ARITMÉTICA RAZONADA

Y

NOCIONES DE ÁLGEBRA

TRATADO TEORICO-PRÁCTICO-DEMOSTRADO

CON APLICACIÓN A LAS DIFERENTES CUESTIONES MERCANTILES

PARA USO

DE LAS ESCUELAS NORMALES Y DE LAS DE COMERCIO

POR

D. JOSÉ DALMÁU CARLES

Profesor Normal

Caballero de la Real Orden de Isabel la Católica
y de la Orden Civil de Alfonso XII, por méritos en la enseñanza

---

COMPRENDE, ADEMÁS DE LA TEORÍA INDISPENSABLE,
MÁS DE 5,000 EJERCICIOS Y PROBLEMAS ARITMÉTICOS, ALGEBRAICOS
Y GEOMÉTRICOS PARA EL CÁLCULO MENTAL Y ESCRITO

39.ª Edición, corregida y aumentada

POR

D. JOSÉ MARÍA DALMÁU CASADEMONT

DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

De texto por Real Orden de 11 de Febrero de 1897
Medalla de oro en la Exposición científica del «Palais du Travail» de París
de 1901 y en la de Santiago de 1909
Diploma de Honor en la Exposición Hispano-Francesa de Zaragoza de 1908
Gran premio con medalla de oro en la de la República del Ecuador de 1909, etc., etc.

LIBRO DEL ALUMNO

GRADO PROFESIONAL

BARCELONA	MADRID	GERONA
JUAN DARNÉ Sta. Ana, 21	PERLADO, PÁEZ Y C.ª, Arenal, 11 ANTONIO PÉREZ, Bolsa, 12	DALMÁU CARLES, PLA, S. A. Editores

ISLA DE CUBA: LIBRERÍAS DE HABANA Y MATANZAS
ECUADOR: JANER E HIJO.—GUAYAQUIL
1920

ARITMÉTICA RAZONADA

Y

NOCIONES DE ÁLGEBRA

TRATADO TEORICO-PRÁCTICO-DEMOSTRADO

CON APLICACIÓN Á LAS DIFERENTES CUESTIONES MERCANTILES

PARA USO

DE LAS ESCUELAS NORMALES Y DE LAS DE COMERCIO

POR

D. JOSÉ DALMÁU CARLES

Profesor Normal

Caballero de la Real Orden de Isabel la Católica

y de la Orden Civil de Alfonso XII, por méritos en la enseñanza

COMPRENDE, ADEMÁS DE LA TEORÍA INDISPENSABLE,

MÁS DE 5,000 EJERCICIOS Y PROBLEMAS ARITMÉTICOS, ALGEBRAICOS

Y GEOMÉTRICOS PARA EL CÁLCULO MENTAL Y ESCRITO

39.ª Edición, corregida y aumentada

POR

D. JOSÉ MARÍA DALMÁU CASADEMONT

DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

De texto por Real Orden de 11 de Febrero de 1897

Medalla de oro en la Exposición científica del «Palais du Travail» de París de 1901 y en la de Santiago de 1909

Diploma de Honor en la Exposición Hispano-Francesa de Zaragoza de 1908

Gran premio con medalla de oro en la de la República del Ecuador de 1909, etc., etc.

LIBRO DEL ALUMNO

GRADO PROFESIONAL

BARCELONA — Juan Darné — Sta. Ana, 21

MADRID — Perlado, Páez y C.ª, Arenal, 11 — Antonio Pérez, Bolsa, 12

GERONA — Dalmáu Carles, Pla, S. A. — Editores

ISLA DE CUBA: Librerías de Habana y Matanzas

ECUADOR: Janer e Hijo. — GUAYAQUIL

1920

J. DALMÁU CARLES

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Dalmáu Carles, Pla, S. A.

EDITORES

GERONA

ARITMÉTICA RAZONADA

Y

NOCIONES DE ÁLGEBRA

TRATADO TEORICO-PRÁCTICO-DEMOSTRADO

CON APLICACIÓN A LAS DIFERENTES CUESTIONES MERCANTILES
PARA USO
DE LAS ESCUELAS NORMALES Y DE LAS DE COMERCIO

POR

D. JOSÉ DALMÁU CARLES
Profesor Normal
Caballero de la Real Orden de Isabel la Católica
y de la Orden Civil de Alfonso XII, por méritos en la enseñanza

---

COMPRENDE, ADEMÁS DE LA TEORÍA INDISPENSABLE,
MÁS DE 5,000 EJERCICIOS Y PROBLEMAS ARITMÉTICOS, ALGEBRAICOS
Y GEOMÉTRICOS PARA EL CÁLCULO MENTAL Y ESCRITO

39.ª Edición, corregida y aumentada

POR

D. JOSÉ MARÍA DALMÁU CASADEMONT
DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

De texto por Real Orden de 11 de Febrero de 1897
Medalla de oro en la Exposición científica del «Palais du Travail» de París de 1901 y en la de Santiago de 1909
Diploma de Honor en la Exposición Hispano-Francesa de Zaragoza de 1908
Gran premio con medalla de oro en la de la República del Ecuador de 1909, etc., etc.

LIBRO DEL ALUMNO

GRADO PROFESIONAL

BARCELONA
JUAN DARNÉ
Sta. Ana, 21

MADRID
PERLADO, PÁEZ Y C.ª, Arenal, 11
ANTONIO PÉREZ, Bolsa, 12

GERONA
DALMÁU CARLES, PLA, S. A.
Editores

ISLA DE CUBA: LIBRERÍAS DE HABANA Y MATANZAS
ECUADOR: JANER E HIJO.—GUAYAQUIL
1920

LÉASE. — Deseosos de corresponder a la favorabilísima acogida que el Magisterio ha dispensado a nuestras obras de Aritmética y Álgebra, y cediendo a los ruegos insistentes de ilustrados compañeros, *hemos limitado el empleo de las pesas, medidas y monedas antiguas al capítulo de problemas correspondientes a los números complejos*. Los problemas de esta edición se corresponden exactamente en *enunciado* y *resultado* con el *libro del maestro*, SOLUCIONES ANALÍTICAS, a partir de su 4.ª edición, inclusive.

IMPRENTA DE HENRICH Y COMPAÑÍA, EN COMANDITA. — BARCELONA

Al ilustrado Director

de la

Escuela Normal de Maestros

de Gerona

D. José Cumbáu y Serra

en testimonio

de afecto y gratitud

UNA EXPLICACIÓN NECESARIA

Convencido de que no ha de faltar quien crea — sin leer este libro y juzgando únicamente por su volumen — que he rebasado los límites que debe tener la enseñanza de la Aritmética y Álgebra en las Escuelas Normales, créome en el deber de dar, ante todo, a mis lectores una explicación, que conceptúo, más que conveniente, necesaria.

Son en número reducidísimo las obras que en España se han escrito para la enseñanza profesional de este ramo de conocimientos, y he creído ver, en todas ellas, deficiencias notabilísimas. Las más esencialmente prácticas, callando el por qué de las reglas, sólo pueden formar Maestros empíricos; alguna que otra, de índole teórica, más bien parece texto compendioso con destino a la segunda enseñanza, cuyos estudios distan mucho de ser garantía suficiente para la formación del Maestro, por cuanto la labor de éste se fundamenta, precisamente, en la aplicación de los principios que la teoría proporciona.

Todos, sin excepción, convenimos en que los conocimientos matemáticos que el Profesor debe reunir han de ser *teóricos* y *prácticos*, y es forzoso añadir que el progreso de la época exige la mayor amplitud de estos dos conceptos, dentro de los prudentes límites en que debe encerrarse la cultura profesional.

En mi concepto, el Maestro debe poseer el conocimiento y la *demostración* de los principios culminantes de la Aritmética, sin desconocer los de orden secundario; debe dominar la aplicación de unos y otros a las cuestiones especulativas, y poseer, además, la práctica de las operaciones algebraicas y el ejercicio de su inmediata aplicación.

Propóngome, pues, al escribir este libro, realizar dos fines inmediatos: proporcionar al Profesorado de las Escuelas Normales un texto razonadamente teórico-práctico, exento de las deficiencias que hoy se observan en los publicados, y dar al Maestro una obra completa, donde, con la mayor claridad y ordenación posibles, pueda estudiar las múltiples aplicaciones de los principios teóricos, y muy principalmente aquellas que son el fundamento de la práctica industrial y mercantil.

Mi objeto, de consiguiente, no se limita a condensar la teoría y la práctica necesarias para la obtención del título profesional en sus diversos grados. Aspiro, además, a dar al Profesor un libro que sea su consultor y guía en las difíciles tareas de la enseñanza; un libro que le permita realizar satisfactoriamente su misión, cualesquiera que sean las necesidades de la población donde ejerza; un libro, en fin, que, rompiendo antiguos moldes, ofrezca al Magisterio modernos horizontes, lo mismo desde el punto de vista educativo, que en su aspecto instructivo y de aplicación.

Y una obra en que se realicen los fines mencionados, no es posible, lector mío, encerrarla en breves páginas. Si no te falta la paciencia suficiente para leer las de mi libro, te convencerás de que en ellas nada sobra.

¡Ojalá pueda, con el tiempo, convencerme de que este trabajo, pobre por ser mío, ha sido de alguna utilidad a la clase que tanto me honra y cuyo mejoramiento, con toda mi alma, ansío!

J. D. C.

ABREVIATURAS USUALES

EN LA ESCRITURA COMERCIAL

Pf.	pesos fuertes.
Ptas., cts.	pesetas, céntimos.
fr. o frs.	francos.
fls.	florines.
£ E. o sólo £.	libras esterlinas.
chel., penk	chelines, peniques.
o/	orden.
c/., cta.	cargo, cuenta.
g/	giro.
l/.	letra.
p/	pagaré.
m/g.	mi giro.
n/g.	nuestro giro.
m/r., s/r	mi remesa, su remesa.
m/o., s/o	mi orden, su orden.
n/o.	nuestra orden
m/c., s/c.	mi cargo, su cargo.
p/cta., p/o.	por cuenta, por orden.
d/v.	días vista.
d/f., m/f	días fecha, meses fecha.
c/m. o c/$^1/_2$	cuenta y mitad.
cta. corrte. o c/c.	cuenta corriente.
s/	sobre.
b/	bultos.
camb	cambio.
c/o	carta orden.
d.º	daño.
b.º	beneficio.
S. E.	salvo error.
S. E. u O.	salvo error u omisión.
m/p., s/p.	mi pagaré, su pagaré.
n/p	nuestro pagaré.
m/l., s/l.	mi letra, su letra.
n/l.	nuestra letra.
m/f., s/f., n/f.	mi favor, su favor, nuestro favor.
p. $^0/_0$	por ciento.
p. $^0/_{00}$	por mil.
etc.	

ALGUNAS PESAS, MEDIDAS Y MONEDAS ANTIGUAS
DE CASTILLA Y CATALUÑA

Medidas de peso

Para la carne y el pescado fresco, se emplea, en Cataluña, la carnicera, que se divide en 3 tercias o libras, y la tercia, en 12 onzas.

Pesas medicinales

Castilla		Cataluña	
La libra	12 onzas	La libra	12 onzas.
La onza	8 dracmas.	La onza	9 dracmas.
La dracma	3 escrúpulos.	La dracma	3 escrúpulos.
El escrúpulo	24 granos.	El escrúpulo	20 granos.

Pesas para oro, plata y piedras preciosas

El marco	8 onzas.	El adarme	9 quilates.
La onza	16 adarmes.	El quilate	4 granos.

Medidas de volumen

Para medir la capacidad de los buques, se emplea la tonelada de arqueo, que es igual a 70'19 pies cúbicos.

Monedas imaginarias

Castilla	Cataluña
El doblón de cambio, que vale 4 pesos sencillos.	La libra, que vale 20 sueldos.
El peso sencillo, que vale 15 reales vellón.	El sueldo, que vale doce dineros.
El ducado, que vale 11 reales vellón.	El real catalán, que vale 24 dineros.

La libra catalana equivale a 10 reales y dos tercios: o bien: 15 libras=8 duros; 3 libras=8 pesetas.

MEDIDAS DE TIEMPO

El siglo	100 años o 20 lustros.
El lustro	5 años.
El año común	12 meses, 52 semanas, o 365 días.
El año bisiesto	12 meses o 366 días.
El mes común o comercial	30 días.
La semana	7 días.
El día	24 horas.
La hora	4 cuartos o 60 minutos.
El cuarto	15 minutos.
El minuto	60 segundos.

Meses del año

Enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre y diciembre.

Días de los meses

30 días ha noviembre
con abril, junio y septiembre;
28 tiene uno (febrero)
y los otros, 31.

DIVISIÓN DEL PAPEL

La bala	10 resmas.	La mano	5 cuadernillos.
La resma	20 manos.	El cuadernillo	5 pliegos.

133

DATOS INTERESANTES

Dimensiones, movimientos y velocidad de la Tierra

Radio ecuatorial	6.377,398 metros.
Radio polar	6.356,080 »
Circunferencia polar	39.939,160 »
Circunferencia ecuatorial (Ecuador)..........	40.076,625 »
Superficie................................	510.082,000 kms. cuad.
Volumen	1.083,260.000,000 kms. cúbs.
Espesor de la corteza terrestre	Se calcula en unos 30 kms.

Recorre su órbita en 365 días, 5 horas, 48 minutos, 47 segundos, o 1 año, con una velocidad de unos 30 kilómetros por segundo.

Verifica la rotación en 24 horas, o 1 día. La velocidad de rotación, en el Ecuador, es 28 kilómetros por minuto; un punto cualquiera de España gira con una velocidad media de más de 21 kilómetros.

Dimensiones, movimientos, velocidades y distancias de la Luna

Diámetro	*Cuatro* veces menor que el de la Tierra.
Superficie.................	*Catorce* veces menor que la de la Tierra.
Volumen	*Cuarenta y nueve* veces menor que el de la Tierra.
Distancia media de la Luna a la Tierra..............	380,000 kilómetros.

Un hombre, andando 50 kilómetros por día, tardaría 24 años para ir de la Tierra a la Luna.

Recorre su órbita en 27 días, 7 horas, 43 minutos, 5 segundos.

Mes lunar, o tiempo medio entre dos fases iguales: 29 días, 12 horas, 44 minutos, 3 segundos.

Dimensiones, movimientos, velocidad y distancia del Sol

Diámetro	144,000 miriámetros.
Superficie.................	*Doce mil* veces mayor que la de la Tierra.
Volumen	1.372,000 veces mayor que el de la Tierra.

Verifica la rotación en 25 días, 13 horas.

Paralaje solar, o distancia del Sol a la Tierra: 15.000,000 de miriámetros, aproximadamente. Una bala de cañón tardaría 9 años para ir del Sol a la Tierra.

Una locomotora, llevando una velocidad de 50 kilómetros por hora, tardaría 337 años.

Velocidad de la luz

La luz se propaga con una velocidad de 310,000 kilómetros por segundo.

La luz del Sol recorre la distancia del Sol a la Tierra en 8 minutos, 16 segundos.

Velocidad del sonido

El sonido se propaga con una velocidad de 333 metros por segundo.

Si el sonido pudiese propagarse a grandes distancias, tardaría unos 2 meses para ir desde la Tierra a la Luna.

Leyes de la caída de los cuerpos

Un cuerpo que cae libremente en el espacio recorre, aquí, *en el primer segundo*, 4'899 metros. Hay causas que modifican esta velocidad.

Dicha velocidad aumenta, en el tiempo, como los números impares.

Los espacios recorridos, en dos o más unidades de tiempo, crecen como los cuadrados de los tiempos.

O en otros términos:

Los espacios parciales recorridos en cada unidad de tiempo, guardan la relación de los números impares.

Los espacios totales recorridos guardan la relación de los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos.

Así:

Tiempos	1	2	3	4	5	6	7	8....
Espacios recorridos parcialmente	1	3	5	7	9	11	13	15....
Espacios totales	1	4	9	16	25	36	49	64....

PESAS, MEDIDAS Y MONEDAS

USADAS EN LAS DIFERENTES PROVINCIAS ESPAÑOLAS

ANTES DE SER OBLIGATORIO EL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Las provincias de Albacete, Álava, Ávila, Burgos, Córdoba, Cuenca, Cádiz, Ciudad Real, Granada, Guadalajara, Logroño, León, Málaga, Madrid, Murcia, Palencia, Sevilla, Soria, Santander, Segovia, Salamanca, Toledo, Valladolid y Zamora daban a sus pesas, medidas y monedas los nombres empleados en el antiguo sistema llamado de Castilla. Esto no obstante, así en peso como en longitud, etcétera, difieren dichas medidas de las castellanas.

CASTILLA

Longitud. — La toesa, 2 varas; la vara, 3 pies; el pie, 12 pulgadas; la pulgada, 12 líneas; la línea, 12 puntos.

Peso. — La tonelada de peso, 20 quintales; el quintal, 4 arrobas; la arroba, 25 libras; la libra, 16 onzas; la onza, 16 adarmes; el adarme, 3 tomines; el tomín, 12 granos.

Capacidad para vinos y licores. — El moyo, 16 cántaras o arrobas; la cántara o arroba, 8 azumbres; la azumbre, 4 cuartillos; el cuartillo, 4 copas.

Capacidad para áridos. — El cahiz, 12 fanegas; la fanega, 12 celemines; el celemín, 4 cuartillos; el cuartillo, 4 ochavos; el ochavo, 4 ochavillos.

Capacidad para aceite. — La arroba, 25 libras; la libra, 4 panillas; la panilla, 4 onzas.

Agrarias. — La fanega, 12 celemines cuadrados; el celemín, 4 cuartillos cuadrados; el cuartillo, 12 estadales cuadrados; el estadal, 16 varas cuadradas; la vara cuadrada, 9 pies cuadrados; la aranzada, 400 estadales cuadrados.

CATALUÑA

Barcelona

Longitud. — La cana, 8 palmos; el palmo, 4 cuartos.

Peso. — La carga, 3 quintales; el quintal, 4 arrobas; la arroba, 26 libras; la libra, 12 onzas; la onza, 4 cuartos; el cuarto, 4 argensos; el argenso, 36 granos. También la arroba se divide en 4 cuarterones, y el cuarterón, en 6 libras y media.

Capacidad para áridos. — La tonelada, 4 cuarteras; la cuartera, 12 cuartanes; el cuartán, 4 picotines.

Capacidad para vinos y licores. — La pipa, 4 cargas; la carga, 4 barrilones; el barrilón, 32 porrones; el porrón, 4 patricones.

Capacidad para aceites. — La carga, 30 cuartanes; el cuartán, 16 cuartas.

Superficie. — La mojada, 2 cuarteras o 2,025 canas cuadradas; la cuartera, 2 cuartas; la cuarta, 4 mundinas; la mundina, 4 picotines; el picotín, 31 canas cuadradas y 41 palmos cuadrados.

Volumen. — La cana cúbica, 512 palmos cúbicos; el palmo cúbico, 64 cuartos cúbicos.

Gerona

Longitud y peso. — Como en Barcelona.

Capacidad para áridos. — La cuartera, 4 cuartanes; el cuartán, 6 mesurones; el mesurón, 2 picotines.

Capacidad para vinos y licores. — La carga, 8 mallales; el mallal, 16 porrones; el porrón, 4 patricones.

Capacidad para el aceite. — El mallal, 16 mitadellas; la mitadella, 4 cuartas.

Agrarias. — La vesana, que tiene 900 canas cuadradas.

Tarragona

Longitud, peso y capacidad para áridos. — Como en Barcelona.

Capacidad para líquidos. — La pipa, 4 cargas; la carga, 4 armiñas; la armiña, 32 porrones.

Capacidad para el aceite. — La carga, 6 cinquenas; la cinquena, 5 cuartanes.

Agrarias. — El jornal de Tarragona, 2,500 canas cuadradas.

Lérida

Peso y longitud. — Como en Barcelona.

Capacidad para áridos. — La cuartera, 12 cuartanes; el cuartán, 8 picotines.

Capacidad para vinos y licores. — El cántaro, 12 porrones; el porrón, 4 cuartillos o patricones.

Capacidad para el aceite. — La arroba, 4 cuartanes; el cuartán, 16 cuartas, medida de Barcelona.

Agrarias. — El jornal de Lérida, 5 fangadas o 1,800 canas cuadradas.

REINO DE VALENCIA

Valencia

Longitud. — La vara, 3 pies; el pie, 12 pulgadas.

La vara se divide también en 4 palmos, y el palmo, en 4 cuartos.

Capacidad para áridos. — El cahiz, 12 barchillas; la barchilla, 4 celemines; el celemín, 4 cuartillos o cuarterones.

Capacidad para vinos y licores. — El cántaro, 16 cuartillos.

Capacidad para el aceite. — La arroba, 4 azumbres.

Peso. — El quintal, 4 arrobas; la arroba, 36 libras; la libra, 12 onzas.

Monedas imaginarias. — La libra valenciana tiene 20 sueldos; el sueldo, 12 dineros; 17 libras valencianas equivalen a 64 pesetas.

Alicante

Longitud. — La vara, 4 palmos; el palmo, 4 cuartos.

Capacidad para áridos. — El cahiz, 12 barchillas; la barchilla, 4 celemines o almudes; el celemín, 4 cuartillos o cuarterones.

Capacidad para líquidos. — La pipa, 40 cántaros; el cántaro, 16 michetas.

Capacidad para el aceite. — La arroba, 24 libras; la libra, 18 onzas valencianas.

Peso. — El quintal, peso grueso, 4 arrobas; la arroba, 24 libras; la libra, 18 onzas valencianas. El quintal, peso sutil, 4 arrobas; la arroba, 36 libras; la libra, 12 onzas valencianas.

Castellón de la Plana

Longitud y capacidad para áridos. — Como en Alicante.

Capacidad para líquidos. — La pipa, 40 cántaros; el cántaro, 16 cuartillos.

Capacidad para el aceite. — La arroba, 32 libras; la libra, 4 cuartas.

Peso. — La arroba, 36 libras; la libra, 12 onzas; la onza, 4 cuartos; el cuarto, 4 adarmes.

REINO DE ARAGÓN

Zaragoza

Longitud. — La vara, 3 tercias; la tercia, 12 pulgadas.

Peso. — El quintal, 4 arrobas; la arroba, 36 libras; la libra, 12 onzas; la onza, 4 cuartos; el cuarto, 4 adarmes.

Capacidad para áridos. — El cahiz, 8 fanegas; la fanega, 12 celemines o almudes.

Capacidad para vinos y licores. — El nietro o carga, 16 cántaros; el cántaro, 16 cuartillos; el cuartillo, 4 copas.

Capacidad para el aceite y el aguardiente. — La arroba, 36 libras.

Monedas imaginarias. — La libra aragonesa o jaquesa, 20 sueldos; el sueldo, 16 dineros: 17 libras aragonesas = 16 $.

Huesca

Longitud y capacidad para áridos. — Como en Zaragoza.

Capacidad para vinos y licores. —El nietro, 16 cántaros; el cántaro, 8 jarros; el jarro, 2 cuartillos; el cuartillo, 4 copas.

Para medir aguardientes, el cántaro se divide en 28 libras.

Capacidad para aceite. — La arroba, 36 libras.

Peso. — El quintal, 4 arrobas; la arroba, 36 libras; la libra, 12 onzas aragonesas; la onza aragonesa, 16 arienzos.

Teruel

Longitud. — La vara, 3 pies o tercias; el pie, 8 pulgadas. La misma vara también se divide en 4 palmos, y el palmo, en 9 pulgadas.

Capacidad para áridos. — La fanega, 12 almudes.

Capacidad para vinos y licores. — El cántaro, 16 jarros; el jarro, 2 cuartillos; el cuartillo, 4 copas.

Capacidad para el aceite. — La arroba, 36 libras, y también la arrobeta, 24 libras.

Pesas. — El quintal, 4 arrobas; la arroba, 36 libras; la libra, 12 onzas aragonesas.

ISLAS BALEARES

Longitud. — La cana, 8 palmos; el palmo, 4 cuartos. Para obras de construcción se usa el *destre* mallorquín, cuya longitud mide dos canas mallorquinas, 5 palmos, 2‘22 cuartos.

Capacidad para áridos. — La cuartera, 6 barcellas; la barcella, 6 almudes.

Capacidad para vinos y licores. — La carga, 4 cortines; el cortín, 6 cuartés y medio o 26 cuartas; el cuarté, 4 cuartas. Para el aguardiente, el cortín es de mayor capacidad y se divide en 64 libras.

Capacidad para el aceite. — El odre o pellejo, tres mesuras; la mesura, 4 cuartanes; el cuartán, 9 libras o rótolos; el rótolo, 12 onzas.

Pesas. — La carga, 3 quintales; el quintal, 4 arrobas; la arroba, 25 libras; la libra, 12 onzas mallorquinas. Para ciertos artículos, se usa también el quintal, arroba y libra de Cataluña.

Monedas imaginarias. — La libra mallorquina, 20 sueldos; el sueldo, 12 dineros; 3 libras mallorquinas = 2 $.

ANDALUCÍA

Jaén

Lo mismo que en Castilla, menos la arroba mesural para el aceite, que tiene 27 libras.

Huelva

Igual que en Castilla, menos la arroba para líquidos, que se divide en 16 jarros; el jarro, en 2 cuartillos; el cuartillo, en 4 copas.

Almería

Como en Castilla, menos la arroba para líquidos, que se divide en 9 azumbres; la azumbre, en 4 cuartillos; el cuartillo, en 4 copas.

EXTREMADURA

Cáceres

Lo mismo que en Castilla, menos la arroba o cántara para liquidos, que se divide en 4 cuartas, y la cuarta, en 9 cuartillos. La arroba para el aceite se divide en 4 cuartos u 8 medios cuartos; y el quintal de peso, en 4 arrobas o 101 libras, constando la arroba de 25 libras y un cuarto.

Badajoz

Como en Castilla, excepto la arroba para líquidos, que se divide en 38 cuartillos. y la arroba para aceite, en 60 cuartillos.

LEÓN

En todo el reino de León, como en Castilla; menos en la provincia de su nombre, en que la fanega para áridos se divide, además, en 3 eminas; la emina, en 4 celemines, y el celemin, en 4 cuartillos.

GALICIA

Coruña

Longitud. — La vara, 3 tercias; la tercia, 12 pulgadas. La vara se divide también en 4 cuartas, y la cuarta, en 9 pulgadas.

Capacidad para áridos. — La fanega, 4 ferrados; el ferrado, 6 celemines; el celemín, 4 cuartillos. Para el maíz, se usa el ferrado colmado, dividido en 24 cuartillos colmados, que equivalen a 31 de los rasados.

Capacidad para vinos y licores. — La cántara, 8 azumbres y media; la azumbre, 4 cuartillos; el cuartillo, 4 copas. Para el aguardiente, se usa una cántara algo mayor.

Capacidad para el aceite. — La arroba, 25 cuartillos; el cuartillo, 4 cuartas o panillas.

Pesas. — El quintal, 4 arrobas; la arroba, 25 libras gallegas; la libra, 20 onzas castellanas. Para algunos artículos, se usan la arroba y la libra castellanas.

Lugo

Longitud y peso. — Como en la Coruña.

Capacidad para áridos. — La fanega, 6 ferrados; el ferrado, 2 celemines; el celemín, 4 cuartillos.

Capacidad para vinos y licores. — El cañado, 17 azumbres; la azumbre, 4 cuartillos; el cuartillo, 4 copas.

Capacidad para el aceite. — La arroba castellana.

Orense

Longitud. — Como en Castilla.

Capacidad para áridos. — El ferrado, 24 copelos. El maíz se mide con el ferrado colmado.

Capacidad para vinos y licores. — El moyo, 8 cántaras u ollas; la olla, 9 azumbres; la azumbre, 4 cuartillos; el cuartillo, 4 copas.

Capacidad para el aceite. — La arroba castellana.

Pesas. — Las mismas que en Coruña y Lugo.

Pontevedra

Longitud. — Como en Castilla.

Capacidad para áridos. — El ferrado, 12 concas. El maíz se mide con el ferrado colmado.

Capacidad para vinos y licores. — Como en Lugo.

Capacidad para el aceite. — Como en Castilla.

Pesas. — Como en las otras tres provincias gallegas.

ASTURIAS

Oviedo

Como en Castilla, menos la fanega para granos, que se divide en 4 eminas; la emina, en 8 cojines, y el cojín, en 4 cuartillos.

PROVINCIAS VASCONGADAS

Vizcaya y Álava

Como en Castilla, menos la libra ponderal, que se divide en 17 onzas, y la panilla o cuarterón para el aceite, que se divide, además, en 2 ochavas.

Guipúzcoa

Longitud. — Como en Castilla.

Capacidad para áridos. — La fanega, 16 celemines; el celemín, 4 chillas.

Capacidad para vinos y licores. — La arroba, 5 azumbres; la azumbre, 4 cuartillos; el cuartillo, 4 copas.

Capacidad para el aceite. — Como en Castilla.

Pesas. — Como en Castilla, menos la libra, que se divide en 27 onzas castellanas.

NAVARRA

Pamplona

Longitud. — Como en Castilla.

Capacidad para áridos. — El robo, 16 almudes.

Capacidad para vinos y licores. — El cántaro navarro, 16 pintas; la pinta, 4 cuartillos.

Capacidad para el aceite. — La arroba castellana, 25 libras; la libra, 4 cuarterones.

Pesas. — La arroba, 36 libras; la libra, 12 onzas; la onza, 8 ochavas.

Monedas imaginarias. — El peso navarro tiene 8 reales flojos; el real flojo, 36 maravedises. El peso navarro equivale a 15 reales y 2 maravedises: 17 reales flojos equivalen a 8 pesetas, y 85 reales flojos, a 8 duros.

ISLAS CANARIAS

En Santa Cruz de Tenerife, se usa la vara de 3 pies o 36 pulgadas para los tejidos; la fanega de 12 celemines o 48 cuartillos para los áridos, y la arroba de 5 cuartillos para los líquidos. Las medidas para el aceite y las pesas son exactamente las de Castilla.

EQUIVALENCIAS ENTRE LAS PESAS Y MEDIDAS

USADAS ANTIGUAMENTE EN LAS DIVERSAS PROVINCIAS DE ESPAÑA
Y LAS LEGALES DEL SISTEMA MÉTRICO-DECIMAL,
publicadas por la
Dirección general del Instituto Geográfico y Estadístico

CASTILLA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Metro, vale 1'196308 varas.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Metro cuadrado, vale 1'431153292 varas cuadradas.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Metro cúbico vale 1'71210040906 varas cúbicas.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Kilogramo, vale 2'173474 libras.—Cántara o arroba de vino, vale 16'133 litros.—Litro de vino, vale 1'983512 cuartillos.—Arroba de aceite, vale 12'563 litros.—Litro de aceite, vale 1'989971 libras.—Fanega de áridos, vale 55'501 litros.—Litro de grano, vale 0'864849 cuartillos.—Fanega superficial, de 9,216 varas cuadradas, llamada de marco real, vale 64'395617 áreas.—Area, vale 143'115329 varas cuadradas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.—Kilómetro, vale 1,196'308 varas.

ÁLAVA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Cántara, vale 16'365 litros.—Media fanega de áridos, vale 27'81 litros.—Fanega de tierra de 660 estados de 49 pies cuadrados, vale 25'107956 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

ALBACETE.—Vara, vale 0'837 metros.—Vara cuadrada, vale 0'700569 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'586376253 metros cúbicos.—Libra, vale 0'458 kilogramos.—Media arroba para liquidos, vale 6'365 litros.—Media fanega para áridos, vale 28'325 litros.—Fanega de tierra de 10,000 varas cuadradas, vale 70'0569 áreas.

ALICANTE.—Vara, vale 0'912 metros.—Vara cuadrada, vale 0'831744 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'758550528 metros cúbicos.—Libra, vale 0'533 kilogramos.—Medida de libra para aceite vale, 0'60 litros.—Cántaro, vale 11'55 litros.—Barchilla para áridos, vale 20'775 litros.—Jornal de tierra de 5,776 varas cuadradas, vale 48'041533 áreas.—Legua de 20 al grado, vale 5'55555 kilómetros.

ALMERÍA.—Vara, vale 0'833 metros.—Vara cuadrada, vale 0'693889 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'578009537 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para liquidos, vale 8'18 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'531 litros.—Tahulla de 1,600 varas castellanas cuadradas para las tierras de riego, vale 11'182336 áreas.—Fanega de 9,216 varas castellanas cuadradas, para las tierras de secano, vale 64'395617 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas castellanas, vale 5'572699 kilómetros.

ÁVILA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media cántara, vale 7'96 litros.—Media fanega para áridos, vale 28'20 litros.—Fanega de tierra de 5,625 varas cuadradas, vale 39'303966 áreas.—Aranzada de viña de 6,400 varas cuadradas, vale 44'719179 áreas.

BADAJOZ.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para aceite, vale 6'21 litros.—Media arroba para los demás líquidos, vale 8'21 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'92 litros.—Fanega superficial de 9,216 varas cuadradas, vale 64'395617 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

BALEARES.—Media cana, vale 0'782 metros.—Media cana cuadrada, vale 0'611524 metros cuadrados.—Media cana cúbica, vale 0'478211768 metros cúbicos.—Libra, vale 0'407 kilogramos.—Mesura para aceite, vale 16'221 litros.—Cuarta para vino, vale 1'026 litros.—Libra para aguardiente, 0'41 litros.—Media cuartera para áridos, vale 35'17 litros.—Destre mallorquín lineal, vale 4'214 metros.—Destre mallorquín superficial, vale 17'7578 metros cuadrados.—Cuarterada, vale 71'031184 áreas.

BARCELONA.—Cana, vale 1'555 metros.—Cana cuadrada, vale 2'418025 metros cuadrados.—Cana cúbica, vale 3'760028975 metros cúbicos.—Libra, vale 0'400 kilogramos.—Libra medicinal, vale 0'300 kilogramos.—Barrilón, vale 30'35 litros. —Cuartán de aceite, vale 4'15 litros.—Media cuartera para áridos, vale 34'759 litros.—Mojada superficial de 2,025 canas cuadradas, vale 48'965000 áreas.

BURGOS.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media cántara, vale 7'05 litros.—Media fanega para áridos vale 27'17 litros.—Fanega superficial, vale 64'395617 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

CÁCERES.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'456 kilogramos.—Medio cuarto para vino, vale 1'73 litros.—Medio cuarto para aceite, vale 1'60 litros.—Media fanega para áridos, vale 26'88 litros.—Fanega superficial de 9,216 varas cuadradas, vale 64'395617 áreas.

CÁDIZ.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para vino, vale 7'922 litros.—Media arroba para aceite, vale 6'26 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'272 litros.—Fanega superficial, vale 64'395617 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

CANARIAS.—Vara, vale 0'842 metros.—Vara cuadrada, vale 0'708064 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'596947688 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Arroba de Santa Cruz de Tenerife para líquidos, vale 5'08 litros.—Arroba de la Ciudad de las Palmas, para líquidos, vale 5'34 litros.—Cuartillo de la villa de Guía de Canarias, vale 0'995 litros.—Cuartillo del arrecife de Lanzarote, vale 2'46 litros.—Media fanega de Santa Cruz de Tenerife para áridos, vale 31'33 litros.—Medio almud de la ciudad de las Palmas, vale 2'75 litros.—Medio almud de la Guía de Canarias, vale 2'84 litros.—Fanega superficial de 7,511 $^1/_9$ varas cuadradas castellanas, vale 52'482925 áreas.

CASTELLÓN.—Vara, vale 0'906 metros.—Vara cuadrada, vale 0'820836 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'743677416 metros cúbicos.—Libra, vale 0'385 kilogramos.—Cántaro para líquidos, vale 11'27 litros.—Arroba para aceite, vale 12'14 litros.—Barchilla, vale 16'60 litros.—Fanega superficial de 200 brazas reales, vale 8'310964 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas castellanas, vale 5'572699 kilómetros.

CIUDAD REAL.—Vara, vale 0'839 metros.—Vara cuadrada, vale 0'703921 metros cuadrados.—Vara cúbica vale 0'590589719 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para líquidos, excepto el aceite, vale 8 litros. —Media arroba para aceite, vale 6'22 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'29 litros.—Fanega superficial, vale 64'395617 áreas.—Legua de 8,000 varas castellanas, vale 6'687240 kilómetros.

CÓRDOBA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Arroba para líquidos, vale 16'31 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'60 litros.—Fanega superficial de 8,760 $^5/_{12}$ varas cuadradas, vale 61'212287 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

CORUÑA.—Vara, vale 0'843 metros.—Vara cuadrada, vale 0'710649 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'599077107 metros cúbicos.—Libra, vale 0'575 kilogramos.—Ferrado de trigo, vale 16'15 litros.—Ferrado de maíz, vale 20'87 litros. —Cántara de vino, vale 15'58 litros.—Arroba de aceite, vale 12'43 litros.—Ferrado superficial de 900 varas cuadradas, vale 6'395841 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas castellanas, vale 5'572699 kilómetros.

CUENCA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para líquidos, vale 7'88 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'10 litros.—Fanega superficial, vale 64'395617 áreas.

GERONA.—Cana, vale 1'559 metros.—Cana cuadrada, vale 2'430481 metros cuadrados.—Cana cúbica, vale 3'789119879 metros cúbicos.—Libra, vale 0'400 kilogramos.—Kilogramo, vale 2'5 libras.—Mallal para vino, vale 15'48 litros.—Mallal para aceite, vale 13'03 litros.—Cuartán para áridos, vale 18'08 litros.—Cuartera, vale 72'32 litros.—Vesana de tierra de 900 canas cuadradas, vale 21'874329 áreas.—Hora de camino de 4,500 varas castellanas, vale 3'761572 kilómetros.

GRANADA—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para líquidos, vale 8'21 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'35 litros.—Fanega superficial, vale 64'395617 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

GUADALAJARA. — Vara, vale 0'835905 metros. — Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para líquidos, vale 8'21 litros.—Media arroba para aceite, vale 6'35 litros.—Media fanega para áridos vale 27'40 litros.—Fanega superficial de 4,444 $^4/_9$ varas cuadradas, vale 31'054985 áreas.

GUIPÚZCOA.—Vara, vale 0'837 metros.—Vara cuadrada, vale 0'700569 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'586376253 metros cúbicos.—Libra, vale 0'492 kilogramos.—Media azumbre, vale 1'26 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'65 litros.—Fanega superficial de 4,900 varas cuadradas, vale 34'327881 áreas.

HUELVA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para líquidos, vale 7'89 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'531 litros.—Fanega superficial, de 5,280 varas cuadradas, vale 36'893323 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

HUESCA.—Vara, vale 0'722 metros.—Vara cuadrada, vale 0'595984 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'460099648 metros cúbicos.—Libra, vale 0'351 kilogramos.—Cántaro, vale 9'98 litros.—Medida de libra para el aceite, vale 0'37 litros.—Fanega para áridos, vale 22'46 litros.—Fanega superficial de 1,200 varas cuadradas, vale 7'151808 áreas.—Legua de 8,000 varas, vale 6'176 kilómetros.

JAÉN.—Vara, vale 0'839 metros.—Vara cuadrada, vale 0'703921 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'590589719 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para vino, vale 8'02 litros.—Media arroba para aceite, vale 7'12 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'37 litros.—Fanega superficial de 8,963 varas castellanas cuadradas, vale 62'627812 áreas.

LEÓN.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media cántara, vale 7'92 litros.—Emina para áridos, vale 18'11 litros.—Emina superficial de 1,344 $^4/_9$ varas cuadradas para las tierras de secano, vale 9'394133 áreas.—Emina superficial de 896 $^2/_9$ varas cuadradas para las tierras de regadío, vale 6'262238 áreas.

LÉRIDA.—Media cana, vale 0'778 metros.—Media cana cuadrada vale 0'605284 metros cuadrados.—Media cana cúbica, vale 0'470910952 metros cúbicos.—Libra, vale 0'401 kilogramos.—Cántara de vino, vale 11'38 litros.—Medida de tres cuartanes para áridos, vale 18'34 litros.—Jornal superficial de 1,800 canas cuadradas, vale 43'580448 áreas.

LOGROÑO.—Vara, vale 0'837 metros.—Vara cuadrada, vale 0'700569 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'586376253 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Cántara, vale 16'04 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'47 litros.—Fanega superficial de 2,722 varas castellanas cuadradas, vale 19'019626 áreas. —Legua de 6,666 $^2/_3$ varas castellanas, vale 5'572699 kilómetros.

LUGO.—Vara, vale 0'855 metros.—Vara cuadrada, vale 0'731025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'625026375 metros cúbicos.—Libra, vale 0'573 kilogramos.—Cuartillo para líquidos, vale 0'47 litros.—Ferrado para áridos, vale 13'13 litros.—Ferrado superficial de 625 varas castellanas cuadradas, vale 4'367107 áreas.

MADRID.—Vara, vale 0'843 metros.—Vara cuadrada, vale 0'710649 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'599077407 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para líquidos, vale 8'15 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'67 litros.—Fanega superficial de 4,900 varas cuadradas, medidas con la vara de Madrid, vale 34'821801 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas castellanas, vale 5'572699 kilómetros.

MÁLAGA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para líquidos, vale 8'33 litros.—Media fanega para áridos, vale 26'97 litros.—Fanega superficial de 8,640 varas cuadradas, vale 60'370891 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

MURCIA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para vino, vale 7'80 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'64 litros.—Fanega superficial de 9,600 varas cuadradas, vale 67'078768 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

NAVARRA.—Vara, vale 0'785 metros.—Vara cuadrada, vale 0'616225 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale, 0'48373665 metros cúbicos.—Libra, vale 0'372 kilogramos.—Cántaro, vale 11'77 litros.—Libra para medir aceite, vale 0'41 litros.—Robo para áridos, vale 28'13 litros.—Robada superficial de 1,058 varas cuadradas, vale 8'984560 áreas.—Legua de 7,000 varas, vale 5'495 kilómetros.

ORENSE.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'574 kilogramos.—Cántara, vale 15'96 litros.—Ferrado para medir grano, vale 13'88 litros.—Ferrado colmado para medir maíz, vale 18'79 litros.—Ferrado superficial de 900 varas castellanas cuadradas, vale 6'288635 áreas.

OVIEDO.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Cántara, vale 18'41 litros.—Media fanega asturiana, para áridos, vale 37'07 litros.—Día de bueyes, ó sean 1,800 varas cuadradas, vale 12'577269 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

PALENCIA. — Vara, vale 0'835905 metros. — Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media cántara, vale 7'88 litros.—Media arroba para aceite, vale 6'12 litros.—Media fanega para áridos vale 27'7505 litros. — Obrada de tierra, de 7,704 $^1/_6$ varas cuadradas, vale 53'831876 áreas.

PONTEVEDRA. — Vara vale 0'835905 metros. — Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'579 kilogramos.—Medio cañado para líquidos, vale 16'35 litros.—Ferrado para trigo, vale 15'58 litros.—Ferrado para maíz, vale 20'86 litros.—Ferrado de sembradura de 900 varas cuadradas, vale 6'288635 áreas.

SALAMANCA. — Vara, vale 0'835905 metros. — Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Medio cántaro, vale 7'99 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'29 litros.—Fanega de tierra de 9,216 varas cuadradas, vale 64'395617 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

SANTANDER. — Vara, vale 0'835905 metros. — Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados. — Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos. — Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media cántara, vale 7'90 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'42 litros.—Fanega de tierra de 9,216 varas cuadradas, vale 64'395617 áreas.—Legua de 6,666 $^2/_3$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

SEGOVIA.—Vara, vale 0'837 metros.—Vara cuadrada, vale 0'700569 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'586376253 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media arroba para líquidos, vale 8 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'30 litros.—Obrada de tierra de 400 estadales cuadrados de 15 cuartas de vara de lado, vale 39'407006 áreas.

SEVILLA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada vale 0'6987377169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Arroba para líquidos, vale 15'66 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'35 litros.—Fanega superficial de 8,507 $^{13}/_{16}$ varas castellanas cuadradas, vale 59'447248 áreas.—Legua de 6,666 $^{2}/_{3}$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

SORIA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media cántara, vale 7'90 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'57 litros.—Fanega superficial de 3,200 varas cuadradas, vale 22'359589 áreas.

TARRAGONA.—Media cana, vale 0'780 metros.—Media cana cuadrada, vale 0'6084 metros cuadrados.—Media cana cúbica, vale 0'474552 metros cúbicos.—Libra, vale 0'400 kilogramos.—Armiña para líquidos, vale 34'66 litros.—Sinquena para aceite, vale 20'65 litros.—Media cuartera para áridos, vale 35'40 litros. — Cana de rey superficial de 2,500 canas cuadradas, vale 60'84 áreas. — Hora de camino de 5,333 varas castellanas, vale 4'457881 kilómetros.

TERUEL.—Vara, vale 0'768 metros.—Vara cuadrada, vale 0'589824 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'452984832 metros cúbicos.—Libra, vale 0'367 kilogramos.—Cántaro, vale 10'96 litros.—Media fanega para áridos, vale 21'40 litros.—Fanega de tierra de 1,600 varas castellanas cuadradas, vale 11'179795 áreas.—Legua de 6,666 $^{2}/_{3}$ varas castellanas, vale 5'572699 kilómetros.

TOLEDO.—Vara, vale 0'837 metros.—Vara cuadrada, vale 0'700569 metros cuadrados. — Vara cúbica, vale 0'586376253 metros cúbicos. — Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media cántara, vale 8'12 litros.—Media arroba para medir aceite, vale 6'25 litros.—Media fanega para áridos, 27'7505 litros.—Fanega superficial de 400 estadales, o sean 5,377 $^{7}/_{9}$ varas castellanas cuadradas, vale 37'576532 áreas.—Legua de 6,666 $^{2}/_{3}$ varas castellanas, vale 5'572699 kilómetros.

VALENCIA.—Vara, vale 0'906 metros.—Vara cuadrada, vale 0'820836 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'743677416 metros cúbicos.—Libra, vale 0'355 kilogramos.—Cántaro de vino, vale 10'77 litros.—Arroba de aceite, vale 11'93 litros.—Barchilla para áridos, vale 16'75 litros.—Fanega superficial de 1,012 $^{1}/_{2}$ varas valencianas cuadradas, vale 8'310964 áreas.—Braza, vale 4'1554 metros cuadrados.—Legua valenciana de 7,222'223 varas castellanas, vale 6'037092 kilómetros.

VALLADOLID. — Vara, vale 0'835905 metros. — Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados. — Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos. — Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Media cántara, vale 7'82 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'39 litros.—Obrada superficial de 600 estadales, o sean 6,666 $^{2}/_{3}$ varas cuadradas, vale 46'582478 áreas.—Legua de 6,666 $^{2}/_{3}$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

VIZCAYA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'488 kilogramos.—Media azumbre, vale 1'11 litros.—Media arroba para aceite, vale 6'74 litros.—Media fanega para áridos, vale 28'46 litros.—Peonada superficial, de 544 $^{4}/_{9}$ varas cuadradas, vale 3'804236 áreas.—Legua de 6,666 $^{2}/_{3}$ varas, vale 5'572699 kilómetros.

ZAMORA.—Vara, vale 0'835905 metros.—Vara cuadrada, vale 0'698737169025 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'584077893273842625 metros cúbicos.—Libra, vale 0'460093 kilogramos.—Medio cántaro, vale 7'98 litros.—Media fanega para áridos, vale 27'64 litros.—Fanega superficial de 4,800 varas cuadradas, vale 33'539384 áreas.

ZARAGOZA.—Vara, vale 0'772 metros.—Vara cuadrada, vale 0'595984 metros cuadrados.—Vara cúbica, vale 0'460099648 metros cúbicos.—Libra, vale 0'350 kilogramos.—Cántaro de vino, vale 9'91 litros.—Arroba para medir aceite, vale 13'93 litros.—Arroba para medir aguardiente, vale 13'33 litros.—Fanega para áridos, vale 22'42 litros.—Cuartal superficial de 400 varas aragonesas cuadradas, vale 2'383936 áreas.—Legua de 6,666 $^{2}/_{3}$ varas castellanas, vale 5'572699 kilómetros.

PRELIMINARES

1. Idea de la magnitud (*).—Se llama magnitud toda cualidad de un objeto, susceptible de aumento o disminución. El peso y el volumen de los cuerpos, el tiempo que media entre dos fechas, la distancia que separa dos puntos, la virtud, el talento, el dolor, etc., son magnitudes.

2. Clases de magnitud. —Hay magnitudes que pueden compararse con otras de su misma especie, susceptibles, por lo mismo, de representación numérica exacta o aproximada; es decir, magnitudes *mensurables*. V. gr.: el peso, el volumen, la distancia, el tiempo, etc.

Hay también magnitudes que no pueden compararse con otras de su misma especie y que, por la misma razón, no son susceptibles de representación numérica; esto es, magnitudes *no mensurables*. V. gr.: el talento, el dolor, el placer, etc.

3. Cantidad (**).—Cantidad es toda magnitud mensurable.

Obsérvese, pues, que toda *cantidad* es *magnitud;* pero toda *magnitud* no es *cantidad*. La idea de *magnitud* envuelve solamente las de aumento o disminución, y la idea de *cantidad* envuelve, además, el concepto de *mensurable*.

4. División de la cantidad. —Hay cantidades *continuas* y cantidades *discontinuas*. Cantidades continuas son las que pueden aumentar o disminuir por partes tan pequeñas como se quiera, tales como: el peso, el volumen, la distancia, el tiempo, etc.

Cantidades discontinuas son las que, estando formadas por objetos diversos, sólo pueden aumentar o disminuir por uno o más de los que las constituyen; como por ejemplo, un montón de bolas, un grupo de niños, una caja dè plumas, etc.

5. Unidad (***).—Se llama unidad la cantidad arbitraria que se elige como tipo para medir las cantidades de su especie, o de otro modo: *el uno de todas las cosas*.

6. Número (****).—Número es el resultado de comparar una cantidad con la unidad elegida para medirla.

7. Medida de una cantidad.—Es el número de veces que la unidad elegida está contenida en ella.

Si decimos, por ejemplo, que en un montón de trigo hay trescientos litros, suponemos haber elegido la cantidad *litro* para medir la magnitud montón y que ésta contiene a aquélla trescientas veces. En toda comparación cuantitativa, hay tres términos distintos y necesarios: la cantidad elegida como base o tipo de comparación, esto es, la *unidad;* la magnitud cuya expresión numérica se desea determinar, es decir, la *cantidad*, y el resultado de la operación comparativa, el *número*, o sea la medida de la cantidad.

En el caso anterior, la unidad es el *litro;* la cantidad, *el montón de trigo*, y el número, *trescientos*.

8. Unidad entera y unidad fraccionaria. — Son *unidades enteras* las cantidades que ordinariamente elegimos para determinar la expresión numérica de las magnitudes mensurables, v. gr.: el *metro*, el *litro*, el *gramo*, etc.

Unidades fraccionarias son cada una de las partes que resultan cuando las unidades enteras se dividen en cualquier número de partes iguales.

Así, son unidades fraccionarias: del metro, el *decímetro*, el *centímetro* y el *milímetro;* del litro, el *decilitro*, el *centilitro* y el *mililitro*, etc.

(*) Del latín *magnus*, grande.
(**) Del latín *quantus*, cuanto.
(***) Del latín *unus*, uno.
(****) Del griego *nomos*, lo que está medido o dividido.

9. División natural del número. — Al comparar la cantidad con la unidad, puede suceder:

1.º Que la unidad entera esté contenida en la cantidad un número exacto de veces.

2.º Que siendo la unidad entera mayor que la cantidad, ésta contenga exactamente una o más veces a la unidad fraccionaria de su misma especie.

3.º Que la unidad entera esté contenida en la cantidad una o más veces, quedando, además, una porción de cantidad que contenga a la unidad fraccionaria un número exacto de veces.

4.º Que ni la unidad entera ni la fraccionaria estén contenidas exactamente en la cantidad.

Estos cuatro casos dan origen, respectivamente, a otras tantas clases de números, a saber: *enteros*, *fraccionarios propiamente dichos*, *mixtos* e *inconmensurables*.

10. Número entero. — Es la expresión de una o más unidades enteras, v. gr.: *un libro*, *veinte pesetas*.

11. Número fraccionario propiamente dicho. — Es la expresión de una o más unidades fraccionarias, v. gr.: *un quinto de litro*, *tres décimas de kilogramo*.

12. Número mixto. — Es la expresión constitutiva de una o más unidades enteras y una o más unidades fraccionarias, v. gr.: *un metro* y *cuatro centímetros*, *veinte libras* y *dos octavos*, etc.

13. Número inconmensurable. — Es el que no puede expresarse exactamente ni por unidades enteras ni fraccionarias.

Los números enteros, los fraccionarios y los mixtos son números *conmensurables*.

14. Denominaciones distintas de los números. — También se dividen los números en *abstractos* y *concretos*, *homogéneos* y *heterogéneos*, *incomplejos* y *complejos*, *dígitos* y *polidígitos*.

Número abstracto es el que no se refiere a unidad alguna determinada, v. gr.: *once*, *ocho*, *cuarenta y seis*.

Número concreto es el que se refiere a una unidad determinada, v. gr.: *once caballos*, *ocho soldados*, *cuarenta y seis libros*.

Dos o más números concretos son *homogéneos*, cuando se refieren a unidades de una misma especie, como: *cien pesetas* y *nueve pesetas*.

Dos o más números concretos son *heterogéneos*, cuando se refieren a unidades de distinta especie, como: *veinte casas* y *doce sombreros*.

Número incomplejo es el concreto que expresa una sola especie de unidades, v. gr.: *sesenta gramos*.

Números complejos son los concretos que expresan dos o más clases de unidades de diferente especie y que se refieren a una misma medida; v. gr.: *veinte kilogramos*, *seis hectogramos*, *tres decagramos* y *nueve gramos*; *cinco duros*, *dos pesetas* y *tres reales*.

Número dígito es el que se representa por una sola cifra, como: *cuatro*, *dos*, *nueve*, etc.

Número polidígito es el que se representa por dos o más cifras, como: *catorce*, *ciento cuarenta y tres*, etc.

15. Ciencias Matemáticas (*). — Se llaman *Matemáticas* las ciencias que exponen las leyes de la cantidad y de la extensión.

(*) La palabra *Matemáticas* tiene su origen en la voz griega *mathesis*, que significa la ciencia, la instrucción por excelencia. Antiguamente, se expresaba en singular; pero hoy el uso da la preferencia al plural, ya que el desarrollo de estos conocimientos ha dado origen a diversas ramas. También se llaman *ciencias exactas*, para indicar la rigurosa exactitud de sus proposiciones.

16. División de las matemáticas.—Se dividen en *puras* y *mixtas*.

Las matemáticas *puras* consideran la cantidad y la extensión en abstracto, independientes de las demás cualidades que pueden afectar los seres. Comprenden las ramas siguientes:

Ciencias que estudian la cantidad: *Aritmética*, *Álgebra* y *Cálculos infinitesimales*.

Ciencias que estudian la extensión: *Geometría métrica*, *Geometría analítica*, *Geometría de la posición* y *Geometría descriptiva*.

Las matemáticas *mixtas* exponen las leyes del número y de la extensión aplicados a otras propiedades de los cuerpos, como el equilibrio, el movimiento, el curso de los astros, etc.

Comprenden las ramas siguientes:

Ciencias que aplican sus principios a los fenómenos de la naturaleza: la *Mecánica*, la *Astronomía*, la *Óptica*, la *Acústica*, etc.

Ciencias que aplican sus principios a los objetos del arte: la *Agrimensura*, la *Geodesia*, la *Navegación*, la *Arquitectura*, la *Balística*, etc.

17. Nomenclatura matemática.—En la exposición de las ciencias matemáticas, se conserva la siguiente:

Definición. — Es el desarrollo verbal de la comprensión de una idea, o bien, el acto en virtud del cual nuestra alma explica y fija el sentido de una palabra o la naturaleza de una cosa.

Axioma. — Es un principio que la razón percibe directamente, y por lo mismo, tan evidente, que basta la enunciación para ver su verdad. Los axiomas son la base de todas las demostraciones y, sin su auxilio, no puede establecerse la verdad matemática más sencilla.

Véanse los más importantes:

1.º *Una cosa es igual a ella misma.*

2.º *El todo es igual al conjunto de sus partes.*

3.º *El todo es mayor que una parte.*

4.º *Una parte es menor que el todo.*

5.º *Lo que se hace con las partes queda hecho con el todo.*

6.º *Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.*

7.º *Dos cosas, una igual y otra desigual a otra tercera, no son iguales entre sí.*

8.º *Toda cantidad es, necesariamente, igual, mayor o menor que otra de su misma naturaleza.*

9.º *Si a cantidades iguales se les aumentan o disminuyen otras cantidades iguales, los resultados son también iguales.*

10.º *Si a cantidades desiguales se les aumentan o disminuyen cantidades iguales, los resultados son también desiguales.*

11.º *Una cosa no puede ser y no ser al mismo tiempo.*

12.º *La distancia más corta entre dos puntos es la línea recta.*

Todo resultado contrario a un axioma es un *absurdo*, o imposible.

Postulado. — Es una verdad fundamental y de carácter práctico, cuya demostración es imposible.

Teorema. — Es una proposición cuya verdad necesita ser demostrada. En todo teorema hay que distinguir tres cosas: la *hipótesis*, que sirve de dato a la demostración: la *tesis*, que es el enunciado de la verdad demostrable, y la *demostración*, que es el raciocinio en virtud del cual se hace evidente la verdad enunciada. Un teorema es *recíproco* de otro, cuando la hipótesis y la tesis del primero son, respectivamente, la tesis y la hipótesis del segundo.

Lema. — Es un teorema auxiliar que se antepone a otro para facilitar su demostración.

Corolario. —Es una verdad que se deriva inmediatamente, o por medio de un sencillo razonamiento, de un teorema, de un axioma o de una definición.

Escolio. — Significa: nota, observación, advertencia. Sirve para ampliar alguna proposición y también, para llamar la atención sobre un objeto, su utilidad, etc.

Teoría. — Es el conjunto de verdades relativas a una ciencia o a una de sus partes, y relacionadas entre sí. Los elementos integrantes de la teoría son los teoremas, y el conjunto de los que se necesitan para el desenvolvimiento completo de las matemáticas, o de una de sus partes, constituye la teoría de la misma.

Problema. — Es un enunciado práctico en que nos proponemos determinar una o más cosas desconocidas llamadas *incógnitas*, relacionadas con otras conocidas llamadas *datos*. En todo problema, hay que distinguir cuatro partes: el *enunciado*, la *resolución*, la *demostración* y la *comprobación*.

El enunciado es el problema propiamente dicho; constituyen la resolución, las reglas que deben practicarse para hallar los valores de la incógnita o incógnitas; la demostración evidencia que, practicando las reglas que la resolución indica, se obtienen los resultados que se desean, y la comprobación pone de manifiesto si el resultado obtenido por la resolución satisface completamente las condiciones del enunciado.

18. Definición de la Aritmética (*). — Se llama *Aritmética* la parte de las ciencias matemáticas que trata de la expresión, cálculo y propiedades de los *números*.

19. Operaciones fundamentales de la Aritmética. — Son las de *expresión, representación, composición* y *descomposición* de los números.

La parte que trata de expresarlos y representarlos, se llama *numeración*.

La composición comprende tres distintas operaciones: la *adición*, la *multiplicación* y la *elevación a potencias*.

La descomposición comprende, también, tres operaciones distintas: la *substracción*, la *división* y la *extracción de raíces*.

20. Signos aritméticos. — Los signos que se emplean en Aritmética para simplificar los razonamientos son los siguientes:

$+$	significa y se lee	*más.*
$-$	» » » »	*menos.*
$\times$ o $\cdot$	significan » » »	*multiplicado por...*
$:$	significa » » »	*dividido por...*
$=$	» » » »	*igual a...*
$<$	» » » »	*menor que...*
$>$	» » » »	*mayor que...*
$\nless$	» » » »	*no es menor que...*
$\ngtr$	» » » »	*no es mayor que...*
$\leqq$	» » » »	*igual o menor que...*
$\geqq$	» » » »	*igual o mayor que...*
$\lesseqgtr$	» » » »	*equivale a...*

8^4 El número de menor tamaño escrito en la parte superior del de tamaño mayor es el *signo de potenciación.*

$\sqrt{}$ Se llama *signo radical*, o de extracción de raíces.

Los signos $+$, $-$ y $\sqrt{}$ se suponen inventados por el matemático alemán *Rudolph*, en el siglo XVI; si bien hay quien supone que *Leonardo de Vinci* fué el primero que empleó los dos primeros, y otros los atribuyen a *Stifels.*

El signo $=$ lo inventó *Record*, matemático inglés, en el siglo XVI.

El signo $\times$ se debe a *Ongtrei*, en el siglo XVII; *Leibnitz* fué el primero que empleó el punto de la escritura para indicar la multiplicación.

Los signos $>$ y $<$ fueron inventados por el matemático inglés *Harriot*, a principios del siglo XVII.

(*) La palabra *Aritmética* tiene su origen en la voz griega *arithmos*, el número.

21. Igualdad. — Es la reunión de dos cantidades unidas por el signo *igual*. Toda igualdad la constituyen tres elementos: *el primer miembro, el signo* y *el segundo miembro*. Se llama primer miembro la cantidad colocada a la izquierda del signo, y segundo miembro, la colocada a su derecha. V. gr.: *Un duro = cinco pesetas.*

22. Desigualdad. — Es la reunión de dos cantidades unidas por los signos *menor que* o *mayor que*. Tiene las mismas partes que la igualdad, y las cantidades se distinguen con los mismos nombres. V. gr.: *Un duro > tres pesetas; tres pesetas < un duro.*

EXPRESIÓN Y REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

De la numeración (*)

23. Concepto de la numeración. — La parte de la Aritmética que trata de la expresión y representación de los números, se llama *numeración*.
Divídese en *hablada* y *escrita*.

La primera trata de la expresión de los números por medio de la palabra.

La segunda, de su representación por medio de signos llamados *cifras* o *guarismos*.

24. Sistemas de numeración.—Son las diferentes combinaciones convencionales inventadas para la expresión y representación de los números.

25. Base de un sistema.—El número de los signos o guarismos empleados para la representación de los números y también el número de unidades de un orden cualquiera que se necesita para componer una unidad de orden inmediato superior, se llama *base* de un sistema de numeración.

Nuestro sistema, casi universalmente admitido, se llama *décuplo* o *decimal*, puesto que su base es *diez*.

Numeración hablada

26. Generación de los números enteros. — Todos los números enteros pueden considerarse engendrados por la agregación sucesiva de la unidad entera (**) con ella misma. De modo, pues, que si a una unidad se añade otra unidad, el resultado es un número; añadiendo a este número otra nueva unidad, se obtiene otro número, y así sucesivamente. Dedúcese, evidentemente, que hay infinidad de números; pues, por grande que un número sea, añadiéndole una unidad, se obtiene otro mayor.

Siendo los números infinitos, hubiera sido imposible recordarlos dando a cada uno un nombre particular. Ha sido necesario *hallar el medio de expresarlos todos combinando regularmente un corto número de palabras.* En esto consiste el

27. Artificio de la numeración hablada. — Una unidad, cualquiera que sea, se expresa con la palabra *uno*. El número UNO es la UNIDAD SIMPLE, o de PRIMER ORDEN, de la escala numérica.

(*) Del latín *numerare*, contar.
(**) En lo sucesivo, como medio de simplificación, distinguiremos la *unidad entera* sirviéndonos solamente de la palabra *unidad*.

La agregación de	*uno* y *uno*	se expresa con la	palabra....	*dos.*
»	*dos* y *uno*	»	»	*tres.*
»	*tres* y *uno*	»	»	*cuatro.*
»	*cuatro* y *uno*	»	»	*cinco.*
»	*cinco* y *uno*	»	»	*seis.*
»	*seis* y *uno*	»	»	*siete.*
»	*siete* y *uno*	»	»	*ocho.*
»	*ocho* y *uno*	»	»	*nueve.*
»	*nueve* y *uno*	»	»	*diez.*

La reunión de *diez unidades* constituye una DECENA, o UNIDAD DE SEGUNDO ORDEN, y se cuenta por decenas hasta llegar a diez, agregando, sucesivamente, una decena, resultando los números siguientes:

Una decena, o unidad de segundo orden, que se llama			*diez.*
Dos decenas, o dos unidades de segundo orden, que se llaman			*veinte.*
Tres decenas, o tres	»	»	» *treinta.*
Cuatro decenas, o cuatro	»	»	» *cuarenta.*
Cinco decenas, o cinco	»	»	» *cincuenta.*
Seis decenas, o seis	»	»	» *sesenta.*
Siete decenas, o siete	»	»	» *setenta*
Ocho decenas, u *ocho*	»	»	» *ochenta*
Nueve decenas, o nueve	»	»	» *noventa.*
Diez decenas, o diez	»	»	» CIENTO.

Para expresar los números comprendidos entre dos decenas consecutivas, se añaden a la primera los nombres de los *diez* primeros números. Así, para expresar los números comprendidos entre *treinta* y *cuarenta*, diremos: *treinta* y *uno*, *treinta* y *dos*, *treinta* y *tres*, etc. Los comprendidos entre *diez* y *veinte*, son: *diez* y *uno*, u *once; diez* y *dos*, o *doce; diez* y *tres*, o *trece; diez* y *cuatro*, o *catorce; diez y cinco*, o *quince; diez* y *seis*, *diez* y *siete*, etc.

La reunión de *diez decenas* constituye una CENTENA, o UNIDAD DE TERCER ORDEN, y se cuenta por centenas hasta llegar a diez, lo mismo que por unidades y decenas, resultando los números siguientes:

Una centena, o *unidad de tercer orden, que se llama*.........			*ciento.*
Dos centenas, o dos unidades de tercer orden, que se llaman			*doscientos.*
Tres centenas, o tres	»	»	» *trescientos.*
Cuatro centenas, o cuatro	»	»	» *cuatrocientos*
Cinco centenas, o cinco	»	»	» *quinientos*
Seis centenas, o seis	»	»	» *seiscientos.*
Siete centenas, o siete	»	»	» *setecientos.*
Ocho centenas, u ocho	»	»	» *ochocientos.*
Nueve centenas, o nueve	»	»	» *novecientos.*
Diez centenas, o diez	»	»	» MIL.

Para expresar los números comprendidos entre dos centenas consecutivas, se añaden a la primera los nombres de los *noventa y nueve* primeros números. Así, para expresar los números comprendidos entre *trescientos y cuatrocientos*, diremos: *trescientos uno*, *trescientos dos*, *trescientos tres*, etc.

La reunión de *diez centenas* constituye un MILLAR, o UNIDAD DE CUARTO ORDEN, y se cuenta por millares hasta llegar a diez, lo mismo que por unidades, decenas y centenas, resultando los números siguientes:

Un millar, o unidad de cuarto orden, que se llama............ *mil.*
Dos millares, o dos unidades de cuarto orden que se llaman.... *dos mil..*

....

....

Diez millares, o diez unidades de cuarto orden, que se llaman *diez mil*, o DECENA DE MILLAR.

Para expresar los números comprendidos entre dos millares consecutivos, se añaden al primero los nombres de los *novecientos noventa y nueve* primeros números. Así, para expresar los números comprendidos entre *dos mil* y *tres mil*, diremos: *dos mil uno*, *dos mil dos*, etc.

La reunión de *diez millares* constituye una DECENA DE MILLAR, o UNIDAD DE QUINTO ORDEN, y se cuenta por decenas de millar hasta llegar a diez, lo mismo que por unidades, decenas, centenas y millares, resultando los números siguientes:

Una decena de millar, o unidad de quinto orden .... *diez mil.*
Dos decenas de millar, o dos unidades de quinto orden .... *veinte mil.*
Tres decenas de millar, o tres unidades de quinto orden ...... *treinta mil.*
....
....
Diez decenas de millar, o diez unidades de quinto orden, *cien mil*, o CENTENA DE MILLAR.

Para expresar los números comprendidos entre dos decenas de millar consecutivas, añadimos a la primera los nombres de los *nueve mil, novecientos noventa y nueve* primeros números. Así, si las dos decenas de millar consecutivas fuesen *diez mil* y *veinte mil*, los números comprendidos entre ambas serían: *diez mil uno; diez mil dos;.... diez y nueve mil, novecientos noventa y nueve.*

La reunión de *diez decenas de millar* constituyen una CENTENA DE MILLAR, o UNIDAD DE SEXTO ORDEN, y se cuenta por centenas de millar hasta llegar a diez, lo mismo que por las unidades anteriores, resultando los números siguientes:

Una centena de millar, o unidad de sexto orden .... *cien mil.*
Dos centenas de millar, o dos unidades de sexto orden..... *doscientos mil.*
....
....
Diez centenas de millar, o diez unidades de sexto orden, *mil miles*, o un MILLÓN.

Para expresar los números comprendidos entre dos centenas de millar consecutivas, añadimos a la primera los nombres de los *noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve* primeros números. Así, si las dos centenas de millar consecutivas fuesen *cien mil* y *doscientos mil*, los números comprendidos entre ambas serían: *cien mil uno; cien mil dos;.... ciento noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve.*

La reunión de *diez centenas de millar* constituye un MILLÓN, o UNIDAD DE SÉPTIMO ORDEN, y se cuenta por millones como por unidades, decenas, etc., así: *un millón, dos millones, tres millones*, etc.

Para expresar los números comprendidos entre dos millones consecutivos, se añaden al primero los nombres de los *novecientos noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve primeros números.* Así, si los dos millones consecutivos fuesen *tres millones* y *cuatro millones*, los números comprendidos entre ambos serían: *tres millones uno; tres millones dos;.... tres millones, novecientos noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve.*

El *millón* puede considerarse como el término del sistema; pues tratándose de números mayores, se repiten las mismas unidades *referidas al millón.* Así:

Unidades	de	millón.
Decenas	»	»
Centenas	»	»
Millares	»	»
Decenas de millar	»	»
Centenas de millar	»	»

Diez centenas de millar de millón forman un BILLÓN.

Para números mayores, se sigue el mismo orden de unidades, decenas, centenas, etc., *referidas al billón*. Por lo mismo, diez centenas de millar de billón, forman un TRILLÓN.

Y siguiendo la misma marcha, se cuenta por *trillones*, *cuatrillones*, etc.

De modo, pues, que con un reducido número de palabras y sus compuestas y derivadas, podemos expresar todos los números por grandes que éstos sean. Estas voces son:

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, ciento, mil, millón, billón, trillón, cuatrillón, etc.

Como se ve, *el artificio de la numeración décupla, se reduce a considerar diferentes órdenes de unidades que van formándose por la agrupación de diez unidades del orden inferior inmediato*. Así, una decena equivale a diez unidades; una centena, a diez decenas; un millar, a diez centenas, etcétera.

Numeración escrita

28. **Signos de la numeración escrita.** — Así como la numeración hablada facilita la manera de expresar todos los números mediante un reducido número de palabras, la numeración escrita, fundándose en las convenciones de la hablada, *combinando los signos representativos de los nueve primeros números y el de la carencia de unidades de un orden cualquiera, signo de la* NADA, representa todos los números por grandes que sean. Estos signos son:

Signos:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0. (*)
Valores que representan:	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve,	cero.

Los nueve guarismos primeros se llaman cifras *significativas*; el signo cero, puesto que no representa cantidad, se llama cifra *insignificativa*.

29. **Artificio de la numeración escrita.** — Consiste, simplemente, en la convención de que cada *cifra represente unidades diez veces mayores que su inmediata de la derecha, iniciándose la escala de valores décuplos en la cifra que ocupe el primer lugar de la derecha de todo número*.

Según esto, la *primera* cifra de la derecha representa *unidades simples;* su inmediata de la izquierda, *decenas;* la de la izquierda inmediata a ésta, *centenas;* la de la izquierda inmediata a las centenas, *millares*, y así sucesivamente:

Según esto, el número 246852 es un compuesto de

Dos *unidades simples*, o de primer orden.
CINCO *decenas*, o unidades de segundo orden.
OCHO *centenas*, » » tercer orden.
SEIS *millares* » » cuarto orden.
CUATRO *decenas de millar*, » » quinto orden.
DOS *centenas de millar*, » » sexto orden.

Y como que *dos centenas de millar* componen *doscientos millares; cuatro decenas de millar, cuarenta millares*, y además hay *seis millares*, el número dado se compone de *doscientos cuarenta y seis millares*, ocho centenas, cinco decenas y dos unidades.

(*) Estos signos se llaman cifras arábigas, puesto que los árabes españoles las introdujeron en Europa en el siglo X; aunque su uso puede decirse que no se generalizó hasta últimos del siglo XV y principios del XVI.

Y como que *ocho centenas* componen *ochocientas unidades;*
cinco decenas » *cincuenta unidades,*
y además hay .... *dos unidades,*

el número propuesto se leerá:

Doscientas cuarenta y seis mil, ochocientas cincuenta y dos unidades.

Cuando un número carece de unidades de algún orden, tiene, realmente, *cero* unidades de aquel orden, y por lo mismo, se escribe la cifra cero en el lugar o lugares correspondientes.

Así, por ejemplo, el número 409506 es un compuesto de

SEIS *unidades simples* o de primer orden.			
CERO *decenas,*	o unidades	de segundo	orden
CINCO *centenas,*	»	» tercer	»
NUEVE *millares,*	»	» cuarto	»
CERO *decenas de millar*	»	» quinto	»
CUATRO *centenas de millar,*	»	» sexto	»

Y como que *cuatro centenas de millar* componen *cuatrocientos millares*
y además hay.................... *nueve millares,*

el número dado se compone de *cuatrocientos nueve millares,* cinco centenas y seis unidades.

Y como que *cinco centenas* componen *quinientas unidades*
y además hay......... *seis unidades,*

el número propuesto se leerá:

Cuatrocientas nueve mil, quinientas seis unidades.

De lo que acabamos de exponer se deduce, pues, que cada cifra tiene dos valores, uno *absoluto* y otro *relativo.*

El valor absoluto lo indica su figura, y el relativo, puramente variable, el lugar que ocupa en la escritura del número.

Si nos fijamos, por ejemplo, en el número 4444, formado por cifras iguales, el valor *absoluto* de la cifra es *cuatro;* pero si atendemos al orden de colocación empezando por la derecha, el primer cuatro significa *cuatro unidades;* el segundo, *cuatro decenas;* el tercero, *cuatro centenas,* y el cuarto, *cuatro millares.*

Podemos ya, pues, dar la

30. Regla para escribir un número. — *Se escriben, sucesivamente, de izquierda a derecha, las unidades de los diferentes órdenes empezando por las de orden superior, colocando la cifra cero en los lugares que deben ocupar los órdenes que carecen de unidades.*

31. Regla para leerlo. — Para leer un número cualquiera, no hay más que *enunciar, sucesivamente y empezando por la izquierda, los valores absolutos y relativos de sus cifras significativas.*

Para mayor comodidad, se divide el número en grupos de a seis cifras empezando por la derecha. Entre el primer grupo y el segundo, y en la parte inferior, se escribe la cifra 1; entre el segundo y el tercero, la cifra 2; entre el tercero y el cuarto, la cifra 3, y así sucesivamente. Cada grupo de a seis cifras se subdivide en dos grupos de a tres, colocando una coma entre ellos. Seguidamente, empezando por la izquierda, se leen, sucesivamente, las diferentes secciones, posponiendo la palabra *mil,* donde se encuentre una coma; *millón,* donde se encuentre el *uno; billón,* donde se encuentre el *dos; trillón,* donde se encuentre el *tres,* y así sucesivamente.

EJEMPLO: Sea el número 9846302965840029542874.

Se prepara así: $9{,}846_3302{,}965_2840{,}029_1542{,}874$.

Y se leerá de este modo: *Nueve mil, ochocientos cuarenta y seis trillones, trescientos dos mil, novecientos sesenta y cinco billones, ochocientos cuarenta mil, veintinueve millones, quinientos cuarenta y dos mil, ochocientos setenta y cuatro* unidades.

Numeración romana

32. **Objeto de la numeración romana.** — Queda reducido hoy a indicar el número de orden de los capítulos y tomos de las obras literarias, el de los siglos, papas, emperadores, reyes, etc.

33. **Cifras de esta numeración.** — Las cifras empleadas en la numeración romana son

las letras	I	V	X	L	C	D	M (*)
que representan	1	5	10	50	100	500	1000

34. **Reglas para escribir y leer números romanos.** — Las reglas que no debemos olvidar para escribir y leer números romanos son las siguientes:

1.ª *Si a la* derecha *de una cifra se pone otra igual o menor, el valor de la primera queda aumentado con el valor de la segunda.*

2.ª *Si a la* izquierda *de una cifra se escribe otra menor, el valor de la primera queda disminuído en el de la segunda.*

3.ª *En ningún número, por regla general, se pone una misma cifra cuatro veces seguidas.*

4.ª *Las unidades simples se transforman en unidades de millar, poniendo una raya horizontal encima del número o números que las expresan.*

5.ª *Si entre dos cifras cualesquiera existe otra de menor valor, se combina con la siguiente para disminuirla.*

EJEMPLOS DE NÚMEROS ROMANOS

1.	I.	32.	XXXII.	63.	LXIII.	94.	XCIV.
2.	II.	33.	XXXIII.	64.	LXIV.	95.	XCV.
3.	III.	34.	XXXIV.	65.	LXV.	96.	XCVI.
4.	IV.	35.	XXXV.	66.	LXVI.	97.	XCVII.
5.	V.	36.	XXXVI.	67.	LXVII.	98.	XCVIII.
6.	VI.	37.	XXXVII.	68.	LXVIII.	99.	XCIX.
7.	VII.	38.	XXXVIII.	69.	LXIX.	100.	C.
8.	VIII.	39.	XXXIX.	70.	LXX.	101.	CI.
9.	IX.	40.	XL.	71.	LXXI.	104.	CIV.
10.	X.	41.	XLI.	72.	LXXII.	109.	CIX.
11.	XI.	42.	XLII.	73.	LXXIII.	114.	CXIV.
12.	XII.	43.	XLIII.	74.	LXXIV.	149.	CXLIX.
13.	XIII.	44.	XLIV.	75.	LXXV.	399.	CCCXCIX.
14.	XIV.	45.	XLV.	76.	LXXVI.	400.	CD.
15.	XV.	46.	XLVI.	77.	LXXVII.	444.	CDXLIV.
16.	XVI.	47.	XLVII.	78.	LXXVIII.	445.	CDXLV.
17.	XVII.	48.	XLVIII.	79.	LXXIX.	449.	CDXLIX.
18.	XVIII.	49.	XLIX.	80.	LXXX.	450.	CDL.
19.	XIX.	50.	L.	81.	LXXXI.	899.	DCCCXCIX.
20.	XX.	51.	LI.	82.	LXXXII.	900.	CM.
21.	XXI.	52.	LII.	83.	LXXXIII.	989.	CMLXXXIX.
22.	XXII.	53.	LIII.	84.	LXXXIV.	990.	CMXC.
23.	XXIII.	54.	LIV.	85.	LXXXV.	994.	CMXCIV.
24.	XXIV.	55.	LV.	86.	LXXXVI.	995.	CMXCV.
25.	XXV.	56.	LVI.	87.	LXXXVII.	999.	CMXCIX.
26.	XXVI.	57.	LVII.	88.	LXXXVIII.	1666.	MDCLXVI.
27.	XXVII.	58.	LVIII.	89.	LXXXIX.		954,419
28.	XXVIII.	59.	LIX.	90.	XC.		
29.	XXIX.	60.	LX.	91.	XCI.		
30.	XXX.	61.	LXI.	92.	XCII.		
31.	XXXI.	62.	LXII.	93.	XCIII.		$\overline{\text{CMLIV}}\text{CDXIX}$

(*) El número *mil*, antiguamente, también se cifraba con dos CC encontradas y una I en medio, así: CIↃ.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Suma o adición (*)

35. Definición. — La *suma*, o *adición*, es una operación que tiene por objeto *reunir en un solo número el valor de dos o más.*

36. Términos de la operación y resultado.—Los términos de la operación de sumar se llaman *sumandos* y el resultado, *suma* o *total.*

Para sumar números concretos, los sumandos han de ser homogéneos.

37. Indicación de la suma.—Para indicar que dos o más números han de sumarse, se escriben unos a continuación de otros separados por el signo *más.*

Así: $4 + 5 + 9$, se lee *cuatro, más cinco, más nueve*, e indica que estos tres números han de sumarse.

38. Casos que puede ofrecer la suma y su resolución. — En la operación de sumar, pueden considerarse dos casos:

1.º Que los sumandos sean números dígitos; 2.º Que los sumandos sean polidígitos.

SENTIDO HORIZONTAL

SENTIDO VERTICAL

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

TABLA DE SUMAR

USO DE ESTA TABLA. — Para hallar la suma de dos números, se busca uno de ellos en la primera columna horizontal, y el otro en la primera vertical de la izquierda, o viceversa, y debajo del primero y en frente del segundo, se hallará la suma.

(*) Del latín *addere*, añadir.

Para resolver el primer caso, *se escriben los sumandos como cuando se indica la operación, a continuación se escribe el signo de igualdad y seguidamente el resultado, que se obtiene agregando al primer sumando las unidades del segundo; a la suma obtenida, las unidades del tercero, y así sucesivamente.*

Propongámonos, por ejemplo, sumar los números 8, 4 y 3.

Preparemos la operación de este modo: $8 + 4 + 3 =$

Para hallar la suma, descompongamos los sumandos en unidades, sumemos estas unidades, y la suma será el total que se desea. Así:

$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$
$$3 = 1 + 1 + 1$$

Sumando ordenadamente los primeros y segundos miembros de estas igualdades, tenemos que

$$8 + 4 + 3 = (1+1+1+1+1+1+1+1) + (1+1+1+1) + (1+1+1)$$

$$\text{Luego } 8 + 4 + 3 = 15$$

La repetición de adiciones con los números dígitos, nos conduce a aprender fácilmente de memoria la suma de cada dos y, por esta razón, puede sentarse la regla que hemos dado.

Para resolver el segundo caso, *se escriben los sumandos unos debajo de otros de modo que se correspondan en columna vertical las cifras que representen unidades de igual orden. Se traza una raya debajo del último sumando, se suman las unidades de primer orden y se escribe la suma; se hace lo propio con las decenas y se escribe, igualmente, la suma; y así sucesivamente con los demás órdenes de superior categoría. Si la suma de las unidades de un orden cualquiera arroja unidades del superior inmediato, se guardan para añadirlas a sus correspondientes en los sumandos, escribiendo solamente en la suma las unidades sobrantes.*

La resolución de este caso se funda en el anterior. Sean los sumandos 452, 383 y 624. Como la suma ha de contener las unidades de los diferentes órdenes de los sumandos, lo conseguiremos reuniendo, separadamente, las unidades, decenas y centenas de los números propuestos. Para ello, descompongamos los sumandos en sus diversos órdenes de unidades, y se tendrá:

452 =	4 centenas	+ 5 decenas	+ 2 unidades.
383 =	3 »	+ 8 »	+ 3 »
624 =	6 »	+ 2 »	+ 4 »
Suma pedida:	13 centenas	+ 15 decenas	+ 9 unidades.

La escritura de esta suma puede simplificarse del modo siguiente:

2 unidades más 3 son 5 unidades; más 4, son 9 unidades: escribo.. 9 *unidades.*
5 decenas más 8, son 13 decenas; más 2, son 15 decenas, que componen 1 centena y 5 decenas; reservo una centena y escribo.... 5 *decenas.*
1 centena reservada más 4, son 5 centenas; más 3, son 8 centenas; más 6 son 14 centenas, que componen un millar y 4 centenas; escribo.................................... 1 *millar y* 4 *centenas.*

La suma obtenida es, pues: 1 millar, 4 centenas, 5 decenas y 9 unidades = 1459.

En la práctica, no es necesaria esta descomposición; escribimos los sumandos así, conforme a la regla:

$$\begin{array}{lr} & 452 \\ & +\ 383 \\ & +\ 624 \\ \hline \text{Suma pedida:} & 1459 \end{array}$$

Si la suma de cada orden de unidades no excede de 9, es indiferente empezar la operación por la derecha o por la izquierda; pero cuando no es así, como ordinariamente sucede, es conveniente empezar por la derecha, porque así se agregan con suma facilidad a un orden superior las unidades de la misma naturaleza procedentes de las sumas de los inferiores inmediatos.

La suma obtenida de este modo contiene todas las unidades, todas las decenas, todas las centenas, etc., de los sumandos y, por tanto, es la verdadera.

Si los sumandos son muchos, a fin de evitar equivocaciones, *pueden reunirse en grupos distintos, sumar estos grupos y luego reunir en una sola las diferentes sumas parciales.*

Sean, por ejemplo, los sumandos siguientes: 24,615 + 3,419 + 8,632 + 9 + 124,816 + 42,785 + 128 + 87,626 + 432 + 998 + 186,905. Podemos agruparlos como sigue:

24,615 3,419 8,632 9	36,675	suma del 1.er grupo.
124,816 42,785 128 87,626	255,355	» » 2.º »
432 998 186,905	188,335	» » 3.er »
	480,365	suma total.

39. Propiedades de la adición. — De la definición de la suma, se deducen las propiedades siguientes:

1.ª Una suma no altera, aunque varíe el orden de los sumandos.

2.ª La suma aumenta o disminuye en tanto cuanto se aumente o disminuya uno de los sumandos.

3.ª Si se aumenta uno de los sumandos en tanto cuanto se disminuye otro, la suma no altera.

40. Prueba de la adición.—Prueba de una operación es otra operación, por medio de la cual se adquiere la casi seguridad de que no se ha padecido error al ejecutar la operación primera.

La prueba de la adición consiste en *repetir la operación en un orden inverso al que se siguió para ejecutarla.* Si ambas veces se obtiene la misma suma, el resultado se puede tener por verdadero.

Ejercicios mentales sobre la suma

1. Añadir 2 a un número, añadirle de nuevo al número obtenido, y así sucesivamente, hasta llegar a un número mayor que 100. Así:

1 y 2 son 3, y 2 son 5, y 2 son 7, y 2 son 9....
2 y 2 » 4, y 2 » 6, y 2 » 8, y 2 » 10....

2. Los mismos ejercicios con el número 3. Así:

1 y 3 son 4, y 3 son 7, y 3 son 10, y 3 son 13....
2 y 3 » 5, y 3 » 8, y 3 » 11, y 3 » 14....
3 y 3 » 6, y 3 » 9, y 3 » 12, y 3 » 15....

3. Los mismos ejercicios con el número 4. Así:

1 y 4 son 5, y 4 son 9, y 4 son 13, y 4 son 17....
2 y 4 » 6, y 4 » 10, y 4 » 14, y 4 » 18....
3 y 4 » 7, y 4 » 11, y 4 » 15, y 4 » 19....
4 y 4 » 8, y 4 » 12, y 4 » 16, y 4 » 20....

4. Los mismos ejercicios con el número 5. Así:

1 y 5 son 6, y 5 son 11, y 5 son 16, y 5 son 21....
2 y 5 » 7, y 5 » 12, y 5 » 17, y 5 » 22....
3 y 5 » 8, y 5 » 13, y 5 » 18, y 5 » 23....
4 y 5 » 9, y 5 » 14, y 5 » 19, y 5 » 24....
5 y 5 » 10, y 5 » 15, y 5 » 20, y 5 » 25....

5. Los mismos ejercicios con el número 6. Así:

1 y 6	son	7, y 6	son	13, y 6	son	19, y 6	son	25....
2 y 6	»	8, y 6	»	14, y 6	»	20, y 6	»	26....
3 y 6	»	9, y 6	»	15, y 6	»	21, y 6	»	27....
4 y 6	»	10, y 6	»	16, y 6	»	22, y 6	»	28....
5 y 6	»	11, y 6	»	17, y 6	»	23, y 6	»	29....
6 y 6	»	12, y 6	»	18, y 6	»	24, y 6	»	30....

6. Los mismos ejercicios con el número 7. Así:

1 y 7	son	8, y 7	son	15, y 7	son	22, y 7	son	29....
2 y 7	»	9, y 7	»	16, y 7	»	23, y 7	»	30....
3 y 7	»	10, y 7	»	17, y 7	»	24, y 7	»	31....
4 y 7	»	11, y 7	»	18, y 7	»	25, y 7	»	32....
5 y 7	»	12, y 7	»	19, y 7	»	26, y 7	»	33....
6 y 7	»	13, y 7	»	20, y 7	»	27, y 7	»	34....
7 y 7	»	14, y 7	»	21, y 7	»	28, y 7	»	35....

7. Los mismos ejercicios con el número 8. Así:

1 y 8	son	9, y 8	son	17, y 8	son	25, y 8	son	33....
2 y 8	»	10, y 8	»	18, y 8	»	26, y 8	»	34....
3 y 8	»	11, y 8	»	19, y 8	»	27, y 8	»	35....
4 y 8	»	12, y 8	»	20, y 8	»	28, y 8	»	36....
5 y 8	»	13, y 8	»	21, y 8	»	29, y 8	»	37....
6 y 8	»	14, y 8	»	22, y 8	»	30, y 8	»	38....
7 y 8	»	15, y 8	»	23, y 8	»	31, y 8	»	39....
8 y 8	»	16, y 8	»	24, y 8	»	32, y 8	»	40....

8. Los mismos ejercicios con el número 9. Así:

1 y 9	son	10, y 9	son	19, y 9	son	28, y 9	son	37....
2 y 9	»	11, y 9	»	20, y 9	»	29, y 9	»	38....
3 y 9	»	12, y 9	»	21, y 9	»	30, y 9	»	39....
4 y 9	»	13, y 9	»	22, y 9	»	31, y 9	»	40....
5 y 9	»	14, y 9	»	23, y 9	»	32, y 9	»	41....
6 y 9	»	15, y 9	»	24, y 9	»	33, y 9	»	42....
7 y 9	»	16, y 9	»	25, y 9	»	34, y 9	»	43....
8 y 9	»	17, y 9	»	26, y 9	»	35, y 9	»	44....
9 y 9	»	18, y 9	»	27, y 9	»	36, y 9	»	45....

9. Los mismos ejercicios con el número 10. Así:

1 y 10	son	11, y 10	son	21, y 10	son	31, y 10	son	41....
2 y 10	»	12, y 10	»	22, y 10	»	32, y 10	»	42....
3 y 10	»	13, y 10	»	23, y 10	»	33, y 10	»	43....
4 y 10	»	14, y 10	»	24, y 10	»	34, y 10	»	44....
5 y 10	»	15, y 10	»	25, y 10	»	35, y 10	»	45....
6 y 10	»	16, y 10	»	26, y 10	»	36, y 10	»	46....
7 y 10	»	17, y 10	»	27, y 10	»	37, y 10	»	47....
8 y 10	»	18, y 10	»	28, y 10	»	38, y 10	»	48....
9 y 10	»	19, y 10	»	29, y 10	»	39, y 10	»	49....
10 y 10	»	20, y 10	»	30, y 10	»	40, y 10	»	50....

Resta o substracción (*)

41. Definición. — La *resta* o *substracción*, es una operación que tiene por objeto *quitar un número de otro;* o bien, *conociendo una suma y uno de los dos sumandos que la constituyen, hallar el otro.*

42. Términos de la substracción y resultado. — El número mayor, o la suma dada, se llama *minuendo;* el número menor, o el sumando conocido, se llama *substraendo*, y el resultado, o sumando desconocido, *resto*, *exceso* o *diferencia* entre el minuendo y substraendo.

El minuendo, es, pues, igual a la suma del substraendo y el resto. El resto es, evidentemente, lo que falta al substraendo para igualar el mi-

(*) Del latín *substrahere*, quitar, disminuir.

nuendo, o bien, el exceso de éste sobre aquél; por lo cual también podemos decir que *restar es hallar la diferencia que existe entre dos números.*

43. Indicación de la resta. — Para indicar la substracción, se escribe el minuendo y a continuación el substraendo separados por el signo *menos.*

Así, por ejemplo, si queremos indicar que del número 12 se ha de quitar el 4, lo escribiremos así: 12 — 4.

Y como 8 es el número que, sumado con 4, da 12, inferimos que la diferencia entre ambos números es 8. Luego 12 — 4 = 8.

44. Casos que ofrece la resta y su resolución. — En la operación de restar, pueden admitirse dos casos: 1.º Que los términos sean números dígitos; 2.º Que sean polidígitos.

Para resolver el primer caso, *se escriben ambos términos como cuando la operación se indica; a continuación, el signo igual y, seguidamente, el resultado, que se obtiene quitando del minuendo las unidades del substraendo.*

Propongámonos, por ejemplo, hallar la diferencia entre 9 y 5.

Prepararemos la operación así: 9 — 5 =

Para hallar el resto, observaremos que del número 9 se han de quitar 5 unidades. Ahora bien; 9 — 1 = 8; 8 — 1 = 7; 7 — 1 = 6; 6 — 1 = 5; 5 — 1 = 4; luego el resto es 4; de consiguiente, 9 — 5 = 4.

