden aplicarse á la primera todos los teoremas relativos á la resta, y á la segunda todos los esplicados para los quebrados.

Proporcion es la igualdad de dos razones de la misma especie; si estas fueren aritméticas, la proporciom se llama *aritmética*; si fueren geométricas, la proporcion toma el nombre de *geométrica*, y se espresan así:

La aritmética, $a . b : c . d$

ó en forma de ecuacion, $a-b=c-d$. En este caso se la llama *equidiferencia*.

La geométrica se espresa

$$a : b :: c : d$$

ó en forma de ecuacion

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

El 1.° y 4.° término se llaman *estremos*, y el 2.° y 3.° *medios*.

203 La proporcion se llama *directa*, cuando todos sus términos son diferentes; y *contínua* cuando los dos términos medios ó los dos estremos son iguales: así,

$$a \,.\, b : b \,.\, c \qquad \text{es aritmética contínua}$$

y

$$a : b :: b : c \qquad \text{es geométrica contínua}$$

que se acostumbran á escribir abreviadamente con tres términos precedidos de este signo ÷ en la aritmética, y de este otro ∺ en la geométrica: así,

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c$$

$$∺\, a : b : c$$

Propiedad fundamental de la proporcion aritmética.—*En toda proporcion aritmética la suma de estremos es igual á la suma de medios.*

Demostracion.—Sea la proporcion aritmética

$$a \,.\, b : c \,.\, d$$

puesta en ecuacion será

$$a - b = c - d$$

cambiando de miembro los consecuentes, será

$$a + d = b + c$$

204 En esta ecuacion, conocidos tres términos, se puede despejar el cuarto:
asi para hallar á d se tendrá

$$d = b + c - a \qquad (1)$$

para hallar á b se tendrá

$$b = a + d - c \qquad (2)$$

La ecuacion (1) y (2) nos dicen que para hallar el término desconocido, si este es un estremo, se suman los medios y de la suma se resta el estremo conocido; y si es un medio, se suman los estremos y de la suma se resta el medio conocido.

205 Aplicando la propiedad fundamental á la proporcion contínua

$$\div a \,.\, b \,.\, c \quad ó \quad a : b :: b : c$$

nos dará $\qquad b + c = 2b \qquad (1)$

de donde $\qquad b = \frac{a+c}{2} \qquad (2)$

ó $\qquad c = 2b - a \qquad (3)$

La ecuacion (1) nos dice que *en toda proporcion contínua la suma de estremos es igual al duplo del término medio.*

La (2) nos dice que *el término medio es igual á la semisuma de los estremos.*

Y la (3) que *un estremo es igual al duplo del término medio menos el estremo conocido.*

206 Hallar *un medio aritmético* ó un medio proporcional aritmético entre dos cantidades, es lo mismo que hallar el término medio de una proporcion contínua, cuyos estremos son las dos cantidades dadas.

207 Hallar *una tercera proporcional aritmética*, es lo mismo que hallar un estremo de una proporcion contínua, en la que una de las cantidades es el estremo conocido y la otra el término medio.

208 **Consecuencia.**—De dos sumas iguales se puede formar una equidiferencia, cuyos estremos serán los dos sumandos de una de las sumas, y cuyos medios serán los dos sumandos de la otra.

En efecto; siendo

$$a + d = b + c$$

cambiando de miembros á las cantidades d y b, se tendrá

$$a - b = c - d$$

que es una equidiferencia.

209 Fundados en el principio general de la proporcion aritmética ó equidiferencia, se pueden variar sus términos con tal que siempre se verifique que la *suma de los estremos sea igual á la de los medios*; y las distintas combinaciones que de estas variaciones resultan se denominan *alternar*, *invertir y permutar*.

Así, pues; cambiando los medios, ó lo que es lo mismo:

comparando el antecedente de la 1.ª razon, al antecedente de la 2.ª como el consecuente de la 1.ª al consecuente de la 2.ª es lo que se llama *comparar alternando.*

Cambiando los estremos en medios y estos en estremos, ó lo que es lo mismo; cada consecuente á su antecedente, es lo que se llama *comparar invirtiendo.*

Cambiando el lugar de las razones, esto es; poniendo la segunda razon en vez de la primera y esta en lugar de la segunda, es lo que se llama *comparar permutando.*

Así, la proporcion aritmética

$a \,.\, b : c \,.\, d$ se convierte

alternando, en $a \,.\, c : b \,.\, d$

invirtiendo, en $b \,.\, a : d \,.\, c$

permutando, en $c \,.\, d : a \,.\, b$

210 **Consecuencia.** - De lo demostrado se infiere que pueden hacerse en una proporcion aritmética ó en una equidiferencia las siguientes operaciones, sin que deje de existir la proporcion ó equidiferencia.

Sumar ó restar una misma cantidad á cada término de la equidiferencia.

Sumar ó restar una misma cantidad á los términos de nna de las razones.

Sumar ó restar una misma cantidad á los dos antecedentes de la equidiferencia.

Sumar ó restar una misma cantidad á los dos consecuentes de la equidiferencia.

Porque en todos estos casos se verifica que la suma de los estremos es igual á la de los medios.

211 **Propiedad fundamental de la proporcion geométrica.** — *En toda proporcion geométrica el producto de estremos es igual al de medios.*

Demostracion. — En la proporcion geométrica

$$a : b :: c : d$$

puesta en ecuacion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

siendo estos quebrados iguales, sus productos en cruz son iguales; luego

$$ab = cd$$

212 Conocidas en esta ecuacion tres de las cuatro cantidades que en ella entran se puede hallar la cuarta: asi para hallar á d se tendrá

$$d = \frac{ab}{c} \qquad (1)$$

$$b = \frac{cd}{a} \qquad (2)$$

La ecuacion (1) y (2) nos dice que para hallar el término conocido, si este es un estremo, se multiplican los medios y el producto se parte por el estremo conocido; y si es un medio, se multiplican los estremos y el producto se parte por el medio conocido.

213 Aplicando esta propiedad á la contínua

$$\div a : b : c \qquad \text{ó} \qquad a : b :: b : c,$$

nos dará

$$a\,c = b^2 \qquad (1)$$

de donde

$$b = \sqrt{ab} \qquad (2)$$

y

$$c = \frac{b^2}{a} \qquad (3).$$

La ecuacion (1) nos dice que *en toda proporcion contínua geométrica, el producto de estremos es igual al cuadrado del término medio.*

La (2) nos manifiesta que el *término medio es igual á la raiz cuadrada del producto de los estremos.*

Y la (3) que *un estremo es igual al cuadrado del término medio partido por el estremo conocido.*

214 Hallar *un medio geométrico*, ó una media proporcional geométrica entre dos cantidades, es lo mismo que hallar el término medio de una proporcion contínua cuyos estremos son las dos cantidades dadas.

215 Hallar una *tercera proporcional geométrica* es lo mismo que hallar el tercer término de una proporcion contínua en la que una de las cantidades es el estremo conocido y la otra el medio.

216 De dos productos iguales se puede formar una proporcion geométrica, cuyos dos estremos serán los dos facto-

res de uno de los dos productos, y cuyos dos medios serán los dos factores del otro producto.

Asi, siendo

$$a \times d = b \times c$$

partiendo por $b \times d$, será

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}$$

ó

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

que es una proporcion geométrica.

217 Fundados en el principio general de la proporcion geométrica, se pueden variar sus términos con tal que siempre se verifique que el producto de estremos sea igual al de los medios y las varias combinaciones que resultan se denominan *alternar*, *invertir* y *permutar*.

Así, pues, cambiando los medios, ó lo que es lo mismo, antecedente de la primera razon al antecedente de la segunda, como consecuente de primera á consecuente de segunda, es lo que se llama comparar *alternando*.

Cambiando los estremos en medios y estos en estremos, ó lo que es lo mismo; cada consecuente á su antecedente, se llama comparar *invirtiendo*.

Cambiando las razones, esto es poner la primera razon en lugar de la segunda y esta en lugar de aquella, se llama *comparar permutando*.

asi la proporcion $a : b :: c : d$ se convierte.

alternando $a : c :: b : d$

invirtiendo $b : a :: d : c$

permutando $c : d :: a : b$

Consecuencias.—1.ª De lo demostrado se infiere que pueden hacerse en una proporcion geométrica las siguientes operaciones, sin que deje de existir la proporcion.

Multiplicar ó partir por una misma cantidad todos los términos de la proporcion.

Multiplicar ó partir por una misma cantidad los dos términos de una de las razones.

Multiplicar ó partir por una misma cantidad los dos antecedentes de la proporcion.

Multiplicar ó partir por un mismo número los dos consecuentes de la proporcion. Porque en todos estos casos se verifica que el producto de estremos, es igual al de medios.