El procedimiento primitivo debió consistir en quitar, como hemos hecho, del minuendo, una a una las unidades del substraendo; pero como sabemos que el *substraendo sumado con el resto da el minuendo*, la práctica adquirida en la suma fácilmente nos da el número que, sumado con el substraendo, arroja el minuendo, y este número es el *resto.*

Para resolver el segundo caso, *se escribe el minuendo y debajo el substraendo, de modo que se correspondan en columna vertical las cifras que representen unidades de igual orden. Se traza una raya debajo del substraendo, y, empezando por la derecha, se resta cada una de las cifras del substraendo de su correspondiente del minuendo. El número formado por estos restos parciales es el resto total. Si alguna cifra del substraendo es mayor que su correspondiente del minuendo, ésta se considera mentalmente aumentada en diez unidades, esto es, en una unidad del orden inmediato superior descompuesta en diez unidades del orden que se resta; y al restar de la cifra inmediata superior del minuendo su respectiva del substraendo, aquélla se considera disminuída en una unidad.*

La resolución de este caso se funda en el anterior. Supongamos que del número 9365 se ha de restar el número 5283. Descomponinedo minuendo y substraendo en sus diferentes órdenes de unidades, y restando los órdenes parcialmente, tendremos:

9365 =	9 millares	+ 3 centenas	+ 6 decenas	+ 5 unidades
5283 =	5 »	+ 2 »	+ 8 »	+ 3 »
Resto pedido:	4 millares	+ 0 centenas	+ 8 decenas	+ 2 unidades

Decimos: si de 5 unidades restamos 3 unidades, quedan 2 unidades: escribo .... 2 *unidades*

De 6 decenas no podemos restar 8 decenas. Consideramos mentalmente aumentadas las 6 decenas en una centena, o 10 *decenas.* 6 decenas, más 10 son 16 decenas; restando 8 decenas, quedan 8 decenas: escribo: .... 8 *decenas.*

Aunque en el minuendo hay tres centenas, sólo consideramos 2, pues ya hemos añadido 1 centena a las decenas; luego 2 centenas menos 2 centenas son 0 centenas: escribo .... 0 *centenas.*

Si de 9 millares restamos 5 millares, quedan 4 millares: escribo..... 4 *millares.*

La resta obtenida es, pues: 4 millares, 0 centenas, 8 decenas y 2 unidades = 4082.

En la práctica, no es necesaria esta descomposición; escribimos minuendo y substraendo así, conforme a la regla:

$$\begin{array}{lr} & 9365 \\ & -\ 5283 \\ \hline \text{Resto pedido.} & 4082 \end{array}$$

Si todas las cifras del substraendo fuesen menores que sus respectivas del minuendo, sería indiferente empezar la operación por la derecha o por la izquierda; pero como ordinariamente no sucede así, se empieza a restar por la derecha para agregar con facilidad una unidad del orden inmediato superior del minuendo a la cifra deficiente de este término, y luego disminuir en una unidad la cifra inmediata superior a la deficiente del minuendo.

45. Propiedades de la substracción.—De la definición de la resta, se deducen las siguientes consecuencias o propiedades:

1.ª Si el minuendo aumenta o disminuye en un número cualquiera, el resto aumentará o disminuirá en el mismo número.

2.ª Si el substraendo aumenta o disminuye en un número cualquiera, el resto disminuirá o aumentará en el mismo número.

3.ª Si el minuendo o el substraendo aumentan o disminuyen en un mismo número, el resto no variará.

4.ª Si el minuendo y el substraendo son iguales, el resto es cero.

46. Prueba de la substracción.—La prueba de la substracción puede verificarse de dos modos distintos:

1.º Sumando el substraendo con el resto, y si no hay error, debe resultar el minuendo.

2.º Restando del minuendo el resto, ha de resultar el substraendo.

47. Teoremas relativos a la substracción.—1.º *Para restar de un número una suma indicada, se resta del minuendo uno cualquiera de los sumandos del substraendo; de la diferencia obtenida se resta otro, y así sucesivamente, hasta restar el último sumando.*

Sea el minuendo 46 y el substraendo $8 + 3$. Digo que la diferencia será (*) $46 - (8 + 3) = 46 - 8 - 3 = 38 - 3 = 35$. En efecto; si el substraendo fuese solamente 8, el resto sería $46 - 8$; pero como el substraendo tiene 3 unidades más, el resto verdadero tendrá, evidentemente, 3 unidades menos; luego el resto será $46 - 8 - 3 = 35$, que es lo que queríamos demostrar.

Teorema 2.º Para restar de un número una diferencia indicada, se quita de dicho número el minuendo de la diferencia, y al resultado obtenido se le añade el substraendo de la misma.

Sea el minuendo 24 y el substraendo $(8-2)$. Digo que $24-(8-2) = 24-8+2$. En efecto; $24 - (8 - 2)$ significa que del número 24 hemos de restar la diferencia entre 8 y 2, esto es, 6. Si del número 24 restamos 8, quitamos 2 unidades de más; luego al resto obtenido le faltan 2 unidades para ser el verdadero. Luego $24 - (8 - 2) = 24 - 8 + 2$.

Ejercicios mentales sobre la resta

1. Restar 2 de un número; quitarle de nuevo del resultado, y así sucesivamente. Ejemplos:

30 — 2	quedan	28;	28 — 2	quedan	26;	26 — 2	quedan	24....
31 — 2	»	29;	29 — 2	»	27;	27 — 2	»	25....

2. Los mismos ejercicios con el número 3. Así:

30 — 3	quedan	27;	27 — 3	quedan	24;	24 — 3	quedan	21....
31 — 3	»	28;	28 — 3	»	25;	25 — 3	»	22....
29 — 3	»	26;	26 — 3	»	23;	23 — 3	»	20....

3. Los mismos ejercicios con el número 4. Así:

28 — 4	quedan	24;	24 — 4	quedan	20;	20 — 4	quedan	16....
27 — 4	»	23;	23 — 4	»	19;	19 — 4	»	15....
26 — 4	»	22;	22 — 4	»	18;	18 — 4	»	14....
25 — 4	»	21;	21 — 4	»	17;	17 — 4	»	13....

(*) Para indicar una operación cualquiera cuando uno o más datos son operaciones indicadas, estos datos se encierran dentro de un paréntesis.

4. Los mismos ejercicios con el número 5. Así:

40 — 5	quedan	35;	35 — 5	quedan	30;	30 — 5	quedan	25....
41 — 5	»	36;	36 — 5	»	31;	31 — 5	»	26....
42 — 5	»	37;	37 — 5	»	32;	32 — 5	»	27....
43 — 5	»	38;	38 — 5	»	33;	33 — 5	»	28....
44 — 5	»	39;	39 — 5	»	34;	34 — 5	»	29....

5. Los mismos ejercicios con el número 6. Así:

46 — 6	quedan	40;	40 — 6	quedan	34;	34 — 6	quedan	28....
47 — 6	»	41;	41 — 6	»	35;	35 — 6	»	29....
48 — 6	»	42;	42 — 6	»	36;	36 — 6	»	30....
49 — 6	»	43;	43 — 6	»	37;	37 — 6	»	31....
50 — 6	»	44;	44 — 6	»	38;	38 — 6	»	32....
51 — 6	»	45;	45 — 6	»	39;	39 — 6	»	33....

6. Los mismos ejercicios con el número 7. Así:

50 — 7	quedan	43;	43 — 7	quedan	36;	36 — 7	quedan	29....
51 — 7	»	44;	44 — 7	»	37;	37 — 7	»	30....
52 — 7	»	45;	45 — 7	»	38;	38 — 7	»	31....
53 — 7	»	46;	46 — 7	»	39;	39 — 7	»	32....
54 — 7	»	47;	47 — 7	»	40;	40 — 7	»	33....
55 — 7	»	48;	48 — 7	»	41;	41 — 7	»	34....

7. Los mismos ejercicios con el número 8. Así:

80 — 8	quedan	72;	72 — 8	quedan	64;	64 — 8	quedan	56....
81 — 8	»	73;	73 — 8	»	65;	65 — 8	»	57....
84 — 8	»	76;	76 — 8	»	68;	68 — 8	»	60....
86 — 8	»	78;	78 — 8	»	70;	70 — 8	»	62....
89 — 8	»	81;	81 — 8	»	73;	73 — 8	»	65....

8. Los mismos ejercicios con el número 9. Así:

90 — 9	quedan	81;	81 — 9	quedan	72;	72 — 9	quedan	63....
92 — 9	»	83;	83 — 9	»	74;	74 — 9	»	65....
95 — 9	»	86;	86 — 9	»	77;	77 — 9	»	68....
97 — 9	»	88;	88 — 9	»	79;	79 — 9	»	70....

9. Los mismos ejercicios con el número 10. Así:

90 — 10	quedan	80;	80 — 10	quedan	70;	70 — 10	quedan	60....
92 — 10	»	82;	82 — 10	»	72;	72 — 10	»	62....
97 — 10	»	87;	87 — 10	»	77;	77 — 10	»	67....
99 — 10	»	89;	89 — 10	»	79;	79 — 10	»	69....

10. Si añadimos nuestra edad al año en que nacimos, ¿qué indica la suma?

11. Si quitamos nuestra edad del año en que nos hallamos, ¿qué indica la resta?

12. Cuando se hace la suma de dos o más números, ¿por qué empezamos por la derecha?

13. ¿En qué casos será indiferente empezar la suma por la derecha o por la izquierda, o seguir un orden cualquiera?

14. Cuando se practica la resta de dos números, ¿por qué empezamos por la derecha?

15. ¿En qué casos será indiferente empezar la resta por la derecha o por la izquierda, o seguir un orden cualquiera?

16. ¿Qué debe añadirse o quitarse al minuendo o al substraendo de una resta, para aumentar la diferencia en 9? ¿Y para disminuirla de 9?

Aplicaciones de la adición y substracción y procedimientos para su enseñanza

Creemos que los niños no deben entrar en el cálculo formal de los números concretos hasta que conozcan bien el de los abstractos en las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir.

Llegado este caso, deben presentarse al niño, simultáneamente, problemas sencillos de sumar y restar primero, y de multiplicar y dividir después, a fin de que, ignorando la naturaleza de las cuestiones que se le proponen para resolver, se vea forzado a fijar su atención en el problema, *aprenda, así, a leer*, y, como consecuencia, a distinguir, sin ninguna clase de duda, cuando deba sumar o restar, multiplicar o dividir.

Para lograr mejor este objeto, los problemas deben estar redactados, hasta donde sea posible, con las mismas palabras y contener las mismas cantidades.

Vamos a poner algunos ejemplos, para que se vea el *procedimiento* empleado por nosotros en la enseñanza simultánea de la suma y resta de números concretos.

Decimos al niño:

Sumar, sabéis que es *reunir dos o más números homogéneos en uno solo.*

Haremos uso de la operación de sumar, *siempre que a la pregunta del problema se conteste más, o bien, siempre que el resultado haya de ser mayor.*

Restar, sabéis, también, que es *quitar un número de otro.*

Emplearemos la operación de restar, *siempre que a la pregunta del problema se conteste menos, o bien, siempre que el resultado haya de ser menor.*

PROBLEMA 1.° *Juan tenía 38 ptas., y ha cobrado 15 ptas. ¿Cuántas tiene?*—Si Juan tenía 38 ptas. y ha cobrado 15, ¿tiene más o menos de 38?...—Tiene más.—¿Cuántas más? — 15 ptas. más.—¿Así, pues, cuánto tiene Juan?—Tiene 38 ptas. más 15 ptas. — *Más*, ¿de qué operación es signo? — De sumar. — Luego este problema es de... — De sumar. — Si tuviésemos este dinero sobre la mesa y quisiéramos contarlo para saber cuántas pesetas hay entre todo, ¿qué es lo que primero haríamos? — Juntarlo. — Pero, juntar o reunir varias cosas, ¿qué es? — Sumar. — Por consiguiente esta operación es de... — Sumar. — Suma, pues...

PROBLEMA 2.° *Juan tenía 38 ptas., y pagó 15 ptas. ¿Cuántas tiene?*—Si Juan tenía 38 ptas. y pagó 15 ptas., después de haberlas pagado, ¿tuvo las 38 ptas.? — No, señor, tuvo menos.—¿Cuántas menos? — 15 ptas. menos. — Pero *menos*, ¿de qué operación es signo? — De restar.—Por consiguiente, ¿de qué es este problema?—De restar. — Por otra parte, esas 15 ptas. que pagó Juan, ¿de dónde las sacó? — De las 38 que tenía. — Pero sacar o quitar una cosa de otra, ¿qué es? — Restar. — Luego esta operación es de... — De restar. — Resta, pues.

PROBLEMA 3.° *Enrique tenía 167 ptas., y ha cobrado 43 ptas. de uno y 29 de otro. ¿Cuántas pesetas tiene?* — Si Enrique tenía 167 ptas. y ha cobrado 43 de uno y 29 de otro, después de haberlas cobrado, ¿ha tenido más o menos de 167 ptas.? — Ha tenido más. — ¿Cuántas más? — 43 y 29 más. — ¿Cuántas pesetas, pues, tiene Enrique? — Tiene 167, más 43, más 29. — Pero *más*, ¿de qué operación es signo? — De sumar.—Este problema, es pues, de... — De sumar. — Si tuvieseis aquí este dinero y quisieseis contarlo, ¿qué haríais? —Primero lo reuniríamos o juntaríamos.—Y juntando o reuniendo ¿qué operación haríais? — La de sumar, porque sumar es juntar o reunir, etc. — Por lo tanto este problema es de...— De sumar.— Suma, pues.

PROBLEMA 4.° *Enrique tenía 167 ptas., y pagó 43 ptas. a uno y 29 a otro. ¿Cuántas tiene?*—Si Enrique tenía 167 ptas. y pagó 43 ptas. a uno y 29 a otro, después de haberlas pagado, ¿tuvo las 167 ptas.? — No, señor, tuvo menos. — ¿Cuántas menos? — 43 y 29 menos. — ¿Sabes tú 43 y 29 cuánto hacen? — No, señor. — ¿Puedes saberlo? — Sí, señor. — ¿Cómo? — Sumándolos, porque se han de juntar o reunir. — Súmalos, pues.—Hacen 72 (después de haber practicado la suma).—Si, pues, Enrique tenía 167 ptas. y pagó 72, ¿cuánto tuvo después? — Tuvo 167 menos 72. — Pero, *menos*, ¿de qué operación es signo?—De restar. —Y esas 72 ptas. que Enrique pagó, ¿de dónde las sacó o quitó? — De las 167 que tenía. — Pero ya hemos dicho que quitar una cosa de otra es... — Restar. — De consiguiente, ¿qué haremos para resolver este problema? — Primero sumaremos todo lo que Enrique pagó, y luego restaremos la suma de lo que tenía. — Hazlo, pues.

Multiplicación (*)

48. Definición. — La *multiplicación* es una operación que tiene por objeto, *dados dos números, hallar un tercero que sea respecto a uno de ellos lo que es el otro respecto de la unidad.*

49. Términos de la multiplicación y resultado. — El número que se multiplica se llama *multiplicando;* el otro por el cual se multiplica, *multiplicador*, y el resultado, *producto.* El multiplicando y el multiplicador son los *factores del producto*, esto es, los números que engendran el producto.

50. Otra definición. — Según la anterior definición, multiplicar 4 por 3, por ejemplo, es hallar un número que sea con respecto a 4 lo que es el

(*) Del latín *multiplicare*, multiplicar.

3 respecto de la unidad; y como el multiplicador 3 es tres veces mayor que la unidad, el producto deberá ser tres veces mayor que el multiplicando 4; luego el producto será $4 + 4 + 4 = 12$.

Vemos, pues, que, si el multiplicador es un número entero, el producto contiene al multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador; luego cuando el multiplicador es un número entero, puede definirse la multiplicación diciendo: *una operación que tiene por objeto hacer un número tantas veces mayor como unidades tiene otro.*

Dedúcese también de lo expuesto que *la multiplicación de números enteros es sólo un caso particular de la suma.*

51. Indicación de la multiplicación. — Para indicar esta operación, se escriben multiplicando y multiplicador uno a continuación de otro, separados por × o por un punto.

Si se quiere indicar que el número 24 se ha de multiplicar por el número 8, se expresará de este modo: 24×8, o bien $24 \cdot 8$.

52. Casos que ofrece el multiplicar y su resolución. — Hemos visto que, cuando el multiplicador es un número entero, puede hallarse el producto de dos números repitiendo el multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador; pero esta operación sería, casi siempre, sumamente embarazosa.

Vamos a exponer otro método que ahorre el tiempo y el trabajo que el primero, necesariamente, exige.

Para ello, admitiremos en la multiplicación tres casos:

1.º *Multiplicar un número dígito por otro dígito.*
2.º *Multiplicar un número polidígito por un dígito.*
3.º *Multiplicar dos números polidígitos.*

Primer caso. — Para multiplicar un número dígito por otro, basta saber de memoria la tabla siguiente, atribuída a Pitágoras, pues ella contiene los productos de todos los números dígitos multiplicados entre sí.

TABLA PITAGÓRICA

SENTIDO HORIZONTAL

SENTIDO VERTICAL

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Construcción y uso. — Se escriben los nueve primeros números en línea horizontal y, sumando cada uno consigo mismo, se obtiene otra columna, la segunda, que contiene los productos de los números respectivos de la primera, por 2. Sumando cada número de la columna primera con su correspondiente de la segunda, se obtiene la columna tercera, que comprende los productos de los números respectivos de la primera, por 3, y así sucesivamente.

Para hallar, por medio de esta tabla, el producto de un número por otro, se busca el multiplicando en la primera columna horizontal y el multiplicador en la primera vertical o al contrario, y el producto se halla debajo de un factor en el cuadrado que se halla enfrente del otro. Así el producto de 8 × 7 es 56.

SEGUNDO CASO. — Para multiplicar un número polidígito por otro dígito, *se multiplican, sucesivamente, y empezando por la derecha, las unidades simples, decenas, centenas, etc., del multiplicando por el multiplicador; se escriben las unidades de cada producto parcial* (*) *y se reservan las decenas para añadirlas al producto parcial siguiente.*

El resultado así obtenido contiene las unidades, decenas, centenas, etcétera, del multiplicando repetidas tantas veces como unidades tiene el multiplicador; es decir, contiene a todo el multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador; luego dicho resultado es el producto verdadero.

Este caso se funda en el primero. Sea el multiplicando 8427 y el multiplicador, 5. Según la definición, el producto de 8427 por 5 será cinco veces mayor que el multiplicando, y como éste es un todo compuesto de cuatro partes, unidades, decenas, centenas y millares, obtendremos, evidentemente, el producto deseado, haciendo cinco veces mayor cada una de estas partes, pues *lo que se haga con ellas quedará hecho con el todo.*

Multiplicando: 8427 = 8 millares + 4 centenas + 2 decenas + 7 unidades.
Multiplicador: .... × 5

Producto total: ...... 40 millares + 20 centenas + 10 decenas + 35 unidades.

En 35 unidades, hay 3 decenas y 5 unidades; reservo las decenas y escribo .... 5 *unidades.*
3 decenas más 10, son 13 decenas, que componen 1 centena y 3 decenas; reservo una centena y escribo .... 3 *decenas.*
1 centena más 20, son 21 centenas, que componen 2 millares y 1 centena; reservo los 2 millares y escribo.................. 1 *centena.*
2 millares más 40 son 42 millares, que los escribo .... 42 *millares.*

Luego el producto de 8427 por 5 se compone de 42 millares, 1 centena, 3 decenas y 5 unidades = 42135.

En la práctica, no es necesaria esta descomposición. La operación se verifica escribiendo el multiplicador debajo del multiplicando, y trazando una raya debajo del primero para distinguir bien el producto de sus factores.

$$\left.\begin{array}{lr} \textit{Multiplicando:} & 8427 \\ \textit{Multiplicador:} & \times\ 5 \end{array}\right\} \textit{Factores del producto.}$$
$$\textit{Producto total:}\ 42135$$

Si, al verificar la multiplicación, en ningún producto parcial resultasen unidades del orden superior inmediato, sería indiferente empezar la multiplicación por la izquierda o por la derecha. Empezamos siempre por la derecha, para facilitar la agregación de las unidades superiores.

TERCER CASO. — Antes de resolver el tercer caso, debemos explicar los dos lemas siguientes:

Lema 1.º *Para multiplicar un número entero por la unidad seguida de ceros, se añaden a la derecha del multiplicando, tantos ceros como lleve la unidad.*

(*) Llamamos, aquí, *producto parcial* al producto del multiplicador por cada cifra del multiplicando.

En efecto; al añadir un cero a la derecha del número, cada una de sus cifras avanza un lugar hacia la izquierda, tomando un valor relativo 10 veces mayor que el que tenía; al añadir dos ceros, avanza cada cifra dos lugares, tomando un valor relativo 100 veces mayor; y así sucesivamente; luego el todo, que es el número propuesto, también queda hecho 10, 100, etc., veces mayor, o multiplicado 10, por 100, etc.
Según esto, $84 \times 10 = 840$; $586 \times 100 = 58600$; $9 \times 1000 = 9000$.

Lema 2.º Para multiplicar un número entero por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica dicho número por la cifra, y a la derecha del resultado se añaden tantos ceros como lleve la cifra significativa del multiplicador.

En efecto; sea el multiplicando 46 y el multiplicador, 200. Multiplicar 46 por 200 es hacer el número 46 *doscientas* veces mayor, y, según la definición, esto lo conseguiremos tomando el número 46 *doscientas* veces por sumando. Esta suma indicada será: $46 + 46 + 46$, etc., *doscientas veces*. Estos 200 sumandos pueden reunirse en grupos de a dos, y es evidente que resultarán 100 grupos. El valor de uno será $46 + 46$, ó $46 \times 2 = 92$, y el valor de 100 grupos (*Lema* 1.º), $92 \times 100 = 9200$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

Resolución del tercer caso. — Para multiplicar un número polidígito por otro polidígito, *se multiplica el multiplicando por cada cifra significativa del multiplicador, y los productos parciales* (*) *obtenidos se escriben unos debajo de otros, de modo que las unidades de un mismo orden se correspondan en columna vertical. La suma de todos los productos parciales será el producto total.*

En efecto; sea el multiplicando 2456 y el multiplicador, 372. Obtendremos el producto total repitiendo el multiplicando 372 veces, esto es, tantas veces como unidades hay en el multiplicador 372; es decir, 2 veces, más 70 veces, más 300 veces. Para mayor claridad, dispondremos los términos del modo siguiente:

Multiplicando:	2456	
Multiplicador:	$\times$ 372	
	4912	Producto parcial de 2456×2 (2.º caso).
	171920	» » » 2456×70 (2.º lema).
	736800	» » » 2456×300 (2.º lema).
	913632	Producto total de 2456×372.

Obsérvese que los ceros que acompañan a los productos parciales correspondientes a las decenas, centenas, etc., del multiplicador por el multiplicando pueden suprimirse, teniendo en cuenta las reglas que se dan en la suma.

53. Abreviaciones de la multiplicación. — Puede abreviarse la multiplicación en los casos siguientes:

1.º *Cuando uno de los dos factores termina en ceros.*
2.º *Cuando terminan en ceros los dos factores.*

Cuando termina en ceros uno de los dos factores, se verifica la operación como si los ceros no existieran, y a la derecha del resultado obtenido, se añaden los ceros que acompañan a dicho factor.

Sea el multiplicando 486 y el multiplicador, 4200. Se obtendrá el producto repitiendo el multiplicando 4200 veces. Estos 4200 sumandos pueden reunirse en grupos de a 42, y habrá, por consiguiente, 100 grupos. El valor de uno será $486 \times 42 = 20412$, y el valor de los 100 grupos será 100 veces mayor que el de uno, esto es, $20412 \times 100 = 2041200$, conforme a la regla.

(*) Llamamos *productos parciales* a los que resultan del multiplicando por cada cifra del multiplicador, y *producto total*, a la suma de los productos parciales.

Cuando los dos factores terminan en ceros, se verifica la operación como si los ceros no existieran, y a la derecha del resultado obtenido, se añaden tantos ceros como hay en ambos factores.

Sea el multiplicando 8400 y el multiplicador, 420. Puede indicarse así: 84 centenas $\times$ 420. Según el caso anterior,
84 centenas $\times 420 = 84$ centenas $\times 42 \times 10 = 35280$ centenas $= 3528000$ unidades.

54. Orden de dos factores. — *Aunque se invierta el orden de dos factores, no altera el producto de los mismos.*

Sea el multiplicando 5 y el multiplicador 3. Digo que $5 \times 3 = 3 \times 5$.

En efecto; escribamos en fila horizontal cinco unidades, tantas como tiene el multiplicando, y repitamos esta fila 3 veces, tantas como unidades tiene el multiplicador.

$$\begin{array}{c} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

Observamos que las líneas horizontales son tres y que en cada una hay 5 unidades; luego la suma de todas las unidades del cuadro vale $5+5+5=5 \times 3$. Contando dichas unidades en columna vertical, resultan cinco líneas, cada una de las cuales tiene 3 unidades; luego la suma de estas unidades vale $3+3+3+3+3=3\times 5$. Como el número de unidades del cuadro es el mismo, ya se considere en sentido horizontal o vertical, resulta que $5 \times 3 = 3 \times 5$.

Escolio. — *En la práctica es conveniente tomar por multiplicador el factor de menos cifras; porque así, habiendo menos productos parciales, aparece simplificada la operación.*

55. Prueba de la multiplicación. — Se verifica invirtiendo el orden de los términos, esto es, *tomando el multiplicando por multiplicador y éste, por multiplicando.* Si no hay error, ambos productos son iguales.

56. Duplo de un número, triplo, cuádruplo, quíntuplo, séxtuplo, etc. — *Duplo de un número* es el producto de multiplicarlo por 2. Así el duplo de 8 es $8 \times 2 = 16$.

Triplo, es el producto de multiplicarlo por 3. Así, el triplo de 6 es $6 \times 3 = 18$.

Cuádruplo, quíntuplo, séxtuplo, séptuplo, etc., es el resultado de multiplicarlo por 4, 5, 6, 7, respectivamente.

57. Propiedades de la multiplicación. — Son las siguientes:

1.ª *Si el multiplicador es la unidad, el producto es igual al multiplicando.*

2.ª *Si el multiplicador es mayor que la unidad, el producto es mayor que el multiplicando.*

3.ª *Si el multiplicador es menor que la unidad, el producto es menor que el multiplicando.*

4.ª *Si uno de los dos factores es cero, el producto también es cero.*

5.ª *El producto de dos números enteros se compone de tantas cifras como tienen ambos factores, o una menos.*

58. Multiplicación de una suma indicada por un número. — Para multiplicar una suma indicada por un número, *se multiplican todos los sumandos por este número, y se suman los productos parciales obtenidos.*

Sea el multiplicando la suma indicada $4+8+3$ y el multiplicador, 5. Digo que (*)
$(4 + 8 + 3)\, 5 = 4 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 3 \cdot 5$.

(*) La suma indicada de varios números encerrada en un paréntesis, fuera del cual hay otro número u otra suma indicada, indica que este número o esta segunda suma indicada multiplican a la suma primera.

En efecto: multiplicar $4+8+3$ por 5 es hacer *cinco veces mayor* esta suma, y evidentemente lo conseguiremos haciendo 5 veces mayor cada uno de los sumandos. Luego $(4+8+3)\,5 = 4 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 3 \cdot 5$.

59. Multiplicación de una suma indicada por otra.—Para multiplicar una suma indicada por otra suma indicada, *se multiplican todos los sumandos de la primera por cada uno de los de la segunda, y después se suman los productos parciales obtenidos.*

Sea el multiplicando $8+3$ y el multiplicador $4+5$.
Digo que $(8+3) \times (4+5) = 8 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 3 \cdot 5$. En efecto:
Multiplicar $8+3$ por $4+5$, es hacer la suma $8+3$ *cuatro veces* mayor, más *cinco veces* mayor.
$(8+3)\,4 = 8 \cdot 4 + 3 \cdot 4$ según el caso anterior
$(8+3)\,5 = 8 \cdot 5 + 3 \cdot 5$ » » »
Luego $(8+3)(4+5) = 8 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 3 \cdot 5$.

60. Multiplicación de una diferencia indicada por un número.—Para multiplicar una diferencia indicada por un número, *se multiplican minuendo y substraendo por este número, y se restan los productos parciales obtenidos.*

Sea el multiplicando la diferencia indicada $12-5$ y el multiplicador, 4. Decimos que (*) $(12-5)\,4 = 12 \times 4 - 5 \times 4$.

En efecto: $12-5=7$; y como el minuendo es igual al substraendo más el resto, $12 = 5+7$. Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 4, tendremos

$$12 \times 4 = (5+7)\,4.$$

Verificada la operación indicada en el 2.º miembro de esta igualdad,

$$12 \times 4 = 5 \cdot 4 + 7 \cdot 4.$$

Restando de ambos miembros 5×4, será: $12 \times 4 - 5 \times 4 = 7 \times 4$.

Y substituyendo 7 por su igual $12-5$, tendremos: $12 \times 4 - 5 \times 4 = (12-5)\,4$, o bien: $(12-5)\,4 = 12 \times 4 - 5 \times 4$, que es lo que se deseaba demostrar.

Se llama *producto de varios factores*, el número que se obtiene multiplicando el factor primero por el segundo; el producto que resulte, por el tercero; el producto obtenido, por el cuarto, y así sucesivamente.

61. Orden de varios factores.—*Aunque se invierta el orden de colocación de varios factores de un producto indicado, el producto de dichos factores no sufre alteración.*

La evidencia de esta proposición se funda en los dos principios siguientes:

1.º *Si se invierte el orden de colocación de* LOS DOS PRIMEROS FACTORES *de un producto indicado de varios factores, el producto de todos ellos no sufre alteración.*

2.º *Si se invierte el orden de colocación de* DOS FACTORES CONSECUTIVOS QUE NO SEAN LOS DOS PRIMEROS, *el producto de todos los factores no sufre alteración.*

Demostremos el *primer principio.* — Sea el producto $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$; digo que $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8$. En efecto.

Hemos demostrado ya que $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$ (**54**). Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por el tercer factor del producto dado (**), 6, tendremos:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 = 4 \cdot 2 \cdot 6.$$

(*) Igualmente que cuando el multiplicando es una suma, el número 5 fuera del paréntesis indica que multiplica a la diferencia indicada.

(**) Si a los dos miembros de una igualdad se añade o quita un mismo número; si se multiplican o dividen por un mismo número; si se elevan a una misma potencia, o de ellos se extrae la raíz de un mismo grado, la igualdad siempre subsiste.

Multiplicando ambos miembros de esta última igualdad por el cuarto factor, 8, tendremos:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8,$$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

Demostremos el *segundo principio.* — Sea el producto $4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$. Invirtamos el orden de los dos factores consecutivos 3 y 2.

Decimos que $4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8$.

En efecto: $4 \cdot 9 \cdot 3 = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 9$. Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 2, será: $4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 9 \cdot 2 + 4 \cdot 9 \cdot 2 + 4 \cdot 9 \cdot 2$.

El segundo miembro de esta última igualdad lo compone el producto $4 \cdot 9 \cdot 2$ repetido tres veces; luego es, evidentemente, igual a $(4 \cdot 9 \cdot 2)\,3 = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3$; y substituyendo el segundo miembro de la última igualdad por su equivalente ahora obtenido, tendremos:

$$4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por el último factor, 8, será:

$$4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8,$$

conforme al enunciado.

Demostrados estos dos principios, un razonamiento sencillísimo pone de manifiesto la evidencia de la anterior proposición. En efecto:

Pudiendo permutar dos factores consecutivos cualesquiera sin que el producto sufra alteración, naturalmente que cualquier factor puede ocupar el lugar de todos los otros, y cualquiera de los otros, el lugar de aquél. Luego es evidente que, *en un producto indicado de varios factores, puede invertirse el orden de estos factores sin que el producto sufra alteración.*

EJEMPLO: $8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 9 = 4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2 = 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 2$, etc., etc.

62. Multiplicación de un producto indicado por un número. — Para multiplicar un producto indicado por un número, *basta multiplicar cualquiera de sus factores por este número.*

Digo que $(8 \cdot 4 \cdot 5)\,3 = 8 \cdot 12 \cdot 5$.

En efecto: $(8 \cdot 4 \cdot 5)\,3 = 3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 5 = 12 \cdot 8 \cdot 5 = 8 \cdot 12 \cdot 5$.

63. Multiplicación de dos productos indicados entre sí. — Para multiplicar un producto indicado por otro, *basta formar un producto indicado con los factores del multiplicando y los del multiplicador.*

Sea el multiplicando 4×8 y el multiplicador 2×3.

Digo que $(4 \times 8)\,(2 \times 3) = 4 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3$.

Pues $(4 \times 8)\,(2 \times 3) = 32\,(2 \times 3) = 32 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3$.

Problemas de sumar, restar y multiplicar para resolver mentalmente

1. Antonio tiene 4 pesetas en la mano derecha, 5 en la mano izquierda y 2 en un bolsillo. ¿Cuántas pesetas tiene?

2. Emilio tenía 15 aleluyas y le han regalado 9. ¿Cuántas tiene ahora?

3. Una peseta tiene 100 céntimos; Luis tiene 4 pesetas: ¿cuántos céntimos tiene?

4. Una casa tiene 9 balcones en el piso 1.º, 8 balcones en el 2.º y 6 balcones en el 3.º ¿Cuántos balcones tiene dicha casa?

5. El hombre adulto tiene 32 dientes y el niño sólo tiene 20. ¿Cuántos dientes tiene más el adulto que el niño?

6. Han entregado 3 duros a un niño para comprar un atlas que vale 12 pesetas. ¿Cuántas pesetas le devolverán?

7. Una corbata vale 3 pesetas, y un sombrero vale 9 pesetas más: ¿cuál es el precio del sombrero?

8. Pepe ha recibido 10 pesetas para pagar un libro que vale 3 y una cartera que vale 4. ¿Cuánto le quedará?

9. Pepe ha recibido 1 peseta para comprar un cartapacio que vale 20 céntimos y una libreta que vale 60. ¿Cuántos céntimos le han sobrado?

10. Mi abuelo tiene 62 años; ¿cuántos le faltan para llegar a 1 siglo, teniendo el siglo 100 años?

11. ¿Cuánto se ha pagado por la compra de dos bastones, uno de los cuales ha costado 9 pesetas, y el otro, 3 pesetas menos?

12. Catalina tiene 20 botones en una bolsa y 12 botones en otra bolsa. Quita 6 botones de la primera y 4 de la segunda. ¿Cuántos botones le quedan en junto?

13. Una semana tiene 7 días: ¿cuántos días hay en 4 semanas, en 6 semanas, en 9 semanas, en 10 semanas, en 11 semanas y en 12 semanas?

14. La legua de Castilla equivale a algo más de 5 kilómetros: ¿cuántos kilómetros, aproximadamente, hay en 5 leguas, en 9 leguas, en 10 leguas, en 11 leguas, en 12 leguas y en 100 leguas?

15. Emilio tiene 9 bolas, y Enrique, 7 veces más. ¿Cuántas bolas tiene Enrique?

16. Para pagar unas botas, he entregado una pieza de a 5 pesetas y 3 de a 2 pesetas. ¿Cuál es el precio de las botas?

17. La mesa en que escribe Periquillo costó 10 pesetas, y la que tiene su hermano Luis costó 2 veces más. ¿Cuánto gastó su padre por la compra de ambas mesas?

18. Un obrero ha cobrado 3 piezas de a 5 pesetas y 8 piezas de a 2 pesetas. ¿Cuántas pesetas tiene?

19. Pagando el café a 4 pesetas el kilo, ¿cuál será el valor de 9 kilos y el de 12 kilos?

20. Antonio ha recibido 1 peseta para pagar 4 cartapacios de a 10 céntimos uno. ¿Cuánto le ha sobrado?

21. Un método de solfeo vale 3 pesetas, y una gramática francesa vale el cuádruplo. ¿Cuánto se necesita para comprar ambas cosas?

22. Antolín ha de comprar un cuaderno que vale 30 céntimos y 4 cartapacios de a 10 céntimos uno. Sólo tiene media peseta: ¿cuánto le falta?

23. Cierto sujeto tenía 3 duros, y ahora sólo tiene 6 pesetas. ¿Cuánto ha gastado?

24. Un obrero debía 28 pesetas, y entregó a cuenta 13 piezas de a 2 pesetas. ¿Cuánto quedó a deber?

25. Un obrero tiene 20 pesetas, y cobra 9 jornales a 5 pesetas uno. ¿Cuánto tiene ahora?

26. La suma de tres números es 14. ¿Cuánto será dicha suma si multiplicamos cada uno de los tres números por 2?

27. La suma de cuatro números es 60. ¿Cuánto será dicha suma si multiplicamos cada uno de los números por 4?

28. La diferencia de dos números es 25. ¿Qué diferencia resultará si multiplicamos cada uno de dichos números por 3?

29. Hallar el producto de 25 por 9, sin efectuar directamente la multiplicación.

30. Hallar el producto de 400 por 9, sin efectuar directamente la multiplicación.

31. Hallar el producto de 45 por 11, sin efectuar directamente la multiplicación.

32. Hallar el producto de 26 por 1,010, sin efectuar directamente la multiplicación.

33. Hallar el producto de 32 por 2,010, sin efectuar la multiplicación directamente.

34. Se ha de multiplicar un número sucesivamente por 2, 3 y 5. Para obtener el producto deseado, ¿por qué otro número podrán ser reemplazados dichos factores?

35. Se ha de multiplicar el número 132 por los factores sucesivos 4, 5, 2 y 3. ¿Por qué otro número podrán ser substituídos dichos factores?

36. Se ha de multiplicar un número por 12. ¿Por qué factores sucesivos podrá multiplicarse para obtener el producto deseado?

37. Se ha de multiplicar 38 por 56. ¿En cuánto aumentará el producto, si añadimos 3 al multiplicador? ¿Y si añadiésemos 4 al multiplicando?

38. Se ha de multiplicar 42 por 18. ¿En cuánto disminuiría el producto, si quitásemos 3 del multiplicador? ¿Y si quitásemos 2 del multiplicando?

39. Se ha de hallar la suma de 25 por 8, más 13 por 8. ¿Cómo obtendremos la suma de ambos productos haciendo una sola multiplicación?

40. ¿Cómo obtendremos la diferencia de 20 $\times$ 5 menos 8 $\times$ 5, haciendo una sola multiplicación?

41. Si a los dos factores de un producto añadimos un mismo número, 3 por ejemplo, ¿qué alteración sufrirá el producto mencionado?

42. Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número, 4 por ejemplo, ¿qué alteración sufre el producto? ¿Y si se multiplican dos factores por dicho número?

Aplicaciones de la multiplicación y procedimientos para su enseñanza

Ordinariamente, se admiten en la multiplicación algunos usos que, además de ser completamente innecesarios, tienden a mecanizar la enseñanza. Nosotros, al enseñar la aplicación de la regla que nos ocupa, empleamos constantemente el análisis, convencidos de su importancia capital para el desarrollo del raciocinio. Véase cómo procedemos:

Decimos a los niños:

Sabéis que multiplicar es *hacer un número tantas veces mayor como unidades tiene otro.*

Haremos uso de la operación de multiplicar, *siempre que a la pregunta del problema se conteste veces más, o bien, siempre que el resultado haya de ser un número de veces mayor.*

PROBLEMA 1.º *Hágase el número 45, treinta veces mayor.*—¿Qué buscamos en este problema? — Un número que sea 30 veces mayor que 45. — Y ¿cómo se hace un número 30 veces mayor? — Multiplicándole por 30. — ¿Por qué? — Porque multiplicar es hacer un número tantas veces mayor como unidades tiene otro. — Multiplícalo, pues.

RESOLUCIÓN:	45
	× 30
El número 45, hecho 30 veces mayor....	1350

PROBLEMA 2.º *¿Cuántos céntimos de peseta son* 45 *pesetas?* — ¿45 pesetas son 45 céntimos? — No, señor. — ¿Son más o menos? — Son más, porque la peseta es mayor que el céntimo. — ¿Cuántas veces más? — 100 veces más, porque la peseta tiene 100 céntimos. — Así, pues, el resultado será... — 100 veces mayor. — Y ¿cómo se hace un número 100 veces mayor? — Multiplicándole por 100, porque multiplicar es hacer un... etc.

RESOLUCIÓN:	45	pesetas.
	× 100	céntimos.
45 pesetas son	4500	céntimos.

PROBLEMA 3.º *A razón de* 24 *pesetas el decalitro, ¿cuántas pesetas valdrán* 126 *decalitros de vino superior?* — ¿Qué se pide en este problema? — Lo que valen 126 decalitros de vino. — Y ¿qué se sabe? — Que 1 decalitro vale 24 pesetas. — Si 1 decalitro vale 24 pesetas, 126 decalitros ¿valdrán más o menos? — Valdrán más. — ¿Cuántas veces más? — 126 veces más. — Por consiguiente, ¿de qué será la operación? — De multiplicar, porque hemos de hacer el número 24 ciento veintiséis veces mayor. — Y multiplicar es... — Hacer un número tantas veces mayor como unidades tiene otro.

RESOLUCIÓN:	24	pesetas.
	× 126	decalitros.
	504	
	252	
Valdrán	3024	pesetas.

División (*)

64. Definición.—La división es una operación que tiene por objeto, *dado el producto de dos factores y uno de éstos, hallar el otro factor.*

65. Términos de la división y resultado.—El producto dado se llama *dividendo;* el factor conocido, *divisor*, y el factor desconocido, *cociente* (**).

De consiguiente, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, o al producto del cociente por el divisor.

66. Otra definición. — Multiplicando el cociente por el divisor, o *haciendo el cociente tantas veces mayor como unidades tiene el divisor,* acabamos de ver que obtenemos el dividendo; luego el *cociente es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el divisor;* por lo que, cuando el divisor es un número entero, puede definirse la división diciendo que *dividir es hacer un número tantas veces menor como unidades tiene otro.*

67. Cómo se indica la división. — Para indicar que un número se ha de dividir por otro, se escribe el dividendo y a continuación el divisor, separados por medio de dos puntos, y también escribiendo el dividendo encima de una raya y el divisor debajo.

Para expresar, por ejemplo, que el número 12 se ha de dividir por el 4, lo indicaremos así:

$$12 : 4, \text{ ó bien } \frac{12}{4}.$$

68. División exacta e inexacta.—Multiplicando el divisor por el cociente, *o repitiendo el divisor tantas veces como unidades tiene el cociente,* sabemos que se obtiene el dividendo; luego el *cociente indica las veces que el divisor está contenido en el dividendo* (***).

Esto supuesto, es evidente que el divisor estará contenido en el dividendo un número exacto o inexacto de veces. En el primer caso, la división se llama *exacta*, y en el segundo, *inexacta*. La división de 12 : 4, por ejemplo, será exacta, pues el divisor 4 está contenido exactamente 3 veces en el dividendo; y la división de 12 : 5 será inexacta, pues el cociente es mayor que 2 y menor que 3; esto es, el dividendo 12 contiene al divisor 5 más de 2 veces y no llega á contenerle 3 veces; es decir, le contiene un número inexacto de veces.

Dedúcese de lo expuesto que el *cociente de una división exacta indica el número justo, preciso, de veces que el dividendo contiene al divisor; y el cociente de una división inexacta, el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor.*

En la división inexacta, el mayor número entero que forma el cociente se llama *cociente entero;* y el exceso del dividendo sobre el producto del divisor por el cociente entero se llama *residuo* (****).

Evidentemente, pues, *el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente entero, más el residuo.*

En la división 21 : 8, el cociente entero es 2, y el residuo, 5.

(*) Del latín *dividere*, dividir, partir.
(**) Del latín *quoties*, cuantas veces.
(***) Por esta razón, también se define la división diciendo que *es hallar las veces que un número está contenido en otro.*
(****) Del latín *residuus*, lo que queda, lo sobrante.

El residuo es siempre menor que el divisor; pues si fuese igual o mayor, el divisor estaría contenido en el dividendo una o más veces, y por lo tanto, el cociente obtenido sería menor que el verdadero.

69. Casos de la división y cómo se resuelven. —Tanto si la división es exacta como si no lo es, podemos obtener, naturalmente, el cociente restando el divisor del dividendo cuantas veces sea posible, y este número de veces será el cociente de la división (*). Pero este método de resolución sería casi siempre sumamente embarazoso, y por la misma razón, vamos a explicar otro que ahorre el tiempo y el trabajo que el primero, necesariamente, exige. Para ello, admitiremos en la división tres casos:

1.º *El cociente tiene una cifra, teniendo el dividendo una o dos y el divisor, una.*

2.º *El cociente tiene una cifra, teniendo dividendo y divisor varias cifras.*

3.º *El cociente y el dividendo tienen varias cifras.*

Resolución del primer caso. —Cuando el cociente tiene una cifra teniendo el dividendo una ó dos, y el divisor una, el cociente se halla con suma facilidad conociendo de memoria la tabla pitagórica; pues debiendo ser el cociente un número dígito, el cálculo queda reducido a hallar un número que, multiplicado por el divisor, dé de producto el dividendo. Así, $40 : 5 = 8$, pues el número 8, multiplicado por el divisor, produce el dividendo.

Si no se hallase un número que, multiplicado por el divisor, produjese exactamente el dividendo, el cociente entero sería el menor de dos números consecutivos tales que, multiplicados por el divisor, diesen un producto menor y otro mayor que el dividendo. Así, el cociente de $49 : 6$ estará comprendido entre 8 y 9; y será 8, puesto que el segundo número multiplicado por el divisor produce un número mayor que el dividendo.

Resolución del segundo caso. —Para dividir un número de varias cifras por otro de varias cifras cuando el cociente tiene una sola cifra, *se ve, primeramente, si el dividendo tiene tantas cifras como el divisor o una más. En el primer caso, se divide la primera cifra de la izquierda del dividendo por la primera de la izquierda del divisor, y en el segundo, se divide el número formado por las dos primeras cifras de la izquierda del dividendo por la primera de la izquierda del divisor. El cociente obtenido será el verdadero o mayor que el verdadero.*

Para comprobarlo, se multiplica este cociente por el divisor, y si el producto es igual o menor que el dividendo, el cociente hallado es el verdadero; pero si dicho producto es mayor que el dividendo, el cociente antes obtenido es mayor que el verdadero; se disminuye en una unidad, y la nueva cifra se sujeta á la misma comprobación. Hallado el cociente verdadero, su producto por el divisor se resta del dividendo, y la diferencia es el residuo.

Sea el dividendo 9456 y el divisor 2378.

Observemos, en primer lugar, que, si multiplicamos el divisor por 10, el producto 23780 es mayor que el dividendo; luego el cociente es menor que 10, o tiene una sola cifra.

Ahora, si prescindimos de todas las cifras que están a la derecha de la primera del dividendo, 9, y de igual número de cifras a la derecha del divisor, quedan en el dividendo 9 millares, y 2 millares en el divisor, cuyos números se diferencian de los propuestos en menos de 1 millar; luego el cociente, 4, de estos dos números, será el verdadero o se diferenciará poco del cociente verdadero.

(*) Por esto se dice que *la división es una resta abreviada.*

Como el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo si la división es inexacta, claro está que las unidades de los diferentes órdenes del dividendo han de contener, cuando menos, el producto de los diferentes órdenes del divisor por el cociente; luego para saber si el número 4, cociente de los 9 millares del dividendo por los 2 millares del divisor, es el cociente verdadero, hemos de multiplicarlo por el divisor á fin de comparar este producto con el dividendo. El divisor 2378 × 4 da 9512, producto mayor que el dividendo; luego el cociente 4 es mayor que el verdadero. Disminuyéndole en una unidad, resulta 3, y multiplicando el divisor 2378 por este número, tenemos 7134, número contenido en el dividendo; luego 3 es el cociente verdadero porque los millares, centenas, decenas y unidades del dividendo contienen el producto de los diferentes órdenes del divisor por 3. En la práctica, dispondremos la operación así:

Dividendo	9456	2378 Divisor
Producto del divisor por el cociente entero	7134	3 Cociente entero
Residuo	2322	

Conviene ejercitarse, para hallar el residuo, a verificar la multiplicación y la resta a un mismo tiempo. En este caso, diríamos: 8 unidades por 3, son 24 unidades, que no pueden restarse de 6 unidades; añado a 6 unidades 2 decenas o 20 unidades, y tengo 26 unidades; quitando 24, quedan 2 unidades, que escribo en el resto.

7 decenas por 3, son 21 decenas, que no pueden restarse de 3 decenas (5 — 2 añadidas a las unidades); añado a 3 decenas, 2 centenas o 20 decenas, y tengo 23 decenas; quitando 21, quedan 2 decenas, que escribo en el resto.

3 centenas por 3, son 9 centenas, que no pueden restarse de 2 centenas (4 — 2 añadidas a las decenas); añado a 2 centenas 1 millar, o 10 centenas, y tengo 12 centenas; quitando 9, quedan 3 centenas, que escribo en el resto.

2 millares por 3, son 6 millares; si de 8 millares (9 — 1 millar añadido a las centenas) quito 6, quedan 2 millares, que escribo en el resto.

En la práctica, se simplifica aún la operación empleando el lenguaje abreviado que todos conocemos.

Resolución del tercer caso. — Cuando el cociente y el dividendo tienen varias cifras, *se separa de la izquierda del dividendo un número que, considerado como de unidades simples, contenga al divisor menos de diez veces. Este primer dividendo parcial se divide por el divisor, y se tiene la primera cifra del cociente; se multiplica esta cifra por el divisor, y el producto se resta del primer dividendo parcial; a la derecha del resto, se baja la cifra siguiente del dividendo, y con este nuevo dividendo parcial se ejecuta la misma operación que con el anterior, obteniendo la segunda cifra del cociente; y así se continúa hasta haber bajado la última cifra del dividendo, haber hallado la última cifra del cociente y el residuo correspondiente si la división es inexacta.*

Si al hallar una cifra del cociente, el dividendo parcial fuese menor que el divisor, se escribe cero en el cociente, se baja la cifra siguiente del dividendo y se continúa la operación.

Para resolver este caso, deben tenerse en cuenta los dos principios siguientes:

1.° *El cociente tiene tantas cifras como expresa la diferencia entre el número de las del dividendo y el de las del divisor, o una más.* En el ejemplo 84639 : 24, el cociente tendrá 3 ó 4 cifras, porque el dividendo tiene 5 y el divisor 2, y 5 — 2 = 3.

2.° *Cada cifra del cociente es del mismo orden de unidades que las del dividendo que la producen.*

Sea el dividendo 124652 y el divisor 435. Determinemos, primero, el número de cifras que tendrá el cociente. El dividendo tiene 6 cifras y el divisor, 3; luego el cociente tendrá 3 ó 4 cifras. En efecto, multiplicando el divisor por 100, el producto será 43500 menor que el dividendo, y multiplicándole por 1000, el producto 435000 es mayor que el dividendo; luego el cociente no puede tener 4 cifras, pues 1000 es el menor número de cuatro cifras; *luego el cociente tendrá tres cifras, y, por lo mismo, constará de centenas, decenas y unidades.*

Dispongamos los términos de la división como en el caso anterior.

124652 / 435

Como cada cifra del cociente es del mismo orden que las del dividendo que la producen, *para hallar las centenas del cociente, dividiremos las centenas del dividendo por el divisor.* En el dividendo hay 1246 centenas. Luego, comprobando la cifra como en el caso anterior hemos explicado, tendremos:

	1246,52	/ 435
Producto del cociente por el divisor	870 centenas	2 centenas de cociente.
Resto....	376 52	

Este resto representa el producto de las demás cifras del cociente multiplicadas por el divisor más el residuo si la división es inexacta. La cifra de las decenas del cociente multiplicada por el divisor produce un número exacto de decenas, que estará contenido en las 3765 decenas del resto; luego para hallar las decenas del cociente, divido las 3765 decenas del resto por el divisor.

	3765,2	/ 435
Producto del cociente por el divisor	3480 decenas	8 decenas de cociente.
Resto.....	285 2	

Este resto representa el producto de la cifra de las unidades del cociente por el divisor, más el residuo si la división es inexacta. La cifra de las unidades del cociente por el divisor produce un número exacto de unidades, que estará contenido en las 2852 unidades del resto; luego para hallar las unidades del cociente, divido el resto por el divisor.

	2852	/ 435
Producto del cociente por el divisor	2610 unidades	6 unidades de cociente.
Resto o residuo total......	242 unidades	

Luego el cociente será: 2 centenas + 8 decenas + 6 unidades = 286.

En la práctica, se simplifica la resolución verificando, como en el caso anterior, la multiplicación y la resta a un mismo tiempo y bajando a la derecha del resto la cifra del dividendo correspondiente al orden de unidades del cociente que se va a determinar. Así:

1246,5,2	/ 435
376 5	286
28 5 2	
3 4 2	

Hemos dicho que, para comprobar la cifra del cociente, debíamos multiplicarla por el divisor y restar el producto del dividendo.

La siguiente regla es preferible a la anterior, por lo breve que resulta la comprobación al poco tiempo de ejercitarse en ella.

70. Comprobación rápida de la cifra del cociente (*). —Para comprobar rápidamente la cifra del cociente, se multiplica ésta mentalmente por la primera de la izquierda del divisor, y el producto se resta de la primera de la izquierda del dividendo, o de las dos primeras, si el dividendo parcial tiene una cifra más que el divisor. *Si el resto es igual o mayor que la cifra que probamos, ésta es buena;* pero si es menor, no nos dice nada. Se baja, mentalmente, a su derecha, la cifra siguiente del dividendo, se multiplica la cifra que comprobamos por la segunda de la izquierda del divisor, y *si este producto es mayor que el número formado por el resto parcial y la cifra bajada, la cifra de cociente es demasiado grande*; se disminuye en una unidad, y la nueva cifra se comprueba del mismo

(*) Aconsejamos a nuestros comprofesores inicien a sus discípulos en la aplicación práctica de esta regla desde luego que el niño empieza a dividir por dos cifras de divisor; pues el conocimiento práctico de la comprobación, que es el todo, hace que el niño pueda prescindir de la teoría, cuya recordación siempre es una labor pesada para la memoria.

modo; pero si el producto de multiplicar la cifra que comprobamos por la segunda de la izquierda del divisor es igual o menor que *el número formado por el resto parcial y la cifra bajada del dividendo*, se resta este producto de este número, y *si el resto es igual o mayor que la cifra que comprobamos, ésta es buena;* pero si es menor, se baja a su derecha la cifra siguiente del dividendo, se multiplica la cifra que comprobamos por la tercera de la izquierda del divisor, y *si este producto es mayor que el número formado por el resto parcial y la cifra bajada del dividendo, la cifra es demasiado grande;* se disminuye en una unidad y la nueva cifra se comprueba del mismo modo. Y así continuamos hasta hallar un resto igual o mayor que la cifra que comprobamos, en cuyo caso ésta es buena, o hasta hallar un producto de la cifra que comprobamos por una del divisor, que sea mayor que el número formado por el resto parcial y la cifra bajada, en cuyo caso la cifra que comprobamos es demasiado grande.

EJEMPLOS: 1.º

```
8,4,3,2,6,1,5, / 4,59
3 8,4 2          18371
  1 7,0 6
    3 2,9 1
      0 7,8 5
        3 2 6
```

Comprobación de las cifras del cociente:

Diremos: 8 entre 4, probemos el 2. Dos por cuatro 8; de 8 a 8 va 0; 0 menor que 2, no nos dice nada; bajo el 4 y tenemos 04; dos por cinco, 10; 10 mayor que 4, mala. Cabe a 1.

38 entre 4, probemos el 9. Nueve por cuatro 36; de 36 a 38 van 2; 2 menor que 9, no nos dice nada. Bajo el 4 y tenemos 24; nueve por cinco, 45; 45 mayor que 24, mala.

Probemos el 8. Ocho por cuatro, 32; de 32 a 38 van 6; 6 menor que 8, no nos dice nada; bajo el 4 y tenemos 64; ocho por cinco 40; de 40 a 64 van 24; 24 mayor que 8, buena.

17 entre 4, probemos el 4. Cuatro por cuatro, 16; de 16 a 17 va 1; 1 menor que 4, no nos dice nada. Bajo el 0 y tenemos 10. Cuatro por cinco, 20; 20 mayor que 10, mala.

Probemos el 3. Tres por cuatro 12; de 12 a 17 van 5; 5 mayor que 3, buena.

32 entre 4, probemos el 8. Ocho por 4, 32; de 32 a 32 va 0; 0 menor que 8, no nos dice nada. Bajo el 9 y tenemos 09; cinco por ocho 40; 40 mayor que 9, mala.

Probemos el 7. Siete por 4, 28; de 28 a 32 van 4; 4 menor que 7, no nos dice nada. Bajo el 9 y tenemos 49. Cinco por siete, 35; de 35 a 49 van 14, 14 mayor que 7, buena.

7 entre 4, á 1.

2.º

```
7,2,4,8,6, / 1,8
0 0 4,8      4027
    1 2,6
      0 0
```

Diremos: 7 entre 1, probemos el 7. Siete por uno es 7; de 7 a 7 va 0; 0 menor que 7, no nos dice nada. Bajo el 2 y tenemos 02. Siete por ocho, 56; 56 mayor que 2, mala.

Probemos el 6. Seis por uno es 6; de 6 a 7 va 1; 1 menor que 6, no nos dice nada. Bajo el 2 y tenemos 12. Seis por ocho 48; 48 mayor que 12, mala.

Probemos el 5. Cinco por uno es 5; de 5 a 7 van 2; 2 menor que 5 no nos dice nada. Bajo el 2 y tenemos 22. Cinco por ocho, 40; 40 mayor que 22, mala.

Probemos el 4. Cuatro por uno es 4; de 4 a 7 van 3; 3 menor que 4, no nos dice nada. Bajo el 2 y tenemos 32. Cuatro por ocho 32; 32 igual a 32, buena (*).

(*) Es evidente que si en la comprobación llegamos a multiplicar la *última cifra del divisor* por la nota que comprobamos, y este producto es igual o menor que el número formado por el resto parcial y la cifra bajada, *la cifra es buena:* y si éste producto es mayor que el número en cuestión, *la cifra es mala.*

4 entre 1, probemos el 3. Tres por uno es 3; de 3 a 4 va 1; 1 menor que 3, no nos dice nada. Bajo el 8 y tenemos 18. Tres por ocho, 24; 24 mayor que 18, mala.

Probemos el 2. Dos por uno es 2; de 2 a 4 van 2; 2 igual a 2, buena.

12 entre 1, probemos el 8. Ocho por uno es ocho; de 8 a 12 van 4; 4 menor que 8, no nos dice nada. Bajo el 6 y tenemos 46. Ocho por ocho 64; 64 mayor que 46, mala.

Probemos el 7. Siete por uno es 7; de 7 a 12 van 5; 5 menor que 7, no nos dice nada. Bajo el 6 y tenemos 56. Siete por ocho, 56; 56 igual a 56, buena.

71. Prueba de la división.—Como se ha observado ya, es una consecuencia de la definición: se multiplica el cociente por el divisor, se añade a este producto el residuo si la división es inexacta, y si no hay error, el resultado es el dividendo.

71 a. División por exceso. — Una división recibe el nombre de *división por exceso* cuando se toma como cociente, no el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor, sino este mismo número aumentado en una unidad, recibiendo el nombre de *cociente por exceso*. Es evidente que, en este caso, el producto del divisor por el cociente es mayor que el dividendo; la diferencia entre este producto y el dividendo recibe el nombre de *residuo por exceso* o *residuo substractivo*, quedando justificada esta última denominación al observar que e*n toda división por exceso, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente menos el residuo por exceso.*

El cociente verdadero de una división inexacta recibe también el nombre de *cociente por defecto*, y el residuo de esta división, el de *residuo por defecto* o *aditivo*.

En general podemos, pues, decir que *el dividendo de toda división inexacta es igual al producto del divisor por el cociente, más o menos el residuo según sea éste aditivo o substractivo.*

71 b. Propiedad de los residuos. — En toda división inexacta, *la suma de los restos aditivo y substractivo es igual al divisor* (*).

Sea D el dividendo de una división inexacta, d el divisor, c y r el cociente y el resto por defecto, $c + 1$ y r' el cociente y el resto por exceso. Digo que $r + r' = d$.

En efecto: $D = d \times c + r$ y también $D = d\ (c + 1) - r'$; por tanto, $d \times c + r = d\,(c + 1) - r'$. Verificando la multiplicación indicada en el 2.º miembro de la igualdad anterior (58), tenemos: $d \times c + r = d \times c + d - r'$. Restando de los dos miembros de la igualdad anterior la cantidad $d \times c$, tenemos: $r = d - r'$. r es, pues, el resto de la substracción $d - r'$; luego, (42) $d = r + r'$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

Siendo las sumas de los residuos aditivo y substractivo de una división igual al divisor, si el resto aditivo es mayor que la mitad del divisor, el residuo substractivo será menor que dicha mitad y, por tanto, cometeremos un error menor si tomamos el cociente por exceso como cociente entero de la división inexacta.

72. Propiedades de la división.—Son verdaderas consecuencias de lo definido y demostrado, a saber:

1.ª *Si el dividendo es igual al divisor, el cociente es la unidad.*

2.ª *Si el dividendo es mayor que el divisor, el cociente es mayor que la unidad.*

(*) Siempre que lo creamos necesario, haremos uso de las letras para la demostración de determinadas proposiciones; tanto para simplificar los razonamientos, como para dar a los principios demostrados el carácter de generalidad. Entiéndase que las letras representan siempre valores indeterminados de la naturaleza indicada en el enunciado.

Una letra puesta al lado de otra debe entenderse que es el producto de la primera por la segunda. Así, $a \times b = ab$; $a \times b \times c \times d = abcd$.

Cuando varios números tienen iguales propiedades, o determinadas analogías, se los representa a todos por una misma letra, escribiendo diversos acentos en la parte superior de su derecha, o guarismos en su parte inferior.

Así, si queremos representar los resultados de multiplicaciones distintas, los productos se indicarán como sigue: p, p', p'', p''', etc., o bien, p, p_1, p_2, p_3, etc, y se leerán: p, *p prima*, *p segunda*, *p tercera*, etc., p, p sub uno, p sub dos, p sub tres, etc.

3.ª *Si el dividendo es menor que el divisor, el cociente es menor que la unidad.*

4.ª *Si el divisor es la unidad, el cociente es igual al dividendo.*

5.ª *Si el divisor es mayor que la unidad, el cociente es menor que el dividendo.*

6.ª *Si el divisor es menor que la unidad, el cociente es mayor que el dividendo.*

73. División de una suma indicada por un número. — Para dividir una suma indicada por un divisor exacto de todos los sumandos, *se divide cada uno de éstos por dicho divisor, y se suman los cocientes parciales obtenidos.*

Sea $(12 + 6) : 3$. Digo que $(12 + 6) : 3 = 4 + 2$.

En efecto: $4 + 2$ será el cociente verdadero si, multiplicando esta suma por el divisor 3, produce el dividendo; y es, evidentemente, el cociente, pues, (**58**) $(4 + 2)\,3 = 12 + 6$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

74. División de una diferencia indicada por un número. — Para dividir una diferencia indicada por un divisor exacto del minuendo y del substraendo, *se dividen estos términos por dicho divisor, y se restan los cocientes parciales obtenidos.*

Sea $(12 - 8) : 2$. Digo que $(12 - 8) : 2 = 6 - 4$.

En efecto: $(6 - 4)\,2 = 12 - 8$ (**60**): luego $6 - 4$ es el cociente de $(12 - 8) : 2$.

75. División de un producto indicado por uno de sus factores. — Para dividir un producto indicado por uno de sus factores, *basta suprimir dicho factor.*

Sea $(8 \times 6 \times 9) : 9$. Digo que $(8 \times 6 \times 9) : 9 = 8 \times 6$.

Esto es evidente; pues $(8 \times 6)\,9 = 8 \times 6 \times 9$.

76. División de un producto indicado por un número. — Para dividir un producto indicado por un número (entendiendo que este número ha de ser divisor de uno cualquiera de los factores), *basta dividir cualquiera de los factores por este número.*

Sea, por ejemplo, $(6 \times 20 \times 8) : 5$.

Digo que $(6 \times 20 \times 8) : 5 = 6 \times 4 \times 8$. En efecto:

Sabemos que, multiplicando por un número, cualquiera de los factores de un producto indicado (**62**), éste queda multiplicado por dicho número; luego $(6 \times 4 \times 8)\,5 = 6 \times 20 \times 8$; y como este resultado es el dividendo propuesto, claro está que $6 \times 4 \times 8$ es el cociente verdadero.

77. División de un número por un producto indicado de varios factores. — Para dividir un número por un producto indicado de varios factores, *se dividen, sucesivamente, este número y los cocientes obtenidos, por los factores del producto.*

Sea $360 : (3 \times 2 \times 5)$. Digo que el cociente lo obtendremos así:

$360 : 3 = 120$; $120 : 2 = 60$; $60 : 5 = 12$, *cociente verdadero;*
es decir, $360 : (3 \times 2 \times 5) = 12$.

En efecto: $(3 \times 2 \times 5)\,12 = 3 \times 2 \times 5 \times 12 = 360$; luego 12 es e cociente verdadero.

También hubiéramos obtenido el cociente deseado, partiendo 360 por el producto de los factores referidos.

Así : $3 \times 2 \times 5 = 30$.
$360 : 30 = 12$.

78. Alteraciones del cociente. — El cociente sufre las siguientes alteraciones:

1.ª *Si el dividendo se multiplica o parte por un número, el cociente queda multiplicado o partido por dicho número.*

En efecto; el cociente expresa las veces que el divisor está contenido en el dividendo; luego cuantas veces se haga el dividendo mayor o menor, tantas veces resultará mayor o menor el cociente.

2.ª *Si el divisor se multiplica o parte por un número, el cociente queda dividido o multiplicado por este número.*

En efecto; el cociente expresa las veces que el divisor está contenido en el dividendo; luego cuantas veces se haga el divisor mayor o menor, tantas menos o más veces estará contenido en el dividendo.

3.ª *Si dividendo y divisor de una división inexacta se multiplican o parten por un mismo número, el cociente no altera; pero el residuo queda multiplicado o partido, respectivamente, por dicho número* (*).

En efecto: llamemos N al dividendo, D al divisor, Q al cociente y R al residuo. Tendremos, evidentemente,

$$N = (D \times Q) + R.$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por un número entero, P, por ejemplo, tendremos:

$$P \times N = P\,(D \times Q) + R \times P.$$

El segundo miembro de esta igualdad es una suma indicada, formada por dos sumandos. Verificando la operación indicada en el primer sumando, y recordando que, para verificar esta multiplicación, bastará multiplicar un factor por P, tendremos (**62**):

$$P \times N = P \cdot D \times Q + R \times P.$$

En cuya última igualdad se ve que dividendo y divisor se han multiplicado por P, que el cociente Q no ha alterado y que el residuo R ha quedado multiplicado por el mismo número que multiplica al dividendo y al divisor.

Demostremos la segunda parte del teorema:

$$\text{Tenemos que } N = (D \times Q) + R.$$

Partiendo ambos miembros de esta igualdad por un divisor de N y D, al cual llamaremos P, resultará:

$$N : P = (D \times Q) : P + R : P.$$

O bien (**76**)

$$N : P = D : P \times Q + R : P.$$

Obsérvese cómo dividendo y divisor quedan partidos por P, cómo el cociente Q no ha alterado y cómo el residuo queda partido por el mismo número que divide a dividendo y divisor.

79. Abreviaciones de la división. — La operación de dividir puede abreviarse en los casos siguientes:

1.º *Cuando el divisor es un número dígito.*
2.º *Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros.*
3.º *Cuando dividendo y divisor terminan en ceros.*
4.º *Cuando termina en ceros solamente el divisor.*

Resolución del primer caso. — Cuando el divisor es un número dígito, la división se verifica mentalmente, sin escribir los restos ni los dividendos parciales.

Ejemplo: 846321 / 3

282107 cociente.

Decimos: El tercio de 8 es 2, y sobran 2, que valen por 20, y 4, son 24; el tercio de 24 es 8; el tercio de 6 es 2; el tercio de 3 es 1; el tercio de 2 es 0; y sobran 2, que valen por 20, y 1, son 21; el tercio de 21 es 7.

(*) De aquí en adelante, al hablar del residuo de una división nos referiremos al residuo aditivo, mientras no se indique lo contrario.

Resolución del segundo caso. — Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros, se ejecuta la división separando, con una coma, de la derecha del dividendo, tantas cifras como ceros lleva la unidad. Las cifras del dividendo que quedan a la izquierda de la coma son el cociente de la división y las que quedan a la derecha son el residuo de la misma.

Ejemplos: 1.º 84000 : 1000 = 84'000 = 84.
El cociente es 84, pues 84 × 1000 = 84000.
2.º 4632 : 100 = 46'32.
El cociente entero es 46, y el residuo 32; pues 46 × 100 + 32 = 4632.

Resolución del tercer caso. — Cuando dividendo y divisor terminan en ceros, se suprimen igual número de ceros de ambos términos, y se verifica la operación con las cifras restantes. El cociente obtenido es el verdadero; pero si la división es inexacta, hay que agregar a la derecha del residuo tantos ceros como se han suprimido en un término.

Ejemplos: 1.º 84000 : 6000 = 8,4,(000 / 6(000
2 4 — 14 cociente.
0 .
El cociente es 14, pues 6000 × 14 = 84000.
2.º 84000 : 9000 = 84(000 / 9(000
Residuo 3 000 — 9 cociente

Al dividir dividendo y divisor por mil, el residuo quedó también dividido por 1000 (**78.** — 3.ª); luego el residuo 3, es 1000 veces menor que el verdadero; luego el residuo verdadero será 3 × 1000 = 3000.
El cociente es 9 y el residuo, 3000; pues 9000 × 9 + 3000 = 84000.

Resolución del cuarto caso. — Cuando sólo el divisor termina en ceros, la división es inexacta, y se verifica prescindiendo de los ceros del divisor y de igual número de cifras de la derecha del dividendo. El cociente entero que resulta es el verdadero; pero a la derecha del residuo hay que añadir las cifras omitidas en el dividendo.

Ejemplo: 912,865 : 1900 = 91,2,8,(65 / 1,9(00
15,2 — 480 cociente.
Residuo 0 0865

Al dividir por 100 el dividendo y el divisor, el residuo también ha quedado dividido por 100 (**78.** — 3.ª); luego el residuo parcial que habíamos obtenido, 8, era cien veces menor que el verdadero; luego el residuo verdadero es 8 × 100 + 65 = 865.
En efecto: 480 × 1900 + 865 = 912,865.

Problemas de multiplicar y dividir para resolver mentalmente

1. Si una peseta tiene 4 reales, ¿cuántas pesetas hay en 8 reales, en 12 reales, en 20 reales y en 28 reales?
2. Teniendo 1 semana 7 días, ¿cuántas semanas hay en 14 días, en 21 días, en 35 días y en 49 días?
3. Seis niños han de repartirse 24 bolas en partes iguales: ¿cuántas recibirá cada uno?
4. Dos niños y una niña han de repartirse, en partes iguales, 36 estampas: ¿cuántas recibirá cada uno?
5. ¿Cuantos pares de huevos hay en 4 huevos, en 6 huevos, en 12 huevos, en 20 huevos y en 40 huevos?
6. ¿Cuántas piezas de a 10 céntimos hay en 20 céntimos, en 30 céntimos, en 40 céntimos, en 70 céntimos y en 90 céntimos?
7. Un litro de vino vale 2 pesetas. ¿Cuántos litros de vino se comprarán con 6 pesetas, con 8 pesetas, con 14 pesetas y con 20 pesetas?
8. Un obrero gana 7 pesetas diarias. ¿Cuánto habrá ganado en 6 días, en 9 días, en 10 días, en 11 días y en 12 días?

9. Una mujer vende tres gallinas a 4 pesetas una, y emplea lo cobrado en pañuelos de a 2 pesetas uno. ¿Cuántos pañuelos puede comprar?

10. Una mujer vende 24 huevos a 3 reales par. ¿Cuánto cobra?

11. ¿Cuánto son las tres cuartas partes de 8, de 12, de 36 y de 40?

12. ¿Cuánto valen dos medias docenas de huevos a 5 céntimos cada huevo?

13. ¿Cuánto costarán 8 litros de vino, a 3 reales cada 2 litros?

14. Pagando las naranjas a 5 céntimos el par, ¿qué valor tendrán 20 naranjas?

15. ¿Cuánto valdrá 1 litro de vino superior, si 5 litros valen 20 pesetas?

16. ¿Cuánto valdrán 18 manzanas, a 20 céntimos la docena?

17. ¿Cuánto son las dos quintas partes de 10, de 15, de 30 y de 45?

18. ¿Qué precio tienen 2 libros, si 30 libros valen 60 pesetas?

19. Un litro de vino vale 2 ptas., y la botella que lo contiene vale 1 peseta. ¿Cuántas botellas de vino se comprarán con 27 pesetas? ¿Y con 6 pesetas?

20. Pepe y Antonio han de repartirse 20 céntimos. Si Antonio toma las 2 quintas partes, ¿cuántos céntimos recibe cada uno?

21. Luis y Pablo han de repartirse 40 bolas. Si Luis toma las 3 cuartas partes, ¿cuántas bolas recibe cada uno?

22. Antonio tiene 80 pesetas y Pepe tiene 10 veces menos. ¿Cuánto tiene Pepe?

23. Compré 400 bolas, y un amigo compró 100 veces menos. ¿Cuántas compró?

24. Dígase qué alteraciones sufre el cociente: 1.º, aumentando el dividendo; 2.º, disminuyendo el dividendo; 3.º, aumentando el divisor; 4.º, disminuyendo el divisor.

25. Dígase qué alteraciones sufre el cociente: 1.º, añadiendo el divisor al dividendo; 2.º, quitando el divisor del dividendo.

26. Dígase qué alteraciones experimentará el cociente: 1.º, multiplicando el dividendo por 6; 2.º, partiendo el dividendo por 8; 3.º, multiplicando el divisor por 2; 4.º, partiendo el divisor por 4; 5.º, multiplicando el dividendo y el divisor por 7; 6.º, partiendo dividendo y divisor por 2.

27. Dada la suma de dos números y el cociente de los mismos, ¿cómo hallaremos el número menor?

28. Dada la diferencia de dos números y el cociente de los mismos, ¿cómo hallaremos el número menor?

29. La suma de dos números es 12, y el cociente de los mismos, 2: ¿cuál es el número menor?

30. La suma de dos números es 32, y 3 el cociente de dichos números: ¿cuál es el menor?

31. Si Pedro y Juan juntan su dinero, reúnen 24 pesetas. Se sabe que Pedro tiene 3 veces más dinero que Juan: ¿cuántas pesetas tiene cada uno?

32. La edad de Emilio unida a la de su padre es 60 años. La edad de Emilio es la cuarta parte de la de su padre: ¿qué edad tiene cada uno?

33. La diferencia de dos números es 18, y 4, su cociente: ¿cuál es el número menor?

34. La diferencia de dos números es 24, y el cociente de los mismos, 3: ¿cuál es el menor?

35. Pedro tiene 30 pesetas más que Juan, y éste, 4 veces menos pesetas que el primero. ¿Cuántas pesetas tiene cada uno?

36. Un padre tiene 40 años más que su hijo, y la edad de éste es el tercio de la del padre. ¿Qué edad tiene cada uno?

37. Hállese el cociente de 8000 por 400, sin efectuar directamente la división.

38. Hallar el cociente de 3600 por 1200, sin efectuar directamente la división.

39. Si uno de los factores de un producto se divide por un número, por 3, por ejemplo, ¿qué alteración sufre el producto? ¿Y si se dividen dos factores por 3? ¿Y si se dividen 3 de estos factores por dicho número?

40. Hallado el cociente de dos números, ¿qué deberá hacerse para obtener un cociente, por ejemplo, 3 veces mayor: 1.º, modificando solamente el dividendo; 2.º, modificando solamente el divisor?

41. Si multiplicamos el dividendo de una división exacta por 4, y dividimos el divisor por 4, ¿qué alteración sufre el cociente?

42. Si dividimos el dividendo de una división exacta por 8, y multiplicamos el divisor por 8, ¿qué alteración experimentará el cociente?

43. El número 3450 ha de dividirse, sucesivamente, por 2, por 5 y por 10. ¿Por qué número debe dividirse para obtener el cociente verdadero, haciendo una sola división?

44. Se ha de dividir el número 690 por 60. ¿Por qué números deberá dividirse para obtener el cociente verdadero, haciendo tres divisiones sucesivas?

Aplicaciones de la división y procedimientos de enseñanza

Diremos a los niños:

Sabéis que *dividir es hacer un número tantas veces menor como unidades tiene otro.*

Haremos uso de la operación de dividir, *siempre que a la pregunta del problema se conteste veces menos, o bien, el resultado haya de ser un número de veces menor.*

PROBLEMA 1.º *Juan tiene* 14500 *pesetas, y su hermano tiene* 5 *veces menos. ¿Cuántas pesetas tiene su hermano?* — ¿Qué buscamos en este problema? — Las pesetas que tiene el hermano de Juan. — Y ¿qué sabemos? — Sabemos que Juan tiene 14500 pesetas, y su hermano, 5 veces menos. — Las pesetas que tiene su hermano, ¿cuántas veces son *menos* que las que tiene Juan? — Cinco veces. — ¿Qué haremos, pues, para resolver este problema? — Haremos el número 14500 cinco veces menor. — Y ¿cómo lo conseguiremos? — Dividiéndole por 5, porque dividir es hacer...

RESOLUCIÓN: 14500 / 5
2900 ptas.

Su hermano tiene 2900 pesetas.

PROBLEMA 2.º *Un niño tiene* 6800 *bolas y las quiere regalar a un hermanito suyo, de* 5 *en* 5. *¿Cuántas veces podrá darle* 5 *bolas?* — ¿Qué buscamos en este problema? — Las veces que un niño podrá dar a su hermanito 5 bolas. — Y ¿qué sabemos? — Que un niño tiene 6800 bolas y las quiere dar a su hermanito de 5 en 5. — Si se las diese de 1 en 1, ¿cuántas veces podría darle bolas? — 6800 veces. — Y dándoselas de 5 en 5, ¿podrá darle bolas 6800 veces? — No, señor; menos veces. — ¿Cuántas veces menos? — 5 veces menos. — ¿Qué haremos, pues, para resolver este problema? — Haremos el número 6800 cinco veces menor. — ¿Cómo haremos ese número 5 veces menor? — Dividiéndolo, porque dividir es hacer un número tantas veces menor...

RESOLUCIÓN: 6800 / 5
1360

Le podrá dar 5 bolas, 1360 veces.

PROBLEMA 3.º *Un niño, dos niñas, tres hombres y una mujer han de repartirse* 3526 *duros. Hállese cuánto recibirá cada uno.* — ¿Qué se busca en este problema? — Lo que cada uno recibirá. — Y ¿qué sabemos? — Que un niño, dos niñas tres hombres y una mujer han de repartirse 3526 duros.—Un niño, dos niñas, tres hombres y una mujer, ¿cuántas personas componen? — Componen 7 personas.—Si los 3526 duros se los dieran a uno solo, ¿cuánto recibiría? — Recibiría 3526 duros. — Si en vez de darlo todo a uno, se reparte entre los 7, ¿tocará a cada uno 3526 $? — No, señor; 7 veces menos. — ¿Cómo sabremos, pues, lo que corresponde a cada uno?— Haciendo el número 3526, siete veces menor, o dividiéndole por 7.

RESOLUCIÓN: 35,2,6 / 7
0 2 6 — 503 $, 3 ptas., 57 céntimos.
5
× 5 ptas.
25 ptas.
40,0, céntimos.
5 0
1

Cada uno recibirá 503 $, 3 pesetas, 57 céntimos, y sobrará un céntimo.

PROBLEMA. 4.º *¿Cuántos quintales catalanes componen* 4620 *libras?* — 4620 libras, ¿componen 4620 quintales? — No, señor; componen menos. — ¿Por qué? — Porque la libra es menor que el quintal.— ¿Cuántas veces es menor? — 104 veces. — Por consiguiente, el número de quintales ¿será mayor o menor que el de libras? — Será menor. — ¿Cuántas veces? — 104 veces. — ¿Cómo sabremos, pues, los quintales que componen 4620 libras? — Haciendo el número 4620 ciento cuatro veces menor. — ¿De qué será, por tanto, este problema? — De dividir; porque dividir es hacer un número...

Resolución:	4,6,2,0,	/ 1,04
	0 4,6 0	44 quintales.
	0 4 4	

Son 44 quintales y 44 libras.

Problema 5.º *120 litros de vino han costado 240 pesetas. ¿A razón de cuánto se ha pagado el litro?* — Qué buscamos en este problema? — Lo que vale 1 litro de vino. — Y ¿qué sabemos? — Que 120 litros valen 240 pesetas. — Si 120 litros valen 240 pesetas, 1 litro ¿valdrá más o menos? — Valdrá menos. — ¿Cuántas veces menos? — 120 veces menos. — ¿Qué haremos, pues, para hallar el valor de 1 litro? — Haremos el número 240, ciento veinte veces menor. — ¿Cómo se hace un número 120 veces menor? — Dividiéndolo por 120, porque dividir es hacer un número...

Resolución:	24(0	/ 12(0
	00	2 pesetas.

El litro se ha pagado a 2 pesetas.

Problema 6.º *Un tratante en granos empleó 2500 pesetas en trigo que pagó a 18 pesetas el hectolitro: ¿cuántos hectolitros compró?* — ¿Qué buscamos en este problema? — Los hectolitros de trigo que el tratante en granos compró. — Y ¿qué sabemos? — Que empleó 2500 pesetas y que por cada hectolitro pagó 18 pesetas. — Si hubiese pagado el trigo a 1 peseta el hectolitro, ¿cuántos hectolitros hubiera podido comprar con 2500 pesetas? — 2500 hectolitros. — Ahora bien; si pagando el trigo a 1 peseta el hectolitro hubiera podido comprar 2500 hectolitros, pagándolo a 18 pesetas, ¿podrá comprar 2500 hectolitros? — No, señor; podrá comprar menos. — ¿Cuántas veces menos? — 18 veces menos. — ¿Qué debemos hacer, pues, para resolver este problema? — Debemos hacer el número 2500 diez y ocho veces menor, partiéndole por 18; porque dividir es hacer un número...

Resolución:	2 5,0,0	/ 1,8
	0 7 0	138 hectolitros.
	1 6 0	
	1 6	

Compró 138 hectolitros, y le sobraron 16 pesetas.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

Divisibilidad

80. Definición. — *Divisibilidad* es la parte de la Aritmética que tiene por objeto determinar las condiciones que deben satisfacer los números para que sean divisibles por otros.

Un número es divisible por otro cuando es *múltiplo* de este otro; esto es, cuando le contiene un número exacto de veces.

Así, el 12 es múltiplo de los números siguientes: de 12, porque le contiene una vez; de 1, porque le contiene 12 veces; de 2, porque le contiene 6 veces; de 3, porque le contiene 4 veces; de 4, porque le contiene 3 veces; de 6, porque le contiene 2 veces. El número 24 es múltiplo de 24, de 1, de 8, de 12, de 3, de 6, de 4 y de 2.

El número que está contenido en otro un número exacto de veces, se llama *submúltiplo*, *factor* o *divisor* de este otro.

Así, son divisores de 12:
El 12, porque está contenido en él 1 vez; el 1, porque está contenido en él 12 veces; el 2, porque está contenido en él 6 veces; el 3, porque está contenido en él 4 veces; el 4, porque está contenido en él 3 veces; el 6, porque está contenido en él 2 veces. Son divisores de 24 los siguientes: 24, 1, 8, 12, 3, 6, 4 y 2.

81. Número par y número impar.—*Número par* es todo entero múltiplo de 2, y número *impar*, todo entero que no es múltiplo de 2. Los números pares de una cifra son: 2, 4, 6 y 8, y los impares, 1, 3, 5, 7 y 9.

82. Fundamento de la teoría de la divisibilidad.—La teoría de la divisibilidad se funda, principalmente, en las proposiciones siguientes:

1.ª *Si un número es divisor de otros, es divisor de su suma.*

El número 7, por ejemplo, es divisor de 28, 35 y 42. Digo que también es divisor de 28 + 35 + 42. En efecto:

$$28 = 4 \times 7$$
$$35 = 5 \times 7$$
$$42 = 6 \times 7$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, tendremos:

$$28 + 35 + 42 = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 7;$$

y separando en el segundo miembro el factor común (*) 7, tendremos:

$$28 + 35 + 42 = (4 + 5 + 6)\,7;\ \text{ó bien,}$$
$$28 + 35 + 42 = 15 \times 7.$$

El segundo miembro de esta última igualdad, nos dice que el número 7 está contenido en la suma del primer miembro 15 veces, esto es, un número exacto de veces; luego el 7 es divisor de la suma (**80**).

De este teorema se deduce, claramente, el siguiente

COROLARIO. — *Si un número es divisor de otro, es divisor de cualquier múltiplo de este otro.*

El número 3, por ejemplo, es divisor de 6; digo que también es divisor de $6 \times 4 = 24$, múltiplo de 6.

En efecto: $24 = 6 + 6 + 6 + 6$; y como 3 es divisor de cada uno de los sumandos, según el teorema anterior, también será divisor de 24, que es la suma.

2.ª *Si un número es divisible por otro, es también divisible por cualquier divisor de este otro.*

El número 36, por ejemplo, es divisible por 12; digo que también es divisible por 4, divisor de 12.

En efecto; si el número 36 es divisible por 12, es porque contiene al 12 un número exacto de veces, y si 4 es divisor de 12, el 12 contiene al 4 un número exacto de veces. Luego si el 36 contiene al 12 un número exacto de veces, y el 12 contiene un número exacto de veces al 4, el 36 también contiene al 4 un número exacto de veces; luego el 36 es divisible por 4 (**80**).

3.ª *Si un número es divisor de otros dos, también es divisor de su diferencia.*

El número 3 es divisor de 27 y 12; digo que también lo será de 27 — 12.

En efecto:

$$27 = 9 \times 3$$
$$12 = 4 \times 3$$

Restando ordenadamente estas dos igualdades, tendremos:

$$27 - 12 = 9 \times 3 - 4 \times 3;$$

y separando en el segundo miembro de esta igualdad el factor común, 3, tendremos

$$27 - 12 = (9 - 4)\,3;$$

y verificando la resta indicada, se obtiene:

$$27 - 12 = 5 \times 3$$

El segundo miembro de esta última igualdad nos dice que en la diferencia 27 — 12 el número 3 está contenido exactamente 5 veces, luego el 3 es divisor de esta diferencia (**80**).

(*) Cuando hay dos o más números relacionados por el signo + o por el signo —, y todos se multiplican por un tercero, los números afectados por el mismo signo de multiplicar pueden encerrarse dentro de un paréntesis, escribiendo fuera de éste el factor común. Así: $8 \cdot 3 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = (8 + 9 + 4)\,3$; $20 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = (20 - 4)\,5$.

La nueva disposición que reciben el multiplicador y los multiplicandos, se llama *separar un factor común.*

4.ª *Si un número es divisor de uno de dos sumandos y no lo es del otro, tampoco es divisor de la suma.*

Pues si dicho número fuese divisor de la suma, también sería divisor del segundo sumando, el cual no es más que la diferencia entre la suma y el primero (**82.**—*Proposición* 3.ª), lo cual es contrario a la hipótesis y, por consiguiente, absurdo.

5.ª *Si un número es divisor del minuendo y no lo es del substraendo, no es divisor del resto.*

Si dicho número fuese divisor del resto, como el substraendo es la diferencia entre el minuendo y el resto, también sería divisor del substraendo (**82.**— *Proposición* 3.ª), lo que es contrario a la hipótesis del teorema.

83. Caracteres de divisibilidad de un número entero por otro entero. — *Todo número es divisible por* 10, *si su primera cifra de la derecha es cero, por* 100, *si sus dos primeras cifras de la derecha son ceros; por* 1000, 10000, *etcétera, si son ceros sus tres, cuatro, etc., primeras cifras de la derecha.* (**79.** — *Resolución del segundo caso.*)

84. *Todo número es divisible por* 2, *si la cifra de sus unidades simples es cero o par.*

Sea el número 720; digo que, por terminar en cero, es divisible por 2. En efecto: el número 720 es divisible por 10, y como 10 es divisible por 2, el número 720 también lo es. (**82.** — *Proposición* 2.ª)

Tomemos el número 426. Decimos que este número, por terminar en cifra par, es divisible por 2.

En efecto, $426 = 420 + 6$.

El primer sumando, por terminar en cero, es divisible por 2, y el segundo también lo es por ser cifra par; luego la suma 426 también lo será. (**82.** — *Proposición* 1.ª)

Corolario. — *Un número no es divisible por* 2, *si la cifra de sus unidades simples no es cero ni par.*

Sea el número 427; digo que no es divisible por 2.

En efecto: $427 = 420 + 7$. El primer sumando es divisible por 2 por terminar en cero, y el segundo no lo es por no ser cifra par; luego la suma 427 tampoco lo será. (**82.** — *Proposición* 4.ª)

85. *Todo número es divisible por* 5 *si la cifra de sus unidades simples es cero o cinco.*

Corolario. — *Un número no es divisible por* 5 *si la cifra de sus unidades simples no es cero ni* 5.

Teorema y corolario se demuestran, respectivamente, como el caso anterior.

86. *Todo número es divisible por* 4 *si sus dos primeras cifras de la derecha son ceros, o forman un múltiplo de* 4.

Sea el número 64200, cuyas dos primeras cifras de la derecha son ceros; digo que este número es divisible por 4.

En efecto; este número es divisible por 100, y como 100 es divisible por 4 por contenerle 25 veces, pues $25 \times 4 = 100$, el número 64200 también es divisible por 4. (**82.** — *Proposición* 2.ª)

Tomemos, ahora, un número cuyas dos primeras cifras de la derecha formen un múltiplo de 4, por ejemplo el número 3824: digo que este número es divisibe por 4.

En efecto; $3824 = 3800 + 24$. El primer sumando es divisible por 4 por terminar en dos ceros, y el segundo sumando, 24, también lo es por ser un múltiplo de 4; luego la suma 3824, también es divisible por 4. (**82.** — *Proposición* 1.ª)

Corolario. *Un número no es divisible por* 4, *si sus dos primeras cifras de la derecha no son ceros ni forman un múltiplo de* 4.

Tomemos un número cuyas dos primeras cifras de la derecha no sean ceros ni formen un múltiplo de 4, por ejemplo, el 3826.

Digo que este número no es divisible por 4.

En efecto; $3826 = 3800 + 26$. El primer sumando es divisible por 4, pero el segundo no; luego la suma 3826 no es divisible por 4. (**82.** — *Proposición* 4.ª)

87. *Todo número es divisible por* 25, *si sus dos primeras cifras de la derecha son ceros o forman un múltiplo de* 25; *esto es, si son* 25, 50 *ó* 75.

COROLARIO. *Un número no es divisible por 25, si sus dos primeras cifras de la derecha no son ceros ni forman un múltiplo de 25.*

Teorema y corolario se demuestran, respectivamente, como el caso anterior.

88. *Todo número es divisible por 8, si sus tres primeras cifras de la derecha son ceros o forman un múltiplo de 8.*

Si el número tiene sólo tres cifras se ve, mentalmente, si es divisible por 8.

Sea el número 124000; digo que es divisible por 8 por terminar en tres ceros. En efecto, este número es divisible por 1000, y 1000 es divisible por 8 por contenerle 125 veces, pues $125 \times 8 = 1000$; luego el número 124000 es divisible por 8. (**82.** — *Proposición* 2.ª)

Sea el número 47512, cuyas tres primeras cifras de la derecha forman un múltiplo de 8; digo que es divisible por 8.

En efecto: $47512 = 47000 + 512$. El sumando 47000 es divisible por 8 por terminar en tres ceros, y el segundo sumando también lo es; luego la suma 47512 es divisible por 8. (**82.** — *Proposición* 1.ª)

COROLARIO. — *Un número no es divisible por 8 si sus tres primeras cifras de la derecha no son ceros ni forman un múltiplo de 8.*

Se demuestra como los corolarios de **84, 85** y **86.**

89. *Todo número es divisible por 9 o por 3, si la suma de los valores absolutos de sus cifras significativas es, respectivamente, un múltiplo de 9 o de 3.*

A la demostración de este teorema, hay que anteponer dos lemas:

LEMA 1.º *Todo número formado por la unidad seguida de ceros, es un múltiplo de 9 y de 3 más la unidad.*

Sea, por ejemplo, el número 1000. Digo que

$$1000 = m.\text{ de } 9 + 1 \ (*)$$
$$\text{y que } 1000 = m.\text{ de } 3 + 1$$

En efecto; $1000 = 999 + 1$; pero $999 = 111 \times 9$; luego el número 999 es un múltiplo de 9, pues lo contiene 111 veces; luego

$$1000 = m.\text{ de } 9 + 1$$

Ahora; todo múltiplo de 9 es múltiplo de 3. (**82.** — *Proposición* 2.ª)

Luego $1000 = m.\text{ de } 3 + 1.$

LEMA 2.º *Todo número formado por una cifra significativa seguida de ceros, es un múltiplo de 9 y de 3, más el valor absoluto de dicha cifra.*

Sea, por ejemplo, el número 6000; digo que

$$\begin{aligned} 6000 &= m.\text{ de } 9 + 6 \\ \text{y que } 6000 &= m.\text{ de } 3 + 6 \\ \text{En efecto; } 6000 &= 1000 \times 6 \\ \text{pero } 1000 &= m.\text{ de } 9 + 1 \ (\textit{Lema anterior}) \\ \text{y también } 1000 &= m.\text{ de } 3 + 1 \ (\textit{Lema anterior}) \\ \text{luego } 6000 &= (m.\text{ de } 9 + 1)\ 6 \\ \text{y } 6000 &= (m.\text{ de } 3 + 1)\ 6 \end{aligned}$$

Verificando la multiplicación indicada en el segundo miembro de cada una de estas dos últimas igualdades, tendremos:

$$\begin{aligned} 6000 &= m.\text{ de } 9 \times 6 + 6 \ (\mathbf{58}) \\ 6000 &= m.\text{ de } 3 \times 6 + 6 \\ \text{Y como que } m.\text{ de } 9 \times 6 &= \text{un múltiplo de } 9 \\ \text{y } m.\text{ de } 3 \times 6 &= \quad \text{»} \quad \text{de } 3, \end{aligned}$$

queda demostrado el lema.

Pasemos a la demostración del teorema.

Sea el número 8469. Descomponiéndole en sus diversos órdenes de unidades, tendremos:

Con respecto al 9:

$$8469 = \begin{cases} 8000 = m.\text{ de } 9 + 8 \\ \ \ 400 = m.\text{ de } 9 + 4 \\ \ \ \ \ 60 = m.\text{ de } 9 + 6 \\ \ \ \ \ \ \ 9 = \qquad\qquad 9 \end{cases}$$

Sumando ordenadamente: $8469 = m.\text{ de } 9 + (8 + 4 + 6 + 9)$

(*) En lo sucesivo, abreviaremos la palabra *múltiplo* escribiendo *m.*

Con respecto al 3:

$$8469 = \left\{ \begin{array}{r} 8000 = m.\text{ de } 3 + 8 \\ 400 = m.\text{ de } 3 + 4 \\ 60 = m.\text{ de } 3 + 6 \\ 9 = \qquad\quad 9 \end{array} \right.$$

Sumando ordenadamente: $8469 = m.\text{ de } 3 + (8 + 4 + 6 + 9)$

Los segundos miembros de estas dos últimas igualdades nos dicen que, si la suma de los números encerrados dentro de los paréntesis, que es la suma de los valores absolutos de las cifras del número dado, es divisible por 9 o por 3, el número propuesto también será divisible por 9 o por 3.

Corolario. — *Un número no es divisible por 9 o por 3, si la suma de los valores absolutos de sus cifras significativas no es un múltiplo de 9 o de 3.*

Sea N el número, y S, la suma de los valores absolutos de sus cifras. $N = m.$ de $9 + S$. Luego si S es divisible por 9 o por 3, N también lo será; pero si S no es divisible por 9 o por 3, N tampoco lo será.

90. *Todo número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar y la suma de los de las de lugar par, contando de derecha a izquierda, es cero o un múltiplo de 11.*

A la demostración de este teorema, debemos anteponer dos lemas:

Lema 1.º *Todo número formado por la unidad seguida de ceros, se compone de un múltiplo de 11 más o menos la unidad, según que el número de ceros sea par o impar.*

1.º Sea el número 10000; digo que este número, formado por la unidad y un número par de ceros, se compone de un $m.$ de $11 + 1$.

En efecto; $10000; = 9999 + 1$.

$99 = 11 \times 9$; luego 99 es múltiplo de 11 y, por lo mismo, todo número formado por un número par de nueves es divisible por 11, o múltiplo de 11; luego 9999 es un múltiplo de 11; luego

$$10000 = m.\text{ de } 11 + 1.$$

2.º Sea, ahora, el número 100000; digo que $100000 = m.$ de $11 - 1$.

En efecto; $100000 = 10000 \times 10$; pero $10 = 11 - 1$; luego, según hemos visto en el caso 1.º, tendremos:

$$100000 = 10000 \times 10 = (m.\text{ de } 11 + 1)\, 10 = m.\text{ de } 11 \times 10 + 10 = m.\text{ de } 11 + 10$$
$$= m.\text{ de } 11 + 11 - 1 = m.\text{ de } 11 - 1,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Lema 2.º *Todo número formado por una cifra significativa seguida de ceros, se compone de un múltiplo de 11 más o menos el valor absoluto de dicha cifra, según que el número de ceros sea par o impar.*

1.º Sea el número 40000; digo que $40000 = m.$ de $11 + 4$.

En efecto; $40000 = 4 \times 10000$; pero, según la primera parte del lema primero,

$$10000 = m.\text{ de } 11 + 1;$$

luego $40000 = 4\,(m.\text{ de } 11 + 1) = m.\text{ de } 11 \times 4 + 4 = m.\text{ de } 11 + 4$.

2.º Sea el número 4000; digo que $4000 = m.$ de $11 - 4$.

En efecto; $4000 = 4 \times 1000$; pero, según la segunda parte del lema primero,

$$1000 = m.\text{ de } 11 - 1;$$

luego $4000 = 4\,(m.\text{ de } 11 - 1) = m.\text{ de } 11 \times 4 - 4 = m.\text{ de } 11 - 4$.

Pasemos a la demostración del teorema.

Sea el número 84634. Descomponiendo este número en sus diversos órdenes de unidades, tendremos:

$$84634 = \left\{ \begin{array}{rl} 80000 = m.\text{ de } 11 + 8 & (2.^{\circ}\text{ lema — }1.^{a}\text{ parte}). \\ 4000 = m.\text{ de } 11 - 4 & (2.^{\circ}\ \text{»}\quad 2.^{a}\ \text{»}\ ). \\ 600 = m.\text{ de } 11 + 6 & (2.^{\circ}\ \text{»}\quad 1.^{a}\ \text{»}\ ). \\ 30 = m.\text{ de } 11 - 3 & (2.^{\circ}\ \text{»}\quad 2.^{a}\ \text{»}\ ). \\ 4 = \qquad\qquad + 4 & \end{array} \right.$$

Sumando ordenadamente, tendremos: $84634 = m.\text{ de } 11 + (8 + 6 + 4) - (4 + 3)$.

Esta última igualdad nos dice, evidentemente, que si la diferencia entre $8 + 6 + 4$ y $4 + 3$ es cero, el número 84634 es un múltiplo de 11 y, por tanto, divisible por 11; que si dicha diferencia es un múltiplo de 11, el número será la suma de dos múltiplos de 11, y por lo tanto, divisible por 11, y que si dicha diferencia no es un múltiplo de 11, el número no será divisible por 11. (**82.** — *Proposiciones* 1.ª y 4.ª)

Sirviéndonos de las letras, se demostrará mejor el alcance del teorema.

Sea N el número; I, la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar, y P la suma de los valores de las de lugar par, contando de derecha a izquierda. Tendremos:

$$N = m.\text{ de } 11 + I - P.$$

Luego si $I - P$ es cero, resulta $N - m.$ de 11, y, por tanto, divisible por 11.

Si $I - P$ no es cero, I será mayor ó menor que P.

Si I es mayor que P, N puede considerarse como la suma de $m.$ de 11 e $(I - P)$; luego si esta diferencia es divisible por 11, N también lo será.

Si I es menor que P, N puede considerarse como la diferencia entre $m.$ de $11 + I$, y P, es decir:

$$N = (m.\text{ de } 11 + I) - P.$$

Y como la diferencia entre dos números no altera si de minuendo y substraendo quitamos un mismo número, si de minuendo y substraendo quitamos I, tendremos:

$$N = (m.\text{ de } 11 + I - I) - (P - I),$$

o bien:

$$N = m.\text{ de } 11 - (P - I).$$

Por lo que, si $P - I$ es divisible por 11, el número N también lo será.

Escolio. — ***Esto nos dice, pues, que, al restar las sumas de los valores absolutos de las cifras de lugar par e impar, tomaremos por minuendo la mayor, y que si la diferencia es cero o un múltiplo de 11, el número será divisible por 11, y que no lo será en caso contrario.***

90 bis. Condición general de divisibilidad. — *Para que un número sea divisible por un divisor determinado, es necesario y suficiente que multiplicando cada una de las cifras del número por el residuo, aditivo o substractivo, que se obtiene dividiendo la unidad de su mismo orden por el divisor dado, la diferencia entre la suma de los productos correspondientes a los restos aditivos y la de los que corresponden a los restos substractivos sea cero o un múltiplo de dicho divisor.*

Sea el número $N = \ldots\ldots m\,c\,d\,u$, en el cual u representa las unidades simples o de primer orden, d las decenas o unidades de segundo orden, c las centenas o unidades de tercer orden, m los millares o unidades de cuarto orden, etc; a, el divisor dado; $q, q', q'', q''' \ldots\ldots$, los cocientes que se obtienen al dividir una unidad de 1.º, de 2.º, de 3.º, de 4.º orden...... por el divisor a; $r, r', r'', r''' \ldots\ldots$ los residuos, aditivos o substractivos, correspondientes; de modo, pues, que (**71** *a*)

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10^3 = a \times q''' \pm r''' \\ 10^2 = a \times q'' \pm r'' \\ 10 = a \times q' \pm r' \\ 1 = a \times q \pm r. \end{array}$$

Multiplicando los dos miembros de la última igualdad por u, los de la penúltima por d, los de la antepenúltima por c, etc., tendremos:

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m \times 10^3 = aq'''m \pm r'''m \\ c \times 10^2 = aq''c \pm r''c \\ d \times 10 = aq'd \pm r'd \\ u \times 1 = aqu \pm ru. \end{array}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, y observando que la suma de los primeros miembros, o sea $\ldots\ldots + m \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + u = \ldots\ldots mcdu = N$, tendremos:

$$N = \ldots. + aq'''m + aq''c + aq'd + aqu \pm \ldots. \pm r'''m \pm r''c \pm r'd \pm ru,$$

y sacando el factor común a en el segundo miembro, $N = a\,(\ldots\ldots + q'''m + q''c + q'd + qu) + (\pm \ldots\ldots \pm r'''m \pm r''c \pm r'd \pm ru)$.

El número N es, pues, una suma de dos sumandos, el primero de los cuales es divisible por a, luego (**82.** — 4.ª) para que N sea divisible por a, el otro sumando, $\pm \ldots\ldots \pm r'''m \pm r''c \pm r'd \pm ru$, o tiene que valer o o ser también divisible por a. Pero cada una de las cantidades $r'''m$, $r''c$, etc., no es más que el producto de cada cifra del número N por el residuo obtenido al dividir por a una unidad de su mismo orden, producto que llevará el signo $+$, y deberá, por tanto, sumarse, si el residuo es aditivo, y llevará el signo —, y deberá restarse, si el residuo es substractivo. Luego, si la diferencia entre la suma de las cantidades que deben sumarse y la de las que deben restarse es o o un múltiplo de a, el número N será divisible por a, y si dicha diferencia no es o ni un múltiplo de a, N no será divisible por a, que es lo que nos proponíamos demostrar.

Como aplicación práctica, hallemos los

Caracteres de divisibilidad de un número entero por 7. — Hallemos los residuos que se obtienen al dividir 1 unidad de los distintos órdenes por 7:

$1 : 7$,	residuo aditivo,	1;		
$10 : 7$,	» »	3;		
$10^2 : 7$,	» »	2;		
$10^3 : 7$,	» »	6;	residuo substractivo,	— 1;
$10^4 : 7$,	» »	4;	» »	— 3;
$10^5 : 7$,	» »	5;	» »	— 2;
$10^6 : 7$,	» »	1; etc.;		

los residuos, aditivos y substractivos, buscados son, pues: 1, 3, 2, — 1, — 3, — 2, 1, 3, 2, — 1, — 3, — 2, 1, etc.; luego, *para que un número entero sea divisible por 7, es necesario y suficiente que, considerado dicho número dividido en grupos de tres cifras empezando por la derecha, y sumadas las unidades de cada grupo de lugar impar, con sus decenas multiplicadas por 3 y sus centenas multiplicadas por 2, y sumadas después las unidades de cada grupo de lugar par, con sus decenas multiplicadas por 3, y sus centenas multiplicadas por 2, la diferencia entre la primera suma y la segunda sea cero o un múltiplo de 7.*

Ejemplo: Propongámonos averiguar si el número 31409532 es divisible por 7. Descompongamos dicho número en grupos de a tres cifras, empezando por la derecha: 31 409 532.

Productos de las cifras de los grupos de lugar impar por los residuos correspondientes:

$$\begin{array}{lr} 2 & = 2 \\ 3 \times 3 & = 9 \\ 5 \times 2 & = 10 \\ 1 & = 1 \\ 3 \times 3 & = 9 \\ \hline \text{Suma de dichos productos......} & = 31 \end{array}$$

Productos correspondientes a los grupos de lugar par:

$$\begin{array}{lr} 9 & = 9 \\ 0 \times 3 & = 0 \\ 4 \times 2 & = 8 \\ \hline \text{Suma de dichos productos .....} & = 17 \end{array}$$

Diferencia entre las dos sumas: 31 — 17 = 14, que es un múltiplo de 7; luego, el número propuesto es divisible por 7.

Pruebas de la multiplicación y de la división

(Continuación de la Divisibilidad)

90′. Las pruebas que vamos a explicar se fundan en los tres teoremas siguientes:

1.º *Si dos números, divididos por un tercero, dan residuos iguales, la diferencia de estos dos números es divisible por este tercer número.*

Sean 49 y 22 los dos números que, divididos por 9, dan el mismo residuo, 4; digo que su diferencia 27 es divisible por 9. En efecto:

$$49 = m.\text{ de } 9 + 4, \text{ y } 22 = m.\text{ de } 9 + 4.$$

Llamando M y M′, respectivamente, a estos múltiplos de 9, tendremos:

$$49 = M + 4$$
$$22 = M' + 4$$

Restando miembro a miembro, resulta:

$$49 - 22 = (M + 4) - (M' + 4)$$

Restando en ambos miembros, tenemos. $27 = M - M'$

O bien .... $27 = m.$ de 9 (**82** — 3.ª) conforme se quería demostrar.

2.º *Si la diferencia de dos números es divisible por un tercero, estos números, divididos por este tercero, dan residuos iguales.*

Sean estos números 49 y 22, cuya diferencia 27 es divisible por 9; digo que ambos números divididos por 9, dan iguales residuos. En efecto:

$$49 = 22 + 27$$

Si al dividir 49 por 9 se obtiene un cierto residuo, este mismo residuo volverá a encontrarse al dividir 22 por 9; pues el exceso 27 del primer dividendo sobre el segundo sólo afecta al cociente de la división, ya que este exceso es múltiplo del divisor.

3.º *El residuo de la división de un producto de dos factores por un divisor cualquiera, es igual al residuo que se obtiene partiendo, por este divisor, el producto de los dos residuos obtenidos partiendo cada factor por este divisor.*

Sean A y B los dos factores; D, el divisor por qué se divide el producto de los mismos, y R y R′, los residuos de dividir, respectivamente, A y B por D. Tendremos:

$$A = \textit{múltiplo de } D + R$$
$$B = \quad " \quad " \quad D + R'$$

Multiplicando miembro a miembro ambas igualdades, se obtendrá una nueva igualdad, cuyo segundo miembro tendrá cuatro sumandos (**59**) tales, que los tres primeros serán múltiplos de D; luego el producto ordenado de dichas dos igualdades puede escribirse así:

$$A \times B = m. \text{ de } D + R \times R'$$

La diferencia entre los números $A \times B$ y $R \times R'$ se ve que es el número $m.$ de D; este número es, evidentemente, divisible por D; luego, en virtud del teorema anterior, los residuos de $A \times B$ y $R \times R'$ por D serán iguales, que es lo que nos proponíamos demostrar.

De lo que acabamos de demostrar se deduce la

90″. Prueba por 9 de la multiplicación. — *Para hacer la prueba por 9 de la multiplicación, se buscan los residuos de la división por 9 del multiplicando, del multiplicador y del producto; se multiplican los dos primeros residuos entre sí, y su producto, dividido por 9, debe dar un residuo igual al residuo del producto de los números propuestos.*

Hagamos la prueba por 9 del producto 538×254.

Podemos disponer la operación así:

Factores	538	Residuo, 7	$7 \times 2 = 14$.	Residuo, 5.
	× 254	Residuo, 2		
	2152			
	2690			
	1076			
Producto,	136652	Residuo, 5.		

No siempre que se verifique la prueba, será cierta la operación. En efecto; supongamos que se ha efectuado bien el producto de dos números y que la prueba quede satisfecha. Es evidente que, cambiando de lugar las cifras del multiplicando, multiplicador o producto, la prueba quedará todavía satisfecha, mientras que la operación resultará equivocada; de modo, que el número que se considerará como producto será muy distinto del que darían los factores propuestos.

Naturalmente, pues, que la prueba anterior no puede merecer los elogios que determinados autores le prodigan.

De una manera análoga se haría la prueba por 11, 13, 17, 19, etc.; se toman, generalmente, los números 9 u 11 porque pueden obtenerse los residuos con más facilidad.

90‴. Prueba por 11 de la división. — Si la división es exacta, se hace la prueba por 9, considerando el dividendo como un producto, cuyos factores son el divisor y el cociente.

Si la división es inexacta, se quita el residuo del dividendo, y el resto es el producto del cociente por el divisor. Este caso se convierte, pues, al anterior con suma facilidad.

Terminaremos este capítulo con la exacta, breve y sencillísima

90⁗. Prueba de la multiplicación, de M. Gossart.

1.º *Se suman, separadamente, las cifras del multiplicando y del multiplicador* (los valores absolutos).

2.º *Se suman las cifras del resultado que hayan arrojado estas sumas en cada factor.*

3.º *Se multiplican entre sí estos resultados obtenidos en cada factor, y las cifras de este producto se suman.*

4.º *Se suman también las cifras del producto y luego, las que arroje esta suma, y el resultado habrá de ser exactamente igual a la suma de las cifras del producto obtenido multiplicando entre sí las últimas sumas de los factores.*

Comprobemos la multiplicación $538 \times 254 = 136{,}652$.

Suma de las cifras del multiplicando: $5 + 3 + 8 = 16$; suma otra vez, $1 + 6 = 7$.
Suma de las cifras del multiplicador: $2 + 5 + 4 = 11$; suma otra vez, $1 + 1 = 2$.
Producto de las últimas sumas de los factores: $7 \times 2 = 14$, suma $1 + 4 = 5$.
Suma de las cifras del producto: $1 + 3 + 6 + 6 + 5 + 2 = 23$; suma otra vez $2 + 3 = 5$.

Los factores dan por resultado, 5, y también arroja 5 el producto; luego puede asegurarse que no hay error en la multiplicación.

Comprobemos la multiplicación $4658 \times 3209 = 14.947{,}522$.

Multiplicando: suma de cifras, 23, que se reducen a 5.
Multiplicador: suma de cifras, 14, que se reducen a 5.
Producto de los factores: $5 \times 5 = 25$, que se reducen a 7.
Producto: suma de cifras, 34, que se reducen a 7.
La operación no está equivocada.

En el caso posible, aunque no probable, de que el error consistiera en añadir a un número del producto el mismo número de unidades que, también por error, se quitasen a otro número del mismo producto, la prueba resultaría, evidentemente, falsa.

Potencias de los números

91. Definición. — Se llama *potencia* de un número, el producto que resulta de tomarlo por factor dos o más veces.

Para indicar que un número ha de elevarse a una potencia, se escribe dicho número, y en la parte superior de su derecha, otro de menor tamaño llamado *exponente* (*), el cual expresa, con sus unidades, las veces que el número dado ha de tomarse por factor.

Para indicar que el número 8 ha de elevarse a la tercera potencia, por ejemplo, lo escribiremos así: 8^3, lo cual indica que el número 8 ha de tomarse por factor 3 veces. Luego, $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$.

92. Base y grado. — *Base* de una potencia es el número que a ella ha de elevarse, y *grado*, el número de unidades de su exponente.

En $4^2 = 4 \times 4 = 16$, tendremos que 16 es la potencia; 4 la base, y constituyen el grado las dos unidades del exponente.

(*) De la voz latina *exponere*, poner a la vista.

Las potencias, por razón del grado, se dividen en potencias de primer grado, de segundo grado, de tercer grado, etc.

La potencia primera de un número es el mismo número.

La potencia segunda de un número se llama *cuadrado* del número, y la tercera, *cubo*.

Así, 6^2 se lee *seis elevado al cuadrado*, y como $6^2 = 6 \times 6 = 36$, se dice que 36 es el *cuadrado* de 6.

4^3 se lee *cuatro elevado al cubo*, y como $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$, se dice que 64 es el *cubo* de 4.

93. *Para multiplicar entre sí dos potencias de un mismo número, se suman los exponentes.*

Sean las dos potencias 5^3 y 5^2. Digo que $5^3 \times 5^2 = 5^5$.

En efecto:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$
$$\text{y } 5^2 = 5 \times 5.$$

Multiplicando ordenadamente ambas igualdades, tendremos que

$$5^3 \times 5^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \times 5 \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5.$$

94. *Para elevar una potencia a otra nueva potencia, se multiplica el exponente de la primera por el de la segunda.*

Si queremos elevar, por ejemplo, 3^2 á la 3.ª potencia, lo escribiremos así: $(3^2)^3$. Decimos que $(3^2)^3 = 3^6$.

En efecto: $(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$.

95. *Para elevar un producto indicado a una potencia, se eleva a dicha potencia cada uno de los factores.*

Sea el producto indicado 4×6; digo que $(4 \times 6)^2 = 4^2 \times 6^2$.

En efecto: $(4 \times 6)^2 = (4 \times 6)(4 \times 6) = 4 \times 6 \times 4 \times 6 = 4 \times 4 \times 6 \times 6 = 4^2 \times 6^2$.

Máximo común divisor

96. Definición. — Se llama máximo común divisor (*) de dos o más números, *el mayor número que los divide exactamente á todos.*

Así el *m. c. d.* de 20 y 50 es 10; el de 120, 72 y 36 es 12.

97. *Si el menor de dos números divide al otro, el menor es el m. c. d. de ambos.*

Este principio es evidente. Sean los números 24 y 6, el menor de los cuales es divisor del otro. Digo que 6 es el *m. c. d.* de 24 y 6.

En efecto; el *m. c. d.* de estos dos números no puede ser mayor que 6, y pues 6 es divisor de sí mismo, como también divide a 24, es 6, naturalmente, el *m. c. d.* de 24 y 6.

98. M. c. d. de dos números. — La investigación del *m. c. d.* de dos números, se funda en los tres principios siguientes:

1.º *Todo factor común al dividendo y divisor de una división inexacta también es factor del residuo.*

En efecto; sea la división inexacta

$$\begin{array}{r|l} 48 & 14 \\ \hline 06 & 3 \end{array}$$

en la que $48 = 14 \times 3 + 6$. Todo divisor de 48 y 14 es divisor de 14×3, múltiplo de 14; y todo divisor de 48 y 14×3 es también divisor de 6, diferencia entre 48 y 14×3. (**82.** — *Proposición 3.ª*)

2.º *Todo factor común al divisor y residuo de una división inexacta, también es factor del dividendo.*

(*) En lo sucesivo, abreviaremos *máximo común divisor* escribiéndolo así: *m. c. d.*

Sea la división inexacta
$$\begin{array}{l|l} 48 & 14 \\ \hline 06 & 3 \end{array}$$

en la que $48 = 14 \times 3 + 6$. Todo factor común a 14 y 6, es también factor de 14×3, múltiplo de 14; y todo factor de 14×3 y 6 también es factor de

$$14 \times 3 + 6 = 48,$$

suma de dichos dos números. (**82.** — *Proposición* 1.ª)

3.º *El m. c. d. del dividendo y divisor de una división inexacta, es el mismo que el del divisor y residuo de dicha división.*

Sea la división inexacta 48 : 14, en la que 3 es el cociente entero y 6 el residuo. Llamemos D al *m. c. d.* de 48 y 14 y d, al *m. c. d.* de 14 y 6.

Decimos que $D = d$.

En efecto; siendo D factor de 48 y 14, según el *principio primero* también es factor de 6; de modo, que D y d son factores de 14 y 6, y como d es, por hipótesis, el mayor divisor de estos dos números, resulta, evidentemente, que

$$D \ngtr d.$$

Ahora; siendo d factor de 14 y 6, según el *principio segundo* también es factor de 48; de modo que d y D son factores de 48 y 14, y como D es, por hipótesis, el mayor divisor de estos dos números, se ve claramente que

$$d \ngtr D.$$

Tenemos, pues, que $D \ngtr d$ y que $d \ngtr D$; luego $D = d$, que es lo que queríamos demostrar.

Demostrados estos principios, hallemos, analíticamente, el *m. c. d.* de dos números cualesquiera, por ejemplo, 96 y 9.

El *m. c. d.* de estos dos números no es mayor que 9, pues debe dividir a este número exactamente. Si 9 es divisor de 96, el número 9 es el *m. c. d.* de los números propuestos (**97**). Dividamos estos dos números:

$$\begin{array}{l|l} 96 & 9 \\ \hline 06 & 10 \end{array}$$

Observamos que resulta 10 de cociente entero y 6 de residuo; luego 9 no es el *m. c. d.* de 96 y 9. Pero sabemos que el *m. c. d.* de 96 y 9 es igual al *m. c. d.* de 9 y 6 (**98.** — 3.º); luego la cuestión queda reducida a hallar el *m. c. d.* de estos dos últimos números.

Si 6 es divisor de 9, el número 6 es el *m. c. d.* de estos dos números (**97**). Verifiquemos la división:

$$\begin{array}{l|l} 9 & 6 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$$

Observamos que resulta 1 de cociente entero y 3 de residuo; luego 6 no es el *m. c. d.* de 9 y 6. Pero sabemos que el *m. c. d.* de 9 y 6 es igual al *m. c. d.* de 6 y 3 (**98.**—3.º); luego la cuestión queda reducida a hallar el *m. c. d.* de 6 y 3.

Si 3 es divisor de 6, el número 3 es el *m. c. d.* de estos dos números (**97**). Verifiquemos la división:

$$\begin{array}{l|l} 6 & 3 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Luego el número 3 es el *m. c. d.* de 6 y 3, y también el de 96 y 9. De todo lo cual se deduce la siguiente

99. Regla para hallar el m. c. d. de dos números.—*Para hallar el m. c. d. de dos números, se divide el mayor por el menor, y si la división es exacta, el menor es el m. c. d. de ambos. Si queda residuo, se divide el divisor por el residuo y se continúa partiendo siempre el divisor por el residuo, hasta obtener división exacta. El último divisor es el m. c. d. de los dos números.*

En la práctica, se disponen los números como indica el siguiente

EJEMPLO: *Hallar el máximo común divisor de los números 426 y 96.*

Disposición:

	426	96	42	12	6
Cocientes		4	2	3	2
Residuos	42	12	6	0	

El último divisor, 6, es el *m. c. d.* de 426 y 96.

Escolio. — Si, al dividir el divisor por el residuo, se llega a un residuo *primo* (*) con el divisor, los dos números cuyo *m. c. d.* se busca son primos entre sí, y por tanto, su *m. c. d.* es la unidad.

Esto es evidente, pues siendo divisor y residuo *primos entre sí*, su *m. c. d.* es la unidad, y como el *m. c. d.* de divisor y residuo es igual al *m. c. d.* de los dos números propuestos, claro está que su *m. c. d.* es también la unidad, y, por tanto, los dos números propuestos son *primos entre sí*.

100. Máximo c. d. de varios números. — La investigación del *m. c. d.* de varios números se funda en el principio siguiente:

Todo factor de dos números es también factor del m. c. d. de dichos dos números.

En efecto; hallemos el *m. c. d.* de 390 y 25.

	390	25	15	10	5
Cocientes		15	1	1	2
Residuos	15	10	5	0	

Vemos que el *m. c. d.* de 390 y 25 es 5.

Ahora bien, todo factor común a 390 y 25 es factor de 15, residuo de su división (**98.** — 1.º), y por la misma razón, todo factor común a 25 y 15 también es factor de 10, residuo de esta división, y todo factor común a 15 y 10 también es factor de 5, que es el *m. c. d.* de 390 y 25.

Demostrada la proposición anterior, hallemos el *m. c. d.* de varios números, tales como 615, 195 y 85.

El *m. c. d.* de 615 y 195 (hallado según ya sabemos) es.................. 15
El *m. c. d.* de 85 y 15 es.. 5

Digo que 5 es el *m. c. d.* de 615, 195 y 85.

En efecto, el número 5 es divisor de 85 y 15; luego también es divisor de 615 y 195, múltiplos de 15 (**82.** — *Corolario de la Proposición* 1.ª)

Luego el número 5 es un divisor de 615, 195 y 85.

Demostremos, ahora, que es su *m. c. d.*

Si 615, 195 y 85 tuviesen por *m. c. d.* un número mayor que 5, este número, dividiendo a 615 y 195, dividiría también a su *m. c. d.* (**100**), que es 15; y dividiendo a 85 y a 15, también dividiría al *m. c. d.* de estos dos números, que es 5, lo cual es un absurdo, porque un número mayor que 5 no puede ser divisor de 5; luego los números 615, 195 y 85 no pueden tener por *m. c. d.* un número mayor que 5, o lo que es lo mismo, 5 es el *m. c. d.* de 615, 195 y 85, que es lo que queríamos demostrar.

Tenemos, pues, la siguiente

101. Regla. — *Para hallar el m. c. d. de tres o más números, se halla el m. c. d. de los dos primeros; después se halla el m. c. d. del m. c. d. hallado y del tercer número; después se halla el m. c. d. del último m. c. d. y del cuarto número, y así sucesivamente: el último m. c. d. es el de los números propuestos. Para mayor brevedad, se toman por primeros números los más pequeños.*

Ejemplo: *Hallar el m. c. d. de* 120, 615 *y* 36.

Hallemos, primero, el *m. c. d.* de 120 y 36.

	120	36	12
C.		3	3
R.	12	0	

(*) Dos números se llaman *primos entre sí*, cuando no tienen ningún factor común mayor que la unidad. Así los números 5 y 7 son primos entre sí, por ser la unidad el único número que divide a ambos exactamente.

Hallemos ahora el m. c. d. de 615 *y* 12.

	615	12	3
C.		51	4
R.	3	0	

El último divisor, 3, es el m. c. d. de 120, 615 y 36.

102. Propiedades del m. c. d. — Las principales son las siguientes:

1.ª *Si dos o más números se dividen por su m. c. d., los cocientes son números primos entre sí.*

2.ª *Si dos o más números se multiplican por un número entero, su m. c. d. queda multiplicado por dicho entero.*

3.ª *Si dos o más números se dividen por un factor común a ambos, su m. c. d. queda dividido por dicho factor.*

Números primos

103. Definición. — *Llamamos números primos a los que sólo son divisibles por sí mismos y por la unidad.*

Los números primos menores que 100, son: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

104. Número compuesto. — Se llama *compuesto* el número que tiene algún divisor primo mayor que la unidad.

Así, son numeros compuestos 4, 12, 16, etc.

105. Números primos entre sí. — Dos o más números se llaman *primos entre sí*, cuando la unidad es el único factor común a todos ellos.

Así, los números 8, 5, 6 y 21 son primos entre sí, porque la unidad es el único divisor común a todos.

Dos o más números se llaman *primos entre sí dos a dos*, cuando cada uno de ellos es primo con todos los demás.

Los números 8, 5, 6 y 21 son primos entre sí, según hemos dicho anteriormente; pero no son primos entre sí *dos a dos*, pues el 8 no es primo con el 6, y éste tampoco lo es con el 21.

Los números 5, 7 y 11 son primos entre sí *dos a dos*, pues cada uno de ellos es primo con los demás. Vemos, pues, que dos o más números pueden ser *primos entre sí;* pero puede ser que no lo sean *dos a dos*, y que si dos o más números son primos entre sí dos a dos, con mayor razón son primos entre sí.

106. *Dos números que se diferencien en una unidad son primos entre sí.*

Es un principio casi evidente; pues si dichos números tuviesen algún factor común diferente de la unidad, la diferencia entre ambos también lo tendría (**82.**— *Proposición* 3.ª), lo cual es un absurdo.

107. *Hay una serie indefinida de números primos.*

Para demostrarlo, admitamos que no sea así, es decir, que la serie de números primos tenga límites y que P sea el número primo mayor. Según esto, el producto de todos los números primos entre sí, sumado con la unidad, será un número compuesto. Llamemos N a este número, y decimos que N *no es un número compuesto, sino primo.*

En efecto, indicando las operaciones, tendremos que:

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \ldots\ldots \times P) + 1 = N.$$

Si N fuese un número compuesto, sería divisible por alguno de los primos 2, 3, 5, 7, etc. (**104**); lo cual vemos que no es posible, porque N es una suma formada por dos sumandos, el primero de los cuales es divisible por cualquiera de los primos mencionados, y el segundo sumando, no; luego la suma tampoco lo será (**82**.— *Proposición* 4.ª); luego N es un número primo. Queda, pues, probado, que existe un número primo mayor que P, y que, por lo mismo, *hay una serie indefinida de números primos.*

108. Regla para conocer si un número es primo. — *Para conocer si un número es primo, basta dividirle, sucesivamente, por los primos*, 2, 3, 5, 7, 11, 13, *etc., menores que él, y si llegamos, sin obtener división exacta, a encontrar un cociente entero menor que el primo que le sirve de divisor, el número dado será primo.*

Propongámonos averiguar si el número 197 es primo.

Dividiéndole, sucesivamente, por los primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13, la división siempre es inexacta, y al dividirlo por el primo inmediato superior, 17, hallamos también división inexacta y el cociente entero 11, menor que el divisor. *Decimos, pues, que el número* 197 *es primo.*

En efecto, el número 197 no puede ser divisible por ningún número compuesto menor que 17, porque si lo fuese, también sería divisible por los diversos primos de este compuesto (**82**.—*Proposición* 2.ª) y esto, además de ser contrario a la hipótesis, hemos visto, prácticamente, que no sucede. — *De modo, pues, que el número* 197 *no es divisible por ningún número menor que* 17.

Veamos, ahora, si puede ser divisible por algún número mayor que 17. Si lo fuese, el cociente de la división exacta no sería mayor que 17, y como el dividendo de una división exacta es divisible por el cociente, tendríamos que el número 197 sería divisible por 17 o por un número menor que 17, lo cual ya hemos visto antes que no es posible. Queda, pues, demostrado, que el número 197 sólo es divisible por sí mismo y por la unidad; *luego el número* 197 *es primo.*

109. Construcción de una tabla de números primos. — Una tabla de números primos es la reunión de todos los números primos inferiores al límite que se señale.

Esta tabla pudiera formarse por la regla que hemos dado (**108**); pero el siguiente método, llamado *criba de Eratóstenes* (*), es preferible por su brevedad.

Se escriben el 1, el 2 y todos los números impares hasta el límite que haya de alcanzar la tabla. Así: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, etc., etc.

Evidentemente, los números 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, son primos. Son múltiplos del 3, el 9 y todos los que ocupan el tercer lugar, contándolos de 3 en 3, desde el 9 exclusive; se tachan estos números empezando por el 9.

Son múltiplos del 5, el 25 y todos los que ocupan el quinto lugar, contándolos de 5 en 5, desde el 25 exclusive; se tachan estos números empezando por el 25.

Son múltiplos del 7, el 49 y todos los que ocupan el séptimo lugar, contándolos de 7 en 7, desde el 49 exclusive; se tachan estos números empezando por el 49

Son múltiplos del 11, el 121 y todos los que ocupan el undécimo lugar, contándolos de 11 en 11, desde el 121 exclusive; se tachan estos números.

Y así continuamos hasta haber tachado los múltiplos de un número primo tal, que el cuadrado del primo siguiente sea mayor que el límite fijado.

En vez de tachar los números, también pueden señalarse con un punto.

Todos los números que resulten sin destruir o señalar son primos.

Véase una.

(*) *Eratóstenes*, profundo matemático, filósofo, orador y poeta, floreció en Egipto 240 años antes de J. C. — Fué el primero que ideó el modo de determinar la magnitud de la tierra.

TABLA DE NÚMEROS PRIMOS DESDE 1 HASTA 1,063

1	61	151	251	359	463	593	701	827	953
2	67	157	257	367	467	599	709	829	967
3	71	163	263	373	479	601	719	839	971
5	73	167	269	379	487	607	727	853	977
7	79	173	271	383	491	613	733	857	983
11	83	179	277	389	499	617	739	859	991
13	89	181	281	397	503	619	743	863	997
17	97	191	283	401	509	631	751	877	1,009
19	101	193	293	409	521	641	757	881	1,013
23	103	197	307	419	523	643	761	883	1,019
29	107	199	311	521	541	647	769	887	1,021
31	109	211	313	431	547	653	773	907	1,031
37	113	223	317	433	557	659	787	911	1,033
41	127	227	331	439	563	661	797	919	1,039
43	131	229	337	443	569	673	809	929	1,049
47	137	233	347	449	571	677	811	937	1,051
53	139	239	349	457	577	683	821	941	1,061
59	149	241	353	461	587	691	823	947	1,063

110. *Todo divisor de un producto de dos factores que sea primo con uno de estos factores, es divisor del otro factor.*

Sea el número 2, que es divisor del producto de 9 × 4 y primo con 9. Digo que 2 es divisor de 4.

En efecto; siendo los números 2 y 9 primos entre sí, su *m. c. d.* es 1; si multiplicamos 2 y 9 por 4, el *m. c. d.* de estos dos números también quedará multiplicado por 4 (**102.** — 2.ª). Ahora, el número 2 es divisor de sí mismo, luego también lo será de 2 × 4, múltiplo de 2; y por hipótesis es divisor de 9 × 4; de modo, pues, que el número 2 es divisor de 2 × 4, y de 9 × 4; luego también será divisor del *m. c. d.* de estos dos números (**100**), que es 1 × 4 = 4, que es lo que nos proponíamos demostrar

Disposición de los números

$$\underbrace{2 \qquad 9}_{1}$$

$$\underbrace{2 \times 4 \qquad 9 \times 4}_{1 \times 4}$$

111. Propiedades de los números primos. — Las principales son las siguientes:

1.ª *Dos números primos son primos entre sí.*

2.ª *Todo número primo divisor de un producto, es divisor, por lo menos, de uno de los factores de este producto.*

3.ª *Si dos números son primos entre sí, dos potencias de un mismo grado de dichos números son también números primos entre sí.*

4.ª *Todo número primo con cada uno de los factores de un producto, es primo con el producto.*

5.ª *El producto de varios números primos no es divisible por otro primo que no sea factor del producto.*

6.ª *Si un número es divisible por dos o más números primos entre sí dos a dos, es divisible por su producto.*

112. Descomposición de un número en sus factores primos. — Descomponer un número en sus factores primos, es transformarle en un producto indicado de factores primos.

Sea, por ejemplo, el número 450. Este número es divisible por 2, y el cociente es 225; luego 450 = 225 × 2.

El número 225 es divisible por 3, y el cociente es 75; luego 225 = 75 × 3; luego 450 = 75 × 3 × 2.

El número 75 es divisible por 3, y el cociente es 25; luego $75 = 25 \times 3$; luego $450 = 25 \times 3 \times 3 \times 2$.

El número 25 es divisible por 5, y el cociente es 5; luego $25 = 5 \times 5$; luego el número $450 = 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2$.

Como el cociente 5 es primo, no puede descomponerse.

El número 450, descompuesto en sus factores primos o simples, es:

$450 = 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 = 5^2 \times 3^2 \times 2$. Luego puede darse la siguiente

113. Regla. — *Para descomponer un número en sus factores simples, se dividen dicho número y los cocientes sucesivos por su menor divisor primo diferente de la unidad, hasta llegar al cociente* 1. *Los divisores hallados son los factores simples del número, el cual es igual al producto de todos ellos.*

En la práctica, se dispone la operación como indican los siguientes

EJEMPLOS: 1.º *Descomponer el número* 840 *en sus factores simples.*

Disposición ....

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Luego $840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

2.º *Descomponer el número* 3,390 *en sus factores primos o simples.*

Disposición ....

3390	2
1695	3
565	5
113	113

Al llegar al cociente 113, observamos que no es divisible por los factores primos 2, 3, 5, 7, y al dividir 113 por 11, hallamos el cociente entero 10, menor que el divisor, de lo que inferimos que el número 113 es primo (**108**). De consiguiente, $3390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 113$.

114. Hallar todos los divisores de un número. — Para hallar todos los divisores de un número, se practica la regla siguiente:

Se descompone el número en sus factores primos; se escriben la unidad y las potencias sucesivas del primer factor simple, y estos números se multiplican por las potencias sucesivas del segundo factor primo. Se multiplican todos los números obtenidos por las potencias sucesivas del tercer factor simple; después, todos los números obtenidos por las potencias sucesivas del cuarto factor simple, y se continúa del mismo modo hasta emplear las potencias sucesivas del último factor simple. Los números así hallados serán todos los divisores del número propuesto.

Véanse algunos EJEMPLOS: 1.º *Hallar todos los divisores del número* 4,830.

4830	2
2415	3
805	5
161	7
23	23

1	2
3	6
5	10
15	30
7	14
21	42
35	70
105	210
23	46
69	138
115	230
345	690
161	322
483	966
805	1610
2415	4830

2.° *Determinar todos los factores del número* 540.

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

1	2	4
3	6	12
9	18	36
27	54	108
5	10	20
15	30	60
45	90	180
135	270	540

El número de divisores de un número es igual al producto de todos los exponentes de sus factores primos mayores que 1, aumentado cada exponente en una unidad. En el ejemplo anterior, el número de divisores será, pues: $3 \times 4 \times 2 = 24$.

115. Otra propiedad de los números primos. — *Un número no puede descomponerse en dos productos distintos de factores simples.*

116. Hallar el m. c. d. de dos o más números. — *Para hallar el m. c. d. de dos o más números, se descomponen en sus factores simples y se multiplican entre sí los comunes a todos ellos, entrando cada factor en el producto con una potencia igual a la en que esté en el número que menos veces le contenga.*

EJEMPLOS: Tomemos, primero, los mismos números de que nos hemos servido procediendo por las reglas anteriores.

1.° *Hallar el m. c. d.* de 426, *y* 96. (*Ejemplo del número* **99**)

426	2
213	3
71	71
1	

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Los factores comunes a los dos números dados vemos que son 2 y 3, cuyas menores potencias, la primera de cada uno, son los mismos números; luego el m. c. d. será: $2 \times 3 = 6$.

2.° *Hallar el m. c. d. de* 120, 615 *y* 36. (*Ejemplo del número* **101**.)

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

615	3
205	5
41	41
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

El único factor común a los tres números es 3, cuya menor potencia es la primera de dicho número; luego 3 es el m. c. d. de los tres números propuestos.

3.° *Hallar el m. c. d. de los números* 225, 1215 *y* 5850.

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

1215	3
405	3
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

5850	2
2925	3
975	3
325	5
65	5
13	13
1	

Los factores comunes a los tres números dados son el 3 y el 5. El primero entra con la potencia 2 en el número que menos veces le contiene, y el segundo, con la potencia primera; luego el m. c. d. será $3^2 \times 5 = 45$.

Mínimo común múltiplo

117. Definición. — Se llama mínimo común múltiplo, o múltiplo más simple, de dos o más números, *el menor número divisible por todos ellos.*

Así, el *m. c. m.* (*) de 20 y 50 es 100; el de 12, 9 y 8 es 72, etc.

---

*) Expresión abreviada de *mínimo común múltiplo.*

118. *Todo múltiplo de dos números es un producto formado por los tres factores siguientes:*

1.º *Uno cualquiera de los dos números. —* 2.º *El cociente del otro dividido por el m. c. d. de los dos números propuestos. —* 3.º *Un número entero cualquiera.*

Sea M un múltiplo de dos números, a los que llamaremos P y R; supongamos que el *m. c. d.* de estos dos números es D, y llamemos a y b, respectivamente, a los cocientes de P y R divididos por D.

Tenemos, pues, para fijar bien las ideas:

$$P : D = a; \text{ luego } P = Da.$$
$$R : D = b; \text{ luego } R = Db.$$

Siendo M múltiplo de P, también lo será de su igual Da.
Siendo M » » R, » » » » » » Db.

Siendo M múltiplo de Da y Db, contendrá a estos dos números un número exacto de veces; a Da, por ejemplo, x veces, y a Db, z veces.

Luego $M = Dax$, y $M = Dbz$.

Luego $Dax = Dbz$. Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por D, tendremos: $ax = bz$.

Esta última igualdad nos dice que b es divisor de ax, pues le contiene z veces.

Pero b y a son primos entre sí (**102**.—1.ª); luego b es divisor de x (**110**), y, por lo mismo, x es múltiplo de b. Si llamamos p al número de veces que le contiene, tendremos: $x = bp$.

En la igualdad anterior $M = Dax$, substituyendo el valor de x por su equivalente, tendremos $M = Dabp$. Pero $Da = P$ y $Db = R$; luego, substituyendo los factores Da y Db, por sus equivalentes respectivos, se ve que

$$M = Pbp = Rap$$

que es lo que se quería demostrar.

Escolio.—Vemos que todo múltiplo M de los dos números P y R es Rap. Pero $p = 1, 2, 3, 4, 5$, etc. Luego serán múltiplos de los dos números: $Ra \times 1 = Ra$; $Ra \times 2$; $Ra \times 3$, etc.; el menor de todos los cuales es Ra. —Fijándonos en la manera de obtener Ra, para hallar el *m. c. m.* de los dos números, podemos dar la siguiente

119. Regla. — *Para hallar el múltiplo más simple de dos números, se halla su m. c. d., se divide uno de ellos por este m. c. d. y se multiplica el cociente por el otro número.*

Si los dos números son primos entre sí, su m. c. d. es 1, y, por tanto, su menor múltiplo es el producto de multiplicarlos entre sí.

Ejemplo: *Hallar el menor múltiplo de 45 y 30.*

Hallemos su máximo común divisor.

	45	30	15
C.		1	2
R.	15	0	

El m. c. d. de dichos números es 15; su múltiplo más simple será:

$$\frac{45}{15} \times 30 = \frac{45 \times 30}{15} = \frac{1350}{15} = \frac{270}{3} = 90.$$

120. M. c. m. de varios números. — Para hallar el *m. c. m.* de varios números, debemos antes demostrar el teorema siguiente:

Todo múltiplo de dos números es múltiplo del menor múltiplo de dichos números.

En efecto; sabemos que todo múltiplo de dos números, P y R, está comprendido en Rap, y que el menor de todos estos múltiplos es Ra (**118**.—*Escolio*); luego Rap es múltiplo, evidentemente, de Ra, *m. c. m.* de dichos números, que es lo que se quería demostrar.

Pasemos a hallar, analíticamente, el *m. c. m.* de varios números.

Sean A, B, C y D cuatro números cuyo *m. c. m.* nos proponemos determinar. Supongámosle hallado, y llamémosle M.

Siendo M múltiplo de A y B, también es múltiplo del menor múltiplo de estos dos números, al cual llamaremos p.

Siendo M múltiplo de p y C, también es múltiplo del menor múltiplo de estos dos números, al cual llamaremos p'.

Siendo M múltiplo de p' y D, también es múltiplo del menor múltiplo de estos dos números, al cual llamaremos p''.

$$\text{Luego } M \nless p''.$$

Ahora bien; p'' es múltiplo de p' y D, y como p' es múltiplo de p y C, también p'' será múltiplo de p y C; luego p'' es múltiplo de p, C y D.

Siendo p'' múltiplo de p, como p es múltiplo de A y B, p'' también será múltiplo de A y B; luego p'' es múltiplo de A, B, C y D.

Pero el menor múltiplo de esos cuatro números es, por hipótesis, M.

$$\text{Luego } p'' \nless M.$$

Primero hemos visto que $M \nless p''$, y ahora vemos que $p'' \nless M$; luego

$$M = p''.$$

Luego p'' es el *m. c. m.* de A, B, C y D.

Fijándonos en la manera de hallar p'', podemos dar la siguiente

121. Regla. — *Para hallar el múltiplo más simple de tres o más números, se halla el menor múltiplo de los dos primeros; luego se halla el menor múltiplo de este menor múltiplo y del tercer número; luego, el menor múltiplo de este menor múltiplo y del cuarto número, y así sucesivamente, hasta llegar al último número.*

En la práctica, se toman por primeros números los menores.

EJEMPLO: *Hallar el múltiplo más simple de* 162, 39, 26 *y* 21.

Tomemos los números menores, 26 y 21. Como son primos entre sí, su menor múltiplo es $26 \times 21 = 546$.

Hallemos, ahora, el menor múltiplo de 546 y 39.

	546	39
C.		14
R.	0	

Su m. c. d. es 39; luego su menor múltiplo será: $\frac{546}{39} \times 39 = \frac{546 \times 39}{39} = 546$.

Hallemos, ahora, el menor múltiplo de 546 y 162.

	546	162	60	42	18	6
C.		3	2	1	2	3
R.	60	42	18	06	0	

Su m. c. d. es 6; luego el menor múltiplo será: $\frac{546}{6} \times 162 = \frac{546 \times 162}{6} = \frac{88452}{6} = 14742$, menor múltiplo de los cuatro números propuestos.

122. Determinación del m. c. m. por medio de los factores simples. —*Para hallar el menor múltiplo de dos o más números, se descomponen en sus factores simples, y se multiplican las mayores potencias de todos estos factores simples.*

Ante todo, conviene prescindir de todos aquellos números dados que sean factores de los otros; pues si se halla un número divisible por éstos, también lo será por todos sus factores.

EJEMPLO: *Hallar el múltiplo más simple de los números* 14, 36 *y* 20.

$$\begin{aligned} \text{Disposición: } 14 &= 2 \times 7 \\ 36 &= 2^2 \times 3^2 \\ 20 &= 2^2 \times 5 \end{aligned}$$

Multiplicando las mayores potencias de los factores simples, $2^2 \times 3^2 \times 7 \times 5 = 1260$, tenemos el múltiplo más simple.

NÚMEROS FRACCIONARIOS

Fracciones o quebrados comunes

123. Unidad fraccionaria. — Ya hemos definido la unidad fraccionaria (8) diciendo que es *cada una de las partes que resultan cuando la unidad entera se divide en cualquier número de partes iguales.*

Si la unidad entera se divide en dos partes iguales, las unidades fraccionarias se llaman *medios* o *mitades;* si se divide en tres partes iguales, se llaman *tercios;* si en 4, *cuartos;* si en 5, *quintos;* si en 6, *sextos;* si en 7, *séptimos;* si en 8, *octavos;* si en 9, *novenos;* si en 10, *décimos.*

Si la unidad entera se divide en más de 10 partes iguales, se designan con el nombre de su número respectivo, añadiéndole la terminación *avos.* Así, si la dividimos en 11, 12, 15, 340, etc., partes iguales, estas partes se llaman respectivamente *onceavos, doceavos, quinceavos, trescientos cuarentavos,* etc.

De esto se deduce, pues, que toda unidad tiene 2 mitades, 3 tercios, 4 cuartos, 5 quintos, 6 sextos, 11 onceavos, 15 quinceavos, etc., etc.

124. Número fraccionario. — Es el que representa una o varias partes iguales de la unidad. V. gr.: *tres quintos, cuatro novenos,* etc.

Los números fraccionarios se llaman, comúnmente, *quebrados.*

125. Origen de los números fraccionarios. — Los números fraccionarios tienen su origen aritmético en las divisiones inexactas.

Para que se nos comprenda mejor, pondremos dos ejemplos:

1.º Supongamos que, tomando el metro como unidad, hemos de determinar la altura de un bastón menor que el metro. Desde luego, la unidad *metro* no está contenida un número exacto de veces en la cantidad *altura* del bastón; pero si recordamos que el metro se divide en 10 partes iguales, tomando una de estas partes como unidad (unidad fraccionaria), podemos aplicar la nueva unidad sobre la cantidad cuantas veces posible sea; y si hallamos que está contenida 8 veces, diremos que la medida de la altura del bastón es el número fraccionario *ocho décimas* de metro.

Obsérvese que, *cuando medimos, dividimos, y cuando dividimos, medimos.* En el ejemplo anterior, no hemos hecho otra cosa que dividir, pues hemos determinado cuántas veces la unidad *décima de metro* se halla contenida en la *cantidad* altura; el número fraccionario *ocho décimas de metro* es el cociente.

2.º Supongamos que hemos de dividir 14 : 4. En esta división, inexacta desde luego, tenemos 3 de cociente entero y 2 de residuo. Quedan, evidentemente, sin dividir por el divisor las 2 unidades del residuo; pero si suponemos cada una de estas unidades dividida en 4 partes iguales, en las 2 unidades hallamos 8 *cuartos,* que divididos por 4, darán 2 cuartos de cociente; luego el cociente completo será el número entero 3, más *el fraccionario 2 cuartos.*

126. Términos del quebrado. — Todo quebrado consta de dos términos: *numerador* y *denominador.* El denominador expresa las partes iguales, o unidades fraccionarias, en que se considera dividida la unidad entera, y el numerador, el número de unidades fraccionarias de que consta el quebrado.

127. Escritura y lectura del número quebrado. — Se escribe un quebrado poniendo el numerador encima de una rayita, y el denominador, debajo. Para leerlo, se enuncia el numerador como número entero, y el denominador como número partitivo.

Así, el quebrado *tres quintos* se escribirá de este modo: $\frac{3}{5}$.

El quebrado $\frac{4}{12}$ se leerá: *cuatro doceavos.*

128. Clases de quebrados. — Los quebrados se dividen en *propios* e *impropios*. Son propios los que valen menos de una unidad, esto es, los que tienen el numerador menor que el denominador, e impropios, los que valen una unidad o más de una unidad, o bien, los que tienen el denominador igual o menor que el numerador.

Quebrados propios: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{15}{124}$, etc.

Quebrados impropios: $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{2}$, etc.

La reunión de un entero y un quebrado se llama *número mixto*.

V. g.: $4 + \frac{3}{5}$.

129. Quebrados homogéneos. — Son los que tienen iguales denominadores, y se llaman así porque se refieren a una misma unidad fraccionaria.

V. g.: $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$, etc.

130. *El producto que se obtiene multiplicando un quebrado por su denominador, es igual a su numerador.*

Sea el quebrado $\frac{4}{8}$; digo que $\frac{4}{8} \times 8 = 4$. En efecto; $\frac{4}{8} \times 8 = 4$ octavos $\times 8$ $= 32$ octavos $= 8$ octavos $\times 4 = \frac{8}{8} \times 4 = 1 \times 4 = 4$.

COROLARIO 1.º — *El complemento del cociente entero de toda división inexacta, es un quebrado que tiene por numerador el residuo y por denominador, el divisor.*

Sea la división $17 : 5$, cuyo cociente entero es 3, y 2, el residuo; digo que

$$17 : 5 = 3 + \frac{2}{5}.$$

En efecto, $\left(3 + \frac{2}{5}\right) \times 5 = 15 + 2 = 17$; luego $3 + \frac{2}{5}$ es el cociente completo de $17 : 5$.

COROLARIO 2.º — *Todo entero dividido por otro da de cociente un quebrado, cuyo numerador es el dividendo y el denominador, el divisor.*

En efecto, digo que $7 : 8 = \frac{7}{8}$. Esto es evidente, pues $\frac{7}{8} \times 8 = 7$; luego $\frac{7}{8}$ es el cociente de $7 : 8$.

131. *Para escribir un entero en forma de quebrado, se pone el entero por numerador y la unidad por denominador.*

Digo que $8 = \frac{8}{1}$. Es evidente, pues $\frac{8}{1} = 8 : 1 = 8$.

132. *Para extraer la parte entera de un quebrado impropio, basta dividir el numerador por el denominador.*

Así, $\frac{25}{5} = 5$; $\frac{25}{7} = 25 : 7 = 3 + \frac{4}{7}$ (**130.** — *Corolario 1.º*)

133. *Para reducir un número entero a quebrado impropio, de denominador determinado, se multiplica el entero por dicho denominador, y al producto se le pone por denominador el determinado.*

Así, 8 reducido a quintos, será $\frac{8 \times 5}{5}$, pues esto es, evidentemente, igual a 8.

134. Reducción de un mixto a quebrado.—*Se multiplica el entero por el denominador, al producto se añade el numerador, y se pone por denominador de la suma el denominador del quebrado.*

Sea el número mixto $6 + \frac{3}{9}$. Digo que $6 + \frac{3}{9} = \frac{6 \times 9 + 3}{9}$.

En efecto: el número 6, reducido a novenos, es $\frac{6 \times 9}{9}$ (133).

Si al resultado obtenido añadimos $\frac{3}{9}$, tendremos:

$6 + \frac{3}{9} = \frac{6 \times 9}{9} + \frac{3}{9}$; pero 6×9 novenos más 3 novenos $= (6 \times 9 + 3)$ novenos $= \frac{6 \times 9 + 3}{9}$.

Propiedades de los quebrados

135. *De dos o más quebrados que tienen el mismo denominador, es mayor el que tiene mayor numerador.*

Sean los quebrados $\frac{7}{8}$ y $\frac{2}{8}$; digo que $\frac{7}{8} > \frac{2}{8}$. En efecto; la magnitud de las partes de uno y otro quebrado es la misma, pues ambos se refieren a una misma unidad fraccionaria; pero en el primer quebrado hay 7 unidades fraccionarias, y en el segundo sólo hay 2; luego el primer quebrado es mayor que el segundo; es decir: $\frac{7}{8} > \frac{2}{8}$ (126).

136. *De dos o más quebrados que tienen el mismo numerador, el mayor es el que tiene menor denominador.*

Sean los quebrados $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{9}$; digo que $\frac{3}{5} > \frac{3}{9}$. En efecto; ambos quebrados tienen igual número de unidades fraccionarias, pues tienen igual numerador; pero la unidad fraccionaria del primer quebrado tiene mayor magnitud que la del segundo; pues si dos unidades enteras iguales se dividen, la primera en 5 partes iguales y la segunda en 9, claro está que los *quintos* tendrán mayor tamaño que los *novenos;* luego si ambos quebrados tienen igual número de partes, y las partes del primero son mayores que las del segundo, claro está que el primer quebrado es mayor que el segundo; luego $\frac{3}{5} > \frac{3}{9}$.

137. *Si a los dos términos de un quebrado propio se añade un mismo número entero, el quebrado que resulta es mayor que el propuesto.*

Sea el quebrado propio $\frac{4}{7}$; añadamos a sus dos términos 2 unidades, y tenemos el quebrado $\frac{6}{9}$; digo que $\frac{6}{9} > \frac{4}{7}$.

En efecto; al quebrado $\frac{4}{7}$ le faltan $\frac{3}{7}$ para componer la unidad; y al quebrado $\frac{6}{9}$ le faltan $\frac{3}{9}$ para componer la unidad; y como $\frac{3}{7}$ es mayor que $\frac{3}{9}$ (136), claro está que al quebrado $\frac{4}{7}$ le falta más para valer una unidad que al quebrado $\frac{6}{9}$; luego el quebrado $\frac{6}{9}$ es mayor que $\frac{4}{7}$, que es lo que queríamos demostrar.

138. *Si a los dos términos de un quebrado impropio se añade un mismo número entero, el quebrado que resulta es menor que el propuesto.*

Sea el quebrado impropio $\frac{8}{5}$; añadamos a sus dos términos 2 unidades, y tenemos el quebrado $\frac{10}{7}$; digo que $\frac{10}{7} < \frac{8}{5}$.

En efecto; al quebrado $\frac{10}{7}$ le sobran $\frac{3}{7}$ para valer la unidad, y al quebrado $\frac{8}{5}$ le sobran $\frac{3}{5}$ para valer la unidad; y como que el quebrado $\frac{3}{7}$ es menor que $\frac{3}{5}$ (**136**), claro está que el quebrado $\frac{10}{7}$ excede a la unidad en menos que el quebrado $\frac{8}{5}$; luego el quebrado $\frac{10}{7}$ es menor que $\frac{8}{5}$.

Del mismo modo demostraríamos que, *si los dos términos de un quebrado se disminuyen en un mismo número, el quebrado resultante es menor o mayor que el propuesto, según que éste sea propio o impropio.*

139. *Si el numerador de un quebrado se multiplica por un número entero, el quebrado queda multiplicado por este número.*

Sea el quebrado $\frac{2}{9}$; multipliquemos el numerador por 3; decimos que el quebrado resultante $\frac{6}{9}$ es tres veces mayor que el primero, o bien, $\frac{6}{9} = \frac{2}{9} \times 3$.

En efecto; los quebrados $\frac{6}{9}$ y $\frac{2}{9}$ se refieren a una misma unidad fraccionaria; luego la magnitud de las partes de uno y otro es la misma; pero el primero tiene 3 veces más partes que el segundo; luego el primer quebrado es 3 veces mayor que el segundo, o bien, $\frac{6}{9} = \frac{2}{9} \times 3$.

Corolario. — *Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por este entero, quedando por denominador el mismo.*

Así: $\frac{8}{12} \times 6 = \frac{8 \times 6}{12} = \frac{48}{12}$.

140. *Si el numerador de un quebrado se parte por uno de sus divisores, el quebrado queda dividido por este divisor.*

Sea el quebrado $\frac{8}{9}$; dividamos su numerador por uno de sus divisores, el 2, por ejemplo; digo que el quebrado resultante $\frac{4}{9}$ es dos veces menor que $\frac{8}{9}$, o bien $\frac{4}{9} = \frac{8}{9} : 2$.

En efecto; los quebrados $\frac{4}{9}$ y $\frac{8}{9}$ se refieren a una misma unidad fraccionaria; luego la magnitud de las partes de uno y otro es la misma; pero el primer quebrado tiene 2 veces menos partes que el segundo; luego el primero es 2 veces menor que el segundo; o bien, $\frac{4}{9} = \frac{8}{9} : 2$.

COROLARIO. — *Para dividir un quebrado por un factor de su numerador, se divide el numerador por este factor, quedando por denominador el mismo.*

Así: $\frac{12}{25} : 4 = \frac{3}{25}$.

141. *Si el denominador de un quebrado se multiplica por un número entero, el quebrado queda dividido por este entero.*

Sea el quebrado $\frac{4}{7}$; multipliquemos su denominador por 5; decimos que el quebrado resultante $\frac{4}{35}$ es cinco veces menor que el primero, o bien, $\frac{4}{35} = \frac{4}{7} : 5$.

En efecto; los dos quebrados $\frac{4}{7}$ y $\frac{4}{35}$ tienen igual número de unidades fraccionarias, pues tienen igual numerador; pero como toda unidad entera tiene $\frac{7}{7}$ y $\frac{35}{35}$, evidentemente $\frac{1}{7} = \frac{5}{35}$; luego cada parte del quebrado $\frac{4}{35}$ es 5 veces menor que cada parte del quebrado $\frac{4}{7}$; luego el quebrado $\frac{4}{35}$ es cinco veces menor que $\frac{4}{7}$, o bien, $\frac{4}{35} = \frac{4}{7} : 5$.

COROLARIO. — *Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador por este entero, quedando por numerador el mismo.*

V. g.: $\frac{7}{8} : 2 = \frac{7}{16}$.

142. *Si el denominador de un quebrado se divide por uno de sus divisores, el quebrado queda multiplicado por este divisor.*

Sea el quebrado $\frac{5}{16}$; dividamos el denominador por uno de sus divisores, el 2, por ejemplo; digo que el quebrado resultante $\frac{5}{8}$ es dos veces mayor que el primero, o bien, $\frac{5}{8} = \frac{5}{16} \times 2$.

En efecto; los dos quebrados $\frac{5}{16}$ y $\frac{5}{8}$ tienen igual número de unidades fraccionarias, pues tienen igual numerador; pero cada parte del segundo es 2 veces mayor que cada parte del primero; luego el segundo quebrado es 2 veces mayor que el primero; o bien, $\frac{5}{8} = \frac{5}{16} \times 2$.

COROLARIO. — *Para multiplicar un quebrado por un divisor de su denominador, se divide el denominador por este divisor, quedando por numerador el mismo.*

V. g.: $\frac{3}{12} \times 4 = \frac{3}{3}$.

143. *Si los dos términos de un quebrado se multiplican o dividen por un mismo número, el quebrado no altera.*

1.º Sea el quebrado $\frac{8}{12}$; multipliquemos numerador y denominador por 3; decimos que el quebrado resultante $\frac{8 \times 3}{12 \times 3} = \frac{8}{12}$.

En efecto, el quebrado $\frac{8 \times 3}{12}$ es 3 veces mayor que $\frac{8}{12}$ (**139**) y 3 veces mayor que el quebrado $\frac{8 \times 3}{12 \times 3}$ (**141**); luego $\frac{8}{12} = \frac{8 \times 3}{12 \times 3}$.

2.º Sea el quebrado $\frac{6}{9}$; dividamos sus dos términos por 3; digo que el quebrado resultante $\frac{6:3}{9:3} = \frac{6}{9}$.

En efecto; el quebrado $\frac{6:3}{9}$ es 3 veces menor que $\frac{6}{9}$ (**140**) y 3 veces menor que $\frac{6:3}{9:3}$ (**142**); luego $\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3}$.

Reducción de quebrados a un común denominador

144. Definición. — *Reducir quebrados a un común denominador, es transformarlos en otros equivalentes cuyos denominadores sean iguales. Para ello, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.*

Los nuevos quebrados son equivalentes a los propuestos, pues resultan de multiplicar los dos términos de cada uno por un mismo número entero. (**143.** — **1.º**)

EJEMPLO: *Reducir a un común denominador los quebrados siguientes:* $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{9}$. Indicando las multiplicaciones, tenemos:

$$\frac{3 \times 2 \times 5 \times 9}{4 \times 2 \times 5 \times 9}, \frac{1 \times 4 \times 5 \times 9}{2 \times 4 \times 5 \times 9}, \frac{2 \times 4 \times 2 \times 9}{5 \times 4 \times 2 \times 9}, \frac{7 \times 4 \times 2 \times 5}{9 \times 4 \times 2 \times 5};$$

y verificándolas, resulta: $\frac{270}{360}, \frac{180}{360}, \frac{144}{360}, \frac{280}{360}$; que son los quebrados que se buscan.

ESCOLIO.—De consiguiente, *cuando tengamos dos o más quebrados cuyos denominadores sean distintos y queramos saber cuál es el mayor, los reduciremos a un común denominador, y el que tenga mayor numerador será el mayor quebrado.*

145. Reducción de quebrados a un común denominador por el método del m. c. m. — Cuando dos o más denominadores tienen factores comunes, o bien, si los denominadores no son primos entre sí dos a dos, es preferible reducir los quebrados a un común denominador empleando el *m. c. m. Para ello, se halla el m. c. m. de los denominadores, y se multiplican los dos términos de cada quebrado por el factor o factores que faltan a su denominador para componer dicho múltiplo más simple; o lo que es igual, por el cociente de dividir el m. c. m. por el denominador.*

Como el *m. c. m.* es el denominador común, basta sólo multiplicar el numerador de cada quebrado por el factor o factores mencionados.

Propongámonos reducir a un común denominador los quebrados $\frac{5}{6}, \frac{1}{4}$ y $\frac{2}{15}$.

Descomponiendo cada denominador en sus factores simples, tenemos: $6 = 2 \times 3$; $4 = 2 \times 2$; $15 = 3 \times 5$; luego el *m. c. m.* de los denominadores es $3 \times 2^2 \times 5 = 60$ (**122**). Multiplicando el numerador de cada quebrado por el factor o factores que faltan a su denominador para componer el *m. c. m.*, 60, o por el cociente de 60 por el denominador, tendremos:

$$\frac{5 \times 10}{60}, \frac{1 \times 15}{60}, \frac{2 \times 4}{60} = \frac{50}{60}, \frac{15}{60}, \frac{8}{60}.$$

Simplificación de quebrados

146. Definición. — *Simplificar un quebrado es transformarle en otro equivalente cuyos términos sean menores.*

Si el quebrado no se puede simplificar, se llama *irreducible.*

Todo quebrado cuyos dos términos son primos entre sí es irreducible.

147. *Para simplificar un quebrado cuyos dos términos no son primos entre sí, se dividen numerador y denominador por alguno de los factores que les sean comunes; luego se hace lo propio con los dos términos del nuevo quebrado obtenido, y así sucesivamente, hasta haberle reducido a su más sencilla expresión, esto es, a quebrado irreducible.*

También puede reducirse a su más sencilla expresión, dividiendo numerador y denominador por el m. c. d. de estos dos términos.

Propongámonos simplificar el quebrado $\frac{20}{50}$.

Dividiendo ambos términos por el factor común 2, tenemos $\frac{20}{50} = \frac{10}{25}$ (**143.** — **2.º**).

Dividiendo ambos términos del quebrado $\frac{10}{25}$ por el factor común 5, tenemos $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, quebrado irreducible; luego $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

También hubiéramos obtenido el quebrado irreducible dividiendo numerador y denominador por su *m. c. d.* El *m. c. d.* de 20 y 50 es 10 (**99**); luego

$$\frac{20}{50} = \frac{2(0}{5(0} = \frac{2}{5}.$$

148. *Un quebrado irreducible no puede ser igual a un número entero.*

Si el quebrado irreducible $\frac{4}{7}$, por ejemplo, fuese igual a un número entero, 7 sería divisor de 4; y como 7 también es divisor de sí mismo, tendríamos que numerador y denominador del quebrado $\frac{4}{7}$ serían divisibles por 7; luego el quebrado $\frac{4}{7}$ no sería irreducible, lo que es contrario a la hipótesis.

Adición de quebrados

149. Definición. — Sumar dos o más quebrados es formar con ellos otro quebrado llamado *suma*, que contenga tantas unidades fraccionarias como existan en los quebrados propuestos.

150. Casos que ofrece. — Al verificar la suma de fracciones comunes, pueden ocurrir, principalmente, tres casos:

1.º *Que los sumandos tengan iguales denominadores.*
2.º *Que los sumandos tengan desiguales denominadores.*
3.º *Sumar números mixtos.*

151. Resolución. — 1.º *Si los sumandos son homogéneos, es decir, si tienen iguales denominadores, se suman los numeradores, y a la suma se le pone por denominador el denominador común.*

Ejemplo: $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3+1+2}{4} = \frac{6}{4}$. También la operación puede disponerse así:

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{4} \dotfill & 3 \\ + \frac{1}{4} \dotfill & 1 \\ + \frac{2}{4} \dotfill & \underline{2} \\ & \frac{6}{4} \end{array}$$

La suma así obtenida es la verdadera; pues como la unidad fraccionaria es la misma en todos los quebrados, y el numerador de cada uno expresa las unidades fraccionarias que contiene, claro está que la suma de todos los numeradores será la reunión de las unidades fraccionarias de los sumandos.

2.º *Si los sumandos tienen desiguales los denominadores, se reducen a un común denominador, y la suma se verifica como en el caso anterior.*

Ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{35}{70} + \frac{42}{70} + \frac{40}{70} = \frac{35+42+40}{70} = \frac{117}{70}$; o bien:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} \dotfill & 35 \\ + \frac{3}{5} \dotfill & 42 \\ + \frac{4}{7} \dotfill & \underline{40} \\ & \frac{117}{70} \end{array}$$

3.º *Para sumar números mixtos, se transforman en quebrados, y la operación queda reducida a una suma de quebrados. También puede resolverse sumando, separadamente, los enteros y los quebrados, y la suma de estas dos sumas parciales dará la total.*

Ejemplo: $2\frac{3}{5} + 4\frac{1}{2} = \frac{13}{5} + \frac{9}{2} = \frac{26}{10} + \frac{45}{10} = \frac{71}{10}$, suma total. O bien: $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10} + \frac{5}{10} = \frac{11}{10}$; luego añadiendo a la suma de los quebrados la de los enteros, será: $6 + \frac{11}{10} = \frac{71}{10}$, suma total.

Substracción de quebrados

152. Definición. — Restar un quebrado de otro, es quitar del segundo las unidades fraccionarias de que consta el primero.

153. Casos que ofrece. — Al verificar la resta de fracciones comunes, pueden ocurrir, principalmente, tres casos:

1.º *Que minuendo y substraendo tengan iguales los denominadores.*
2.º *Que minuendo y substraendo tengan desiguales los denominadores.*
3.º *Restar números mixtos.*

154. Resolución. — 1.º *Si minuendo y substraendo son quebrados homogéneos, se restan sus numeradores, y a la resta se le pone por denominador el denominador común.*

EJEMPLO: $\frac{6}{9} - \frac{3}{9} = \frac{6-3}{9} = \frac{3}{9}$. Puede adoptarse esta disposición:

$$\begin{array}{lr} \frac{6}{9}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 6 \\ -\frac{3}{9}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \\ \hline & \frac{3}{9} \end{array}$$

La resta así obtenida es la verdadera; pues como la unidad fraccionaria es la misma en ambos quebrados, claro está que, al restar los numeradores, queda verificada la substracción.

2.º *Si minuendo y substraendo tienen desiguales los denominadores, se reducen a un común denominador, y la resta se verifica como en el caso anterior.*

EJEMPLO: $\frac{4}{7} - \frac{2}{9} = \frac{36}{63} - \frac{14}{63} = \frac{36-14}{63} = \frac{22}{63}$; o bien:

$$\begin{array}{lr} \frac{4}{7}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 36 \\ -\frac{2}{9}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 14 \\ \hline & \frac{22}{63} \end{array}$$

3.º *Para restar números mixtos, se reducen éstos a quebrados, y se restan los dos quebrados equivalentes.*

EJEMPLO: $2\frac{3}{4} - 1\frac{5}{8} = \frac{11}{4} - \frac{13}{8} = \frac{88}{32} - \frac{52}{32} = \frac{88-52}{32} = \frac{36}{32}$.

Casos particulares: 1.º *Restar un entero de un quebrado impropio.*—Para ello, se da al entero la unidad por denominador, y el caso queda convertido en una resta de quebrados.

EJEMPLO: $\frac{24}{3} - 6 = \frac{24}{3} - \frac{6}{1} = \frac{24}{3} - \frac{18}{3} = \frac{24-18}{3} = \frac{6}{3}$.

2.º *Restar un entero de un mixto.* — Para ello, se resta el entero del substraendo del entero del minuendo, y a la resta se le añade el quebrado.

EJEMPLO: $8 + \frac{3}{5} - 6 = 2 + \frac{3}{5}$.

3.º *Restar un quebrado de un entero.*—Para ello, se pone el entero en forma de quebrado, y queda reducido a una resta de quebrados.

EJEMPLO: $8 - \frac{3}{5} = \frac{8}{1} - \frac{3}{5} = \frac{40}{5} - \frac{3}{5} = \frac{40-3}{5} = \frac{37}{5}$.

4.º *Restar un quebrado de un mixto.*—Para ello, se restan ambos quebrados, y a la resta se añade el entero del minuendo.

EJEMPLO: $12 + \frac{5}{6} - \frac{3}{7}$. Restaremos primero los quebrados: $\frac{5}{6} - \frac{3}{7} = \frac{35}{42} - \frac{18}{42} = \frac{35-18}{42} = \frac{17}{42}$. La resta será $12 + \frac{17}{42}$.

5.º *Restar un quebrado de un mixto, de modo que el quebrado substraendo sea mayor que el quebrado del minuendo.*—Para ello, se reducen los quebrados a un común denominador, y se añade al quebrado del minuendo una unidad descompuesta en las partes que indica el denominador común; se añade una unidad entera al substraendo, se restan por separado y se suman las dos restas.

EJEMPLO: $9+\frac{2}{8}-\frac{3}{4}$. Reduzcamos los quebrados a un común denominador, y tendremos: $\frac{2}{8}-\frac{3}{4}=\frac{8}{32}-\frac{24}{32}$. Añadamos una unidad entera al quebrado del minuendo descompuesta en 32 avos, y el minuendo será: $\frac{8}{32}+\frac{32}{32}=\frac{40}{32}$, y ahora los dos quebrados serán: $\frac{40}{32}-\frac{24}{32}$. Añadiendo una unidad entera al substraendo para que el resto no altere,

la resta de enteros será: $9-1=8$; y

la resta de quebrados será: $\frac{40}{32}-\frac{24}{32}=\frac{16}{32}$; y

la resta total será: $8+\frac{16}{32}$.

6.º *Restar un mixto de un entero.*—Para ello, se resta el entero del substraendo del entero del minuendo, y de la diferencia se resta el quebrado.

EJEMPLO: $8-\left(6+\frac{3}{5}\right)$. La resta de enteros será: $8-6=2$. Quitando de esta diferencia el quebrado, tendremos: $2-\frac{3}{5}=\frac{2}{1}-\frac{3}{5}=\frac{10}{5}-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$.

7.º *Restar un mixto de un quebrado impropio.*—Para ello, se quita del minuendo el entero del substraendo, y de la diferencia se resta el quebrado.

EJEMPLO: $\frac{15}{4}-\left(3+\frac{2}{5}\right)$. Quitando del minuendo el entero, será: $\frac{15}{4}-3=\frac{15}{4}-\frac{3}{1}=\frac{15}{4}-\frac{12}{4}=\frac{15-12}{4}=\frac{3}{4}$. Quitando de esta diferencia el quebrado $\frac{2}{5}$, será: $\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}$.

Multiplicación de quebrados

155. Definición. — Multiplicar un número cualquiera por una fracción, es, según la definición general de la multiplicación, hallar un tercer número que guarde, respecto del multiplicando, la misma relación que el multiplicador guarda respecto de la unidad.

En la multiplicación de 4 por $\frac{2}{5}$, por ejemplo, como el multiplicador guarda con la unidad la relación de ser *sus dos quintas partes*, claro está que el producto, debiendo guardar igual relación con el multiplicando, será *las dos quintas partes del multiplicando.*

Por esta razón, cuando el multiplicador es una fracción, puede definirse la multiplicación diciendo:

Multiplicar un número cualquiera por un quebrado, es hallar las partes del multiplicando indicadas por el multiplicador.

De modo, pues, que, cuando el multiplicador es una fracción, el producto siempre es menor que el multiplicando.

156. Casos que ofrece. — En la multiplicación de quebrados, pueden ocurrir, principalmente, cuatro casos:

1.º *Multiplicar un quebrado por un entero.*
2.º *Multiplicar un quebrado por otro.*
3.º *Multiplicar un entero por un quebrado.*
4.º *Multiplicar números mixtos.*

157. Resolución. — 1.º *Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por este entero, y al producto se le pone por denominador el denominador del quebrado* (**139**).

Si el entero es factor del denominador, también puede verificarse la multiplicación dividiendo el denominador por el entero, quedando por numerador el del quebrado (**142**).

2.º *Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican entre sí los numeradores, y al producto se le pone por denominador el producto de los denominadores.*

Sea la multiplicación de $\frac{4}{7}$ por $\frac{3}{5}$; digo que $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{7 \times 5}$.

En efecto: el producto debe guardar con el multiplicando la misma relación que el multiplicador guarda con la unidad. El multiplicador es $\frac{1}{5}$ de la unidad repetido 3 veces; luego el producto será $\frac{1}{5}$ del multiplicando hecho 3 veces mayor.

$\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{7}$ es $\frac{4}{7 \times 5}$ (**141**); luego $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{7}$ será $\frac{4}{7 \times 5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{7 \times 5}$ (**139**), que es lo que nos proponíamos demostrar.

El producto de multiplicar dos quebrados entre sí, se llama *quebrado de quebrado*, o *fracción de fracción*.

3.º *Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador, y al producto se le pone por denominador el denominador del quebrado.*

Sea la multiplicación de 8 por $\frac{3}{9}$; digo que $8 \times \frac{3}{9} = \frac{8 \times 3}{9}$.

En efecto; $8 \times \frac{3}{9} = \frac{8}{1} \times \frac{3}{9} \times \frac{8 \times 3}{9}$.

4.º *Para multiplicar dos números mixtos, un mixto por un entero, o un mixto por un quebrado, se reducen los mixtos a quebrados, y estos casos quedan reducidos a los anteriores.*

1.º $4\frac{3}{8} \times 5\frac{2}{9} = \frac{35}{8} \times \frac{47}{9} = \frac{35 \times 47}{8 \times 9}$

2.º $6\frac{1}{5} \times 3 = \frac{31}{5} \times 3 = \frac{31 \times 3}{5}$.

3.º $2\frac{4}{5} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{5} \times \frac{7}{11} = \frac{14 \times 7}{5 \times 11}$.

Como que todo número mixto es una suma indicada, también se pueden resolver los casos anteriores multiplicando cada una de las partes del multiplicando por cada una de las del multiplicador, y sumando los productos parciales obtenidos (**59-58**).

158. *El producto de dos o más quebrados no altera, aunque se invierta el orden de los factores.*

Digo que: $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times \frac{4}{5}$.

En efecto: $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 3}{5 \times 8} = \frac{12}{40}$; y $\frac{3}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{8 \times 5} = \frac{12}{40}$;

luego $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times \frac{4}{5}$, que es lo que se quería demostrar.

Lo mismo se demostraría si los quebrados fuesen más de dos.

159. *Para multiplicar varios quebrados entre sí, se multiplican entre sí los numeradores y los denominadores, y se divide el primer producto por el segundo.*

Sean los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{9}$ y $\frac{4}{7}$; digo que $\frac{3}{5} \times \frac{2}{9} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 2 \times 4}{5 \times 9 \times 7}$.

En efecto: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{9} = \frac{3 \times 2}{5 \times 9}$; y este producto, multiplicado por $\frac{4}{7}$,

$$\text{es } \frac{3 \times 2}{5 \times 9} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 2 \times 4}{5 \times 9 \times 7}.$$

Si, al multiplicar entre sí dos o más quebrados, existe algún factor común a un numerador y a un denominador, se suprime dicho factor por no influir en el producto.

En efecto: $\frac{5}{6} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{16} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{2 \times 12}$.

160. *Para elevar un quebrado a una potencia, se elevan a esta potencia sus dos términos.*

Sea el quebrado $\frac{5}{9}$, que se quiere elevar a la tercera potencia: decimos que

$$\left(\frac{5}{9}\right)^3 = \frac{5^3}{9^3} = \frac{125}{729}.$$

En efecto: $\left(\frac{5}{9}\right)^3 = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9}$ (91) $= \frac{5 \times 5 \times 5}{9 \times 9 \times 9} = \frac{5^3}{9^3} = \frac{125}{729}$.

Para elevar a una potencia un número mixto, se reduce el mixto a quebrado, y se eleva el quebrado a la potencia.

Así: $\left(4\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9^2}{2^2} = \frac{81}{4}$

161. *Si un quebrado irreducible se eleva a una potencia, resulta otro quebrado irreducible.*

Sea el quebrado irreducible $\frac{5}{7}$, cuyos dos términos son, naturalmente, primos entre sí; digo que la tercera potencia, por ejemplo, de este quebrado

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{125}{343}, \text{ es un quebrado irreducible.}$$

En efecto; por tener el quebrado $\frac{5}{7}$ sus dos términos primos entre sí, las potencias de un mismo grado de estos términos son también números primos entre sí (**111.**-3.ª *Propiedad*); luego el quebrado resultante $\frac{125}{343}$ es irreducible.

162. *Las potencias de un número menor que 1 van disminuyendo a medida que crece su grado, y las potencias de un número mayor que 1 van aumentando a medida que crece su grado.*

Sea $\frac{3}{5}$ el número menor que 1; digo que $\left(\frac{3}{5}\right)^2 < \frac{3}{5}$.

En efecto; $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} < \frac{3}{5}$ (**155**); luego $\left(\frac{3}{5}\right)^2 < \frac{3}{5}$.

Sea $\frac{5}{3}$ el número mayor que 1; digo que $\left(\frac{5}{3}\right)^2 > \frac{5}{3}$.

En efecto; $\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} > \frac{5}{3}$ (**57**. — 2.ª *propiedad*); luego $\left(\frac{5}{3}\right)^2 > \frac{5}{3}$.

División de quebrados

163. Definición.—Dividir un número cualquiera por un quebrado, es hallar un número tal, que, multiplicado por el quebrado divisor, produzca el dividendo.

164. Casos que ofrece.—En la división de quebrados, pueden ocurrir, principalmente, cuatro casos:

1.º *Dividir un quebrado por un entero.*
2.º *Dividir un quebrado por otro.*
3.º *Dividir un entero por un quebrado.*
4.º *Dividir números mixtos.*

165. Resolución. — 1.º *Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador por este entero, quedando por numerador el del quebrado* (**141**).

Si el entero es factor del numerador, también puede verificarse la división partiendo el numerador por el entero, quedando por denominador el del quebrado (**140**).

2.º *Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo, por el numerador del divisor, siendo el primer producto el numerador del quebrado cociente, y el segundo, su denominador.*

Sea el dividendo $\frac{3}{4}$ y el divisor $\frac{5}{7}$; digo que $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5}$.

En efecto; el cociente de $\frac{3}{4} : 5$ es $\frac{3}{4 \times 5}$ (**141**); pero como el divisor no ha de ser 5, sino $\frac{5}{7}$, número 7 veces menor que 5, el cociente $\frac{3}{4 \times 5}$ es 7 veces menor que el verdadero; luego el cociente verdadero será $\frac{3}{4 \times 5} \times 7 = \frac{3 \times 7}{4 \times 5}$, que es lo que queríamos demostrar.

3.º *Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador, y se escribe por denominador de este producto el numerador del quebrado.*

Sea 8 dividido por $\frac{3}{7}$; digo que $8 : \frac{3}{7} = \frac{8 \times 7}{3}$.

En efecto; $8 : \frac{3}{7} = \frac{8}{1} : \frac{3}{7} = \frac{8 \times 7}{3}$.

4.º *Para dividir un mixto por otro, un mixto por un entero, o un mixto por un quebrado, se reducen los mixtos a quebrados, y estos casos quedan reducidos a los anteriores.*

1.º $6\frac{3}{9} : 4\frac{3}{5} = \frac{57}{9} : \frac{23}{5} = \frac{57 \times 5}{9 \times 23}$.

2.º $9\frac{5}{6} : 7 = \frac{59}{6} : \frac{7}{1} = \frac{59}{6 \times 7}$.

3.º $12\frac{1}{2} : \frac{3}{7} = \frac{25}{2} : \frac{3}{7} = \frac{25 \times 7}{2 \times 3}$.

Fracciones decimales

166. Definición. — *Quebrados decimales* son los que tienen por denominador la unidad seguida de uno o más ceros.

V. g.: $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{23}{10000}$, son quebrados decimales.

Como los números formados por la unidad seguida de uno o más ceros son potencias de 10, esto es, de la base de nuestro sistema de numeración, también podremos decir que *fracciones decimales son las que tienen por denominador las potencias de la base del sistema.*

167. Nombres particulares de las unidades decimales. — Si la unidad entera se divide en 10 partes iguales, estas partes se llaman DÉCIMAS; si se divide en 100, se llaman CENTÉSIMAS; si en 1,000, MILÉSIMAS; si en 10,000, DIEZMILÉSIMAS; si en 100,000, CIENMILÉSIMAS; si en 1.000,000, MILLONÉSIMAS, etc.

De modo, pues, que las unidades decimales toman los mismos nombres que las de los órdenes enteros, pero cambiando su terminación en *ésimas.*

168. Valores de las unidades decimales. — De lo que acabamos de exponer, se deduce: que toda unidad tiene 10 *décimas*, 100 *centésimas*, 1,000 *milésimas*, 10,000 *diezmilésimas*, 100,000 *cienmilésimas*, 1.000,000 de *millonésimas*, etc.

Y también, que una décima equivale a 10 *centésimas;* una centésima, a 10 *milésimas;* una milésima, a 10 *diezmilésimas;* una diezmilésima, a 10 *cienmilésimas;* una cienmilésima, a 10 *millonésimas*: etc., etc.

Por consiguiente, la relación que existe entre los diferentes órdenes decimales es la misma que la de los órdenes enteros, esto es: *diez unidades fraccionarias de un orden cualquiera, constituyen una unidad del orden inmediato superior.*

169. Escritura de los números decimales. — Las fracciones decimales, según la definición, pueden escribirse como las comunes; pero como las unidades decimales decrecen de diez en diez lo mismo que las enteras, evidentemente, la numeración decimal puede considerarse como el complemento de la entera, y de aquí el que los diferentes órdenes decimales se escriban a continuación de las unidades simples, separadas de éstas mediante una coma colocada en su parte superior o inferior, y guardando el siguiente orden de colocación:

Las DÉCIMAS, *a la derecha de las unidades simples e inmediatamente después; las* CENTÉSIMAS, *a la derecha e inmediatamente después de las décimas; las* MILÉSIMAS, *a la derecha e inmediatamente después de las centésimas, y así sucesivamente.*

Cuando el número carece de parte entera, se escribe un cero en el lugar correspondiente a las unidades simples, y si algún orden decimal carece de unidades, se escribe también un cero en el lugar correspondiente a estas unidades.

El número seis enteros, diez y ocho mil cuarenta y seis cienmilésimas, se escribirá, pues, así: 6‘18046.

Escolio. — *Nótese que, escrito un número decimal como acabamos de indicar, es sumamente fácil ponerlo bajo la forma de quebrado común; para lo cual basta escribir el número considerado como entero por numerador, y por denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción.*

Así, $0‘125 = \frac{125}{1000}$; $0‘85 = \frac{85}{100}$; $4‘7486 = \frac{47486}{10000}$; etc.

170. Lectura de los números decimales. — Para leer un número decimal, se enuncia su parte entera y, después, la decimal como si fuese entera, expresando el orden decimal que la última cifra representa.

Ejemplos: 0‘25; 4‘340; 9‘4769. Se leerán:
Cero enteros, veinticinco céntimos.
Cuatro enteros, trescientas cuarenta milésimas.
Nueve enteros, cuatro mil setecientas sesenta y nueve diezmilésimas.

171. *Todo número decimal tiene tantas unidades fraccionarias del orden que su última cifra representa, como unidades simples tendría dicho número prescindiendo del signo decimal.*

Sea el número 8‘642. Digo que este número tiene 8642 milésimas.

En efecto; este número se compone de 8 unidades, 6 décimas, 4 centésimas y 2 milésimas. Como toda unidad tiene 10 décimas, las 8 unidades componen 80 décimas; luego este número consta de 86 décimas, 4 centésimas y 2 milésimas. Como cada décima tiene 10 centésimas, las 86 décimas componen 860 centésimas; luego este número consta de 864 centésimas y 2 milésimas. Como toda centésima tiene 10 milésimas, las 864 centésimas componen 8640 milésimas; luego el número dado tiene 8642 milésimas.

Corolario. — De esto se deduce que todo *número decimal puede también leerse como si fuese entero, dando a la última cifra la denominación decimal correspondiente.*

Así, 0‘4756 se leerá: cuatro mil setecientas cincuenta y seis diezmilésimas; 4‘25 cuatrocientas veinticinco centésimas; etc.

172. Propiedades de las fracciones decimales. — Son las siguientes:

1.ª *El valor de un número decimal no altera añadiendo a su derecha uno o más ceros.*

Sean los números decimales 8‘45 y 0‘125. Añadamos dos ceros a la derecha de cada uno; digo que 8‘45 = 8‘4500, y que 0‘125 = 0‘12500.

En efecto; los valores absolutos y relativos de cada cifra, permanecen iguales; luego si las partes no han sufrido ninguna alteración, tampoco ha alterado el todo.

De otro modo: digo que 8‘45 = 8‘4500. En efecto;

$$8‘45 = \frac{845}{100}\,(\mathbf{169}),\ \text{y}\ 8‘4500 = \frac{84500}{10000}\,(\mathbf{169}).$$

Los dos quebrados comunes son iguales (**143**. — 1.º); luego si los segundos miembros de ambas igualdades son iguales entre sí, los primeros miembros también lo son; y por tanto, 8‘45 = 8‘4500.

2.ª *El valor de un número decimal terminado en ceros no altera, quitando de su derecha uno o más ceros.*

Sea el número decimal 4'500; digo que 4'500 = 4'5.

En efecto; permaneciendo sin alteración los valores absolutos y relativos de las partes, tampoco ha alterado el todo.

De otro modo: digo que 4'500 = 4'5. En efecto; $4'500 = \frac{4500}{1000}$, y $4'5 = \frac{45}{10}$.

Ambos quebrados comunes son iguales (**143.** — 2.º); luego los primeros miembros constituirán otra igualdad; es decir, 4'500 = 4'5.

3.ª *Para reducir dos o más números decimales a una común denominación, se igualan las cifras decimales de todos ellos escribiendo ceros a la derecha.*

Así, los decimales	0'45,	4'125,	28'18946,
respectivamente, serán iguales a	0'45000,	4'12500,	28'18946.