2.ª Para hacer desaparecer los denominadores de una proporcion, cuando algunos de sus términos sea fraccionario, despues de reducir el entero, si lo hay, á la especie del quebrado, se verá fácilmente que si el término fraccionario es un antecedente, basta multiplicar los dos antecedentes ó toda la razon por el denominador.

Si el término fraccionario es un consecuente, basta multiplicar toda la razon ó los dos consecuentes por el denominador.

Si los dos términos de una razon fuesen fraccionarios, se reducen á un comun denominador y se comparan solo los antecedentes.

Teoremas importantes.

I *Si dos proporciones tienen una razon comun, las otras dos forman proporcion.*

Sean las proporciones

$$a : b :: c : d \quad \text{y} \quad a : b :: m : n \qquad (1)$$

que tienen comun la razon $a : b$; digo que será

$$c : d :: m : n$$

En efecto; las proporciones (1) pueden escribirse como sigue

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \text{ y } \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

y como dos cosas iguales á una misma son iguales entre sí, tendremos

$$\frac{c}{d} = \frac{m}{n}; \text{ ó bien } c : d :: m : n \quad \text{luego etc.}$$

II *Si los antecedentes ó los consecuentes de dos proporciones son iguales, habrá proporcion entre los otros cuatro términos.*

Sean las proporciones

$$a : b :: c : d;\ \text{y}\ a : m :: c : n \qquad (1)$$

cuyos antecedentes son iguales; digo que será

$$b : d :: m : n$$

En efecto; alternando los medios en las proporciones (1), se tendrá

$$a : c :: b : d;\ \text{y}\ \ a : c :: m : n$$

de donde se deduce por el teorema I,

$$b : d :: m : n \quad \text{luego etc.}$$

Del mismo modo se haria la proporcion si fuesen iguales los consecuentes.

III *Si se multiplican ordenadamente los términos de varias proporciones, los productos formarán una proporcion que se llama* compuesta.

Sean las proporciones

$$\left.\begin{array}{l} a : b :: c : d \\ a' : b' :: c' : d' \\ a'' : b'' :: c'' : d'' \end{array}\right\} (1)$$

digo que será;

$$a \times a' \times a'' : b \times b' \times b'' :: c \times c' \times c'' : d \times d' \times d''$$

En efecto; si escribimos las proporciones (1) en forma de ecuacion, tendremos

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ ;\ \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}\ ;\ \frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''}$$

Multiplicando ordenadamente, esto es, miembro á miembro, resultará

$$\frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''}=\frac{c \times c' \times c''}{d \times d' \times d''}\ ;$$

de donde se sigue, que

$$a \times a' \times a'' : b \times b' \times b'' :: c \times c' \times c'' : d \times d' \times d'' \text{ luego etc.}$$

De un modo análogo se demuestra que si se dividen ordenadamente los términos de varias proporciones, los cuocientes resultantes formarán proporcion.

IV *Las potencias ó las raices de un mismo grado de los cuatro términos de una proporcion forman tambien proporcion; ó lo que es lo mismo, se pueden elevar todos los términos de una proporcion á una misma potencia, ó someterlos á la estraccion de una misma raiz sin que deje de haber proporcion.*

1.° Sea la proporcion

$$a : b :: c : d$$

$$\text{ó}\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\qquad (1)$$

Elevando ambos miembros de esta ecuacion á la potencia del grado m. será

$$\left(\frac{a}{d}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m ; \text{ ó } \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{b^m} ;$$

ó $$a^m : b^m :: c^m : d^m$$ luego etc.

2.° Si estraemos la raiz del grado m de los dos miembros de la ecuacion (1) se tendrá

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}} ; \text{ ó } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}} ;$$

ó $$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$$ luego etc.

V *En toda proporcion la suma ó diferencia de los dos primeros términos es á la suma ó diferencia de los dos últimos, como el segundo al cuarto, ó como el primero al tercero.*

Sea la proporcion

$$a : b :: c : d \qquad (1)$$

$$\text{ó } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

sumando ± 1 á los dos miembros será:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$

$$\text{ó } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} ; \quad \text{ó } a \pm b : b :: c \pm d : d$$

y alternando los medios

$$a \pm b : c \pm d :: b : d \qquad (2)$$

Alternando los medios de la proporcion (1), será

$$a : c :: b : d \qquad (3)$$

Las proporciones (2) y (3) dán por el teorema (I)

$$a \pm b : c \pm d :: a : c \qquad (4)$$

Las proporciones (4) y (2) dejan demostrado el teorema.

VI *En toda proporcion la suma de los dos primeros términos es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es á su diferencia.*

Sea la proporcion

$$a : b :: c : d.$$

Segun el teorema V se deduce

$$a + b : c + d :: a : c$$

$$a - b : c - d :: a : c$$

y segun el I,

$$a + b : a - b :: c + d : c - d \quad \text{luego etc.}$$

VII *En toda proporcion la suma ó la diferencia de antecedentes es á la suma ó diferencia de consecuentes, como un antecedente á su respectivo consecuente, y la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á su diferencia.*

Sea la proporcion

$$a : b :: c : d$$

alternando los medios

$$a : c :: b : d$$

Aplicando á esta proporcion los teoremas V y VI darán

$$a + c : b + d :: a : b, \quad \text{ó} \quad :: c : d$$

$$a - c : b - d :: a : b \quad \text{ó} \quad :: c : d$$

de donde

$$a + c : a - c :: b + d : b - d \quad \text{luego etc.}$$

VIII *En una série de razones iguales, la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la série de razones

$$a : b :: c : d :: e : f :: g : h$$

ó bien

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

Si suponemos $\frac{a}{b} = q$, todas las demás fracciones serán iguales á q, pues todas son iguales á $\frac{a}{b}$; se tendrá

$$\frac{a}{b} = q, \frac{c}{d} = q, \frac{e}{f} = q, \frac{g}{h} = q$$

ó $$a = bq;\ c = dq;\ e = fq;\ g = hq$$

Sumando ordenadamente, esto es, miembro á miembro, será

$$a + e + e + g = (b + d + f + h)\,q$$

de donde

$$q = \frac{a + c + e + g}{b + d + f + h}$$

y como q es igual à cualquiera de las fracciones, será

$$\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = \frac{a}{b}$$

ó $$a + c + e + g : b + d + f + h :: a : b$$ luego &c.

IX *En toda proporcion la suma ó diferencia del primer antecedente y de su consecuente es al mismo antecedente ó consecuente, como la suma ó diferencia del segundo antecedente y* *su consecuente es al mismo antecedente ó consecuente.*

Sea la proporcion

$$a : b :: c : d$$

alternando los medios

$$a : c :: b : d$$

Aplicando á esta proporcion el teorema VII, se tiene

$$a \pm b : c \pm d :: a : c \text{ ó } :: b : d$$

y alternando los medios

$$a \pm b : a :: c \pm d : c \quad \text{luego \&c.}$$

$$a \pm b : b :: c \pm d : d$$

En este teorema se fundan los medios de comparacion llamados, *comparar componiendo* y *comparar dividieudo.*

Comparar componiendo es comparar la suma de antecedente y consecuente de cada razon al mismo antecedente ó al mismo consecuente.

Comparar dividiendo es comparar la diferencia de antecedente y consecuente de cada razon al mismo antecedente ó al mismo consecuente.

Progresiones.

Se llama *progresion* á una série de términos que, de uno en otro y sin intermision, van creciendo ó disminuyendo formando una série de proporciones contínuas.

El *primer término* de una progresion es el que está mas á la izquierda, y *último* el que está mas á la derecha.

La progresion se dice que es *ascendente* cuando sus términos van aumentando desde el primero al último; y *descendente*, cuando van disminuyendo en el mismo sentido.

La progresion puede ser *aritmética* ó *por diferencia*, y *geométrica* ó *por cuociente*.

Progresion aritmética.

Llámase progresion *aritmética* ó *por diferencia* una série de términos tales, que entre cada dos consecutivos haya una misma diferencia: esto es, una série de términos que, de uno en otro y sin intermision, van creciendo ó disminuyendo en una cantidad constante, llamada, *diferencia*, *razon* ó *exponente de la progresion*.

Tales son las siguientes:

$$\div\ 1^{3} . 4 . 7 . 10 . 13 . 16$$

$$\div\ 16^{-3} . 13 . 10 . 7 . 4 . 1$$

que se leen respectivamente 1 á 4 á 7 &c.; 16 á 13 á 10 &c.

Para formar una progresion aritmética cuando se conoce el primer término y la razon, se suma al primer término la razon, y se obtiene el segundo; al segundo se le suma la razon y dá el tercero, y así sucesivamente.

La razon ó esponente de una progresion aritmética se halla restando de un término cualquiera el que le procede inmediatamente; si la diferencia es positiva, la progresion es ascendente; y si es negativa será descendente.

Toda progresion aritmética puede continuar sin límite ascendiendo hasta una cantidad infinitamente grande positiva, y descendiendo hasta una cantidad infinitamente grande negativa.

Es evidente que toda progresion aritmética ascendente se convierte en descendente, ó al contrario, con solo considerar al primer término como último, y á este como primero; y tambien con solo cambiar el signo de la razon.

Teoremas fundamentales de las progresiones aritméticas.

I *Un término cualquiera de una progresion aritmética es igual al primero mas tantas veces la razon como términos haya antes de él; ó como términos tenga la progresion menos uno.*

Demostracion.—Sea la progresion aritmética

$$\div a . b . c . f \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; p . q . r . u$$

Si suponemos que d es la razon constante entre cada dos términos consecutivos, y que n es el número de términos de la progresion, tendremos las $(n-1)$ ecuaciones de los $(n-1)$

términos de la progresion, pues el primer término se supone dado, tales como siguen:

$$b = a + d$$
$$c = b + d$$
$$f = c + d$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$q = p + d$$
$$r = q + d$$
$$u = r + d$$

Sumando estas ecuaciones miembro á miembro, y término á término, tendremos

$$b+c+f+\ldots+q+r+u=a+b+c+\ldots+p+q+r+(n-1)d$$

y como todos los términos de la progresion, menos el primero y el último, son comunes á ambos miembros, podrán suprimirse sin que por esto se altere la ecuacion, y será

$$u = a + (n-1)\,d \qquad (1)$$

espresion que representa el *término general* de la progresion, y sirve para hallar cualquier término de una progresion aritmética, sin necesidad de calcular todos los intermedios.

II *En toda progresion aritmética la suma de los términos estremos es igual á la de otros dos cualesquiera equidistantes de los estremos; y si los términos de la progresion es impar la suma de los estremos es igual al duplo del término medio.*

Sea la progresion aritmética

$$\div\, a \, . \; . \; . \; . \; p \, . \; . \; . \; . \; q \, . \; . \; . \; . \; u$$

en la cual a y u son los términos extremos; p y q dos términos de la progresion equidistantes de los estremos; esto es, que antes de p haya $n-1$ términos, incluso el primero a, y despues de q haya tambien $n-1$ términos, incluso el último u.

Si consideramos la progresion desde a hasta p, segun el teorema anterior tendremos

$$p = a + (n-1)d$$

y considerando la progresion desde q hasta u,

$$u = q + (n-1)d$$

Restando estas dos ecuaciones resultará la equidiferencia

$$p - u = a - q$$

y cambiando de miembros á u y q,

$$p + q = a + u$$

lo que demuestra la primera parte.

Si el número de términos de la progresion es impar, la podemos representar como sigue, y bajo las mismas condiciones que en la anterior

$$\div a \;.\;.\;.\;.\; p \;.\;.\;.\;.\; u$$

considerando la progresion desde a hasta p, se tendrá

$$p = a + (n - 1)d$$

y considerando la progresion desde p hasta u, será

$$u = p + (n - 1)d$$

restando las dos ecuaciones

$$p - u = a - p$$

ó $$p + p = 2p = a + u$$

Con lo que queda demostrada la segunda parte del teorema.

III. *La suma de todos los términos de una progresion aritmética es igual á la suma de los estremos multiplicada por la mitad del número de términos.*

Demostracion.—Sea la progresion

$$\div a . b . c . \;.\;.\;.\;.\; q . r . u$$

Si sumamos todos sus términos y llamamos S á esta suma, se tendrá

$$S = a + b + c + \; . \; . \; . \; . \; + q + r + u$$

y escribiendo esta suma en órden inverso, será

$$S = u + r + q + \; . \; . \; . \; . \; + c + b + a$$

Sumando estas dos ecuaciones miembro á miembro, y término á término, será

$$2S = (a+u) + (b+r) + (c+q) + \ldots + (q+c) + (r+b) + (a+u)$$

Cada término de esta ecuacion representa la suma de los estremos de la progresion propuesta ó la de dos términos equidistantes; y como, segun se ha demostrado, son estas sumas iguales á la suma de los estremos, el segundo miembro es equivalente á tantas veces la suma de los estremos $(a + u)$ como términos hay en la progresion que es n; por tanto

$$2S = (a + u)\, n$$

y $$S = (a + u)\, \frac{n}{2} \qquad (2)$$

espresion del término *sumatorio* de una progresion aritmética, en funciòn del primer término, a, el último u, y el número de términos de la progresion, n.

Si en la ecuacion (2) sustituimos por u la espresion (1) se tiene

$$S=[a+a+(n-1)d]\frac{n}{2}$$

$$=an+\tfrac{1}{2}n(n-1)d \qquad (3)$$

fórmula que dá tambien la suma de todos los términos de una progresion aritmética en funcion del primer término a, del número de términos n y de la razon d.

Si en la ecuacion (3) despejamos á n, se hallará

$$S=an+\tfrac{1}{2}dn^2-\tfrac{1}{2}nd$$

ó
$$n^2+\left(\frac{2a}{d}-1\right)n-\frac{2S}{d}=0$$

y
$$n=\left(\tfrac{1}{2}-\frac{a}{d}\right)\pm\sqrt{\left\{\left(\tfrac{1}{2}-\frac{a}{d}\right)^2+\frac{2S}{d}\right\}} \qquad (4)$$

fórmula que dá el número de términos de una progresion aritmética en funcion del primer término a, de la razon d y de la suma S de todos los términos de la progresion.

Interpolacion.

Se llama *interpolacion* ó *intercalacion*, á una operacion que tiene por objeto introducir entre dos números dados un número cualquiera de términos, de modo que entre todos formen una progresion.

Interpolar ó *intercalar* un número p de medios aritméticos entre dos números a y u, es formar una progresion aritmética cuyos estremos sean a y u, y entre los cuales haya p términos en progresion aritmética. Supuesto que se conoce el primer término a de la progresion, solo falta conocer la razon d, que, sumada con el primer término daria el segundo, sumada al segundo daria el tercero, y así sucesivamente hasta llegar al último u.

Para determinar á d, bastará despejarla en la ecuacion (1), lo que nos dará

$$d = \frac{u - a}{n - 1} \qquad (5)$$

y como el número de términos n de qne ha de constar la progresion, será el número de términos p que se han de interpolar, mas el primero y último que se dan conocidos, será

$$n = p + 2$$

que sustituido en la ecuacion (5), dará

$$d = \frac{u - a}{p + 1} \qquad (6)$$

fórmula que nos dá la razon de la progresion en funcion del primer término, último y número de términos que se han de interpolar; de donde se infiere; que *para hallar la razon se resta del último término el primero, y el resíduo se parte por el número de términos que se han de interpolar mas uno.*

Así pues, conocidos tres de los cinco elementos que constituyen una progresion aritmética, á saber; el primer término, el último, la razon, el número de términos, y la suma de todos ellos, se pueden hallar los otros dos; porque constituyéndose con estos cinco elementos las dos ecuaciones fundamentales (1) y (2) el poblema será determinado, pues habrá tantas ecuaciones como incógnitas.

Problemas sobre las progresiones aritmeticas.

1.° Hallar el octavo término de la progresion cuyo primer término sea 5 y la razon 3.

Resolucion, $t_{(8)} = 26$.

2.° Hallar la suma de los 20 primeros términos de la progresion, cuyo primer término es 1 y la razon 2.

Resolucion, $S = 400$.

3.° Hayar el número de términos de una progresion cuyo primer término es 11, la razon -2, y la suma de todos sus términos es 32.

Resolucion, $n = 8$.

4.° Interpolar cinco medios aritméticos entre 7 y 10.

Resolucion, $d = 0,5$ y la progresion será

$$\div 7 . 7,5 . 8 . 8,5 . 9 . 9,5 . 10$$

Progresiones geométricas ó por cuociente.

218 Progresion geométrica ó por cuociente, es una série de términos tales, que entre cada dos consecutivos haya una misma razon geométrica; ó bien es una série de términos cada uno de los cuales contiene al que le precede ó está contenido en él un mismo número de veces — Este número de veces se llama *razon* ó esponente de la progresion

Tales son ∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 &c.

∺48 : 24 : 12 : 6 : 3: &c.

219 Para formar una progresion geométrica cuando se conoce el primer término y la razon, se multiplica el primer término por la razon y se obtiene el segundo: se multiplica este por la razon y se tiene el tercero, y asi sucesivamente.