4.ª *Si la coma de un número decimal se traslada hacia la derecha uno, dos o más lugares, dicho número queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como lugares la coma se haya trasladado.*

Sea el número 4'1256; traslademos la coma, por ejemplo, dos lugares hacia la derecha; digo que el número resultante, 412'56, es 100 veces mayor que el propuesto.

En efecto; los valores absolutos de las cifras del número 412'56 son iguales a las del propuesto; pero el valor relativo de cada cifra se ha hecho cien veces mayor; luego el todo, que es el número, se ha hecho también 100 veces mayor.

5.ª *Si la coma de un número decimal se traslada hacia la izquierda uno, dos o más lugares, dicho número queda dividido por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se haya trasladado.*

Esta propiedad se demuestra como la anterior.

6.ª *Suprimiendo la coma de un número decimal, queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene.*

Sea el número 4'125; digo que el número 4125 es mil veces mayor que 4'125. Es evidente; pues equivale a multiplicarle por la unidad seguida de tres ceros (**172.**— 4.ª *propiedad*).

7.ª *Para dividir un número entero por la unidad seguida de uno o más ceros, se separan de la derecha del número tantas cifras para decimales como ceros lleva la unidad.*

Sea el número 467890; digo que su cociente por 100 es 4678'90. En efecto; el valor absoluto de las cifras no ha variado; pero el valor relativo se ha hecho 100 veces menor; luego el todo ha quedado también dividido por 100; luego

467890 : 100 = 4678'90.

Adición de fracciones decimales

173. Definición. — La que hemos dado de la adición de los quebrados comunes (**149**) es, perfectamente, aplicable a los decimales.

174. Resolución. — *Los números decimales se suman como los enteros, procurando que las comas, las décimas, centésimas etc., vengan en columna.*

EJEMPLO:

$$\begin{array}{rr} & 0'25 \\ + & 3'725 \\ + & 14'3 \\ + & 120'47298 \\ + & 0'076032 \\ \hline \text{Suma} & 138'824012 \end{array}$$

Substracción de fracciones decimales

175. Definición. — La que hemos dado de la substracción de quebrados comunes (**152**) es, perfectamente, aplicable a los decimales.

176. Resolución. — *Los decimales se restan como si fuesen enteros, procurando que las comas, las décimas, centésimas, etc., vengan en columna.*

EJEMPLOS:	1.º	0'476	2.º	24'6	3.º	4675'729
		— 0'350		— 3'4765		— 42
	Resto	0'126	R.	21'1235	R.	4633'729

Cuando el substraendo tiene menos notas decimales que el minuendo, o el minuendo tiene menos que el substraendo, consideramos, mentalmente, igualadas con ceros las notas de ambos términos y verificamos la operación como si los ceros existieran. Ya hemos dicho que un número decimal no altera añadiendo o quitando ceros de su derecha.

Multiplicación de fracciones decimales

177. Definición. — La que hemos dado de la multiplicación de quebrados comunes (**155**) es aplicable a la de los decimales.

178. Casos que ofrece. — En la multiplicación de fracciones decimales, pueden ocurrir, principalmente, tres casos:

1.º *Multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros.*
2.º *Multiplicar un número decimal por un entero.*
3.º *Multiplicar un número decimal por otro decimal.*

179. Resolución. — PRIMER CASO. — *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros lleve la unidad.*

Así, 84'6589 × 100 = 8465'89. (**172.** — 4.ª *Propiedad.*)

SEGUNDO CASO. — *Para multiplicar un número decimal por un entero, o viceversa, se multiplican como si fuesen enteros, y de la derecha del producto obtenido, se separan, con la coma, tantas cifras para decimales como haya en el factor decimal.*

Sea la multiplicación de 42'175 por 25.

$42'175 = \frac{42175}{1000}$ (**169.** — *Escolio*). Multiplicando ambos miembros por 25, tendremos: $42'175 \times 25 = \frac{42175}{1000} \times 25 = \frac{42175 \times 25}{1000}$; es decir, que multiplicaremos ambos números como si fuesen enteros, y de la derecha del producto total separaremos tres cifras para decimales, tantas como lleva el factor decimal, que es lo que queríamos demostrar.

TERCER CASO. — *Para multiplicar un número decimal por otro decimal, se multiplican como si fuesen enteros, y de la derecha del producto obtenido, se separan, con la coma, tantas cifras para decimales como notas decimales haya en ambos factores.*

Sea la multiplicación 12'45 por 7'5.

$$12'45 = \frac{1245}{100}, \text{ y } 7'5 = \frac{75}{10} \text{ (169. — Escolio);}$$

luego: $12'45 \times 7'5 = \frac{1245}{100} \times \frac{75}{10} = \frac{1245 \times 75}{1000}$. Es decir, que verificaremos la multiplicación como si fuesen números enteros y de la derecha del producto total separaremos tres cifras para decimales, tantas como hay en ambos factores.

EJEMPLOS DE LOS DOS ÚLTIMOS CASOS:

	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
	3'2104	625	0'25	4'75	0'1329
	× 38	× 3'24	× 0'42	× 3'2	× 0'2
	256832	2500	50	950	
	96312	1250	100	1425	
		1875			
Producto	112'9952	P. 2025'00	P. 0'1050	P. 15'200	P. 0'02658

ESCOLIO. — Conviene observar que, cuando el multiplicador es un número menor que la unidad, el producto es las partes del multiplicando indicadas por el multiplicador.

Así, $4 \times 0'5 = 2$, es decir, la mitad de 4 (**155**).

180. *Para elevar una fracción decimal a una potencia dada, se procede como si fuese un número entero; esto es, se toma tantas veces por factor como unidades tiene su exponente*, separando de la derecha de cada producto total las cifras decimales correspondientes.

Así, $0'25^2 = 0'25 \times 0'25 = 0'0625$; $3'4^3 = 3'4 \times 3'4 \times 3'4 = 39'304$.

División de fracciones decimales

181. Definición. — La que hemos dado de la división de quebrados comunes (**163**), es aplicable a la de las fracciones decimales.

182. Casos que ofrece. — Pueden ocurrir tres casos:

1.º *Dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros.*
2.º *Dividir un número decimal por un entero.*
3.º *Dividir un número entero o decimal por otro decimal.*

183. Resolución. — PRIMER CASO. — *Para dividir un número decimal por la unidad seguida de uno o más ceros, se corre la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros lleve la unidad.*

Así: $846'12 : 100 = 8'4612$; $0'125 : 1000 = 0'000125$. (**172.**—5.ª *Propiedad.*)

SEGUNDO CASO. — *Para dividir un número decimal por un entero, se ejecuta la división como si el dividendo fuese entero, y de la derecha del cociente, si la división es exacta, o de la derecha del cociente entero, si es inexacta, se separan, con la coma, para decimales, tantas cifras como cifras decimales tenga el dividendo.*

Si la división es exacta, el cociente obtenido será el verdadero, y si es inexacta, el cociente hallado se diferenciará del verdadero en menos de una unidad del último orden decimal.

1.º En efecto; sea la división de 2265'12 por 26.

Dividiendo 226512 por 26, se obtiene el cociente exacto 8712; luego partiendo por 26 el número 2265'12, cien veces menor que 226512, es claro que resultará un cociente 100 veces menor que el anterior, esto es, 87'12. (**78.**—1.ª)

2.º Sea, ahora, la división de 2265'13 por 26.

Dividiendo 226513 por 26, la división es inexacta, y el cociente completo es $8712 + \frac{1}{26}$ (**130.**—*Corol.* 1.º); luego dividiendo por 26 el número 2265'13, número 100 veces menor que 226513, es evidente que el cociente será 100 veces menor que el anterior; esto es, $87{,}12 + \frac{1}{26}$, y como $\frac{1}{26}$ de centésima es menor que una centésima, es evidente que el cociente entero 87‘12 se diferencia del cociente verdadero en menos de una unidad del último orden decimal, es decir, en menos de una centésima.

EJEMPLOS: 1.º

183,2,3,‘5,2, / 24
152 — 763‘48
0 8 3
1 1 5
1 9 2
0 0

2.º

984,‘6,3,2, / 154
060 6 — 6‘393
14 4 3
0 5 7 2
1 1 0

En el segundo ejemplo, el cociente hallado se diferencia del verdadero en menos de $\frac{110}{154} = \frac{55}{77} = \frac{5}{7}$ de milésima.

Como que a la derecha del dividendo pueden añadirse los ceros que se quiera sin que el cociente sufra alteración (**172.** — *Prop.* 1.ª), si después de haber bajado la última cifra del dividendo, la división es inexacta, puede hallarse el cociente con menor error que una unidad de un orden decimal cualquiera continuando la división; y hasta sucede, a veces, que se obtiene un cociente fraccionario exacto.

3.º 64,3,‘2,7 / 12
4 3 — 53‘605833
7 2
0 7 0
1 0 0
0 4 0
0 4 0
4

En este tercer ejemplo, después de haber bajado la última cifra del dividendo, 7, hemos obtenido ya, con la división de ella, el cociente decimal con menor error que una centésima; mas como la división era inexacta, la hemos continuado suponiendo añadidos 4 ceros a la derecha del dividendo.

El cociente obtenido se diferencia del verdadero en menos de $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ de millonésima.

TERCER CASO. — *Para dividir un número entero o decimal por otro decimal, se multiplican dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor* (**78** — 3.ª), *y el caso queda reducido a una división de enteros, o a la división de un decimal por un entero.*

EJEMPLOS: 1.º Dividir 84625 por 26‘75.

Multiplicando dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor, por 100, la cuestión queda reducida a la división de dos enteros: 8462500 : 2675.

2.º Dividir 8359‘12580 por 6‘452.

Multiplicando dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como notas decimales tiene el divisor, por 1000, la cuestión queda reducida a la división de un decimal por un entero, esto es,

8359125‘80 : 6452.

ESCOLIO. — Fundados en que, si dividendo y divisor se multiplican por un mismo número el cociente no altera, podemos dar la *regla práctica* siguiente para la resolución de los diferentes casos que puede ofrecer la división de decimales: *Los números decimales se dividen como los enteros, igualando antes, con ceros, las cifras decimales del dividendo y del divisor; si la división es inexacta, se aproxima el cociente cuanto se quiera añadiendo, cada vez, un cero al residuo.*

Ejercicios y problemas sobre los números decimales para resolver mentalmente

I

1. ¿Cuántas décimas tiene una unidad? ¿Cuántas centésimas? ¿Cuántas milésimas? ¿Cuántas diezmilésimas? ¿Cuántas cienmilésimas?
2. Una décima ¿cuántas centésimas tiene? ¿Cuántas milésimas? ¿Cuántas diezmilésimas? ¿Cuántas cienmilésimas?
3. Una centésima ¿cuántas milésimas tiene? ¿Cuántas diezmilésimas? ¿Cuántas cienmilésimas? ¿Cuántas millonésimas?
4. Una milésima ¿cuántas diezmilésimas tiene? ¿Cuántas cienmilésimas? ¿Cuántas millonésimas?
5. Una diezmilésima, ¿cuántas cienmilésimas tiene? ¿Cuántas millonésimas?
6. ¿Cuántas unidades hay en 40 décimas? ¿Y en 200 centésimas? ¿Y en 14,000 milésimas? ¿Y en 24,000 diezmilésimas?
7. ¿Cuántas décimas hay en 80 centésimas? ¿Y en 500 milésimas? ¿Y en 28,905 diezmilésimas?
8. ¿Cuántas unidades hay en 1,246 centésimas?
9. ¿Cuántas décimas hay en 8,900 milésimas? ¿Y en 35,700 diezmilésimas? ¿Y en 759,800 cienmilésimas?
10. ¿Cuántas centésimas se necesitan para constituir: 1.º, una unidad; 2.º, 3 unidades; 3.º, 1 decena; 4.º, 1 centena?
11. Qué vale más: ¿5 décimas o 50 centésimas? ¿Por qué?
12. Qué vale más: ¿50 centésimas o 500 milésimas? ¿Por qué?
13. Qué vale más: ¿10 reales o 50 céntimos de duro, o 500 milésimas de duro? ¿Por qué?
14. Antonio tiene 5 reales; José, 5 décimas de duro, y Luis, 750 milésimas de duro. ¿Quién tiene más? ¿Por qué?
15. Enrique posee 15 reales; Pablito, 500 milésimas de duro, y Agustín, 25 céntimos de duro. ¿Quién tiene más? ¿Por qué?

II

16. Un sujeto tenía 4 pesetas, y cobró 250 milésimas de duro. ¿Cuántas pesetas tuvo?
17. Juanito tenía 2'75 pesetas, y ha cobrado 25 céntimos de peseta de uno y 5 décimas de duro de otro. ¿Cuántas pesetas tiene ahora?
18. En un barril, hay 6'25 litros de vino, y se le añaden 3'75 litros. ¿Qué vino contiene?
19. He comprado 4'75 metros de cuerda a uno, 2 metros a otro y 0'30 metros a un tercero. ¿Cuántos metros tengo?
20. Cobré 10 pesetas, y gasté 500 milésimas de duro. ¿Cuántas pesetas me quedaron?
21. Cobré 8 pesetas, y pagué: 750 milésimas de duro a uno, 5 décimas de duro a otro y 25 céntimos de duro a un tercero. ¿Qué me quedó?
22. De una pieza de tela que media 12'80 metros, se han cortado 4'50 metros. ¿Cuánto ha quedado?
23. He de comprar un libro cuyo precio es 3'90 pesetas, y sólo tengo 2 pesetas. ¿Cuánto me falta?
24. He de gastar 5'60 pesetas en la compra de un álbum, y sólo tengo 3'20 pesetas. ¿Cuánto me falta?
25. Enrique recibe 1 peseta para comprar 2 sellos de a 15 céntimos y 3 de a 5 céntimos. ¿Cuánto le sobrará?
26. Antonio tiene 0'50 pesetas, y Luis tiene el triplo. ¿Cuánto tiene Luis?
27. Luisa compró 0'20 metros de cinta, y Pepita compró 10 veces más. ¿Cuánto compró?
28. ¿Cuánto valen 4'80 kilogramos de chocolate a 10 reales uno?
29. ¿Cuánto pagaré por 6'40 litros de vino de Jerez a 10 reales el litro? ¿Y por 32'85 litros? ¿Y por 140'75 litros? ¿Y por 200 litros?
30. ¿Qué valen 8'50 metros de cinta a 0'50 pesetas el metro?
31. Dígase el valor de 60 litros de vino a 0'50 pesetas uno.
32. Dígase el valor, en pesetas, de 20 granadas a 0'25 pesetas una.
33. ¿Cuánto pagaré por 8'50 litros de vino a 2'50 pesetas el litro?

34. Qué valen 4'80 kilogramos de una droga, a 100 pesetas el kilo? ¿Y 50'70 kilos? ¿Y 9'12 kilos? ¿Y 200 kilos?
35. Emilio tiene 42 pesetas y su hermano, 10 veces menos. ¿Cuánto tiene éste?
36. Un padre tiene 40'50 años, y la edad de su hijo es 10 veces menor. ¿Qué edad tiene el hijo?
37. Si se reparten, en partes iguales, 12'75 pesetas entre 3 hombres, ¿cuánto recibirá cada uno?
38. Si 4 sombreros valen 48'40 pesetas, ¿cuánto vale uno?
39. Antonio tiene 100 veces menos dinero que Juan, y éste tiene 6 pesetas. ¿Cuánto tiene Antonio?
40. Enrique tiene 825 céntimos, y Emilio tiene 100 veces menos. ¿Cuánto, en pesetas, tiene Emilio?
41. Pagando los huevos a 5 céntimos uno, ¿cuántos se comprarán con 1'20 pesetas? ¿Y con 2 pesetas? ¿Y con 3 pesetas? ¿Y con 10 reales?
42. Seis pañuelos han costado 24'30 pesetas. ¿Cuánto vale uno?
43. ¿Cuántos duros hay en 500 céntimos de peseta? ¿Y en 2000 céntimos?
44. Veinte libros costaron 60'80 pesetas. ¿Cuánto costó uno?
45. Pagando las bolas a 5 céntimos cada 2, ¿cuántas se comprarán con 1 peseta?
46. Pagando las plumas a 10 céntimos cada 3, ¿cuántas se comprarán por 3'50 pesetas?

Reducción de fracciones comunes a decimales

184. Definición. — Reducir un quebrado común a fracción decimal, es hallar una fracción decimal equivalente al quebrado común, o que se diferencie de él en menos de cualquier cantidad dada por pequeña que ésta sea.

Para ello, se divide el numerador por el denominador, y se obtiene la parte entera; para hallar la parte decimal, se continúa la división añadiendo, cada vez, un cero al residuo.

Todo quebrado es el cociente indicado de su numerador dividido por el denominador (**130.** — *Corol.* 2.º); luego la transformación de que nos ocupamos se verificará efectuando la división. Sea, por ejemplo, el quebrado $\frac{25}{7}$.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{l|l} 25 & 7 \\ \cline{2-2} \;\;40 & 3'571428 \\ \;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;4 & \end{array}$$

Dividiendo el numerador por el denominador, hallamos 3 unidades de cociente y 4 unidades de residuo, las que equivalen a 40 décimas (**168**); dividiendo estas 40 décimas por el divisor, hallamos 5 décimas de cociente y 5 décimas de residuo, que equivalen a 50 centésimas; dividiendo estas 50 centésimas por el divisor, hallamos 7 centésimas de cociente y 1 centésima de residuo, que equivale a 10 milésimas; dividiendo estas 10 milésimas por el divisor, hallamos 1 milésima de cociente y 3 milésimas de residuo, y así sucesivamente.

Vemos, pues, que se añade un cero a cada residuo para continuar la división, pudiendo, así, aproximar el cociente hasta el límite que se quiera. Si la división es inexacta, el cociente hallado se diferenciará del verdadero en menos de una unidad del último orden decimal. En el ejemplo anterior, el cociente hallado se diferencia del verdadero en $\frac{4}{7}$ de millonésima.

185. Fracciones que pueden obtenerse. — Al reducir un quebrado común a decimal, pueden obtenerse dos clases de fracciones: *exactas* y *periódicas*.

Fracción exacta es la que tiene un número limitado de cifras. V. gr.: 0'25; 0'785; 0'4786; etc.

Fracción periódica es la que tiene un número ilimitado de cifras, habiendo un grupo de ellas, llamado *período*, que se repite periódica e indefinidamente.

Las fracciones periódicas se subdividen en *puras* y *mixtas*.

Se llama periódica pura la fracción cuyo período principia en las décimas.

V. gr.: 0'75 75 75.... 6'125 125 125.... 25'444....
En la primera, el período tiene dos cifras; en la segunda, tres y en la tercera, una.

Se llama periódica mixta, aquélla cuyo período no principia en las décimas.

V. g.: 0'72 85 85 85.... 0'273 164 164 164....
En la primera, el período empieza en las milésimas, y en la segunda, en las diezmilésimas. La cifra o cifras de la fracción anteriores al período, constituyen la *parte no periódica*. En la primera de las fracciones anteriores, la parte no periódica es 72, y en la segunda, 273.

186. *Toda fracción ordinaria reducida a decimal, produce una fracción exacta o periódica.*

En efecto; si dividiendo el numerador por el denominador, y continuando la división añadiendo sucesivamente ceros a los residuos, esto es, reduciendo éstos a unidades decimales del orden inferior, se llega a obtener *división exacta*, el cociente de la división será exactamente equivalente al quebrado común propuesto.

Si la división no es exacta, por más que se continúe, naturalmente que, siendo siempre el divisor uno mismo y los residuos inferiores al divisor, los diferentes residuos que pueden aparecer son, cuando más, todos los números enteros inferiores al divisor. Habiendo aparecido todos estos residuos, claro está que en la división parcial siguiente aparecerá uno de los anteriores, y entonces volverá a iniciarse, en el cociente, el mismo grupo de cifras que resultó desde que dicho residuo con un cero a su derecha, se tomó por dividendo parcial. Continuando la división, volverá a aparecer periódica e indefinidamente dicho residuo, y a repetirse el mismo grupo de cifras en el cociente, periódica e indefinidamente también.

Es evidente que el número de divisiones necesarias para que se repita un resto será, a lo sumo, igual al número de unidades que tenga el divisor menos una.

Generalmente, antes de que aparezcan como residuos todos los números enteros inferiores al divisor, se repite uno de los restos anteriores.

Para fijar bien las ideas, reduzcamos a fracción decimal equivalente cada uno de los quebrados siguientes: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{15}$ y $\frac{3}{22}$.

```
30 / 4                              50 / 8
20  0'75 fracción exacta.           20  0'625 fracción exacta.
 0                                   40
                                      0

     40 / 7
     50  0'571428 571428... frac. periódica pura.
      10
       30
        20
         60
          40
           50
            10
             30
              20
               60
                4
```

```
30 / 11                              70  / 15
80   0'2727... fracción periódica pura   100   0'4666... fracción periódica mixta.
 30                                   100
  80                                   100
   3                                    10

            30  / 22
            080   0'13636... frac. periódica mixta.
             140
              080
               140
                08
```

Reducción de fracciones decimales a quebrados comunes

187. Al reducir una fracción ordinaria a decimal, hemos visto que podían obtenerse tres clases de fracciones: exactas, periódicas puras y periódicas mixtas; luego ahora debemos estudiar las siguientes cuestiones:

1.ª *Reducir a quebrado común una fracción decimal exacta.*
2.ª *Reducir a quebrado común una fracción periódica pura.*
3.ª *Reducir a quebrado común una fracción periódica mixta.*

188. Quebrados generadores de estas fracciones. — 1.º *El quebrado generador de una fracción decimal exacta, tiene por numerador la fracción considerada como número entero, y por denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción.*

Así, $0'125 = \frac{125}{1000}$; $0'8756 = \frac{8756}{10000}$ (169).

2.º *El quebrado generador de una fracción decimal periódica pura menor que la unidad, tiene por numerador el período, y por denominador, un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período.*

Sea la fracción periódica pura 0'848484...; digo que su fracción generatriz es $\frac{84}{99}$.

En efecto; si llamamos f a la fracción generatriz, tendremos:

$$f = 0'848484.....$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de ceros tantos como cifras tiene el período, tendremos:

$$100\ f = 84'848484.....$$

Observamos que la parte decimal del segundo miembro de esta última igualdad es igual a la fracción decimal propuesta; luego si de la segunda igualdad restamos, miembro a miembro, la primera, será:

$$99\ f = 84.$$

Y dividiendo ambos miembros de esta última igualdad por 99, tendremos: $f = \frac{84}{99}$, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplos: $0'756756756..... = \frac{756}{999}$; $0'444..... = \frac{4}{9}$.

Si la fracción periódica pura fuere mayor que la unidad, la fracción generatriz se compondría de la parte entera y del quebrado equivalente a la parte decimal.

Así, $4'898989..... = 4 + \frac{89}{99}$.

3.º *El quebrado generador de una fracción periódica mixta menor que la unidad, tiene por numerador un número formado por la parte no periódica seguida del primer período, menos la parte no periódica; y por denominador, un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.*

Sea la fracción periódica mixta 0'8252525.....

Vamos a demostrar que su fracción generatriz es

$$\frac{825-8}{990}$$

En efecto; multiplicando y partiendo, a la vez, la fracción propuesta por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica, por 10, tendremos:

$$0'8252525...=\frac{0'8252525...\times 10}{10}=\frac{8'252525...}{10}=\frac{8+0'252525...}{10}=\frac{8+\frac{25}{99}}{10}=$$

$$\frac{\frac{8\times 99+25}{99}}{10}=\frac{8\times 99+25}{990}\,(\mathbf{141})=\frac{8(100-1)+25}{990}=\frac{800-8+25}{990}=\frac{825-8}{990}$$

$$\text{luego } 0'8252525.....=\frac{825-8}{990},$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplos: $0'86444....=\frac{864-86}{900}$; $0'615232323....=\frac{61523-615}{99000}$; etc.

Si la fracción periódica mixta fuere mayor que la unidad, la fracción generatriz se compondría de la parte entera más el quebrado equivalente a la parte decimal.

Así, $24'6474747.....=24+\frac{647-6}{990}$.

Caracteres de los quebrados comunes para deducir la naturaleza de sus fracciones decimales equivalentes

189. Las reglas que se dan para conocer, *a priori*, la fracción decimal que producirá la reducción de un quebrado común cualquiera, se fundan en los dos principios siguientes:

Principio primero. — *Si el denominador de un quebrado no tiene más factores primos o simples que el 2, el 5, o los dos, la reducción de dicho quebrado producirá una fracción decimal exacta. Si el quebrado en cuestión es irreducible, la fracción decimal equivalente tendrá tantas cifras como unidades tenga el mayor de los exponentes de 2 y 5 en el denominador.*

1.º Sea el quebrado $\frac{7}{2^3\times 5^2}$, en cuyo denominador no hay más factores simples que el 2 y el 5; digo que este quebrado, reducido a decimal, producirá una fracción exacta.

En efecto; el factor que tiene en el denominador mayor exponente es el 2; tomemos la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente de 2 (tres ceros), esto es, 1000, y descompongamos este número en sus factores simples. Será $1000=2^3\times 5^3$ (**113**). Multiplicando, ahora, numerador y denominador del quebrado propuesto por 5, para que sean iguales los exponentes de 2 y 5 en el denominador, tendremos:

$\frac{7}{2^3 \times 5^2} = \frac{7 \times 5}{2^3 \times 5^2 \times 5} = \frac{7 \times 5}{2^3 \times 5^3} = \frac{7 \times 5}{1000} = \frac{35}{1000} =$ 0‘035, fracción decimal exacta.

Ahora, si el quebrado $\frac{7 \times 5}{2^3 \times 5^3}$ ha producido una fracción exacta, siendo este quebrado igual al propuesto $\frac{7}{2^3 \times 5^2}$ (**143.** — 1.º), claro está que la reducción de éste producirá la misma fracción.

2.º El quebrado $\frac{7}{2^3 \times 5^2}$ es irreducible, pues su numerador es un número primo; luego el numerador del quebrado $\frac{7 \times 5}{1000} = \frac{35}{1000}$ no es divisible por 10; luego, escrito sin denominador, la fracción exacta equivalente tendrá 3 cifras decimales (**184**); y como el quebrado $\frac{7 \times 5}{1000}$ es igual al propuesto $\frac{7}{2^3 \times 5^2}$, claro está que la reducción de éste producirá la misma fracción que el anterior; luego la fracción resultante del quebrado $\frac{7}{2^3 \times 5^2}$ tendrá 3 cifras; esto es, tantas cifras como unidades tiene el exponente de 2, que es el factor del denominador que lleva mayor exponente.

PRINCIPIO SEGUNDO. *El denominador del quebrado irreducible equivalente a una fracción periódica mixta, contiene al factor 2, al 5, o a los dos; y el mayor exponente de estos factores tiene tantas unidades como cifras tiene la parte no periódica de la fracción.*

En efecto; sea la fracción periódica mixta 0‘843252525.....

Multiplicando y dividiendo esta fracción por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica, por 1000, tendremos:

$$0‘843252525..... = \frac{0‘843252525... \times 1000}{1000} = \frac{843‘252525...}{1000} = \frac{843 + 0‘252525...}{1000} =$$

$$\frac{843 + \frac{25}{99}}{1000} (\mathbf{188.}\text{-}2.^{\circ}) = \frac{\frac{843 \times 99 + 25}{99}}{1000} = \frac{843 \times 99 + 25}{99 \times 1000} (\mathbf{141}) = \frac{843\,(100-1) + 25}{99 \times 1000}$$

$$= \frac{84300 - 843 + 25}{99 \times 1000} = \frac{84325 - 843}{99 \times 1000} = \frac{84325 - 843}{99 \times 2^3 \times 5^3 \; (*)}.$$

Verificando la substracción indicada en el numerador de este último quebrado, observamos que la resta que se tenga no terminará en *cero*, por ser la cifra de las unidades del minuendo distinta que las del substraendo, y por tanto, dicho numerador no es divisible por 10, o lo que es lo mismo, por 2 y 5 a la vez. Simplificando este quebrado cuanto posible sea, siempre, pues, quedará en el denominador del quebrado irreducible que se obtenga el factor 2 o el 5 (o los dos, en el caso de que el numerador no sea divisible por 2 ni 5) con el exponente 3, esto es, *con un exponente que tiene tantas unidades como cifras componen la parte no periódica de la fracción periódica mixta propuesta.*

(*) 1000 descompuesto en sus factores simples es igual a $2^3 \times 5^3$. *En general, todo número formado por la unidad seguida de ceros, descompuesto en sus factores simples, se compone del factor 2 y del factor 5, elevados a una potencia que tiene tantas unidades como ceros acompañan a la unidad.*

Escolio. — De la demostración del teorema anterior, se deduce claramente que, cuando por el examen de un quebrado común se observe que su fracción decimal equivalente será periódica mixta, seguidamente podemos saber el número de cifras que tendrá la parte no periódica de la fracción: *tantas cifras como unidades tenga el mayor exponente de 2 ó 5 en el denominador del quebrado.*

190. Reglas prácticas. — De lo que acabamos de demostrar, se deducen las reglas prácticas siguientes:

1.ª *Todo quebrado común reducido a decimal, producirá una fracción decimal exacta, si su denominador sólo es divisible por los números primos 2 ó 5, o por ambos a la vez.*

Si el quebrado es irreducible, la fracción decimal tendrá tantas cifras como unidades tenga el mayor de los exponentes de 2 ó 5 en el denominador.

Así, los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{50}$, producirán fracciones exactas.

2.ª *Todo quebrado común irreducible producirá una fracción periódica pura, si su denominador no es divisible por los números primos 2 ó 5.*

Los quebrados $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{1}{9}$, producirán fracciones periódicas puras.

En efecto; la fracción decimal equivalente a cualquiera de estos quebrados no puede ser exacta ni periódica mixta; pues acabamos de demostrar que el denominador de un quebrado equivalente a una fracción exacta o periódica mixta contiene al factor 2, al 5, o a los dos (**189.**—1.º y 2.º), y ninguno de los denominadores de los quebrados propuestos es divisible por alguno de estos dos números primos; luego no habiendo más que tres clases de fracciones, producirán fracciones periódicas puras.

3.ª *Todo quebrado común irreducible producirá una fracción periódica mixta, si su denominador, además de ser divisible por 2, por 5, o por 2 y 5 a la vez, tiene algún otro divisor primo.*

La parte no periódica tendrá tantas cifras como unidades tenga el mayor de los exponentes de 2 ó 5 en el denominador.

Los quebrados $\frac{1}{12}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{17}{33}$, $\frac{11}{30}$, producirán fracciones periódicas mixtas.

En efecto; la fracción decimal equivalente a cualquiera de estos quebrados no puede ser exacta ni periódica pura; pues el denominador de un quebrado común equivalente a una fracción exacta sólo es divisible por 2, por 5, o por 2 y 5 a la vez, y el denominador de un quebrado común equivalente a una fracción periódica pura no es divisible por 2 ni por 5. No habiendo más que tres clases de fracciones, producirán fracciones periódicas mixtas.

Ejercicios y problemas sobre los números fraccionarios para resolver mentalmente

1. ¿Qué es una unidad fraccionaria? ¿En cuántas partes iguales hay que dividir la unidad entera para reducirla a mitades, a tercios, a cuartos, a séptimos, a novenos, a décimos, a doceavos y a veinteavos?

2. ¿Cuántos tercios, quintos, séptimos, novenos, décimos, doceavos y veinteavos tiene una unidad entera?

3. ¿Cuántos tercios hay en 3 unidades? ¿Cuántos quintos? ¿Cuántos novenos? ¿Cuántos doceavos?

4. ¿Cuántos cuartos hay en 5 unidades? ¿Cuántos décimos?

5. En $\frac{4}{4}$, ¿cuántas unidades hay? ¿Y en $\frac{5}{5}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{25}{25}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{16}{4}$, $\frac{36}{12}$, $\frac{125}{5}$, $\frac{240}{240}$? ¿Cuántas unidades hay en $\frac{48}{12}$?

6. Reducir 2 a tercios; 4, a quintos; 7, a novenos; 1, a mitades; 5, a octavos; 6, a mitades; 3, a décimos, y 5, a onceavos.

7. ¿Cuál será el cociente completo de 8 : 5? ¿Y el de 9 : 2? ¿Y el de 13 : 4? ¿Y el de 17 : 5? ¿Y el de 25 : 3?

8. Dígase el cociente completo de las siguientes divisiones: 15 : 8 — 16 : 7 — 31 : 7 — 51 : 10 — 27 : 8 — 43 : 8.

9. Qué vale más: ¿$\frac{1}{4}$ de peseta o 0'25 de peseta? ¿Por qué?

10. Qué vale más: ¿$\frac{3}{4}$ de duro o 0'5 de duro? ¿Por qué?

11. Qué vale más: ¿$\frac{7}{7}$ de kilog. o mil milésimas de kilog.? ¿Por qué?

12. Qué vale más: ¿$\frac{3}{4}$ de litro o 0'750 de litro? ¿Por qué?

13. Qué vale más: ¿$\frac{5}{5}$ de duro o 15 reales? ¿Por qué?

14. Qué vale más: ¿$\frac{1}{4}$ de duro o 0'500 de duro? ¿Por qué?

15. Qué vale más: ¿$\frac{2}{5}$ de duro o 2 pesetas? ¿Por qué?

16. Qué vale más: ¿5 reales o 0'250 de duro? ¿Por qué?

17. Qué vale más: ¿$\frac{3}{10}$ de kilogramo o 250 gramos? ¿Por qué?

18. ¿Qué fracción de día ha transcurrido a las 6 de la mañana? ¿Y a las 6 de la tarde?

19. ¿Cuánto se ha de quitar de $\frac{7}{5}$ para tener una unidad entera?

20. ¿Cuánto falta a $\frac{6}{9}$ para tener una unidad entera?

21. ¿Cuánto se ha de añadir a una unidad entera para tener $\frac{9}{3}$?

22. ¿A qué fracción se ha de añadir $\frac{4}{7}$ para tener una unidad entera?

23. ¿De qué número se ha de restar $\frac{2}{5}$ para tener una unidad entera?

24. Decir una fracción que contenga a la unidad 5 veces.

25. Decir una fracción 4 veces más pequeña que 1.

26. De los quebrados $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{6}$ ¿cuál es el mayor? ¿Y el menor?

27. De los quebrados $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{12}$ y $\frac{7}{5}$, ¿cuál es el mayor? ¿Y el menor?

28. Dígase un quebrado 3 veces mayor que $\frac{5}{7}$; otro, 2 veces mayor que $\frac{5}{6}$; otro, 4 veces mayor que $\frac{3}{11}$; otro, 5 veces mayor que $\frac{7}{12}$.

29. Dígase un quebrado 2 veces menor que $\frac{4}{7}$; otro, 2 veces menor que $\frac{1}{5}$; otro, 3 veces menor que $\frac{1}{7}$.

30. Decir dos quebrados 3 veces mayores que $\frac{1}{9}$ y que tengan: el 1.º, igual denominador; el 2.º, igual numerador.

31. Decir dos quebrados 2 veces menores que $\frac{6}{9}$ y que tengan: el 1.º, igual denominador; el 2.º, igual numerador.

32. Decir un quebrado equivalente a cada uno de los siguientes, y cuyos términos sean menores que los de éstos: $\frac{6}{9}$, $\frac{5}{25}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{14}{28}$, $\frac{10}{80}$, $\frac{20}{40}$.

33. Decir un quebrado equivalente a cada uno de los siguientes, y cuyos términos sean mayores que los de éstos: $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{3}{7}$.

34. ¿Qué relación existe entre los quebrados $\frac{3}{5}$ y $\frac{12}{5}$? ¿Y entre los quebrados $\frac{8}{9}$ y $\frac{2}{9}$?

35. ¿Qué relación existe entre los quebrados $\frac{7}{11}$ y $\frac{7}{22}$? ¿Y entre los quebrados $\frac{6}{26}$ y $\frac{6}{13}$?

36. Al valuar un quebrado propio, la fracción decimal equivalente ¿cuándo será exacta? ¿Cuándo periódica pura? ¿Cuándo periódica mixta?

37. Dígase la clase de fracción decimal que se obtendrá al valuar cada uno de los quebrados siguientes: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{5}{17}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{9}{26}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{9}{22}$, $\frac{7}{70}$, $\frac{43}{88}$, $\frac{9}{31}$.

EXTRACCIÓN DE RAÍCES

Raiz cuadrada de los números enteros

191. Definición de la raíz.—Raíz de un número es otro número que, multiplicado por sí mismo una o más veces, produce el número propuesto.

192. División de las raíces.—Las raíces se dividen en *segundas o cuadradas*, *terceras o cúbicas*, *cuartas*, *quintas*, etc., o bien en raíces de segundo grado, de tercer grado, etc.

La raíz *primera* de un número es el mismo número.

193. Raíz cuadrada.—Raíz cuadrada de un número, es otro número cuya segunda potencia produce el número propuesto.

Así, la raíz cuadrada de 25 es 5, pues $5^2 = 25$.

194. Signo indicador de la raíz.—Para indicar que se ha de extraer de un número la raíz de cierto grado, se escribe dicho número debajo de la rama horizontal del signo radical ($\sqrt{\ }$), y en la abertura de éste, se coloca un número que, con sus unidades, indica el grado de la raíz. Este número se llama *índice* (*) de la raíz, y en la cuadrada, generalmente, se suprime.

(*) Del latín *index*, indicador.

Así, $\sqrt{84}$ quiere decir la raíz cuadrada de 84, y el índice, que se suprime, es 2; $\sqrt[3]{125}$ quiere decir la raíz cúbica de 125, y el índice es 3.

195. Casos que ofrece la extracción de la raíz cuadrada de los números enteros. — Pueden ocurrir dos casos:

1.° *Que el número sea menor que* 100.
2.° *Que el número sea mayor que* 100.

196. Resolución del primer caso. — Para extraer la raíz cuadrada entera de un número entero menor que 100, basta saber de memoria los cuadrados de los diez primeros números. Los números que los producen son las raíces respectivas. Dichos cuadrados son:

Cuadrados	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100.
Raíces	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

De consiguiente, si el número del cual ha de extraerse la raíz cuadrada es uno de los cuadrados perfectos mencionados, *su raíz cuadrada será uno de los diez primeros números.* Así, la raíz cuadrada de 25 es 5; la de 49 es 7; la de 81 es 9.

Pero si el número no es cuadrado perfecto, *su raíz cuadrada entera es la del mayor cuadrado entero contenido en él.* Así, la raíz cuadrada de 30 está comprendida entre 5 y 6, y como 5 es la raíz cuadrada de 25, y 25 es el mayor cuadrado entero contenido en 30, la raíz cuadrada de 30 es 5. Por lo mismo, la raíz cuadrada entera de 72 es 8; la de 40 es 6, etc.

197. Raíz cuadrada exacta e inexacta. — Un número tiene raíz cuadrada *exacta*, si el cuadrado de su raíz produce dicho número; es decir, si el número es cuadrado perfecto. Así, 6 y 7 son las raíces cuadradas exactas de 36 y 49, respectivamente.

Pero si el cuadrado de la raíz no produce exactamente el número, esto es, si el número no es cuadrado perfecto, su raíz es *inexacta.* Así, 6 y 7 son las raíces cuadradas inexactas de 40 y 52, respectivamente.

198. Residuo de la raíz cuadrada. — *Residuo* de la raíz cuadrada inexacta de un número, es el exceso de éste sobre el cuadrado de su raíz. Así, 4 es el residuo de la raíz cuadrada entera de 40; pues $40 = 6^2 + 4$ (*).

199. *Una raíz de cualquier grado de un número menor que la unidad, es también menor que la unidad; pero mayor que dicho número.*

Sea $\frac{3}{5}$ el número menor que la unidad; digo que la raíz de cualquier grado de $\frac{3}{5}$, la cuadrada, por ejemplo, es menor que la unidad, pero mayor que $\frac{3}{5}$.

1.° En efecto; la $\sqrt{\frac{3}{5}}$ debe ser, necesariamente, un número menor que 1; pues el cuadrado de 1 es 1, y el cuadrado de un número mayor que 1 es también mayor que 1.

2.° Digo que la $\sqrt{\frac{3}{5}}$ es mayor que $\frac{3}{5}$.

En efecto, el cuadrado de $\frac{3}{5}$, o de un número menor que $\frac{3}{5}$, es menor que $\frac{3}{5}$ (**162**); luego la raíz cuadrada de $\frac{3}{5}$ es un número mayor que $\frac{3}{5}$.

(*) En lo sucesivo, llamaremos, a veces, *raíz cuadrada* de un número, en vez de *raíz cuadrada entera*, a la raíz cuadrada del mayor cuadrado entero que dicho número contenga.

200. *Una raíz de cualquier grado de un número mayor que la unidad, es también mayor que la unidad; pero menor que dicho número.*

Sea $\frac{5}{3}$ el número mayor que la unidad; digo que la raíz de cualquier grado de $\frac{5}{3}$, la cuadrada, por ejemplo, es mayor que la unidad; pero menor que $\frac{5}{3}$.

1.º En efecto; la $\sqrt{\frac{5}{3}}$ debe ser, necesariamente, un número mayor que 1; pues el cuadrado de 1 es 1, y el cuadrado de un número menor que 1 es también menor que 1.

2.º Digo que la $\sqrt{\frac{5}{3}}$ es menor que $\frac{5}{3}$.

En efecto; el cuadrado de $\frac{5}{3}$ o de un número mayor que $\frac{5}{3}$ es mayor que $\frac{5}{3}$ (**162**); luego la raíz cuadrada de $\frac{5}{3}$ es un número menor que $\frac{5}{3}$.

201. *Si un número no tiene en enteros la raíz exacta de un grado, cualquiera que éste sea, tampoco la tiene en números fraccionarios, y el número no tiene, por lo mismo, raíz exacta de aquel grado.*

Sea, por ejemplo, el número 62, que no tiene raíz cuadrada exacta en números enteros; digo que su raíz cuadrada exacta tampoco puede ser un número fraccionario.
En efecto; si la raíz cuadrada exacta del número 62 fuese un número fraccionario, éste estaría comprendido entre 7 y 8, es decir, sería 7 y una fracción, por ejemplo, $7 + \frac{4}{8}$. Reduciendo este número mixto a quebrado irreducible, tenemos: $7 + \frac{4}{8} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$; luego $\frac{15}{2}$ sería la raíz cuadrada exacta del número 62, y por lo mismo, $\left(\frac{15}{2}\right)^2 = 62$; pero esto es un absurdo, pues $\frac{15}{2}$ es un quebrado irreducible y $\left(\frac{15}{2}\right)^2$ es otro quebrado irreducible (**161**), y un quebrado irreducible no puede ser igual a un número entero (**148**); luego el número 62 no tiene raíz cuadrada exacta.

202. Extracción de la raíz cuadrada de un número entero mayor que 100. — La regla práctica que se da para este objeto, se funda en los tres principios siguientes:

PRINCIPIO PRIMERO. — *El cuadrado de la suma de dos números se compone de tres partes: el cuadrado del primero, más el duplo del primero multiplicado por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

Si representamos estos números, respectivamente, por a y b, decimos que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2.$$

En efecto: $(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = (a + b)\,a + (a + b)\,b$ (**59**). Verificando estas multiplicaciones:

$$(a + b)\,a = a^2 + a\,b$$

y

$$(a + b)\,b = \phantom{a^2 +{}} a\,b + b^2.$$

Luego, $(a + b)\,(a + b)$ o $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$, conforme al enunciado (*).

(*) El cuadrado de la diferencia de dos números se compone: *del cuadrado del primero, menos el duplo del primero multiplicado por el segundo, más el cuadrado del segundo.*
Así, $(8 - 4)^2 = 8^2 - (2 \times 8 \times 4) + 4^2$.

De este teorema se deducen tres corolarios:

COROLARIO 1.º — *El cuadrado de todo número compuesto de decenas y unidades consta de las partes siguientes: del cuadrado de las decenas, que es un número de centenas; del duplo de las decenas multiplicado por las unidades, que es un número de decenas, y del cuadrado de las unidades, que es un número de unidades.*

En efecto; tomemos, por ejemplo, el número 52, compuesto de 5 decenas y 2 unidades, cuyo cuadrado es $52 \times 52 = 2{,}704$ y, por lo mismo, $\sqrt{2{,}704} = 52$.

$$\begin{array}{l} (5 \text{ dec.} + 2 \text{ unid.})^2 \\ = 52^2 = 2{,}704 = \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} 1.^a \text{ parte } 5^2 = 5 \times 5 = 25 \text{ centenas} \ldots\ldots = & 2{,}500 & \text{unidades,} \\ 2.^a \quad \text{»} \quad (2 \times 5) \times 2 = 10 \times 2 = 20 \text{ decenas} = & 200 & \text{»} \\ 3.^a \quad \text{»} \quad 2^2 = 2 \times 2 = 4 \text{ unidades} \ldots\ldots = & 4 & \text{»} \end{array} \right.$$

Suma igual á la segunda potencia de 52............ 2,704 unidades, conforme al enunciado.

COROLARIO 2.º — *La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos, es igual al duplo del número menor más la unidad.*

Sean los dos números enteros consecutivos n y $n + 1$.

Digo que $(n + 1)^2 - n^2 = 2\ n + 1$.

En efecto: $(n + 1)^2 = n^2 + 2\ n + 1$. Restando de ambos miembros de esta igualdad el cuadrado del número menor, n^2, tendremos:

$(n + 1)^2 - n^2 = 2\ n + 1$, que es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO: $9^2 - 8^2 = 2 \times 8 + 1$.

COROLARIO 3.º — *El residuo de la raíz cuadrada de un número entero, es menor que el duplo de su raíz entera más una unidad.*

Sea 70 el número entero, cuya raíz cuadrada entera es 8. El residuo será $70 - 8^2 = 6$; digo que $6 < 2 \times 8 + 1$.

En efecto; siendo 8 la raíz cuadrada entera de 70, es evidente que $70 < 9^2$.

Si de ambos miembros de esta desigualdad quitamos 8^2, tendremos $70 - 8^2 < 9^2 - 8^2$. Pero $70 - 8^2 = 6$, residuo de la $\sqrt{70}$, y $9^2 - 8^2 = 2 \times 8 + 1$, según el corolario anterior; luego substituyendo ambos miembros de la última desigualdad por sus equivalentes, tendremos: $6 < 2 \times 8 + 1$, que es lo que queríamos demostrar.

PRINCIPIO SEGUNDO. — *Separando las dos primeras cifras de la derecha de un número, la raíz cuadrada entera del número que queda a la izquierda, es el número de decenas de la raíz cuadrada entera del número propuesto.*

Tengamos para ello en cuenta que *el cuadrado de un número de decenas da un número de centenas* (202. — *Principio* 1.º — *Corol.* 1.º) *y que, por lo mismo, la raíz cuadrada de un número de centenas es un número de decenas.*

Tomemos el número 4648. Separando las dos primeras cifras de su derecha, queda a la izquierda el número 46, cuya raíz cuadrada entera es 6. *Digo que* 6 *es el número de decenas de la raíz cuadrada entera de* 4648. En efecto:

El cuadrado de 6, que es 36, está contenido en 46, y 6^2 centenas, o 36 centenas, también están contenidas en 46 centenas, y con mayor razón estarán contenidas en el número propuesto; *luego la raíz cuadrada del número propuesto no es menor que la de* 36 *centenas, que es* 6 *decenas.*

Si 6 es la raíz cuadrada de 46, el cuadrado de 7 ó 7^2, es mayor que 46; luego 7^2 centenas o 49 centenas, es mayor que 46 centenas, y también mayor que el número 4648, ya que lo que despreciamos de él, 48 unidades, no llega a una centena; *luego la raíz cuadrada del número propuesto es menor que la de* 49 *centenas, que es* 7 *decenas.*

Primero hemos visto que la raíz cuadrada entera de 4648 no es menor que 6 decenas, y ahora vemos que no llega a 7 decenas: *luego* 6 *es el número de decenas de la raíz cuadrada entera del número propuesto.*

PRINCIPIO TERCERO. — *Restando de un número entero el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada, y dividiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, el cociente entero será las unidades de la raíz, o un número mayor que estas unidades.*

Adviértase que se trata de un número entero mayor que 100 y que, por lo mismo, su raíz cuadrada entera es 10 o mayor que 10.

Debemos admitir dos casos:

1.º *Que el número en cuestión sea cuadrado perfecto.*
2.º *Que no sea cuadrado perfecto.*

Si es cuadrado perfecto, como que dicho número es, exactamente, el cuadrado de su raíz, se compone de estas tres partes de su raíz: (**202.** *Principio* 1.º—*Corol.* 1.º)

1.ª, cuadrado de decenas de la raíz, que es un número de centenas; 2.ª, duplo de las decenas de la raíz por las unidades de la misma, que es un número de decenas, y 3.ª, cuadrado de las unidades de la raíz, que es un número de unidades. Luego si restamos del número la parte primera, en el resto quedan las otras dos: duplo de decenas de la raíz por sus unidades, más cuadrado de sus unidades.

Fijándonos, ahora, en la última parte de este resto (*el cuadrado de las unidades de la raíz*) observaremos que pueden ocurrir tres cosas distintas:

1.ª *Que del cuadrado de las unidades de la raíz no resulte ninguna decena.*
2.ª *Que resulte un número de decenas menor que el duplo de las de la raíz.*
3.ª *Que resulte un número de decenas igual o mayor que el duplo de las de la raíz.*

En el primer caso, las decenas del resto son las que exactamente proceden de la 2.ª parte (*duplo de decenas por unidades*), las que hemos de considerar como un producto formado por dos factores: 1.º, *duplo de las decenas de la raíz*, y 2.º, *las unidades de la raíz.* Luego partiendo las decenas del resto por el primer factor que las produce (*el duplo de las de la raíz*), el cociente *será las unidades de la raíz*, o el otro factor, siendo la división exacta.

DEMOSTRACIÓN:

$32^2 = 1,024$; luego $\sqrt{1,024} = 32$.

$$\text{Número dado: } 1,024 = \begin{cases} 1.^a \text{ parte. } 3^2 = 3 \times 3 = 9 \text{ centenas} \ldots\ldots\ldots = 900 \\ 2.^a \quad » \quad (2 \times 3) \times 2 = 6 \times 2 = 12 \text{ decenas.} = 120 \\ 3.^a \quad » \quad 2^2 = 2 \times 2 = 4 \text{ unidades} \ldots\ldots\ldots = 4 \end{cases}$$

Número dado........ 1,024
Restando de él la primera parte............ — 900
Resto igual a la suma de las 2 partes últimas.. 124
Decenas de este resto 12
Duplo de las decenas de la raíz.... $(2 \times 3) = 6$

División:

Decenas del resto, 12 / 6, duplo de las decenas de la raíz.
0   2, unidades de la raíz.

Si del cuadrado de las unidades de la raíz resulta un número de decenas *menor que el duplo de las de la raíz*, dividiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, el *cociente también dará las unidades de la raíz;* mas la división será inexacta, siendo el residuo de la misma las decenas procedentes del cuadrado de las unidades.

DEMOSTRACIÓN:

$45^2 = 45 \times 45 = 2,025$; luego $\sqrt{2,025} = 45$.

$$\text{Número dado: } 2,025 = \begin{cases} 1.^a \text{ parte. } 4^2 = 4 \times 4 = 16 \text{ centenas} \ldots\ldots\ldots = 1,600 \\ 2.^a \quad » \quad (2 \times 4) \times 5 = 8 \times 5 = 40 \text{ decenas.} = 400 \\ 3.^a \quad » \quad 5^2 = 5 \times 5 = 25 \text{ unidades} \ldots\ldots\ldots = 25 \end{cases}$$

Número dado........ 2,025
Restando de él la 1.ª parte................. — 1,600
Resto igual a la suma de las 2 partes últimas. 425
Decenas de este resto.......... 42
Duplo de las decenas de la raíz.. $(2 \times 4) = 8$

División:

Decenas del resto, 42 / 8, duplo de las decenas de la raíz.
Residuo, 2   5, unidades de la raíz.

Si del cuadrado de las unidades de la raíz resulta un número de decenas *igual o mayor* que el duplo de las de la raíz, dividiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, el cociente *será mayor* que las unidades de la raíz.

DEMOSTRACIÓN:

$29^2 = 29 \times 29 = 841$; luego $\sqrt{841} = 29$.

$$\text{Número dado: } 841 = \begin{cases} 1.^a \text{ parte. } 2^2 = 2 \times 2 = 4 \text{ centenas} \ldots\ldots\ldots = 400 \\ 2.^a \quad " \quad (2 \times 2) \times 9 = 4 \times 9 = 36 \text{ decenas.} = 360 \\ 3.^a \quad " \quad 9^2 = 9 \times 9 = 81 \text{ unidades} \ldots\ldots\ldots = 81 \end{cases}$$

Número dado	841
Restando de él la 1.ª parte	— 400
Resto igual a la suma de las 2 partes últimas...	441

Decenas de este resto 44
Duplo de las decenas de la raíz ... $(2 \times 2) = 4$

División:

Decenas del resto, 44 / 4, duplo de las decenas de la raíz.
04 — 11, número mayor que las unidades de la raíz.
0

Si el número de que hacemos mención (**202.**—*Principio* 3.º—2.º *caso*), no es cuadrado perfecto, constará de las mismas tres partes con respecto de su raíz (**202.**—*Principio* 1.º—*Corol.* 1.º), más el residuo de dicha raíz. Si del número restamos la parte primera, *el cuadrado de las decenas de su raíz*, en el resto quedarán las otras tres partes: *duplo de decenas de la raíz por sus unidades, más cuadrado de sus unidades, más el residuo de la raíz.*

Fijándonos, ahora, en la suma de las dos últimas partes de este resto (*cuadrado de unidades de la raíz, más el residuo de la misma*), observaremos que pueden suceder, como en el caso 1.º, tres cosas distintas:

1.ª *Que de la suma del cuadrado de las unidades de la raíz, más el residuo no resulte ninguna decena.*

2.ª *Que de dicha suma resulte un número de decenas menor que el duplo de las de la raíz.*

3.ª *Que de dicha suma resulte un número de decenas igual o mayor que el duplo de las de la raíz.*

En el primer caso, las decenas del resto son, como cuando el número es cuadrado perfecto, exactamente las que proceden de la segunda parte (*duplo de decenas por unidades*), las que hemos de considerar como un producto de dos factores: 1.º, *duplo de las decenas de la raíz*, y 2.º, *las unidades de la raíz.* Luego, partiendo las decenas del resto (el producto) por el duplo de las de la raíz (primer factor), el cociente será el otro factor, o las unidades de la raíz, siendo la división exacta.

DEMOSTRACIÓN:

$52^2 =$	2,704
Número que le añado para que no tenga raíz exacta........	+ 5
	2,709

Luego $\sqrt{2{,}709} = 52$, raíz entera. Residuo, 5.

$$\text{Número dado: } 2{,}709 = \begin{cases} 1.^a \text{ parte. } 5^2 = 5 \times 5 = 25 \text{ centenas} \ldots\ldots\ldots = 2{,}500 \\ 2.^a \quad " \quad (2 \times 5) \times 2 = 10 \times 2 = 20 \text{ decenas.} = 200 \\ 3.^a \quad " \quad 2^2 = 2 \times 2 = 4 \text{ unidades} \ldots\ldots\ldots = 4 \\ 4.^a \quad " \quad \text{Residuo} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5 \end{cases}$$

Número dado........	2,709
Restando de él la 1.ª parte	— 2,500
Resto igual a la suma de las 3 partes últimas ..	209

Decenas del resto 20
Duplo de las decenas de la raíz ... $(2 \times 5) = 10$

División:

Decenas del resto, 20 / 10, duplo de las decenas de la raíz.
0 — 2, unidades de la raíz

Si de la suma del cuadrado de las unidades de la raíz más el residuo de la misma resulta un número de decenas menor que el duplo de las de la raíz, partiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, el cociente dará también las unidades de la raíz y la división será inexacta, siendo el residuo de la misma las decenas procedentes de la suma mencionada.

DEMOSTRACIÓN:

$65^2 =$	....	4,225
Número que le añado para que no tenga raíz exacta........	+	9
		4,234

Luego $\sqrt{4,234} = 65$, raíz entera. Residuo, 9.

$$\text{Número dado: } 4,234 = \begin{cases} 1.^{a} \text{ parte. } 6^2 = 6 \times 6 = 36 \text{ centenas} \ldots\ldots = 3,600 \\ 2.^{a} \text{ » } (2 \times 6) \times 5 = 12 \times 5 = 60 \text{ decenas.} = 600 \\ 3.^{a} \text{ » } 5^2 = 5 \times 5 = 25 \text{ unidades} \ldots\ldots = 25 \\ 4.^{a} \text{ » Residuo} \ldots\ldots\ldots\ldots 9 \end{cases}$$

Número dado........	4,234
Restando de él la 1.ª parte.................	— 3,600
Resto igual a la suma de las 3 partes últimas...	634

Decenas del resto 63
Duplo de las decenas de la raíz (2 × 6) = 12

División:

Decenas del resto, 63 / 12, duplo de las decenas de la raíz.
Residuo, 3 — 5, unidades de la raíz.

Si de la suma del cuadrado de las unidades de la raíz más el residuo de la misma resulta un número de decenas igual o mayor que el duplo de las de la raíz, partiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, el cociente es *mayor* que las unidades de la raíz.

DEMOSTRACIÓN:

$48^2 =$	....	2,304
Número que le añado para que no tenga raíz exacta........	+	43
		2,347

Luego $\sqrt{2,347} = 48$, raíz entera. Residuo, 43.

$$\text{Número dado: } 2,347 = \begin{cases} 1.^{a} \text{ parte. } 4^2 = 4 \times 4 = 16 \text{ centenas} \ldots\ldots = 1,600 \\ 2.^{a} \text{ » } (2 \times 4) \times 8 = 8 \times 8 = 64 \text{ decenas..} = 640 \\ 3.^{a} \text{ » } 8^2 = 8 \times 8 = 64 \text{ unidades} \ldots\ldots = 64 \\ 4.^{a} \text{ » Residuo} \ldots\ldots\ldots\ldots 43 \end{cases}$$

Número dado........	2,347
Restando de él la 1.ª parte..................	— 1,600
Resto igual a la suma de las 3 partes últimas ...	747

Decenas del resto 74
Duplo de las decenas de la raíz.... (2 × 4) = 8

División:

Decenas del resto 74 / 8, duplo de las decenas de la raíz.
Residuo, 2 — 9, número mayor que las unidades de la raíz.

203. Hallar la cifra de las unidades de la raíz.—De lo que acabamos de demostrar, se deduce, con la mayor claridad, que, *para hallar la cifra de las unidades de la raíz cuadrada de un número entero mayor que* 100, *se resta de dicho número el cuadrado de las decenas de su raíz, y se dividen las decenas del resto por el duplo de las decenas de la raíz. El cociente entero es las unidades de la raíz, o un número mayor que estas unidades.*

Este cociente será las unidades de la raíz.

Siendo el número cuadrado perfecto..	1.º Cuando, del cuadrado de las unidades de la raíz, no resulte ninguna decena. 2.º Cuando, del cuadrado de las unidades de la raíz, resulte un número de decenas menor que el duplo de las de la raíz.
No siendo el número cuadrado perfecto	3.º Cuando, de la suma del cuadrado de las unidades de la raíz, más el residuo de la misma, no resulte ninguna decena. 4.º Cuando, de la suma del cuadrado de las unidades de la raíz más el residuo, resulte un número de decenas menor que el duplo de las de la raíz.

Este cociente será mayor que las unidades de la raíz:

Siendo el número cuadrado perfecto..	1.º Cuando, del cuadrado de las unidades de la raíz, resulte un número de decenas igual o mayor que el duplo de las de la raíz.
No siendo el número cuadrado perfecto	2.º Cuando, de la suma del cuadrado de las unidades de la raíz, más el residuo, resulte un número de decenas igual o mayor que el duplo de las decenas de la raíz.

Ejemplo Analítico:

De conformidad con lo expuesto, procedamos a extraer la raíz cuadrada entera de un número entero mayor que 100, por ejemplo el 4,685.

En primer lugar, observemos que, separando las dos primeras cifras de la derecha, la raíz cuadrada entera del número de la izquierda, 46, que es 6, es las decenas de la raíz cuadrada entera del número 4,685. (**202.** — *Principio* 2.º) Si de este número restamos el cuadrado de las decenas de la raíz, $6^2 = 36$ centenas, en el resto, 1,085, quedan las partes siguientes: duplo de decenas de la raíz multiplicado por las unidades de la misma, cuadrado de las unidades de la raíz y el residuo, si el numero 4,685 no tiene raíz cuadrada exacta. (**202.** — *Principio* 3.º — *Casos* 1.º *y* 2.º)

Las decenas del resto, 108, proceden del duplo de las decenas de la raíz multiplicado por las unidades, y también habrá en ellas las que puedan resultar del cuadrado de las unidades, o del cuadrado de las unidades más el residuo si la raíz es inexacta. De todo modo, partiendo las decenas del resto, 108, por el duplo de las decenas de la raíz, $2 \times 6 = 12$, el cociente 9 será las unidades de la raíz, o un número mayor que estas unidades (**203**). Ahora bien, si 9 es la cifra de las unidades de la raíz, claro está que el cuadrado del número formado por las decenas de la raíz y el cociente, 69, estará contenido en el número propuesto. De lo contrario, el cociente 9 será, evidentemente, mayor que las unidades de la raíz; y como el cuadrado de 69 es 4761, número mayor que el propuesto, infiérese que el cociente 9 es mayor que la cifra de las unidades de la raíz. Disminuyendo el cociente 9 en una unidad, resulta el número 8, y elevando al cuadrado el número 68, formado por las decenas de la raíz y la nueva cifra, hallamos el número 4624, menor que el propuesto, de lo que inferimos que 8 es la cifra de las unidades de la raíz.

Disposición de la operación:

	$\sqrt{46,85}$	68		
	—36	108 / 12	69	68
	108,5	0 9	× 69	× 68
	—462 4		621	544
Residuo,	006 1		414	408
			4761	4624

De todo lo cual, se deduce la siguiente

204. Regla para extraer la raíz cuadrada entera de un número entero mayor que 100.—*Para extraer la raíz cuadrada entera de un número entero mayor que* 100, *se divide el número en grupos de a dos cifras empezando por la derecha; se extrae la raíz cuadrada del primer grupo de la izquierda, y se tiene la primera cifra de la raíz; se eleva esta cifra al cuadrado, y este cuadrado se resta del primer grupo de la izquierda. A la derecha del resto, se baja el grupo siguiente; se separa, con un punto, la primera cifra de la derecha, y el número que queda a la izquierda, se divide por el du-*

plo de la primera cifra de la raíz. El cociente hallado será la segunda cifra de la raíz, o un número mayor que ella. Para comprobar si dicho cociente es la segunda cifra de la raíz, se eleva al cuadrado el número formado por la primera cifra de la raíz y dicho cociente; y si este cuadrado puede restarse del número formado por los dos primeros grupos de la izquierda del número propuesto, el cociente hallado es la segunda cifra de la raíz; mas si dicho cuadrado es mayor que el número formado por las dos primeras secciones, el cociente hallado es mayor que la segunda cifra de la raíz, en cuyo caso, dicho cociente se disminuye en una unidad, y la nueva cifra se comprueba del mismo modo. Halladas las cifras primera y segunda de la raíz, se resta su cuadrado del número formado por las dos primeras secciones de la izquierda del número propuesto. A la derecha del resto, se baja el grupo siguiente; se separa, con un punto, la primera cifra de la derecha, y el número que queda a la izquierda se divide por el duplo de las dos primeras cifras de la raíz. El cociente hallado será la tercera cifra de la raíz o un número mayor que ella, lo que se comprueba como anteriormente; y así continuamos hasta haber bajado todas las secciones, haber hallado la última cifra de la raíz y el residuo correspondiente, si la raíz es inexacta.

205. Para comprobar si el cociente entero que resulta partiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, es la cifra de las unidades de la raíz o un número mayor, es preferible la regla siguiente:

Colocamos el cociente a la derecha del divisor, y éste, modificado así, lo multiplicamos por el mismo cociente. Si el producto no es mayor que el resto, el cociente hallado es la cifra de las unidades de la raíz; pero si dicho producto es mayor que el resto, el cociente es mayor que las unidades de la raíz.

En efecto; sea N el número del cual tratamos de extraer la raíz cuadrada; d, el número de las decenas de su raíz, y u, la cifra de las unidades de la misma. Esta raíz será $d + u$.

Llamemos q al cociente de dividir las decenas del resto por el duplo de las de la raíz. Si dividimos las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, el divisor es $2\,d$; colocando el cociente q a su derecha, queda el número $2\,d + q$, y multiplicando este número por q, tenemos:

$$(2\,d + q)\,q = 2\,d\,q + q^2.$$

Ahora bien; si este producto no es mayor que el resto (cuyo resto es el número propuesto menos el cuadrado de las decenas de su raíz), $N - d^2$, o lo que es igual $2\,d\,u + u^2$, añadiendo al producto y al resto el cuadrado de las decenas de la raíz, d^2, tendremos que:

$$d^2 + 2\,d\,q + q^2 \not> d^2 + 2\,d\,u + u^2$$

Pero $d^2 + 2\,d\,q + q^2 = (d + q)^2$ (**202.**—*Principio* 1.º); y $d^2 + 2\,d\,u + u^2 = (d + u)^2$; luego

$$(d + q)^2 \not> (d + u)^2$$

y como la raíz cuadrada de $(d + q)^2$ es $d + q$, y la raíz cuadrada de $(d + u)^2$ es $d + u$, tenemos que

$$d + q \not> d + u;$$

y por lo mismo, $q \not> u$; es decir, el *cociente* no es mayor que las *unidades* de la raíz; y como tampoco puede ser menor (**202**—*Principio* 3.º), tenemos que

$q = u$, conforme a la primera parte de la regla.

Ahora bien; si $2\,d\,q + q^2 > 2\,d\,u + u^2$, también
$d^2 + 2\,d\,q + q^2 > d^2 + 2\,d\,u + u^2$; y también
$(d + q)^2 > (d + u)^2$, y por lo mismo,
$d + q > d + u$, y, evidentemente,
$q > u$, conforme a la segunda parte de la regla.

Siempre que el cociente sea mayor que la cifra de las unidades de la raíz, se disminuirá en una unidad, y la nueva cifra se comprobará de igual modo.

206. Escolios. — En la extracción de la raíz cuadrada, conviene observar:

1.º Al dividir el número cuya raíz se extrae en grupos de a dos cifras, la primera sección de la izquierda tendrá una o dos cifras, según que el número de cifras sea par o impar.

2.º La raiz cuadrada de un número mayor que 100, tiene tantas cifras como grupos tiene el número.

3.º Al dividir las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, si el dividendo es menor que el divisor, la cifra que se busca de la raíz es *cero;* en cuyo caso, se pone *cero* en la raíz, se baja el grupo siguiente y se continúa la operación.

4.º Si el cociente de dividir las decenas del resto por el duplo de las de la raíz es mayor que 9, tomamos esta cifra como cociente de la división.

5.º El residuo de la raíz cuadrada de un número entero, es siempre menor que el duplo de su raíz cuadrada entera más 1. (**202.** — *Principio* 1.º — *Corol.* 3.º)

207. Caracteres de irracionalidad de la raíz cuadrada.—Un número entero no es cuadrado perfecto, y, por lo mismo, no tiene raiz cuadrada exacta:

1.º *Si la cifra de sus unidades es* 2, 3, 7 *u* 8.

2.º *Si termina en un número impar de ceros.*

3.º *Si la cifra de las unidades es* 5 *y no es* 2 *la cifra de las decenas.*

1.º La demostración de la proposición primera es evidente; pues como el cuadrado de la raiz de un número reproduce este número, y cualquiera que sea la cifra de las unidades de la raíz multiplicada por sí misma, no puede dar un producto que termine en 2, 3, 7 u 8, claro está que, si algún número termina con alguna de estas cifras, no es cuadrado perfecto.

2.º La proposición segunda se comprende también con facilidad. En efecto: si un número no termina en cero, su cuadrado tampoco termina en cero; y si un número termina en un número par o impar de ceros, su cuadrado siempre termina en un número par de ceros. Luego si un número termina con un número impar de ceros, no es cuadrado perfecto.

3.º Tampoco ofrece dificultad la demostración de la proposición tercera. En efecto; todo número que acabe en 5, sólo puede ser cuadrado perfecto de otro que también acabe en 5.

Llamemos N a un número que termine en 5; d, a la cifra de las decenas de su raíz cuadrada, y sea 5 la cifra de sus unidades. Tendremos:

$N = (d + 5)^2 = (d \times 10 + 5)^2 = (d^2 \times 100) + (2\,d \times 10 \times 5) + 25$. (**202.**— *Principio* 1.º)

O bien, $N = (d^2 \times 100) + (d \times 100) + 25$.

Pero $d^2 \times 100$ y $d \times 100$ son dos múltiplos de 100;
luego $d^2 \times 100 + d \times 100 = m.$ de 100;
y por lo mismo, $N = m.$ de $100 + 25$.

Cuya igualdad nos dice que, *para que el número N sea cuadrado perfecto, siendo* 5 *la cifra de sus unidades, la de sus decenas ha de ser, necesariamente,* 2.

Raíz cuadrada de los números fraccionarios

208. Raíz cuadrada de un quebrado común. — En la extracción de la raíz cuadrada de los quebrados comunes, distinguiremos cuatro casos:

1.º *Que numerador y denominador sean cuadrados perfectos.*

2.º *Que el denominador sea cuadrado perfecto y no lo sea el numerador.*

3.º *Que lo sea el numerador y no lo sea el denominador.*

4.º *Que ninguno de los dos términos del quebrado sea cuadrado perfecto.*

209. Resolución. — PRIMER CASO. — Si numerador y denominador son cuadrados perfectos, se extrae la raíz cuadrada del numerador y la del denominador, y se divide la primera por la segunda.

$$\text{V. g.: } \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}. \text{ Es evidente, pues } \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}.$$

SEGUNDO CASO. — Si el denominador es cuadrado perfecto y no lo es el numerador, se extrae la raíz entera del numerador y la exacta del denominador, y se divide la primera por la segunda. El número así obtenido se diferencia de la raíz verdadera en menos de una unidad fraccionaria de la naturaleza que exprese el denominador.

$$\text{EJEMPLOS: } \sqrt{\frac{42}{81}} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{81}} = \frac{6}{9}, \text{ es la raíz aproximada en menos de } \frac{1}{9}.$$

$$\sqrt{\frac{19}{36}} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{36}} = \frac{4}{6}, \text{ raíz aproximada en menos de } \frac{1}{6}.$$

TERCER CASO. — Si el numerador es cuadrado perfecto y no lo es el denominador, se extrae la raíz exacta del numerador y la entera del denominador, y se divide la primera por la segunda. La raíz verdadera se halla comprendida entre el quebrado obtenido y otro de igual numerador y cuyo denominador tenga una unidad más.

También puede procederse multiplicando los dos términos del quebrado por su denominador (lo que no altera el quebrado), y el caso queda reducido al anterior.

$$\text{EJEMPLOS: } \sqrt{\frac{25}{60}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{60}} = \frac{5}{7}. \text{ La raíz verdadera se halla comprendida}$$

entre $\frac{5}{7}$ y $\frac{5}{8}$.

$$\sqrt{\frac{25}{60}} = \sqrt{\frac{25 \times 60}{60 \times 60}} = \frac{\sqrt{1500}}{\sqrt{60^2}} = \frac{38}{60}, \text{ raíz aproximada en menos de } \frac{1}{60}.$$

CUARTO CASO. — Si ninguno de los términos del quebrado es cuadrado perfecto, puede hacerse que alguno lo sea; pero generalmente se procede haciendo que lo sea el denominador, multiplicando por éste los dos términos del quebrado.

$$\text{EJEMPLO: } \sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{7 \times 9}{9 \times 9}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{9^2}} = \frac{7}{9}, \text{ raíz aproximada en menos}$$

de $\frac{1}{9}$.

210. Raíz cuadrada de los números mixtos.—*Para extraer la raíz cuadrada de un número mixto, se reduce el mixto a quebrado, y se extrae la raíz cuadrada del quebrado equivalente.*

211. *La raíz cuadrada entera de un número mixto, es igual a la raíz cuadrada entera de su número entero* (*).

(*) Se supone que el quebrado que acompaña al entero es propio.

Sea el número mixto $36\frac{2}{5}$, en el que el entero 36 es cuadrado perfecto; digo que su raíz cuadrada entera es 6, raíz de 36. En efecto; el mixto $36\frac{2}{5}$ está comprendido entre los cuadrados enteros consecutivos 36 y 49, y por tanto, su raíz cuadrada entera estará comprendida entre 6 y 7; luego 6, raíz cuadrada de 36, es la raíz cuadrada entera de $36\frac{2}{5}$.

Sea, ahora, el mixto $40\frac{1}{2}$, en el cual su entero no es cuadrado perfecto.

$40\frac{1}{2}$ está comprendido entre los cuadrados enteros consecutivos 36 y 49; luego la raíz cuadrada entera de $40\frac{1}{2}$ estará comprendida entre 6 y 7; luego 6, raíz cuadrada entera de 40, es raíz entera de $40\frac{1}{2}$.

212. Raíz cuadrada de las fracciones decimales. — Toda fracción decimal puede considerarse como el cuadrado de su raiz cuadrada, y en este concepto, debe tener, necesariamente, un número par de cifras; pues siendo un producto de dos factores iguales, claro está que tendrá duplo número de cifras que un factor.

La extracción de raíces cuadradas de las fracciones decimales, se funda en la extracción de las de los quebrados comunes; pues si el número de sus cifras no fuese múltiplo de 2, puede hacerse que lo sea añadiendo un cero a su derecha, y luego se le puede dar la forma de quebrado común, cuyo denominador es un cuadrado perfecto.

Sea la fracción 0'4256 que tiene un número par de cifras o múltiplo de 2. Transformada en quebrado común, será $\frac{4256}{10000}$.

Luego $\sqrt{\frac{4256}{10000}} = \frac{\sqrt{4256}}{\sqrt{10000}} = \frac{65}{100} = 0'65$, con menor error que $\frac{1}{100}$.

Si fuese la fracción 0'252, añadiendo un cero a su derecha, sería:

$$0'252 = 0'2520 = \frac{2520}{10000}.$$

Luego $\sqrt{\frac{2520}{10000}} = \frac{\sqrt{2520}}{\sqrt{10000}} = \frac{50}{100} = 0'50$, con menor error que $\frac{1}{100}$.

De todo lo cual, se deduce la siguiente

213. Regla. — *Para extraer la raíz cuadrada de un número decimal, se le añade un cero a su derecha si el número de sus cifras fuese impar; se extrae la raíz cuadrada del número que resulte como si fuese entero, y luego se separan, con una coma, de la derecha de la raiz obtenida, la mitad de las cifras decimales que tenga la fracción.*

Raíces cuadradas inconmensurables

214. Definición. — La raiz de cualquier grado de un número entero o fraccionario que no tiene exacta esta raíz, es una *raíz inconmensurable.* (Véase el número **13.**)

Estas raíces se extraen aproximándolas con menor error que una parte cualquiera de la unidad, esto es, con menor error que $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc.

215. *Para extraer la raíz cuadrada inconmensurable de un número con un error menor que una unidad fraccionaria dada, se multiplica este número por el cuadrado del denominador de la fracción; se extrae la raíz cuadrada entera del producto obtenido, y se divide esta raíz por el denominador de la fracción.*

Propongámonos extraer la raíz cuadrada inconmensurable de 6, con un error menor que $\frac{1}{5}$.

Tendremos, según la regla, $\frac{\sqrt{6 \times 25}}{5} = \frac{\sqrt{150}}{5} = \frac{12}{5}$.

En efecto; 6×25, ó 6×5^2, está comprendido entre 12^2 y 13^2, luego $\frac{6 \times 5^2}{5^2}$, o su igual, 6, estará comprendido entre $\frac{12^2}{5^2}$ y $\frac{13^2}{5^2}$, y la $\sqrt{6}$ estará comprendida entre $\sqrt{\frac{12^2}{5^2}}$ y $\sqrt{\frac{13^2}{5^2}}$; y como las raíces de estos dos quebrados son, respectivamente, $\frac{12}{5}$ y $\frac{13}{5}$, y como estos dos quebrados se diferencian en $\frac{1}{5}$, claro está que la raíz cuadrada de 6 es $\frac{12}{5}$, con menor error que $\frac{1}{5}$.

EJEMPLOS: 1.° *Extraer la raíz cuadrada de 8 en menos de* $\frac{1}{5}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt{8 \times 25}}{5} = \frac{\sqrt{200}}{5} = \frac{14}{5} = 2'8.$$

2.° *Extraer la raíz cuadrada de* 6'5 *en menos de* $\frac{1}{4}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt{6'5 \times 16}}{4} = \frac{\sqrt{104}}{4} = \frac{10}{4} = 2'5.$$

3.° *Extraer la raíz cuadrada de* $\frac{3}{4}$ *con menor error que* $\frac{1}{7}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt{\frac{3}{4} \times 49}}{7} = \frac{\sqrt{\frac{3 \times 49}{4}}}{7} = \frac{\sqrt{36'75}}{7} = \frac{6}{7} = 0'857.$$

4.° *Extraer la raíz cuadrada de 5 con menor error que* $\frac{1}{100}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt{5 \times 10000}}{100} = \frac{\sqrt{50000}}{100} = \frac{223}{100} = 2'23.$$

5.° *Extraer la raíz cuadrada de 24 con menor error que* $\frac{1}{1000}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt{24 \times 1000000}}{1000} = \frac{\sqrt{24000000}}{1000} = \frac{4898}{1000}\ 4'898.$$

En los ejemplos anteriores, hemos visto la manera de extraer la raíz cuadrada inconmensurable de un número entero o quebrado común, con menor error que un límite fraccionario cualquiera. Si el número fuese una fracción decimal, se procedería igualmente; no obstante, añadiremos lo siguiente:

216. Raíz cuadrada inconmensurable de las fracciones decimales.—Si la raíz cuadrada de un número decimal no es exacta, puede obtenerse la inconmensurable aproximada con menor error que un límite fraccionario decimal cualquiera, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc.; para lo cual, se procede igualmente que si el número fuese entero o fracción común (**215**).

Propongámonos extraer la $\sqrt{0{'}45}$ con menor error que $\frac{1}{1000}$.

$$\frac{\sqrt{0{'}45 \times 1000000}}{1000} = \frac{\sqrt{450000}}{1000} = \frac{670}{1000} = 0{'}670.$$

Para lo cual, podemos dar la siguiente

217. Regla. — *Para extraer la raíz cuadrada inconmensurable de un número decimal, aproximada hasta un límite decimal determinado, se procede como si el número fuese entero, añadiendo antes a su derecha los ceros necesarios, hasta formar, con las notas decimales que ya existan, tantos grupos de a dos cifras como notas decimales haya de tener la raíz.*

Ejemplo: *Extraer la raíz cuadrada de* 0'28 *aproximada hasta las centésimas.*

Disposición:

	√ 0'28,00	0'52	
	— 25	30 / 10	53
	030,0	0 3	× 53
	— 270 4		159
Residuo	009 6		265
			2809
			52
			× 52
			104
			260
			2704

218. Al extraer la raíz cuadrada de un número entero, lo consideraremos como cuadrado perfecto, y si no lo fuese, después de hallada la raíz entera y el residuo, podemos aproximar esta raíz hasta un límite decimal cualquiera, para lo cual, consideraremos el número multiplicado por el cuadrado del denominador de la fracción decimal que indique dicho límite; continuaremos la operación, y luego dividiremos la raíz hallada por el denominador de la fracción (**215**). Podemos dar, pues, la siguiente

219. Regla. — *Si la raíz cuadrada de un número entero no es exacta, después de hallada la entera y el residuo correspondiente, se puede hallar la raíz inconmensurable, añadiendo a la derecha del número cuya raíz se extrae tantos grupos de a dos ceros como notas decimales se quiera aproximar la raíz. Hecho esto, se continúa la operación, y luego se separan, de derecha a izquierda de la raíz hallada, tantas cifras para decimales como grupos de a dos ceros se hayan añadido.*

EJEMPLO: *Extraer la raíz cuadrada de 245 aproximada hasta las centésimas, si no la tiene exacta.*

Disposición:

$\sqrt{2.45.00.00}$	15'65	
-1	14 / 2	17 × 17 = 119 + 17 = 289
145	0 7	16 × 16 = 96 + 16 = 256
-225		15 × 15 = 75 + 15 = 225
0200.0	200 / 30	156 × 156
-24336	20 6	936, 780, 156 = 24336
001640.0	1640 / 312	1565 × 1565
-2449225	80 5	7825, 9390, 7825, 1565 = 2449225
Residuo 0000775		

Raiz cúbica de los números enteros

220. Definición. — Raíz cúbica de un número es otro número cuya tercera potencia produce el número propuesto. Así, la raíz cúbica de 125 es 5, pues $5^3 = 125$.

221. Casos que ofrece la extracción de la raíz cúbica de los números enteros. — En la extracción de la raíz cúbica de los números enteros, pueden ocurrir dos casos:

1.º *Que el número sea menor que* 1000.
2.º *Que el número sea mayor que* 1000.

222. Resolución del primer caso. — Para extraer la raíz cúbica entera de un número entero menor que 1000, basta saber de memoria los cubos de los diez primeros números. Los números que los producen son las raíces respectivas. Dichos cubos son:

Cubos	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000.
Raíces	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

De consiguiente, si el número del cual ha de extraerse la raíz cúbica es uno de los cubos perfectos mencionados, *su raíz cúbica es uno de los diez primeros números*. Así, la raíz cúbica de 125 es 5; la de 343 es 7.

Pero si el número no es cubo perfecto, *su raíz cúbica entera es la del mayor cubo entero contenido en él*. Así, la raíz cúbica de 136 está comprendida entre 5 y 6, y como 5 es la raíz cúbica de 125, y 125 es el mayor cubo entero contenido en 136, la raíz cúbica de 136 es 5. Por lo mismo, la raíz cúbica entera de 475 es 7; la de 890 es 9; etc.

223. Raíz cúbica exacta e inexacta. — Un número tiene raíz cúbica *exacta*, si el cubo de su raíz produce dicho número, es decir, si el número es cubo perfecto. Así, 6 y 7 son las raíces cúbicas exactas de 216 y 343, respectivamente.

Pero si el cubo de la raíz no produce exactamente el número, esto es, si el número no es cubo perfecto, su raíz es *inexacta*. Así, 6 y 7 son las raíces cúbicas inexactas de 295 y 470, respectivamente.

224. Residuo de la raíz cúbica. — *Residuo* de la raíz cúbica inexacta de un número, es el exceso de éste sobre el cubo de su raíz. Así, 128 es el residuo de la raíz cúbica entera de 640; pues $640 = 8^3 + 128$ (*).

225. Extracción de la raíz cúbica de un número entero mayor que 1000.—La regla práctica que se da para este objeto, se funda en los tres principios siguientes:

PRINCIPIO PRIMERO. — *El cubo de la suma de dos números se compone de cuatro partes: cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero multiplicado por el segundo, más el triplo del primero multiplicado por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

Si representamos estos números, respectivamente, por a y b, decimos que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

En efecto: $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$. Pero, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. (202.—*Principio* 1.º).

Luego: $(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = (a+b)\,a^2 + (a+b)\,2ab + (a+b)\,b^2$ (59).

Verificando estas multiplicaciones, tendremos:

$$\begin{array}{lrcl} & (a+b)\,a^2 & = & a^3 + a^2b \\ & (a+b)\,2ab & = & 2a^2b + 2ab^2 \\ \text{y} & (a+b)\,b^2 & = & ab^2 + b^3. \end{array}$$

Luego, $(a^2+2ab+b^2)(a+b)$ o $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, conforme al enunciado (**)

De este teorema se deducen tres corolarios:

COROLARIO 1.º — *El cubo de todo número compuesto de decenas y unidades consta de las partes siguientes: del cubo de las decenas, que es un número de millares; del triplo del cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades, que es un número de centenas; del triplo de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades, que es un número de decenas, y del cubo de las unidades, que es un número de unidades.*

En efecto; tomemos, por ejemplo, el número 45, compuesto de 4 decenas y 5 unidades, cuyo cubo es $45 \times 45 \times 45 = 91{,}125$, y por lo mismo, $\sqrt[3]{91{,}125} = 45$.

$$\left.\begin{array}{r}(4 \text{ decs.} + \\ 5 \text{ unids.})^3 \\ = 45^3 = \\ 91{,}125 = \end{array}\right\{\begin{array}{lll} 1.^a \text{ parte.} & 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ millares} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = & 64{,}000 \\ 2.^a \quad » & (3 \times 4^2) \times 5 = (3 \times 16) \times 5 = 48 \times 5 = 240 \text{ centen.} = & 24{,}000 \\ 3.^a \quad » & 3 \times 4 \times 5^2 = 12 \times 25 = 300 \text{ decenas} \ldots\ldots\ldots = & 3{,}000 \\ 4.^a \quad » & 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ unidades} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = & 125 \\ & \text{Suma igual a la } 3.^a \text{ potencia de } 45 \ldots\ldots\ldots\ldots & \overline{91{,}125} \end{array}$$

conforme al enunciado.

(*) En lo sucesivo, tratándose de números enteros, llamaremos, a veces, *raíz cúbica* de un número, en vez de *raíz cúbica entera*, a la raíz cúbica del mayor cubo entero que dicho número contenga.

(**) El cubo de la diferencia de dos números se compone: *del cubo del primero, menos el triplo del cuadrado del primero multiplicado por el segundo, más el triplo del primero multiplicado por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo.*

Así, $(4 - 2^3) = 4^3 - (3 \times 4^2 \times 2) + (3 \times 4 \times 2^2) - 2^3$.

COROLARIO 2.º — *La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos, es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más la unidad.*

Sean los dos números enteros consecutivos n y $n + 1$.

Digo que $(n + 1)^3 - n^3 = 3\,n^2 + 3\,n + 1$.

En efecto;

$(n + 1)^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1$. Restando de ambos miembros de esta igualdad el cubo del número menor, n^3, tendremos:

$(n + 1)^3 - n^3 = 3\,n^2 + 3\,n + 1$, que es lo que se quería demostrar.

EJEMPLO: $8^3 - 7^3 = 3 \times 7^2 + 3 \times 7 + 1$.

COROLARIO 3.º — *El residuo de la raíz cúbica de un número entero, es menor que el triplo del cuadrado de su raíz entera, más el triplo de dicha raíz, más una unidad.*

Sea 156 el número entero, cuya raíz cúbica entera es 5. El residuo será $156 - 5^3 = 31$; digo que $31 < 3 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1$.

En efecto: siendo 5 la raíz cúbica de 156, es evidente que $156 < 6^3$. Si de ambos miembros de esta desigualdad quitamos 5^3, tendremos $156 - 5^3 < 6^3 - 5^3$.

Pero $156 - 5^3 = 31$, residuo de la $\sqrt[3]{156}$, y $6^3 - 5^3 = 3 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1$, según el corolario anterior; luego substituyendo ambos miembros de la última desigualdad por sus equivalentes, tendremos:

$31 < 3 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1$, que es lo que queríamos demostrar.

PRINCIPIO SEGUNDO. — *Separando las tres primeras cifras de la derecha de un número, la raíz cúbica entera del número que queda a la izquierda, es el número de decenas de la raíz cúbica entera del número propuesto.*

Tengamos, para ello, en cuenta que el *cubo de un número de decenas da un número de millares* (**225**.—*Principio* 1.º—*Corol.* 1.º) *y que, por lo mismo, la raíz cúbica de un número de millares es un número de decenas.*

Tomemos el número 24695. Separando las tres primeras cifras de su derecha, queda a la izquierda el número 24, cuya raíz cúbica es 2. *Digo que* 2 *es el número de decenas de la raíz cúbica entera de* 24695.

En efecto:

El cubo de 2, que es 8, está contenido en 24, y 2^3 millares, u 8 millares, está contenido en 24 millares, y con mayor razón estará contenido en el número propuesto. *Luego la raíz cúbica del número propuesto no es menor que la de 8 millares, que es 2 decenas.*

Si 2 es la raíz cúbica de 24, el cubo de 3, ó 3^3, es mayor que 24; luego 3^3 millares, o 27 millares es mayor que 24 millares, y también mayor que el número propuesto, ya que lo que despreciamos de él, 695 unidades, no llega a un millar. *Luego la raíz cúbica del número propuesto es menor que la de 27 millares, que es 3 decenas.*

Primero hemos visto que la raíz cúbica entera de 24695 no es menor que 2 decenas, y ahora vemos que no llega a 3 decenas. *Luego 2 es el número de decenas de la raíz cúbica entera del número propuesto.*

PRINCIPIO TERCERO. — *Restando de un número entero el cubo de las decenas de su raíz cúbica, y dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente entero será las unidades de la raíz, o un número mayor que estas unidades.*

Adviértase que se trata de un número entero mayor que 1000, y que, por lo mismo, su raíz cúbica entera es 10 o mayor que 10.

Debemos admitir dos casos:

1.º *Que el número en cuestión sea cubo perfecto.*

2.º *Que no sea cubo perfecto.*

Si el número es cubo perfecto, como dicho número es, exactamente, el cubo de su raíz, se compone de estas cuatro partes de su raíz: (**225**.—*Principio* 1.º—*Corolario* 1.º)

1.ª, cubo de decenas de la raíz, que es un número de millares; 2.ª, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz por las unidades de la misma, que es un número de centenas; 3.ª, triplo de las decenas de dicha raíz por el cuadrado de sus unidades, que es un número de decenas, y 4.ª, cubo de las unidades de la raíz, que es un número de unidades.

Luego si restamos del número la parte primera, en el resto quedan las otras tres: triplo del cuadrado de las decenas de la raíz por sus unidades, más triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más cubo de unidades.

Fijándonos, ahora, en la suma de las dos últimas partes de este resto (*triplo de decenas por cuadrado de unidades, más cubo de unidades*), observaremos que pueden ocurrir tres cosas distintas:

1.ª *Que de la suma del triplo de las decenas de la raíz por el cuadrado de las unidades de la misma, más el cubo de estas unidades, no resulte ninguna centena.*

2.ª *Que de dicha suma resulte un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.*

3.ª *Que de dicha suma resulte un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.*

En el primer caso, las centenas del resto son, exactamente, las que proceden de la segunda parte (*triplo del cuadrado de las decenas por las unidades*), las que hemos de considerar como un producto formado por dos factores: 1.º, *triplo del cuadrado de las decenas de la raíz*, y 2.º, *las unidades de la raíz*. Luego partiendo las centenas del resto por el primer factor que las produce (*el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz*), el cociente será *las unidades de la raíz*, o el otro factor, siendo la división exacta.

DEMOSTRACIÓN:

$21^3 = 9{,}261$; luego $\sqrt[3]{9{,}261} = 21$.

Número dado: 9,261 =	1.ª parte. $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ millares	= 8,000
	2.ª » $(3 \times 2^2) \times 1 = 12 \times 1 = 12$ centenas	= 1,200
	3.ª » $3 \times 2 \times 1^2 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ decenas	= 60
	4.ª » $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$ unidad	= 1
	Número dado	9,261
	Restando de él la 1.ª parte	— 8,000
	Resto igual a la suma de las tres partes últimas	1,261

Centenas de este resto 12

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz..... $(3 \times 2^2) = 12$

División:

Centenas de resto, 12 / 12, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.

0 — 1, unidades de la raíz.

Si de la suma de las dos partes últimas del resto antes mencionado, resulta un número de centenas *menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz*, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente dará también las unidades de la raíz, o el otro factor; mas la división será inexacta, siendo el residuo de la misma las centenas procedentes de la suma de las dos partes últimas del resto en cuestión.

DEMOSTRACIÓN:

$73^3 = 389{,}017$; luego $\sqrt[3]{389{,}017} = 73$.

Número dado: 389,017 =	1.ª parte. $7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$ millares	= 343,000
	2.ª » $(3 \times 7^2) \times 3 = (3 \times 49) \times 3 = 147 \times 3 = 441$ cent.	= 44,100
	3.ª » $3 \times 7 \times 3^2 = 21 \times 9 = 189$ decenas	= 1,890
	4.ª » $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ unidades	= 27
	Número dado	389,017
	Restando de él la 1.ª parte	— 343,000
	Resto igual a la suma de las tres partes últimas	46,017

Centenas de este resto...................... 460

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz... $(3 \times 7^2) = 147$

División:

Centenas del resto, 460 / 147, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.

Residuo 19 — 3, unidades de la raíz.

Si de la suma de las dos partes últimas del resto mencionado resulta un número de centenas *igual o mayor* que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente *será mayor* que las unidades de la raíz.