220 La razon ó esponente de una progresion geométrica se halla dividiendo un término cualquiera por el que le precede inmediatamente; si la razon es mayor que la unidad la progresion será *ascendente*; y *descendente* si fuere menor que la unidad.

221 Toda progresion geométrica puede continuar sin límites ascendiendo hasta una cantidad infinitamente grande, y descendiendo hasta una cantidad infinitamente pequeña.

222 Es evidente que toda progresion geométrica ascendente se convierte en descendente con solo considerar el último término como primero; y tambien con solo cambiar la razon en un

quebrado cuyo numerador sea la unidad y cuyo denominador sea el esponente de la progresion ascendente.

223 Teoremas fundamentales de las progresiones geométricas.

I *Un término cualquiera de una progresion geométrica es igual al primero multiplicado por la razon elevada á la potencia indicada por el número de términos, que le preceden ó como términos tenga la progresion menos uno.*

Demostracion.—Sea la progresion geométrica

$$\div\, a : b : c : \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\; p : x : u$$

Si suponemos que q es la razon constante entre cada dos términos consecutivos, y que n es el número de términos de la progresion, tendremos las $(n-1)$ ecuaciones de los $(n-1)$ términos de la progresion, escepto la del primero que se supone conocido; y será

$$b = aq$$

$$c = bq$$

$$.\;\;.\;\;.$$

$$.\;\;.\;\;.$$

$$r = pq$$

$$u = rq$$

multiplicando estas ecuaciones miembro á miembro, y observando que q entra $(n-1)$ veces como factor, tendremos;

$$b.c. \quad . \quad . \quad . \quad r.u = a.b. \quad . \quad . \quad . \quad p.r.q^{n-1}$$

y como todos los términos de la progresion menos el primero y último son factores comunes á ambos miembros, pueden suprimirse sin que se altere la igualdad, y será

$$u = aq^{n-1} \qquad (1)$$

espresion que representa el *término general* de la progresion geométrica, y sirve para hallar un término cualquiera de ella, sin necesidad de calcular todos los intermedios.

II *En toda progresion geométrica el producto de los estremos es igual al de dos términos cualesquiera equidistantes de los estremos, si el número de términos de la progresion es par; y si fuere impar, el producto de los estremos es igual al cuadrado del término medio.*

Demostracion. — Sea la progresion geométrica

$$\div a : \quad . \quad . \quad . \quad p : \quad . \quad . \quad . \quad r : \quad . \quad . \quad . \quad u$$

en la cual a y u son los términos estremos; p y r, dos términos de la progresion equidistantes de los estremos: esto es, que antes de p haya $(n-1)$ términos, incluso el primero a; y despues de r haya tambien $(n-1)$ términos, incluso el último u.

Si consideramos la progresion desde a hasta p, tendremos según el teorema anterior,

$$p = aq^{n-1}$$

y considerando la progresion desde r hasta u, será

$$u = rq^{n-1}$$

partiendo estas ecuaciones, se tendrá

$$\frac{p}{u} = \frac{a}{r}$$

de donde

$$a.u = p.r$$

lo que demuestra la primera parte.

Haciendo las mismas consideraciones en la progresion siguiente:

$$\div\!\div a : \ . \ . \ . \ p : \ . \ . \ . \ u$$

se tiene

$$p = a.\ q^{n-1}$$

$$u = p.\ q^{n-1}$$

y partiendo

$$\frac{p}{u} = \frac{a}{p}$$

de donde

$$a.\ u = p^2$$

con lo que queda demostrada la segunda.

III *La suma de todos los términos de una progresion geométrica es igual al último término multiplicado por la razon menos el primero, dividido por la razon menos la unidad.*

Demostracion.—Sea la progresion geométrica

$$\div a : b : c : \quad . \quad . \quad . \quad : p : r : u$$

designando por S la suma de todos sus términos, será

$$S = a + b + c + \quad . \quad . \quad . \quad + p + r + u$$

multiplicando por q los dos miembros de esta ecuacion, y teniendo presente que cada término multiplicado por la razon dá el siguiente, resultará

$$Sq = b + c + d \quad . \quad . \quad . \quad + r + u + uq$$

y restando ordenadamente estas ecuaciones y simplificando será

$$Sq - S = uq - a$$

de donde

$$S = \frac{uq - a}{q - 1} \qquad (2)$$

espresion del *término sumatorio* de una progresion geométrica en funcion del primer término, el último y la razon.

Si en la ecuacion (2) sustituimos por u su valor (1) tendremos;

$$S = \frac{aq^n - a}{q-1}$$

ó $$S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \qquad (3)$$

espresion del *término sumatorio* en funcion del primer término, la razon y el número de términos de la progresion.

Si la espresion de S (3) se quisiera deducir directamente, procederíamos como sigue.

Sea la progresion geométrica, en funcion del primer término y la razon

$$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \quad . \quad . \quad . \quad aq^{n-3} : aq^{n-2} : aq^{n-1}$$

Llamando S á la suma de sus términos, será

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \,.\,.\, + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

ó $S = a(1 + q + q^2 + q^3 + \,.\,.\,.\,.\, + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$

el factor que está dentro del parentesis es igual á (49. Consec. 2.ª)

$$\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

luego sustituyendo, será,

$$S = a \,.\, \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (4)$$

que era lo que se pedia.

La ecuacion anterior (4) puede escribirse como sigue

$$S = \frac{a\,q^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}$$

Si la progresion geométrica es descendente, la razon q será una fraccion propia, y por tanto menor que la unidad; q tendrá la forma $\frac{1}{d}$, y q^n la forma $\frac{1}{d^n}$.

A medida que aumenta el número de términos de la progresion, aumenta n, y q^n ó su igual $\frac{1}{d^n}$ disminuye; cuando el número de los términos sea infinito, será

$$n = \infty\,;\, q^\infty = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0:$$

y la espresion anterior se convertirá en

$$S = -\frac{a}{q-1} = \frac{a}{1-q},$$

fórmula que dá el valor de la suma de los términos de una progresion descendente, cuando es infinito el número de términos.

IV *El producto de todos los terminos de una progresion geometrica, es igual á la raiz cuadrada del producto de los estremos elevado á la potencia indicada por el número de los terminos.*

Demostracion. – Sea la progresion geométrica

$$\div a : b : c : d \quad . \quad . \quad . \quad : p : r : s : u$$

Tendremos llamando P al producto de los n términos de la progresion,

$$P = a \times b \times c \times d \times \quad . \quad . \quad . \quad \times p \times r \times s \times u$$

y escribiendo este producto invertido, será

$$P = u \times s \times r \times p \times \quad . \quad . \quad . \quad \times d \times c \times b \times a$$

Multiplicando estas dos ecuaciones ordenadamente, será

$$P^2 = \left\{ \begin{array}{c} (a \times u) . (b \times s) . (c \times r) . (p \times d) . . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (p \times d) . (c \times r) . (b \times s) . (a \times u) \end{array} \right\} \quad (x)$$

Este segundo miembro, es un producto que consta de n factores, iguales todos á $(a \times u)$, porque todos son productos de términos equidistantes de los estremos; luego, $(a \times u)$ entra n veces como factor, y el segundo miembro será por consiguiente igual á $(a \times u)^n$; sustituyéndolo, pues, en la ecuacion (x) será

$$P^2 = (a \times u)^n$$

y

$$P = \sqrt{(a . u)^n} \quad (5)$$

Interpolacion.

224 *Interpolar ó intercalar* un número p de medios geométricos entre dos números a y u es formar una progresion geométrica, cuyos estremos sean a y u, y entre los cuales haya p términos en progresion geométrica.

Suponiendo conocido el primer término de la progresion a, solo falta conocer la razon q, que, multiplicada por el primer término dará el segundo, multiplicado este por la razon dará el tercero, y asi sucesivamente hasta llegar al último n.

Para determinar á q, bastará despejarla en la ecuacion (1), y tendremos

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} \qquad (6)$$

y como el número de términos de la progresion menos uno, es igual al número de términos que se han de interpolar mas uno, será

$$n - 1 = p + 1$$

y la ecuacion (6) será

$$q = \sqrt[p+1]{\frac{u}{a}} \qquad (7)$$

fórmula que nos dá la razon de la progresion en funcion del primer término, último y número de términos que se han de interpolar; de donde se deduce; que, *para hallar la razon* *se parte el último término por el primero y al cuociente se le estrae la raiz del grado que indique el número de términos que se hayan de interpolar mas uno.*

225 Así pues, conocidos tres de los cinco elementos que constituyen una progresion geométrica, á saber; el primer término, el último, la razon, el número de términos y la suma de todos ellos, se pueden hallar los otros dos: porque constituyéndose con estos cinco elementos las dos ecuaciones fundamentales (1) y (2) el problema será determinado.