DEMOSTRACIÓN:

$39^3 = 39 \times 39 \times 39 = 59{,}319$; luego $\sqrt[3]{59{,}319} = 39$.

$$\text{Número dado: } 59{,}319 = \begin{cases} 1.^a \text{ parte. } 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ millares} \ldots\ldots = 27{,}000 \\ 2.^a \;\; » \;\; (3 \times 3^2) \times 9 = (3 \times 9) \times 9 = 27 \times 9 = 243 \text{ cent.} \ldots = 24{,}300 \\ 3.^a \;\; » \;\; 3 \times 3 \times 9^2 = 9 \times 81 = 729 \text{ decenas} \ldots = 7{,}290 \\ 4.^a \;\; » \;\; 9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729 \text{ unidades} \ldots = 729 \end{cases}$$

Número dado......	59,319
Restando de él la 1.ª parte................................	— 27,000
Resto igual a la suma de las tres partes últimas..............	32,319

Centenas de este resto 323

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz .... $(3 \times 3^2) = 27$

División:

Centenas del resto, 323 / 27, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.
053 — 11, número mayor que las unidades de la raíz.
26

Si el número de que hacemos mención (**225.**—*Principio* 3.º—2.º *caso*) no es cubo perfecto, constará de las mismas cuatro partes con respecto de su raíz, (**225.** — *Principio* 1.º— *Corol* 1.º) más el residuo de dicha raíz. Si del número restamos la parte primera, *el cubo de las decenas de su raíz*, en el resto quedarán las otras cuatro partes: *triplo del cuadrado de las decenas de la raíz por sus unidades, más triplo de decenas por cuadrado de unidades, más cubo de unidades, más el residuo de la raíz.*

Fijándonos, ahora, en la suma de las tres últimas partes de este resto (*triplo de decenas de la raíz por el cuadrado de sus unidades, más el cubo de estas unidades, más el residuo*), observaremos que pueden suceder, como en el caso 1.º, tres cosas distintas:

1.ª *Que de la suma del triplo de las decenas de la raíz por el cuadrado de las unidades de la misma, más el cubo de estas unidades, más el residuo, no resulte ninguna centena.*

2.ª *Que de dicha suma resulte un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.*

3.ª *Que de dicha suma resulte un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.*

En el primer caso, las centenas del resto son, como cuando el número es cubo perfecto, exactamente las que proceden de la segunda parte (*triplo del cuadrado de las decenas por las unidades*), las que hemos de considerar como un producto de dos factores: 1.º, *triplo del cuadrado de las decenas de la raíz*, y 2.º, *las unidades de la raíz.* Luego, partiendo las centenas del resto (el producto), por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz (primer factor), el cociente será el otro factor, o las unidades de la raíz, siendo la división exacta.

DEMOSTRACIÓN:

$31^3 =$	29,791
Número que le añado para que no tenga raíz exacta...............	+ 3
	29,794

Luego $\sqrt[3]{29{,}794} = 31$, raíz entera. Residuo, 3.

$$\text{Número dado: } 29{,}794 = \begin{cases} 1.^a \text{ parte. } 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ millares} \ldots\ldots = 27{,}000 \\ 2.^a \;\; » \;\; (3 \times 3^2) \times 1 = (3 \times 9) \times 1 = 27 \times 1 = 27 \text{ cent.} = 2{,}700 \\ 3.^a \;\; » \;\; 3 \times 3 \times 1^2 = 9 \times 1 = 9 \text{ decenas} \ldots = 90 \\ 4.^a \;\; » \;\; 1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ unidad} \ldots = 1 \\ 5.^a \;\; » \;\; \text{Residuo} \ldots\ldots 3 \end{cases}$$

Número dado..........	29,794
Restando de él la 1.ª parte..................................	— 27,000
Resto igual a la suma de las 4 partes últimas.................	2,794

Centenas del resto 27

Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz...... $(3 \times 3^2) = 27$

División:

Centenas del resto, 27 / 27, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.
0 — 1, unidades de la raíz.

Si de la suma de las tres partes últimas del resto mencionado resulta un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente dará las unidades de la raíz, y la división será inexacta, siendo el residuo de la misma las centenas procedentes de la suma de las dos partes últimas más el residuo.

DEMOSTRACIÓN:

$62^3 =$ 238,328
Número que le añado para que no tenga raíz exacta............... + 5

Luego $\sqrt[3]{238{,}333} = 62$, raíz entera. Residuo, 5. ... 238,333

$$\text{Número dado: } 238{,}333 = \begin{cases} 1.^a \text{ parte. } 6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ millares} \ldots = 216{,}000 \\ 2.^a \text{ » } (3 \times 6^2) \times 2 = (3 \times 36) \times 2 = 108 \times 2 = 216 \text{ cent.} = 21{,}600 \\ 3.^a \text{ » } 3 \times 6 \times 2^2 = 3 \times 6 \times 4 = 72 \text{ decenas} \ldots = 720 \\ 4.^a \text{ » } 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ unidades} \ldots = 8 \\ 5.^a \text{ » Residuo} \ldots 5 \end{cases}$$

Número dado...... 238,333
Restando de él la 1.ª parte.................................. − 216,000

Resto igual a la suma de las 4 partes últimas................ 22,333
Centenas de este resto........................ 223
Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz..... $(3 \times 6^2) = 108$

División:

Centenas del resto, 223 / 108, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.
007 — 2, unidades de la raíz.

Si de la suma de las tres partes últimas del resto mencionado resulta un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, partiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente será *mayor* que las unidades de la raíz.

DEMOSTRACIÓN:

$39^3 =$ 59,319
Número que le añado para que no tenga raíz exacta............... + 32

Luego $\sqrt[3]{59{,}351} = 39$, raíz entera. Residuo, 32. ... 59,351

$$\text{Número dado: } 59{,}351 = \begin{cases} 1.^a \text{ parte. } 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ millares} \ldots = 27{,}000 \\ 2.^a \text{ » } (3 \times 3^2) \times 9 = (3 \times 9) \times 9 = 27 \times 9 = 243 \text{ cent.} = 24{,}300 \\ 3.^a \text{ » } 3 \times 3 \times 9^2 = 9 \times 81 = 729 \text{ decenas} \ldots = 7{,}290 \\ 4.^a \text{ » } 9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729 \text{ unidades} \ldots = 729 \\ 5.^a \text{ » Residuo} \ldots 32 \end{cases}$$

Número dado...... 59,351
Restando de él la 1.ª parte.................................. − 27,000

Resto igual a la suma de las 4 partes últimas................ 32,351
Centenas de este resto........................ 323
Triplo del cuadrado de las decenas de la raíz...... $(3 \times 3^2) = 27$

División:

Centenas del resto, 323 / 27, triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.
053 — 11, número mayor que las unidades de la raíz.
Residuo 26

226. Hallar la cifra de las unidades de la raíz. — De lo que acabamos de demostrar, se deduce claramente que, *para hallar la cifra de las unidades de la raíz cúbica de un número entero mayor que* 1000, *se resta de dicho número el cubo de las decenas de su raíz, y se dividen las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz. El cociente entero será las unidades de la raíz, o un número mayor que estas unidades.*

Este cociente será las unidades de la raíz.

Siendo el número cubo perfecto...... 1.º Cuando, de la suma del triplo de las decenas de la raíz por el cuadrado de sus unidades, más el cubo de estas unidades, no resulte ninguna centena.
2.º Cuando, de dicha suma, resulte un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.

No siendo el número cubo perfecto....... 3.º Cuando, de la suma del triplo de las decenas de la raíz por el cuadrado de las unidades de la misma, más el cubo de estas unidades, más el residuo, no resulte ninguna centena.
4.º Cuando, de esta suma, resulte un número de centenas menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.

Este cociente será mayor que las unidades de la raíz:

Siendo el número cubo perfecto...... 1.º Cuando, de la suma del triplo de las decenas de la raíz por el cuadrado de sus unidades, más el cubo de estas unidades, resulte un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.

No siendo el número cubo perfecto..... 2.º Cuando, de la suma del triplo de las decenas de la raíz por el cuadrado de sus unidades, más el cubo de estas unidades, más el residuo, resulte un número de centenas igual o mayor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz.

EJEMPLO ANALÍTICO: De conformidad con lo expuesto, procedamos a extraer la raíz cúbica entera de un número entero mayor que 1000, por ejemplo, el número 78,956.

En primer lugar, observamos que, separando las tres primeras cifras de la derecha, la raíz cúbica entera del número de la izquierda, 78, que es 4, es el número de decenas de la raíz cúbica entera del número 78,956. (**225**.— *Principio* 2.º) Si de este número restamos el cubo de las decenas de la raíz, $4^3 = 64$ millares, en el resto 14,956 quedan las partes siguientes: triplo del cuadrado de las decenas de la raíz multiplicado por las unidades de la misma; triplo de las decenas de la raíz multiplicado por el cuadrado de las unidades de la misma; cubo de las unidades, y el residuo, si el número 78,956 no tiene raíz cúbica exacta. (**225**.—*Principio* 3.º—*Casos* 1.º y 2.º)

Las centenas del resto, 149, proceden del triplo del cuadrado de las decenas de la raíz multiplicado por las unidades de la misma, y también habrá en ellas las que puedan resultar del triplo de las decenas multiplicado por el cuadrado de las unidades de la raíz, más el cubo de las unidades de la misma; y si el número no tiene raíz cúbica exacta, las centenas del resto serán las que resulten de la suma anterior más el residuo de la raíz. De todo modo, partiendo las centenas del resto, 149, por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz $(3 \times 4^2) = 48$, el cociente 3 será las unidades de la raíz, o un número mayor que estas unidades (**226**).

Ahora bien; si 3 es la cifra de las unidades de la raíz, claro está que el cubo del número formado por las decenas de la raíz y el cociente, 43, estará contenido en el número propuesto. De lo contrario, el cociente 3 será, evidentemente, mayor que las unidades de la raíz; y como el cubo de 43 es 79,507, número mayor que el propuesto, infiérese que el cociente 3 es mayor que las unidades de la raíz. Disminuyendo dicho cociente en una unidad, resulta el número 2, y elevando al cubo el número 42, formado por las decenas de la raíz y la nueva cifra, hallamos el número 74,088, menor que el propuesto, de lo que inferimos que 2 es la cifra de las unidades de la raíz.

Disposición de la operación:

	$\sqrt[3]{78,956}$	42		
	— 64	149 / 48	43	42
	14,956	05 3	× 43	× 42
	— 74,088		129	84
Residuo	04,868		172	168
			1849	1764
			× 43	× 42
			5547	3528
			7396	7056
			79507	74088

De todo lo cual, se deduce la siguiente

227. Regla para extraer la raíz cúbica entera de un número entero mayor que 1000. — *Para extraer la raíz cúbica entera de un número entero mayor que* 1000, *se divide dicho número en grupos de a tres cifras empezando por la derecha; se extrae la raíz cúbica entera del primer grupo de la izquierda, y se tiene la primera cifra de la raíz; se eleva esta cifra al cubo, y este cubo se resta del primer grupo de la izquierda. A la derecha del resto, se baja el grupo siguiente; se separan, con un punto, las dos primeras cifras de la derecha, y el número que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raíz. El cociente hallado será la segunda cifra de la raíz, o un número mayor que ella.*

Para comprobar si dicho cociente es la segunda cifra de la raíz, se eleva al cubo el número formado por la primera cifra de la raíz y dicho cociente; y si este cubo puede restarse del número formado por los dos primeros grupos de la izquierda del número propuesto, el cociente hallado es la segunda cifra de la raíz; mas si dicho cubo es mayor que el número formado por las dos primeras secciones, el cociente hallado es mayor que la segunda cifra de la raíz, en cuyo caso dicho cociente se disminuye en una unidad, y la nueva cifra se comprueba del mismo modo.

Halladas la primera y segunda cifras de la raíz, se resta su cubo del número formado por las dos primeras secciones de la izquierda del número propuesto; a la derecha del resto, se baja el grupo siguiente; se separan, con un punto, las dos primeras cifras de la derecha, y el número que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de las dos primeras cifras de la raíz. El cociente hallado será la tercera cifra de la raíz, o un número mayor que ella, lo que se comprueba como anteriormente; y así continuamos hasta haber bajado todas las secciones, haber hallado la última cifra de la raíz y el residuo correspondiente si la raíz es inexacta.

228. Escolios.—En la extracción de la raíz cúbica, conviene observar:

1.º Al dividir el número cuya raíz se extrae, en grupos de a tres cifras, la primera sección de la izquierda tendrá una, dos o tres cifras.

2.º La raíz cúbica de un número mayor que 1000 tiene tantas cifras como grupos tiene el número.

3.º Al dividir las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, si el dividendo es menor que el divisor, la cifra que se busca de raíz es *cero;* en cuyo caso se pone *cero* en la raíz, se baja el grupo siguiente, y se continúa la operación.

4.º Si el cociente de dividir las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz es mayor que 9, tomamos esta cifra como cociente de la división.

5.º El residuo de la raíz cúbica de un número entero es siempre menor que el triplo del cuadrado de la raíz, más el triplo de la raíz, más 1.

Raíz cúbica de los números fraccionarios

229. Raíz cúbica de un quebrado común.—En la extracción de la raíz cúbica de los quebrados comunes, distinguiremos cuatro casos:

1.º *Que numerador y denominador sean cubos perfectos.*
2.º *Que el denominador sea cubo perfecto y no lo sea el numerador.*
3.º *Que lo sea el numerador y no lo sea el denominador.*
4.º *Que ninguno de los dos términos del quebrado sea cubo perfecto.*

230. Resolución. — PRIMER CASO. — Si numerador y denominador son cubos perfectos, se extrae la raíz cúbica del numerador y la del denominador, y se divide la primera por la segunda.

V. g.: $\sqrt[3]{\frac{125}{729}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{5}{9}$. Es evidente, pues $\left(\frac{5}{9}\right)^3 = \frac{125}{729}$.

SEGUNDO CASO. — Si el denominador es cubo perfecto y no lo es el numerador, se extrae la raíz entera del numerador y la exacta del denominador, y se divide la primera por la segunda. El número así obtenido se diferencia de la raíz verdadera en menos de una unidad fraccionaria de la naturaleza que exprese el denominador.

EJEMPLOS: $\sqrt[3]{\frac{128}{343}} = \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}$, es la raíz aproximada en menos de $\frac{1}{7}$.

$\sqrt[3]{\frac{480}{729}} = \frac{\sqrt[3]{480}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{7}{9}$, raíz aproximada en menos de $\frac{1}{9}$.

TERCER CASO. — Si el numerador es cubo perfecto y no lo es el denominador, se extrae la raíz exacta del numerador y la aproximada del denominador, y se divide la primera por la segunda. La raíz verdadera se halla comprendida entre el quebrado obtenido y otro de igual numerador y cuyo denominador tenga una unidad más.

También puede procederse multiplicando los dos términos del quebrado por el cuadrado de su denominador (lo que no altera el quebrado), y el caso queda reducido al anterior.

EJEMPLOS: $\sqrt[3]{\frac{216}{438}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{438}} = \frac{6}{7}$. La raíz verdadera se halla comprendida entre $\frac{6}{7}$ y $\frac{6}{8}$.

$\sqrt[3]{\frac{8}{12}} = \sqrt[3]{\frac{8 \times 12^2}{12 \times 12^2}} = \frac{\sqrt[3]{1152}}{\sqrt[3]{12^3}} = \frac{10}{12}$, raíz aproximada en menos de $\frac{1}{12}$.

CUARTO CASO. — Si ninguno de los términos del quebrado es cubo perfecto, puede hacerse que alguno lo sea multiplicando numerador y denominador por el cuadrado del que se quiere convertir en cubo; pero generalmente se procede haciendo que lo sea el denominador

EJEMPLO: $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{5 \times 6^2}{6 \times 6^2}} = \frac{\sqrt[3]{180}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{5}{6}$, raíz aproximada en menos de $\frac{1}{6}$.

231. Raíz cúbica de los números mixtos. — *Para extraer la raíz cúbica de un número mixto, se reduce el mixto a quebrado, y se extrae la raíz cúbica del quebrado equivalente.*

232. *La raíz cúbica entera de un número mixto, es igual a la raíz cúbica entera de su número entero* (*).

Sea el número mixto $8\frac{1}{5}$, en el que el entero 8 es cubo perfecto; digo que la raíz cúbica entera de $8\frac{1}{5}$ es 2, raíz exacta de 8.

En efecto; el mixto $8\frac{1}{5}$ está comprendido entre los cubos enteros consecutivos 8 y 27, y por tanto, su raíz cúbica entera estará comprendida entre 2 y 3, y por lo mismo, 2, raíz cúbica de 8, es la raíz cúbica entera de $8\frac{1}{5}$.

Sea, ahora, el mixto $32\frac{3}{4}$, en el cual su entero no es cubo perfecto.

$32\frac{3}{4}$ está comprendido entre los cubos enteros consecutivos 27 y 64; luego la raíz cúbica entera de $32\frac{3}{4}$ estará comprendida entre 3 y 4; luego 3, raíz cúbica entera de 32, es la raíz entera de $32\frac{3}{4}$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

233. Raíz cúbica de las fracciones decimales. — Toda fracción decimal puede considerarse como el cubo de su raíz cúbica, y, en este concepto, debe tener, necesariamente, un número de cifras múltiplo de 3; pues siendo un producto de tres factores iguales, claro está que tendrá triplo número de cifras que un factor.

La extracción de raíces cúbicas de las fracciones decimales, se funda en la extracción de las de los quebrados comunes; pues si el número de sus cifras no fuese múltiplo de 3, puede hacerse que lo sea añadiendo a su derecha los ceros necesarios, y luego se le puede dar la forma de quebrado común, cuyo denominador es un cubo perfecto.

Sea la fracción 0'846325, cuyo número de cifras es múltiplo de 3. Transformada en quebrado común, será $\frac{846325}{1000000}$.

Luego $\sqrt[3]{\frac{846325}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{846325}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{94}{100} = 0'94$, con menor error que $\frac{1}{100}$.

Si fuese la fracción 0'9534, añadiendo dos ceros a su derecha, sería

$$0'9534 = 0'953400 = \frac{953400}{1000000}.$$

Luego $\sqrt[3]{\frac{953400}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{953400}}{\sqrt[3]{1000000}} = \frac{98}{100} = 0'98$, con menor error que $\frac{1}{100}$.

De todo lo cual se deduce la siguiente

234. Regla. — *Para extraer la raíz cúbica de un número decimal, si el número de sus cifras no fuese múltiplo de 3, se añaden a su derecha los ceros necesarios; se extrae la raíz cúbica del número que resulte como si fuese entero, y luego se separan, con una coma, de la derecha de la raíz obtenida, la tercera parte de las cifras decimales que tuviese la fracción.*

(*) Se supone que el quebrado que acompaña al entero es propio.

Raíces cúbicas inconmensurables

(Véase lo expuesto en el número **214.**)

234 bis. — *Para extraer la raíz cúbica inconmensurable de un número con un error menor que una unidad fraccionaria dada, se multiplica este número por el cubo del denominador de la fracción; se extrae la raíz cúbica entera del producto obtenido, y se divide esta raíz por el denominador de la fracción* (**214**).

Propongámonos extraer la raíz cúbica inconmensurable de 7, con menor error que $\frac{1}{6}$.

Tendremos, según la regla, $\frac{\sqrt[3]{7 \times 216}}{6} = \frac{\sqrt[3]{1512}}{6} = \frac{11}{6}$.

En efecto; 7×216, ó 7×6^3, está comprendido entre 11^3 y 12^3; luego $\frac{7 \times 6^3}{6^3}$ o su igual 7, estará comprendido entre $\frac{11^3}{6^3}$ y $\frac{12^3}{6^3}$, y la $\sqrt[3]{7}$ estará comprendida entre $\sqrt[3]{\frac{11^3}{6^3}}$ y $\sqrt[3]{\frac{12^3}{6^3}}$, y como las raíces de estos dos quebrados son, respectivamente, $\frac{11}{6}$ y $\frac{12}{6}$, y como estos dos quebrados se diferencian en $\frac{1}{6}$, claro está que la raíz cúbica de 7 es $\frac{11}{6}$, con menor error que $\frac{1}{6}$.

EJEMPLOS: 1.° *Extraer la raíz cúbica de 25 en menos de* $\frac{1}{7}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt[3]{25 \times 343}}{7} = \frac{\sqrt[3]{8575}}{7} = \frac{20}{7} = 2'857.$$

2.° *Extraer la raíz cúbica de 19'25, en menos de* $\frac{1}{6}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt[3]{19'25 \times 216}}{6} = \frac{\sqrt[3]{4158}}{6} = \frac{16}{6} = 2'666.$$

3.° *Extraer la raíz cúbica de* $\frac{7}{8}$ *con menor error que* $\frac{1}{9}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt[3]{\frac{7}{8} \times 729}}{9} = \frac{\sqrt[3]{\frac{7 \times 729}{8}}}{9} = \frac{\sqrt[3]{637'875}}{9} = \frac{8}{9} = 0'888.$$

4.° *Extraer la raíz cúbica de 6 con menor error que* $\frac{1}{100}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt[3]{6 \times 1000000}}{100} = \frac{\sqrt[3]{6000000}}{100} = \frac{181}{100} = 1'81.$$

5.° *Extraer la raíz cúbica de 4 con menor error que* $\frac{1}{1000}$.

$$\text{Disposición: } \frac{\sqrt[3]{4 \times 1000000000}}{1000} = \frac{\sqrt[3]{4000000000}}{1000} = \frac{1587}{1000} = 1'587.$$

En los ejemplos anteriores, hemos visto la manera de extraer la raíz cúbica inconmensurable de un número entero o quebrado común, con menor error que un límite fraccionario cualquiera. Si el número fuese una fracción decimal, se procedería igualmente; no obstante, añadiremos lo siguiente:

235. Raíz cúbica inconmensurable de las fracciones decimales. — Si la raíz cúbica de un número decimal no es exacta, puede obtenerse la inconmensurable, aproximada con menor error que un límite fraccionario decimal cualquiera, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, etc., para lo cual se procede igualmente que si el número fuese entero o fracción común (**234 bis**).

Propongámonos extraer la $\sqrt[3]{0{\prime}37}$ con menor error que $\frac{1}{100}$.

$$\frac{\sqrt[3]{0{\prime}37 \times 1000000}}{100} = \frac{\sqrt[3]{370000}}{100} = \frac{71}{100} = 0{\prime}71.$$

Para lo cual, podemos dar la siguiente

236. Regla. — *Para extraer la raíz cúbica inconmensurable de un número decimal, aproximada hasta un límite decimal determinado, se procede como si el número fuese entero, añadiendo antes a su derecha los ceros necesarios hasta formar, con las notas decimales que ya existan, tantos grupos de a tres cifras como notas decimales queramos aproximar la raíz.*

Ejemplo: *Extraer la raíz cúbica de* 0'725 *aproximada hasta las centésimas.*

Disposición:

	$\sqrt[3]{0{\prime}725{,}000}$	0'89	
	— 512	213,0, / 192	89
	2130,00	021 0 — 11; es decir, 9.	× 89
	— 7049,69	01 8	801
Residuo	0200,31		712
			7921
			× 89
			71289
			63368
			704969

Al extraer la raíz cúbica de un número entero, lo consideraremos como cubo perfecto, y si no lo fuese, después de hallada la raíz entera y el residuo, podremos aproximar esta raíz hasta un límite decimal cualquiera, para lo cual consideraremos el número multiplicado por el cubo del denominador de la fracción decimal que indique dicho límite; continuaremos la operación, y luego dividiremos la raíz hallada por el denominador de la fracción (**234 bis**). Podemos dar la siguiente

237. Regla. — *Si la raíz cúbica de un número entero no es exacta, después de hallada la entera y el residuo correspondiente, se puede hallar la raíz inconmensurable añadiendo a la derecha del número cuya raíz se extrae, tantos grupos de a tres ceros como notas decimales queramos aproximar la raíz. Hecho esto, se continúa la operación, y luego se separan, de derecha a izquierda de la raíz hallada, tantas cifras para decimales como grupos de a tres ceros se hayan añadido.*

Ejemplo: *Extraer la raíz cúbica de* 9,615 *aproximada hasta las centésimas, si no la tiene exacta.*

Disposición:

```
 3
 √ 9,615,000,000  | 21'26
 — 8              |
 ---------------- | 16   / 12         |    21
   16,15          | 4      1          |  × 21
 — 92 61          |                   |  ----
 ---------------- |                   |    21
   03 540,00      |                   |    42
 — 95 281 28      |                   |  ----
 ---------------- |                   |   441        441
   0 0 868 720,00 |                   |  × 21       ×  3
 — 9,6 09.256,376 |                   |  ----       ----
 ---------------- |                   |   441       1323
Residuo .. 0 0 05 743,624             |  882
                  |                   |  ----
                  |                   |  9261
                  |-----------------------------------------
                  | 3540  / 1323      |     212
                  | 0894     2        |   × 212
                  |                   |   -----
                  |                   |     424
                  |                   |    212
                  |                   |   424
                  |                   |   -----
                  |                   |   44944      44944
                  |                   |  ×  212     ×     3
                  |                   |   -----     ------
                  |                   |   89888     134832
                  |                   |  44944
                  |                   | 89888
                  |                   | -------
                  |                   | 9528128
                  |-----------------------------------------
                  | 868720 / 134832   |          2126
                  | 059728     6      |        × 2126
                  |                   |        ------
                  |                   |         12756
                  |                   |         4252
                  |                   |        2126
                  |                   |       4252
                  |                   |       -------
                  |                   |       4519876
                  |                   |     ×    2126
                  |                   |       -------
                  |                   |      27119256
                  |                   |      9039752
                  |                   |     4519876
                  |                   |    9039752
                  |                   |    ----------
                  |                   |    9609256376
```

Raíces de grado superior al tercero

238. Las raíces de grado superior al tercero no se extraen directamente, por exigir reglas demasiado complicadas; no obstante, pueden extraerse algunas aplicando la cuadrada y la cúbica.

Sabiendo extraer la raíz cuadrada de un número, se puede extraer fácilmente la de cualquier grado expresado por una potencia de 2.

Sabiendo extraer la raíz cúbica de un número, se puede extraer fácilmente la de cualquier grado expresado por una potencia de 3.

Sabiendo extraer las raíces cuadrada y cúbica, se puede extraer fácilmente la de cualquier grado expresado por un producto de una potencia de 3 por otra de 2.

239. Raíz cuarta de un número.—*Para hallar la raíz cuarta de un número, se extrae la raíz cuadrada de su raíz cuadrada.*

Así $\sqrt[4]{16}\ \sqrt{\sqrt{16}}$. La raíz cuadrada de 16 es 4, y la raíz cuadrada de 4 es 2; luego la raíz cuarta de 16 es 2.

240. Raíz octava.—*La raíz octava de un número, es la raíz cuadrada de su raíz cuarta.*

241. Raíz décimasexta.—*La raíz décimasexta de un número, es la raíz cuadrada de su raíz octava.*

Y así, sucesivamente.

242. Raíz novena.—*Raíz novena de un número, es la raíz cúbica de su raíz cúbica.*

243. Raíz vigésimaséptima.—*Es la raíz cúbica de la raíz novena.*

Y así, sucesivamente.

244. Raíz sexta.—*Es la raíz cuadrada de la raíz cúbica, o la raíz cúbica de la cuadrada.*

245. Raíz duodécima.—*Es la raíz cúbica de la raíz cuarta, o la raíz cuarta de la cúbica.*

Y así, sucesivamente.

Las raíces de cualquier grado se extraen con suma facilidad, con el auxilio de los logaritmos.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL (*)

NOTAS HISTÓRICAS

Antes de que se estableciera el *Sistema métrico decimal*, existía, así en España como en todas las demás naciones, un número asombroso de pesas y medidas que, siendo distintas entre las regiones de un mismo Estado y hasta, a menudo, entre las poblaciones de una misma región, constituían un obstáculo poderosísimo para el desarrollo del comercio, fuente importantísima de la riqueza de los pueblos.

Desde muy antiguo, varios hombres de gobierno habían intentado, inútilmente, uniformar las pesas y medidas dentro de sus Estados.

En España, Alfonso X *el Sabio* fué el primero que se propuso realizar dicha medida en los reinos de Castilla, y Alfonso XI, en 1348, quiso continuar y perfeccionar la obra del célebre autor de las Partidas, sin éxito alguno, debido a la ignorancia de su tiempo y a la dificultad con que los pueblos abandonan las costumbres en que han vivido.

Los procuradores a las Cortes de Madrid de 1435, hicieron presente al rey don Juan II la necesidad de uniformar las pesas y medidas, a fin de evitar engaños y perjuicios. El monarca oyó con agrado dicha petición, y al efecto, dictáronse algunas disposiciones que dieron escasísimos resultados prácticos, toda vez que las Cortes de Madrigal de 1438 y las de Toledo de 1462 pidieron, con insistencia, al rey, que hiciera cumplir las ordenanzas relativas a la deseada uniformidad.

Los Reyes Católicos, en varias ocasiones, trabajaron con ahinco para igualar los pesos y medidas de Castilla, hasta que, por fin, en 1801, Carlos IV señaló los patrones de las pesas y medidas españolas y sus múltiplos y divisores, las cuales todas debían ajustarse al marco que existía en el Consejo, a la vara de Burgos, a la media fanega de Avila y a la cántara o arroba de Toledo, que se custodiaban en dichas ciudades. A pesar de todo esto, la anhelada uniformidad tampoco llegó a realizarse, pues Valencia, Aragón y Cataluña continuaron usando sus pesas y medidas provinciales.

* * *

(*) Del griego *systema*, agrupación, reunión.

A Francia cabe la gloria de ser la nación primera que trabajó con acierto para dar al mundo un sistema racional de pesas, medidas y monedas.

En 1736, reinando Luis XV, los ingenieros franceses La Condamine, Godin y Bouguer y los españoles D. Jorge Juan y D. Antonio Ulloa procedieron, en el Perú, a la medición del meridiano terrestre.

Aceptada por todos los sabios franceses la conveniencia de adoptar las divisiones decimales, esto es, la escala de 10 para los múltiplos y submúltiplos del nuevo sistema de pesas y medidas, quedaba por resolver la elección de un tipo invariable, que no pudiera perderse y del cual salieran todas las medidas.

Primeramente, se pensó «en adoptar la longitud del péndulo que batiese segundos sexagesimales en el vacío y al nivel del mar, cuya medida tenía la ventaja de ofrecer la seguridad de no perderse ni variar, a no ser que llegaran a alterarse la gravedad y sus leyes; si bien presentaba la dificultad de no poder ser constante en todos los países. Su determinación dependía, además, de la medida del tiempo, y era más conveniente buscar un tipo cuya determinación no dependiera de su propia existencia».

La comisión encargada de estos trabajos, que no olvidaba la exactitud con que se había antes obtenido la medición del meridiano terrestre, escogió, por fin, como tipo definitivo, la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano, a la que se dió el nombre de *metro*, del griego *metrón*, que significa medida.

Aceptados por el gobierno francés los trabajos de dicha Comisión, Delambre y Mechain procedieron entonces a medir el arco del meridiano de París comprendido entre Dunkerque y Barcelona.

Mientras se practicaban los trabajos antedichos, el gobierno francés, impaciente para conseguir la desaparición de los antiguos sistemas de pesar y medir, creó un metro provisional por la ley de 2 de Agosto de 1793 imaginando, con poca diferencia, la nomenclatura actual, aunque se daban a algunas unidades nombres distintos de los que hoy llevan (*). Por decreto de 7 de Abril de 1795 (18 Germinal, año III) (**), se modificó dicho sistema, admitiendo la actual nomenclatura.

Siete años necesitaron Delambre y Mechain para verificar el penoso y difícil trabajo que su gobierno les confiara.

Seguidamente, la incansable Francia dirigió un sentido llamamiento a todas las naciones interesadas en sus trabajos, para que nombrasen sus representantes respectivos, a fin de constituir la comisión internacional de pesas y medidas (***) encargada exclusivamente de los trabajos científicos relativos al establecimiento definitivo del nuevo sistema.

(*) Al metro cúbico le llamaron *cade;* al kilómetro *millar;* al litro, *cadil* o *pinte;* al gramo, el *gravet;* al kilogramo, la *grave*, y a la tonelada, *bar* o *millier*.

(**) La revolución francesa no se contentó con dar al mundo comercial el que hoy es *Sistema universal de pesas y medidas*, sino que también reformó el Calendario, desterrando el gregoriano y creando el *Republicano*, esencialmente decimal. Por el nuevo Calendario, el año se dividía en 12 meses de 30 días, con más 5 ó 6 días complementarios; los meses se dividían en 3 semanas o *décadas*, de 10 días cada una. El punto de partida del *Calendario Republicano* fué el 22 de Septiembre de 1792, primer día del equinoccio de Septiembre, y que coincidió con el de la proclamación de la República. Cesó de regir el 1.º de Enero de 1806.

Los nombres de los meses eran como siguen:

PRIMAVERA........	*Germinal*	(Marzo).
	Floreal	(Abril).
	Praderial	(Mayo).
ESTÍO	*Mesidor*	(Junio).
	Termidor	(Julio).
	Fructidor	(Agosto).
OTOÑO.............	*Vendimiario*	(Septiembre).
	Brumario	(Octubre).
	Frimario	(Noviembre).
INVIERNO..........	*Nevoso*	(Diciembre).
	Lluvioso	(Enero).
	Ventoso	(Febrero).

Los nombres de los diez días eran: *Primidi, Duodi, Tridi, Quartidi, Quintidi, Sextidi, Septidi, Octidi, Novidi* y *Decadi*.

(***) Constituyeron dicha comisión los sabios siguientes: *Franceses:* Borda, Brisson, Coulomb, Darcet, Delambre, Lagrange, Lefèvre-Gineau, Legendre, Mechain y Prouy. *Españoles*: D. Agustín Pedrayes y D. Gabriel Ciscar. *Italianos:* Balbo, substituído luego por Vasalli, Fabbroni, Franchini, Mascheroni y Multedo. *Holandeses:* Aeneœ y von Swinden. *Danés:* Bugge. *Suizo:* Trallés.

Constituída dicha comisión, se dividió en sub-comisiones; revisó y completó los trabajos anteriores; calculó de nuevo la longitud del metro según el meridiano; mandó construir el metro y el kilogramo de platino que debían servir de patrones (se empleó el platino por ser el metal menos oxidable), y el día 22 de junio de 1799, la Comisión Internacional de pesas y medidas, representada por Trallés, presentaba al Cuerpo Legislativo el resumen de sus trabajos y los patrones verdaderos del metro y del kilogramo, construídos por Fortín, los que fueron encerrados cada uno en una caja de hierro cerrada por cuatro llaves distintas.

Por fin, después de luchar con los inconvenientes que el hábito y la rutina llevan consigo, el nuevo sistema de pesas y medidas fué el único legal en Francia desde 1.º de enero de 1840.

En España, fué instituído por la ley de 19 de julio de 1849.

Hoy puede llamarse *sistema universal* de pesas y medidas, por ser único legal en casi todas las naciones del mundo civilizado. En Inglaterra, Rusia y los Estados Unidos de América, su uso no es legal y obligatorio; pero sí, permitido.

246. Definición. — *Sistema métrico decimal* es el conjunto de pesas, medidas y monedas que tienen su origen en el metro.

Este sistema se llama *métrico* porque su base es el metro, y *decimal*, porque sus órdenes de unidades siguen la misma relación que las del sistema de numeración décupla.

247. El metro (*). — La longitud de la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre, comprendido entre el polo Norte de la Tierra y el Ecuador, se llama *metro* (**).

248. Clases de medidas y unidad principal de cada una. — Hay seis clases de medidas métricas, á saber: *de longitud, de superficie, de volumen, de capacidad, de peso y de moneda*. La unidad de las de longitud es el *metro;* de las de superficie, el *metro cuadrado;* de las de volumen, el *metro cúbico;* de las de capacidad, el *litro;* de las de peso, el *gramo;* de las de moneda, la *peseta*.

249. Nomenclatura del sistema. — Para valuar con comodidad las diferentes magnitudes, se emplean, además de las unidades principales, *múltiplos y submúltiplos* de estas mismas unidades.

Los múltiplos se forman, menos en las de moneda, anteponiendo a las unidades principales las palabras griegas: *Deca, Hecto, Kilo* y *Miria*.

Deca significa diez, y ocupa el lugar de las *decenas; hecto* significa ciento, y ocupa el lugar de las *centenas; kilo* significa mil, y ocupa el lugar de los *millares; miria* significa diez mil, y ocupa el lugar de las *decenas de millar*.

Los submúltiplos se forman anteponiendo a las unidades principales las palabras latinas: *deci, centi* y *mili*.

Deci significa la *décima parte; centi* significa la *centésima parte; mili* significa la *milésima parte*.

Medidas de longitud

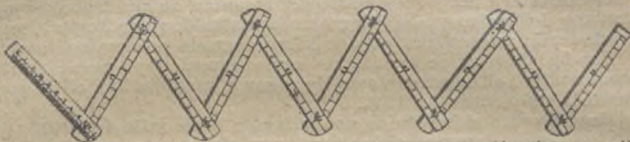
250. Definición. — Llámanse *medidas de longitud* las que sirven para determinar la extensión en una sola dimensión. Por ejemplo, la longitud de un camino, la altura de un hombre, el espesor de un muro, etc.

(*) Del griego *metron*, medida.

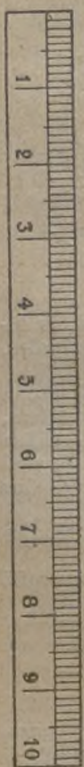
(**) Mediciones más exactas hechas posteriormente, han demostrado que la longitud del cuadrante del meridiano es 10.002,008 metros actuales; por lo cual debemos decir que el metro es, *aproximadamente*, la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano.

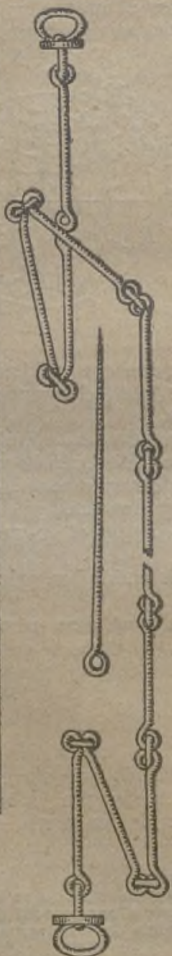
251. División. — Las medidas de longitud se dividen en *medidas de longitud propiamente dichas y medidas itinerarias.*

252. Medidas de longitud propiamente dichas. — La unidad de las medidas de longitud es el *metro* (247).



La medida material llamada *metro* consiste en una regla de madera, con extremos metálicos, dividida por medio de rayitas o surcos en decímetros, centímetros y milímetros. Los albañiles, carpinteros, cerrajeros, etc., suelen usar un metro de madera o de metal, que se dobla por cada decímetro. Los agrimensores usan una cinta y una cadena de 10 a 20 metros.





253. Múltiplos y submúltiplos del metro. — *Los múltiplos del metro son:*

El decámetro, que vale 10 metros.

El hectómetro, que vale 100 metros, o 10 decámetros.

El kilómetro, que vale 1000 metros, o 10 hectómetros.

El miriámetro, que vale 10000 metros, o 10 kilómetros.

Los submúltiplos son:

El decímetro, que vale 10 centímetros, o la décima parte del metro.

El centímetro, que vale 10 milímetros, o la centésima parte del metro.

El milímetro, que es la milésima parte del metro.

Las medidas métricas de longitud han substituído a la cana, al palmo, al cuarto, a la vara, al pie, etc.

253 bis. Relación entre las medidas métricas de longitud y las del sistema antiguo de la misma clase. — *La relación que existe entre las medidas métricas de longitud y las antiguas* es como sigue:

La cana de Gerona equivale a 1'559 metros.

La cana de Barcelona equivale a 1'555 metros.

La vara de Castilla equivale a 0'836 metros aproximadamente.

15 pasos ordinarios equivalen, aproximadamente, a 1 decámetro, y 5 pasos, a 4 metros.

Andando con paso regular, un hombre puede recorrer:

En *un minuto*, poco más o menos, *un hectómetro.*

En *diez minutos, un kilómetro.*

254. Medidas itinerarias (*). Definición. — Se llaman medidas *itinerarias* las que sirven para determinar las distancias geográficas; v. gr.: la distancia entre Madrid y Zaragoza.

Son medidas itinerarias el *miriámetro, el kilómetro* y el *hectómetro.*

(*) Del latín *itinerarium*, camino para recorrer.

En muchas carreteras, los kilómetros están señalados por mojones principales, y los hectómetros, por mojones más pequeños.

255. Escolio.—Si el cuadrante de meridiano tiene de longitud 10.000,000 de metros, la longitud de un meridiano será de 40.000,000. Como la circunferencia de un meridiano se divide en 360 partes iguales llamadas grados, *la longitud de* 1 *grado será* $\frac{40.000,000}{360} = 111,111$ metros aproximadamente.

La *legua terrestre* es de 5,572 metros.

La *legua marina* es de 5,555 metros.

En Francia, la legua terrestre es de 25 al grado, y la marina o geográfica es de 20 al grado.

La *legua de posta*, o legua común, es hoy de 4 Km.

La *milla marina* es la tercera parte de la legua marina.

La *milla inglesa* es de 1,600 metros.

La velocidad de los navíos suele apreciarse por *nudos*. El nudo es la cientoveinteava parte de la milla marina (*).

Medidas de superficie

256. Definición. — Medidas de *superficie* son aquéllas de que nos servimos para determinar la extensión considerada en dos dimensiones, *largo* y *ancho*.

257. División. — Las medidas de superficie se dividen en tres clases:

1.ª *Medidas de superficie propiamente dichas.*
2.ª *Medidas agrarias.*
3.ª *Medidas topográficas.*

Para determinar la extensión en el sentido de que nos ocupamos, no existen medidas efectivas superficiales; nos valemos de las medidas de longitud.

258. Medidas de superficie propiamente dichas. — Sirven para apreciar pequeñas extensiones superficiales; v. gr.: la superficie de un salón, de un lienzo, de la cara de una pared, etc.

La unidad principal es el *metro cuadrado*, es decir, un cuadrado cuyo lado mide 1 metro. El metro cuadrado, como unidad de las medidas de superficie propiamente dichas, no tiene múltiplos. Sus múltiplos se aplican a las medidas agrarias y a las topográficas.

259. Múltiplos y divisores del metro cuadrado. — Los múltiplos del metro cuadrado son los siguientes:

El decámetro cuadrado, que tiene 100 metros cuadrados.

El hectómetro cuadrado, que tiene 100 decámetros cuadrados, o 10,000 metros cuadrados.

El kilómetro cuadrado, que tiene 100 hectómetros cuadrados, o 1.000,000 de metros cuadrados.

El miriámetro cuadrado, que tiene 100 kilómetros cuadrados, o 100.000,000 de metros cuadrados:

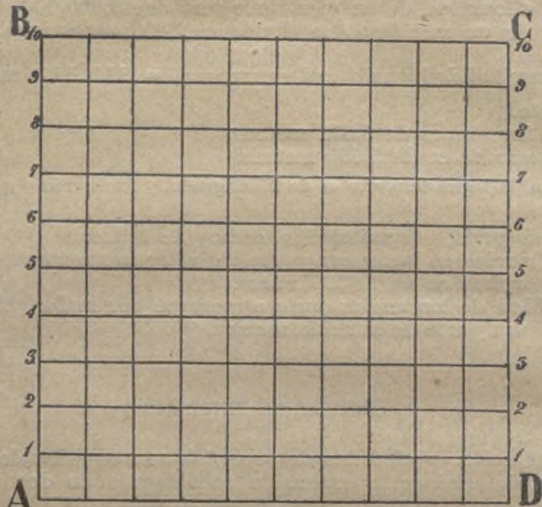
Los submúltiplos o divisores son:

El decímetro cuadrado, que tiene 100 centímetros cuadrados, o la *centésima* parte del metro cuadrado.

(*) Las medidas itinerarias adoptadas para valuar las distancias varían mucho, pues cada nación tiene, regularmente, su sistema particular de ellas.

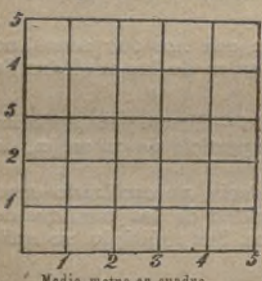
El centímetro cuadrado, que tiene 100 milímetros cuadrados, o la *diezmilésima* parte del metro cuadrado.

El milímetro cuadrado, que es la *millonésima* parte del metro cuadrado



Metro cuadrado. — Igual a 100 decímetros cuadrados

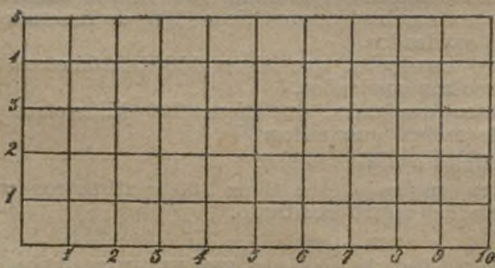
Para demostrar que el metro cuadrado tiene 100 decímetros cuadrados, admitamos que el lado del cuadrado precedente tiene 1 metro de longitud. Si dividimos el lado *A B* en 10 partes iguales, y por los puntos de división trazamos las rectas 1 — 1, 2 — 2, 3 — 3, etc., paralelas al lado *A D*, el cuadrado en cuestión quedará dividido en 10 rectángulos iguales al rectángulo *A D* 1 — 1, los cuales miden 1 metro de largo y 1 decímetro de altura.



Medio metro en cuadro.
Igual a 25 decímetros cuadrados

Si ahora dividimos el lado *A D* en 10 partes iguales, y por los puntos de división trazamos paralelas al lado *A B*, cada uno de los rectángulos que antes hemos formado quedará dividido en 10 cuadrados iguales, cuyo lado mide 1 decímetro; luego el metro cuadrado queda dividido en 100 decímetros cuadrados.

Procediendo igualmente, demostraríamos que 1 decámetro cuadrado tiene 100 metros cuadrados, o 10,000 decímetros cuadrados, y así sucesivamente.



Mitad de 1 metro cuadrado.—Igual a 50 decímetros cuadrados

260. Medidas agrarias (*). — Se llaman medidas *agrarias* las que sirven para valuar las superficies de los terrenos productivos, como viñedos, campos, bosques, prados, etc.

Su unidad es el *área*.

El área es un decámetro cuadrado: tiene, pues, 100 metros cuadrados de superficie.

261. Múltiplos y divisores del área. — El área tiene un múltiplo, que es

La hectárea, que equivale a 100 áreas, o a 1 hectómetro cuadrado.

El área tiene un submúltiplo o divisor, que es

La centiárea, que es la centésima parte del área, o 1 metro cuadrado.

Se consideran como divisores o submúltiplos del área, todas las medidas de superficie propiamente dichas, esto es, el metro cuadrado, el decímetro cuadrado, el centímetro cuadrado y el milímetro cuadrado.

262. Medidas topográficas. — *Medidas topográficas* son las que sirven para apreciar grandes extensiones superficiales, tales como la extensión de un pueblo, de una provincia, de una nación, de un continente, del mundo entero. Su unidad principal es el kilómetro cuadrado, que tiene 1.000,000 de metros cuadrados.

262 bis. Múltiplos y submúltiplos del kilómetro cuadrado. — El kilómetro cuadrado tiene un múltiplo, que es

El miriámetro cuadrado, que tiene 100 kilómetros cuadrados, o 100.000,000 de metros cuadrados.

Se consideran como submúltiplos del kilómetro cuadrado todas las medidas agrarias y las de superficie propiamente dichas.

263. Relación entre las medidas de superficie métricas y las antiguas de la misma clase. — La relación entre las medidas cuadradas antiguas y las modernas es como sigue:

La cana cuadrada de Gerona tiene 2'43 metros cuadrados aproximadamente.

La vesana de Gerona, de 900 canas cuadradas, tiene 21'87 áreas aproximadamente.

El área tiene 41'14 canas cuadradas aproximadamente.

La vara cuadrada de Castilla tiene 0'6987 metros cuadrados aproximadamente.

Medidas de volumen

264. Se llaman medidas de *volumen* las que sirven para apreciar la extensión considerada en tres dimensiones: largo, ancho y altura. Por medio de ellas determinamos, pues, la solidez de los cuerpos, esto es, el espacio que ocupan.

Su unidad es el *metro cúbico*.

El metro cúbico es un cubo cuyo lado o arista mide 1 metro; sus seis caras son, pues, metros cuadrados.

265. Múltiplos y divisores. — Aunque, prácticamente, no se admiten múltiplos al metro cúbico, racionalmente tiene los siguientes:

El *decámetro cúbico*, que tiene 1,000 metros cúbicos.
El *hectómetro cúbico*, que tiene 1.000,000 de metros cúbicos.
El *kilómetro cúbico*, que tiene 1,000.000,000 de metros cúbicos.
El *miriámetro cúbico*, que tiene 1,000.000.000,000 de metros cúbicos.

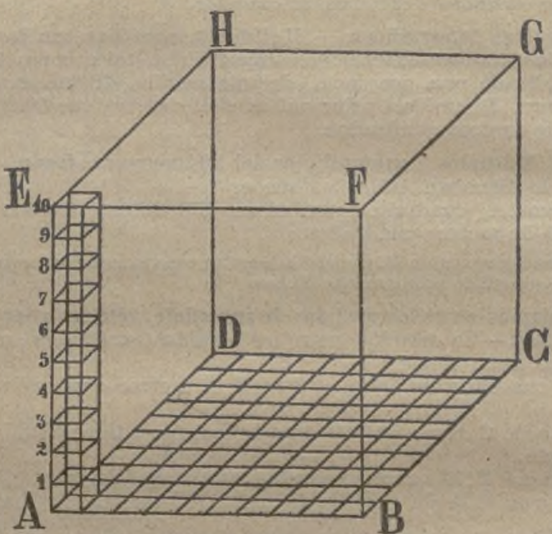
(*) Del latín *ager*, el campo.

Sus divisores son:

El *decímetro cúbico*, que es la milésima parte del metro cúbico; el *centímetro cúbico*, que es la milésima parte del decímetro cúbico, y el *milímetro cúbico*, que es la milésima parte del centímetro cúbico.

Las medidas métricas de volumen han venido a substituir a la cana cúbica, al palmo cúbico, a la vara cúbica, al pie cúbico, etc., etc.

266. Para demostrar que el metro cúbico tiene 1000 decímetros cúbicos, supongamos que el lado o arista del cubo $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H$, tiene 1 metro de longitud. Siendo la cara $A\ B\ C\ D$ un metro cuadrado, podemos dividirla en 100 decímetros cuadrados (259); sobre cada uno de estos decímetros cuadrados, podemos imaginar colocado un sólido de 1 *decímetro cuadrado* de base y 1 *metro de altura*.



Metro cúbico.—Igual a 1000 decímetros cúbicos

Ahora bien; dividiendo la arista $A\ E$ en 10 partes iguales, y por los puntos de división trazando planos paralelos a $A\ B\ C\ D$, cada uno de los 100 sólidos quedará dividido en 10 cubos de 1 decímetro de lado. Luego el metro cúbico tiene $100 \times 10 = 1000$ decímetros cúbicos.

267. Relación entre las medidas cúbicas antiguas y las modernas de igual clase. — La relación que existe entre las medidas cúbicas antiguas y las modernas es la siguiente:

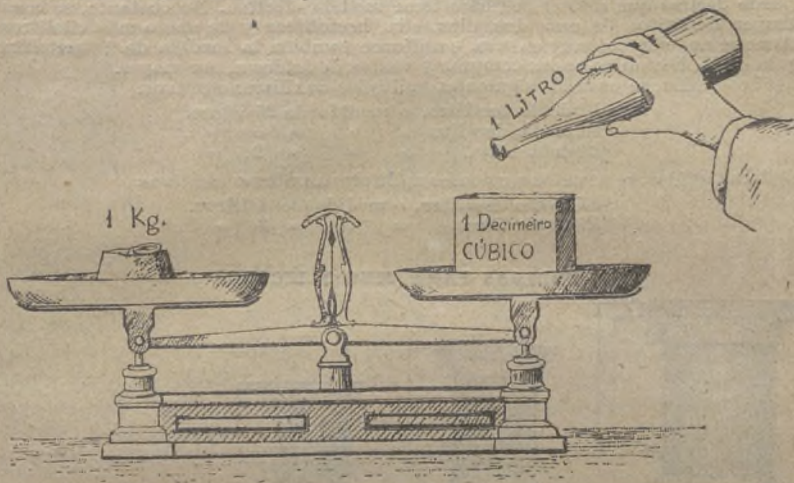
1 cana cúbica de Gerona = 3'789119 metros cúbicos aproximadamente.
1 vara cúbica = 0'584077 metros cúbicos aproximadamente.

Medidas de capacidad

268. Definición. — Llámanse medidas de *capacidad* las que sirven para medir áridos y liquidos.

Su unidad principal es el *litro*.

El litro es igual a la capacidad de 1 decimetro cúbico.



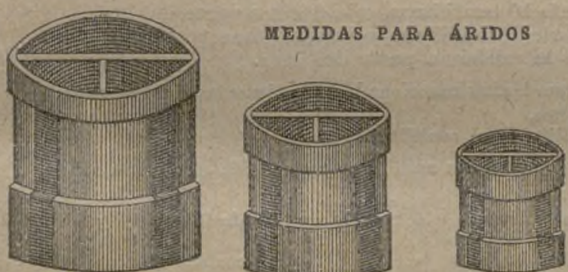
La forma cúbica no se acomoda a las necesidades del comercio; por cuya razón, al litro y demás medidas de capacidad se les da la forma cilíndrica.

Las medidas de capacidad para áridos, se construyen de madera, y las para líquidos, de metal.

269. Múltiplos y submúltiplos del litro. — Los múltiplos del litro son:

El decalitro	que vale	10	litros.	
El hectolitro	» »	100	»	o 10 decalitros.
El kilolitro	» »	1,000	»	o 10 hectolitros.
El mirialitro	» »	10,000	»	pero no se usa.

MEDIDAS PARA ÁRIDOS



Hectolitro — Medio hectolitro — Doble decal.

Decalitro — ½ decal. — Doble litro — Litro — ½ litro — ¼ litro — Doble decil. — Decilitro

De los múltiplos que hemos mencionado, así para áridos como para líquidos, puede decirse que sólo el decalitro tiene medida efectiva. No obstante, se construyen depósitos de uno, dos, diez, etc., hectolitros y de uno o más kilolitros. Aunque no, empero, muy en uso, empléanse también la medida de 1 hectolitro y la de $^1/_2$ hectolitro en las compras y ventas de áridos al por mayor.

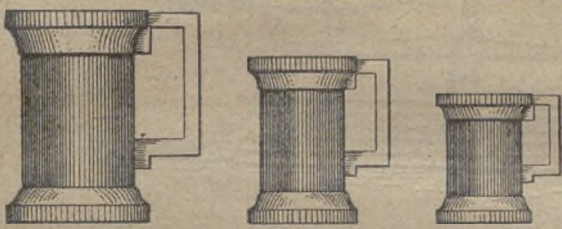
Para áridos, se usan los siguientes múltiplos auxiliares efectivos:

El doble decalitro, o medida de 20 litros.
El medio decalitro o » » 5 »
El doble litro, o » » 2 »

Para líquidos, se usan los siguientes múltiplos auxiliares efectivos:

El medio decalitro, o medida de 5 litros.
El doble litro, o » » 2 »

MEDIDAS PARA VINO Y LICORES



Doble litro — Litro — Medio litro

Doble decil. — Decil. — $^1/_2$ decil. — Doble centil. — Centil.

Los submúltiplos o divisores del litro son:

El decilitro, que vale 10 centilitros, o la décima parte del litro.
El centilitro, que vale 10 mililitros, o la centésima parte del litro.
El mililitro, que es la milésima parte del litro.

De los submúltiplos que hemos mencionado, sólo tienen medida efectiva:
Para áridos, el decilitro.
Para líquidos, el decilitro y el centilitro.

Existen, también, submúltiplos auxiliares con medida efectiva, a saber:
Para áridos:

El medio litro, o medida de 5 decilitros.
El cuarto de litro, » » » 2'5 »
El doble decilitro, » » » 20 centilitros.
El medio decilitro, » » » 5 »

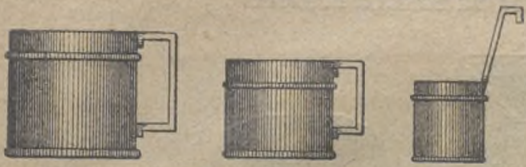
Para líquidos:

El medio litro, o medida de 5 decilitros.
El cuarto de litro, » » » 2'5 »
El doble decilitro, » » » 20 centilitros.
El medio decilitro, » » » 5 »
El doble centilitro, » » » 2 »

Los submúltiplos que no se usan es por ser medidas demasiado pequeñas y carecer de aplicación a los usos del comercio.

Las medidas métricas de capacidad, han substituído a la cuartera, al cuartán, al mesurón, a la pipa, carga, mallal, porrón, etc.

MEDIDAS PARA EL ACEITE



Doble litro — Litro — Medio litro

Doble decil. — Decil. — ½ decil. — Doble centil. — Centil.

270. Relación entre las medidas de capacidad métricas y las antiguas de la misma clase. — La relación que existe entre las medidas de capacidad métricas y las antiguas es como sigue:

Para granos:

La cuartera de Gerona equivale a 72'32 litros.
Un cuartán » » » » 18'08 »
La cuartera » Barcelona » » 69'518 » pero en el comercio se dan 70 u 80 litros por cuartera.

Para líquidos:

El mallal de Gerona para vino y licores equivale a 15'48 litros; mas en el comercio suelen darse 16 litros por mallal.

El barrilón de Barcelona equivale a 30'35 litros.
El mallal para aceite, en Gerona, a 13'03 »
El cuartán para aceite, en Barcelona, a 4'15 »

Medidas de peso

271. Definición. — Medidas de *peso* son aquéllas de que nos servimos para determinar el peso de los cuerpos.

Su unidad principal es el *gramo.*

El gramo es el peso que tiene, en el vacio, 1 centímetro cúbico de agua pura o destilada, tomada a su mayor densidad, esto es, a la temperatura de 4 grados del termómetro centígrado.

De lo cual se deduce que 1 litro de agua, en iguales condiciones, pesará 1 kilogramo.

Por ser el gramo un peso tan pequeño, se ha adoptado como medida usual el kilogramo, llamándole, vulgarmente, *kilo.*

272. Múltiplos y submúltiplos del gramo. — Los múltiplos del gramo son:

El decagramo,	que vale	10	gramos.		
El hectogramo,	» »	100	»	o	10 decagramos.
El kilogramo,	» »	1,000	»	o	10 hectogramos.
El quintal métrico,	» »	100,000	»	o	100 kilogramos.
La tonelada métrica,	» »	1.000,000	»	o	10 qq. métricos.

El miriagramo no se usa.

PESOS DE HIERRO FUNDIDO

50 kilogramos

10 kilogramos

20 kilogramos

5 kilogramos

2 kilogramos 1 kilogramo $^1/_2$ kilog. 2 hectog. 1 hectog. $^1/_2$ hectog.

Todos los múltiplos, menos el quintal métrico y la tonelada métrica, tienen peso efectivo. Estos dos no lo tienen porque su peso extraordinario no los hace manejables: son medidas imaginarias. Además de los múltiplos que hemos mencionado, existen otros *auxiliares* que tienen peso efectivo, para mayor comodidad en las compras y ventas. Estos múltiplos auxiliares son:

El	peso	de	2	gramos.	
El	»	»	5	»	
El	»	»	20	»	
El	»	»	50	»	
El	»	»	200	»	
El	»	»	500	»	o medio kilogramo.
El	»	»	2,000	»	o doble »
El	»	»	5,000	»	o de 5 kilogramos.
El	»	»	20,000	»	o de 20 »
El	»	»	50,000	»	o de 50 »

El gramo y sus divisores se emplean para pesar substancias medicinales, piedras preciosas y metales de gran valor. El kilogramo se toma como unidad en las transacciones al por menor. El quintal métrico y la tonelada métrica, para pesar carbón, hierro, piedras, etc.

Los submúltiplos son:

El decigramo, que vale 10 centigramos, o la décima parte del gramo.
El centigramo, que vale 10 miligramos, o la centésima parte del gramo.
El miligramo, que es la milésima parte del gramo

PESOS DE LATÓN

Todos los submúltiplos citados tienen peso efectivo. Existen, además, submúltiplos auxiliares que también lo tienen, y son:

El medio gramo,	o	peso de	5	decigramos.
El doble decigramo,	o	» »	2	»
El medio decigramo,	o	» »	5	centigramos.
El doble centigramo,	o	» »	2	»
El medio centigramo,	o	» »	5	miligramos.
El doble miligramo,	o	» »	2	»

Estos submúltiplos son unas laminitas metálicas, que van en una cajita y se cogen con unas pinzas.

PESOS PARA PIEDRAS Y METALES PRECIOSOS

Las medidas de peso métricas han substituído al quintal, arroba, libra, etc.

273. Relación entre las medidas de peso métricas y las antiguas de la misma clase. — La relación entre las medidas ponderales métricas y las antiguas es la siguiente:

1 quintal catalán	equivale	a	41'6	kilogramos.	
1 quintal castellano	»	a	46	»	aproximadamente.
2'5 libras catalanas	»	a	1	»	
1 libra »	»	a	400	gramos.	
1 onza »	»	a	33'33	»	

Medidas monetarias

274. Definición. — Medidas de *moneda*, o simplemente *monedas*, son las medidas que sirven para apreciar los valores de las cosas.

La unidad monetaria española es la peseta, pieza de plata cuyo peso es 5 gramos.

275. Clases de monedas. — Las monedas que se acuñan en España y en las principales naciones son de tres clases: de *oro*, de *plata* y de *bronce*.

Al oro y la plata se les agrega cierta cantidad de cobre, a fin de que las monedas tengan mayor consistencia y duración.

Las de bronce son un compuesto de cobre, estaño y zinc.

El metal que se añade para dar a las monedas mayor consistencia se llama *liga*.

276. Ley de la moneda. — Ley de la moneda es la proporción en que entran el metal puro y el de la liga.

Si decimos, por ejemplo, que la ley de las monedas de oro es de 900 milésimas, queremos significar que de cada 1000 partes en que podemos considerar dividida una moneda de oro, hay 900 partes de oro puro o fino y 100 de liga.

También puede decirse que *ley de una moneda es el cociente del peso de su metal puro por el peso total, o peso de dicha moneda.*

Así, si llamamos L a la ley, P' al peso del metal puro y P al peso total, tendremos:

$$L = \frac{P'}{P}. \qquad \textit{(Fórmula 1.}^{a}\textit{)}$$

Si multiplicamos por P los dos miembros de la igualdad anterior, resultará:

$$P \times L = P' \qquad \textit{(Fórmula 2.}^{a}\textit{)}$$

Lo cual nos dice que, *para hallar el peso del metal puro o fino, se multiplica el peso de la moneda por su ley.*

Y dividiendo por L los dos miembros de la última igualdad, tendremos:

$$P = \frac{P'}{L}. \qquad \textit{(Fórmula 3.}^{a}\textit{)}$$

Por cuya igualdad vemos que, *para hallar el peso de una moneda, dividimos el peso de su metal fino o puro por la ley.*

EJEMPLOS: 1.º *Siendo 5 gramos el peso de la pieza de a* 1 *pta.*, y 4'175 *gramos el peso de la plata pura que contiene, ¿qué ley tiene dicha moneda?*

Tenemos (*Fórmula* 1.ª):

$$L = \frac{4'175}{5} = 0'835 \text{ ley de la aleación.}$$

2.º *¿Qué cantidad de metal puro contiene la pieza de a* 1 *peseta, siendo su peso* 5 *gramos y* 0'835 *la ley de la aleación?*

Tenemos (*Fórmula* 2.ª):

$$P' = 5 \times 0'835 = 4'175 \text{ gs. de metal puro.}$$

3.º *Hállese el peso de la pieza de á* 1 *peseta, conteniendo ésta* 4'175 *gs. de plata* pura y siendo 0,835 la *ley de la aleación.*

Tenemos (*Fórmula* 3.ª):

$$P = \frac{4'175}{0'835} = 5 \text{ gs., peso de la pieza.}$$

277. Sistema monetario español. — Por convenio de 23 de diciembre de 1865, Francia, Italia, Bélgica y Suiza decidieron establecer un sistema monetario internacional, fundado en el uso simultáneo del oro y de la plata, y adoptando el *franco* como unidad monetaria, con múltiplos y divisores determinados.

España, por R. D. de 19 de octubre de 1868, aceptó la reforma convenida por las cuatro naciones antedichas, y por la ley de 31 de diciembre de 1870, se dispuso que el sistema monetario español se ajustase al peso y ley admitidos en el convenio internacional de referencia.

Las unidades monetarias legales son:

Monedas de oro	Monedas de plata	Monedas de bronce
De 100 pesetas	De 5 pesetas	De 0'10 peseta
» 50 »	» 2 »	» 0'05 »
» 20 »	» 1 »	» 0'02 »
» 10 »	» 0'50 »	» 0'01 »
» 5 »	» 0'20 »	

La ley de las monedas de oro y de las de plata de a 5 pesetas es de 900 milésimas; la de las demás monedas de plata es de 835 milésimas, y la de las de bronce es de 950 milésimas de cobre, 40 milésimas de estaño y 10 de zinc.

278. Talla. — *Talla de las monedas* es el peso que tiene un número determinado de ellas. La talla de las monedas de oro es la siguiente: 31 en kilo de las de a 100 ptas.; 62, de las de a 50 ptas.; 155, de las de a 20; 310, de las de a 10, y 620, de las de a 5 pesetas.

La talla de las de plata es como sigue: 40 en kilo de las de a 5 ptas.; 100, de las de a 2 ptas.; 200, de las de a 1 pta.; 400, de las de a 0'50 pesetas, y 1000 de las de a 0'20 ptas.

279. Permiso en ley y peso.—Como es operación dificilísima obtener con rigurosa exactitud el peso de las monedas y la ley a que deben ajustarse, se admite una *tolerancia* o *permiso*, en más o en menos, con sujeción a límites determinados.

La tolerancia en más se llama en *fuerte*, y la en menos, en *feble*.

SISTEMA MONETARIO ESPAÑOL

Ley de la moneda, de 19 de octubre de 1868, *igual a la que rige en Francia, Italia, Bélgica y Suiza, pero sin convenio de circulación*

Monedas	Ley exacta — Milésimas	Diámetro — Milímetros	Peso exacto — Gramos	PERMISO En la ley — Milésimas en fuerte o feble	PERMISO En el peso — Milésimas en fuerte o feble
MONEDAS DE ORO					
De 100 ptas.	900	35	32'25806	2	1
» 50 »	900	28	16'12903	2	1
» 20 »	900	21	6'45161	2	2
» 10 »	900	19	3'22580	2	2
» 5 »	900	17	1'61290	2	3
Por R. O. de 17 de octubre de 1876, se resolvió la acuñación de la pieza de oro de a 25 ptas., a la ley de 0'900, cuyo peso es 8'06451 gramos.					
MONEDAS DE PLATA					
De 5 ptas.	900	37	25	2	3
» 2 »	835	27	10	3	5
» 1 »	835	23	5	3	5
» 0'50 »	835	18	2'50	3	7
» 0'20 »	835	16	1	3	10
MONEDAS DE BRONCE					
De 0'10 ptas.	950 de cobre, 40 de estaño y 10 de zinc.	30	10	En el cobre, 10. En el estaño y zinc, 5.	10
» 0'05 »		25	5		10
» 0'02 »		20	2		15
» 0'01 »		10	1		15

Observaciones importantes. — 1.ª Si las monedas de oro llegan a perder de su peso el $^1/_2\ ^0/_0$ al permiso en feble, carecen de curso legal. Lo propio sucede con las de plata de a 5 ptas. si la pérdida de peso es de 1 $^0/_0$, y con las demás de plata si es de 5 $^0/_0$.

2.ª El curso forzoso de las monedas de plata y de las de bronce tiene su límite entre particulares. El límite, en las primeras es 50 pesetas, y en las segundas, 5 pesetas. El Estado recibe unas y otras de los contribuyentes, sin limitación alguna.

El curso forzoso de las monedas de oro y de las de plata de a 5 pesetas, no tiene límite.

3.ª La acuñación de las monedas de oro y plata de ley es libre y gratuita para los particulares. El Estado se reserva el derecho de acuñar la moneda divisionaria, que no deberá exceder de 1 peseta por habitante la de plata y de 2 pesetas por habitante la de bronce.

4.ª Del estado anterior se deduce que:

1.º En igualdad de peso, en España, el oro tiene un valor 15'50 veces mayor que la plata y 310 veces mayor que el bronce.

2.º En igualdad de peso, la plata vale 15'50 veces menos que el oro y 20 veces más que el bronce.

3.º En igualdad de peso, el bronce vale 310 veces menos que el oro y 20 veces menos que la plata.

De consiguiente, si 5 gramos de plata monedable valen 1 pta., 1 gramo de plata monedable valdrá $\frac{1}{5}$ de pta., y 1000 gs. o 1 Kg. valdrán $\frac{1 \times 1000}{5} = 200$ pesetas.

Si 1 *Kg. de plata monedable vale* 200 *ptas.*, y el oro vale 15'50 veces más que la plata, 1 *Kg. de oro monedable valdrá* 200 *ptas.* × 15'50 = 3100 *ptas. Y* 1 *Kg. de bronce valdrá* $\frac{200}{20} = 10$ *ptas.*

Por lo mismo, si 1 peseta en plata pesa 5 gramos, 1 peseta en oro pesará $\frac{5}{15'50}$ gs. = 0'322580 gramos.

Y 1 peseta en bronce pesará 5 × 20 = 100 gramos.

EJEMPLOS: 1.º *¿Cuál es el valor de un lingote de plata monedable, que pesa 3 Kgs. 400 gs.?*

Si 1 Kg. de plata vale 200 ptas., 3'400 Kgs. valdrán 200 × 3'4 = 680 ptas.

2.º *¿Qué peso tienen* 284600 *ptas. en oro?*

284600 ptas. en plata pesan 284600 × 5 gramos; la misma suma en oro pesará $\frac{284600 \times 5}{15'50} = 91806'45$ gramos.

3.º *Un lingote de oro monedable pesa* 4520 *gramos; ¿qué valor representa?*

4520 gramos de plata valen $\frac{4520}{5} = 904$ ptas.; el mismo peso, en oro, valdrá 15'5 veces más, esto es, 904 × 15'5 = 14012 ptas.

Relaciones que existen entre las unidades métricas

280. Relaciones de las medidas de superficie entre sí.—Son las siguientes:

El *metro cuadrado*	es igual a	1 *centiárea.*
El *decámetro cuadrado*	» » »	1 *área.*
El *hectómetro cuadrado*	» » »	1 *hectárea* o 100 *áreas.*
El *kilómetro cuadrado*	» » »	100 *hectáreas.*
El *miriámetro cuadrado*	» » »	10000 *hectáreas.*

Y recíprocamente:

1 *centiárea*	es igual a	1 *metro cuadrado.*
1 *área*	» » a	1 *decámetro cuadrado*, o 100 *metros cuadrados.*
1 *hectárea*	» » a	1 *hectómetro cuadrado*, o 10000 *metros cuadrados.*

281. Relaciones de las medidas cúbicas con las de capacidad y peso. — Si el litro es la capacidad de 1 decímetro cúbico, y el decímetro cúbico de agua pesa 1 kilogramo, estas relaciones serán como sigue:

1 *kilolitro*	igual a	1	*metro cúbico*	y pesa	1000	*kilogramos.*
1 *hectolitro*	» »	100	*decímetros cúbicos*	» »	100	»
1 *decalitro*	» »	10	» »	» »	10	»
1 *decilitro*	» »	100	*centímetros cúbicos*	» »	100	*gramos.*
1 *centilitro*	» »	10	» »	» »	10	»
1 *mililitro*	» »	1		» »	1	»

Entiéndase que el volumen medido es de agua.

282. División centesimal de la circunferencia. — La circunferencia se divide en 4 cuadrantes.

El cuadrante se divide en 100 grados (°)
El grado » » » 100 minutos (′)
El minuto » » » 100 segundos (″)

283. División sexagesimal. — La circunferencia se divide en 4 cuadrantes.

El cuadrante se divide en 90 grados.
El grado » » » 60 minutos.
El minuto » » » 60 segundos.

284. Medida del tiempo. — Las unidades de tiempo más usuales son el *año* y el *día.*

El año es el tiempo que emplea la tierra para recorrer su órbita.

El día, el tiempo empleado por la tierra para dar una revolución completa sobre su eje. Este día se llama *sideral.*

El día *civil* tiene unos 4 minutos más que el sideral.

Según el *Código de Comercio*, el año debe considerarse de 365 días; sin embargo, es costumbre bastante generalizada entre los comerciantes el considerarlo sólo de 360, y en este caso, se llama año *comercial.*

El año civil se llama también *económico*, *académico*, etc., y se divide en cuatro estaciones: *primavera*, *verano*, *otoño* e *invierno.*

La primavera comprende 92 días; el verano, 92; el otoño, 91; y el invierno, 90.

Para los múltiplos y submúltiplos del año y del día, véase la pág. 7.

Medidas de fuerza.—Consideradas las fuerzas como cantidades, se han comparado con unidades conocidas de *longitud* y *peso.*

Si se consideran relacionadas con los espacios recorridos por los objetos a que se aplican, se adopta como unidad de medida el *metro.*

Si se trata de medir su efecto en el estado de equilibrio, ejerciendo una presión o una tracción, como entonces pueden ser substituídas por pesos, se toma como unidad de medida el *kilogramo.*

Otras veces se trata de medir una fuerza relacionándola con el peso, la distancia y el tiempo, y entonces se toma como unidad el *kilográmetro*, que es la fuerza necesaria para elevar el peso de 1 kg. a la altura de 1 metro, en el tiempo de 1 segundo.

Para medir la potencia de las máquinas de vapor, se emplea como unidad el *caballo de vapor*, que equivale a 75 kilográmetros, o sea la fuerza necesaria para elevar 75 kgs. a 1 metro de altura, en el tiempo de 1 segundo, que se considera aproximadamente igual a la que desarrollan 2 caballos de tiro.

También se emplea la unidad llamada *dinamia*, o *gran unidad dinámica*, que equivale a 1000 kilográmetros.

Para medir las intensidades relativas de las fuerzas, se emplean unos aparatos llamados *dinamómetros.*

Medidas de vapor. — Para determinar la tensión o fuerza elástica de los vapores, se toma por unidad la *atmósfera* (atmósferas), que es la presión equivalente a 1 kg. 33 gs. por cm. cuadrado.

De modo, que la unidad de vapor es el peso que ejerce la atmósfera de la tierra sobre una superficie de 1 cm.

Para medir la presión atmosférica, se emplean los *barómetros*, y para apreciar la fuerza elástica de los vapores, los *manómetros*.

Medidas de temperatura.— Para apreciar las variaciones de temperatura o calor sensible de los cuerpos, se toma como unidad el *grado*, que es la centésima parte del aumento de volumen que experimenta un cuerpo sumergido, sucesivamente, en hielo fundente y en agua hirviendo.

Los instrumentos empleados al efecto se llaman *termómetros*.

Para determinar diferencias muy pequeñas de calor, se emplean los *termóscopos*, y cuando hay que medir temperaturas muy elevadas, como por ejemplo, las del interior de los hornos de fundición, se utilizan los *pirómetros*.

Medidas eléctricas.— Para medir la intensidad de una corriente eléctrica, se emplea el *amperio* (*), que es la unidad de medida de la corriente eléctrica que corresponde al paso de un *culombio* por segundo. El aparato empleado para medir el número de amperios de una corriente se llama *amperímetro*.

Para medir la cantidad eléctrica, se toma por unidad el *culombio* (**), que es la cantidad de electricidad capaz de separar de una disolución de plata 1'118 miligramos de este metal.

El *faradio* (***) es la unidad de medida de capacidad. Es la medida de la capacidad eléctrica de un cuerpo o de un sistema de cuerpos conductores que, con la carga de un culombio, produce 1 *voltio*.

El *voltio* (****) es la unidad de fuerza electromotriz. Es la cantidad de fuerza electromotriz que, aplicada a un condensador cuya resistencia sea de 1 *ohmio*, produce la corriente de 1 amperio.

El *ohmio* (*****) es la unidad de resistencia. Es la resistencia que, a cero grados, opone al paso de una corriente eléctrica una columna de mercurio de 1 milímetro cuadrado de sección y 106'3 centímetros de longitud.

El *julio* (******) es la unidad de medida del trabajo eléctrico, equivalente al producto de 1 voltio por 1 culombio.

El *vatio* (*******) es la cantidad del trabajo eléctrico equivalente a 1 julio por segundo.

Cada una de dichas unidades tiene un múltiplo y un divisor. El primero se forma anteponiendo a la palabra que expresa la unidad la palabra *mega*, y el segundo la palabra *micro*, que valen, respectivamente, 1.000,000 y 0,000,001.

Escritura de números métricos

Reducción de complejos métricos a incomplejos de una especie determinada

285. Cómo se escriben los números métricos.—La escritura de los números métricos se abrevia del modo siguiente:

1.º Las unidades principales, con su letra inicial. Así, 1 metro, 2 litros, 3 gramos, 3 áreas, se escribirán: 1 m., 2 l., 3 g., 3 a.

2.º Las unidades cuadradas y cúbicas, se indican escribiendo un 2 para las primeras y un 3 para las segundas en la parte superior de la derecha de la letra que las representa. Así, 6 metros cuadrados y 3 metros cúbicos se escribirán en esta forma: 6 m.^{2} y 3 m.^{3}

(*) De *Ampere* (*Andrés María*); Célebre físico francés, que falleció en el año 1830.

(**) De *Coulomb* (*Carlos Agustín de*). Eminente físico francés, que falleció en 1806.

(***) De *Faraday* (*Miguel*). Célebre físico y químico inglés, fallecido en 1867.

(****) De *Volta* (*Alejandro*). Célebre físico italiano, fallecido en 1827.

(*****) De *Ohm* (*Jorge Simón*). Célebre físico alemán a quien se debe el descubrimiento de las leyes de las corrientes eléctricas. Murió en 1854.

(******) De *Joule* (*Jacobo*) *Prescott*. Físico inglés nacido en Salfort en diciembre de 1818.

(*******) De *Wat* (*Jacobo*). Célebre ingeniero, mecánico y físico escocés. Murió en 1819.

3.º Los múltiplos y los submúltiplos se escriben con dos letras: la inicial del múltiplo o submúltiplo y la inicial de la unidad principal a que el múltiplo o submúltiplo se refiere; advirtiendo que la inicial del múltiplo se escribe mayúscula. V. gr.: 24 miriámetros, 3 kilómetros, 9 hectómetros, 5 decámetros, 3 metros, 5 decímetros, 3 centímetros y 2 milímetros, se escribirán: 24 Mm., 3 Km., 9 Hm., 5 Dm., 3 m., 5 dm., 3 cm. y 2 mm., etc.

286. Reducción de un complejo métrico a incomplejo de una especie determinada. — Para reducir un complejo métrico a incomplejo de una especie determinada, hay que tener en cuenta lo siguiente:

1.º Las medidas de longitud, capacidad y peso siguen el orden decimal, menos las de peso al pasar del quintal métrico al Kg., que siguen el centesimal porque el quintal m. tiene 100 Kg.

2.º Las medidas de superficie siguen el orden centesimal.

3.º Las cúbicas, el milesimal.

Luego un número de unidades de un orden cualquiera que no llegue a componer una unidad de la especie superior, se representa con una sola cifra en las medidas de longitud, peso y capacidad; con dos, en las de superficie, y con tres, en las de volumen.

Se escriben, empezando por la superior, las unidades de cada especie de complejo de modo que cada una esté a la derecha de su superior inmediata, ocupando, con los ceros necesarios, los lugares correspondientes a los órdenes que carecen de unidades, y escribiendo el signo decimal en la parte superior de la derecha de la cifra en que terminen los enteros, si la especie de unidades a que ha de referirse el incomplejo que se desea no es la última de las que forman el complejo dado.

Los lugares correspondientes a órdenes que carecen de unidades, se ocupan con un cero si el complejo es de longitud, peso o capacidad (menos al pasar del quintal m. al Kg.); con dos, si es de superficie, y con tres, si es de volumen.

EJEMPLOS: 1.º *¿Cuántos metros hay en 26 Km., 8 Dm. y 5 m.?*

Resolución: 26085 metros.

2.º *Reducir a enteros y fracción de Km., el complejo siguiente: 6 Mm., 7 Km., 2 Hm., 3 Dm., 5 m., 3 dm., 6 cm. y 9 mm.*

Resolución: 67'235369 Km.

3.º *Reducir a Hm.: 6 Mm., 9 Hm., 5 m. y 25 mm.*

Resolución: 609'05025 Hm.

4.º *Reducir a Kg. y fracción: 2 T. m., 6 qq. m., 5 Kg., 25 g.*

Resolución: 2605'025 Kg.

5.º *Reducir a Hl.: 5 l., 6 dl. y 5 cl.*

Resolución: 0'0565 Hl.

6.º *Reducir a a.: 14 Ha. y 9 ca.*

Resolución: 1400'09 a.

7.º *¿Cuántos m.² hay en 26 Km.², 7 Ha., 25 m.², 16 dm.² y 2 mm.²?*

Resolución: 26070025'160002 m.²

8.º *Reducir a m.³ y fracción: 36 m.³ y 128 cm.³*

Resolución: 36'000128 m.³

9.º *¿Cuántos Km. componen 7 Dm., 6 m., 4 cm. y 2 mm.?*

Resolución: 0'076042 Km.

287. Lectura de números métricos incomplejos.—Los números métricos incomplejos se leen de dos maneras: como números decimales, o descomponiéndolos, mentalmente, en unidades de sus diferentes órdenes y dando a cada uno la denominación correspondiente.

Así: 2562'25 l., se leerá 2,562 litros 25 céntimos, o bien: 2 Kl., 5 Hl., 6 Dl., 2 l., 2 dl. y 5 cl.

El número 26070025'160002 m.^{2} se leerá: 26070025 metros cuadrados, 160,002 millonésimas; o bien: 26 Km.^{2}, 7 Hm.^{2}, 25 m.^{2}, 16 dm.^{2} y 2 mm.^{2}, y también: 2607 Ha., 25 ca., 16 dm.^{2} y 2 mm.^{2}

Ejercicios y problemas sobre los números métricos para resolver mentalmente

I

1. ¿Qué es un meridiano terrestre? ¿Cómo se obtuvo el metro? ¿Cuántos metros mide un cuadrante de meridiano? ¿Y medio meridiano? ¿Y un meridiano?
2. ¿Qué es el metro? ¿Y el decímetro? Enséñeme usted 1 dm., 3 dms., medio metro, 9 dms. y 10 dms.
3. ¿Qué es el cm.? Enséñeme usted 1 cm., 5 cms., 10 cm., 30 cms., medio metro, 80 cms. y 100 cms.
4. Mida usted la longitud y la altura de un banco. Idem lo largo y ancho de la pizarra.
5. Mida usted lo largo y ancho de un cartapacio. Idem la longitud y la altura de una mesa.
6. Trace usted una recta en el encerado, y mídala después.
7. Mida usted el contorno de un libro. Idem el contorno de una libreta.
8. Trace usted en el encerado una línea de 45 cms. Idem otra de 72 cms. Idem otra de 85 cms.
9. ¿Qué es un decámetro? ¿Y un hectómetro? ¿Y un miriámetro?
10. ¿Cuántos metros hay en 4 Dm.? ¿Y en 5 Hm.? ¿Y en 8 Km.? ¿Y en 3 Mm.?
11. ¿Cuántos dms. hay en 5 ms.? ¿Y en 1 Dm.? ¿Y en 1 Hm.?
12. ¿Cuántos metros hay en 30 dms.? ¿Y en 450 cms.? ¿Y en 3,000 mm.? ¿Y en 40 Dms? ¿Y en 25 Hms.?
13. Si 1 metro de pana vale 5 pesetas, ¿cuánto vale 1 dm.? ¿Y 1 cm.? Y 1 Decámetro?
14. Pagando el m. de cinta a 8'40 ptas., ¿qué vale 1 dm.? ¿Y 1 cm.? ¿Y 1 Dm.? ¿Y medio metro? ¿Y un cuarto de m.?
15. Una pieza de tela mide 36 m. ¿Cuántas camisas se podrán obtener, necesitando 3 m. para cada una?
16. Una pieza de papel cuya longitud es 1 Dm., ha costado 8'50 pesetas. ¿Cuánto vale 1 m.? ¿Y 1 dm.?
17. Si 1 dm. de cordón vale 0'30 pesetas, ¿cuánto vale 1 m.? ¿Y 1 Dm.? ¿Y 4 decímetros? ¿Y 1 cm.?

II

18. ¿Qué es 1 metro cuadrado? ¿Y 1 Dm.^{2}? ¿Y 1 Hm.^{2}? ¿Y 1 Km.^{2}? ¿Y 1 dm.^{2}? ¿Y 1 cm.^{2}?
19. Cuántos dms.^{2} tiene 1 m.^{2}? ¿Cuántos cm.^{2}? ¿Cuántos mm.^{2}?
20. ¿Cuántos cms.^{2} tiene 1 dm.^{2}? ¿Cuántos mm.^{2}?
21. ¿Cuántos dms.^{2} tiene medio metro en cuadro? ¿Y la mitad de 1 m.^{2}?
22. ¿Cuántos cms.^{2} tiene medio m. en cuadro? ¿Y la mitad de 1 m.^{2}?
23. ¿Cuántos dms.^{2} tiene 1 Dm.^{2}? ¿Qué es el área?
24. ¿Cuántos medios metros en cuadro tiene un área? ¿A qué medida de superficie es igual 1 Ha.? ¿Y 1 ca.?
25. ¿Cuántas áreas tiene 1 Km.^{2}? Y 1 Hm.^{2}, ¿cuántas ca.?
26. ¿Cuántos Dm.^{2} hay en 10,000 dm.^{2}?
27. ¿Cuántos Hm.^{2} hay en 1,000 Km.^{2}? ¿Y en 20 Ha.?
28. ¿Cuánto es una décima parte de m.^{2}? ¿Y una centésima parte? ¿Y una milésima parte?

29. La décima parte de 1 m.², ¿cuántos cm.² y mm.² tiene?
30. ¿Qué son, respecto del m.², 5 dms.², 25 dms.² y 50 dms.²?
31. Si 1 m.² de paño vale 12 ptas., ¿cuánto vale 1 dm.²? ¿Y medio m. en cuadro? ¿Y la mitad de 1 m.²?
32. Pagando el dm.² de cierta tela a 0'20 ptas., ¿cuánto vale 1 m.²?
33. Pagando el medio m. en cuadro a 2 ptas., ¿qué valor tendrían 8 m.²?
34. Se ha de forrar de percal verde el sobre de una mesa que mide 10 decímetros de largo por 5 dms. de ancho. Pagando el percal a 12'50 ptas. el m.², ¿cuánto se gastará?
35. Si 1 dm.² de paño vale 0'10 ptas., ¿cuántos m.² se comprarán con 400 pesetas?
36. Pagando la ca. de terreno a 0'25 ptas., ¿cuántas áreas se comprarán con 100 duros? ¿Y cuántas Ha. con 1,000 duros?
37. Si el lado de un cuadrado se duplica, la superficie del nuevo cuadrado ¿cuántas veces es mayor que la del primero?
38. Si el lado de un cuadrado se hace tres veces mayor, la superficie del nuevo cuadrado, ¿qué relación guarda con la del primero? ¿Y si el lado se cuadruplicase?
39. El lado de un cuadrado mide 3 ms., y el lado de otro cuadrado mide el doble: ¿qué área tiene el segundo cuadrado?

III

40. ¿Qué es 1 metro cúbico? ¿Y 1 dm.³? ¿Y 1 cm.³? ¿Y 1 Dm.³ ¿ Y 1 mm.³?
41. ¿Cuántos dms.³ tiene 1 m.³? ¿Cuántos cm.³? ¿Cuántos mm.³?
42. ¿Cuántos cm.³ tiene 1 dm.³? ¿Cuántos mm.³?
43. ¿Cuántos dms.³ tiene medio m. en cubo? ¿Y la mitad de 1 m.³?
44. ¿Cuántos cms.³ tiene medio m. en cubo? ¿Y la mitad de 1 m.³?
45. ¿Cuántos dms.³ tiene una décima de m.³? ¿Y una centésima? ¿Y una milésima?
46. ¿Qué son 100 dms.³ con respecto al m.³? ¿Y 500 dms.³? ¿Y 750 dms.³?
47. ¿Qué es 1 cm.³ con respecto al m.³? ? ¿Y 100 cms.³? ¿Y 1,000 cms.³?
48. ¿Cuántos ms.³ hay en 1,000 dms.³? ¿Y en 8,450 dms.³? ¿Y en 1.000,000 de cms.³? ¿Y en 2.842,500 cms.³?
49. Tres décimas de m.³, ¿cuántos cm.³ son?
50. Si 1 m.³ de mármol de Carrara vale 1,500 ptas., ¿qué valor tiene 1 dm.³?
51. Un bloque de piedra granítica cuyo volumen es 2 ms.³ ha costado 800 pesetas: ¿qué valen 3 dm.³? ¿Y medio m. en cubo? ¿Y la mitad de 1 m.³?
52. Si el lado de un cubo es doble que el de otro, ¿qué relación guarda el volumen del cubo primero con el del segundo? ¿Y si el lado es tres veces mayor? ¿Y si lo es cuatro veces?
53. El lado de un cubo mide 4 dms., y el de otro mide el doble: ¿qué volumen tiene el segundo cubo?

IV

54. ¿Qué es el litro? ¿Qué es 1 Dl.? ¿Y 1 decilitro? ¿Y 1 doble Dl.? ¿Y 1 Kl.?
55. ¿Cuántos litros tiene 1 doble Dl.? ¿Y 1 medio Hl.?
56. ¿Cuántos litros hay en 4 Dls.? ¿Yen 5 Hls.? ¿Y en 3 Kls.?
57. ¿Cuántos litros hay en 60 dls.? ¿Y en 800 cls.? ¿Y en 1,586 cls.?
58. ¿Cuántos Dls. hay en 24,000 cls.? ¿Y en 46,500 cls.?
59. ¿Cuántos cls. tiene 1 medio Dl.? ¿Y 1 doble l.?
60. ¿Cuántos dobles dls. tiene 1 Dl.? ¿Cuántos medios dls. tiene 1 doble l.?
61. ¿Cuántos cuartos de l. tiene 1 Hl.? ¿Y 1 Kl.? ¿Y 1 medio Dl.?
62. ¿Pagando el l. de vino a 2 rs., ¿cuánto vale 1 doble Dl.?
63. Siendo 0'40 ptas. el valor de 1 l.: ¿cuánto vale 1 Dl.? ¿Y 1 Hl.? ¿Y 1 Kl.? ¿Y 1 dl.?
64. Un l. de ron vale 1 pta.: ¿cuánto costará 1 dl.? ¿Y 1 doble Dl.? ¿Y 1 medio Hl.?
65. Pagando el Dl. de vino a 6'20 ptas., ¿cuánto vale 1 l.? ¿Y 1 doble Dl.? ¿Y 1 Hl?
66. De una vasija que contenía 2'50 Dl., se sacaron 10 dobles ls. ¿Cuánto quedó?

67. Si 1 l. de alcohol vale 2 ptas., ¿cuánto vale 1 doble dl.?
68. Pagando el litro de ron a 2 ptas., ¿cuántos ls. se adquirirán con 100 pesetas? ¿Cuántos Dls., con 60 ptas.?
69. Un Dl. de trigo cuesta 3'50 ptas.: ¿cuánto costará 1 Hl.? ¿Y 1 doble l.?
70. Si el Hl. de trigo se paga a 14 ptas., ¿cuántos Kls. se podrán comprar con 280 ptas.?

V

71. ¿Qué es el gramo? ¿Cuándo se toma como unidad? ¿Cuándo se toma el Kg.? ¿Cuándo el quintal métrico, o la tonelada métrica?
72. ¿Cuántos gs. tiene 1 doble Kg.? ¿Y 1 quintal m.? ¿Y 1 Ton. m.?
73. ¿Cuántos Dgs. tiene 1 Kg.? ¿Y 1 quintal m.? ¿Y 1 Ton. m.?
74. ¿Qué es el Kg. con respecto al quintal m.? ¿Y el quintal m. con respecto a la Ton. m.?
75. ¿Cuántos dobles dgs. tiene 1 Hg.? ¿Y 1 Kg.?
76. En 2 Kgs., ¿cuántos Hgs. hay? ¿Cuántos Dgs.? ¿Cuántos dgs.? ¿Cuántos centigramos?
77. ¿Qué son 500 gs. con respecto al doble Kg.?
78. Expresar 8 Kgs. en Dgs. — Idem en Hgs. — Idem en dgs.
79. Si 1 dg. cuesta 0'40 ptas., ¿cuánto costará 1 g.?
80. Si 1 dg. cuesta 0'60 ptas., ¿cuánto costará 1 Dg.? ¿Y 1 Kg.? ¿Y 1 medio Hg.?
81. Pagando a 0'50 ptas. el Kg. de una mercadería, ¿cuánto valdría 1 quintal m.? ¿Y 1 Ton. m.? Y 1 Hg.?
82. Cuando el Dg. vale 2 ptas., ¿cuánto vale 1 Kg.? ¿Y 1 doble dg.?
83. Un quintal m. de madera seca vale 1'50 ptas.: ¿cuánto valen 10 toneladas m.? ¿Y 1 Kg.?
84. Medio Kg. de azúcar vale 2 pesetas: ¿cuánto vale 1 quintal m.? ¿Y 1 Hg.? ¿Y 1 decagramo?
85. Si 1 Dg. vale 0'20 ptas., ¿cuántos Kgs. se comprarán con 80 ptas.?
86. Pagando el Kg. de chocolate a 5 ptas., ¿cuántos quintales m. se comprarán con 200 duros?

VI

87. ¿Cuánto pesa, en el vacío, 1 litro de agua pura a la temperatura de 4 grados centígrados?
88. ¿Cuánto pesa el agua contenida en un recipiente cuyo interior es 1 m.^{3}? ¿Y si el interior fuese medio m. en cubo?
89. ¿Qué medida efectiva de peso pesa tanto como 1 Dl. de agua?
90. ¿Qué medidas efectivas de peso pesan tanto como medio Hl. de agua, medio Dl. de agua y 1 dl. de agua, respectivamente?
91. ¿Qué medidas efectivas de capacidad contienen 1 Kg. de agua, 1 Dg. de agua y 1 Hg. de agua, respectivamente?
92. ¿Qué medidas efectivas de capacidad contienen 100 Kgs. de agua, 500 gramos de agua y 250 gs. de agua, respectivamente?
93. ¿Qué medida de capacidad se llena exactamente con 1 quintal m. de agua?
94. Dígase el volumen y peso de 20 litros de agua, de 2 Hl. de agua y de 4 dls. de agua.
95. Dígase el peso y la capacidad de 9 dms.^{3} de agua y de 45 cms.^{3} de agua.

VII

96. ¿Cuántos céntimos hay en 4 pesetas? ¿Cuántas pesetas componen 2,400 céntimos? ¿Y 1,560 céntimos?
97. ¿Cuántos céntimos componen 3 piezas de a 2 ptas.?
98. ¿Cuántos $ hay en 2,500 céntimos de pta.?
99. ¿Cuánto pesa 1 pta.? ¿Cuánto pesan 40 ptas.?
100. ¿Qué peso tienen 20 piezas de a 5 ptas.?
101. He entregado 8 piezas de a 5 ptas., y 12 piezas de a 2 ptas. ¿Qué suma he pagado?

102. ¿Cuánto pesan 50 piezas de a 5 céntimos? ¿Y 100 piezas de a 10 céntimos?
103. He entregado una cantidad de monedas de plata de a 2 ptas., cuyo peso es 2 Kgs.: ¿qué suma he pagado?
104. ¿Cuál es el peso de 4 piezas de a´5 ptas., más 3 piezas de a 2 pesetas, más 2 pesetas?
105. Un lingote de plata a la ley de 835 milésimas pesa 2 Hgs.: ¿cuántas piezas de a 1 pta. se podrán fabricar con dicho lingote?

APLICACIONES DEL CÁLCULO ARITMÉTICO

Números concretos

288. — Los números concretos se dividen en *homogéneos* y *heterogéneos*, *incomplejos* y *complejos*. (**14.** — 2.º, 3.º, 4.º, 5.º *y* 6.º)

Operaciones con los números incomplejos

289. Suma.—Para efectuar la adición de los números concretos incomplejos, es necesario que los sumandos sean homogéneos. La suma se verifica como la de los números abstractos, y es de la misma especie que los sumandos.

290. Resta.—Para efectuar la substracción de los números concretos incomplejos, los datos han de ser, como en la suma, homogéneos; la operación se verifica como si fuesen abstractos, y la resta es de la misma especie que los datos.

291. Multiplicación.—En la multiplicación de números concretos, el multiplicador se considera como número abstracto, y por lo mismo, el producto es de la misma especie que el multiplicando. La operación se verifica como si los números fuesen abstractos.

292. División.—En la división de concretos, pueden ocurrir dos casos:

1.º *Que dividendo y divisor sean homogéneos.*
2.º *Que sean heterogéneos.*

En el primer caso, el cociente puede considerarse como un número abstracto que indica la relación entre los datos. Las condiciones del problema determinarán la especie de sus unidades.

En el segundo caso, el divisor puede considerarse como un número abstracto, y las unidades del cociente serán de la misma especie que las del dividendo.

Reducción de números incomplejos a complejos y viceversa

293. Reducción de un número incomplejo a otro equivalente de orden inferior. — *Se multiplica el número de unidades inferiores que tiene una unidad del incomplejo dado, por este mismo considerado como abstracto.*

EJEMPLO.: *¿Cuántos reales componen 46 duros?*

Si 1 duro tiene 20 reales, 46 duros tendrán 46 veces 20 reales.

Luego 46 $ = 20 reales × 46 = 920 reales.

294. Reducción de un incomplejo a otro equivalente de orden superior. —*Se divide el incomplejo dado, considerado como abstracto, por el número de veces que su unidad está contenida en una unidad del orden superior.*

EJEMPLO: *Reducir* 4600 *libras castellanas a quintales castellanos.*

Como 1 quintal castellano tiene 100 libras, en 4600 libras habrá tantos quintales como veces contengan las libras de 1 quintal.

Luego 4600 libras = 4600 : 100 = 46 quintales castellanos.

295. Reducción de un complejo a incomplejo equivalente de orden inferior.—*Se reducen sus unidades de orden superior al orden inferior inmediato, y se suman con las de este orden que haya en el complejo; se hace lo mismo con esta suma, y así sucesivamente.*

EJEMPLO: *Reducir* 4 *días,* 3 *horas,* 20 *minutos y* 45 *segundos, a segundos.*

	4	días
×	24	(horas que tiene el día)
	96	horas
+	3	horas (del complejo)
	99	horas
×	60	(minutos que tiene la hora)
	5940	minutos
+	20	minutos (del complejo)
	5960	minutos
×	60	(segundos que tiene el minuto)
	357600	segundos
+	45	segundos (del complejo)
	357645	segundos.

Luego 4 días, 3 horas, 20 minutos y 45 segundos = 357,645 segundos.

296. Reducción de un complejo a incomplejo equivalente de cualquier orden de su especie. — *Se reduce a incomplejo de su orden inferior, y el resultado obtenido se divide por el número de veces que la unidad inferior esté contenida en una unidad de la especie a que ha de referirse el incomplejo.*

EJEMPLO: *Reducir* 42 *varas,* 2 *pies y* 9 *pulgadas a incomplejo de pies.*

42 varas, 2 pies y 9 pulgadas = 1545 pulgadas (**295**).

$$\text{Luego } 42 \text{ v., } 3 \text{ p. y } 9 \text{ pl.} = \frac{1545}{12} = 128\frac{3}{4} \text{ pies.}$$

297. Para reducir un complejo a incomplejo de una especie dada, también puede procederse así:

1.º *Las unidades superiores a la dada, si las hay, se reducen a unidades de esta especie.*

2.º *Las unidades inferiores a la dada, se reducen todas a la última especie, y se dividen por las unidades de esta especie contenidas en una unidad de la superior dada. El cociente es la fracción decimal equivalente.*

3.º *Se escribe la parte decimal a la derecha de la parte entera.*

EJEMPLOS: 1.º *¿A cuántos quintales y fracción equivalen 3 quintales, 2 arrobas, 5 libras y 9 onzas, peso catalán?*

Resolución: La especie dada es el quintal, y no hay, en el problema, unidades superiores a ella.

Reduzcamos a la última especie las unidades inferiores a la dada.

2 arrobas, 5 libras y 9 onzas
× 26 libras

57 libras
× 12 onzas

123
57

693 onzas, que se dividen por las onzas que tiene el quintal; esto es, la unidad dada. El quintal catalán tiene 1248 onzas, luego

6,930 / 1,248
0 6900 0'555 qq.
06600
0360

De modo, pues, que las 2 arrobas, 5 libras y 9 onzas equivalen a 0'555 qq. Juntemos, ahora, la parte decimal a la entera, 3 qq., y tendremos que el complejo del problema propuesto equivale a 3'555 qq.

2.º *Redúzcanse a cargas y fracción 2 pipas, 1 carga, 5 mallales y 10 porrones (medidas de Gerona para vino y licores).*

Parte entera:

2 pipas y 1 carga = 9 cargas.

5 mallales y 10 porrones.
× 16 porrones

90 porrones, que se dividen por los porrones de una carga, esto es, 128 porrones.

900 /128
00400 0'703 cargas, parte decimal.
016

Resultado: 9'703 cargas.

298. Reducción de un incomplejo de especie inferior a complejo equivalente. — *Se reduce el incomplejo propuesto a la especie superior inmediata* (**294**); *el cociente entero se reduce a la especie inmediata superior siguiente, y así sucesivamente, hasta obtener un cociente de la especie superior del complejo, o bien un cociente cero. El cociente último y los residuos de las divisiones respectivas, componen el complejo equivalente al número incomplejo propuesto. En cada división, el residuo es de la misma especie que el dividendo respectivo.*

EJEMPLO: *Reducir* 8540 *onzas (peso castellano) a número complejo.*

8540 *onzas* / 16 *onzas* (que tiene 1 libra)
054 53'3 *libras* / 25 libras (que tiene 1 arroba)
060 03 3 21 *arrobas* / 4 arrobas (que tiene 1 quintal)
12 *onzas* 0 8 *libras* 1 *arroba* 5 *quintales*

Son 5 quint. cast., 1 arroba, 8 libras y 12 onzas.

299. Reducción de un quebrado incomplejo de especie superior a complejo equivalente. — *Se divide el numerador por el denominador, y el cociente entero será la primera especie superior del complejo que se desea; se reduce el residuo (que es de la misma especie que el dividendo) a la especie inferior inmediata, y el resultado se divide por el denominador del quebrado propuesto, y así continuamos hasta obtener la especie inferior del complejo.*

EJEMPLO: *Reducir el quebrado* $\frac{45}{7}$ *de quintal castellano a complejo.*

```
  45 qq.   / 7
   3      ----------------------------------------------------------------
×  4 @      6 qq., 1 @, 18 libras, 9 onzas, 2 adarmes, 0 tomines y 10 2/7 granos.
-------
  12 @
   5                              1
× 26 libras                    × 16 adarmes
-------                        ---------
 130 libras                      16 adarmes
  60                              2
   4                            × 3 tomines
× 16 onzas                     ---------
-------                           6 tomines
  64 onzas                      × 12 granos
                               ---------
                                 72 granos
                                 02
```

Luego $\frac{45}{7}$ de quintal = 6 *qq.*, 1 @, 18 *libras*, 9 *onzas*, 2 *adarmes y* 10 $\frac{2}{7}$ *granos.*

300. Reducción de un incomplejo métrico a otro equivalente de especie inferior. — Las medidas de longitud, peso y capacidad sabemos que decrecen de 10 en 10; las de superficie, de 100 en 100, y las de volumen, de 1000 en 1000; luego *para reducir un incomplejo métrico a otro equivalente de especie inferior, se multiplica por la unidad seguida de ceros. Se añaden a su derecha los ceros necesarios si el incomplejo es entero, y si fuese decimal, se hace correr la coma hacia la derecha los lugares necesarios, supliendo con ceros los que faltaren.*

EJEMPLOS: 1.° *Reducir* 246 *m. a centímetros.*

Como 1 m. tiene 100 centímetros, tendremos que

246 m. = 246 × 100 = 24600 centímetros.

2.° *Reducir* 125'4 *Dl. a decilitros.*

Decreciendo las unidades de capacidad de 10 en 10, multiplicando los Dl. por 10, serán l., y multiplicando los l. por 10, serán decilitros; pero multiplicar 2 veces por 10 es multiplicar por 100; luego

125'4 Dl. = 125'4 × 100 = 12540 dl.

3.° *Reducir* 467'5089693 *Dm.*^{2} *a cm.*^{2}

Como que las unidades superficiales decrecen de 100 en 100, multiplicando los Dm.^{2} por 100, serán m.^{2}; multiplicando los m.^{2} por 100, serán dm.^{2}, y multiplicando los dm.^{2} por 100, serán cm.^{2}; pero multiplicar 3 veces por 100 es multiplicar por 1.000,000; luego

467'5089693 Dm.^{2} = 467'5089693 × 1.000,000 = 467508969'3 cm.^{2}

4.° *Reducir* 0'82572463 *Dm.*^{3} *a dm.*^{3}

Las medidas de volumen decrecen de 1000 en 1000; luego multiplicando los Dm.^{3} por 1000, serán m.^{3}, y multiplicando los m.^{3} por 1000, serán dm.^{3}; pero multiplicar dos veces por 1000 es igual a multiplicar por 1.000,000; luego

0'82572463 Dm.^{3} = 0'82572463 × 1.000,000 = 825724'63 dm.^{3}

5.° *Reducir* 467'3252 *Ha. a dm.*^{2}

Recordando la relación que guardan entre sí las medidas de superficie (**259.—260.—261.—262**), tenemos que

467'3252 Ha. = 467'3252 × 1.000,000 = 467325200 dm.^{2}

6.° *Reducir* 486 *quintales m. a gramos.*

486 q. m. = 486 × 100,000 = 48600000 gramos.

301. Reducción de un incomplejo métrico a otro equivalente de especie superior. — Las medidas de longitud, peso y capacidad crecen de 10 en 10; las de superficie, de 100 en 100, y las de volumen, de 1000 en 1000; luego *para reducir un incomplejo métrico a otro equivalente de especie superior, basta dividirle por la unidad seguida de ceros. Se separan, con la coma, de derecha a izquierda, los ceros necesarios, si el incomplejo es entero, y si fuese decimal, se hace correr la coma hacia la izquierda los lugares necesarios, supliendo con ceros los que faltaren.*

EJEMPLOS: 1.º *Reducir* 245063 *litros a Kl.*

Como las medidas de capacidad crecen de 10 en 10, dividiendo los l. por 10, serán Dl.; dividiendo los Dl. por 10, resultarán Hl., y dividiendo los Hl. por 10, resultarán Kl.; pero dividir un número 3 veces por 10, es dividirle por 1000; luego

245063 litros = 245063 : 1000 = 245'063 Kl.

2.º *Reducir* 836 *m. a miriámetros.*

Dividiendo los m. por 10, serán Dm.; dividiendo los Dm. por 10, serán Hm.; dividiendo los Hm. por 10, resultarán Km., y dividiendo los Km. por 10, resultarán Mm.; pero dividir 4 veces por 10, es dividir por 10,000; luego

836 m. = 836 : 10,000 = 0'0836 Mm.

3.º *Reducir* 7489'762 *gramos a Kg.*

Dividiendo 3 veces por 10, o por 1000, serán Kg.; luego

7489'762 gramos = 7489'762 : 1000 = 7'489762 Kg.

4.º *Reducir* 1427'654 *m.²: 1.º, a Km.²; 2.º, a Ha.*

1.º Las medidas superficiales crecen de 100 en 100; luego dividiendo los m.² por 100, serán Dm.²; dividiendo los Dm.² por 100, serán Hm.², y dividiendo los Hm.² por 100, serán Km.²; pero dividir 3 veces por 100 es dividir por 1.000,000; luego

1427'654 m.² = 1427'654 : 1.000,000 = 0'001427654 Km.²

2.º Recordando la relación que guardan entre sí las medidas de superficie (**280**), tendremos que dividiendo los m.² 2 veces por 100, o por 10,000, resultarán Ha. Luego

1427'654 m.² = 1427'654 : 10000 = 0'1427654 Ha.

5.º *Reducir* 27059369'27 *cm.³ a m.³*

Las medidas de volumen crecen de 1000 en 1000; luego dividiendo los cm.³ 2 veces por 1000, o por 1.000,000, resultarán m.³ Luego

27059369'27 cm.³ = 27059369'27 : 1,000.000 = 27'05936927 m.³

302. Reducción de un complejo métrico a incomplejo de una especie inferior determinada. (**286** y *Ejemplos.*)

303. Reducción de un número incomplejo métrico a complejo. — *Se separan sus cifras, empezando por la derecha, una a una, si el complejo es de longitud, peso o capacidad; dos a dos, si es de superficie, y tres a tres, si es de volumen.*

EJEMPLOS: 1.º *Reducir* 246,789 *milímetros a complejo.*

Será: 2 Hm., 4 Dm., 6 m., 7 dm., 8 cm. y 9 mm.

2.º *Reducir* 986030054 *cm.² a complejo.*

Será: 9 Hm.², 86 Dm.², 3 m.² y 54 cm.²

O bien: 9 Ha., 86 a., 3 ca. y 54 cm.²

3.º *Reducir* 9843000289050 *cm.³ a complejo.*

Será: 9 Hm.³, 843 Dm.³, 289 dm.³ y 50 cm.³

4.º *Reducir* 5946734'256 *gramos a complejo.*

Será: 5 toneladas m., 9 quintales m., 46 Kg., 7 Hg., 3 Dg., 4 g., 2 dg., 5 cg. y 6 mg.

Operaciones con los números complejos

304. Las definiciones de la adición, substracción, multiplicación y división de los números abstractos convienen a los números concretos de cualquier especie que éstos sean. En la suma y en la resta, los datos, naturalmente, han de ser homogéneos.

ADICIÓN

305. *Para sumar los números complejos, se colocan unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades de igual denominación. Se tira una raya debajo del último sumando y, empezando por la derecha, se suman las unidades de igual denominación que hay en todos los sumandos. De la suma de cada denominación, se sacan las unidades de la denominación superior inmediata para agregarlas a ellas, y se escriben las unidades sobrantes debajo de la raya, o cero en el caso de no quedar ninguna.*

EJEMPLO: *Tengo 8 qq., 3 arrobas, 6 libras, 2 onzas, peso catalán; quiero comprar 26 qq., 2 arrobas, 3 libras y 10 onzas, y recibiré por otro conducto 9 qq. y 15 libras. ¿Cuánto tendré?*

Resolución

	8 qq.,	3 @,	6 libras,	2 onzas
+	26 »	2 »	3 »	10 »
+	9 »	0 »	15 »	0 »
Suma	44 qq.,	1 @,	25 libras,	0 onzas

La suma de las onzas es 12, y como 12 onzas componen 1 libra, esto es, una unidad de la denominación superior inmediata, hemos reservado 1 libra para sumarla con las unidades de la denominación siguiente, escribiendo 0 en la suma.

La suma de las libras es 25, y como en 25 libras no hay ninguna unidad de la denominación superior inmediata, escribimos 25 libras en la suma.

La suma de las arrobas es 5, y como en 5 arrobas hay una unidad de la denominación superior inmediata más 1 arroba, escribimos 1 arroba en la suma, y reservamos 4 arrobas, o 1 quintal, para sumarlo con las unidades de la denominación siguiente, cuya suma es 44.

306. Método de reducción. — *Por el método de* REDUCCIÓN, *se reducen los sumandos a incomplejos* (**297**), *y se procede luego como en la suma de decimales.*

Resolviendo el ejemplo anterior, tendremos:

	8 qq.,	3 @,	6 libras,	2 onzas	= 8'809 qq.
+	26 »	2 »	3 »	10 »	= 26'537 »
+	9 »	0 »	15 »	0 »	= 9'144 »
				Suma	44'490 qq.

Valuación del resultado

```
 44'490 qq.
 ×    4 @
 ----------
  1'960 @
 ×   26 libras
 ----------
   5760
  1920
 ----------
 24'960 libras
 ×   12 onzas
 ----------
  1920
  960
 ----------
 11'520 onzas
```

La suma es, pues, 44 qq., 1 arroba, 24 libras y 11'52 onzas, cuya insignificante diferencia no altera el resultado.

307. Método de quebrados. — *También podría procederse reduciendo cada uno de los sumandos a incomplejo en la forma de* QUEBRADO (**296**), *y sumando luego los quebrados obtenidos.*

SUBSTRACCIÓN

308. *Para restar los números complejos, se escribe el substraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de igual denominación; se tira una raya debajo del substraendo y, empezando por la derecha, se restan las unidades de cada denominación del substraendo de sus respectivas del minuendo, escribiendo los restos debajo de la raya. Si alguna denominación del substraendo tuviese más unidades que su respectiva del minuendo, se agrega al minuendo una unidad de la denominación inmediata superior descompuesta en unidades de la denominación que se resta, y al restar la denominación inmediata superior del substraendo, se le añade una unidad.*

Ejemplo: *Si de 46 $, 3 ptas., 2 reales, quito 9 $, 2 ptas. y 3 reales, ¿cuánto me quedará?*

Resolución:

	46 $,	3 ptas.,	2 reales
—	9 »	2 »	3 »
Resto	37 $,	0 ptas.,	3 reales

De los 2 reales del minuendo, no podemos restar los 3 reales del substraendo; luego a los 2 reales del minuendo, añadimos una unidad de la denominación superior inmediata, descompuesta en unidades de la denominación que se resta, esto es, 1 peseta descompuesta en reales, que es 4 reales. Ahora, 2 rs. más 4 rs. son 6 reales; quitando 3 rs., quedan 3 reales, que los escribimos en el resto.

Añadiendo a la denominación superior inmediata del substraendo 1 peseta para que el resto no altere, tenemos que, si de 3 ptas. del minuendo quitamos 3 del substraendo, queda *cero*, que escribimos en el resto.

Si de 46 duros del minuendo quitamos 9 del substraendo, quedan 37 duros, que escribimos en el resto.

309. Método de reducción.—*Se reducen minuendo y substraendo a incomplejos* (**297**), *y se procede como en la resta de decimales.*

Resolviendo el ejemplo anterior, tendremos:

	46 $,	3 ptas.,	2 reales	=	46'70 $
—	9 »	2 »	3 »	=	— 9'55 »
			Resto		37'15 $

Valuación del resultado

37'15 $
× 5 ptas.
0'75 ptas.
× 4 reales
3 00 reales

El resto es, pues, 37 $ y 3 reales.

310. Método de quebrados.—*También podría procederse reduciendo minuendo y substraendo a incomplejos en la forma de quebrados* (**296**), *y restando los quebrados obtenidos.*

MULTIPLICACIÓN

311. En la multiplicación de los números complejos, pueden ocurrir tres casos:

1.º *Multiplicar un complejo por un incomplejo.*
2.º *Multiplicar un incomplejo por un complejo.*
3.º *Multiplicar un complejo por otro.*

312. *Para multiplicar un complejo por un incomplejo, se considera éste como abstracto, y se multiplican por él las diferentes denominaciones del complejo. La suma de los productos parciales es el producto total.*

Ejemplo: *¿Cuánto valdrán 7 arrobas de café, a 6 $, 4 pesetas y 3 reales la arroba?*

Tomaremos por multiplicando el valor de 1 arroba, y por multiplicador, el número de arrobas.

$$\begin{array}{r} 6\ \$,\ \ 4\ \text{ptas.},\ \ 3\ \text{reales.} \\ \times\ \ 7 \\ \hline \end{array}$$

Valor de las 7 arrobas............ 42 $, 28 ptas., 21 reales.

313. Método de reducción. — *Se reduce el multiplicando a incomplejo* (**297**), *y la cuestión se convierte en la multiplicación de un decimal por un entero.*

Resolvamos el ejemplo anterior:

6 $, 4 ptas. y 3 reales = 6'95 $.

Valor de las 7 @ = 6'95 × 7 = 48'65 $.

314. Método de quebrados.—*Se reduce el complejo a incomplejo en la forma de quebrado* (**296**), *y la cuestión se convierte en la multiplicación de un quebrado por un entero.*

315. *Para multiplicar un incomplejo por un complejo, se reduce éste a incomplejo en la forma de quebrado* (**296**), *y la cuestión se convierte en la multiplicación de un entero por un quebrado.*

Ejemplo: *Si 1 quintal castellano de azúcar vale 5 duros, ¿qué valor tendrán 4 qq., 2 arrobas y 3 libras?*

$$4\ \text{qq.},\ 2\ @\ \text{y}\ 3\ \text{libras} = \frac{453}{100}\ \text{qq. cast.}$$

$$\text{Valor de 4 qq., 2 @ y 3 libras} = 5 \times \frac{453}{100} = 22\,\frac{13}{20}\ \$.$$

316. Método de reducción. — *Se reduce el complejo a incomplejo* (**297**), *y la cuestión se convierte en la multiplicación de un entero por un decimal.*

Resolviendo el ejemplo anterior:

4 qq., 2 @ y 3 libras = 4'53 qq.

Valor de la mercadería, 5 × 4'53 = 22'65 $.

317. *Para multiplicar un complejo por otro, se reducen ambos a incomplejos en la forma de quebrado* (**296**), *y la cuestión se convierte en la multiplicación de dos quebrados.*

Ejemplo: *Pagando la cana de tela a razón de 2 duros, 3 pesetas y 2 rs., qué valor tendrán 8 canas, 5 palmos y 2 cuartos.*

$$2\ \$,\ 3\ \text{ptas. y}\ 2\ \text{reales} = \frac{54}{20}\ \$.$$

$$8\ \text{canas, 5 palmos y 3 cuartos} = \frac{278}{32}\ \text{canas.}$$

$$\text{Valor de la mercadería, } \frac{54}{20} \times \frac{278}{32} = 23\,\frac{73}{160}\ \$.$$

318. Método de reducción.—*Se reducen ambos factores complejos a incomplejos* (**297**), *y la cuestión se convierte en la multiplicación de dos números decimales.*

Resolvamos el ejemplo anterior:

2 $, 3 ptas. y 2 rs. = 2'7 $.

8 canas, 5 palmos y 2 cuartos = 8'687 canas.

Valor de la mercadería, 2'7 × 8'687 = 23'45 $.

319 Método de partes alícuotas (*) — *Para verificar la multiplicación de complejos por este método, se descompone el multiplicador en partes alí-*

(*) *Parte alícuota* significa *factor* o *divisor*. *Parte alícuota de la unidad* es cada una de las partes o fracciones iguales en que la unidad entera puede dividirse.

cuotas de la unidad cuyo valor se conoce; se hallan los valores de estas partes tomadas del multiplicando, y la suma de los valores parciales será el producto pedido.

EJEMPLOS: 1.º *Pagando la libra de cierta droga a* $40\frac{3}{4}$ *reales, ¿cuánto valdrán* $8\frac{5}{8}$ *libras?*

$$\text{Valor de 8 libras} = 8 \times 40\frac{3}{4} = \ldots\ldots\ldots\ 326 \text{ reales.}$$

$$\text{»}\quad \frac{4}{8}\text{ de libra} = \frac{40\frac{3}{4}}{2} = \ldots\ldots\ldots\ 20\frac{3}{8}\quad\text{»}$$

$$\text{»}\quad \frac{1}{8}\quad\text{»} = \frac{40\frac{3}{4}}{8} = \ldots\ldots\ldots\ 5\frac{3}{32}\quad\text{»}$$

$$\text{Valor de } 8\frac{5}{8}\text{ libras} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 351\frac{15}{32}\text{ reales.}$$

2.º *Hállese el valor de 20 canas, 3 palmos y 2 cuartos de paño a 8 pesetas la oana.*

$$\text{Valor de 20 canas} = 8 \times 20 = \ldots\ldots\ldots\ 160 \text{ pesetas.}$$

$$\text{»}\quad 1\text{ palmo} = \frac{8}{8} = \ldots\ldots\ldots\ 1\quad\text{»}$$

$$\text{»}\quad 2\quad\text{»} = \frac{8 \times 2}{8} = \ldots\ldots\ldots\ 2\quad\text{»}$$

$$\text{»}\quad 1\text{ cuarto} = \frac{8}{32} = \ldots\ldots\ldots\ 0\frac{1}{4}\quad\text{»}$$

$$\text{»}\quad 1\quad\text{»} = \frac{8}{32} = \ldots\ldots\ldots\ 0\frac{1}{4}\quad\text{»}$$

$$\text{Valor de 20 canas, 3 palmos y 2 cuartos.} = 163\ {}^1/_2\text{ ptas.}$$

3.º *A razón de 2 duros, 3 ptas. y 1 real la vara, ¿cuál será el valor de 5 varas, 2 pies y 4 pulgadas de cierta tela?*

Valor de 1 vara .... 2 \$, 3 ptas., 1 real.
5 varas, 2 pies, 4 pulgadas.

$$\text{Valor de 5 varas} = 5 \times (2\ \$, 3\text{ ptas., } 1\text{ real}) \ldots\ldots = 10\ \$,\ 15\text{ ptas., } 5\text{ reales.}$$

$$\text{»}\quad 1\text{ pie}\left(\frac{1}{3}\text{ de vara}\right)\frac{= 2\ \$, 3\text{ ptas., } 1\text{ real}}{3} \ldots = 0\ \text{»}\ 4\ \text{»}\ 1\frac{2}{3}\ \text{»}$$

$$\text{»}\quad 1\ \text{»}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0\ \text{»}\ 4\ \text{»}\ 1\frac{2}{3}\ \text{»}$$

$$\text{»}\quad 4\text{ pulgadas}\left(\frac{1}{3}\text{ de pie}\right) = \frac{4\text{ ptas., } 1\frac{2}{3}\text{ reales}}{3} = 0\ \text{»}\ 1\ \text{»}\ 1\frac{8}{9}\ \text{»}$$

$$\text{Valor de 5 varas, 2 pies y 4 pulgadas} \ldots\ldots\ldots = 15\ \$,\ 1\text{ pta., } 2\frac{2}{9}\text{ reales.}$$

DIVISIÓN

320. En la división de complejos, pueden ocurrir tres casos:

1.º *Dividir un complejo por un incomplejo.*
2.º *Dividir un incomplejo por un complejo.*
3.º *Dividir un complejo por otro.*

321. *Para dividir un complejo por un incomplejo, se divide cada denominación del dividendo por el divisor, y la suma de los cocientes parciales es el cociente total.*

Los residuos que pueden resultar en las divisiones parciales, se reducen a la denominación inferior inmediata, y el producto se suma con las unidades de la misma denominación que hubiese en el dividendo, siendo esta suma el dividendo parcial.

EJEMPLO: *Se han pagado 47 $, 3 pesetas, 3 reales, por 9 quintales castellanos de una mercadería.—Averígüese el valor de 1 quintal.*

(Dividendo) .. 47 $, 3 ptas., 3 reales / 9 (Divisor)

2 = 10 »

(2.º dividendo parcial) 13 ptas. — 5 $, 1 pta., $2\frac{1}{9}$ reales.

4 = 16 reales

(3.er dividendo parcial)...... 19 reales

1

Valor de 1 quintal: 5 $, 1 pta., $2\frac{1}{9}$ reales.

322. Método de reducción.—*Se reduce el complejo a incomplejo* (**297**), *y la cuestión se convierte en la división de un decimal por un entero.*

Resolvamos el ejemplo anterior:
47 $, 3 ptas., 3 rs. = 47'75. Luego 47'75 : 9 = 5'305 $, valor de 1 quintal.

323. Método de quebrados.—*Se reduce el complejo a incomplejo en la forma de quebrado* (**296**), *y la cuestión se convierte en la división de un quebrado por un entero.*

324. *Para dividir un incomplejo por un complejo, se reduce éste a incomplejo y se dividen como si fuesen números abstractos.*

EJEMPLO: *La compra de 5 arrobas, 2 libras y 9 onzas de una mercadería, peso castellano, ha importado 138 pesetas. ¿Cuánto vale 1 arroba?*

5 @, 2 libras y 9 onzas = $\frac{2041}{400}$ arrobas; luego 1 @ valdrá:

$$138 \text{ ptas.} : \frac{2041}{400} = \frac{138 \times 400}{2041} = \frac{55200}{2041} = 27\frac{93}{2041} \text{ pesetas.}$$

325. Método de reducción.—*Se reduce el complejo a incomplejo* (**297**), *y la cuestión se convierte en la división de un entero por un decimal.*

Resolvamos el ejemplo anterior:
5 @, 2 libras y 9 onzas = 5'1025 arrobas. Luego el valor de 1 @ será 138 pesetas : 5'1025 @ = 27'045 ptas.

326. *Para dividir un complejo por otro, se reducen ambos a incomplejos, y se dividen como abstractos.*

EJEMPLO: *Si con 18 $, 3 pesetas y 2 reales hemos comprado 4 varas, 2 pies y 10 pulgadas de damasco de seda, determínese a cuánto hemos pagado la vara.*

18 $, 3 ptas. y 2 reales = $\frac{374}{20}$ $. 4 varas, 2 pies y 10 pulgadas = $\frac{178}{36}$ varas.

Luego el valor de 1 vara será:

$$\frac{374}{20}\,\$: \frac{178}{36} \text{ varas} = \frac{374 \times 36}{20 \times 178} = \frac{13464}{3560} = \frac{3361}{890} = 3\frac{691}{890}\,\$.$$

327. Método de reducción.—*Se reducen ambos a incomplejos* (**297**), *y la cuestión se convierte en la división de dos números decimales.*

Resolvamos el ejemplo anterior:
18 $, 3 ptas., y 2 reales = 18'7 $; 4 varas, 2 pies y 10 pulgadas = 4'944 varas. Luego 1 vara vale 18'7 $: 4'944 varas = 3'782 $.

Operaciones con los complejos métricos

328. Las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos métricos pueden resolverse, evidentemente, como se ha explicado al tratar de los complejos ordinarios. (De **304** a **327.**)

Lo más sencillo y natural es reducirlos a incomplejos (**286** *y Ejemplos*), *y las diferentes cuestiones se convierten en sencillas operaciones de sumar, restar, multiplicar o dividir números decimales.*

EJEMPLOS: 1.º *Compré 40 Hl. 3 Dl., 25 cl. de vino a uno; 6 Kl., 20 Dl., 4 l., 6 dl., a otro, y 9 Dl., 3 dl., a un tercero. ¿Qué cantidad de vino tuve?*

Resolución:

40 Hl., 3 Dl., 25 cl.....	=	40'3025 Hl.
6 Kl., 20 Dl., 4 l., 6 dl.	=	62'046 »
9 Dl. y 3 dl.............	=	0'903 »
Suma.............		103'2515 Hl.

2.º *Tenía un campo de 42 Ha., 6 a., 20 ca., y destiné 5 Ha. 26 ca. para jardín. ¿A cuánto quedó reducido el terreno destinado a operaciones de labranza?*

Resolución:

42 Ha., 6 a., 20 ca.	=	42'0620 Ha.
5 Ha. y 26 ca.....	=	5'0026 »
Diferencia.......		37'0594 Ha.

3.º *¿Cuánto valen 4639 m.³, 42 cm.³ de piedra a razón de 22 pesetas, 3 reales el m.³?*

Resolución:

4639 m.³, 42 cm.³ = 4639'000042 m.³
22 ptas., 3 rs... = 22'75 ptas.

Luego el valor será 4639'000042 m.³ × 22'75 ptas. = 105537'25 ptas.

4.º *Se han comprado 18 Hm., 3 Dm., 45 cm. de cierta cuerda por 226 pesetas, 3 reales. ¿A cuánto sale el Dm.?*

Resolución:

226 ptas., 3 reales .... = 226'75 ptas.
18 Hm.., 3 Dm., 45 cm. = 183'045 Dm.

Luego 1 Dm. vale 226'75 ptas. : 183'045 Dm. = 1'238 ptas.

Peso específico

329. Definición. — Se llama *peso específico*, o *densidad*, de un cuerpo, el número que expresa las veces que el peso de este cuerpo contiene al de un volumen igual de agua, tomada al mayor grado de condensación, esto es, a 4º del termómetro centígrado.

O de otro modo: *Densidad de un cuerpo es el cociente del peso de este cuerpo por el peso de un volumen igual de agua pura.*

Si decimos, por ejemplo, que la densidad de un cuerpo es 15'709, significamos que este cuerpo pesa 15'709 veces más que un volumen igual de agua.

Así, siendo la densidad del níquel 8'279, 1 decímetro cúbico de este metal pesará 8'279 kgs., porque 1 dm.³ de agua pesa 1 kg.; 1 cm.³ de níquel pesará 8'279 gramos, porque 1 cm.³ de agua pesa 1 gramo; y 1 mm.³ del mismo metal pesará 8'279 mgs., porque 1 mm.³ de agua pesa 1 mg.

EJEMPLO: *Siendo la densidad del hierro fundido* 7'207, *hallar el peso de una barra de hierro fundido cuyo volumen es de* 5 *dm.*^{3}

Un decímetro cúb. de hierro fundido pesa 7'207 kg.; luego 5 dm.^{3} pasarán 5 veces más, esto es, $7'207 \times 5 = 36'035$ kgs.
De lo que deducimos, pues, que

330. *El peso de un cuerpo es igual al producto de su densidad por su volumen.*

Naturalmente, pues, que si el volumen se expresa en metros cúb., el peso se obtiene en toneladas métricas; si el volumen se expresa en dm.^{3}, el peso se obtiene en kg., y si el volumen se da en cm.^{3}, el peso se obtiene en gramos.

331. Fórmulas para determinar el peso, el volumen y la densidad.—Según el principio anterior (**330**), si llamamos P al peso de un cuerpo, V a su volumen y D a su densidad, tendremos que

$$P = D\,V. \text{ (\textit{Fórmula} 1.ª)}$$

Si dividimos por D los dos miembros de esta igualdad,

$$\frac{P}{D} = V. \text{ (\textit{Fórm.} 2.ª)}$$

Y dividiendo por V los dos miembros de la igualdad primera,

$$\frac{P}{V} = D. \text{ (\textit{Fórm.} 3.ª)}$$

De modo, pues, que tenemos las dos reglas siguientes:

332. 1.ª *Para hallar el volumen de un cuerpo, se divide su peso por su densidad.*

El volumen se obtiene en metros cúb., si el peso se da en toneladas m.; en dms.^{3}, si el peso se expresa en kgs., y en cms.^{3}, si el peso se expresa en gms.

333. 2.ª *Para hallar la densidad de un cuerpo, se divide su peso por su volumen.*

EJEMPLOS: 1.º *El volumen de un prisma de latón, es* 14 *dm.*^{3}*; siendo la densidad de este metal* 8'395, *¿qué peso tiene?*

Sabemos que $P = D\,V$ (**331**.—*Fórm.* 1.ª); luego, substituyendo D y V por sus valores respectivos, tendremos:

$P = 8'395 \times 14 = 117'53$, y como el dm.^{3} corresponde al Kg., el peso será 117'53 Kgs.

2.º *El peso de* 1 *dm.*^{3} *de madera de pino es* 0'657 *Kgs.; ¿qué volumen tendrán* 42,500 *Ton. métricas de dicha madera?*

Sabemos que $V = \frac{P}{D}$ (**331**.—*Fórm.* 2.ª); luego, substituyendo P y D por sus valores respectivos, tendremos:

$V = \frac{42500}{0'657} = 64687'975$, y como la tonelada m. corresponde al m.^{3}, el volumen será 64687'975 metros cúb.

3.º *¿Cuál será el peso específico o densidad de la plata pura fundida, sabiendo que un lingote de dicho metal cuyo volumen es* 3 *dm.*^{3} *pesa* 31'4229 *kilogramos?*

Sabemos que $D = \frac{P}{V}$ (**331**.—*Fórm.* 3.ª), luego, substituyendo P y V por sus valores respectivos, tendremos:

$D = \frac{31'4229}{3} = 10'4743$, densidad de la plata pura fundida.

PESO ESPECÍFICO DE VARIOS CUERPOS (*)

CUERPOS	Peso de 1 decímetro cúbico en kilogramos
Aceite de almendras dulces	0'917000
Aceite de ballena	0'928300
» » linaza	0'940300
» » nueces	0'922700
» » olivas	0'915800
Acero batido sin templar	7'840400
Acero batido y templado	7'818000
Acero sin batir ni templar	7'833100
Acido clorhídrico	1'247000
» nítrico	1'500000
Agua destilada	1'000000
» de mar	1'026300
Aguardiente de 18º	0'947700
Aire atmosférico	0'001299
Alabastro de Europa	1'874000
Alcanfor	0'996000
Alcohol puro	0'793000
Ambar	1'078000
Amoníaco	0'897000
Antimonio fundido	6'712000
Antracita	1'800000
Arcilla	1'930000
Arena	1'343000
Avena *	0'478000
Azabache	2'259000
Azúcar	1'606000
Azufre nativo	2'033000
Basalto (piedra)	2'600000
Bronce (densidad media)	8'838000
Bismuto	9'822000
Cal viva *	0'840000
Carbón vegetal	0'250000
» de piedra compacto (hulla)	0'329200
Cebada *	0'633000
Centeno *	9'740000
Cera blanca	0'968600
Cerveza	1'020000
Cobre fundido	8'788000
Cristal común	2'488000
» de roca	2'683000
Cuarzo jaspeado	2'710100
Diamantes (densidad media)	3'515000
Esmeralda	2'775000
Espíritu de vino de 33º	0'863200
Estaño	7'291400
Fósforo	1'770000
Gas ácido carbónico	0'001981
» amoniacal	0'000776
» ázoe	0'001268
» cianógeno	0'002347
» cloro	0'004209

CUERPOS	Peso de 1 decímetro cúbico en kilogramos
Gas hidrógeno	0'000068
» » carbonado	0'000722
» oxígeno	0'001433
Harina superior	1'035000
Hielo	0'930000
Hierro fundido	7'207000
» forjado	7'788000
Latón	8'395000
Leche de burra	1'035500
» » cabra	1'034100
» » vaca	1'032400
Madera de álamo blanco	0'329000
» » alcornoque (corcho o corteza)	0'240000
Madera de haya	0'842000
» » boj	0'912000
» » caoba	1'060000
» » cedro	0'596000
» » ébano	1'331000
» » encina	0'850000
» » naranjo	0'705000
» » nogal	0'671000
» » olmo	0'671000
» » pino	0'657000
» » roble seco	0'740000
Marfil	1'917000
Mármol de Carrara	2'716800
Mercurio	13'598000
Miel	1'450000
Niquel	8'279000
Oro puro fundido	19'258100
Perlas comunes	2'750000
Piedra calcárea	2'077000
» de yeso	2'167900
» granítica (o granito)	2'716500
Pizarra	2'853000
Plata pura fundida	10'474300
Platino batido	23'000000
Plomo	11'352300
Petróleo	0'847000
Pólvora	0'858000
Pórfido rojo	2'765000
Porcelana	2'242000
Salvado *	0'210000
Sebo	0'941900
Tierra arcillosa	1'240000
» común vegetal	1'110000
Vidrio de botellas	2'732500
» » vidrieras	2'642300
Vinagre	1'019000
Vino (densidad media)	0'993000
» de Burdeos	0'993900
» » Champagne	0'962000
» » Málaga	1'022000
» » Jerez	0'986000
Yeso *	0'960000
Zinc fundido	6'861000

(*) Los artículos que llevan esta señal * se calculan medidos con el hectolitro.

Razones geométricas

334. Razón (*) geométrica.—Razón geométrica, o por cociente, de dos números es el resultado de compararlos entre sí, dividiendo el uno por el otro.

335. Términos de la razón y resultado.—Los dos números que se comparan se llaman, en general, términos de la razón, y también se distinguen con el nombre particular de *antecedente* el uno y *consecuente* el otro. El resultado de la comparación se llama *exponente* de la razón, o solamente razón.

336. Cómo se escribe una razón. — Para escribir una razón, se pone el antecedente y, a continuación, el consecuente, separados por medio de dos puntos (:) que se leen *es a;* seguidamente se escribe el signo de igualdad y luego, el resultado.

Así, $8 : 4 = 2$; $75 : 25 = 3$; $0'25 : 0'725 = 0'333$; $\frac{3}{4} : \frac{7}{9} = \frac{27}{28}$; etc.

También suelen escribirse las razones poniendo el antecedente por numerador de un quebrado y el consecuente, por denominador; v. g.:

$$\frac{8}{4};\quad \frac{75}{25};\quad \frac{0'25}{0'725};\quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{9}};\ \text{etc.}$$

***337. Igualdad de dos o más razones.** — Dos o más razones son iguales cuando dan iguales exponentes.

Según esto, son iguales las razones siguientes, porque 2 es el exponente de cada una de ellas: $8 : 4$; $24 : 12$; $100 : 50$; etc.

338. Analogía entre razón, división y quebrado. — Una razón viene a ser una división y un quebrado; de modo, pues, que tienen igual significación las palabras siguientes:

Antecedente, dividendo y *numerador.*
Consecuente, divisor y *denominador.*
Exponente, cociente y *quebrado.*

339. Propiedades de las razones geométricas.—Si una razón es igual a una división y a un quebrado, las propiedades comunes a la división y a los quebrados son también aplicables a las razones geométricas.

Tenemos, pues, que:

1.ª *Una razón se multiplica por un número, multiplicando por este número su antecedente o partiendo por el mismo su consecuente.* (**139** y **142.**)

2.ª *Una razón se divide por un número, partiendo por este número su antecedente o multiplicando por el mismo su consecuente.* (**140** y **141.**)

3.ª *Una razón no altera, multiplicando o partiendo ambos términos por un mismo número.* (**143.**)

4.ª *Para multiplicar una razón por otra, se multiplican entre sí los antecedentes, y su producto se divide por el producto de los consecuentes.* (**157.** — 2.º)

V. g.: $(3 : 4) \times (5 : 6) = 15 : 24$.

(*) Del latín *ratio*, cuenta, cálculo.

5.ª *Para dividir una razón por otra, se multiplica el antecedente de la razón dividendo por el consecuente de la razón divisor; el consecuente de la razón dividendo por el antecedente de la razón divisor, y se divide el primer producto por el segundo.* (**165.** — 2.º)

V. g.: $(7 : 8) : (2 : 5) = 35 : 16$.

340. Corolarios de la tercera propiedad. — De no alterarse una razón cuando sus dos términos se multiplican o parten por un mismo número, se deducen los corolarios siguientes:

COROLARIO 1.º — *Pueden obtenerse razones iguales a una dada, multiplicando o partiendo sus dos términos por un mismo número.*

Sea la razón dada $12 : 6 = 2$.

Multiplicando	por 3,	tendremos:	$36 : 18 = 2$.
»	por 5,	»	$60 : 30 = 2$.
Partiendo	por 3,	»	$4 : 2 = 2$.
»	por 6,	»	$2 : 1 = 2$.

COROLARIO 2.º — *Puede simplificarse una razón dada, para lo cual se parten ambos términos por los factores que les sean comunes.*

Simplifiquemos la razón	$1242 : 96$.
Sacando la $^1/_2$, tendremos:	$621 : 48$.
Sacando de ésta el $^1/_3$, tendremos:	$207 : 16$, razón irreducible e igual a la dada.

341. Transformación de una razón de términos fraccionarios en otra equivalente de términos enteros. — Se practica lo siguiente:

1.º *Si sólo es quebrado uno de sus términos, se multiplican ambos por el denominador.*

V. g.: Sea la razón $4 : \frac{5}{6}$. *Transformación:* $4 : \frac{5}{6} = 4 \times 6 : \frac{5 \times 6}{6} = 24 : 5$ (**139.** — 3.ª *Propiedad*).

Sea la razón $\frac{3}{8} : 9$. *Transformación:* $\frac{3}{8} : 9 = \frac{3 \times 8}{8} : 9 \times 8 = 3 : 72$.

2.º *Si ambos términos son quebrados, se reducen a un común denominador, y se forma la nueva razón con los numeradores que se obtengan.*

Sea la razón $\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$. *Transformación:* $\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{5}{10} : \frac{6}{10} = 5 : 6$ (**143**).

También puede procederse reduciendo los quebrados a fracciones decimales.

342. Razón compuesta. — Es la que se obtiene multiplicando entre sí los antecedentes y los consecuentes de dos o más razones dadas, llamadas simples o componentes. Hallada la compuesta, se simplifica si se puede, dividiendo ambos términos por los factores que les sean comunes.

EJEMPLO: *Hallar la razón compuesta de las simples siguientes:* $8 : 4$; $12 : 6$; $25 : 10$; $9 : 3$.

Resolución sin simplificar

$$\begin{array}{r}
8 : 4 \\
12 : 6 \\
25 : 10 \\
9 : 3 \\
\hline
8 \times 12 \times 25 \times 9 : 4 \times 6 \times 10 \times 3
\end{array}$$

Razón compuesta: $21600 : 720 = 30$.

Resolución simplificada

$2 \times 1 \times 5 \times 3 : 1 \times 1 \times 1 \times 1$ (**339.**-3.º)

Razón compuesta: $30 : 1 = 30$.

Escolio. — Dos razones se llaman *inversas* cuando los términos de la una son los mismos que los de la otra, pero invertidos; v. gr.: 3 : 4 y 4 : 3. El producto de ambas razones es, evidentemente, la unidad.

Proporciones geométricas o equicocientes

343. Definición. — Proporción (*) geométrica, o equicociente, es la igualdad de dos razones geométricas.

344. Cómo se escribe una proporción geométrica. — Para escribir una proporción geométrica, se ponen las dos razones iguales una a continuación de otra separadas por medio de cuatro puntos (: :), que se leen *como.*

Si con las dos razones iguales 8 : 4 y 12 : 6 queremos formar una proporción, las escribiremos en esta forma: 8 : 4 : : 12 : 6.

También las proporciones pueden escribirse así: $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$.

345. Términos de toda proporción. — En toda proporción, entran cuatro términos: el primero y cuarto se llaman *extremos*, y el segundo y tercero, *medios.*

También se designan con el nombre de *antecedentes* el primero y tercero, y con el de *consecuentes*, el segundo y cuarto.

346. División de las proporciones con relación a sus términos. — Se dividen en *discretas* y *continuas*. Son discretas las que tienen los términos medios desiguales, v. gr.: 8 : 5 : : 16 : 10; son continuas las que tienen los medios iguales, v. gr.: 8 : 4 : : 4 : 2.

En la proporción continua, el término medio se llama *medio proporcional* entre los extremos.

347. Cómo se forma una proporción discreta. — Se escribe primero una razón; a continuación, los cuatro puntos, y luego otra razón igual a la primera, que se calcula multiplicando o partiendo el antecedente y el consecuente de la primera razón por un mismo número. (**340.** *Corol.* 1.º)

Ejemplo: *Dada la razón* 18 : 6, *formar una proporción discreta.*

Multiplicando por 2 ambos términos: 18 : 6 : : 36 : 12.

Partiendo por 2 ambos términos: 18 : 6 : : 9 : 3.

348. Cómo se forma una proporción continua. — Se escribe un número por primer término; por segundo y tercero, un múltiplo o submúltiplo del primero, y por cuarto término, el mismo múltiplo o submúltiplo del tercero que se tomó del primero para formar el segundo y el tercero.

Ejemplo: *Formar una proporción geométrica continua, cuyo primer término sea* 9.

Por medio de un múltiplo, el triplo, por ejemplo: 9 : 27 : : 27 : 81.

Por medio de un submúltiplo, el tercio, por ejemplo: 9 : 3 : : 3 : 1.

También pueden formarse proporciones continuas, escribiendo primero una razón y partiendo antecedente y consecuente por el exponente de la misma. Los dos cocientes son, respectivamente, los dos términos de la segunda razón. (**340.**— *Corol.* 1.º)

Ejemplo: *Dada la razón* 8 : 4, *formar una proporción continua.* — Como 2 es el exponente de esta razón, y 4 y 2 son, respectivamente, los cocientes de 8 y 4 por el exponente de la razón dada, la proporción continua será:

8 : 4 : : 4 : 2.

(*) Del latín *pro*, según, y *portio*, parte.

349. Propiedad fundamental de las proporciones geométricas. — Es la siguiente: *El producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.*

En efecto: sea la proporción $8 : 4 :: 24 : 12$, en la que 2 es el exponente de la razón primera y también, por tanto, el de la segunda. Como cada antecedente es, evidentemente, igual al producto del consecuente por el exponente, tenemos: $8 = 4 \times 2$ y también $24 = 12 \times 2$. Substituyendo, en la proporción, los términos 8 y 24 por sus equivalentes, tendremos: $4 \times 2 : 4 :: 12 \times 2 : 12$.

Donde vemos que $4 \times 2 \times 12 = 4 \times 12 \times 2$, que es lo que queríamos demostrar.

Escolio. — En la proporción continua puede, evidentemente, decirse que *el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio proporcional.*

Pues si tenemos la proporción continua $8 : 4 :: 4 : 2$, tenemos, según la anterior demostración, $8 \times 2 = 4^2$.

350. Corolarios de la propiedad fundamental.—Se deducen los siguientes:

Corolario 1.º — Dados tres términos de una proporción, se puede hallar el cuarto:

Si el término incógnito es un extremo, se multiplican los dos medios, y el producto se divide por el extremo conocido.

Si el término incógnito es un medio, se multiplican los dos extremos, y el producto se divide por el medio conocido.

Sea la proporción $9 : 6 :: 18 : x$.

Según hemos demostrado (**349**), tendremos: $9 \times x = 6 \times 18$;

$$\text{luego } x = \frac{6 \times 18}{9} = \frac{108}{9} = 12.$$

Supongamos desconocido el extremo 9, y entonces la proporción será:

$$x : 6 :: 18 : 12.$$

Tenemos $x \times 12 = 6 \times 18$;

$$\text{luego } x = \frac{6 \times 18}{12} = \frac{108}{12} = 9.$$

Supongamos desconocido el medio 18, y la proporción será: $9 : 6 :: x : 12$, donde sabemos que:

$$9 \times 12 = 6 \times x;$$

$$\text{luego } x = \frac{9 \times 12}{6} = \frac{108}{6} = 18.$$

Suponiendo desconocido el medio 6, la proporción es: $9 : x :: 18 : 12$, en la cual tenemos:

$$9 \times 12 = x \times 18;$$

$$\text{luego } x = \frac{9 \times 12}{18} = \frac{108}{18} = 6.$$

Corolario 2.º — *En toda proporción continua, el término medio es igual a la raiz cuadrada del producto de los extremos.*

Sea la proporción continua $8 : 4 :: 4 : 2$.

Supongamos desconocido el medio proporcional, y llamémosle x. La proporción será: $8 : x :: x : 2$; en la cual

$$x \times x = 8 \times 2, \text{ (349)}$$

$$\text{y por tanto, } x^2 = 16;$$

$$\text{luego } x = \sqrt{16};$$

$$\text{luego } x = 4.$$

Escolios. — 1.º Siendo $x^2 = 16$, $x = \sqrt{16}$. Luego *para hallar un medio proporcional entre dos números, se extrae la raíz cuadrada del producto de estos dos números.*

2.º *En toda proporción continua, un extremo se obtiene partiendo el cuadrado del término medio por el otro extremo.*

Corolario 3.º — *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, con estos cuatro números se puede formar una proporción, colocando por extremos los dos factores de un producto, y por medios, los otros dos.*

Digo que si $3 \times 4 = 2 \times 6$, los números 3, 4, 2 y 6 pueden formar una proporción.
En efecto, dividiendo los dos productos iguales por 2×4, los resultados serán iguales, y tendremos:
$\frac{3 \times 4}{2 \times 4} = \frac{2 \times 6}{2 \times 4}$. Simplificando ambos quebrados, $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 3 : 2 :: 6 : 4$.

351. Fundados en el principio anterior (*Corol.* 3.º), observamos que *una proporción se puede escribir de ocho maneras distintas*, a saber:
1.ª $3 : 2 :: 6 : 4$;—2.ª $3 : 6 :: 2 : 4$;—3.ª $2 : 3 :: 4 : 6$;—4.ª $2 : 4 :: 3 : 6$;
5.ª $6 : 4 :: 3 : 2$;—6.ª $6 : 3 :: 4 : 2$;—7.ª $4 : 6 :: 2 : 3$;—8.ª $4 : 2 :: 6 : 3$.

352. *Una proporción no altera, multiplicando o partiendo un extremo y un medio por un mismo número.*

Sea la proporción $3 : 4 :: 6 : 8$.
Multipliquemos 3 y 6 por un número cualquiera, por ejemplo, 5.
Digo que $3 \times 5 : 4 :: 6 \times 5 : 8$.
En efecto, en la proporción 1.ª, tenemos:

$$3 : 6 :: 4 : 8 \text{ (351.—2.ª Prop.)}$$

Multiplicando los términos de la razón 1.ª por 5, (**339.**—3.ª *Prop.*)

$$3 \times 5 : 6 \times 5 :: 4 : 8.$$

y por tanto, $3 \times 5 : 4 :: 6 \times 5 : 8$.

Lo mismo se demostraría la segunda parte del teorema.

353. Corolario. — *Para simplificar una proporción, se dividen un extremo y un medio por los factores que les sean comunes.*

Sea la proporción $48 : 12 :: 96 : 24$.

Sacando	el $^1/_3$ de 48 y 12,	tenemos:	$16 : 4 :: 96 : 24$
»	el $^1/_4$ de 4 y 24,	»	$16 : 1 :: 96 : 6$
»	el $^1/_8$ de 16 y 96,	»	$2 : 1 :: 12 : 6$
»	el $^1/_6$ de 12 y 6,	»	$2 : 1 :: 2 : 1$
»	la $^1/_2$ de 2 y 2,	»	$1 : 1 :: 1 : 1$, proporción irreducible.

Sea la proporción $18 : 9 :: 36 : x$.

Sacando	el $^1/_9$ de 18 y 36,	tenemos:	$2 : 9 :: 4 : x$.
»	la $^1/_2$ de 2 y 4	»	$1 : 9 :: 2 : x$, proporción irreducible.

354. Transformación de una proporción que tenga en sus términos uno o más quebrados, en otra cuyos términos sean enteros. — Para transformar en enteros los términos quebrados de una proporción, se siguen las reglas siguientes:

1.ª *Si sólo es quebrado un extremo o un medio, o dos extremos o dos medios, se procede como en la conversión de una razón* (**341**).

V. g.: Sea la proporción $\frac{3}{5} : 6 :: 60 : x$.

Multiplicando $\frac{3}{5}$ y 6 por el denominador 5, resulta: $3 : 30 :: 60 : x$, proporción equivalente a la dada.

Sea la proporción $4 : \frac{1}{2} :: \frac{4}{7} : x$.

Multiplicando 4 y $\frac{1}{2}$ por el denominador 2, tenemos:

$$8 : 1 :: \frac{4}{7} : x.$$

Multiplicando 8 y $\frac{4}{7}$ por el denominador 7, tenemos: (**352**)

$$56 : 1 :: 4 : x$$

2.ª *Si son quebrados un extremo y un medio, se reducen los quebrados a un común denominador, y se forma la proporción equivalente con los numeradores que se obtengan.*

Sea la proporción $\frac{1}{2} : 4 :: \frac{1}{4} : x$.

Reduciendo $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ a un común denominador, y formando la proporción con los numeradores, resulta (**352**):

$$4 : 4 :: 2 : x.$$

3.ª *Si son quebrados todos los términos, se procede primero con un extremo y un medio, y luego con el quebrado que quede y el extremo entero, conforme ya hemos visto.*

Sea la proporción $\frac{3}{5} : \frac{1}{4} :: \frac{3}{10} : x$.

Reduciendo a un común denominador los quebrados $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{4}$, tenemos:

$$12 : 5 :: \frac{3}{10} : x.$$

Multiplicando 12 y $\frac{3}{10}$ por el denominador 10, tenemos:

$$120 : 5 :: 3 : x.$$

Con estas transformaciones, generalmente, no se obtienen proporciones equivalentes a las dadas. Las aconsejamos, empero, porque no alteran el valor de la incógnita y facilitan la obtención de ésta.

355. *Si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones forman proporción.*

Es evidente, toda vez que las otras dos razones son también iguales.

356. *Multiplicando, ordenadamente, los términos de dos o más proporciones, los productos forman una proporción.*

Sean las proporciones:

$$\begin{aligned} 3 : 4 &:: 6 : 8 \\ 2 : 5 &:: 14 : 35 \\ 1 : 7 &:: 9 : 63 \end{aligned}$$

Decimos que $3 \times 2 \times 1 : 4 \times 5 \times 7 :: 6 \times 14 \times 9 : 8 \times 35 \times 63$.

En efecto; según el principio fundamental (**349**), tenemos:

$$\begin{aligned} 3 \times 8 &= 4 \times 6 \\ 2 \times 35 &= 5 \times 14 \\ 1 \times 63 &= 7 \times 9 \end{aligned}$$

Si multiplicamos ordenadamente los primeros y segundos miembros de estas igualdades, los productos formarán otra igualdad. Luego:

$$(3 \cdot 8) \times (2 \cdot 35) \times (1 \cdot 63) = (4 \cdot 6) \times (5 \cdot 14) \times (7 \cdot 9)$$

o bien (**61**), $(3 \cdot 2 \cdot 1) \times (8 \cdot 35 \cdot 63) = (4 \cdot 5 \cdot 7) \times (6 \cdot 14 \cdot 9)$. De consiguiente (**350.**—*Corol.* 3.º), $3 \times 2 \times 1 : 4 \times 5 \times 7 :: 6 \times 14 \times 9 : 8 \times 35 \times 63$.

Corolario. — *Las potencias del mismo grado de los términos de una proporción forman otra proporción.*

Sea la proporción $9 : 6 :: 3 : 2$. Decimos que las segundas potencias, por ejemplo, de los términos de esta proporción forman otra proporción, esto es:

$$9^2 : 6^2 :: 3^2 : 2^2$$

En efecto, escribiendo dos veces esta proporción, tendremos:

$$9 : 6 :: 3 : 2$$
$$9 : 6 :: 3 : 2$$

Y en virtud del teorema, $9^2 : 6^2 :: 3^2 : 2^2$, conforme al enunciado.

357. Proporción compuesta.—Es la que resulta de multiplicar entre sí los términos correspondientes de dos o más proporciones dadas, llamadas *simples* o *componentes*.

Ejemplo: Sean las proporciones simples:

$$9 : 3 :: 3 : x$$
$$12 : 4 :: x : y$$
$$27 : 9 :: y : n$$

Proporción compuesta: $9 \times 12 \times 27 : 3 \times 4 \times 9 :: 3 \times x \times y : x \times y \times n$.

Hallada la proporción compuesta, se simplifica si se puede, partiendo un extremo y un medio por los factores que les sean comunes.

Proporción compuesta simplificada: $9 : 1 :: 1 : n$.

358. Alternar, invertir y permutar los términos de una proporción. — *Alternar* los términos de una proporción es cambiar el orden de los medios o los extremos, o de ambas cosas a la vez.

Sea la proporción $12 : 6 :: 4 : 2$.

Alternando los extremos: $2 : 6 :: 4 : 12$.
Alternando los medios: $12 : 4 :: 6 : 2$.
Alternando extremos y medios: $2 : 4 :: 6 : 12$.

Invertir los términos de una proporción, es hacer que los extremos pasen a ser medios, y viceversa.

Sea la proporción $5 : 2 :: 20 : 8$.
Invirtiendo los términos, tendremos: $2 : 5 :: 8 : 20$.

Permutar los términos de una proporción, consiste en colocar la primera razón por segunda, y viceversa.

Sea la proporción $24 : 8 :: 12 : 4$.
Permutando las razones, tendremos: $12 : 4 :: 24 : 8$.

359. Propiedades de las proporciones geométricas.—Además de las que hemos demostrado ya (**349.** — **350.** — **351.** — **352.** — **355** y **356**) podemos considerar las siguientes:

1.ª En toda proporción, *la suma de antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente o a su antecedente, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente o a su antecedente.*

1.º Sea la proporción $8 : 6 :: 4 : 3$. Digo que $8 + 6 : 6 :: 4 + 3 : 3$.

En efecto; la proporción anterior podemos escribirla así: $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Añadiendo la unidad a los dos miembros de esta igualdad, la igualdad subsistirá; luego $\frac{8}{6} + 1 = \frac{4}{3} + 1$.

Reduciendo el entero y fracción de cada miembro a una sola expresión fraccionaria, tenemos $\frac{8 + 6}{6} = \frac{4 + 3}{3}$.

O bien, $8 + 6 : 6 :: 4 + 3 : 3$.

2.º Sea la proporción $8 : 6 :: 4 : 3$. Digo que $8 + 6 : 8 :: 4 + 3 : 4$.

En efecto; la proporción $8 : 6 :: 4 : 3$, podemos escribirla así: (**351.**—3.ª)

$$6 : 8 :: 3 : 4; \text{ o bien, } \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Añadiendo la unidad a ambos miembros de esta igualdad, tendremos:

$$\frac{6}{8} + 1 = \frac{3}{4} + 1.$$

Y reduciendo cada miembro a una sola expresión fraccionaria, $\frac{6 + 8}{8} = \frac{3 + 4}{4}$

O bien: $6 + 8 : 8 :: 3 + 4 : 4$.

O lo que es igual, $8 + 6 : 8 :: 4 + 3 : 4$.

2.ª En toda proporción, *la diferencia entre antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente o a su antecedente, como la diferencia entre antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente o a su antecedente.*

Pueden suceder dos casos: 1.º *Que los antecedentes sean mayores que los consecuentes;* 2.º *Que los antecedentes sean menores que los consecuentes.*

Primer caso.—Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6$. Digo que $4 - 3 : 3 :: 8 - 6 : 6$

En efecto; la proporción dada podemos escribirla así: $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$.

Quitando de ambos miembros la unidad, la igualdad subsistirá, y tendremos:

$$\frac{4}{3} - 1 = \frac{8}{6} - 1.$$

Reduciendo cada miembro a una sola expresión fraccionaria, será:

$$\frac{4 - 3}{3} = \frac{8 - 6}{6}. \text{ O bien, } 4 - 3 : 3 :: 8 - 6 : 6.$$

Para demostrar la segunda parte del primer caso, tomemos la misma proporción $4 : 3 :: 8 : 6$. Digo que $4 - 3 : 4 :: 8 - 6 : 8$.

En efecto; invirtiendo los términos de la proporción dada, resulta:

$$3 : 4 :: 6 : 8.$$

Esta proporción puede escribirse: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Restando ambos términos de la unidad, tenemos: $1 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{6}{8}$.

Y reduciendo cada miembro a una sola expresión, $\frac{4 - 3}{4} = \frac{8 - 6}{8}$.

O bien, $4 - 3 : 4 :: 8 - 6 : 8$.

Segundo caso. — Sea la proporción $3 : 4 :: 6 : 8$.

Invirtiendo los términos, tendremos esta otra: (**358**) $4 : 3 :: 8 : 6$.

En la cual, según el primer caso, tenemos:

$$4 - 3 : 3 :: 8 - 6 : 6.$$

Y también $\quad 4 - 3 : 4 :: 8 - 6 : 8.$

3.ª En toda proporción, *la suma de antecedente y consecuente de la primera razón es a su diferencia, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su diferencia.*

Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6$. Digo que $4 + 3 : 4 - 3 :: 8 + 6 : 8 - 6$.
En efecto; según la 1.ª *propiedad*, tenemos que $4 + 3 : 3 :: 8 + 6 : 6$.
Según la 2.ª *propiedad*...................... $4 - 3 : 3 :: 8 - 6 : 6$.
Alternando los medios de estas dos proporciones, resulta:

$$4 + 3 : 8 + 6 :: 3 : 6.$$
$$4 - 3 : 8 - 6 :: 3 : 6.$$

De estas dos últimas proporciones, resulta esta otra (**355**):

$$4 + 3 : 8 + 6 :: 4 - 3 : 8 - 6.$$

Y alternando los medios resulta: $4 + 3 : 4 - 3 :: 8 + 6 : 8 - 6$. Conforme al enunciado.

4.ª En toda proporción:

1.º *La suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.*

2.º *La diferencia de los antecedentes es a la diferencia de los consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.*

1.º Sea la proporción $4 : 3 :: 8 : 6$. Digo que $4 + 8 : 3 + 6 :: 8 : 6$.
En efecto; alternando los medios de la proporción dada, tenemos:

$$4 : 8 :: 3 : 6.$$

De esta proporción resulta (**359.**—1.ª): $4 + 8 : 8 :: 3 + 6 : 6$.
Y alternando los medios tenemos: $4 + 8 : 3 + 6 :: 8 : 6$. Conforme al enunciado.

2.º Sea la proporción $8 : 6 :: 4 : 3$. Digo que: $8 - 4 : 6 - 3 :: 4 : 3$.
En efecto; alternando los medios de la proporción dada, tenemos:

$$8 : 4 :: 6 : 3.$$

De esta proporción resulta (**359.**—2.ª): $8 - 4 : 4 :: 6 - 3 : 3$.
Y alternando los medios, tenemos: $8 - 4 : 6 - 3 :: 4 : 3$. Que es lo que queríamos demostrar.

5.ª En toda proporción, *la suma de los antecedentes es a su diferencia, como la suma de los consecuentes es a su diferencia.*

Sea la proporción $8 : 6 :: 4 : 3$. Digo que: $8 + 4 : 8 - 4 :: 6 + 3 : 6 - 3$.
En efecto; de la proporción dada, resulta: $8 + 4 : 6 + 3 :: 8 : 6$ (**359.** — 4.ª — 1.º)
Y también, $8 - 4 : 6 - 3 :: 8 : 6$ (**359.** — 4.ª — 2.º)
Luego $8 + 4 : 6 + 3 :: 8 - 4 : 6 - 3$ (**355**).
Y alternando los medios resulta: $8 + 4 : 8 - 4 :: 6 + 3 : 6 - 3$.

360. Serie de razones iguales. — Es el conjunto de razones todas iguales entre sí.

361. En una serie de razones iguales, *la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como un antecedente cualquiera es a su consecuente respectivo.*

Sean las razones iguales $8 : 4 :: 6 : 3 :: 2 : 1 :: 14 : 7$.
Digo que $8 + 6 + 2 + 14 : 4 + 3 + 1 + 7 :: 14 : 7$.
En efecto: en la proporción $8 : 4 :: 6 : 3$, que forman las dos razones primeras, tenemos: $8 + 6 : 4 + 3 :: 6 : 3$ (**359.** — 4.ª — 1.º)
Y como $6 : 3 = 2 : 1$, tenemos: $8 + 6 : 4 + 3 :: 2 : 1$.
De esta proporción, resulta: $8 + 6 + 2 : 4 + 3 + 1 :: 2 : 1$.
Pero $2 : 1 = 14 : 7$; luego: $8 + 6 + 2 : 4 + 3 + 1 :: 14 : 7$.
De cuya proporción, resulta: $8 + 6 + 2 + 14 : 4 + 3 + 1 + 7 :: 14 : 7$. Conforme al enunciado.

362. Proporción con dos incógnitas. — Si una proporción tiene dos términos incógnitos, uno extremo y otro medio, y se conoce la suma o la diferencia de los mismos, pueden hallarse los valores desconocidos con suma facilidad.

1.º Sea la proporción $x : z :: 60 : 15$, en la que $x + z = 25$.

Tenemos $x + z : x :: 60 + 15 : 60$. (**359.**—1.ª)
y $x + z : z :: 60 + 15 : 15$.
O bien, $25 : x :: 60 + 15 : 60$.
y $25 : z :: 60 + 15 : 15$.

$$\text{Luego } x = \frac{25 \times 60}{60 + 15} = 20; \text{ y } z = \frac{25 \times 15}{60 + 15} = 5.$$

2.º Sea la proporción $x : z :: 180 : 120$, en la que $x - z = 20$.

Tenemos $x - z : x :: 180 - 120 : 180$ (359.—2.ª

y $x - z : z :: 180 - 120 : 120$.

O bien, $20 : x :: 180 - 120 : 180$

y $20 : z :: 180 - 120 : 120$.

$$\text{Luego } x = \frac{20 \times 180}{180 - 120} = 60; \text{ y } z = \frac{20 \times 120}{180 - 120} = 40.$$

Magnitudes proporcionales

363. Magnitudes directamente proporcionales. — Dos magnitudes variables son *directamente proporcionales* cuando, haciendo una de ellas 2, 3, 4, 30, etc., veces mayor o menor, la otra queda también hecha, 2, 3, 4, 30, etc., veces mayor o menor.

El peso y el valor de una mercadería, por ejemplo, son dos magnitudes directamente proporcionales; pues haciendo el peso 2, 3, etc., veces mayor o menor, el valor de la mercadería será también 2, 3, etc., veces mayor o menor.

Igualmente, serán directamente proporcionales el camino recorrido por un móvil que marche siempre con igual velocidad y el tiempo.

El trabajo hecho por obreros igualmente hábiles y el número de obreros. Etc.

364. Magnitudes inversamente proporcionales.—Dos magnitudes variables son *inversamente proporcionales* cuando, haciendo una de ellas 2, 3, 4, 20, etc., veces mayor o menor, la otra queda también hecha 2, 3, 4, 20, etc., veces menor o mayor.

El número de obreros ocupados en hacer un trabajo es inversamente proporcional al tiempo empleado; pues haciendo el número de obreros 2, 3, 4, etc., veces mayor o menor, el tiempo que necesitarán los obreros será también 2, 3, 4, etc., veces menor o mayor.

Serán, asimismo, inversamente proporcionales, el largo y ancho de una pieza de tela en cuya producción se ha empleado igual cantidad de hilo. Etc.

Escolios. — Para que cuatro números concretos formen proporción, es necesario que los cuatro sean homogéneos, o que lo sean dos a dos.

1.º *Si cada uno de dos números concretos homogéneos es directamente proporcional con cada uno de otros dos, homogéneos también entre sí* (sean o no de la misma especie que los dos primeros), *los cuatro números formarán proporción directa.*

2.º *Si cada uno de dos números concretos homogéneos es inversamente proporcional con cada uno de otros dos, homogéneos también entre sí* (sean o no de la misma especie que los dos primeros), *los cuatro números formarán proporción inversa.*

Llamemos A y A' a dos números concretos homogéneos, y B y B' a otros dos números concretos y homogéneos también entre sí.

Disposición

$A \ldots\ldots\ldots\ldots B$

$A' \ldots\ldots\ldots\ldots B'$

$A : A' :: B : B'$

Proporción directa.

Si A y B son directamente proporcionales e igualmente lo son A' y B', la proporción directa será: $A : B :: A' : B'$; o bien, $A : A' :: B : B'$.

Disposición

$A \ldots\ldots\ldots\ldots B$
$A' \ldots\ldots\ldots\ldots B'$

$A' : A :: B : B'$

Proporción inversa.

Si A y B son inversamente proporcionales e igualmente lo son A' y B', la proporción inversa será: $A' : A :: B : B'$.

En Aritmética, sólo existen estas dos clases de proporcionalidad: la *directa* y la *inversa.*

Regla de tres

365. Definición. — *Regla de tres* es la que nos enseña a resolver los problemas que dependen de una o más proporciones.

366. Cómo se divide. — La regla de tres se divide en *simple* y *compuesta.* Es simple cuando el problema depende de una sola proporción, y compuesta, cuando el problema depende de dos o más proporciones.

367. Supuesto y pregunta, cantidades principales y relativas.—En toda regla de tres, hay que distinguir: *supuesto* y *pregunta, cantidades principales* y *cantidades relativas.*

El *supuesto* es la parte *conocida* de la cuestión.

La *pregunta* es la parte *desconocida* de la cuestión.

Cantidades principales son dos o más términos *homogéneos* y *conocidos,* uno del supuesto y otro de la pregunta.

Cantidades relativas son dos términos *homogéneos,* uno *conocido* del supuesto y otro *desconocido* de la pregunta.

EJEMPLO: *Si* 20 *hombres, para hacer un trabajo, emplean* 40 *días, ¿cuántos días emplearán* 8 *hombres?*

El supuesto lo componen 20 *hombres* y 40 *días,* por ser la parte conocida del problema. Constituyen la pregunta 8 *hombres* y *x días,* llamando así al número de días que dichos hombres emplearían.

Son cantidades principales 20 *hombres* y 8 *hombres,* por ser los dos términos homogéneos y conocidos, uno del supuesto y otro de la pregunta. Son cantidades relativas 40 *días* y *x días,* por ser los dos términos homogéneos, uno conocido del supuesto y otro desconocido de la pregunta.

En las reglas de tres simples, sólo hay, evidentemente, dos cantidades principales; en las compuestas, cuatro o más.

368. División de las reglas de tres simples. — Se dividen en *directas* e *inversas.* Son directas cuando cada cantidad principal es directamente proporcional con su relativa correspondiente, e inversas, cuando cada cantidad principal es inversamente proporcional con su relativa correspondiente.

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, *aumentando* la una, *aumenta* igualmente la otra, y *disminuyendo* la una, *disminuye* igualmente la otra (**363**). Podemos, pues, decir que dichas magnitudes, en el primer caso, van de *más a más,* y en el segundo, de *menos a menos.*

Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, *aumentando* la una, *disminuye* la otra, y *disminuyendo* la una, *aumenta* la otra (**364**). Podemos, pues, decir que dichas magnitudes, en el primer caso, van de *más a menos,* y en el segundo, *de menos a más.*

De todo lo cual, puede deducirse la siguiente regla práctica:

Las reglas de tres simples son directas cuando las cantidades principales van con sus relativas de más a más o de menos a menos, e inversas, cuando van de más a menos o de menos a más.

369. Resolución de las directas.—Las reglas de tres directas se resuelven escribiendo primero el supuesto y la pregunta, de modo que se correspondan unas debajo de otras las cantidades principales y las relativas, y formando la siguiente proporción:

Cantidad principal del supuesto es a cantidad principal de la pregunta, como la cantidad relativa del supuesto es a la cantidad relativa de la pregunta.

EJEMPLOS: 1.º *Si* 20 *qq. m. de cierto género han costado* 120 *ptas., ¿cuál será el valor de* 9 *quintales métricos?*

	Cantidades principales	Cantidades relativas
Supuesto..........	20 qq. m.	120 pesetas.
Pregunta..........	9 » »	x »
	20 : 9 : : 120 : x = 54 pesetas.	

En efecto; si 20 quintales m. valen 120 ptas., 9 qq. m., que son *menos* que 20, valdrán también *menos* pesetas que 120. Es decir, la comparación va de *menos* a *menos;* luego los cuatro números concretos *están relacionados en proporción directa.* (**364.**—*Escol.* 1.º)

2.º *Se sabe que con* 415 *pesetas se compraron* 26 *hectolitros; ¿cuántos hectolitros se comprarán con* 2480?

	Cantidades principales	Cantidades relativas
Supuesto..........	415 pesetas.	26 hectolitros.
Pregunta..........	2480 »	x »
	415 : 2480 : : 26 : x = 155'37 Hls.	

En efecto; si con 415 pesetas compro 26 hectolitros, con 2480 pesetas, que son *más* que 415, compraré *más* hectolitros que 26. Es decir, la comparación va de *más* a *más;* luego los cuatro números concretos están *relacionados en proporción directa.* (**364.**—*Escol.* 1.º)

370. Resolución de las inversas.—*Las reglas de tres inversas se resuelven* planteando primero el supuesto y la pregunta, de modo que se correspondan unas debajo de otras las cantidades principales y las relativas, y formando la siguiente proporción:

Cantidad principal de la pregunta es a cantidad principal del supuesto, como la cantidad relativa del supuesto es a la cantidad relativa de la pregunta.

EJEMPLOS: 1.º 4 *hombres necesitaron* 20 *días para hacer un trabajo. ¿Cuántos días emplearían* 10 *hombres para hacer otro tanto?*

	Cantidades principales	Cantidades relativas
Supuesto..........	4 hombres.	20 días.
Pregunta..........	10 »	x »
	10 : 4 : : 20 : x = 8 días.	

En efecto: si 4 hombres necesitaron emplear 20 días, 10 hombres, que son *más*, para hacer lo mismo emplearían *menos* días. Es decir, la comparación va de *más* a *menos;* luego los cuatro números concretos *están relacionados en proporción inversa.* (**364.**—*Escol.* 2.º)

2.º *En el supuesto de que* 18 *zapadores necesitaran* 30 *días para abrir un foso, ¿cuántos días necesitarían* 12 *zapadores?*

	Cantidades principales	Cantidades relativas
Supuesto..........	18 zapadores.	30 días.
Pregunta..........	12 »	x »
	12 : 18 : : 30 : x = 45 días.	

En efecto: si 18 zapadores emplean 30 días, 12 zapadores, que son *menos*, para hacer lo mismo emplearán *más* días. Es decir, la comparación va de *menos* a *más;* luego los cuatro números concretos *están relacionados en proporción inversa.* (**364.**—*Escol.* 2.º)

371. Resolución de las compuestas.—*Para resolver las reglas de tres compuestas*, se escriben el supuesto y la pregunta de modo que cada cantidad principal del supuesto se corresponda con su homogénea de la pregunta, y en último término, la relativa del supuesto correspondiéndose con la relativa de la pregunta. Comparando ordenadamente cada dos cantidades principales homogéneas con las relativas de la cuestión, *se obtienen tantas reglas de tres simples como pares de cantidades principales hay en el problema*, resultando, por lo mismo, igual número de proporciones. Estas proporciones tienen todas la segunda razón común; *ésta se escribe una sola vez frente a una llave que cierre las razones primeras*, y luego se forma la siguiente proporción:

Producto de antecedentes es a producto de consecuentes, como el antecedente de la razón común es a su consecuente, o sea x.

Esta proporción se simplifica si se puede.

Adviértase que estas reglas de tres simples no son las en que, *lógicamente*, se descompone la regla de tres compuesta. Con este mecanismo se obtiene, empero, un procedimiento facilísimo para calcular siempre el valor de la incógnita.

Las diferentes reglas de tres simples en que se descompone una compuesta, pueden ser todas directas, todas inversas, o unas directas y otras inversas.

EJEMPLO: *Se sabe que 26 hombres, en 3 días, trabajando 9 horas cada día, hicieron 720 metros de un tejido. Esto supuesto, véase cuántos metros del mismo tejido harían 14 hombres, en 6 días, trabajando 8 horas cada día.*

	Cantidades principales			Cantidades relativas
Supuesto.	26 hombres....	3 días....	9 horas....	720 metros.
Pregunta.	14 »	6 »	8 »	x »

$$\left.\begin{array}{r}26 : 14\\ 3 : 6\\ 9 : 8\end{array}\right\} :: 720 : x$$

$$26 \times 3 \times 9 : 14 \times 6 \times 8 :: 720 : x = 689{,}23 \text{ metros.}$$

Simplificando la proporción obtenida, tendremos:

$$13 \times 1 \times 1 : 14 \times 1 \times 8 :: 80 : x = 689{,}23 \text{ metros.}$$

Explicaremos *el mecanismo* de la resolución. Comparemos las dos primeras cantidades principales, 26 hombres y 14 hombres, con las relativas, 720 metros y x metros. Si 26 hombres, en *cierto* número de días, trabajando *cierto número* de horas cada día, hacen 720 metros; 14 hombres, en los *mismos días*, y trabajando diariamente *iguales horas*, harán *menos* metros: va, pues, de *menos* a *menos;* luego es directa. Llamando x al número de metros, tendremos:

$$26 : 14 :: 720 : x$$

Comparemos las dos cantidades principales siguientes, 3 días y 6 días, con las relativas, 720 metros y x metros. Si *unos hombres*, en 3 días, trabajando *cierto número* de horas cada día, hacen 720 metros; *los mismos hombres*, en 6 días, trabajando las *mismas horas* cada día, harán *más* metros; va, pues, de *más* a *más;* luego es directa.

Tendremos, pues: $3 : 6 :: 720 : x$

Comparemos las dos cantidades principales siguientes, 9 horas y 8 horas, con las relativas, 720 metros y x metros. Si *unos hombres, en cierto número* de días, trabajando 9 horas cada día, han hecho 720 metros; *los mismos hombres*, en *los mismos días*, trabajando 8 horas cada día, harán *menos* metros: va, pues, de *menos* a *menos;* luego es directa.

Tendremos, pues: $9 : 8 :: 720 : x$

Obtenemos, por tanto, estas 3 proporciones:

$$1.^a \quad 26 : 14 :: 720 : x$$
$$2.^a \quad 3 : 6 :: 720 : x$$
$$3.^a \quad 9 : 8 :: 720 : x$$

Pero, como hemos dicho en la regla, sólo escribimos la razón común una vez, en esta forma:

$$\left.\begin{array}{r} 26 : 14 \\ 3 : 6 \\ 9 : 8 \end{array}\right\} :: 720 : x$$

Véase la descomposición racional de la regla compuesta:

Si 26 hombres, en *cierto tiempo*, hacen 720 metros; 14 hombres, en *igual tiempo*, harán menos metros. La comparación va, pues, de menos a menos; luego llamando z al número de metros; la proporción será:

$$26 : 14 :: 720 : z$$

Si *cierto número* de hombres, en 3 días, trabajando *cierto número* de horas cada día, han hecho z metros; *los mismos* hombres, en 6 días, trabajando cada día *iguales horas*, harán más metros. La comparación va de más a más; luego llamando y al número de metros, la proporción será:

$$3 : 6 :: z : y$$

Si *cierto número* de hombres, en *cierto número* de días, trabajando 9 horas cada día, han hecho y metros; *los mismos* hombres, en *los mismos* días, trabajando 8 horas cada día, harán menos metros. La comparación va de menos a menos; luego, llamando x al número de metros, la proporción será:

$$9 : 8 :: y : x$$

La regla de tres compuesta se ha descompuesto en estas tres proporciones:

$$\begin{array}{l} 26 : 14 :: 720 : z \\ 3 : 6 :: z : y \\ 9 : 8 :: y : x \end{array}$$

Multiplicando, ordenadamente, los antecedentes y los consecuentes de estas tres proporciones, tenemos la proporción compuesta; pero si antes la simplificamos, dividiendo su segundo medio ($720 \times z \times y$) y su segundo extremo ($z \times y \times x$) por z y por y, resultará:

$$\begin{array}{l} 26 : 14 :: 720 : 1 \\ 3 : 6 :: 1 : 1 \\ 9 : 8 :: 1 : x \end{array}$$

Y hallando, ahora, la proporción compuesta, resulta:

$$26 \times 3 \times 9 : 14 \times 6 \times 8 :: 720 : x$$

Conforme a la resolución primera.

372. Resolución de las reglas de tres por el método de reducción a la unidad. — Para resolver las reglas de tres, simples o compuestas, por el método de reducción a la unidad, se sigue la regla siguiente:

1.º *Se escriben el supuesto y la pregunta.*

2.º *Se calcula el valor de una unidad de la cantidad principal del supuesto, y por él se determina, multiplicando o partiendo, el valor de la cantidad principal de la pregunta.*

3.º *Si la regla de tres es compuesta, se hace, ordenadamente, lo mismo con las demás cantidades principales, hasta tener indicado el valor de la incógnita.*

4.º *Se verifican las operaciones indicadas que resulten; pero antes se simplifican si se puede.*

Resolvamos por reducción a la unidad las cuestiones siguientes:

1.ª *Si con 45 ptas. compré 200 metros, ¿a cuánto pagué el Dm.?*

S.	200 metros....	45 ptas.
P.	10 »	x »

Si 200 metros valen .... 45 ptas.

1 metro valdrá 200 veces menos pesetas, esto es, $\frac{45}{200}$.

Si 1 metro vale $\frac{45}{200}$ pesetas,

10 metros valdrán *diez* veces más, esto es,

$$\frac{45}{200} \times 10 = \frac{45 \times 10}{200} \text{ pesetas} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4} = 2'25 \text{ pesetas.}$$

2.ª *Se sabe que* 12 *albañiles necesitaron* 30 *días para hacer una obra. ¿Cuántos días emplearían* 5 *albañiles?*

S.	12 albañiles	30 días.
P.	5 »	x »

Si 12 albañiles necesitaron .... 30 días,
1 albañil necesitará *doce* veces más días, esto es, 30×12 días.

Si 1 albañil necesita 30×12 días,
5 albañiles necesitarán *cinco* veces menos días, esto es,

$$\frac{30 \times 12}{5} \text{ días} = \frac{6 \times 12}{1} = 72 \text{ días.}$$

3.ª *En el supuesto de que* 9 *zapadores necesitaran* 12 *días para abrir una zanja de* 400 *metros de largo,* 2 *m. de ancho y* 1 *metro de profundidad, ¿cuántos días emplearían* 15 *zapadores para abrir otra zanja de* 300 *metros de largo,* 4 *m. de ancho y* 2 *m. de profundidad?*

S.	9 zapadores...	400 metros largo...	2 m. ancho...	1 m. prof...	12 días.
P.	15 » ...	300 » » ...	4 » » ...	2 » » ...	x »

Si 9 *zapadores*, para abrir una zanja de 400 m. largo, 2 m. ancho y 1 m. de profundidad están 12 días,
un zapador, para hacer lo mismo, empleará 9 veces más días,
esto es, 12×9 días.

Si 1 *zapador* emplea 12×9 días,
15 *zapadores* para hacer el mismo trabajo, emplearán 15 veces menos días, esto es, $\frac{12 \times 9}{15}$ días.

Si 15 zapadores, para hacer una zanja de 400 *metros largo*, 2 m. a. y 1 m. profundidad, están $\frac{12 \times 9}{15}$ días,
los mismos zapadores, para abrir una zanja de 1 *metro largo*, el mismo ancho e igual prof., emplearían 400 veces menos días, esto es, $\frac{12 \times 9}{15 \times 400}$ días,
y para abrir una zanja de 300 *metros largo*, el mismo ancho e igual prof., emplearían 300 veces más días, esto es, $\frac{12 \times 9}{15 \times 400} \times 300 = \frac{12 \times 9 \times 300}{15 \times 400}$ días.

Si 15 zapadores, para abrir una zanja de 300 m. l., 2 *m. de ancho* y 1 m. prof., emplean $\frac{12 \times 9 \times 300}{15 \times 400}$ días,
para abrir una zanja de 1 *metro a.* e igual prof., emplearán 2 veces menos días, esto es, $\frac{12 \times 9 \times 300}{15 \times 400} : 2 = \frac{12 \times 9 \times 300}{15 \times 400 \times 2}$ días;
y para abrir una zanja de 4 *metros a.*, emplearían 4 veces más días, esto es,
$\frac{12 \times 9 \times 300}{15 \times 400 \times 2} \times 4 = \frac{12 \times 9 \times 300 \times 4}{15 \times 400 \times 2}$ días.

Si 15 zapadores, para abrir una zanja de 300 m. l., 4 m. a. y 1 *m. de prof.*, están $\frac{12 \times 9 \times 300 \times 4}{15 \times 400 \times 2}$ días, para abrir una zanja de las mismas condiciones y 2 *m. prof.*, estarán 2 veces más días, esto es,

$$\frac{12 \times 9 \times 300 \times 4}{15 \times 400 \times 2} \times 2 = \frac{12 \times 9 \times 300 \times 4 \times 2}{15 \times 400 \times 2} \text{ días} = \frac{12 \times 9}{5} = \frac{108}{5} = 21'6 \text{ días.}$$

Interés

373. Objeto de la regla de interés. — La regla de *interés* tiene por objeto determinar la ganancia que produce un capital prestado, bajo la condición de que cada cien unidades de dinero produzcan, al prestador, cierto beneficio en un tiempo determinado. La ganancia mencionada se llama *interés del capital.*

374. Tanto por ciento o rédito. — Es la cantidad que producen 100 unidades de dinero en un tiempo determinado.

Aunque el tiempo a que el interés se refiere es, generalmente, 1 año, puede también referirse al mes, al trimestre, al día y a cualquiera otra unidad de tiempo determinada, en cuyo caso se distingue con los nombres de *interés mensual, trimestral, diario*, etc.

375. Interés simple. — El interés se llama *simple* cuando, al fin de cada año, el prestador retira los intereses producidos por el capital.

376. Interés compuesto. — El interés se llama *compuesto* cuando, al final de cada año, se agregan al capital los intereses producidos por éste en el año anterior.

377. Casos que ofrecen las cuestiones de interés simple. — Ofrecen, principalmente, dos casos:

1.º *El tiempo del problema es* 1 *año.* — 2.º *El tiempo del problema es mayor o menor que* 1 *año.*

Cuando el tiempo es 1 año, pueden presentarse tres cuestiones:

1.ª *Hallar el interés.* — 2.ª *Hallar el capital.* — 3.ª *Hallar el rédito o tanto por ciento.*

Cuando el tiempo es mayor o menor que 1 año, las cuestiones pueden ser cuatro:

1.ª *Hallar el interés.* — 2.ª *Hallar el capital.* — 3.ª *Hallar el rédito o tanto por ciento.* — 4.ª *Hallar el tiempo.*

378. Resolución de las cuestiones sobre interés cuando el tiempo es 1 año. — Las tres cuestiones que pueden presentarse cuando el tiempo es 1 año, se resuelven por la siguiente proporción:

100 *es al capital, como el rédito o tanto por ciento es al interés.*

En efecto: llamemos C, al capital; R, al rédito o tanto por 100, y propongámonos averiguar el interés de dicho capital. Si el capital C se hace 2, 3, etc., veces mayor o menor, su interés será también 2, 3, etc., veces mayor o menor; luego el capital y el interés son dos cantidades directamente proporcionales. Llamemos I al interés del capital, y la cuestión queda reducida a la regla de interés simple siguiente:

S. Si 100 produce en un año R,
P. C producirá............ I

Donde vemos que $100 : C :: R : I$

cuya proporción nos da las fórmulas siguientes:

(*Para hallar el interés*) $I = \dfrac{C \times R}{100}$

(*Para hallar el capital*) $C = \dfrac{100 \times I}{R}$

(*Para hallar el rédito o t. %*) $R = \dfrac{100 \times I}{C}$

379. Resolución de las cuestiones de interés cuando el tiempo es mayor o menor que 1 año. — Las cuatro cuestiones que pueden presentarse cuando el tiempo es mayor o menor que 1 año, se resuelven por la siguiente proporción:

100 *multiplicado por* 365, *por* 12 *o por* 1 (según que el tiempo se exprese en días, meses o años), *es al capital multiplicado por el tiempo, como el rédito o t. % es al interés.*

En efecto; conviene saber que, en la práctica, se admite, aunque no sea rigurosamente exacto, que los intereses simples de un capital son directamente proporcionales a los tiempos que ha estado impuesto. Si llamamos C al capital; R, al rédito o t. %; T, al tiempo, e I al interés del capital al cabo del tiempo T, la cuestión queda reducida a la regla de tres compuesta siguiente, suponiendo el tiempo expresado en días, y considerando el año civil, de 365 días.