226 Problemas sobre las progresiones geométricas.

1.° Hallar el octavo término de la progresion por cuociente cuyo primer término es 3 y la razon 4.

2.° Hallar la suma de los ocho términos de la progresion anterior.

3.° Hallar la suma de todos los términos de la progresion geométrica descendente é ilimitada,

$$\div \frac{1}{4} : \frac{1}{4^2} : \frac{1}{4^3} : \frac{1}{4^4} : \quad \text{etc.}$$

Resolucion, $S = \frac{1}{3}$.

4.° Hallar la suma de todos los términos de la progresion geométrica descendente é ilimitada,

$$\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2^2} : \frac{1}{2^3} : \frac{1}{2^4} : \quad \text{etc.}$$

Resolucion, $S = 2$.

5.° Interpolar *cinco* medios geométricos entre 2 y 1458.

Logaritmos.

227 *Logaritmos* son unos números en progresion aritmética que corresponden, término á término, á otros términos en progresion geométrica, pero siempre con la condicion que el primer término de la progresion geométrica sea 1, y el de la aritmética sea *cero*.

Los términos de la progresion geométrica son los *números*, y los correspondientes de la progresion aritmética son los *logaritmos* de dichos números.

Si tenemos dos progresiones, una geométrica y otra aritmética, á saber:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Progresion geométrica ó de los números.} \\ \div\!\!\div\, 1' : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 \text{ etc.} \\ \textit{Progresion aritmética ó de los logaritmos.} \\ \div\ 0.'\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6. \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad (1)$$

estas dos progresiones constituyen un *sistema* de logaritmos. En este sistema, el logaritmo de 3 es 1; el de 9 es 2; el de 27 es 3, etc. lo cual se espresa así, log. $3 = 1$; log. $9 = 2$; etc.

228 Se llama *base* de un sistema de logaritmos al número cuyo logaritmo es la unidad; esto es, al término de la progresion geométrica que corresponde al término 1 de la progresion aritmética.

En el sistema de logaritmos expresado por las dos progresiones (1), la base del sistema es 3, que es tambien el número que ha servido de razon para formar la progresion geométrica.

229 Es evidente que puede haber infinitos sistemas de logaritmos, porque son infinitos los números que se pueden elegir para base ó razon de la progresion geométrica; asi es que un mismo logaritmo corresponde á varios números en diversos sistemas, y á un mismo número corresponden distintos logaritmos en diferentes sistemas.

Por ejemplo; si se toma por base de un sistema de logaritmos el número 9, tendremos:

Progresion geométrica ó de los números.

$$\div\div\ 1 : 9 : 81 : 729 : \text{etc.}$$

Progresion aritmética ó de los logaritmos.

$$\div\ 0 .\ 1 .\ 2 .\ 3 .\ \text{etc.}$$

En este sistema, 2 es el logaritmo de 81; y en el sistema anterior 2 es el logaritmo de 9. En el segundo sistema el logaritmo de 729 es 3; y en el primer sistema el logaritmo de 729 es 6.

230 Para distinguir uno de otro, varios sistemas de logaritmos, basta expresar la *base* de cada uno de ellos; esto es, el número que, en cada sistema, tiene por logaritmo la unidad.

231 La base, como que es arbitraria, puede ser entera, frac-

cionaria, incomensurable; en una palabra, puede ser la cantidad que se quiera: pero en todo sistema de logaritmos, *el logaritmo de la unidad es siempre cero, y el de la base uno*, como se deduce de la simple inspeccion de las progresiones.

232 Las progresiones fundamentales de un sistema de logaritmos no dan mas que los logaritmos de los términos que constituyen la progresion geométrica; y para hallar los logaritmos de todos los números, se intercala entre cada dos términos de la progresion geométrica un medio geométrico ó por cuociente, y entre cada dos términos de la progresion aritmética un medio aritmético ó por diferencia; repitiendo la misma operacion con las progresiones que resulten, se llegará al fin á una progresion geométrica en que se encontrarán todos los números enteros ó exactamente ó con toda la aproximacion que se quiera, y á una progresion aritmética cuyos términos serán los logaritmos de los términos correspondientes de la geométrica.

Si de la progresion geométrica se toman todos los números enteros y se escriben en una columna, y de la progresion aritmética se toman los términos correspondientes y se escriben en otra, resultará formada una tabla de logaritmo de los números enteros en el sistema representado por las dos progresiones fundamentales.

233 Como la interpolacion necesaria para obtener los logaritmos de todos los números enteros produce, en general, números mistos cuya parte fraccionaria se espresa en decimales, se puede decir, en general, que *todo logaritmo consta de una parte entera que se llama* CARACTERÍSTICA, *y de una fraccion decimal que se llama* MANTISA.

116 Las dos progresiones (1), á saber,

$$\because\!\because 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : \text{etc.}$$

$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . \text{etc.}$$

pueden escribirse como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} \because\!\because 1^0 : 3^1 : 3^2 : 3^3 : 3^4 : 3^5 : 3^6 : 3^7 : \text{etc.} \\ \div\ 0^1 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . \text{etc.} \end{array}\right\}$$

y bajo esta forma nos dan una segunda definicion de los logaritmos, á saber: *el logaritmo de un número es el esponente de la potencia á que es preciso elevar la base para producir dicho número.*

En efecto; se tiene evidentemente, tomando un término cualquiera v. g. 3^5,

$$\left.\begin{array}{r} 3^5 = 243 \\ 5 = \log. 243 \end{array}\right\},$$

de donde se deduce

$$3^{\log. 243} = 243;$$

y como esto mismo se verifica en cualesquiera términos correspondientes de las progresiones, resulta que si designamos con b la base de un sistema de logaritmos, con n un número y con x el logaritmo de este número ó *log. n*, se tendrá

$$b^x = n$$

ó

$$b^{\log. n.} = n;$$

ecuacion que nos dará todas las propiedades de los logaritmos, como lo vamos á ver.

234 Discusion de la ecuacion esponencial.

$$b^x = n \quad ó \quad b^{\log. n} = n.$$

Tomemos la ecuacion exponencial

$$b^x = n;$$

y tendremos

1.° Si damos á x los valores 0, 1, 2, 3, etc., en progresion aritmética, resultarán para n los siguientes en progresion geométrica

$$1, \; b, \; b^2, \; b^3, \; b^4, \; \text{etc.}$$

Esta progresion geométrica es la série de los números, y los valores de x la de los logaritmos de estos números.

2.° En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la unidad es *cero*, y el de la base es *uno*: en efecto; cualquiera que sea b, si es $x = 0$, resulta $n = 1$; esto es, $log.\ 1 = 0$: y si es $x = 1$, resulta $n = b$, esto es, $log.\ b = 1$.

3.° Si la base b es > 1, los logaritmos de los números mayores que 1 serán positivos; y los de los números menores que 1 serán negativos: en efecto; si hacemos

$$\text{resultará} \quad \left.\begin{array}{l} x = 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \; \text{etc.} \\ \\ n = 1, \; b, \; b^2, \; b^6, \; b^4, \; \text{etc.} \end{array}\right\} ;$$

y si hacemos

$$\left.\begin{array}{l} x = -1, -2, -3, -4, \text{ etc.} \\ \text{resultará} \\ n = \frac{1}{b}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{b^4} \text{ etc.} \end{array}\right\}.$$

4.° Si la base b es < 1 pero positiva, los logaritmos de los números mayores que 1 serán *negativos*, y los de los números menores que 1 serán *positivos*: en efecto, si $b < 1$, podemos representar á b por una fraccion $\frac{1}{b'}$, y será

$$b^x = \frac{1}{b'^x}$$

$$\frac{1}{b'^x} = n.$$

Si en esta ecuacion hacemos

$$\left.\begin{array}{l} x = 0, 1, 2, 3, 4, \text{ etc.} \\ \text{resultará} \\ n = 1, \frac{1}{b'}, \frac{1}{b'^2}, \frac{1}{b'^3}, \frac{1}{b'^4} \text{ etc.} \\ \text{ó } n = 1\ b, b^2, b^3, b^4, \text{ etc.} \end{array}\right\}$$

y si hacemos

$$x = -1, -2, -3, -4, \text{ etc.}$$

resultará

$$n = b', \quad b'^2, \quad b'^3, \quad b'^4, \quad \text{etc.}$$

ú

$$n = \frac{1}{b}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{b^4}, \quad \text{etc.}$$

5.° Si la base b es positiva, las cantidades negativas no tienen logaritmo; porque cualquiera que sea el valor que se dé á x, ya sea positivo, ya sea negativo, jamás resultará un valor negativo para n en la cuacion $b^x = n$.