Supuesto.	Si 100 en 365 días producen R,
Pregunta.	C » T » producirá I.

Los capitales 100 y C son directamente proporcionales a sus intereses respectivos R e I; luego tenemos, en primer lugar, la siguiente proporción:

$$100 : C :: R : I.$$

Suponiendo hallado el valor de I, llamándole X, la proporción anterior será:

$$100 : C :: R : X.$$

X es, pues, el interés de C en 365 días. Ahora, si C, en 365 días, produce de interés X, en T días producirá Y; luego la proporción será:

$$365 : T :: X : Y.$$

Multiplicando, ordenadamente, estas dos últimas proporciones, y separando el factor X, común al segundo medio y al segundo extremo, tenemos:

$$100 \times 365 : C \times T :: R : Y.$$

Cuya proporción nos da las fórmulas siguientes:

(*Para hallar el interés*) $Y = \dfrac{C \times T \times R}{36500}$

(*Para hallar el capital*) $C = \dfrac{36500 \times Y}{R \times T}$

(*Para hallar el t. %*) $R = \dfrac{36500 \times Y}{C \times T}$

(*Para hallar el tiempo*) $T = \dfrac{36500 \times Y}{C \times R}$

Si, en vez de tomar el año civil, se considerase el comercial, de 360 días, como suele hacerse en el comercio, la proporción final sería, evidentemente:

$$100 \times 360 : C \times T :: R : Y.$$

Si el tiempo del problema se expresara en meses, naturalmente que la anterior proporción sería:

$$100 \times 12 : C \times T :: R : Y.$$

Y si el tiempo del problema fuese un número cabal de años,

$$100 \times 1 : C \times T :: R : Y.$$

EJEMPLOS: Cuando el tiempo es 1 año:

1.º *Determínese el interés que, en 1 año, producirán* 800 *ptas. puestas al* 6 %.

Solución razonada

$$\begin{array}{ll} \text{S.} & \text{Si } 100 \text{ ptas. producen } 6 \text{ ptas. de interés,} \\ \text{P.} & \quad\; 800 \;\;\text{»}\;\; \text{producirán } x \;\;\text{»} \qquad\;\; \text{»} \\ \hline & 100 : 800 :: 6 : x = 48 \text{ ptas. de interés.} \end{array}$$

Resolución por la fórmula general:

$$100 : 800 :: 6 : y = 48 \text{ ptas.}$$

2.º *¿Qué capital deberá prestarse al* 6 %, *para que, en* 1 *año, produzca* 48 *pesetas de interés?*

Solución razonada

$$\begin{array}{ll} \text{S.} & \text{Si para obtener } 6 \text{ pesetas de interés han de prestarse } 100 \text{ ptas. de capital,} \\ \text{P.} & \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 48 \;\;\text{»} \qquad\quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad\quad \text{»} \quad x \quad \text{»} \qquad\qquad \text{»} \\ \hline & 6 : 48 :: 100 : x = 800 \text{ ptas. de capital.} \end{array}$$

Resolución por la fórmula general:

$$100 : c :: 6 : 48; \; c = 800 \text{ ptas.}$$

3.º *¿A qué rédito anual deberán prestarse* 800 *ptas. para producir, en* 12 *meses,* 48 *ptas. de interés?*

Solución razonada

$$\begin{array}{ll} \text{S.} & \text{Si } 800 \text{ ptas. producen } 48 \text{ ptas. de interés,} \\ \text{P.} & \quad\; 100 \;\;\text{»}\;\; \text{producirán } x \;\;\text{»} \qquad\;\; \text{»} \\ \hline & 800 : 100 :: 48 : x = 6 \% \text{ anual.} \end{array}$$

Resolución por la fórmula general:

$$100 : 800 :: r : 48; \; r = 6 \%.$$

Cuando el tiempo es mayor o menor que 1 año:

1.º *¿Qué beneficio producirán, en* 8 *meses,* 1200 *ptas., puestas al* 9 % *de interés anual?*

Solución razonada

$$\begin{array}{ll} \text{S.} & \text{Si } 100 \text{ ptas., en } 12 \text{ meses, producen } 9 \text{ ptas. de interés,} \\ \text{P.} & \quad 1200 \;\;\text{»} \quad\;\; \text{»} \;\; 8 \;\;\text{»} \qquad \text{producirán } x \;\;\text{»} \qquad \text{»} \\ \hline & \left.\begin{array}{r} 100 : 1200 \\ 12 : \quad 8 \end{array}\right\} :: 9 : x. \\ \hline & 100 \times 12 : 1200 \times 8 :: 9 : x = 72 \text{ ptas. de interés.} \end{array}$$

Resolución por la fórmula general:

$$100 \times 12 : 1200 \times 8 :: 9 : y; \; y = 72 \text{ ptas. de interés.}$$

2.º *¿Qué capital deberá imponerse al* 9 % *anual para obtener, en* 8 *meses,* 72 *pesetas de interés?*

Solución razonada

$$\begin{array}{ll} \text{S.} & \text{Si para obtener } 9 \text{ ptas. de interés, en } 12 \text{ meses, han de prestarse } 100 \text{ ptas.,} \\ \text{P.} & \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 72 \;\;\text{»} \qquad\qquad \text{»} \quad \text{»} \;\; 8 \;\;\text{»} \quad \text{deberán prestarse } x \quad \text{»} \\ \hline & \left.\begin{array}{r} 9 : 72 \\ 8 : 12 \end{array}\right\} :: 100 : x. \\ \hline & 9 \times 8 : 72 \times 12 :: 100 : x = 1200 \text{ ptas. de capital.} \end{array}$$

Resolución por la fórmula general:

$$100 \times 12 : c \times 8 :: 9 : 72.$$

Luego $c \times 8 = 9600$; y $c = \dfrac{9600}{8} = 1200$ ptas.

3.° *¿A qué tanto por ciento anual deberán prestarse* 1200 *ptas., para obtener, en* 8 *meses,* 72 *ptas. de interés?*

Solución razonada

S.	Si 1200 ptas.,	en 8 meses,	producen	72 ptas.	de interés,
P.	100 »	» 12 »	producirán	x »	»

$$\left.\begin{array}{r} 1200 : 100 \\ 8 : 12 \end{array}\right\} :: 72 : x.$$

$$1200 \times 8 : 100 \times 12 :: 72 : x = 9\ \%\ \text{anual.}$$

Resolución por la fórmula general:

$$100 \times 12 : 1200 \times 8 :: r : 72;\ r = 9\ \%.$$

4.° *¿Por cuánto tiempo deberán prestarse* 1200 *ptas. al* 9 %, *para obtener* 72 *pesetas de interés?*

Solución razonada

S.	Si 100 ptas.,	para producir 9 ptas.,	han de estar prestadas	12 meses,
P.	1200 »	» » 72 »	» » » »	x »

$$\left.\begin{array}{r} 1200 : 100 \\ 9 : 72 \end{array}\right\} :: 12 : x.$$

$$1200 \times 9 : 100 \times 72 :: 12 : x = 8\ \text{meses.}$$

Resolución por la fórmula general:

$$100 \times 12 : 1200 \times t :: 9 : 72.$$

Luego $1200 \times t = 9600$; y $t = \frac{9600}{1200} = 8$ meses.

380. Caso particular del interés simple y su resolución. — El interés simple tiene un caso particular, que es el siguiente: *Conociendo la suma de capital e intereses, el tanto por ciento y el tiempo, determinar el capital prestado.*

Pueden suceder dos casos:

1.° *El tiempo del problema es* 1 *año.*

2.° *El tiempo del problema es mayor o menor que* 1 *año.*

Cuando el tiempo es 1 año, la cuestión se reduce a la regla de tres siguiente:

Si 100 *más su interés al cabo de* 1 *año procede del capital* 100, *la suma de capital e intereses que se da en el problema, ¿de qué capital procederá?*

Cuando el tiempo es mayor o menor que 1 año, la cuestión se resuelve mediante dos reglas de tres simples:

Por la primera, se determina el interés del capital 100 *en el tiempo del problema,* y por la segunda, se dice:

Si 100 *más su interés en el tiempo del problema procede del capital* 100, *la suma de capital e intereses que se da en el problema, ¿de qué capital procederá?*

Ejemplos: 1.° Cuando el tiempo es 1 año. *Un prestamista ha recibido* 848 *pesetas, en concepto de capital e intereses, de una suma que cedió durante* 1 *año al* 6 % *de interés. ¿Qué capital había prestado?*

S.	Si 106 ptas.	proceden del capital 100
P.	848 »	» » x.

$$106 : 848 :: 100 : x = 800\ \text{ptas., cap. prestado.}$$

2.° Cuando el tiempo es mayor o menor que 1 año. *Cierto individuo prestó una suma por* 45 *días al* 6 %, *y al cabo de este tiempo recibió* 503'698 *ptas. Averígüese el capital prestado.*

Determinemos, primero, el interés del capital 100 en el tiempo del problema, 45 días.

S.	Si 100 ptas., en	365 días	producen	6 ptas.
P.	» » » »	45 »	producirán	x »

$$365 : 45 :: 6 : x = 0'739\ \text{ptas.}$$

Diremos ahora:

S.	Si 100'739 ptas.	proceden	del capital	100	ptas.
P.	503'698 »	procederán	» »	x	»

100'739 : 503'698 : : 100 : x = 500 ptas. cap. prest.

Así como hemos tomado, en la primera regla de tres, el año común, de 365 días, es costumbre bastante generalizada tomar el año comercial, es decir, de 360 días.

381. Resolución de las cuestiones sobre interés compuesto. — Cuando se trata de determinar a cuánto asciende un capital con sus intereses compuestos al cabo de un determinado número de años, se forman tantas reglas de tres simples como años se dan, teniendo en cuenta que:

El capital que produce interés durante el primer año, es el que se prestó.

El capital del segundo año, es el del primero más sus intereses.

El capital del tercer año, es el del segundo más sus intereses.

Y así sucesivamente.

EJEMPLO: *¿En cuánto se convertirán* 500 *ptas., puestas al interés compuesto de* 6 % *durante* 4 *años?*

Resolución

1.er año: 100 : 500 : : 6 : x = 30 ptas. interés del 1.er año.
Capital del 2.º año: 500 + 30 = 530 ptas.
Veamos su interés:

100 : 530 : : 6 : x = 31'80 ptas. interés del 2.º año.

Capital del 3.er año: 530 + 31'80 = 561'80 ptas.
Veamos su interés:

100 : 561'80 : : 6 : x = 33'70 ptas. interés del 3.er año.

Capital del 4.º año: 561'80 + 33'70 = 595'50 ptas.
Veamos su interés:

100 : 595'50 : : 6 : x = 35'73 ptas. interés del 4.º año.

Tenemos, pues, que:

Interés producido por el capital prestado e intereses compuestos agregados, durante el 4.º año	35'73 ptas.
Capital del 4.º año	595'50 »
Las 500 ptas. se convierten en	631'23 ptas.

382. Proporción general para la resolución de las cuestiones sobre interés compuesto.—Es la siguiente: 1 *es a* 1 *más el tanto por* 1 *elevado al número de años, como el capital es a la suma de capital e intereses.*

En efecto; llamemos c al capital puesto a interés; r, al tanto por 1 anual; t, al tiempo considerado en años, y C, a la suma de capital e intereses, esto es, el valor del capital prestado al finalizar el tiempo t.

Si r es el tanto por 1, el interés del capital c, al finalizar el primer año, será $c\,r$, y la suma de capital e intereses, será $c + c\,r$, lo cual puede expresarse así:

$$c + c\,r = c\,(1 + r)$$

Esta expresión nos dice que, *cualquiera que sea el capital, se hallará la suma de capital e intereses al cabo de* 1 *año, multiplicándole por* $1 + r$.

Si el capital que produce interés durante el segundo año es $c\,(1 + r)$, según la regla anterior, la suma de capital e interés, al finalizar el segundo año, será

$$c\,(1 + r) \times (1 + r) = c\,(1 + r)^2$$

Si $c\,(1 + r)^2$ es el capital que produce interés durante el tercer año, la suma de capital e interés, al finalizar dicho tercer año, será según la regla dada,

$$c\,(1 + r)^2 \times (1 + r) = c\,(1 + r)^3$$

Y por lo tanto, siguiendo la misma ley, al finalizar el tiempo t años, la suma de capital e intereses será $c\,(1 + r)^t$

Pero como a esta cantidad la hemos llamado C, tenemos $C = c\,(1 + r)^t$

O lo que es lo mismo, $1 \times C = c\,(1 + r)^t$

De esta igualdad se deduce (**350.**—*Corol.* 3.º) la siguiente proporción:

$$1 : (1 + r)^t :: c : C$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo: Resolviendo, por esta proporción, el problema anterior (del número **381**), llamando x a la suma de capital e intereses compuestos al cabo de los 4 años, tendremos:

$$1 : 1'06^4 :: 500 : x \ (*)$$

$$x = 1'06^4 \times 500 = 631'23848 = 631'23 \text{ ptas.}$$

Conociendo la suma de capital e intereses compuestos, podemos hallar fácilmente el capital que se prestó. En el caso presente, la proporción sería:

$$1 : 1'06^4 :: x : 631'23848$$

$$x = \frac{631'23848}{1'06^4} = 500 \text{ ptas.}$$

Por la anterior proporción, sólo pueden resolverse las dos cuestiones que acabamos de tratar. Los mismos casos y los que tienen por objeto hallar el tanto % y el tiempo, se resuelven con facilidad suma por medio de los logaritmos.

Método de los divisores fijos

383. Para hallar los intereses simples de un capital, se suele emplear un método muy sencillo llamado de *divisores fijos*, el cual se aplica siempre para determinar los intereses en las *Cuentas corrientes con interés.*

Veamos en qué consiste:

Sabemos que, cuando el tiempo es mayor o menor que 1 año, las cuestiones de interés pueden resolverse por esta proporción (**379**):

$$100 \times 360 : c \times t :: r : y$$

Verificando la operación indicada en el primer extremo, tenemos:

$$36000 : c \times t :: r : y$$

Alternando los medios, resulta: $36000 : r :: c \times t : y.$

Dividiendo por r la primera razón, tenemos:

$$\frac{36000}{r} : \frac{r}{r} :: c \times t : y, \quad \text{ó bien } \frac{36000}{r} : 1 :: c \times t : y.$$

De donde resulta, $y = \dfrac{c \times t}{\dfrac{36000}{r}}$

Y como r representa el tanto por ciento (2, 3, 4, 5, 6 %, etc.) y $\dfrac{36000}{r}$ se llama *el divisor fijo*, tenemos que: *para hallar el interés de un capital, se multiplica este capital por el tiempo, y el producto se divide por el divisor fijo* (esto es, por la mitad, tercio, cuarto, quinto, sexto, etc., de 36000, según que el rédito sea 2, 3, 4, 5, 6, etcétera, %).

Si se tomase el año común, de 365 días, el divisor fijo sería $\dfrac{36500}{r}$, como se ve sencillamente.

Si la unidad de tiempo fuese el mes, el divisor fijo sería $\dfrac{1200}{r}$.

En la imposibilidad de retener en la memoria todos los divisores fijos, conviene tener a mano una tabla, como la presente:

(*) Nada más fácil que calcular el tanto por 1. Si el interés es a 6 %, diremos: si a 100 corresponde 6, a 1 corresponderá 100 veces menos, esto es, la centésima parte de 6, es decir, 0'06. Si el interés fuese a 5 %, diríamos igualmente: si a 100 corresponde 5, a 1 corresponderá 100 veces menos, es decir, la centésima parte de 5, esto es, 0'05. Etc., etc.

TABLA DE DIVISORES FIJOS

TANTO POR 100	DIVISOR FIJO tomando el año de 360 días	DIVISOR FIJO tomando el año de 365 días
$1/2$	72,000	73,000
1	36,000	36,500
1 $1/2$	24,000	24,333 $1/3$
2	18,000	18,250
2 $1/2$	14,400	14,600
3	12,000	12,166 $2/3$
3 $1/2$	10,285 $5/7$	10,428 $4/7$
4	9,000	9,125
4 $1/2$	8,000	8,111 $1/9$
5	7,200	7,300
5 $1/2$	6,545 $5/11$	6,636 $4/11$
6	6,000	6,083 $1/3$
6 $1/2$	5,538 $6/13$	5,615 $5/13$
7	5,142 $6/7$	5,214 $2/7$
7 $1/2$	4,800	4,866 $2/3$
8	4,500	4,562 $1/2$
8 $1/2$	4,235 $5/17$	4,294 $2/17$
9	4,000	4,055 $5/9$
9 $1/2$	3,789 $9/19$	3,842 $2/19$
10	3,600	3,650

EJEMPLO: *¿Qué interés producirán 3,000 pesetas al 5 %, en 22 días?*
Tomando el año de 360 días, tenemos la fórmula:

$$y = \frac{c \times t}{\frac{36000}{r}};\ \text{y substituyendo las letras por sus valores, } y = \frac{3000 \times 22}{\frac{36000}{5}}$$

Substituyendo el denominador por el divisor fijo de la tabla, tendremos:

$$\frac{3000 \times 22}{7200} = 9'16 \text{ pesetas.}$$

Tomando el año de 365 días, sería $y = \frac{3000 \times 22}{7300} = 9'04$ pesetas.

ESCOLIO. — Conviene saber que el producto de un capital por sus días se llama los *números de interés* de este capital; por lo que, la regla dada anteriormente también puede enunciarse diciendo: *Para hallar el interés de un capital, se dividen sus números por el divisor fijo correspondiente.*

Método de las partes alicuotas

Para calcular el interés simple de un capital durante un determinado número de días, hemos visto que se *dividen los números de este capital por el divisor fijo correspondiente* (**383.**—*Escolio*).

Considerando, como se hace generalmente en el comercio, el año de 360 días, vemos, por la *Tabla de divisores fijos* (**383.**) que, según que la tasa del interés sea 6, 5, 4 $1/2$, 4, etc., %, el divisor fijo es, respectivamente, 6,000, 7,200, 8,000, 9,000, etcétera.

Sabemos, también, que los *números* de un capital son el producto de este capital por los días; luego, si llamamos i al interés, c al capital y t a los días, tendremos, según que la tasa de interés sea 6, 5, 4 $1/2$, etc., %:

$$i = \frac{c\,t}{6000} \cdots \frac{c\,t}{7200} \cdots \frac{c\,t}{8000} \cdots \frac{c\,t}{9000} \cdots \text{etc.}$$

Si admitimos, como puede suceder, que c sea igual al divisor fijo, tenemos, naturalmente, $i = t$, en cuyo caso, el capital 6,000, 7,200, 8,000, 9,000, etc., produce 1 peseta de interés cada día. Podemos, pues, dar la siguiente

383'. Regla. — *Cuando el capital cuyo interés se desea conocer está en relación con el divisor fijo, se tomarán de éste las partes alícuotas necesarias para formar el capital del cual se pide el interés, y las partes alícuotas, correspondientes a los días, consideradas como pesetas, darán el interés que se pide.*

EJEMPLOS: 1.º *Hállese el interés de* 2000 *ptas. en* 72 *días, al* 6 %.

6000 ptas. dan, en 72 días, un interés de..............	72	ptas.
Luego 2000 ptas. ($1/3$ de 6000) darán de interés $1/3$ de 72 o	24	ptas.

2.º *Calcúlese el interés de* 5400 *ptas al* 5 %, *en* 180 *días.*

7200 ptas., dan de interés en 180 días.................	180	ptas.
3600 ptas. ($1/2$ de 7200) dan $1/2$ de 180, o..............	90	ptas.
1800 » ($1/2$ de 3600) dan $1/2$ de 90, o..............	45	»
Luego 5400 ptas., dan de interés..........................	135	ptas.

3.º *Hallar el interés de* 12900 *ptas. al* 4 $1/2$ % *en* 87 *días.*

8000 ptas., dan de interés, en 87 días..................	87	ptas.
8000 ptas., » » » » » »	87	ptas.
4000 » ($1/2$ de 8000) dan $1/2$ de 87, o..............	43'50	»
800 » ($1/5$ de 4000) » $1/5$ de 43'50, o...........	8'70	»
100 » ($1/8$ de 800) » $1/8$ de 8'70, o............	1'08	»
Luego 12900 ptas. dan de interés..........................	140'28	ptas.

Hemos resuelto los problemas anteriores *operando con las partes alícuotas del capital que produce 1 pta. de interés cada día a un tanto por ciento determinado;* también pueden resolverse *operando con las partes alícuotas del número de días necesarios para producir un interés igual a* $1/_{100}$ *del capital.*

En efecto, los divisores fijos 6000, 7200, 8000, 9000, etc., pueden escribirse, respectivamente, así: 100×60, 100×72, 100×80, 100×90, etc. Los factores 60, 72, 80, 90, etc., son, respectivamente, $\frac{360}{r}$, representando r la tasa del interés; luego si en la fórmula $i = \frac{c\,t}{6000} \cdots \frac{c\,t}{7200} \cdots \frac{c\,t}{8000} \cdots \frac{c\,t}{9000} \cdots$ etc., substituímos el divisor fijo por sus dos factores $100 \times \frac{360}{r}$, tendremos:

$$i = \frac{c\,t}{100 \times 60} \cdots \frac{c\,t}{100 \times 72} \cdots \frac{c\,t}{100 \times 80} \cdots \frac{c\,t}{100 \times 90} \cdots \text{etc.}$$

Si admitimos, como puede suceder, que $t = \frac{360}{r}$, tendremos, evidentemente, $i = \frac{c}{100}$. Esta igualdad nos dice que, en este caso, un capital cualquiera produce, en 60 días, 72 días, 80 días, 90 días, etc., un interés igual a la centésima parte de este capital. Se puede, pues, dar la siguiente

383". Regla. — *Para hallar el interés de un capital durante un determinado número de días, al* 6, 5, 4 $1/2$, 4, *etc.* %, *se toman, respectivamente, las partes alícuotas de* 60 *días,* 72 *días,* 80 *días,* 90 *días, etc., que son necesarias para formar los días dados, y las partes alícuotas correspondientes a la centésima parte del capital darán el interés que se pide.*

EJEMPLOS: 1.º *Hallar el interés de* 4650 *ptas., al* 6 %, *en* 150 *días.*

En 60 días, 4650 ptas. producen de interés..........	46'50	ptas.
En 120 días, » » 2 veces 46'50, o.....	93'00	ptas.
En 20 » » » $1/3$ de 46'50, o......	15'50	»
En 10 » » » $1/6$ de 46'50, o......	7'70	»
Luego en 150 días, 4650 ptas. producen....................	116'25	ptas.

2.º *Calcúlese el interés de 3825 ptas., al 5 %, en 45 días.*

En 72 días, 3825 ptas. producen de interés...........	38'25 ptas.
En 36 días, » » $^1/_2$ de 38'25, o.......	19'17 ptas.
En 9 » » » $^1/_4$ de 19'17, o.......	4'79 »
Luego en 45 días, 3825 ptas. producen	23'96 ptas.

3.º *Determínese el interés de* 1270 *ptas. en* 120 *días al* 4 %.

En 90 días, 1270 ptas. producen de interés...........	12'70 ptas.
En 90 días, » » »	12'70 ptas.
En 30 » » » $^1/_3$ de 12'70, o.......	4'23 »
Luego en 120 días, 1270 ptas. producen	16'93 ptas.

Observación. — Cuando la tasa del interés no es un divisor de 360, los métodos de divisores fijos y partes alícuotas no son directamente aplicables. Entonces puede calcularse el interés tomando un t. % submúltiplo de 360, y deducir luego el interés al t. % pedido. Así, se obtendrá el interés de 5 $^1/_2$ %, calculando el interés a 5 % y sumándole su $^1/_{10}$; ó bien, calculando el interés a 6 % y quitando del resultado su $^1/_{12}$.

Descuento

384. Definición y objeto de la regla. — Se entiende por *descuento* la cantidad que se rebaja de un capital que quiere cobrarse antes de su vencimiento.

La regla de descuento tiene por objeto enseñarnos a determinar la cantidad que debe rebajarse del citado capital.

Las operaciones de descuento versan, generalmente, sobre los documentos de giro: letras, pagarés, etc.

Si el poseedor o *tenedor* de uno de estos documentos necesita, antes de su vencimiento, el valor en metálico que dicho documento representa, busca una persona que se lo compre, cuyo acto se llama *descontar* o negociar.

El comprador de la letra o pagaré entrega al vendedor la cantidad consignada en el documento, *menos una cantidad*, que se llama *descuento*.

La cantidad que rebaja el comprador, es el interés convenido que se supone debe producirle la cantidad negociada, durante el tiempo que media entre el día de la operación y el del vencimiento de la letra o pagaré.

La cantidad consignada en una letra o pagaré se llama *valor nominal*, y la diferencia entre el valor nominal y el descuento se llama *valor efectivo*.

385. Maneras de descontar. — Hay dos maneras de descontar, que se distinguen con los nombres de *descuento abusivo* y *descuento real*.

El *descuento abusivo* es el generalmente empleado por los banqueros y comerciantes en las operaciones de esta clase; aunque el verdadero descuento, el legítimo, es el *real*. El método abusivo, como se observará, beneficia al *tomador* de los documentos negociados, perjudicando al *tenedor*.

386. Descuento abusivo. — Es aquél en virtud del cual se rebaja del valor nominal de una letra o pagaré, el interés que se supone producirá dicho valor nominal durante el tiempo que transcurra desde el día en que se verifica la operación de descontar, hasta el de su vencimiento. *La cantidad rebajada es, pues, realmente, el interés del valor de la letra, más el interés de dicho interés.*

387. Casos que pueden presentarse en las operaciones de descuento por el método abusivo. — Pueden presentarse dos casos:

1.º *El tiempo del documento que se descuenta es* 1 *año.*

2.º *El tiempo del documento que se descuenta es mayor o menor que* 1 *año.*

388. Cuestiones que se ofrecen cuando el tiempo es 1 año. — Cuando el tiempo es 1 año, pueden ofrecerse tres cuestiones:

1.ª Dados el valor nominal y el tanto por ciento de descuento, *hallar el valor efectivo.*

2.ª Dados el valor efectivo y el tanto por ciento, *hallar el valor nominal.*

3.ª Dados el nominal y el efectivo, *determinar el tanto por ciento de descuento.*

Estos problemas se resuelven por medio de una regla de tres simple.

EJEMPLOS: 1.º *¿Cuál será el valor efectivo de una letra de* 800 *ptas., cuyo plazo es* 1 *año, negociada al* 6 % *anual?*

Hallemos el interés de 800 ptas. en 1 año, al 6 %.

S. 100 ptas. .... 6 ptas.
P. 800 » .... x »

100 : 800 : : 6 : x = 48 ptas., que rebajará el tomador de la letra.

Luego:

Valor nominal de la letra	800 ptas.
Descuento..............................	48 »
Valor efectivo	752 ptas.

2.º *¿Cuál era el nominal de una letra que vencía al cabo de* 1 *año y que fué negociada al* 6 %, *habiendo recibido el tenedor* 752 *ptas.?*

Una letra de nominal 100 ptas., negociada al 6 %, daría 100 – 6 de efectivo, esto es, 94 ptas.

Luego:

S. Si 94 ptas. efectivas proceden de 100 ptas. nominales,
P. 752 » » procederán de x » »

94 : 752 : : 100 : x = 800 ptas. valor nominal.

3.º *¿A qué tanto por ciento fué negociada una letra de* 800 *ptas., cuyo plazo era* 1 *año, habiendo recibido el tenedor* 752 *ptas.?*

Si a 800 ptas. nominales correspondieron 752 ptas. efectivas, el interés de 800 ptas. fué 800 — 752 = 48 ptas.

Luego:

S. Si a 800 ptas. corresponden 48 ptas. de descuento,
P. a 100 » corresponderán x » »

800 : 100 : : 48 : x = 6., es decir, fué negociada al 6 % de descuento.

389. Cuestiones que ofrece el descuento abusivo, cuando el tiempo del documento que se negocía es mayor o menor que 1 año. — Puede ofrecer cuatro cuestiones:

1.ª Dados el valor nominal, el tanto por % de descuento y el tiempo, *hallar el valor efectivo.*

2.ª Dados el valor efectivo, el tanto por % de descuento y el tiempo, *hallar el valor nominal.*

3.ª Dados los valores nominal y efectivo y el tiempo, *hallar el tanto por ciento de descuento.*

4.ª Dados los valores nominal y efectivo y el tanto por % de descuento, *hallar el tiempo.*

Estos problemas se resuelven:

Para hallar el efectivo, por medio de una regla de tres compuesta y una resta.

Para hallar el nominal, por medio de dos reglas de tres simples.

Para hallar el descuento, por medio de una regla de tres compuesta.

Para hallar el tiempo, por medio de una regla de tres compuesta.

EJEMPLOS: 1.º *¿Cuál será el valor efectivo de una letra de* 8000 *ptas., cuyo plazo es* 30 *días, negociada al* 6 % *anual?*

Hallemos el interés de 8000 ptas., al 6 %, en 30 días.

S. Si 100 ptas. en 365 días, producen 6 ptas.
P. 8000 » » 30 » producirán x »

$$\left.\begin{matrix}100 : 8000\\ 365 : 30\end{matrix}\right\} :: 6 : x$$

$100 \times 365 : 8000 \times 30 :: 6 : x = 39'45$ ptas., que rebajará el tomador.

Luego:	Valor nominal.............	Ptas. 8000
	Descuento................	» 39'45
	Valor efectivo............	Ptas. 7960'55

2.º *Determínese el valor nominal de una letra a 30 días, negociada al 6 %, cuyo efectivo fué ptas.* 7960'55.

Hallemos, primero, el descuento o interés de una letra de 100 ptas. a 30 días.

S. Si 100 ptas., en 365 días, producen 6 ptas.,
P. » » » 30 » producirán x »

$$365 : 30 :: 6 : x = 0'49$$

Luego una letra de 100 ptas., a 30 días, daría al tenedor 100 — 0'49 ptas., es decir, 99'51 ptas. efectivas.

De consiguiente:

S. Si 99'51 ptas. efectivas proceden de 100 ptas. nominales,
P. 7960'55 » » procederán de x » »

$$99'51 : 7960'55 :: 100 : x = 8000 \text{ ptas. v. n.}$$

3.º *¿A qué tanto por ciento fué negociada una letra de* 8000 *ptas., a* 30 *días, habiendo recibido el tenedor* 7960'55 *ptas. efectivas?*

Si a 8000 ptas. nominales correspondieron 7960'55 ptas. efectivas, el interés rebajado o el descuento, fué de 8000 — 7960'55 = 39'45 ptas.

Luego:

S. Si a 8000 ptas., en 30 días, correspondieron 39'45 ptas. de descuento,
P. a 100 » » 365 » corresponderán x » »

$$\left.\begin{matrix}8000 : 100\\ 30 : 365\end{matrix}\right\} :: 39'45 : x$$

$8000 \times 30 : 100 \times 365 :: 39'45 : x = 6$, es decir, fué negociada al 6 %.

4.º *Por una letra de* 8000 *ptas., negociada al* 6 %, *recibió el tenedor* 7960'55 *pesetas. ¿Cuál era su plazo?*

La diferencia entre el nominal y el efectivo, 8000 — 7960'55 = 39'45 ptas., es el interés de 8000 ptas. en el tiempo del problema: Luego:

S. Si 100 ptas. nominales dan 6 ptas. de interés en 365 días,
P. 8000 » » darán 39'45 » » » x »

$$\left.\begin{matrix}8000 : 100\\ 6 : 39'45\end{matrix}\right\} : 365 : x$$

$$8000 \times 6 : 100 \times 39'45 :: 365 : x = 30 \text{ días.}$$

390. Descuento real. — *Descuento real o racional* es aquél en virtud del cual no se perjudican los intereses del tomador ni del tenedor del documento que se descuenta. *La cantidad rebajada, por este método, es el interés del valor efectivo de la letra o pagaré en el tiempo que le falta para su vencimiento.*

391. Razonamiento en que se funda el descuento real. — Se funda en el siguiente:

El dinero que el tomador entregará al tenedor ha de producir al primero un cierto tanto por ciento: luego 100 unidades de dinero se convertirán para el tomador en 100 más su interés al llegar el vencimiento del documento negociado; luego, *lo que entonces valdrá* 100 *más su interés, ahora sólo vale* 100.

Es decir:

S. *Si* 100 + *su interés el día del vencimiento valen* 100 *ahora,*
P. *El valor nominal que se cobrará entonces, cuánto ahora valdrá.*

392. Casos que pueden presentarse en las operaciones de descuento por el método real. — Pueden presentarse los mismos dos casos que por el abusivo:

1.º *El tiempo del documento es* 1 *año.*

2.º *El tiempo del documento es mayor o menor que* 1 *año.*

El primer caso se resuelve por medio de la regla de tres simple antes mencionada.

El segundo, mediante dos reglas de tres simples. *Por la primera, se halla el interés de* 100 *en el tiempo del problema, y luego se plantea la dada para el caso anterior,* es decir:

S. *Si* 100 + *su interés en el tiempo del problema valen* 100 *ahora,*

P. *El nominal, que se cobrará entonces, vale ahora* x.

EJEMPLOS: 1.º *¿Cuál será el valor efectivo o actual de una letra de* 4000 *pesetas, que vence dentro de* 1 *año, negociada al* 6 % *de descuento real?*

Resolución

S. Si 100 + 6 ptas. al cabo de 1 año, valen ahora 100 ptas.
P. 4000 ptas. » » » valen ahora x »

106 : 4000 : : 100 : x = 3773'58 ptas. v. ef.

2.º *Negociando al* 4 % *de descuento real una letra de* 6000 *ptas. cuyo plazo es* 30 *días, ¿cuánto recibirá el tenedor?*

Hallemos, primero, el interés de 100 ptas. en 30 días, al 4 % al año.

S. Si 100 ptas. en 365 días, producen 4 ptas.
P. » » » 30 » producirán x »

365 : 30 : : 4 : x = 0'32 ptas.

Formaremos ahora la proporción general, es decir:

S. Si 100'32 ptas. al cabo de 30 días, valen ahora 100 ptas.
P. 6000 » » » valen ahora x »

100'32 : 6000 : : 100 : x = 5980'86 ptas. v. ef.

393. Descuento usual de facturas.—Llamamos *descuento usual de facturas* al que se aplica a las compras y ventas de géneros a plazo que se pagan al contado. Generalmente, el vendedor rebaja al comprador, si éste paga al contado, una cierta cantidad por cada 100 unidades del valor de la factura.

EJEMPLO: *Un comerciante de Gerona ha comprado, a* 3 *meses de plazo, a otro de Barcelona, cierta partida de géneros que, según factura, importan* 2500'75 *pesetas. Si paga dicho valor al contado con* 3 % *de bonificación, ¿cuánto deberá entregar?*

Hallemos el 3 % de 2500'75 ptas.

S. Si de 100 ptas. se rebajan 3 ptas.
P. » 2500'75 » » x »

100 : 2500'75 : : 3 : x = 75'02 ptas.

Valor de la factura a 3 meses plazo	Ptas. 2500'75
Descuento 3 % sobre 2500'75 ptas	» —75'02
Líquido a pagar	Ptas. 2425'73

394. Descuento especial. — Llamamos descuento *especial* al que da lugar a la operación siguiente: *Determinar la cantidad que deberá satisfacerse para el reembolso de una letra o pagaré, cuyo nominal es un capital y sus intereses anticipados.*

Para ello, se calculan los intereses correspondientes a los días transcurridos, y se agregan al capital que motivó la operación.

EJEMPLO: *Ruiz, de Zaragoza, compró género a Sánchez, de Barcelona, por valor de* 20000 *ptas., a* 6 *meses plazo, conviniendo en satisfacer, además, el* 5 % *de interés sobre el valor de la factura en el tiempo mencionado; de cuyo total, ptas.* 20500, *entregó un pagaré. Transcurridos* 40 *días, Ruiz propone a Sánchez recoger el documento. Aceptada la propuesta, ¿cuánto debe entregar el pagador?*

Se ve que los intereses agregados al capital ascienden a 500 ptas. El tenedor del pagaré deberá, pues, recibir 20000 ptas. más el interés de 40 días sobre esta cantidad. Veamos qué interés corresponde a 40 días, si a 180 días o 6 meses, corresponden 500 ptas.

S.	Si a 180 días	corresponden	500 ptas.
P.	a 40 »	corresponderán	x »

$$180 : 40 :: 500 : x = 111'11 \text{ ptas.}$$

El pagador deberá, pues, entregar:

Valor de los géneros comprados..................	20000 ptas.
Interés de 40 días	111'11 »
Total	20111'11 ptas.

Vencimiento común de pagos

395. Objeto de la regla de vencimiento común de pagos. — Tiene por objeto hallar la fecha en que deberán hacerse efectivas dos o más cantidades que tienen distintos vencimientos, sin que resulte beneficio o pérdida para el cobrador ni el pagador.

Para resolver un problema de esta clase tomando por época la fecha del primer vencimiento, se disponen las cantidades en columna por orden de vencimientos; se cierran con una llave, frente de la cual se escribe la época; se cuentan los días que median entre la época y la fecha de cada uno de los vencimientos, y se escriben estos días frente de los respectivos capitales; se multiplica cada capital por sus días respectivos, y se divide la suma de estos productos por la suma de capitales. El cociente entero se añade a la época, y la suma es el vencimiento común.

EJEMPLO: *Un comerciante ha de satisfacer cuatro letras a un banquero: la primera, de ptas.,* 2000, *vence al* 3 *de enero; la* 2.ª, *de* 1500 *ptas., vence al* 10 *del mismo mes; la* 3.ª, *de* 800 *ptas., vence al* 25 *de idem, y la* 4.ª, *de* 2600 *pesetas, vence al* 5 *de febrero. Conviniendo ambas partes hacer el pago de todas en un día determinado, hállese este vencimiento común.*

Resolución

Epoca: 3 de enero	3 enero	ptas. 2000......	× 0 días	=	0000
	10 »	» 1500......	× 7 »	=	10500
	25 »	» 800......	× 22 »	=	17600
	5 febrero	» 2600......	× 33 »	=	85800
		6900			113900

$$113900 : 6900 = 16 \text{ días}$$

Epoca tomada	Enero 3
Cociente hallado..............	+ 16 días
Vencimiento común...	19 de enero.

RAZONAMIENTO. — La letra de 2000 ptas., que vence el día 3 de enero, no producirá nada, porque $2000 \times 0 = 0$.

Del 3 de enero al 10, van 7 días; 1500 ptas., en 7 días, producirán igual interés que $1500 \times 7 = 10500$ ptas. en 1 día.

Del 3 de enero al 25, van 22 días; 800 ptas., en 22 días, producirán igual interés que $800 \times 22 = 17600$ ptas. en 1 día.

Del 3 de enero al 5 de febrero, van 33 días; 2600 ptas., en 33 días, producirán igual interés que $2600 \times 33 = 85800$ ptas., en 1 día.

Luego el deudor debe pagar las cuatro letras al cabo de un número de días tal que, los intereses que produzcan, en este tiempo, 6900 ptas., sean iguales a los intereses que 113,900 ptas. produzcan en 1 día.

Si suponemos, por ejemplo, que el interés recíproco es 4 %, los intereses de 6900 ptas., en x días, serán: $\frac{6900 \times x \times 4}{36500}$.

Y los intereses de 113,900 ptas. en 1 día: $\frac{113900 \times 1 \times 4}{36500}$.

Luego: $6900 \times x \times 4 = 113900 \times 1 \times 4$.
O bien: $6900 \times x = 113900$.

Luego: $x = \dfrac{113900}{6900} = 16$ días.

De consiguiente, el deudor deberá hacer el pago 16 días después del día 3 de enero, o bien el 19 de enero.

396. Casos que ofrece.—Aunque en rigor el caso es uno solo, el problema puede ofrecerse bajo dos aspectos aparentemente distintos:

1.º *Determinando el tiempo preciso que corresponde a cada capital.*

2.º *No determinando el tiempo preciso que corresponde a cada capital.*

El tiempo que se desea averiguar en los problemas de esta clase debe ser tal, que haya compensación de intereses recíprocos.

397. Resolución del primer caso.—*Basta multiplicar cada capital por su tiempo, y dividir la suma de estos productos por la suma de capitales. El cociente es el vencimiento común.*

Ejemplo: *Cierto individuo debe pagar* 400 *ptas. dentro de* 2 *meses;* 520 *pesetas al cabo de* 5 *meses, y* 2500 *ptas. dentro de* 8 *meses. No habiendo podido satisfacer el primer pago, conviene con su acreedor en verificar la entrega de las tres cantidades en un pago único. Hállase al cabo de cuánto tiempo deberá verificar el pago mencionado.*

Disposición de los datos

400 ptas.	2	$400 \times 2 =$	800
520 »	5	$520 \times 5 =$	2600
2500 »	8	$2500 \times 8 =$	20000
3420			23400

Según lo convenido, el deudor guardaría 400 ptas. durante 2 meses; 520 pesetas durante 5 meses, y 2500 ptas. durante 8 meses.

Ahora bien: 400 ptas., en 2 meses, producen un interés igual al que produciría, en 1 mes, una cantidad 2 veces mayor, o bien: $400 \times 2 = 800$ ptas.

Igualmente, 520 ptas., en 5 meses, producen un interés igual al que producirá, en 1 mes, una cantidad 5 veces mayor, o bien: $520 \times 5 = 2600$ ptas.

Y también 2500 ptas. producirán, en 8 meses, un interés igual al que producirá, en 1 mes, una cantidad 8 veces mayor, o bien: $2500 \times 8 = 20000$ ptas.

Y como el tiempo que se desea averiguar en el problema debe ser tal que dé lugar a la compensación de intereses recíprocos, el deudor debe pagar, al cabo de un tiempo tal que, los intereses de 3420 ptas. en este tiempo sean iguales a los intereses de 23400 ptas. en 1 mes.

Si suponemos que el interés recíproco es el 6, los intereses de 3420 ptas. en x meses, serán $\dfrac{3420 \times x \times 6}{1200}$; y los intereses de 23400 ptas. en 1 mes, serán $\dfrac{23400 \times 1 \times 6}{1200}$.

Luego, $\dfrac{3420 \times x \times 6}{1200} = \dfrac{23400 \times 1 \times 6}{1200}$.

Y también: $3420 \times x \times 6 = 23400 \times 1 \times 6$.

Dividiendo ambos miembros de esta última igualdad por 6, resulta:

$$3420 \times x = 23400.$$

Luego $x = \dfrac{23400}{3420} = 6\dfrac{288}{342}$ *meses* = 6 *meses* y 25 *días*.

Conforme a la regla dada.

398. Resolución del segundo caso.—Cuando no se determina el tiempo preciso que corresponde a cada capital, este tiempo puede hallarse con facilidad partiendo de una época cualquiera, con tal de que ésta no sea posterior a la fecha del vencimiento más próximo.

Para mayor facilidad, se toma por *época* o base la fecha del primer vencimiento. (*Véase el problema del núm.* **395.**)

Repartimientos proporcionales

399. Definición. — Repartir un número en partes proporcionales a otros números dados, es dividir dicho número en tantas partes como números se dan; de modo que la razón de la primera parte a la segunda sea igual a la razón del primer número al segundo; que la razón de la parte segunda a la tercera sea igual a la razón del segundo número al tercero, y así sucesivamente.

400. Cómo se divide un número en partes proporcionales a otros números dados. — Se forman tantas reglas de tres simples como números se dan, diciendo en cada una de ellas:

Supuesto. *Si a la suma de los números corresponden tantas unidades,*
Pregunto. *A uno de los números, cuántas unidades corresponderán.*

En efecto; propongámonos, por ejemplo, dividir el número 300 en tres partes proporcionales a los números 2, 4 y 7.

Sean x, z, y las tres partes en que deseamos dividir el número 300. Tendremos, naturalmente, que,

$$x + z + y = 300$$

Según la definición,

$$x : z :: 2 : 4$$
$$z : y :: 4 : 7$$

Alternando los medios en cada una de estas dos proporciones, resultará:

$$x : 2 :: z : 4$$
$$z : 4 :: y : 7$$

Siendo iguales entre sí estas cuatro razones, tenemos:

$$x : 2 :: z : 4 :: y : 7$$

Pero nosotros sabemos que (**361**)

$$x + z + y \text{ o } 300 : 2 + 4 + 7 :: x : 2$$
$$x + z + y \text{ o } 300 : 2 + 4 + 7 :: z : 4$$
$$x + z + y \text{ o } 300 : 2 + 4 + 7 :: y : 7$$

Invirtiendo los términos de cada una de estas tres últimas proporciones, resultará:

$$2 + 4 + 7 \text{ o } 13 : 300 :: 2 : x$$
$$2 + 4 + 7 \text{ o } 13 : 300 :: 4 : z$$
$$2 + 4 + 7 \text{ o } 13 : 300 :: 7 : y$$

Conforme a la regla dada.

EJEMPLO:

Repartir el número 200 *en tres partes, proporcionales a los números* 2, 3 *y* 5.

Las tres partes del número 200 han de ser proporcionales a 2, 3 y 5. Sumando estos números, tendremos que $2 + 3 + 5 = 10$.

Diremos ahora:

Para la 1.ª parte:

S. Si a 10 corresponden 200,
P. a 2 corresponderán x.

$10 : 2 :: 200 : x = 40$, parte primera.

Para la 2.ª parte:

S. Si a 10 corresponden 200,
P. a 3 corresponderán x.

$10 : 3 :: 200 : x = 60$, parte segunda.

Para la 3.ª parte:

S. Si a 10 corresponden 200,
P. a 5 corresponderán x.

$10 : 5 :: 200 : x = 100$, parte tercera.

Comprobación

Parte 1.ª	40
» 2.ª	60
» 3.ª	100
Suma igual al número dado	200

Examinemos, ahora, el resultado indicado de cada una de las tres proporciones halladas:

Para la 1.ª parte, $\frac{200 \times 2}{10}$; para la 2.ª parte, $\frac{200 \times 3}{10}$; para la 3.ª parte, $\frac{200 \times 5}{10}$.

De todo lo cual puede deducirse la siguiente:

401. Regla. — *Para dividir un número en partes proporcionales a otros números dados, se multiplica el número que se ha de repartir por cada uno de los números que se dan, y el producto se divide por la suma de los números a que las partes han de ser proporcionales. Los cocientes hallados son las partes que se deseaban obtener.*

OTRO EJEMPLO: *Hay que distribuir 25000 ptas. entre cuatro personas, de modo que la primera reciba doble que la segunda; ésta, el triplo de la tercera, y ésta, la mitad de lo que corresponda a la cuarta. ¿Qué parte corresponderá a cada una?*

En este ejemplo, no se nos dan los números a que las partes de 25000 han de ser proporcionales; pero el problema sería el mismo si nos propusiéramos distribuir las 25000 ptas. en partes proporcionales a los números 6, 3, 1 y 2, porque:

parte 4.ª	....	2
» 3.ª	....	1 = mitad de la 4.ª
» 2.ª	....	3 = triplo de la 3.ª
» 1.ª	....	6 = doble de la 2.ª

402. *De modo, pues, que cuando no se dan los números a que las partes han de ser proporcionales, basta tomar números arbitrarios que satisfagan las condiciones del problema, y proceder como cuando los números se dan.*

Es decir: suma de números a que las partes han de ser proporcionales:

$6 + 3 + 1 + 2 = 12$. Luego:

Para la parte 1.ª:

S. Si a 12 corresponden 25000 ptas.,
P. a 6 corresponderán x »

$12 : 6 :: 25000 : x = 12500$, parte 1.ª

Para la parte 2.ª

S. Si a 12 corresponden 25000 ptas.,
P. a 3 corresponderán x »

$12 : 3 :: 25000 : x = 6250$, parte 2.ª

Para la parte 3.ª

S. Si a 12 corresponden 25000 ptas.,
P. a 1 corresponderán x »

$12 : 1 :: 25000 : x = 2083'333$, parte 3.ª

Para la parte 4.ª

S. Si a 12 corresponden 25000 ptas.,
P. a 2 corresponderán x »

$12 : 2 :: 25000 : x = 4166'667$, parte 4.ª

Comprobación

Parte 1.ª........	12500	ptas.	(doble de la 2.ª)
» 2.ª........	6250	»	(triplo de la 3.ª)
» 3.ª........	2083'333	»	(mitad de la 4.ª)
» 4.ª........	4166'667	»	
Total ptas.	25000'000	igual a la suma dada para repartir.	

Compañías

Para la explotación de un negocio no bastan, a menudo, el capital y la inteligencia de un individuo, y la mencionada explotación se realiza con la posibilidad que ofrece la reunión de los capitales y las inteligencias de una colectividad; es decir, mediante la constitución de una *compañía* o *sociedad mercantil.*

Compañía o sociedad mercantil es, pues, un convenio que se verifica entre dos o más individuos interesados en la explotación de un negocio, para lo cual juntan sus capitales, sus industrias, o ambas cosas a la vez.

Hay tres clases de compañías: *Colectivas, anónimas* y *comanditarias.*

Son *colectivas*, aquéllas compañías en las cuales todos y cada uno de los socios participan de iguales derechos y deberes, siendo, por lo mismo, responsables cada uno de ellos del resultado de las operaciones que verifica la sociedad.

Son *anónimas*, aquéllas en las cuales sólo el capital social es responsable de las operaciones que la sociedad verifica. El capital social de estas compañías se reúne por acciones, y su dirección está a cargo de uno o más administradores amovibles. Son, generalmente, de esta clase las compañías de seguros, las de ferrocarriles, las de navegación, las de minas, los bancos, etc. Para constituirse, necesitan la superior aprobación del gobierno.

Compañías *comanditarias* son aquéllas que las constituyen dos clases de socios, esto es, *socios gerentes* y *socios prestamistas*. Los primeros dirigen y administran la sociedad, y por esta razón tienen iguales responsabilidades que los socios de las colectivas. Los segundos sólo están expuestos a las pérdidas de los capitales con que han intervenido en la sociedad, y perciben el beneficio proporcional que a sus capitales corresponde.

Razón social de una compañía es el nombre adoptado por la misma; también se llama así la firma que emplea una casa de comercio para las cartas, letras, vales, etc.

403. Definición. — Regla de *compañía* es la que tiene por objeto hacer la repartición proporcional de los beneficios o pérdidas habidas en un negocio, entre los individuos que han intervenido en él con sus capitales.

404. División de las cuestiones sobre compañías. — Los problemas de compañía se dividen, generalmente, en *simples y compuestos*. Son simples cuando los capitales permanecen igual tiempo en el fondo social; son compuestos, cuando los capitales permanecen en el fondo social tiempos distintos.

405. Casos que pueden presentarse. — Las cuestiones sobre compañías, prescindiendo de la anterior división, pueden ofrecer tres casos distintos:

1.º *Que los capitales sean distintos y los tiempos iguales.*
2.º *Que los capitales sean iguales y los tiempos distintos.*
3.º *Que los capitales y los tiempos sean distintos.*

406. Resolución del primer caso. — Se funda en el siguiente principio, que es evidente:

Si los tiempos son iguales, las ganancias o pérdidas de dos o más capitales distintos son proporcionales a estos capitales.

Luego, para resolver el primer caso, se divide la ganancia o pérdida en partes proporcionales a los capitales.

EJEMPLO: *En la explotación de un negocio, intervinieron tres individuos con los siguientes capitales: el 1.º, con 2000 ptas.; el 2.º, con 3500 ptas., y el 3.º, con 8400 pesetas. Tres años después, la sociedad había experimentado un beneficio de 12000 pesetas. Determínese la parte de ganancia correspondiente a cada socio.*

Resolución

Capital del 1.er socio, 2000 ptas.
» » 2.º » 3500 »
» » 3.er » 8400 »
} Ganancia social, 12000 ptas.

Capital social 13900 ptas.

(400)
$$\begin{cases} 13900 : 12000 :: 2000 : x = 1726'619 \text{ ptas., ganancia del 1.º} \\ 13900 : 12000 :: 3500 : x = 3021'582 \text{ » » » 2.º} \\ 13900 : 12000 :: 8400 : x = 7251'799 \text{ » » » 3.º} \end{cases}$$

Ganancia social dada, 12000'000 pesetas.

407. Resolución del segundo caso. — Se funda en el siguiente principio, el cual, aunque no rigurosamente cierto, se admite como tal:

Si los capitales son iguales, las ganancias o pérdidas son proporcionales a los tiempos. (*)

Luego, para resolver el segundo caso, se divide la ganancia o pérdida en partes proporcionales a los tiempos.

EJEMPLO: *Cierto individuo empezó un negocio con* 20000 *pesetas;* 1 *año después, asociósele cierto amigo aportando un capital igual al suyo, y* 3 *años después habían experimentado* 6000 *ptas. de pérdida. Determínese la parte correspondiente a cada uno.*

Resolución

Tiempo del capital del 1.º.. 3 años
» » » » 2.º.. 2 »
} Pérdida social, 6,000 ptas.

5 años

(400) $\begin{cases} 5 : 6000 :: 3 : x = 3600 \text{ ptas., pérdida del 1.º} \\ 5 : 6000 :: 2 : x = 2400 \quad » \quad » \quad » \text{ 2.º} \end{cases}$

Pérdida social dada, 6000 ptas.

408. Resolución del tercer caso. — Se funda en el siguiente principio:

Si los capitales y los tiempos son distintos, las ganancias o pérdidas son proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos.

Este principio es una consecuencia de los otros dos.

En efecto; sean G y G' las ganancias correspondientes a los capitales C y C', que han permanecido en el fondo social los tiempos T y T'. Decimos que:

$$G : G' :: C \times T : C' \times T'$$

Sea G'' la ganancia correspondiente al capital C al cumplir en la sociedad el tiempo T'.

Las ganancias G y G'' correspondientes al capital C son proporcionales a los tiempos, según el principio en que se funda la resolución del segundo caso. Luego,

$$G : G'' :: T : T'.$$

Ahora, las ganancias G'' y G' correspondientes a los capitales C y C', que han permanecido igual tiempo, T', en el fondo social, son proporcionales a dichos capitales, según el principio en que se funda la resolución del primer caso. Luego,

$$G'' : G' :: C : C'.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, y suprimiendo el factor G'', común a los dos términos de la primera razón, tenemos

$$G : G' :: C \times T : C' \times T'$$

que es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO: *Cierto sujeto empezó la explotación de un negocio con* 2000 *pesetas de capital;* 5 *meses después, se le asoció un hermano suyo aportando* 1500 *ptas., y* 4 *meses después de esta última fecha, interesó en el negocio un primo de los dos aportando* 800 *ptas. Al cabo de* 36 *meses, hallaron* 900 *ptas. de beneficio: ¿qué parte correspondió a cada uno?*

Resolución

Tiempo del capital del 1.º .... 36 meses
» » » » 2.º 36 — 5 = 31 »
» » » » 3.º 31 — 4 = 27 »

1.º 2000 × 36 = 72000
2.º 1500 × 31 = 46500
3.º 800 × 27 = 21600
} Ganancia social, 900 ptas.

Suma de productos, 140100

(400) $\begin{cases} 140{,}100 : 900 :: 72000 : x = 462'527 \text{ ptas., ganancia del 1.º} \\ 140{,}100 : 900 :: 46500 : x = 298'715 \quad » \quad » \quad » \text{ 2.º} \\ 140{,}100 : 900 :: 21600 : x = 138'758 \quad » \quad » \quad » \text{ 3.º} \end{cases}$

Ganancia social dada, 900'000 ptas.

(*) Veamos por qué este principio no es rigurosamente cierto. Supongamos que un capital ha producido una determinada ganancia en 1 año. Al finalizar el primer semestre, dicho capital ha producido una ganancia; luego lo que produce ganancia durante el segundo semestre es el capital más la ganancia obtenida en el semestre primero; luego la ganancia del segundo semestre es mayor que la del primero; por lo que, *en rigor, las ganancias de un capital no son proporcionales a los tiempos.*

409. Otra resolución. — Las cuestiones de compañía simple pueden, también, resolverse, evidentemente, por la siguiente proporción:

El capital social es al capital de un socio, como la ganancia o pérdida social es a la ganancia o pérdida que corresponde a dicho socio, o a x.

Las compuestas, por la proporción siguiente:

Suma de los productos de los capitales por sus tiempos respectivos es al producto que corresponde a un socio, como la ganancia o pérdida social es a la ganancia o pérdida que corresponde a dicho socio.

Conjunta

410. Definición. — Regla *conjunta* es la que tiene por objeto determinar la equivalencia que existe entre dos cantidades que no tienen entre sí relación inmediata, mediante el auxilio de otras cantidades que tienen relación inmediata con ambas.

411. Principio fundamental. — Aquél en que se funda la resolución de los problemas de conjunta es el siguiente:

Multiplicando ordenadamente dos o más equivalencias tales, que el primer miembro de cada una de ellas sea de la misma especie que el segundo miembro de la equivalencia anterior, se obtienen dos productos equivalentes; siendo el primero de la primera especie, y el segundo, de la última especie.

Admitiremos dos casos: 1.º *Que las equivalencias sean dos.* 2.º *Que las equivalencias sean más de dos.*

1.º Supongamos que las dos equivalencias sean:

$$4^a = 3^b$$
$$8^b = 2^c \text{ (*)}$$

Decimos que $4 \times 8^a = 3 \times 2^c$. En efecto:

Multiplicando los dos miembros de la primera equivalencia por el número abstracto 8 y los dos de la segunda, por el número abstracto 3, tendremos:

$$32^a = 24^b \text{ y } 24^b = 6^c$$

Luego $32^a = 6^c$

según queríamos demostrar.

2.º Supongamos las equivalencias

$$4^a = 3^b$$
$$8^b = 2^c$$
$$5^c = 6^d$$
$$9^d = 7^e$$

Decimos que $4 \times 8 \times 5 \times 9^a = 3 \times 2 \times 6 \times 7^e$

En efecto; de las dos equivalencias primeras, resulta, según el primer caso, esta otra: $4 \times 8^a = 3 \times 2^c$

De esta nueva equivalencia y de la tercera, resulta, según el primer caso, esta otra: $4 \times 8 \times 5^a = 3 \times 2 \times 6^d$

De esta nueva equivalencia y de la cuarta, resulta, según el primer caso, esta otra: $4 \times 8 \times 5 \times 9^a = 3 \times 2 \times 6 \times 7^e$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

412. Elementos de todo problema de conjunta. — En todo problema de conjunta, hay que distinguir: *la cantidad buscada, la cantidad propuesta* y *las relaciones.*

Entendemos por cantidad buscada, la que nos proponemos determinar.

(*) Las letras *a, b* y *c* significan las especies. Las dos equivalencias anteriores deben, pues, leerse así: 4 *unidades de la especie* A *equivalen a* 3 *unidades de la especie* B, y 8 unidades de la especie B equivalen a 2 unidades de la especie C.

Cantidad propuesta es la que se da como principal en el problema, y es equivalente a la buscada.

Las relaciones son las igualdades por medio de las cuales hallamos la buscada.

413. Su resolución. — Para resolver un problema de conjunta, se practica lo siguiente:

1.º *Se designan las tres partes esenciales en esta forma:*

B (*buscada*)............ *R.* (*relaciones*)............ *P.* (*propuesta*).

2.º *Debajo de la buscada, se escribe la letra x, y debajo de la propuesta, la cantidad que se da como tal en el problema.*

3.º *Se escriben las igualdades necesarias debajo de la R., siendo conveniente tomar como primera, la buscada (x) = la propuesta.*

4.º *El primer miembro de cada igualdad ha de ser de la misma especie que el segundo miembro de la igualdad anterior, hasta hallar una igualdad cuyo segundo miembro sea de la misma especie que el primer miembro de la igualdad primera.*

5.º *Se multiplican entre sí los términos de la columna en que no está la incógnita, se hace lo propio con los términos de la otra columna, y se divide el primer producto por el segundo: el cociente es la cantidad buscada.*

Antes de verificar estas multiplicaciones, se simplifican las relaciones si se puede, partiendo, sucesivamente, un término de la 1.ª columna y otro de la 2.ª por los factores que le sean comunes.

EJEMPLO: *Pagando cierto género a 25 ptas. el quintal catalán, ¿cuál será el valor de 120 qq. castellanos?*

Resolución.

B.	R.	P.
x ptas.		120 qq. castellanos

$$\begin{array}{lcl} x \text{ ptas.} & = & 120 \text{ qq. castellanos} \\ 1 \text{ qq. cast.} & = & 46 \text{ kg.} \\ 41'6 \text{ kg.} & = & 1 \text{ qq. catalán} \\ 1 \text{ qq. cat.} & = & 25 \text{ ptas.} \\ \hline \end{array}$$

$$x\,(1 \times 41'6 \times 1) = 120 \times 46 \times 1 \times 25$$

$$\text{Luego } x = \frac{120 \times 46 \times 1 \times 25}{1 \times 41'6 \times 1} = \frac{120 \times 46 \times 25}{41'6} = 3317'307 \text{ pesetas.}$$

Aligación

414. Definición. — Regla de *aligación* es la que nos enseña a resolver los problemas relativos a *mezclas* y *aleaciones*.

415. Precio de una substancia. — Es el valor de una unidad.

416. Precio de una mezcla. — Precio de una mezcla, o *precio medio*, es el cociente de dividir la suma de los valores de las cantidades mezcladas por la suma de estas cantidades.

417. Cómo se divide la regla de aligación. — La regla de aligación se divide en *media* y *alternada*.

418. Aligación media. — Son problemas de aligación media aquéllos en que se desea averiguar el precio medio de una mezcla.

419. Aligación alternada. — Son de aligación alternada aquellos problemas en que, siendo conocido el precio medio: 1.º, se desconocen las cantidades que han de entrar en la mezcla; 2.º, se conocen alguna o algunas de dichas cantidades desconociendo las demás; 3.º, se conoce la suma o la diferencia de estas cantidades. En estos dos últimos casos, la aligación se llama *determinada.*

420. Resolución de los problemas de aligación media. — *Se multiplican las cantidades mezcladas por sus precios respectivos; se suman estos productos, y se divide esta suma por la de las unidades que componen la mezcla. El cociente que se obtiene es el precio medio.*

EJEMPLO: *Si mezclamos 40 Hl. vino de a 30 ptas. el Hl., con 22 Hl., de a 36 ptas. y 12 Hl. de a 42 ptas., ¿a cómo resulta el Hl. de mezcla?*

40 H. × 30 ptas.	....	= 1200 ptas.
22 » × 36 »	....	= 792 »
12 » × 42 »	....	= 504 »
74 Hl. de mezcla.		2496 ptas., valor de la mezcla.

2496 : 74 = 33'73 ptas., precio medio hallado.

Esto es evidente; pues si 74 Hl. valen 2496 ptas., 1 Hl. vale 74 veces menos.

COMPROBACIÓN: 74 Hl. × 33'73 ptas. = 2496 ptas., valor igual al de la mezcla.

421. Prueba de todo problema de aligación. — La prueba de cualquier problema de aligación se funda en la condición esencial de toda mezcla: *El valor total de las unidades mezcladas, a razón de sus precios respectivos, es igual al valor de las unidades de mezcla, a razón del precio medio.*

422. Principio fundamental de la aligación alternada. — Es el siguiente: *Si son dos las especies que se mezclan, las cantidades que deben tomarse de ambas especies están en razón inversa de las diferencias de sus precios al precio medio.*

De modo, pues, que tenemos la proporción siguiente:

Cantidad de la primera especie es a cantidad de la segunda especie, como la diferencia entre el precio medio y el precio de la segunda especie, es a la diferencia entre el precio medio y el precio de la primera especie.

En efecto; para demostrarlo, propongamos la resolución del siguiente

PROBLEMA: *Se tiene vino de dos clases, cuyos precios son 62 y 48 ptas. el Hl., y mezclando ambas clases, se quiere obtener otra tercera para vender a 54 pesetas el Hl.: ¿qué cantidad deberá tomarse de cada clase?*

Llamemos c al número de Hl. que se tomarán de la clase cuyo precio es 62 pesetas, y c′ al número de Hl. que se tomarán de la clase cuyo precio es 48 ptas.

Disposición de los datos

$$\begin{array}{lll} c \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 62 & \multirow{2}{*}{$\Big\}\; 54$} & \ldots\ldots\ldots\ldots\; 6 \\ c' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 48 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\; 8 \end{array}$$

Cada Hl. que se tome para mezclar de la especie primera sufre, en su valor, una disminución de 62 — 54 ptas.; luego c Hl. sufrirán una disminución de $c \times (62 - 54)$ pesetas.

Cada Hl. que se tome de la clase cuyo precio es 48 ptas. sufre, en su valor, un aumento de 54 — 48 ptas.; luego c' Hl. experimentarán un aumento de $c' \times (54 - 48)$ ptas.; pero como el mismo valor han de tener las cantidades antes de la mezcla que después de mezcladas (**421**), claro está que la disminución o pérdida que se experimenta por un lado, es igual al aumento o ganancia que se obtiene por el otro; luego $c \times (62 - 54) = c' \times (54 - 48)$; cuya igualdad nos da la proporción siguiente: (**350**. — *Corol.* 3.º)

$$c : c' :: 54 - 48 : 62 - 54\text{: o bien,}$$
$$c : c' :: 6 : 8\text{, conforme al enunciado.}$$

De esta proporción, se deduce que *todas las cantidades proporcionales a 6 y 8 satisfacen la condición buscada;* luego se podrán mezclar:

Hls. de a 62 ptas. uno		Hls. de a 48 ptas. uno
6	con	8
12	»	16
18	»	24
24	»	32
3	»	4
	Etc., etc.	

ESCOLIO.—*De modo, pues, que el número de relaciones de una mezcla es infinito.*

COROLARIO. — Si las especies que han de mezclarse son más de dos, *se reduce este caso al anterior, hallando las unidades que hay que tomar de cada una de dos especies cuyos precios comprendan al precio medio; luego el de otras dos, y así sucesivamente.*

423. Casos principales que ofrece la aligación alternada. — Ofrece cuatro casos, a saber:

1.º *Conociendo el precio medio y los precios de las especies, hallar la relación en que debe hacerse la mezcla.*

2.º *Conociendo el precio medio, los precios de las especies y la cantidad de una o varias especies, determinar la cantidad que debe tomarse de cada una de las otras especies.*

3.º *Conociendo el precio medio, los precios de las especies y la suma de las unidades mezcladas, determinar la cantidad que debe tomarse de cada una de las especies.*

4.º *Conociendo el precio medio, los precios de dos especies y la diferencia entre las cantidades que de ambas especies se tomarán, determinar estas dos cantidades.*

424. Resolución del primer caso. — Para determinar la relación en que debe hacerse una mezcla, *se escriben los precios de las especies en columna y de mayor a menor; se cierran con una llave, frente de la cual se escribe el precio medio; se toman dos precios cualesquiera, uno mayor que el medio y otro menor; se resta cada uno con el medio, y las diferencias se escriben invertidas. Estas diferencias indican la relación en que debe hacerse la mezcla.*

EJEMPLOS:

1.º *Un pirotécnico tiene pólvora de dos clases, cuyos precios son 14 y 9 reales el kilogramo respectivamente, y quiere obtener una tercera clase cuyo precio sea 12 reales el kilo. ¿En qué proporción deberá mezclar ambas clases?*

14 rs.	....	3
	12 rs.	
9 »	....	2

Deberá tomar 3 kilog. de la primera clase por cada 2 de la segunda.

Comprobación

3 kilog. × 14 reales........ = 42 reales.
2 » × 9 » .... = 18 »
5 kilog. de mezcla,
a × 12 reales, precio medio
valen 60 reales, valor de la mezcla.

60 reales, valor de las especies antes de mezclarse.

2.º *Un tabernero tiene vino de a 28 ptas. el Hl., de a 26, de a 20 y de a 15 pesetas ídem, y quiere proporcionarse una quinta clase cuyo precio sea 22 pesetas el hectolitro. Determínese la relación de la mezcla.*

28 ptas.	....	7	
26 »	....		2
	22 ptas.		
20 »	....		4
15 »	....	6	

Por cada 7 Hl. de la 1.ª clase, tomará 6 de la 4.ª, y por cada 2 Hl. de la 2.ª, tomará 4 de la 3.ª

Comprobación

7 Hl. × 28 ptas.	....	= 196 ptas.
2 » × 26 »	....	= 52 »
4 » × 20 »	....	= 80 »
6 » × 15 »	....	= 90 »

19 Hl. de mezcla,
a × 22 ptas., precio medio,

38
38

valen 418 ptas., valor de la mezcla.

418 ptas., valor de las especies antes de mezclarse.

425. Resolución del segundo caso.—Puede suceder: 1.º *Que se conozca la cantidad de una especie.* 2.º *Que se conozca la cantidad de cada una de dos o más especies.*

Primero: Cuando se conocen el precio medio, los precios de las especies y *la cantidad de una especie*, se determina la cantidad que debe tomarse de cada una de las otras especies *averiguando, primero, la relación de la mezcla*, y formando para cada especie cuya cantidad es desconocida, la siguiente proporción:

Cantidad conocida o determinada : la cantidad que se busca :: la diferencia que tiene a su derecha la cantidad conocida : la diferencia que tiene a su derecha la cantidad que se busca.

EJEMPLO:

Con trigo de a 24 ptas. el Hl., de a 22, de a 21 y de a 18 ptas. idem, queremos mezclar 45 Hl. de trigo de a 15 ptas. ¿Qué cantidad deberemos tomar de cada una de las otras especies, para que podamos vender la mezcla a 19 ptas. el Hl.?

Llamemos x, y, z y u, respectivamente, a la cantidad que deberemos tomar de cada una de las especies cuya cantidad es desconocida, y averigüemos la relación en que deberá hacerse la mezcla.

x Hl. de a 24 ptas.		 4		
y » » 22 »		 1		
z » » 21 »	19 ptas	....		4
u » » 18 »		 3		
45 » » 15 »		.... 5		2

Para la 1.ª especie: 45 : x :: 7 : 4. Luego x = 25'714 Hl.
Para la 2.ª especie: 45 : y :: 7 : 1. Luego y = 6'428 »
Para la 3.ª especie: 45 : z :: 7 : 4. Luego z = 25'714 »
Para la 4.ª especie: 45 : u :: 7 : 3. Luego u = 19'287 »
Cantidad dada para la 5.ª especie.................. 45 »

De modo, pues, que deberán tomarse: 25'714 Hl. de la 1.ª clase y otros tantos de la 3.ª; 6'428 Hl. de la 2.ª, y 19'287 Hl. de la 4.ª clase, para mezclar con los 45 hectolitros de la 5.ª clase.

Comprobación

1.ª clase....	25'714 Hl. × 24 ptas.	....	= 617'136 ptas.
2.ª »	6'428 » × 22 »	....	= 141'416 »
3.ª »	25'714 » × 21 »	....	= 539'999 »
4.ª »	19'287 » × 18 »	....	= 347'166 »
5.ª »	45 » × 15 »	....	= 675 »

122'143 Hl. de mezcla,
a × 19 ptas., precio medio,

1099 287
1221 43

valen 2320'717 ptas., valor de la mezcla.

2320'717 ptas., valor de las especies antes de mezclarse.

RAZONAMIENTO: Observando la relación de la mezcla que hemos hallado, se ve que, considerando las especies 5.ª y 1.ª: *si a 7 de diferencia corresponden 45 Hl., a 4 de diferencia corresponden x Hl., esto es:*

$$7 : 45 :: 4 : x$$

Invirtiendo los términos,

$$45 : 7 :: x : 4$$

Y alternando los medios,

$$45 : x :: 7 : 4,$$

conforme a la regla.

Si ahora consideramos la misma especie 5.ª y la 2.ª, tenemos que: *si a 7 de diferencia corresponden 45 Hl., a 1 de diferencia corresponden y Hl., esto es:*

$$7 : 45 :: 1 : y$$

Invirtiendo los términos,

$$45 : 7 :: y : 1$$

Y alternando los medios,

$$45 : y :: 7 : 1$$

conforme a la regla.

Y así, sucesivamente.

Segundo. Cuando se conoce la cantidad de cada una de dos o más especies, *la cuestión se convierte al primer caso hallando el precio medio de las especies cuyas cantidades son conocidas, y sumando estas cantidades. Esta suma y su precio forman, pues, una sola especie de cantidad conocida.*

EJEMPLO: *¿Cuántos quintales m. de harina de a 25 ptas. uno deben mezclarse con 6 qq. m. de a 20 ptas. y 19 qq. de a 18 ptas., deseando vender la mezcla a 22 pesetas el quintal métrico?* .

Hallemos, primero, el precio medio de las dos especies que tienen cantidad conocida.

6 qq.	×	20 ptas.	=	120 ptas.
19 »	×	18 »	=	342 »
25 qq.				462 ptas.

462 : 25 = 18'48 ptas., precio medio.

Ambas especies se reducen, pues, a la siguiente: 25 *qq. m. harina de a* 18'48 *pesetas uno.*

El problema, queda, por consiguiente, reducido al primer caso:

x qq. de a 25 ptas.	} 22	....	3'52
25 » » 18'48 »		....	3

Luego, según el caso primero,

$$25 : x :: 3 : 3'52; \; x = 29'333 \text{ qq. m.}$$

Deberán mezclarse 29'333 quintales m. de a 25 ptas. uno.

Comprobación

29'333 qq.	× 25 ptas.	....	=	733'325 ptas.
6 »	× 20 »	....	=	120 »
19 »	× 18 »	....	=	342 »

54'333 qq. m. de mezcla,
a × 22 ptas., precio medio,

108 666
1086 66

valen 1195'326 ptas., valor de la mezcla.

1195'325 ptas., valor de las especies antes de mezclarse.

426. Resolución del tercer caso.—Cuando se conocen el precio medio, los precios de las especies y la suma de las unidades mezcladas, *se determina la cantidad que debe tomarse de cada especie, hallando primero la relación de la mezcla y dividiendo la suma de las unidades mezcladas en partes proporcionales a las diferencias obtenidas.*

Ejemplo: *Un tratante en harinas tiene de tres clases, cuyos precios son 40, 37 y 32 ptas. el quintal métrico, y necesita 100 quintales métricos de una cuarta clase, cuyo precio sea 35 ptas. el quintal m. Deseando proporcionarse la cantidad mencionada con las tres clases indicadas, ¿qué cantidad de cada especie deberá tomar?*

Llamemos x, z y u, respectivamente, a las cantidades que debemos tomar de cada una de las especies, y hallemos la relación de la mezcla.

x qq. m. de 40 ptas.		 3	
z » » » 37 »	35 ptas.	....	3
u » » » 32 »		.... 5	2

Suma de especies: $x + z + u = 100$ qq. m. Suma de diferencias: $3 + 3 + 7 = 13$ quintales métricos.

Dividamos 100 qq. m. en partes proporcionales a las diferencias, 3, 3 y 7 (**400**).

Para la 1.ª especie:

S. Si a 13 unidades corresponden 100 qq. m.,
P. a 3 » corresponderán x » »

$13 : 3 :: 100 : x = 23'0769$ qq. m. de la 1.ª especie.

Para la 2.ª especie:

S. Si a 13 unidades corresponden 100 qq. m.,
P. a 3 » corresponderán z » »

$13 : 3 :: 100 : z = 23'0769$ qq. m. de la 2.ª especie.

Para la 3.ª especie:

S. Si a 13 unidades corresponden 100 qq. m.,
P. a 7 » corresponderán u » »

$13 : 7 :: 100 : u = 53'8462$ qq. m. de la 3.ª especie.

Comprobación

1.ª clase	23'0769 qq. m. × 40 ptas.	= 923'076 ptas.
2.ª »	23'0769 » » × 37 »	= 853'845 »
3.ª »	53'8462 » » × 32 »	= 1723'079 »
Suma dada	100'0000 qq. m. de mezcla, a × 35 ptas., precio medio,	3500'000 ptas., valor de las especies antes de mezclarse.
valen	3500 ptas., valor de la mezcla.	

Razonamiento. La regla práctica que damos para este caso se funda en el razonamiento siguiente, que conviene a cada especie:

Si a 13 unidades de mezcla corresponden 3 de la primera clase, a 100 unidades de mezcla corresponderán x de dicha clase. Es decir:

$$13 : 3 :: 100 : x$$

427. Resolución del cuarto caso. — Cuando se conocen el precio medio, los precios de dos especies y la diferencia entre las cantidades que de dichas especies se tomarán, se determina la cantidad que deberá tomarse de cada una de las dos especies, hallando primero la relación de la mezcla, y planteando luego la proporción que se deduce del principio fundamental (**422**):

Cantidad de la primera especie es a cantidad de la segunda especie, como la diferencia entre el precio medio y el precio de la segunda especie es a la diferencia entre el precio medio y el de la primera especie.

De esta proporción se deducen estas dos: (**359.** — 2.ª y **362.** — 2.º)

Para la 1.ª especie:

Diferencia entre antecedente y consecuente de la primera razón (o sea la diferencia dada) : su antecedente :: diferencia entre el antecedente y consecuente de la segunda razón : su antecedente.

Para la 2.ª especie:

Diferencia entre antecedente y consecuente de la primera razón (o sea la *diferencia dada) : su consecuente :: diferencia entre antecedente y consecuente de la segunda razón : su consecuente.*

EJEMPLO:

Tenemos aceite de a 7 ptas. el Dl., y aceite de a 10 ptas. idem, y deseamos proporcionarnos una tercera clase cuyo precio sea 8 ptas. el Dl., conviniéndonos que entren en la mezcla 20 Dl. más de la 1.ª clase que de la 2.ª ¿Cuántos Dl. de cada clase se tomarán?

Llamemos x al número de Dl. que tomaremos de la 1.ª clase, y z, al número que tomaremos de la segunda, y hallemos la relación de la mezcla.

x Dl. de a 7 ptas.		 2
	8 pesetas.	
z » » a 10 »		 1

Proporción general: $x : z :: 2 : 1$.

Para la 1.ª especie: $x - z : x :: 2 - 1 : 2$; o lo que es igual: $20 : x :: 1 : 2$.

$$x = \frac{40}{1} = 40 \text{ Dl. de la 1.ª especie.}$$

Para la 2.ª especie: $x - z : z :: 2 - 1 : 1$, o lo que es igual: $20 : z :: 1 : 1$.

$$z = \frac{20 \times 1}{1} = 20 \text{ Dl. de la 2.ª especie.}$$

Comprobación

1.ª clase..........	40 Dl.	× 7 ptas.......	= 280 ptas.
2.ª »	20 »	× 10 »	= 200 »
			480 ptas., valor de las especies antes de mezclarse.
Diferencia dada,	20 Dl.		
Total de la mezcla:	40 + 20 = 60 Dl.		
	a × 8 ptas.		
Valor de la mezcla...........	480 ptas.		

Comisiones

428. Definición. — Llamamos *comisión* a la cantidad que percibe un sujeto llamado *comisionista*, por su trabajo y responsabilidad en la compra o venta de géneros por cuenta de otra persona, llamada *comitente*.

Hay tres clases de comisionistas: *corresponsales, consignatarios* y *comisionistas de transporte*. Los corresponsales se ocupan de la compra y venta por cuenta ajena; los consignatarios reciben y administran los buques de sus comitentes, y se hacen cargo de remitir mercaderías ajenas a puntos determinados; los comisionistas de transporte se dedican a contratar con otras personas el transporte terrestre o fluvial de los géneros que reciben de sus comitentes.

429. Tanto por ciento de comisión. — El tanto por ciento que percibe el comisionista por la compra o venta de géneros es, generalmente, un 2 por 100 sobre el valor de la operación.

El tipo de comisión varía según la clase de géneros, costumbre de las plazas, responsabilidad del comisionista, etc., etc.

430. Resolución de los problemas sobre comisiones.— *Se resuelven por medio de una regla de tres simple.*

EJEMPLO: *Mi corresponsal en Valencia me avisa haber realizado los géneros de mi última remesa, consistentes en 14200 Kg. de cierta droga, a 3'5 pesetas el Kg. ¿Qué cantidad le corresponde, siendo 2 % su comisión?*

Valor de los géneros: 14200 Kg. × 3'5 ptas. = 49700 ptas.

Averigüemos la comisión:

S. Si a 100 ptas. corresponden 2 ptas. de comisión,
P. a 49700 » corresponderán x » » »

$100 : 49700 :: 2 : x = 994$ ptas., valor de la comisión.

Corretajes

431. Definición. — Llamamos *corretaje* a la cantidad que percibe un *corredor* por su intervención en la compra o venta de géneros, letras, valores públicos, etc.

El *corredor* es un agente intermediario entre el que compra y el que vende. Hay corredores de *mercaderías, de cambio, de bolsa* y *de seguros.* El corredor de mercaderías aviene al comprador y al vendedor de un género; el corredor de cambio interviene en la compra y venta de letras; el de bolsa, en la negociación de efectos públicos y acciones y obligaciones de sociedades constituídas legalmente, y el de seguros es un intermediario entre la compañía aseguradora y el particular que contrata el seguro.

Corredores intérpretes de navíos son los que residen en puertos de mar habilitados para el comercio extranjero, los cuales traducen los documentos de los buques extranjeros e intervienen en los contratos de fletamento. Para que los actos de un corredor tengan valor en juicio, el corredor ha de ser de nombramiento real. En cada plaza hay un número determinado, según la importancia comercial de la misma.

432. Tanto por ciento de corretaje. — La cantidad que percibe el corredor de mercaderías por su intervención en un negocio es, generalmente, el $^1/_2$ % sobre el valor de factura, tanto del comprador como del vendedor.

Este tanto por ciento suele variar, por las mismas causas que hemos mencionado al hablar del tipo incierto de la comisión.

433. Resolución de los problemas sobre corretaje. — *Se resuelven por medio de una regla de tres simple.*

EJEMPLO: *¿Cuánto deberá entregar un comerciante en aceites al corredor Ruiz, por la venta de una partida que ha importado* 4500 *ptas., siendo el corretaje a* $^1/_2$ %?

S. Si a 100 ptas. corresponden 0'50 ptas. de corretaje,
P. a 4500 » corresponderán x » »

100 : 4500 : : 0'50 : x = 22'50 ptas., valor del corretaje.

Taras

434. Definición. — Se entiende por *tara*, comercialmente hablando, el peso de las cajas, sacos, barriles, cuerdas, embalajes y demás en que se conducen las mercaderías.

También se llama *tara* la rebaja que suele hacerse al comprador de determinados géneros sobre su peso, medida o valor, por el deterioro que pueden sufrir en el transporte.

435. Peso sucio. — Peso *sucio* es el peso de la mercadería y el del embalaje o envase de la misma.

436. Peso limpio. — Peso *limpio* o *neto* es el peso de la mercadería excluyendo el de su embalaje o tara.

437. Maneras de fijar la tara. — La tara se fija, generalmente, a un tanto por ciento y también a un tanto por unidad de peso, de capacidad, bulto, etc.

El tanto de tara no es fijo; depende de la clase de géneros y, más que todo, de las condiciones del contrato.

438. Resolución de los problemas sobre taras. — Se resuelven así:

Si la tara se fija a un tanto por 100, por medio de una regla de tres o una conjunta.

Si la tara se fija a un tanto por unidad, multiplicando y restando.

EJEMPLO: 1.º Hallar el peso limpio.

¿Cuál será el peso limpio correspondiente a 20 cajas de azúcar refinado, de peso cada una 150 Kg., estipulándose la tara en 12 %?

Peso sucio total, 150 Kg. $\times$ 20 = 3000 Kg.

S. Si en 100 Kg. peso sucio hay 88 Kg. peso limpio,
P. » 3000 » » » habrá x » » »

100 : 3000 : : 88 : x = 2640 Kg., peso limpio.

Resolución por conjunta

B.	R.	P.
x Kg. peso limpio		3000 Kg. peso sucio

x Kg. peso limpio = 3000 Kg. peso sucio
100 » » sucio = 88 » » limpio

$$x = \frac{3000 \times 88}{100} = \frac{264000}{100} = 2640 \text{ Kg. peso limpio.}$$

2.º Hallar el peso sucio.

Fijando la tara en 12 %, el peso limpio correspondiente a 20 cajas de azúcar refinado fué de 2640 Kg. ¿Cuál era el peso sucio?

S. Si 88 Kg. peso limpio proceden de 100 Kg. peso sucio,
P. 2640 » » » procederán » x » » »

88 : 2640 : : 100 : x = 3000 Kg., peso sucio.

Resolución por conjunta

B.	R.	P.
x Kg. peso sucio		2640 Kg. peso limpio

x Kg. peso sucio = 2640 Kg. peso limpio
88 » » limpio = 100 » » sucio

$$x = \frac{2640 \times 100}{88} = \frac{264000}{88} = 3000 \text{ Kg., peso sucio.}$$

3.º Hallar el tanto por 100 de tara.

Veinte cajas de azúcar refinado cuyo peso sucio era 3000 Kg., dieron 2640 Kg. peso limpio. ¿A qué tanto p. % se fijó la tara?

Peso sucio	3000 Kg.
» limpio	2640 »
Tara total...........	360 Kg.

S. Si de 3000 Kg. se rebajaron 360 Kg. por tara,
P. » 100 » » » x » » »

3000 : 100 : : 360 : x = 12 % de tara.

Resolución por conjunta

B.	R.	P.
x Kg. tara p. %		100 Kg. peso sucio

x Kg. tara p. % = 100 Kg. peso sucio
3000 » p. s. = 360 » tara total

$$x = \frac{100 \times 360}{3000} = \frac{36000}{3000} = \frac{36}{3} = 12 \text{ p. \% de tara.}$$

4.º *¿Cuánto valen 80 bultos de corcho de Extremadura, de peso cada uno 2'5 quintales m., a 25 ptas. el quintal m., rebajando 2 Kg. por bulto por razón del embalaje?*

80 bultos × 2'5 qq. m........ = 200 qq. m. peso sucio
80 » × 2 Kg. = 160 Kg. = — 1'60 » » tara total

Peso limpio...... 198'40 qq. m.
a × 25 ptas.

992 0
3968

Valor del corcho... 4960'00 ptas.

Ganancias o pérdidas

439. Definición. — La regla de *ganancias o pérdidas* tiene por objeto calcular la ganancia o pérdida por ciento que se obtiene en un negocio.

440. Resolución de los problemas sobre ganancias o pérdidas. — Se resuelven por medio de una regla de tres.

EJEMPLOS:

1.º *Comprando el arroz a 25 ptas. el quintal castellano, ¿a qué precio ha de venderse para realizar el 12 % de beneficio?*

S. Si 100 ptas. se convierten en 112 ptas. por la ganancia,
P. 25 » » convertirán » x » » »

$100 : 25 :: 112 : x = 28$ ptas.

2.º *Comprando el arroz a 25 ptas. el quintal castellano, y vendiéndolo a 28 ptas., ¿qué ganancia por ciento se realiza?*

S. Si empleando 25 ptas. gano 3 ptas.
P. » 100 » ganaré x »

$25 : 100 :: 3 : x = 12$ p. %

3.º *Vendí 1 quintal de arroz en 28 ptas., realizando una ganancia de 12 por ciento: ¿por cuánto lo había comprado?*

S. Si 112 ptas. proceden de 100 ptas.,
P. 28 » procederán » x »

$112 : 28 :: 100 : x = 25$ ptas.

4.º *Vendiendo 1 quintal de arroz gané 3 pesetas. ¿Cuánto me costaba si la ganancia fué de 12 %?*

S. Si para ganar 12 ptas. empleo 100 ptas.,
P. » » 3 » emplearé x »

$12 : 3 :: 100 : x = 25$ ptas.

5.º *La compra de una finca costóme 3600 ptas., y su alquiler reditúa 6 pesetas cada mes. ¿Qué ganancia por ciento produce el capital invertido?*

Renta mensual...................... 6 ptas.
» anual .... $6 \times 12 = 72$ ptas.
S. Si 3600 ptas. producen 72 ptas.,
P. 100 » producirán x »

$3600 : 100 :: 72 : x = 2$ p. %

6.º *Cierto comerciante ganó en un negocio 3500 ptas. Si la ganancia fué de 15 % ¿qué capital había empleado?*

S. Si para ganar 15 ptas. he de emplear 100 ptas.,
P. » » 3500 » » » x »

$15 : 3500 :: 100 : x = 23333'33$ ptas.

Transportes

441. Definición. — La regla de *transporte* enseña a calcular lo que debe pagarse por la conducción de géneros de un lugar a otro.

442. Transporte terrestre y marítimo. — El transporte se llama *terrestre* cuando se verifica por tierra, y *marítimo*, cuando se verifica por mar.

443. Cargador, porteador y consignatario. — *Cargador*, es la persona que entrega los géneros que han de ser transportados.

En el transporte terrestre, se llama *porteador* al agente intermediario entre el cargador y el transportador o compañía transportadora, quien se encarga del transporte de las mercancías.

Consignatario es la persona a quien van dirigidos los géneros.

En el comercio marítimo, también se llaman *consignatarios* los representantes de los dueños de los buques, encargados además de recibir los géneros que han de transportarse.

444. Carta de porte. — En el comercio terrestre, se llama *carta de porte* el documento que expresa las condiciones del contrato de transporte.

La carta de porte corresponde al portador, si bien el cargador tiene derecho a un duplicado. Éste y el original sirven para hacer, en caso necesario, las debidas reclamaciones a la compañía transportadora. La carta de porte ha de contener: 1.º, nombres y domicilio del cargador, porteador y consignatario; 2.º, marcas, peso y naturaleza de las mercancías; 3.º, precio del transporte y circunstancias acerca de la entrega de los géneros, y 4.º, la fecha de expedición.

En el comercio marítimo, se llama *naviero* o *armador* a la persona bajo cuyo nombre y responsabilidad corre la expedición de un buque. *Capitán* o *patrón* es el jefe del buque.

445. Flete. — En el comercio marítimo, se llama *flete* el coste del transporte de los géneros.

446. Póliza de fletamento. — Es el documento en que se consignan las condiciones estipuladas entre el capitán de un buque y el fletador del mismo.

447. Conocimiento. — El documento en que se hace la relación detallada de las mercaderías que se entregan a bordo de la nave que ha de transportarlas, se llama *conocimiento*.

448. Derecho de capa. — Es cierta cantidad que el cargador satisface al capitán del buque, la que se estipula a un tanto por ciento sobre el importe del flete.

449. Cómo se estipula el transporte. — El transporte se estipula a un tanto por cada cierto número de unidades o a un tanto por tonelada, bulto, barril, pipa, etc.

450. Resolución de los problemas sobre transporte. — *Cuando el transporte se estipula a un tanto por cada cierto número de unidades, el problema se resuelve mediante una regla de tres, y cuando se fija a un tanto por tonelada, bulto, barril, pipa, etc., por medio de una multiplicación.*

EJEMPLO: *He entregado al vapor «Vinuesa», para ser transportados desde ésta de Barcelona a Marsella, 480 quintales métricos de bacalao, a razón de 22 pesetas los 10 quintales, satisfaciendo, además, 8 por ciento de capa. ¿Cuánto debo abonar?*

S. Si el transporte de 10 qq. m. importa 22 ptas.,
P. » » » 480 » » importará x »

$$10 : 480 :: 22 : x = 1056 \text{ ptas.}$$

Flete	1056	ptas.
Capa 8 % s/. Ptas. 1056.................	84'48	»
Total ptas.	1140'48	

Seguros

451. Definición. — Se entiende por *seguro* un contrato que se verifica entre dos partes, una de las cuales, mediante cierta cantidad, se obliga a responder a la otra del perjuicio que pueden causarle determinados accidentes a que se expone.

452. Asegurador y asegurado. — *Asegurador*, es el que se obliga a responder de un quebranto posible. *Asegurado*, el que contrata con el asegurador.