6.° Si la base b es negativa, las cantidades positivas tendrán logaritmos pares, y las cantidades negativas logaritmos impares; en efecto, si b es negativa, podemos representar á b por la cantidad $(-p)$; y la ecuacion

$$b^x = n$$

se convertirá en

$$(-p)^x = n.$$

La simple inspeccion de esta ecuacion nos hace ver que con valores pares de x obtendremos resultados positivos para n; y con valores impares de x obtendremos resultados negativos para n.

7.° Si $b = 1$, resulta $n = 1$ con cualquiera valor de x.

235 Propiedades de los logaritmos.

Teoremas.

I *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Sean m y n dos números cualesquiera; b la base de un sistema de logaritmos; y *log. m*, *log. n* los logaritmos de m y de n en el sistema cuya base es b; se tendrá, en virtud de lo dicho,

$$\left.\begin{array}{l} m = b^{\log. m} \\ n = b^{\log. n} \end{array}\right\} \quad (A).$$

Multiplicando estas dos ecuaciones; se tiene

$$m.\,n = b^{\log. m + \log. n};$$

y por la segunda definicion de los logaritmos,

$$\log.\, m.\, n = \log.\, m + \log.\, n.$$

II *El logaritmo de un cuociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Si dividimos la primera de las ecuaciones (A) por la segunda tendremos

$$\frac{m}{n} = b^{\log. m - \log. n};$$

y por la segunda definicion de los logaritmos,

$$\log.\, \frac{m}{n} = \log.\, m - \log.\, n$$

III *El logaritmo de una potencia es igual al esponente* *de la potencia multiplicada por el logaritmo del número que se eleva.*

Si elevamos á la potencia p una cualquiera de las ecuaciones (A) v. g. la primera, resulta

$$m^{p} = b^{p.\log.m};$$

y por la segunda definicion de los logaritmos,

$$\log.\ m^{p} = p.\log.m.$$

IV. *El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividida por el índice de la raiz.*

Si estraemos la raiz del grado r de una cualquiera de las ecuaciones (A), v. g. de la primera, resulta

$$\sqrt[r]{m} = b^{\frac{\log.m}{r}};$$

y por la segunda definicion de los logaritmos,

$$\log.\sqrt[r]{m} = \frac{\log.\ m}{r}.$$

236 De los teoremas que se acaban de demostrar se deduce que los logaritmos simplifican mucho los cálculos; pues reducen la multiplicacion á suma, la division á resta, la elevacion á potencia á multiplicacion, y la estraccion de raiz á division.

Neper, gran geómetra escocés, fué el inventor de los logaritmos.

Sistema de logaritmos vulgares ó tabulares.

237 Para sacar de la invencion de los logaritmos toda la utilidad posible, el matemático Briggs adoptó por base de un sistema de logaritmos el número 10, que es la base de nuestro sistema de numeracion; y á estos logaritmos se ha dado el nombre de *logaritmos vulgares*, *logaritmos de Briggs* ó *logaritmos tabulares*, porque son los contenidos en las tablas usuales de logaritmos.

Las dos progresiones fundamentales del sistema de logaritmos tabulares ó de Briggs, son

$$\because 1^{10} : 10 : 100 : 1000 : 10{,}000 : \text{etc.}$$

$$\div\ 0' : 1 : 2 : 3 : 4 : \text{etc.}$$

En este sistema, como en todos, el logaritmo de la unidad es *cero*, y el de la base es *uno*.—Además, los logaritmos son los exponentes de la potencia á que se eleva la base para producir el número; de modo que, para un número cualquiera, v. g. 100, se tiene

$$10^{\log. 100} = 100.$$

Las dos progresiones precedentes que determinan el sistema de logaritmos tabulares ó de Briggs, dan solamente los logaritmos de los números que son potencias sucesivas de 10; para obtener los logaritmos de todos los demas números enteros, se interpolan entre cada dos términos de la progresion geométrica muchos medios geométricos; y entre cada dos términos de la progresion aritmética el mismo número de medios aritméticos; de este modo aparecerán en la progresion geométrica todos los números naturales, y en la progresion aritmética sus correspondientes logaritmos. Si escribimos los primeros en una columna, y los segundos en otra, resultará formada una tabla de logaritmos como la de Callet.

238 Además de las propiedades fundamentales de los logaritmos, que son comunes á todos los sistemas, los logaritmos tabulares ó de Briggs tienen las siguientes, que se deducen fácilmente de la simple inspeccion de las progresiones.

1.ª El logaritmo de la unidad seguída de ceros tiene una característica igual á tantas unidades como ceros siguen á la unidad, y *cero* de mantisa.

2.ª El logaritmo de todo número mayor que 1, tiene una característica igual á tantas unidades menos una como cifras hay en los enteros.

3.ª El número correspondiente á un logaritmo positivo, tiene tantas cifras de enteros mas una como unidades tiene la característica.

4.ª Para multiplicar ó dividir un número por 10, 100, 1000, etc. basta sumar ó restar á la característica de su logaritmo 1, 2, 3 etc., unidades, porque el logaritmo de 10 es 1; el de 100 es 2; el de 1000 es 3 etc.

5.ª La mantisa del logaritmo de un número no varia aunque se agreguen ó se quiten ceros á la derecha del número, ni aunque el signo decimal se corra de derecha á izquierda ó de izquierda á derecha; porque esto equivale á multiplicar ó dividir el número por 10, 100, 1000, etc., y esta operacion no afecta mas que á la característica del logaritmo.

Uso de las tablas.

PROBLEMA I.

239 *Dado un número, hallar su logaritmo.*

Primer caso. Si el número es entero y está comprehendido en la tabla, póngase una característica que contenga tantas unidades menos una como cifras tenga el número; búsquese la mantisa en las tablas, y escríbase á la derecha de la característica.

Segundo caso. Si el número es entero y no está comprehendido en la tabla, póngase una característica que contenga tantas unidades menos una como cifras tenga el número; sepárense con un punto de la derecha á la izquierda del número tantas cifras cuantas sean bastantes para que las de la izquierda compongan un número contenido en la tabla: hállese la mantisa del número resultante á la izquierda, y la diferencia D entre esta mantisa y la del número siguiente, y fórmese una proporcion diciendo:

Si una unidad de diferencia en los números produce la diferencia D entre las mantisas de los logaritmos, las cifras separadas á la derecha, consideradas como decimales ¿qué diferencia x poducirán en el logaritmo?

El cuarto término de esta proporcion se suma á las últimas cifras de la mantisa que se tomó de las tablas, y el resultado será la mantisa del número dado.

El corto cálculo de esta proporcion se puede evitar haciendo uso de las tablas de partes proporcionales que traen las tablas de Callet.

Advertencia.—Téngase presente que siempre que en un cálculo se omita alguna cifra decimal de la derecha de un número, si la cifra omitida es 5 ó mayor que 5, se debe aumentar una unidad á la última cifra que se conserva.

Tercer caso. Si el número dado es mixto de entero y fraccion comun, se incorporan el entero y el quebrado, y se obtiene un quebrado impropio que puede considerarse como una division, y cuyo logaritmo se halla restando del logaritmo del numerador el logaritmo del denominador.

Cuarto caso. Si el número dado es mixto de entero y fraccion decimal, póngase la característica atendiendo solo á los enteros; y para hallar la mantisa, prescíndase del signo decimal del número, considerando á este como entero.

Quinto caso. Si el número dado es una fraccion comun propia, su logaritmo puede obtenerse bajo *tres* formas distintas; por ejemplo; se pide el logaritmo de la fraccion propia $\frac{3}{7}$.

Primera forma.

Como toda fraccion se puede considerar como una division cuyo dividendo es el numerador y cuyo divisor es el denominador, réstese del logaritmo del numerador el logaritmo del denominador; y como el sustraendo es mayor que el minuendo, el logaritmo resultante será negativo, y se usa poco. Tendrémos, pues,

$$\begin{array}{rl} \log.\ 3 & = 0{,}4771213 \\ -\log.\ 7 & = 0{,}8450980 \\ \hline \log.\ \frac{3}{7} & = -\ 0{,}3679767 \end{array}$$

Segunda forma.

Para hacer posible la sustraccion anterior evitando el logaritmo negativo, agréguense á la característica del logaritmo minuendo las unidades necesarias para que resulte mayor que el logaritmo sustraendo, y verifíquese la resta. El logaritmo resultante será el que se pide aumentado en las unidades que se agregaron á la caracteristica del logaritmo minuendo; y para obtener el logaritmo que se desea, será preciso anteponer al logaritmo obtenido el mismo número de unidades, precedido del signo *menos*; tendremos pues,

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ 3 = & 0{,}4771213 \\
-\ \log.\ 7 = & \underline{0{,}8450980} \\
\log.\ \frac{3}{7} = & -\ 1 + 0{,}6320233
\end{array}
$$

que tambien se escribe así

$$\bar{1}{,}6320233.$$

Tercera forma.

En vez de restar del logaritmo del numerador el logaritmo del denominador, súmese el logaritmo del numerador con el complemento aritmético del logaritmo del denominador y teniendo presente que el complemento aritmético de todo número va precedido de la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el número; tendremos

$$\begin{array}{rl} log.\ 3= & 0{,}4771213 \\ c.\ a.\ log.\ 7= & -10+9{,}1549020 \\ \hline log.\ \frac{3}{7}= & -10+9{,}6320233 \\ \hline \end{array}$$

Estos logaritmos se llaman *complementarios*, y son los que mas se usan.

Cuando la parte negativa de la característica es -10, se omite el anteponerla al logaritmo: en este caso, la característica del logaritmo resulta aumentada en 10 unidades. A los logaritmos expresados de este modo se les llama *logaritmos aumentados ó de característica aumentada*; y para distinguirlos de los logaritmos efectivos, se escribe el signo decimal hàcia la parte superior de la característica, del modo signiente.

$$log.\ \tfrac{3}{7}= 9'6320233.$$

Observacion.—Es fácil ver que para pasar del logaritmo de la segunda forma al de la tercera, basta sumar á las partes negativa y positiva de la caracterísca el número de unidades convenientes.

Sesto caso. Si el número es una fraccion decimal propia, su logaritmo puede obtenerse tambien bajo tres formas distintas; por ejemplo, se pide el logaritmo de la fraccion decimal propia 0,00275.

Primera forma.

Poniendo esta fraccion decimal en forma de fraccion comun, tendremos la fraccion $\frac{275}{100000}$, cuyo logaritmo se haya restando del logaritmo del numerador el logaritmo del denominador. El logaritmo que se obtenga será negativo y se usa poco; tendremos, pues,

$$\begin{array}{rl} log.\ 275 = & 2,4393327 \\ -\ log.\ 100000 = & -\ 5,0000000 \\ \hline log.\ \frac{275}{100000} = & -\ 2,5606673 \\ \hline \end{array}$$

Segunda forma.

Para hallar el logaritmo de una fraccion decimal propia, póngase una característica negativa que contenga tantas unidades mas una como ceros hay entre el signo decimal y la primera decimal significante; en seguida el signo *mas*, un *cero*, el signo decimal, y la mantisa correspondiente al número considerado como entero.

En efecto; supongamos que se pide el logaritmo de la fraccion decimal propia 0,00275.

Si multiplicamos y dividimos esta fraccion decimal por la unidad seguida de tantos ceros mas uno como ceros hay entre el signo decimal y la primera decimal significante, tendremos

$$0,00275 = \frac{2,75}{1000};$$

bajo esta forma se tiene

$$log.\ 0,00275 = log.\ 2,75 - log.\ 1000$$

$$= -3 + 0,4393327;$$

y como el mismo procedimiento es aplicable á toda fraccion decimal propia, cualquiera que sea el número de ceros que tenga entre el signo decimal y la primera decimal significante, resulta demostrada la regla.

Tercera forma.

«Para hallar el logaritmo de una fraccion decimal propia, póngase una característica negativa que contenga tantas decenas mas una como decenas justas de ceros haya entre el signo decimal y la primera decimal significante; el signo *mas*, una característica positiva igual á la diferencia entre el número de ceros que siguen al signo decimal y la característica negativa disminuida en una unidad; y la mantisa correspondiente al número dado considerado como entero.»

En efecto; el logaritmo de 0,00275 bajo la segunda forma es

$$log.\ 0,00275 = -3 + 0,4393327.$$

Agregando á las partes negativa y positiva de la característica *siete* unidades, número necesario para que la parte negativa conste de decenas justas, tendremos

$$log.\ 0,00275 = -10 + 7,439\,3327;$$

y como el mismo procedimiento es aplicable á todos los casos, resulta demostrada la regla.

Cuando la parte negativa de la característica es -10, se omite el anteponerla al logaritmo; el logaritmo aumentado que resulta lleva el signo decimal en la parte superior.

Advertencia.—Téngase presente:

1.° Que los logaritmos de los números enteros y de los números mixtos son positivos.

2.° Que los logaritmos de las fracciones propias comunes ó decimales son negativos, pero que pueden expresarse con características de la forma $-a+0$, ó bien $-10+b$, ó con característica aumentada.

3.° Que la última cifra de todo logaritmo es, en general, inexacta; y se puede decir que todo logaritmo tomado de las tablas tiene, en mas ó en menos, un error cuyo límite es media unidad de la última clase decimal.

Problema II.

240 *Dado un logaritmo hallar el número á que corresponde.*

Lo primero que debe hacerse si la característica tiene parte positiva y parte negativa, es hacer entre dichas partes la reduccion que indican los signos. Si el resultado es positivo, escríbase el logaritmo con la característica positiva, si el resultado es negativo, déjese el logaritmo tal como se ha dado, simplificándolo hasta traerlo á una de las formas

$$-a+0,\ .\ .\ .\ \text{ó}\ -10+b,$$

Hecho esto, veamos los distintos casos que pueden ocurrir.

Primer caso. Si la mantisa se halla exactamente en las tablas, escríbase el número que le corresponde.

Segundo caso. Si la mantisa no se halla exactamente en las tablas y se quiere un resultado aproximado, véase entre qué mantisa está comprehendida, y escríbase el número correspondiente á la mantisa de las tablas que difiere menos de la dada.

Tercer caso. Si la mantisa no se halla exactamente en las tablas, y se quiere un resultado exacto, hasta donde las tablas pueden darlo, véase entre qué mantisas está comprehendida; escríbase la próxima menor y el número que le corresponde; hállese la diferencia d entre dicha mantisa próxima menor y la dada, y tambien la diferencia D entre las dos mantisas de la tabla que comprenden á la dada. Despues de esto, fórmese la proporcion siguiente:

Si la diferencia D entre dos mantisas succesivas de la tabla produce una unidad en los números, la diferencia d entre la mantisa dada y la próxima menor ¿qué diferencia x producirá?

El cuarto término de esta proporcion, expresado en decimales, se une á la derecha del número correspondiente á la mantisa próxima menor.

En la reduccion á decimales del término x, se llevará la aproximacion á tantas cifras menos una como cifras tenga la diferencia tabular D, porque son las únicas que pueden mirarse como exactas.

El corto cálculo de esta proporcion puede evitarse haciendo uso de las tablas de partes proporcionales que traen las tablas de Callet.

Advertencia.—Si la mantisa del logaritmo dado es *cero*, el número correspondiente es la unidad.

Despues que se ha operado con la mantisa, atenderémos á la característica, observando las reglas siguientes que se demuestran con suma facilidad.

1.° Si la característica es positiva, el número ha de tener enteros. Sepárense á la izquierda del número hallado tantas cifras mas una cuantas unidades tenga la característica, y póngase el signo decimal á la derecha de las cifras separadas.

Si las cifras que se han de separar para enteros son mas que las de que consta el número hallado, se suplirán con ceros á la derecha las cifras que faltan. En este caso no se puede saber por las tablas el verdadero valor de las cifras que se han suplido con ceros.

2.° Si la característica es negativa, el número no tendrá enteros, porque debe ser menor que la unidad. Escríbanse á la izquierda del número hallado tantos ceros cuanta sea la diferencia entre la parte positiva de la característica y la parte negativa disminuida en una unidad; á la izquierda de estos ceros colóquese el signo decimal, y un cero en los enteros.

3.ª Si el logaritmo es aumentado, escríbanse á la izquierda del número tantos ceros como valga la diferencia á q de la característica; á la izquierda de estos ceros colóquese el signo decimal, y un cero en los enteros.

4.ª Si todo el logaritmo es negativo, el número debe ser menor que la unidad. Prescíndase del signo del logaritmo, y hállese el número correspondiente, que puesto por denominador de un quebrado cuyo numerador es la unidad, dará el número correspondiente al logaritmo negativo.

241 Advertencias generales.

1.ª Es conveniente, en la práctica, expresar los logaritmos de las fracciones de modo que la parte negativa de la característica sea 10 ó un múltiplo de 10.

2.ª Es muy conveniente operar con los logaritmos efectivos; si se sigue este consejo, se evitarán muchas equivocaciones.

3.ª Si el logaritmo final de una operacion tiene parte positiva y parte negativa en la característica, y ambas fuesen muy crecidas, conviene simplificarlas todo lo que se pueda, de modo que la parte negativa sea el menor múltiplo posible de 10.

4.ª Como para extraer la raiz de un número es preciso dividir el logaritmo del número por el índice de la raiz, si la característica del logaritmo tiene parte negativa y esta no es divisible exactamente por el índice de la raiz, resultará una característica fraccionaria. Para evitar las características fraccionarias, se agregan, antes de dividir por el índice de la raiz, á las partes negativa y positiva de la característica tantas unidades ó tantas decenas como sean necesarias para que el cuociente de la parte negativa de la característica por el índice del radical sea un número entero, ó el menor múltiplo posible de 10.

Si la parte negativa de la característica es -10, ó la característica es aumentada, basta agregar tantas decenas menos una como unidades tiene el índice del radical.

Ejemplos para ejercicio.

I. *Hallar el valor de x dado por la expresion*

$$x = a + b.$$

1.° Siendo

$$\left.\begin{array}{l} a = 0,007 \\ b = 0,0004. \end{array}\right\}$$

2.° Siendo

$$\left.\begin{array}{l} a = 0,000000000000075 \\ b = 0,0000000000000004 \end{array}\right\}.$$

II. *Hallar el valor de x dado por la expresion*

$$x = \frac{a}{b}$$

1.° Siendo

$$\left.\begin{aligned} a &= 0{,}000000075 \\ b &= 0{,}000004 \end{aligned}\right\}.$$

2.° Siendo

$$\left.\begin{aligned} a &= 0{,}00000000000075 \\ b &= 0{,}0000000000000004 \end{aligned}\right\}.$$

Háganse los cálculos directamente y por complementos.

III. *Hallar el valor de x dado por la expresion*

$$x = (0{,}00000004)^8.$$

IV. *Hallar el valor de x dado por la expresion*

$$x = \sqrt[8]{0{,}00000000000000075}.$$

V. *Hallar el valor de x dado por la expresion*

$$x = \frac{\sqrt[3]{52678{,}47}}{\sqrt[4]{923744{,}18}}$$

Resultado, $x = 1{,}209176$

VI. *Hallar el valor de x dado por la expresion*,

$$x = \frac{\sqrt[8]{0{,}00038474 \sqrt[3]{\dfrac{89748}{124723}}}}{\sqrt[4]{724674 \sqrt[3]{0{,}0006742375}}}$$

Resultando, $x = 0{,}0127860$.

VII. *Hallar el valor de x dado por la expresion*

$$x = \sqrt[187]{\left(\frac{829}{828}\right)^{361}}$$

Resultado, $x = 1,00278$.

VIII. *Hallar con toda la exactitud que dan las tablas el logaritmo de la fraccion decimal periódica* 0, [265].

Resolucion.—Hállese la fraccion comun correspondiente, y búsquese su logaritmo.

Módulo de un sistema de logaritmos.

Modo de pasar del logaritmo de un sistema al logaritmo de otro sistema.

242 **Teorema.** Si designamos con la indicacion $L_b.m$ al logaritmo de un número m tomado en el sistema cuya base es b; y con la indicacion $L_\beta.m$ al logaritmo del mismo número m en el sistema cuya base es β, digo que será

$$L_b.m = L_\beta.m.\frac{1}{L_\beta.b}.$$

En efecto; designando con b la base de un sistema de logaritmos, se tiene en virtud de la segunda definicion de estos

$$b^{L_b m} = m$$

Tomando los logaritmos de los dos miembros de esta ecuacion en un sistema cuya base sea β, tendremos

$$L_b.m \times L^\beta.\, b = L_\beta.m\,;$$

de donde se deduce

$$L_b.m = \frac{L_\beta.\,m}{L_\beta.\,b} = L_\beta.\,m \times \frac{1}{L_\beta.\,b} \qquad (B)$$

que era lo que se queria demostrar.

243 La ecuacion (B) nos dice que el logaritmo de un número m tomado en el sistema cuya base es b, es igual al logaritmo del mismo número m tomado en el sistema cuya base es β, dividido por el logaritmo de la base b tomado en el sistema cuya base es β.

244 El factor $\frac{1}{L\beta..b}$ que sirve para pasar del logaritmo del sisma cuya base es β el logaritmo del sistema cuya base es b, se llama *módulo del sistema de logaritmo cuya base es b*.

245 En virtud del teorema que se acaba de demostrar, es muy fácil hallar el logaritmo de un número en un sistema cuando se conoce el logaritmno del mismo número en otro sistema.

Supongamos, por ejemplo, que se tiene una tabla de logaritmos vulgares ó de Briggs cuya base es $\beta = 10$; en ella se halla

$$L_\beta.\,8 = 0{,}9030900.$$

Si queremos hallar el logaritmo del mismo número 8 en el sistema cuya base es $b = 2$, tendrémos en virtud de la ecuacion (B),

$$L_b.\,8 = \frac{L_\beta.\,8}{L_\beta.\,2} = \frac{0,\,9030900}{0,\,3010300} = 3.$$

Resolucion de las ecuaciones esponenciales.

246 Se llama *ecuacion exponencial* á toda ecuacion en que la incógnita entra como exponente.

247 Para resolver las ecuaciones exponenciales es preciso tomar los logaritmos de los dos miembros de la ecuacion, procediendo despues á despejar la incógnita.

Ejemplos.

1.° Despejar á x en la ecuacion

$$a^x = c.$$

Tomando los logaritmos de ambos miembros, se halla

$$x \times log.\, a = log.\, c$$

$$x = \frac{log.\, c}{log.\, a}.$$

2.° Despejar á x en la ecuacion

$$c^{mx} = a.\, b^{nx-}.$$

Tomando los logaritmos de ambos miembros, se halla

$$m\,x \times log.\,c = log.\,a + (n\,x - 1) \times log.\,b;$$

de donde se deduce

$$x = \frac{log.\,a - log.\,b}{m.\,log.\,c - n.\,log.\,b}$$

3.° Despejar á x en la ecuacion

$$b^{n - \frac{a}{x}} = c^{m\,x} \,.\, f^{x - p}\,.$$

Tomando los logaritmos de ambos miembros, se halla

$$\left(n - \frac{a}{x}\right).\,log.\,b = m\,x.\,log.\,c + (x - p)\,log.\,f.$$

Verificando las operaciones indicadas y despejando de quebrados, se halla

$$(m.log.c + log.f)\,x^2 - (p.log.f + n.\,log.\,b)\,x + a.\,log.\,b = 0;$$

ecuacion de segundo grado que se sabe resolver.

Problemas.

1.° Las espresiones del término general y del término sumatorio en una progresion aritmética son respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} t_n &= t_1 + (n-1)\,d \\ s &= \tfrac{1}{2}\,n\,(t_1 + t_n) \end{aligned}\right\} (C).$$

248 Como dos ecuaciones no pueden determinar mas que dos incógnitas, se sigue que por medio de las ecuaciones (C) se pueden determinar *dos* de las *cinco* cantidades que entran en ellas cuando se conozcan las otras *tres*. Las ecuaciones (C) resuelven, pues, el segundo problema:

«De estas *cinco* cosas; el primer término, el último, la razon, el número de términos y la suma de todos los términos de una progresion aritmética, dadas *tres*, determinar las otras *dos*.»

2.° Las espresiones del término general y del término sumatorio en una progresion geométrica son respectivamente

$$\left.\begin{aligned} t_n &= t_1 \cdot q^{n-1} \\ s &= \frac{t_n \cdot q - t_1}{q-1} \end{aligned}\right\} (D).$$

249 Como dos ecuaciones no pueden determinar mas que dos incógnitas, se sigue que por medio de las ecuaciones (D) se pueden determinar *dos* de las *cinco* cantidades que entran en ellas cuando se conozcan las otras *tres*. Las ecuaciones (D) resuelven, pues, el siguiente problema:

«De éstas cinco cosas: el primer término, el último, la razon, el número de términos y la suma de todos los términos de una progresion geométrica, dadas *tres*, determinar las otras *dos*.»

250 Propongámonos, como ejemplo, determinar, por medio de las ecuaciones (D), la razon q y el número de términos n de una progresion geométrica cuando se conocen el primer término t_1, el último t_n, y la suma s de todos los términos de la progresion.

La segunda ecuacion (D) dá desde luego,

$$q = \frac{s - t_1}{s - t_n}$$

ecuacion que determina la razon q.

Para determinar á n, la primera ecuacion (D) dá, tomando los logaritmos de ambos miembros,

$$(n - 1)\, log.\, q = log.\, t_n - log.\, t_1$$

$$n = 1 + \frac{log.\, t_n - log.\, t_1}{log.\, q.}$$

$$n = 1 + \frac{log.\, t_n - log.\, t_1}{log.\, (s - t_1) - log.\, (s - t_u)}$$

FIN DE LA PRIMERA PARTE.