453. Prima de seguro. — Es la cantidad que exige el asegurador por la responsabilidad que contrae.

454. Póliza. — El documento en que consta el contrato de seguro se llama *póliza*.

La póliza ha de ser firmada por el asegurador, por el asegurado y por el corredor o agente que, casi siempre, interviene en estos contratos. En cada póliza constan, también, las diferentes condiciones especiales del contrato de seguro.

El *Código de Comercio* establece las condiciones generales de las diferentes clases de seguros.

455. Clasificación de los seguros. — Se dividen en *mutuos* y *a prima fija*.

Por el seguro *mutuo*, el asegurado es individuo de la Sociedad aseguradora, siendo sus aseguradores todos los demás individuos que la constituyen. Los siniestros que ocurren y los gastos de administración de la Sociedad, son satisfechos por todos sus individuos en partes proporcionales al capital que cada uno ha asegurado.

Seguros a *prima fija* son aquéllos en que el asegurado paga al asegurador una cantidad determinada para la garantía del capital.

456. Clasificación de los seguros según el objeto que los motiva. — Se dividen en *terrestres*, *marítimos*, *sobre la vida*, *contra incendios*, *etc.*

457. Otros gastos que debe satisfacer el asegurado, además de la prima. —Además de la prima, el asegurado debe satisfacer los gastos de póliza y timbre. Los gastos de póliza los fija el asegurador y los de timbre, el Gobierno.

Los derechos de póliza no son fijos: varían según las compañías. Véanse los establecidos por la importante Sociedad *Lloyd catalán de seguros marítimos*, y que tomamos para la resolución de nuestros problemas:

Hasta	2,500	pesetas	....		1	pesetas.
De	2,500'25	»	hasta	5,000 pesetas	1'50	»
»	5,000'25	»	»	10,000 »	2	»
»	10,000'25	»	»	50,000 »	3	»
»	50,000'25	»	»	100,000 »	5	»
»	100,000'25	»	en adelante.............		7'50	»

458. Cómo se regula el importe del timbre. — Para regular el importe del timbre, la *ley de* 1.º *de enero de* 1906 dice lo siguiente:

«Art. 177. Las Sociedades, Compañías de seguros y cualesquiera otros aseguradores satisfarán como impuesto anual de timbre correspondiente a los contratos de esta clase que celebren, lo siguiente:

Tres céntimos por cada mil pesetas del capital asegurado contra incendios, en los casos que el seguro sea a prima.

Dos céntimos por cada mil pesetas del mismo capital asegurado contra incendios, cuando el seguro sea mutuo.

Dos pesetas por cada mil pesetas de la cantidad recaudada por seguros de vida; y

Veinte céntimos por cada mil pesetas del capital asegurado contra riesgos marítimos.

Cuanto a los seguros marítimos por sólo un viaje, satisfarán de una sola vez diez céntimos por cada mil pesetas del capital asegurado.

En los casos en que el importe del impuesto o la fracción del mismo no llegue a 5 céntimos, se considerará como de esta cantidad.»

Como nuestros problemas están calculados tomando la tarifa que señalaba la ley de 31 de diciembre de 1881, la ponemos a continuación. Téngase en cuenta que, en los seguros terrestres y marítimos, el tipo regulador del timbre es el importe de la prima que se satisfaga.

Hasta	100 ptas.	....		timbre de	0'75 ptas.
De más de	100 »	hasta	200	» »	1 »
» » »	200 »	»	500	» »	2 »
» » »	500 »	»	1,000	» »	3 »
» » »	1,000 »	»	1,500	» »	4 »
» » »	1,500 »	»	2,000	» »	5 »
» » »	2,000 »	»	2,500	» »	10 »
» » »	2,500 »	»	5,000	» »	15 »
» » »	5,000 »	»	7,500	» »	25 »
» » »	7,500 »	»	10,000	» »	50 »
» » »	10,000 »	»	20,000	» »	75 »
» » »	20,000 »	»	50,000	» »	100 »

459. Objeto de la regla de seguros. — Tiene por objeto determinar la cantidad que debe satisfacerse por el seguro de un capital.

460. Su resolución. — *Las cuestiones sobre seguros mutuos se resuelven por la regla de repartimientos proporcionales. Las que versan sobre seguros a prima fija, por medio de la regla de tres.*

He ahí un ejemplo de cada uno de los casos que pueden ofrecerse, tratándose del seguro a prima fija:

1.° *He remitido, mediante seguro, a mi corresponsal en Cádiz,* 40000 *pesetas, abonando* 1'50 °/₀₀ *de prima. ¿Qué gasto me origina la seguridad de la remesa?*

Capital asegurado	40000 ptas.
Prima 1'50 °/₀₀ s/ 40000 ptas.	60 ptas.
Póliza	3 »
Timbre	0'75 » (*)
Total importe del seguro	63'75 ptas.

2.° *El asegurar la remisión de cierta cantidad de dinero me costó* 63'75 *pesetas, habiendo pagado* 1'50 °/₀₀ *de prima y* 3'75 *ptas. por timbre y póliza. ¿Cuál era la cantidad asegurada?*

Si de 63'75 ptas., coste total, deduzco los gastos de timbre y póliza, tendré tanto °/₀₀ de prima. Luego 63'75 — 3'75 = 60 ptas. de prima. Digo ahora:

S. Si pagué 1'50 ptas. por el seguro de 1000 ptas.,
P. pagaré 60 » » » » x »

$$1'50 : 60 :: 1000 : x = 40000 \text{ ptas.}$$

3.° *¿A qué tanto p. °/₀₀ de prima se estipuló el seguro de* 40000 *ptas., habiendo satisfecho por este concepto* 63'75 *ptas., e importando* 3'75 *ptas. los gastos de timbre y póliza?*

(*) El timbre, en este problema, está fijado con arreglo a la tarifa de la ley que regía anteriormente, esto es, la de 31 *de diciembre de* 1881.

Como en el caso anterior, 63'75 ptas. — 3'75 ptas. = 60 ptas., coste de la prima. Digo ahora:

S.	Si para asegurar	40000	ptas.	pagué 60	ptas.	de prima,
P.	para »	1000	»	pagaré x	»	»

40000 : 1000 : : 60 : x = 1'50 ptas. p. ‰

Trueques

461. Definición. — *Trueque* o *permuta* es un contrato mediante el cual se cambia una cosa por otra, sin que en ello intervenga la moneda.

462. Objeto de la regla de trueques o permutas. — Tiene por objeto averiguar cuántas unidades de determinada especie y precio conocido, equivaldrán a un número dado de unidades de diferente especie y cuyo precio se conoce.

463. Su resolución. — *Generalmente, se resuelve por medio de una sencilla división, y también, por medio de la regla conjunta.*

EJEMPLOS:

1.º *¿Cuántos metros de paño de a 20 ptas. uno, recibiré, entregando 40 Hl. vino del Ampurdán de a 30 ptas. el Hl.?*

Recibiré tantos metros como veces el valor de uno esté contenido en el valor del vino.

$$40 \text{ Hl.} \times 30 \text{ ptas.} = 1200 \text{ pesetas.}$$

Luego, llamando x al número de metros: $x = \frac{1200}{20} = \frac{120}{2} = 60$ metros.

Por conjunta:

B.	R.	P.
x metros		40 Hl.

x metros = 40 Hl.
1 Hl. = 30 ptas.
20 ptas. = 1 metro

$$x = \frac{40 \times 30}{20} = \frac{1200}{20} = \frac{120}{2} = 60 \text{ metros.}$$

2.º *¿Cuántos Kg. de azúcar, de a 1'25 ptas. uno, recibiré, a cambio de 80 quintales m. café de Puerto Rico, siendo 203'50 ptas. el valor de cada quintal?*

Recibiré tantos Kg. de azúcar como veces el valor de uno esté contenido en el valor del café que se quiere permutar.

$$80 \text{ qq. m.} \times 203'50 \text{ ptas.} = 16280 \text{ ptas.}$$

Luego, llamando x al número de kg.,

$$x = \frac{16280}{1'25} = 13024 \text{ kg. de café.}$$

Por conjunta:

B.	R.	P.
x Kg.		80 qq. m.

x Kg. = 80 qq. m.
1 qq. m. = 203'50 ptas.
1'25 ptas. = 1 Kg.

$$x = \frac{80 \times 203'50}{1'25} = 13024 \text{ kg. de café.}$$

Reducciones

464. Definición. — La regla de *reducciones* tiene por objeto principal, calcular cuántas unidades de una especie determinada y propias de un país, equivalen a un número dado de unidades de la misma especie y correspondientes a otro país, conociendo la relación inmediata que entre ellas existe.

465. Su resolución. — *Los problemas sobre reducciones se resuelven, generalmente, por medio de la regla conjunta.*

EJEMPLOS:

1.º *Sabiendo que 14 onzas castellanas equivalen, aproximadamente, a 12 onzas catalanas, ¿cuántos quintales catalanes equivalen a 62 qq. castellanos?*

B.	R.	P.
x qq. cat.		62 qq. cast.

$$\begin{aligned} x \text{ qq. cat.} &= 62 \text{ qq. cast.} \\ 1 \text{ qq. cast.} &= 100 \text{ lib. cast.} \\ 1 \text{ lib. cast.} &= 16 \text{ on. cast.} \\ 14 \text{ on. cast.} &= 12 \text{ on. cat.} \\ 1248 \text{ on. cat.} &= 1 \text{ qq. cat.} \end{aligned}$$

$$x = \frac{62 \times 100 \times 16 \times 12}{1248 \times 14} = 68\text{'}131 \text{ qq. catalanes.}$$

2.º *¿Cuántos marcos imperiales de Alemania equivalen a 4500 florines de Austria, sabiendo que 1 marco equivale a 1'23 ptas. y que 1 florín, a 2'53 pesetas?*

B.	R.	P.
x marcos		4500 florines

$$\begin{aligned} x \text{ marcos} &= 4500 \text{ florines.} \\ 1 \text{ florín} &= 2\text{'}53 \text{ ptas.} \\ 1\text{'}23 \text{ ptas.} &= 1 \text{ marco.} \end{aligned}$$

$$x = \frac{4500 \times 2\text{'}53}{1\text{'}23} = 9256\text{'}097 \text{ marcos.}$$

Facturas

466. Definición. — Se da el nombre de *factura* a la cuenta que el vendedor entrega al comprador, detallando los géneros vendidos e indicando su naturaleza, calidad, cantidad, precio, importe, gastos y época en que deben ser pagados.

467. División. — Las facturas se dividen en dos clases: *de cuenta propia* y *de cuenta ajena.*

Se llaman facturas de cuenta propia, las que libra el comerciante cuando el negocio es de su cuenta y riesgo.

Son de cuenta ajena, las que el comisionista remite a su comitente por la compra de géneros de su orden y cuenta. También deben considerarse como tales las *cuentas de venta y líquido producto*, esto es, los estados demostrativos de la realización de géneros por cuenta de otro, mediante un tanto por ciento de comisión.

Véanse los modelos siguientes:

MODELO NÚM. 1

D. Federico Ramírez, por compra de los géneros que a continuación se expresan, a Pedro Cruz .... **Debe:**

Gerona, 14 febrero de 1919

				Ptas.	Cts.
Por	20	metros fleco seda, negro,	a 6 ptas. metro.	120	
»	10	» » lana, gris.	a 4'50 » »	45	
»	12	» pasamanería, algodón,	a 2'50 » »	30	
»	8 $^1/_2$	docenas botones pasta,	a 3'25 » docena.	27	63
			Total S. E. Ptas.....	222	63

RECIBÍ,

Pedro Cruz.

468. Cuando la factura es motivada por una venta a plazo, no se escriben el *recibí* y la *firma*. Basta el sello de la casa de comercio.

MODELO NÚM. 2

Núm. 1250 *Gerona, 26 abril de 1919*

D. José Casado y Santos

a Barangé e Hijos.. **Debe:**

		Ptas.	Cts.	Ptas.	Cts.
3	cajas jabón, primera calidad.				
	PESO				
	1.ª .... 40 — kilog.				
	2.ª .... 46'25 »				
	3.ª .... 30'56 »				
	116'81 kilog. = 202'025 libras.				
	Tara 5 % .... 14'60 »				
	Peso neto............... 277'425 libras, a 0'50 ptas. libra	138	71		
	Acarreo...........	4	25		
	Total Ptas......			142	96

RECIBIMOS,

Barangé e Hijos.

MODELO NÚM. 3. — REMESA POR MAR

Núñez, Roca y Compañía

***Factura** de 800 balas de cáñamo que hemos vendido a **D. Rómulo Linares**, de Valencia, y embarcado de su cuenta y riesgo y a su consignación en el vapor **Potente**, capitán **E. Peláez**, con destino a dicho puerto.*

			Ptas.	Cts.
R. L.	800 balas cáñamo, peso 80,000 kg. a 29'50 ptas. el quintal métrico		23,600	
	GASTOS			
	Seguro $^1/_2$ p. % s/ 23,600 ptas., póliza y sello	Ptas. 122		
	Corretaje a Rubio, 1 p. ‰	» 23'60	221	10
	Conducción al muelle y embarque	» 60		
	Despacho	» 15'50		
	Al débito de dicho señor, total		23,821	10

Barcelona, 15 de septiembre de 1919.

469. Los modelos anteriores son facturas de *cuenta propia*. El modelo siguiente es de *cuenta ajena*.

MODELO NÚM. 4. — CUENTA DE VENTA

***Cuenta de venta** y líquido producto de los géneros detallados a continuación, que me consignó **D. Felipe A. González**, de Mallorca, para vender de su cuenta, y que recibí por conducto del vapor **Ferrolano**, capitán **Ernesto Pavía**.*

1917			Ptas.	Cts.	Ptas.	Cts.
Marzo	15	60 Hl. ron de 29° a 62'50 ptas. Hl.	3750	»		
»	28	25 » » de 25° a 50 » »	1250	»		
Abril	2	10 » vino tinto a 25 » »	250	»		
»	14	40 » » » a 30 » »	1200	»	6450	
		GASTOS				
		Comisión 3 % s/ ptas. 6,450	193	50		
		Derechos de almacén	50	»		
		Descarga y acarreo	42	75		
		Despacho	12	»		
		Fletes satisfechos al capitán Pavía	160	»	458	25
		Al crédito de dicho señor, S. E. u O.			5991	25

Barcelona, 20 de mayo de 1919.

Julián Pacheco.

Prorrateo de facturas

470. Definición. — Llamamos *prorrateo de facturas* a la operación en virtud de la cual determinamos el valor de una mercadería por razón de su coste y gastos.

471. Casos que pueden ofrecerse. — Pueden presentarse dos casos:

1.º *Que las unidades compradas sean todas de igual precio.*

2.º *Que las unidades compradas no tengan todas igual precio.*

472. Su resolución. — Para resolver el primer caso, se divide el total de gastos por el número de unidades compradas, y se añade el cociente al valor de la unidad.

473. Para resolver el segundo caso, se halla el valor de las diferentes unidades compradas a razón de sus precios respectivos, y luego se forma para cada clase de unidades compradas la siguiente proporción:

Supuesto: Si al valor total de la compra corresponde TANTO *de gastos,*

Pregunto: Al valor de una unidad comprada corresponderá x.

EJEMPLOS: 1.º *Nuestro corresponsal en Alicante nos remite* 20 *cajas de azúcar, de peso cada una* 12'50 *Kg. a razón de* 0'75 *ptas. Kg. ¿A cuánto resulta el Kg., abonando* 3 % *de comisión,* 2 % *de corretaje y el importe de los fletes, que ascienden a* 40'50 *ptas.?*

Resolución:

20 cajas × 12'50 Kg. = 250 Kg. × 0'75 ptas. = 187'50 ptas., valor del azúcar.

Comisión 3 % s/ 187'50 ptas.	Ptas.	5'63
Corretaje 2 % s/ 187'50 »	»	3'75
Fletes	»	40'50
Total de gastos	Ptas.	49'88

Diremos ahora: Si a 250 Kg. corresponden 49'88 ptas. de gastos, a 1 Kg. corresponderán $\frac{49'88}{250} = 0'20$ ptas.

Valor de 1 Kg. por compra	Ptas.	0'75
» » 1 » » gastos	»	0'20
» » 1 » » compra y gastos......	Ptas.	0'95

2.º *He comprado* 20 *Hl. de trigo a* 14 *ptas. el Hl.;* 50 *ídem a* 16 *pesetas ídem, y* 40 *Hl. ídem a* 20 *ptas. ídem, habiendo satisfecho* 42 *ptas. por diferentes gastos. ¿A qué precio resulta el Hl. de cada clase?*

Resolución:

20 Hl. trigo a 14 ptas. uno	Ptas.	280
50 » » a 16 » »	»	800
40 » » a 20 » »	»	800
Total por compra	Ptas.	1880

Diremos ahora:

1.ª clase	1880 : 42 :: 14 : x = 0'31	ptas.
2.ª »	1880 : 42 :: 16 : x = 0'36	»
3.ª »	1880 : 42 :: 20 : x = 0'45	»

Precio de la 1.ª clase por coste y gastos,	14'31	ptas.	Hl.
» » 2.ª » » » »	16'36	»	»
» » 3.ª » » » »	20'45	»	

Liquidación de facturas

474. Definición. — *Liquidar una factura* es determinar la compensación de intereses a que da lugar el anticipo o retardo del pago del importe de la misma.

475. Como las operaciones sobre mercaderías se contratan generalmente a plazo, sucede con frecuencia que el comprador entrega al vendedor el todo o alguna cantidad a cuenta, antes de la época del vencimiento, o bien deja transcurrir dicha época sin verificar el pago convenido. Entonces, al practicar ambas partes la liquidación, se procede a determinar la compensación de intereses, lo que da lugar a las operaciones de que nos vamos a ocupar.

476. A qué hay que atender para proceder a una de estas liquidaciones. — Hay que atender:

1.º A los capitales que se entregan. 2.º A los días anticipados o retardados. 3.º A la época del vencimiento.

477. Principales casos que pueden presentarse. — Pueden presentarse, generalmente, tres casos:

1.º *Satisfacer el importe total de una factura antes de su vencimiento, entregando documentos de crédito, alguno de los cuales vence antes y los otros, después del plazo de la factura.*

2.º *Cuando, antes de la fecha del vencimiento de la factura, el deudor entrega a cuenta una parte del importe total a fin de retardar el pago del resto; determinar el día en que dicho resto deberá hacerse efectivo.*

3.º *Cuando, transcurrido el vencimiento de la factura, el deudor entrega solamente una parte de su importe, y se trata de averiguar desde qué día queda debiendo el resto.*

478. Resolución del primer caso. — Para resolver el primer caso, se halla el vencimiento común de los documentos entregados, y por este vencimiento se ve si el pago queda hecho con fecha anterior o posterior al plazo de la factura. En el primer caso, el vendedor debe los intereses correspondientes a los días anticipados, y en el segundo, los acredita.

EJEMPLO: *En* 20 *de enero, compré géneros por valor de* 5600 *pesetas pagaderas al* 20 *de marzo; pero transcurridos algunos días, entregué al vendedor las tres letras siguientes: una de* 3800 *ptas. al* 3 *de febrero, otra de* 1000 *ptas. al* 10 *de marzo y otra de* 800 *ptas. al* 10 *de abril. Véase si el pago de la factura resulta anticipado o retardado.*

Averigüemos el vencimiento común de los tres documentos entregados, cuyo nominal total es el importe de la factura.

Epoca: 3 febrero	3 febrero	ptas.	3800	×	0	días	= 0000
	10 marzo	»	1000	×	35	»	= 35000
	10 abril	»	800	×	66	»	= 52800
			5600				87800 : 5600 = 15 días.

Y añadiendo estos 15 días a la época, resulta el 18 de febrero, cuya fecha es el vencimiento común de las 3 letras que entregué, y como la fecha en que debía pagar la factura es el 20 de marzo, anticipé el pago los días que median entre estas dos fechas, esto es, 30 días. Suponiendo ahora que el tipo de interés que recíprocamente habíamos convenido abonarnos por anticipo o retraso es el 6 %, resulta que debo percibir del vendedor el interés de 6 % s/ 5600 ptas. correspondiente a 30 días.

479. Resolución del segundo caso. — Para resolver el segundo caso, hay que tener en cuenta lo siguiente: Al entregar el deudor una cantidad a cuenta del valor de la factura antes del vencimiento de ésta, pierde el interés que le produciría esta cantidad durante los días comprendidos entre aquél en que hace la entrega y el del vencimiento de la factura; luego debe retardar la entrega del resto, el tiempo necesario para que la cantidad que queda a deber produzca el mismo interés que la cantidad anticipada. El problema, pues, se resolverá por la proporción siguiente:

Supuesto. Si la cantidad anticipada produce un interés durante los días que se anticipa,

Pregunto: El resto, para producir el mismo interés, ¿cuántos días tardará?

Los días que resultan se añaden a la fecha del vencimiento de la factura, y la suma da la época en que deberá hacerse efectivo el resto de la misma.

Ejemplo: *D. Paulino Ordóñez nos debe* 6000 *ptas., importe de una factura que deberá hacer efectiva en* 30 *de septiembre; pero en* 15 *de agosto nos entrega* 4500 *pesetas a cuenta para retrasar el pago del resto. ¿En qué época deberá hacerlo efectivo?*

El deudor Ordóñez adelanta 46 días la entrega de 4500 ptas.; luego para que no resulte perjuicio para ninguna de ambas partes, deberá retardar la entrega del resto 1500 ptas., el tiempo necesario para que esta cantidad le produzca el interés que le hubiera redituado la suma anticipada.

Tendremos, pues, la siguiente regla de tres:

S. Si 4500 ptas. producen cierto interés en 46 días,
P. 1500 » para producir el mismo interés estarán x días

$$1500 : 4500 :: 46 : x = 138 \text{ días}$$

que, agregados al 30 de septiembre, hacen remontar la época del pago del resto al 15 de febrero del año siguiente.

480. Resolución del tercer caso. — Para resolver el tercer caso, hemos de observar que el deudor, el día que hace su entrega a cuenta, no debe solamente el valor de la factura; sino, además, los intereses devengados por el valor de ésta durante los días transcurridos. Queda, pues, debiendo el resto con más los intereses mencionados, o lo que es lo mismo, el resto a contar desde una fecha tal que, desde ella al día en que hizo su entrega, el resto de la factura produzca igual interés que el total de la misma devengó desde el día de su vencimiento al en que se hizo la entrega a cuenta.

Hallaremos, pues, los días que el resto necesitará para producir el interés devengado por el total, y estos días se rebajarán de la fecha en que el deudor hizo la entrega a cuenta. La fecha que resulte, será el día desde el cual se debe el resto de la factura.

Ejemplo: *Hemos vendido géneros por valor de* 6000 *ptas. pagaderas el* 20 *de mayo. Transcurre esta fecha y no recibimos cantidad alguna; mas en* 25 *de junio cobramos* 4500 *ptas. a cuenta: ¿desde qué fecha se nos debe el resto de la factura, cobrando al comprador el interés de* 6 % *por el retardo de su entrega?*

En 25 de junio, el comprador debe 6000 ptas. más los intereses de 6 % producidos por esta cantidad durante los 36 días que van desde el 20 de mayo al 25 de junio.

Veamos estos intereses:

S. Si 100 ptas. en 365 días producen 6 ptas. de interés,
P. 6000 » 36 » producirán x » »

$$\left.\begin{matrix} 100 : 6000 \\ 365 : 36 \end{matrix}\right\} :: 6 : x$$

$$365 \times 100 : 36 \times 6000 :: 6 : x = 35'507 \text{ ptas.}$$

El comprador debe, pues,	6000 ptas. + 35'507 ptas.	
Y como entrega	4500 »	
Debe......	1500 ptas. + 35'507 ptas.	

o lo que es lo mismo, 1500 ptas. desde el día en que, hasta el 25 de junio, esta cantidad reditúe igual interés, a razón de 6 %.

Veamos cuántos días necesitarán 1500 ptas. para redituar 35'507 ptas.

S. Si 100 ptas. para producir 6 ptas. necesitan 365 días,
P. 1500 » » 35'507 » necesitarán x »

$$\left.\begin{array}{r} 1500 : 100 \\ 6 : 35'507 \end{array}\right\} :: 365 : x$$

$$1500 \times 6 : 100 \times 35'507 :: 365 : x = 144 \text{ días.}$$

Luego, si del 25 de junio quitamos 144 días, nos resulta el 1.º de febrero, época desde la cual el comprador debe el resto de la factura, 1500 pesetas.

Fondos públicos

481. Definición. — Llamamos *fondos o efectos públicos* a unos documentos representativos de los valores prestados al Estado por los particulares, cuando los recursos legales de que aquél dispone no han sido suficientes para atender a sus imprescindibles necesidades.

El Estado satisface sus atenciones con el producto de la recaudación de las contribuciones, impuestos y otros ingresos. Cuando los mencionados recursos no han sido suficientes para hacer frente a sus necesidades, le ha sido necesario acudir al préstamo, como haría un particular cualquiera, pagando un determinado interés: he aquí el origen de los fondos públicos.

Los gastos que ocasiona el sostenimiento de una guerra, la construcción de carreteras y ferrocarriles, las necesidades que crean las épocas calamitosas, etcétera, son, a menudo, las causas que obligan a los gobiernos a contratar estos empréstitos, los cuales se distinguen con el nombre general de *Deuda Pública*.

482. Clases de fondos públicos. — Los fondos públicos son hoy, de tres clases, a saber: *los títulos de la Deuda amortizable, los de la Deuda perpetua interior y los de la Deuda perpetua exterior*.

483. Deuda amortizable. — La *Deuda amortizable* fué creada por la ley de 9 de diciembre de 1881, por valor de 1,800 *millones de pesetas;* sus títulos llevan la fecha de 1.º de enero de 1882, y será amortizada en 40 años por sorteos trimestrales.

484. Interés de la Deuda amortizable. — Los valores nominales de los títulos de la Deuda amortizable producen un interés de 4 % anual. El Gobierno paga estos intereses por trimestres vencidos, en las épocas siguientes: 1.º de abril, 1.º de julio, 1.º de octubre y 1.º de enero.

485. Cómo se cobran estos intereses. — Transcurrido un trimestre, el tenedor de títulos de 4 p. % amortizable corta de cada uno un pequeño documento llamado *cupón*, que representa el importe de los intereses correspondientes, los cuales son pagados por el *Banco de España* en nombre y representación del Estado.

Los cupones son títulos al portador, es decir, el *Banco de España* paga a quien los presenta; razón por la cual el tenedor de títulos de la Deuda Pública residente en una plaza donde el *Banco* no tenga sucursal, puede negociarlos en cualquiera casa de banca de la localidad, mediante un módico tanto p. % de descuento, y a menudo los banqueros los toman ofreciendo un tanto de prima.

El pago de los intereses y amortización puede domiciliarse en todas las capitales de provincia, a voluntad del tenedor, y en las plazas de París, Londres, Amsterdam, Bruselas y Lisboa. En Madrid, el cobro se hace en la Dirección general de la Deuda; en provincias, como ya hemos dicho, en las sucursales del *Banco*, y en el extranjero, por medio de letras a 30 días fecha a cargo del citado *Banco de España*, expedidas por la comisión de Hacienda o por los delegados de ella.

486. Valor nominal de dichos títulos. — Los 1,800 millones de pesetas de la Deuda amortizable, al 4 p. % anual, están distribuídos en cinco clases de títulos con nominal distinto en cada uno, y correspondientes a otras tantas series, a saber:

Serie *A*, de	500	ptas.	cada	título,	con	cupones	trimestrales de	5 ptas.
» *B*, »	2500	»	»	»	»	»	» »	25 »
» *C*, »	5000	»	»	»	»	»	» »	50 »
» *D*, »	12500	»	»	»	»	»	» »	125 »
» *E*, »	25000	»	»	»	»	»	» »	250 »

487. Valor efectivo de los referidos títulos. — Es la cantidad en metálico que se paga o cobra por la compra o venta de sus unidades nominales.

Lo propio debemos decir en cuanto al valor efectivo de los títulos de las otras deudas.
Cuando se crearon, el tipo de emisión fué el 85 %, es decir, que la compra de 100 pesetas en papel, o nominales, sólo ocasionó al comprador un desembolso de 85 pesetas. Actualmente, su valor sube o baja, según las circunstancias.

487′. Nueva Deuda amortizable. — Por R. O. de 19 de mayo de 1900, y en virtud de la autorización que concede al Gobierno la ley de 2 de agosto de 1899, se emiten títulos de Deuda amortizable en 50 años, mediante sorteos trimestrales, con interés de 5 % al año, por un valor nominal de 1,200.000,000 de pesetas.
Los títulos al portador de esta nueva Deuda están distribuídos en las seis series siguientes:

Serie *A*, de 500 pesetas. — *B*, de 2,500. — *C*, de 5,000. — *D*, de 12,000. — *E*, de 25,000. — *F*. de 50,000.

Los títulos llevan la fecha de 15 de mayo de 1900, devengando desde este día sus intereses, que se abonarán por trimestres vencidos en 15 de febrero, 15 de mayo, 15 de agosto y 15 de noviembre de cada año.
Los sorteos de amortización se celebrarán en 15 de enero, 15 de abril, 15 de julio y 15 de octubre. El pago de intereses y amortización, a cargo del *Banco de España*, y con la garantía del producto de la renta de Tabacos.
El tipo de emisión ha sido el 83 por ciento del valor nominal de cada título.
Posteriormente y con arreglo a la autorización que se concedió al Gobierno por la referida ley de 2 de agosto de 1899, se ha ampliado la emisión de la Deuda amortizable al 5 % en la cantidad de 338.440,000 pesetas nominales. Los títulos llevan la misma fecha que los anteriores, 15 de mayo de 1900, tienen iguales vencimientos para el abono de intereses y para la amortización y la misma garantía especial de la renta de Tabacos.

488. Deuda perpetua interior. — La *Deuda perpetua interior* fué creada por la ley de 29 de mayo de 1882. El Estado se compromete a amortizarla con la quinta parte, al menos, de los sobrantes que pueden ofrecer los presupuestos sucesivos a partir del correspondiente a 1883 a 1884.

Si se tiene en cuenta lo difícil que es, en nuestra nación, saldar los presupuestos del Estado con sobrantes, bien podemos decir que el calificativo de *perpetua* cuadra perfectamente a la Deuda interior.

489. Interés de la Deuda perpetua interior. — Los valores nominales de los títulos de la Deuda perpetua interior producen, como la amortizable, el 4 % anual.

490. Cómo se cobran estos intereses. — Estos intereses se cobran, como los de la Deuda amortizable, cortando trimestralmente el cupón respectivo y presentándolo al *Banco de España*, o verificando su negociación en cualquiera casa de banca.

El *Banco* paga estos intereses en las mismas épocas que los de la Deuda amortizable: por trimestres vencidos, y en 1.º de enero, 1.º de abril, 1.º de julio y 1.º de octubre.

491. Valor nominal de estos títulos. — Los títulos de la Deuda perpetua interior, al 4 % anual, están distribuídos en 6 series, con nominal distinto en cada una, a saber:

Serie *A*,	de	500	ptas.	cada	título,	con	cupones	trimestrales	de	5 ptas.
» *B*,	»	2500	»	»	»	»	»	»	»	25 »
» *C*,	»	5000	»	»	»	»	»	»	»	50 »
» *D*,	»	12500	»	»	»	»	»	»	»	125 »
» *E*,	»	25000	»	»	»	»	»	»	»	250 »
» *F*,	»	50000	»	»	»	»	»	»	»	500 »

También se emitieron inscripciones transferibles, por cantidades de pesetas 75000, 125000, 250000, 500000 y 1.000000, con sus respectivos cupones, que deben ser satisfechos en iguales condiciones que los anteriores.

Ultimamente, se han creado 2 series más de la Deuda interior al 4 %; la serie *G*, de 100 pesetas nominales, y la serie *H*, de 200 pesetas ídem.

492. Deuda perpetua exterior. — La *Deuda perpetua exterior* fué creada por la misma ley que la *interior*, esto es, por la de 29 de mayo de 1882 y será, como ella, amortizada con la quinta parte del sobrante de los presupuestos liquidados.

493. Interés de la Deuda perpetua exterior. — Los valores nominales de los títulos de la Deuda perpetua exterior producen, como la amortizable y la interior, el 4 % anual.

494. Cómo se cobran estos intereses. — Como en las otras deudas, cortando, trimestralmente, el respectivo cupón. Su pago está, también, a cargo del *Banco de España*, y lo verifica en las plazas de Londres y París, presentando previamente los cupones en la Comisión de Hacienda de España en el extranjero. También pueden domiciliarse en las plazas de Barcelona, Lisboa y Amsterdam; pero el pago se hace en letras a 30 días fecha a cargo del *Banco de España*, o de sus sucursales en Londres o París, a voluntad de los interesados.

En estas últimas capitales, el pago se hace a la par, esto es, pesetas 25'20 por libra esterlina y peseta por franco, si se paga en oro.

495. Valor nominal de estos títulos. — Los títulos de la Deuda perpetua exterior, al 4 % anual, están divididos en 6 series, con nominal distinto en cada una, y expresado en tres clases de monedas distintas, a saber: (*)

Serie *A*, capital, pesetas 1000; Libras esterlinas, 39-13-7; francos, 1000; cupón trimestral, pesetas o francos, 10; Libras esterlinas, 0-7-11'23.

Serie *B*, capital, pesetas 2000; Libras est., 79-7-2; francos, 2000; cupón trimestral, ptas. o francos, 20; Libras esterlinas, 0-15-10'46.

(*) Una libra esterlina (£. E.) tiene 20 chelines, y el chelín, 12 peniques. En la práctica comercial, un número complejo de monedas inglesas se escribe así: £. E. 39-13-7, y se lee: 39 libras esterlinas, 13 chelines, 7 peniques. Si en el complejo faltan unidades de alguna especie, se suplen con 0, v. g.: £. E. 25-0-6; £. E. 0-15-10.

Serie *C*, capital, pesetas, 4000; Libras est., 158-14-4; francos, 4000; cupón trimestral, ptas. o francos, 40; Libras esterlinas, 1-11-8'92.

Serie *D*, capital, pesetas, 6000; Libras est., 238-1-6; francos, 6000; cupón trimestral, ptas. o francos, 60; Libras esterlinas, 2-7-7'38.

Serie *E*, capital, pesetas, 12000; Libras est., 476-3-0; francos, 12000; cupón trimestral, ptas. o francos, 120; Libras esterlinas, 4-15-2'76.

Serie *F*, capital, pesetas, 24000; Libras est., 952-6-0; francos, 24000; cupón trimestral, ptas. o francos, 240; Libras esterlinas, 9-10-5'52.

Al mismo tiempo que en la Deuda interior, se crearon en ésta títulos de 100 y 200 pesetas cada uno, correspondientes a las series *G* y *H*, respectivamente.

496. Con la pérdida de nuestras colonias, han desaparecido también nuestras Deudas coloniales.

497. Los títulos de las Deudas coloniales han sido canjeados por títulos de la Deuda amortizable al 5 %, de reciente creación.

498. Cambio del papel. — Es la cantidad en metálico equivalente a 100 unidades nominales, o en papel.

De modo, pues, que si se dice por ejemplo, que el 4 % amortizable está al cambio de 58'75, debe entenderse que el comprador sólo pagará 58'75 pesetas por la compra de 100 pesetas en papel.

499. Compras y ventas de fondos públicos. — Las operaciones sobre efectos públicos se verifican en un local a propósito llamado *Bolsa* o *Lonja*, y por intermediación de corredores.

En la Bolsa de Madrid hay, además de los corredores, *agentes de cambio*, quienes son los únicos que están legalmente facultados para autorizar las operaciones de compra y venta de valores públicos.

500. Cuánto cobran los corredores o agentes por su trabajo. — Por la compra o venta de títulos de la Deuda amortizable y de la perpetua, tanto interior como exterior, el corredor o agente percibe, generalmente, una cantidad que fluctúa entre 1, $^1/_2$ y $^1/_4$ ‰ del valor nominal.

501. Cuándo se dice que un papel se cotiza con prima. — Se dice que un papel *se cotiza con prima*, cuando, por la compra de 100 unidades nominales, hay que pagar más de 100 efectivas, o en metálico.

502. Jugar a la bolsa. — Es especular sobre las *alzas* y las *bajas* de los cambios a que se cotiza el papel.

En manera alguna deben confundirse los *compradores* y *vendedores* de efectos públicos con los *jugadores de bolsa, especuladores* o *agiotistas*. Los compradores son rentistas que adquieren el papel para colocar sus intereses de un modo cómodo, a fin de que su capital les reditúe un interés seguro. Los jugadores compran papel sin desear adquirirlo, confiando venderlo a mayor cambio, o venden papel que no poseen, confiando comprarlo a menor cambio.

503. Clases de jugadas. — Pueden reducirse a dos: *al alza* y *a la baja*.

504. Jugar al alza. — *Jugar al alza* es comprar papel sin retirarlo con la esperanza de venderlo a precio más elevado que el de la compra, y cobrar la diferencia que resulta entre el cambio de compra y el de venta.

Dedúcese de esto que el que juega al alza es siempre comprador de papel, y su ganancia está en la subida del cambio, así como su pérdida, en la baja del mismo.

El contrato implícito que media entre el jugador comprador y el jugador vendedor es el siguiente: Dice el comprador: Si el cambio (o precio por ciento) del papel que compro *sube*, tú, vendedor, si debías comprar mañana, para entregármelo, el papel que me has vendido, lo pagarías a mayor precio que el de venta, y experimentarías una pérdida consistente en la diferencia de precio: luego esta pérdida será mi beneficio.

Cuando el jugador compra a un rentista, es decir, a quien realmente posee e papel que se vende, se dice que *compra al empeño*, razón por la cual el papel comprado queda en depósito en garantía del capital que se debía entregar, de cuyo capital el jugador comprador paga un determinado tanto por ciento, hasta el día de la liquidación.

505. Jugar a la baja. — *Jugar a la baja* es vender papel sin poseerlo, con la esperanza de comprarlo a menor cambio que el de la venta, y obtener un beneficio, consistente en la diferencia que resulta entre el cambio a que vendió y el cambio a que compraría.

Dedúcese de esto que el que juega a la baja es siempre vendedor de papel, y su ganancia está en la baja del cambio, así como su pérdida, en la subida o alza del mismo. El contrato implícito que media entre el jugador vendedor y el jugador comprador es el siguiente: Dice el vendedor: Si el cambio del papel que vendo *baja*, en el caso de que debiese entregar mañana, a ti, comprador, el papel que hoy te vendo, lo compraría a menor precio que el que a ti he vendido, realizando yo entonces el beneficio que resultaría de la diferencia de cambio. Este beneficio que ahora suponemos, será el que me corresponderá si el papel que vendo baja.

Las liquidaciones para el cobro o pago de las diferencias que resultan por la baja o alza de los cambios, se practican diariamente en el *Bolsín*, lugar donde se reúnen los corredores para verificarlas. Conviene saber que en el mencionado lugar también se compran y venden los valores públicos, en horas distintas de aquéllas en que está abierta la Bolsa.

El juego de bolsa está prohibido por la ley; mas los agiotistas burlan las disposiciones sobre el particular, bien que el Gobierno, por otra parte, no demuestra empeño en que se cumpla una disposición que tantos beneficios sociales reportaría. Si bien es verdad que en poco tiempo pueden realizarse ganancias asombrosas disponiendo de capitales insignificantes, no es menos cierto que las mejores fortunas y las reputaciones más sólidas pueden verse, de un día a otro, sumidas en la miseria y el descrédito.

506. Casos que pueden presentarse en las cuestiones sobre fondos públicos. — Se presentan, generalmente, tres problemas, a saber:

1.º *Dados el valor nominal y el cambio de una cantidad en papel, hallar su valor efectivo.*

2.º *Dados el valor efectivo y el cambio, hallar su valor nominal.*

3.º *Dados los valores nominal y efectivo, determinar el curso del cambio.*

507. Su resolución. — Todas las cuestiones sobre fondos públicos se resuelven por la regla de tres.

EJEMPLOS: 1.º *Cotizándose la Deuda amortizable al cambio de* 75'46, *¿cuánto deberé desembolsar por la compra de* 20 *títulos de la serie B?*

Cada título de la serie *B* tiene de nominal 2500 pesetas; luego 20 títulos representarán un nominal de 2500 × 20 = 50000 pesetas. Diremos ahora:

S.	Si la compra de	100 ptas.	papel me cuesta	75'46	ptas. efectivas,
P.	» » »	50000	» » » costará	x	» »

$$100 : 50000 :: 75'46 : x = 37730 \text{ ptas.}$$

2.º *Siendo* 75'46 *la cotización del* 4 % *amortizable, ¿qué valor nominal podré comprar empleando* 37730 *pesetas en papel de la mencionada Deuda?*

S.	Si empleando	75'46 ptas. efectivas	compro	100	ptas. en papel,
P.	»	37730 » »	compraré	x	» » »

$$75'46 : 37730 :: 100 : x = 50000 \text{ ptas. nom.}$$

3.º *La adquisición de* 20 *títulos de la serie B del* 4 % *amortizable me costó* 37730 *pesetas: ¿cuál era la cotización del citado papel en aquel día?*

Un título de la serie *B*, tiene de nominal 2500 ptas.; luego el nominal de 20 títulos será $2500 \times 20 = 50000$ ptas.

S. Si 50000 ptas. nominales han costado 37730 ptas. efectivas,
P. 100 » » costarán x » »

$$50000 : 100 :: 37730 : x = 75'46 \text{ ptas., cambio.}$$

4.° *¿Qué capital efectivo debo emplear en papel de la Deuda interior para obtener una renta anual de 2500 pesetas, cotizándose este papel al cambio de 80'75?*

Como la Deuda interior produce el 4 % de interés, diré:

S. Si para obtener 4 ptas. de interés he de emplear 80'75 ptas.,
P. » » 2500 » » » deberé emplear x »

$$4 : 2500 :: 80'75 : x = 50468'75 \text{ ptas.}$$

5.° *Averígüese el interés anual que se obtendría invirtiendo un determinado capital en billetes de una deuda al 6 %, al cambio de 106'50.*

La compra de 100 ptas. nominales, nos costaría 106'50 ptas. efectivas; y como este papel produce el 6 % anual, tenemos la cuestión siguiente:

S. Si invirtiendo 106'50 ptas. obtengo 6 ptas. de interés,
P. » 100 » obtendré x » » »

$$106'50 : 100 :: 6 : x = 5'6338 \%$$

6.° *¿A qué cambio deberá tomarse el papel de cierta deuda al 6 %, para que el capital invertido produzca el 5'6338 por ciento de interés?*

S. Si para obtener un interés de 6 unidades debería cotizarse a 100,
P. » » » » » 5'6338 » » » » x

$$5'6338 : 6 :: 100 : x = 106'50, \text{ cambio}$$

7.° *Tomando por mediación de corredor, al cambio de 68'56 $^1/_2$, cuatro láminas de la Deuda perpetua exterior serie E, ¿cuánto deberé desembolsar siendo el corretaje $^1/_2$ °/₀₀?*

El valor nominal de una lámina de la serie *E* del 4 % exterior es de 12000 pesetas; luego el nominal de 4 de dichas láminas será $12000 \times 4 = 48000$ ptas. El cálculo, pues, será:

Cambio, 68'565 % s/ ptas.	48000......	importa......	Ptas. 32911'20
Corretaje, $^1/_2$ °/₀₀ » »	48000......	»	» 24
		Desembolsaré...........	Ptas. 32935'20

8.° *Invirtiendo 32935'20 ptas. en títulos del 4 % exterior al cambio de 68'565, ¿qué valor nominal compraré, pagando de corretaje $^1/_2$ °/₀₀?*

La compra de 100 ptas. nominales, por cambio, costará	68'565 ptas.
» » » » » » corretaje »	0'05 »
» » » » » » cambio y corretaje....	68'615 ptas.

Luego la cuestión será:

S. Si empleando 68'615 ptas. efectivas compro 100 ptas. nominales,
P. » 32935'20 » » compraré x » »

$$68'615 : 32935'20 :: 100 : x = 48000 \text{ ptas. n. o 4 tít. serie E.}$$

9.° *La compra, por mediación de corredor, de 48000 ptas. nominales del 4 % exterior importó 32935'20 ptas.: ¿a qué cambio se cotizó el papel siendo $^1/_2$ °/₀₀ el corretaje?*

S. Si la compra de 48000 ptas. nominales importó, por cambio y corretaje, 32935'20 ptas.,
P. » » » 100 » » importará » » » x »

$$48000 : 100 :: 32935'20 : x = 68'615 \text{ cambio.}$$

La compra de 100 ptas. nominales importó por cambio y corretaje,	Ptas. 68'615
Luego si quitamos el corretaje, $^1/_2$ $^0/_{00}$ s/ 100 ptas. = ...	» 0'05
tenemos el efectivo de 100 ptas. nominales, o lo que es lo mismo, el cambio = ...	Ptas. 68'565

De modo, pues, que la cotización fué al cambio de 68'565.

Observación. — *Téngase presente que el importe del corretaje aumenta, en las compras, el coste de los títulos, razón por la cual ha de sumarse con él; y que en las ventas disminuye el valor de los títulos, por cuya razón ha de restarse de este valor.*

508. Método abreviado para la resolución de los problemas sobre fondos públicos. — Cuando sólo nos propongamos buscar uno de estos tres datos, el *valor nominal*, el *efectivo* o el *cambio*, conociendo los otros dos, puede formarse la siguiente proporción:

Ciento es al valor nominal de los títulos, como el cambio a que se cotizan es al valor efectivo.

Llamando n al valor nominal, e al valor efectivo y c al cambio, tendremos:

$$100 : n :: c : e$$

Por lo que $$e = \frac{n \times c}{100};\ n = \frac{100 \times e}{c};\ c = \frac{100 \times e}{n}.$$

De modo, pues, que:

Para hallar el valor efectivo, *se multiplica el valor nominal por el cambio, y el producto se divide por* 100.

Para hallar el nominal, *se multiplica el valor efectivo por* 100, *y el producto se divide por el cambio.*

Para hallar el cambio, *se multiplica el efectivo por* 100, *y el producto se divide por el nominal.*

Este método abreviado es el que, generalmente, emplean los bolsistas y corredores, el cual, como se ve, no es otra cosa que la aplicación de la proporción que hemos obtenido razonando la resolución del *primero* de los *nueve problemas* que preceden.

Arreglo de la Deuda española.—Según hemos expuesto, la actual *Deuda pública* se reduce a tres clases de valores: *Deuda amortizable*, *Deuda perpetua interior y Deuda perpetua exterior.*

Antes del año 1882, el Gobierno había hecho o patrocinado diferentes emisiones con distintos nombres y condiciones, según la garantía de cada una. Esta diversidad de papel ha desaparecido casi por completo, ya que el plan del Gobierno se dirigió a este objeto. Veamos cómo:

Creación de la Deuda amortizable al 4 %. — Por la ley de 9 de diciembre de 1881, se creó esta Deuda, y para la adquisición de sus títulos se admitieron en pago metálico doce clases de papel (de las 15 que entonces existían), unas a un tanto por ciento de su valor nominal y otras por todo el nominal. Se admitieron los valores siguientes: las obligaciones del Banco y del Tesoro, las idem sobre Aduanas, los bonos del Tesoro, la Deuda del personal, los resguardos de la Caja de Depósitos, los billetes y pagarés del material del Tesoro, los Amortizables al 2 %, las acciones de carreteras y obras públicas y la Deuda flotante del Tesoro.

El tipo de emisión fué el 85 %.

Los valores que no se presentaron al canje, unos fueron retirados de la circulación, ya que los tenedores pudieron solicitar el efectivo metálico al cambio que se señaló, y los otros, muy pocos, continúan con sus intereses y amortización hasta ser extinguidos.

Creación de la Deuda perpetua interior al 4 %. — Por la ley de 29 de mayo de 1882, se creó esta Deuda. Creada la amortizable, quedaron por convertir 3 valores antiguos: la Deuda consolidada al 3 % interior, las Obligaciones del Estado por ferrocarriles y la Deuda consolidada al 3 % exterior. Los títulos de las dos primeras se convirtieron a un cambio dado, en títulos del 4 % interior, constituyendo esta Deuda.

Creación de la Deuda perpetua exterior al 4 %.—Lo fué por la misma ley que la Deuda interior. Los únicos valores antiguos existentes eran los títulos de la Deuda consolidada al 3 % exterior, que se convirtieron en títulos de la Deuda perpetua al 4 % exterior, constituyendo así esta Deuda.

Ultimamente, con la creación de la *Deuda amortizable al* 5 %, se han extinguido los títulos de las *Deudas Coloniales*.

Acciones y Obligaciones de sociedades anónimas

Téngase presente cuanto hemos dicho acerca de la constitución de las sociedades anónimas, al tratar de las *Compañías*.

509. Acciones. — Llamamos *acción* de una sociedad, al título representativo de un capital interesado en el negocio de la misma.

El accionista de una sociedad no desembolsa de una sola vez el valor que la acción representa. Paga un tanto por ciento en el momento de suscribirse, y el resto, en épocas fijas señaladas previamente. Estas cantidades que se satisfacen en épocas distintas hasta completar el valor de la acción, se llaman *dividendos pasivos*.

El tanto por ciento que cobra el accionista de los beneficios realizados por la sociedad, se llama *dividendo activo*.

510. Obligaciones. — Se llama *obligación* de una sociedad, al título representativo de un capital prestado a la misma.

El obligacionista satisface de una vez el valor de la obligación, y percibe el interés prometido por la sociedad al emitirlas.

511. Diferencia entre acción y obligación. — El accionista es un *socio* de la compañía y sujeto, por tanto, a los beneficios o a las pérdidas que la misma realice, y el obligacionista es un *prestamista*, por cuyo préstamo percibe el interés prometido, sean prósperos o adversos los negocios de la compañía.

Emítense las acciones para reunir el capital de que ha de disponer la sociedad que se constituye, y las obligaciones, ya para proporcionarse un lucro la compañía, ya para realizar mejoras que han de contribuir a que se obtengan mayores beneficios.

512. Valores locales. — Se llaman *valores locales* las acciones y obligaciones de sociedades legalmente constituídas, que se cotizan en la Bolsa. Dan lugar a las mismas operaciones que los fondos públicos, y los corredores y agentes perciben, por su compra o venta, $1/8$ % sobre el nominal.

Las acciones y obligaciones de sociedades particulares que se cotizan en la Bolsa, son títulos al portador, como las láminas de todas las Deudas públicas.

En la Bolsa, se compran y venden los valores del Estado y los locales, letras sobre las distintas plazas nacionales y extranjeras y metales preciosos; se contratan fletamentos y mercaderías, etc.

En las compras de efectos públicos, ya sean valores del Estado o locales, el comprador debe exigir la correspondiente póliza de Bolsa firmada por el agente. Este documento debe estar extendido en papel timbrado del precio que exija el nominal de los efectos comprados y, con estas formalidades, tiene la misma fuerza legal que una escritura pública. Si resultase que los títulos comprados con estas formalidades hubiesen sido mal adquiridos por el vendedor, el comprador debe estar tranquilo; la responsabilidad es del agente; pero si resultasen falsos, el agente no contrae responsabilidad, pues el comprador debe hacerlos reconocer en la oficina correspondiente, para asegurarse de que no son fa sos ni está mandado sean recogidos de la circulación.

En la mencionada póliza, se expresa la numeración, clase y el nominal total de los efectos, cambio a que se compraron, valor efectivo a que montan, el corretaje y coste del timbre; si tienen el cupón al corriente, la fecha de la compra y la firma del agente.

Para fijar el importe del timbre que corresponde a la póliza, véase lo que dispone el art. 22 de la *Ley del Timbre del Estado*, de 1.º de enero de 1906:

Pólizas de bolsa

Art. 22. Las pólizas de contratación al contado y a plazos sobre efectos públicos, valores industriales o mercantiles y mercaderías; los vendís en las operaciones al contado intervenidas por Agente de cambio o Corredor de comercio colegiado; las notas de intervención de operaciones entre dichos funcionarios; las que asimismo expidan relativas a la negociación de valores endosables, y las denuncias para impedir la negociación de créditos y valores al portador, se expedirán precisamente en los efectos timbrados que con este objeto expenda el Estado.

La base para el timbre de las pólizas de contratación al contado será el valor efectivo de la operación, y la escala para su tributación, la siguiente:

CUANTÍA EFECTIVA DE LA OPERACIÓN	TIMBRE	
	Clase	Precio — Pesetas
Hasta 1,000 pesetas	19.ª	0'10
Desde 1,000'01 hasta 2,500 íd.	18.ª	0'25
Desde 2,500'01 hasta 5,000 íd.	17.ª	0'50
Desde 5,000'01 hasta 10,000 íd.	16.ª	1
Desde 10,000'01 hasta 20,000 íd.	15.ª	2
Desde 20,000'01 hasta 30,000 íd.	14.ª	3
Desde 30,000'01 hasta 40,000 íd.	13.ª	4
Desde 40,000'01 hasta 50,000 íd.	12.ª	5
Desde 50,000'01 hasta 70,000 íd.	11.ª	7
Desde 70,000'01 hasta 100,000 íd.	10.ª	10
Desde 100,000'01 hasta 250,000 íd.	9.ª	25
Desde 250,000'01 hasta 500,000 íd.	8.ª	50
Desde 500,000'01 hasta 750,000 íd.	7.ª	75
Desde 750,000'01 hasta 1.000,000 íd.	6.ª	100
Desde 1.000,000'01 hasta 1.250,000 íd.	5.ª	125
Desde 1.250,000'01 hasta 1.500,000 íd.	4.ª	150
Desde 1.500,000'01 hasta 1.750,000 íd.	3.ª	175
Desde 1.750,000'01 hasta 2.000,000 íd.	2.ª	200
Desde 2.000,000'01 en adelante	1.ª	250

Los vendís en las operaciones al contado serán de cuatro clases: de 10 céntimos de peseta, para las operaciones cuya cuantía efectiva no exceda de 20,000 pesetas; de 25 céntimos, para las de 20,001 a 50,000; de 50 céntimos, para las de 50,001 a 100,000, y de una peseta, para las que excedan de 100,000 pesetas.

Para las operaciones a plazo, las pólizas serán siempre dos, una para el comprador y otra para el vendedor, y la escala para su tributación es distinta. Véase el complemento del art. 22 de la *Ley del timbre*, de 1.° de enero de 1906.

No se podrá comprender en ninguno de los documentos que quedan determinados efectos de clases distintas.»

Nuestros problemas están resueltos tomando la tarifa que señalaba la ley del timbre de 15 de septiembre de 1892, a saber:

Clases	De pesetas	Hasta pesetas	Timbres de pesetas
11.ª	»	12,500	0'10
10.ª	12,500'01	25,000	0'30
9.ª	25,000'01	50,000	0'75
8.ª	50,000'01	100,000	1'50
7.ª	100,000'01	200,000	3
6.ª	200,000'01	300,000	5
5.ª	300,000'01	400,000	7
4.ª	400,000'01	500,000	9
3.ª	500,000'01	1.000,000	15
2.ª	1.000,000'01	2.000,000	30
1.ª	2.000,000	en adelante	60

Los diarios publican unos estados llamados *boletines de cambio*, donde se consignan las cotizaciones de la Bolsa. Merecen especial mención las dos casillas de *Dinero* y *Papel*. La cantidad escrita en la 1.ª, indica el precio que ofrecen por el papel los compradores, y la cantidad escrita en la 2.ª, indica el precio que exigen por el mismo los vendedores. Si una clase de papel carece de cotización en la 1.ª casilla, indica que no tuvo compradores; si carece en la 2.ª, indica que no tuvo vendedores, y si carece de cotización en ambas casillas, indica que no tuvo compradores ni vendedores.

Véase el siguiente boletín correspondiente al día 12 de febrero de 1911, que copiamos de *La Publicidad*, diario de Barcelona.

SECCIÓN COMERCIAL

CAMBIOS CORRIENTES *dados por la Junta Sindical del Colegio de Corredores Reales de Comercio de la plaza de Barcelona*

		Operaciones	Dinero	Papel
Londres,	90 d/f	‘	34'70	‘
»	cheque	35'35	‘	35'33
»	8 d/v	‘	‘	‘
París,	cheque	40'35	‘	40'35
»	90 d/v	‘	‘	‘

EFECTOS PÚBLICOS

			Dinero	Papel
Deuda interior fin de mes	Ptas.	50000	76'32	76'35
» » fin próximo	»	50000	‘	‘
» » contado, serie A.	»	500	76'30 o	‘
» » » » C.	»	5000	76'35 o	‘
» » » » F.	»	50000	76'10 o	‘
» » en diferentes series			76'30 o	‘
» amortizable fin de mes	Ptas.	50000	96'80 o	‘
» » fin próximo	»	50000	‘	‘
» » contado serie A.	»	500	97'50	‘
» » » » B.	»	2500	97'15 o	‘
» » » » C.	»	5000	97'25 o	‘
» » » » E.	»	25000	96'70 o	‘

OBLIGACIONES AL CONTADO

Compañía general de Tabacos de Filipinas	98'75	99'00
Sociedad Hullera Española, del número 1 al 5000	101'	101'50
Comp.ª Barcelonesa de Electricidad	102'75	103'25
» de Ensanche, Urbanización y Saneamiento Cartagena.	93'	93'50

ACCIONES FIN DE MES

Banco Hispano-Colonial, 1 a 80000	135'75	136'05
Sociedad Catalana general de Crédito	'	'
» Crédito Mercantil	'	
F.-C. Medina a Zamora y Orense a Vigo	30'50	30'60
» Norte de España	48'50	48'60
» Norte de España, San Juan Estampilladas	'	
» Madrid, Zaragoza y Alicante	84'	84'10

ACCIONES CONTADO

Sociedad Catalana General de Crédito	'	'
» de Crédito Mercantil	65' o	'
Ferrocarril Sarriá a Barcelona	'	'
» Medina a Zamora y Orense a Vigo	30'25 o	'
» Norte de España	'	'
» Madrid, Zaragoza y Alicante	'	'
» Manresa a Berga	'	'
» Andaluces	'	'
» del Sur de España, 1 al 20000	'	'

Pignoración de fondos públicos

513. Definición. — Se llama *pignoración de efectos públicos*, la operación en virtud de la cual el tenedor de estos efectos los entrega en garantía de una cantidad que recibe en calidad de préstamo por un tiempo determinado.

514. Trámites que requiere la pignoración. — La pignoración de efectos públicos exige pocos trámites. Solicitado el préstamo y aceptado por el prestamista, el contrato se formaliza por medio de póliza con el timbre correspondiente (véase la tarifa de la página 224) y ha de ser intervenido por un agente de cambio y Bolsa o Corredor de Comercio, mediante muy pocos gastos.

Transcurrido el plazo fijado, el prestatario devuelve la cantidad recibida, y recobra los fondos entregados en garantía. Si incurre en incumplimiento, el prestamista queda dueño de la garantía, sin que el prestatario tenga derecho a reclamación.

Varios son los particulares y sociedades que se dedican a estas operaciones. El *Banco de España* y sus *Sucursales* y el *Monte de Piedad* en Madrid, son los establecimientos que prestan mayores sumas sobre fondos públicos.

Si durante el plazo de pignoración de los valores bajase su cambio una décima parte del tipo de admisión, el prestatario está obligado a mejorar la garantía.

Dichas sociedades no hacen préstamos por menos de 500 pesetas.

515. Cantidad que entregan el Banco de España y el Monte de Piedad sobre el nominal de los valores pignorados. — Entregan las *cuatro quintas partes* del efectivo que los títulos representan, determinado por la cotización que alcanzaron la víspera del contrato.

516. Interés que satisface el prestatario y plazo de la pignoración. — El *Banco de España* y el *Monte de Piedad*, exigen, ordinariamente, al prestatario el 4'50 ó 5 %, cuyos intereses se cobran al realizar el contrato, es decir, por adelantado. Estos préstamos se hacen por un plazo de 30 a 90 días, y hasta se extienden a 120, si la operación reviste determinadas condiciones.

Terminado el plazo de un préstamo con garantía, puede renovarse si así conviniese al prestatario, cuya renovación exige las mismas formalidades que el contrato primitivo.

El *Banco de España* presta también sobre pastas de oro y plata, dando el 90 % de su valor intrínseco; sobre conocimientos de embarque y resguardos de mercaderías acompañados de sus facturas y pólizas de seguros, dando el 50 % del valor que tienen en la plaza los efectos representados en dichos documentos.

La Comisión del Banco se reúne cada tercer día para aceptar o no las peticiones de préstamo que se le hacen. En caso de aceptación, el contrato puede hacerse el día siguiente; si no, no da ninguna explicación por su negativa.

517. Casos que pueden presentarse en las cuestiones sobre pignoración de fondos públicos. — Pueden presentarse tres casos:

1.º *Averiguar el efectivo que obtendríamos, con una determinada cantidad nominal dada en garantía.*

2.º *Conociendo el efectivo que se recibe, determinar el nominal que se dió en garantía, a un cambio dado.*

3.º *Hallar el cambio a que se cotizaron los efectos, conociendo el nominal dado en garantía y el efectivo que se recibió en calidad de préstamo.*

518. Su resolución. — La resolución de estos problemas se reduce al cálculo de tantos por cientos, sumas, restas, y, en general, a la aplicación de la regla de tres.

EJEMPLOS:

1.º *Si pignoramos, por 90 días, en el Banco de España,* 80000 *ptas. nominales del* 4 % *amortizable, que se cotiza al cambio de* 76, *¿qué efectivo recibiremos, siendo* 1 ‰ *el corretaje y* 4'50 % *el interés?*

80000 ptas. nominales, al cambio de 76 %, son efectivas......		Ptas. 60800
Baja de $^1/_5$		» 12160
Principal del préstamo		Ptas. 48640
A deducir: Interés 4'50 % en 90 días s/ 48640 ptas.	539'70	
A deducir: Corretaje 1 ‰ s/ ídem	48'64	
A deducir: Póliza y sello móvil................	0'85	» (*) 589'19
Líquido que recibiremos.......		Ptas. 48050'81

Antes de resolver el problema recíproco buscando el nominal a pignorar, resolvamos el siguiente suponiendo que no concurren gastos:

2.º *Estando el* 4 % *interior al cambio de* 75 %, *y deseando un préstamo de* 12000 *pesetas, ¿qué nominal deberemos pignorar?*

Cambio de la cotización................	75 %
Baja $^1/_5$ o sea 20 % s/ 75	15 »
Cambio para el préstamo......	60 %

Diremos ahora:

S. Si para obtener un préstamo de 60 ptas. ef. hemos de pignorar 100 ptas. nom.
P. » » » » 12000 » » » » » x » »

60 : 12000 : : 100 : x = 20000 ptas. nom.

3.º *Hemos pignorado papel de la Deuda amortizable cotizado al cambio de* 76, *y hemos recibido* 48050'81 *pesetas efectivas, habiendo antes pagado intereses de* 90 *días al* 4 $^1/_2$ %, *pesetas* 48'64 *por corretaje y* 0'85 *pesetas por póliza y sello. ¿Qué nominal hemos entregado en garantía?*

(*) La poliza está calculada por la tarifa que regía anteriormente.

Recibido en efectivo....................................	Ptas. 48050'81
Más corretaje y timbres ajenos a la comparación del nominal con el efectivo	» 49'49
Líquido de un capital del que se han descontado intereses de 90 días al 4 $^1/_2$ % anual....................................	Ptas. 48100'30

Calculemos ahora un capital que, descontando los intereses de 90 días al 4 $^1/_2$ por ciento, dé este líquido, pesetas 48100'30.

Si del capital 100 deducimos sus intereses por 90 días al 4 $^1/_2$ % anual, tenemos:

Capital....................................	100
Intereses de 90 días al 4 $^1/_2$ %	1'109
Líquido de 100....................................	98'891

Diremos ahora:

S. Si 98'891 ptas. es el líquido de 100 ptas.
P. 48100'30 » » » » x »

98'891 : 48100'30 : : 100 : x = 48639'714 ptas.,
o sea el efectivo del préstamo sin las deducciones.

Para hallar el nominal pignorado, tenemos que, si del cambio 76 rebajamos $^1/_5$, resulta, como vemos en el problema 2.º, 60'80, que es el cambio de la operación. Luego la cuestión es la siguiente:

S. Si para obtener 60'80 ptas. ef. debemos pignorar 100 ptas. nom.
P. » » 48639'714 » » deberemos » x » »

60'80 : 48639'714 : : 100 : x = 80000 ptas. nom., capital pignorado.

4.º *¿A qué cambio ha de cotizarse la Deuda perpetua interior al* 4 %, *para que, pignorando en el Banco de España, con las condiciones sabidas,* 20000 *pesetas nominales, podamos obtener un préstamo de* 12000 *pesetas?*

Hallaremos primero el cambio para el Banco, el cual, como sabemos, es $^1/_5$ o 20 % menor que el de la cotización.

S. Si con 20000 ptas. nom. obtengo un préstamo de 12000 ptas.
P. » 100 » » obtendré » » » x »

20000 : 100 : : 12000 : x = 60, cambio para el *Banco.*

Hallado el cambio para el *Banco*, hallemos el de la cotización.

Suponiendo que el cambio de un papel en la Bolsa fuese 100, el cambio del mismo papel en el *Banco* sería 80, es decir, el 20 % menos; luego la cuestión es la siguiente:

S. Si a 80 de cambio en el *Banco* corresponden 100 de cambio en la Bolsa,
P. a 60 » » » » corresponderá x » » » »

80 : 60 : : 100 : x = 75, cambio de la *Bolsa.*

Créditos con garantía

519. Definición. — Llamamos *créditos con garantía* a los que el *Banco de España* abre a los particulares que depositan en dicho establecimiento cantidades nominales determinadas, correspondientes a cualquiera de las deudas del Estado.

520. Cambio a que toma el Banco dicho papel. — El efectivo que representa el nominal depositado en garantía, lo determina el *Banco* del mismo modo que en las pignoraciones, esto es, al 20 % menos de la cotización que alcanzó el día anterior el papel que se deja en garantía.

Estas operaciones tienen ventaja sobre las pignoraciones, porque éstas se hacen por un tiempo dado, y las *Cuentas de garantía* y *Crédito* puede saldarlas el interesado a su voluntad, dentro del plazo convenido, aun cuando en el contrato se estipule que se abren por un tiempo fijo determinado, el cual es, generalmente, por cuatro meses.

Así como el interesado puede retirar del *Banco* las cantidades que permite su crédito en las épocas que convenientes le sean, también puede hacer las entregas que sus fondos le permitan, ganándole estas entregas el mismo interés que él paga por las cantidades que retira.

521. Interés recíproco en estas operaciones. — El interés recíproco en las *Cuentas de garantía* y *crédito* se estipula por ambas partes; no obstante, las tasas más en uso suelen ser el 4 o el 5 % anual.

Al depositar los valores, se extiende la póliza correspondiente para resguardo del interesado.

522. Comisión de custodia. — Los interesados a quienes se abren estos créditos, hagan o no uso de ellos, abonan una comisión de 0'05 %, además del interés previamente estipulado para las sumas que retiran. Este tanto por ciento se llama *comisión de custodia.*

Estos contratos son renovables si al *Banco* le conviene; en cuyo caso, transcurridos los 4 meses, se abre un nuevo crédito en que venga a figurar como primera partida el saldo de la cuenta anterior.

523. Cómo retira el interesado las cantidades a cuenta de su crédito. — Para ello, el *Banco* entrega al interesado los talonarios correspondientes, a fin de que éste gire contra su crédito los talones que tenga por conveniente.

Actualmente, el mínimum de cada crédito de esta clase que abre el *Banco*, es de 15000 pesetas en Madrid y 10000 en las Sucursales. El máximum no puede exceder de la cifra de la 1.ª categoría de sus listas de crédito, salvo en los casos en que recaiga acuerdo unánime del Consejo, atendiendo a circunstancias especiales.

Como en las pignoraciones, los interesados vienen obligados a reponer la garantía, cuando el valor o valores bajen un 10 % de la cotización tomada al verificar el contrato.

Estas cuestiones dan lugar a las mismas operaciones que la pignoración.

Veamos cómo se llevan las *Cuentas de Garantía* y *Crédito*, esto es, la cuenta que el interesado llevará para saber el estado de sus intereses al finalizar la fecha del contrato, o en cualquier momento en que le interese conocerlo, bien sea para proceder al saldo, bien por cualquiera otra circunstancia.

El *Banco de España* o cada Sucursal, enumera los créditos de esta clase. Supongamos que el nuestro esté señalado con el número 65.

Para mayor claridad, junto a la *Cuenta*, anotaremos las circunstancias esenciales siguientes:

Notas sobre mi crédito n.º 65, en el Banco, por Ptas. 54400

Fecha del contrato	1.º enero de 1906.
Su vencimiento	1.º mayo » »
Garantía	80000 ptas. nominales en 4 % amortizable.
Se hizo al cambio de	85 % menos $^1/_8$ %.
Se repondrá cuando baje a	76'50 %.

Banco de España. — Sucursal de Gerona. — Mi crédito núm. 65, por Pesetas 54,400

FECHAS		CONCEPTOS	DEBE		HABER		CRÉDITO			INTERESES a 4 %	
			Pesetas	Cts.	Pesetas	Cts.	Pesetas	Cts.	Días	Pesetas	Cts.
1919											
Enero	15	Talón girado núm. 12	......	....	12000	»	12000	»	11	14	46
»	26	» » » 13	......	....	8000	»	20000	»	15	32	87
Febrero	10	» » » 14	......	....	6000	»	26000	»	38	108	27
Marzo	20	Resguardo núm. 350. — Mi entrega.....	5000	»	......	....	21000	»	26	59	83
Abril	15	Talón girado núm. 15	......	....	16000	»	37000	»	5	20	27
»	20	Resguardo núm. 351. — Mi entrega.....	20000	»	......	....	17000	»	11	20	49
Mayo	1.°	Intereses	......	....	256	19					
		Comisión 0·05 % s/ Ptas. 54400	......	....	27	20					
			25000	»	42283	39	....	....	....	256	19
		Cantidad que entrego (o pasa a cuenta nueva)	17283	39							
			42283	39	42283	39					

Explicación de la cuenta precedente

Anotamos en la columna *Haber* las cantidades que sacamos del Banco, y escribimos en la columna *Debe* las cantidades que le entregamos. La columna *Crédito* está reservada a las cantidades que constituyen la diferencia entre el *Debe* y el *Haber*, es decir, las cantidades que debemos al Banco después de cada operación, y sobre las que calculamos los intereses de 4 % que corresponden al citado establecimiento, por los *días* respectivos, anotados frente a cada partida en la columna correspondiente.

Los días están sacados de fecha a fecha, es decir: debemos 12000 pesetas desde el 15 al 26 de enero, esto es, durante 11 días, cuyos intereses, al 4 %, importan 14'46 pesetas, que anotamos en la columna correspondiente. Debemos 20000 pesetas desde el 26 de enero al 10 de febrero, esto es, durante 15 días, cuyos intereses al 4 % importan 32'87 ptas., que anotamos en la columna respectiva; y así sucesivamente.

Al finalizar el contrato, o cuando nos convenga saldar nuestra cuenta, sumamos los intereses, que importan 256'19 ptas., y los abonamos al Banco; calculamos la *comisión de custodia* sobre el valor de nuestro crédito, que importa 27'20 pesetas y la abonamos también.

Sumamos luego las cantidades de la columna *Haber*, que son las que debemos al Banco, y que importan 42,283'39 ptas.; sumamos las de la columna *Debe*, que son las que hemos entregado, y que importan 25000 ptas., y la diferencia a favor del Banco, ptas. 17,283'39, la entregamos en metálico retirando desde luego las 80000 ptas. nominales entregadas en garantía. Si renovamos el crédito, el saldo actual figura como 1.ª partida en la cuenta que abrimos de nuevo.

Documentos de cambio y giro

524. Concepto de la palabra «cambio». — La palabra *cambio* puede tomarse en tres distintas acepciones:

1.ª Se aplica a la *permuta de monedas*, ya de países distintos, ya de un mismo país, pero de diferente especie. En este caso, se llama *cambio real* o *manual*.

2.ª La *diferencia* que hay entre la cantidad que se da o promete en una plaza y la que por este medio se recibe en otra.

3.ª El *contrato* que tiene por objeto recibir dinero u otros valores en un punto, por dinero que se promete o manda entregar en otro punto. Este cambio se llama *local*, *mercantil* o *trayecticio*.

Tal es la definición dada a la palabra *cambio* por el Sr. Ros en sus notas a nuestro *Código de Comercio*. Por medio del cambio, se realizan fácilmente las deudas existentes entre dos poblaciones o plazas comerciales, evitando la pérdida de tiempo, los gastos y riesgos que ocasionaría el transporte de los capitales. Sin este medio, se dificultarían las transacciones comerciales, quedando reducidos a su menor expresión los beneficios importantísimos que se obtienen con la circulación de capitales.

525. Documentos de cambio. — Se llaman así los instrumentos en virtud de los cuales los cambios se verifican. Estos documentos son:

Las Letras de cambio, las Libranzas, los Vales o pagarés a la orden, las Cartas-órdenes de crédito, los Abonarés y los Cheques.

Letras de Cambio

526. Definición. — Llamamos *letra de cambio* a un documento privado extendido en papel del timbre correspondiente, mediante el cual una persona manda a otra que pague a ella, o a un tercero, una determinada cantidad.

527. Circunstancias que debe reunir la letra de cambio. — Debe reunir las prescritas por el Código de Comercio.

Citaremos aquellos artículos del *Código* en que se expone lo esencial acerca de estos importantes instrumentos de giro.

Artículo 444. — La letra de cambio deberá contener, para que surta efecto en juicio:

1.° La designación del lugar, día, mes y año en que la misma se libra.
2.° La época en que deberá ser pagada.
3.° El nombre y apellido, razón social o título de aquél a cuya orden se manda hacer el pago.
4.° La cantidad que el librador manda pagar, expresándola en moneda efectiva o en las nominales que el comercio tiene adoptadas para el cambio.
5.° El concepto en que el librador se declara reintegrado por el tomador, bien por haber recibido su importe en efectivo, o mercadería u otros valores, lo cual se expresará con la frase de *valor recibido*, bien por tomárselo en cuenta en las que tenga pendientes, con lo cual se escribirá con la de *valor en cuenta o valor entendido*.
6.° El nombre y apellido, razón social o título de aquél de quien se recibe el importe de la letra, o a cuya cuenta se carga.
7.° El nombre y apellido, razón social o título de la persona o compañía a cuyo cargo se libra, así como también su domicilio.
8.° La firma del librador, de su propio puño o de su apoderado, al efecto con poder bastante.»

528. Personas que intervienen en una letra de cambio. — En una letra de cambio, pueden intervenir las personas siguientes:

1.ª El *librador*, que es la persona que manda hacer el pago.
2.ª El *tenedor*, que es la persona a cuya orden debe hacerse el pago.
3.ª El *librado*, que es quien debe pagar la letra.

Puede ser que en una letra sólo intervengan dos personas, el *librador* y el *librado*. En este caso, el librador extiende la letra a la orden de sí mismo, siendo, por lo tanto, librador y tenedor.

Se llama *tomador* el que compra una letra al librador o a un cedente.

529. Diferentes maneras de librar las letras de cambio. — El Código de Comercio prescribe las diferentes maneras como puede el librador girar una letra de cambio, a saber:

«1.° A su propia orden.
2.° A cargo de una persona, para que haga el pago en el domicilio de un tercero.
3.° A su propio cargo, en lugar distinto de su domicilio.
4.° A cargo de otro, en el mismo punto de la residencia del librador.
5.° A nombre propio, pero por orden y cuenta de un tercero, expresándose así en la letra.

Esta circunstancia no alterará la responsabilidad del librador, ni el tenedor adquirirá derecho alguno contra el tercero por cuya cuenta se hizo el giro.»

530. Plaza libradora y plaza aceptante. — Se llama plaza *libradora* aquélla en que se extiende o gira la letra, y plaza *pagadora* o *aceptante*, aquélla en que la letra ha de ser pagada. Esta última se expresa anteponiéndole la palabra *sobre*.

De modo, pues, que una letra s/ Tarragona, por ejemplo, se entiende que ha de ser pagada en esta plaza.

531. Segundas de cambio, terceras, etc. — El librador de una letra no puede negar al tomador la expedición de *segundas de cambio*, *terceras*

3.348,5 ... de 19*19* Clase 12.ª

Acept
Barcelona

Por *Ptas. 1600*

á V. pagar por esta *primera*

era, a la orden de *D. Antonio*

mil seiscientas

mía, según aviso de *S. S. S.*

Sebastián Fuentes

bi,
arzo de 1919
Salazar

3.348,5 ... de 19*19* Clase 9.ª

Por *Ptas. 4520'50*

á V. pagar por esta *segunda*

a la orden de los *señores*

cuatro mil quinientas

nta mía, según aviso de *S. S.*

Vicente Reguera

Modelo de una primera de cambio con aceptación y recibo

3.348,580
Acepto
Barcelona, 21 de marzo de 1919
Juan Ferrer Quiroga

Núm. 1250 — Gerona 19 de marzo de 1919 — Clase 12.ª

Por Ptas. 1600

A ocho días vista, se servirá V. pagar por esta primera de cambio no habiéndolo hecho por la segunda o tercera, a la orden de D. Antonio Salazar la suma de mil seiscientas pesetas valor recibido en efectivo que sentará V. en cuenta mía, según aviso de S. S.

TIMBRE

A D. Juan Ferrer Quiroga
(Aribáu, 20, 1.º) Barcelona

Sebastián Fuentes

Recibí,
Barcelona, 29 marzo de 1919
Antonio Salazar

1.ª

Modelo de una segunda de cambio con endosos

3.348,581

Núm. 24830 — Valencia, 24 de abril de 1919 — Clase 9.ª

Por Ptas. 4520'50

Al quince de junio próximo. se servirá V. pagar por esta segunda de cambio, no habiéndolo hecho por la primera. a la orden de los señores Beranger e Hijos la suma de cuatro mil quinientas veinte pesetas cincuenta céntimos valor recibido en mercaderías que sentará V. en cuenta mía, según aviso de S. S.

TIMBRE

A los Sres. González e Hijo y Comp.ª
Alicante

Vicente Reguera

2.ª

Páguese a la orden de D. Rodrigo Navarro, valor recibido en numerario de dicho señor.

Valencia, 26 de abril de 1919.

Beranger e Hijos.

Páguese a la orden de los Sres. Luján, Alvarado y Comp.ª, valor en cuenta con dichos señores.

Murcia, 10 de mayo de 1919.

Rodrigo Navarro.

Páguese a la orden de D. Martín Nadal, valor entendido con dicho señor.

Albacete, 26 de mayo de 1919.

Luján, Alvarado y C.ª

Recibí,

Alicante, 15 de junio de 1919.

Martín Nadal.

Páguese a la orden de D. Martín Nadal, valor entendido con dicho señor.

Albacete, 26 de mayo de 1919.

Luján, Alvarado y C.ª

Recibí,

Alicante, 15 de junio de 1919.

Martín Nadal.

y cuantas le pida, siempre que la petición se haga antes del vencimiento. Esta petición obedece a prevenir el extravío que las libradas anteriormente a la que se pide pueden experimentar en el correo.

Una segunda de cambio es copia literal de la primera, con la sola diferencia de que, en vez de decir *por ésta mi primera de cambio*, dirá: *por esta mi segunda, no siéndolo por la primera;* y si es una tercera, se escribirá: *por ésta mi tercera, no siéndolo por la primera ni la segunda.*

Los duplicados o triplicados de una letra sólo puede extenderlos el librador de ella; pero si se pidiesen segundas o terceras de cambio a un endosante, puede también éste extenderlas, en cuyo caso copiará literalmente la primera, segunda, o la que sea, con todos sus endosos. Hecho esto, escribirá a continuación: *Hasta aquí es copia literal de la primera* (o de la segunda) *para servir de segunda* (o de tercera). Seguidamente escribirá su endoso.

Según el artículo 450 del Código de Comercio, si una letra de cambio adoleciere de algún defecto o falta de formalidad legal, será considerada como un pagaré a favor del tomador y a cargo del librador.

532. Plazos a que pueden librarse las letras. — Las letras pueden ser libradas:

1.º, a la vista; 2.º, a uno o más días vista; 3.º, a uno o más meses vista; 4.º, a uno o más días fecha; 5.º, a uno o más meses fecha; 6.º, a uno o más usos; 7.º, a día fijo o determinado; 8.º, a una feria.

533. Vencimiento de una letra. — Vencimiento de una letra es el día en que ha de ser pagada.

El vencimiento de una letra *a la vista*, es el acto de su presentación.

El de una a días o meses vista, el día en que se cumplan los señalados, contándolos desde el siguiente al de la aceptación, o del protesto por no haber sido aceptada.

El de una letra a días o meses fecha, o a uno o más usos, el día en que cumplan los días, meses o usos señalados, desde el día inmediato al de la fecha del giro.

El de una a día fijo o determinado, es el mismo día.

El de una a una feria, el día último de ella.

La costumbre ha abolido el giro de letras a uno o varios usos.

El uso de las letras giradas de plaza a plaza en lo interior de la Península e islas adyacentes, será de 60 días.

El de las giradas en el extranjero sobre cualquier plaza de España será: en las de Portugal, Francia, Inglatera, Holanda y Alemania, 60 días. En las demás plazas, 90 días.

534. Qué más conviene saber acerca el vencimiento de letras. — Lo siguiente:

1.º Los meses para el término de las letras se computan de fecha a fecha, prescindiendo del número de días de cada mes.

2.º Si en el mes del vencimiento no hubiese día equivalente al de la fecha en que la letra se expidió, se entenderá que vence el último día del mes.

3.º Todas las letras deberán satisfacerse el día de su vencimiento, antes de la puesta del sol.

4.º Si fuese festivo el día del vencimiento, la letra se pagará el día precedente al del vencimiento.

535. Aceptación de letras. — *Aceptar una letra*, es contraer, por escrito, el compromiso de pagarla el día de su vencimiento.

La aceptación debe indicarse con la palabra *acepto*, y con *aceptamos*, si el librado es una sociedad; seguidamente se pondrán la fecha y la firma.

La aceptación de una letra es siempre necesaria cuando el plazo es a días o meses *vista;* pero si es librada a *días* o *meses fecha*, no es necesario este requisito, ya que la fecha del vencimiento queda determinada por la del giro.

Las letras giradas entre la Península e islas Baleares deben ser presentadas a la aceptación dentro de los cuarenta días; las libradas entre la Península e islas Canarias, dentro de los ochenta; las libradas entre la Península y las Antillas, dentro de seis meses. Si no se cumple esta formalidad, las letras resultan *perjudicadas*. El librador de una letra debe mandar aviso al librado.

536. Endoso de una letra. — *Endosar una letra* es traspasarla a favor de otra persona, pues las letras de cambio son documentos transferibles. Endosar una letra es, pues, ceder a otra persona el derecho de cobrarla.

El endoso se escribe al dorso del documento. Si los endosos fuesen tantos que no cupiesen en la letra, se le añade un papel en blanco, de igual tamaño, escribiendo el endoso de modo que empiece en la letra y acabe en el papel añadido.

537. Condiciones del endoso. — El endoso debe contener:

1.º El nombre y apellido del endosado.

2.º Si el endosante recibe el valor en metálico, géneros, o si lo carga en cuenta al endosado.

3.º El nombre y apellido de la persona que recibe el valor o en cuenta de quien se carga, si no fuese la misma a quien la letra se traspasa.

4.º La fecha del endoso.

5.º La firma del endosante, o de persona autorizada por él en debida forma. En este segundo caso, se expresará su nombre en la antefirma.

538. Forma del endoso. — Es la siguiente: *Páguese a la orden de Don F. de T., valor recibido en metálico, en géneros, cargado en cuenta*, etc.; la fecha y la firma.

Cuando un librador o endosante no quiere que sea protestada una letra que lleva su nombre, indica en el documento el nombre de una persona que entregará el efectivo, en caso de que a ello se negara el librado. La forma de la *indicación* es la siguiente: *En caso necesario al Sr.*, aquí el nombre del indicado.

539. Qué significa la expresión «sin gastos». — Cuando en una letra se lee la expresión *sin gastos*, quiere decir que se devuelva sin protesto de aceptación si no fuese aceptada, y sin protesto de pago si no fuese pagada.

Esta costumbre no está dentro de las prescripciones del *Código de Comercio;* pero la práctica la sanciona.

540. Aval. — *Aval* es el acto por el cual una persona afianza el pago de una letra de cambio, de un pagaré, etc.

El aval de una letra puede hacerse por documento separado, o sencillamente, escribiendo al dorso lo siguiente: *Por aval*, fecha y firma.

El Estado vende los ejemplares de los documentos de giro. Véase, para el caso, lo que dispone la *Ley del Timbre del Estado*, de 1.º de enero de 1906:

«Art. 138. Las letras de cambio, pagarés a la orden, pólizas de préstamo con garantía de valores cotizables, libranzas a la orden, cheques a la orden, mandatos o cualesquiera otros documentos de transferencia, expedidos por los Bancos y Sociedades contra sus sucursales y viceversa, cartas-órdenes de crédito por cantidades fijas, delegaciones, abonarés y cualesquiera otros efectos análogos de comercio, cuyo vencimiento no exceda de seis meses, llevarán el timbre del precio que corresponda a su cuantía, según la escala que a continuación se expresa:

CUANTÍA DEL EFECTO	TIMBRE Clase	TIMBRE Precio — Pesetas
Hasta 100 pesetas	16.ª	0'10
Desde 100'01 hasta 250	15.ª	0'25
Desde 250'01 hasta 500	14.ª	0'50
Desde 500'01 hasta 1,000	13.ª	1
Desde 1,000'01 hasta 2,000	12.ª	2
Desde 2,000'01 hasta 3,000	11.ª	3
Desde 3,000'01 hasta 4,000	10.ª	4
Desde 4,000'01 hasta 5,000	9.ª	5
Desde 5,000'01 hasta 7,000	8.ª	7
Desde 7,000'01 hasta 10,000	7.ª	10
Desde 10,000'01 hasta 20,000	6.ª	20
Desde 20,000'01 hasta 30,000	5.ª	30
Desde 30,000'01 hasta 40,000	4.ª	40
Desde 40,000'01 hasta 50,000	3.ª	50
Desde 50,000'01 hasta 75,000	2.ª	75
Desde 75,000'01 hasta 100,000	1.ª	100

Cuando la cuantía del efecto exceda de 100,000 pesetas, se fijarán además en el mismo los timbres móviles correspondientes a la diferencia o exceso a razón de 1 peseta por cada 1,000 pesetas o fracción de ellas, inutilizándolos como se dispone por el art. 9.º de esta ley.

Dichos efectos devengarán por derecho de timbre el duplo del que queda fijado, si su vencimiento excede de seis meses.

Art. 144. Las letras que se expidan dentro del Reino no podrán ser negociadas, aceptadas ni satisfechas si no se hallan extendidas precisamente en el papel que determina el art. 143, a no ser en los casos que por el mismo artículo se exceptúan de este requisito. Igualmente acontecerá con los pagarés a la orden y pólizas de préstamos con garantía de valores cotizables.

Art. 146. Los documentos de giro librados en el extranjero que hayan de presentarse para su cobro en España, y los que se libren en territorio donde el impuesto de timbre no es exigible, pero que deben pagarse donde rige, antes de que puedan ser negociados, aceptados o pagados, serán reintegrados con un ejemplar timbrado de los que el Estado expende, que esté en proporción con la cuantía de la cantidad girada, en el cual se extenderá la aceptación, endoso o recibo. Sin este requisito, no serán admitidos en juicio.

Art. 147. Las letras de cambio y demás documentos de giro que se expidan en el extranjero y hayan de pagarse también fuera de España, no devengarán timbre, aunque se negocien en el Reino; pero sí lo devengarán en la forma prescrita en los artículos que preceden si volvieran para el protesto en la forma prevenida en el artículo anterior.

Art. 152. Las segundas letras, terceras y demás podrán expedirse sin timbre; pero deberán reintegrarse con los timbres móviles correspondientes a su cuantía, si al ser aceptadas o pagadas no se halla unida a ellas, cualquiera que sea la causa, la primera que debió extenderse en el papel timbrado correspondiente.

Si al redactar un documento de giro, letra, pagaré, etc., se inutiliza, bien sea por equivocación o por cualquier otra causa, con tal que no esté firmado, en las expendedurías lo cambiarán por otro de igual valor mediante el desembolso de

0'10 ptas. Lo propio sucede con los pliegos de papel sellado, cualquiera que sea el valor de cada uno.

Para más detalles, véase la *Ley del Timbre del Estado* de 1.º de enero de 1906.

Libranzas

541. **Definición.** — Llamamos *libranza* a un documento privado, por el que cierto individuo encarga a otro pague a la orden de un tercero una determinada cantidad de dinero.

El plazo de la libranza, aunque en ella no se exprese, es siempre el momento de su presentación.

Según se desprende de los artículos 531, 532 y 533 del *Código de Comercio*, la libranza se diferencia poco de la letra de cambio.

La libranza, como la letra de cambio, debe extenderse en papel del timbre correspondiente. Sólo las que expiden los encargados del giro mutuo se bastantean con un sello móvil de a 10 céntimos de peseta.

MODELO DE LIBRANZA

Núm 426 *Por Ptas. 2,520*

Gerona, 11 de julio de 1919

Sírvase V. pagar, en virtud de esta libranza, a la orden de D. Román Solita, la cantidad de dos mil quinientas veinte pesetas, valor recibido del mismo, que sentará V. en cuenta de S. S.

J. Mª Coronado.

Sr. D. Antonio Soler García.
BARBASTRO

Vales o pagarés a la orden

542. Definición. — *Vales o pagarés a la orden* son documentos privados, en los que un individuo se confiesa deudor a otro de una cantidad determinada, que ha de pagar a la orden del acreedor.

543. Carácter de este documento. — Nuestro *Código de Comercio* da al pagaré un carácter sumamente serio, y faculta al que lo expide para entregar cantidades a cuenta, de cuyas entregas se hace la anotación en el dorso del pagaré. Se extiende en papel del timbre correspondiente a la cantidad que lo constituye.

Para poder entablar acción ejecutiva contra el firmante de un pagaré, por no haber atendido al pago el día de su vencimiento, es necesario el reconocimiento judicial de la firma de la persona contra quien se dirige la reclamación de pago y el protesto del pagaré.

Los pagarés son preferidos a las letras de cambio en las operaciones de descuento.

MODELO DE UN PAGARÉ

TIMBRE

N.° 40 Por Ptas. 2000

Pagaré, por todo el día veinte de septiembre próximo, a D. Luis Santamaria, o a su orden, la cantidad de dos mil pesetas, valor recibido de dicho señor en mercaderías, que tengo a mi entera satisfacción.

En esta ciudad de Gerona, a treinta de junio de mil novecientos diez y nueve.

Antonio Díaz Luenga.

Cartas-órdenes

544. Definición. — Se llama *carta-orden de crédito* la carta que una persona dirige a otra para que ésta entregue cierta cantidad a un sujeto determinado.

545. División de las cartas-órdenes. — Aunque el *Código de Comercio* sólo admite una clase de estos documentos, que titula *Cartas-órdenes de crédito*, la práctica las divide en *carta-orden* y *carta de crédito*, dando uso distinto a cada una.

Se hace uso de la *carta-orden*, para mandar a un comerciante que entregue a una persona, o a su orden, una determinada cantidad. Por la *carta de crédito*, se previene a un corresponsal tenga a disposición de una persona, las cantidades que ésta le pida hasta llegar a una suma determinada.

La carta-orden viene a ser una letra de cambio: sólo varía en la forma material. La carta de crédito no es protestable.

MODELO DE CARTA-ORDEN

R. Salvochea

Núm...................

Granada, 15 agosto de 1919

Sr. D. Ernesto de Silva

ALICANTE

Muy Sr. mío: En virtud de la presente, y sin otro aviso, ruego a V. se sirva mandar pagar, a la vista, a D. Francisco Cifuentes, *o a su orden, la cantidad de* mil seiscientas cuarenta pesetas, *que dejo acreditadas en su cuenta.*

Esperando dispensará buena acogida a mi citada orden, me repito de V. afmo. S. S.

R. Salvochea.

MODELO DE CARTA DE CRÉDITO

Núm. ....

Madrid, 5 diciembre de 1919

Sr. D. Gonzalo Fernández

BILBAO

Muy señor mío: En virtud de la presente, ruego a V. tenga a disposición de **D. Federico López Jaena** las cantidades que de V. solicite durante el presente mes, hasta la suma de cinco mil doscientas pesetas.

Al pie de mi carta-aviso, va la firma de dicho señor, a quien espero dispensará V. buena acogida.

Le anticipa las gracias más expresivas su afectísimo S. S.

José R. de la Cruz.

La persona que emprende un viaje por varias poblaciones y no desea llevar consigo cantidades en metálico de alguna consideración, se dirige a una casa de banca, y mediante depósito de la cantidad o facilitando la correspondiente garantía, recibe una carta de crédito circular, en la forma siguiente:

CIRCULAR

Madrid, 1.º de enero de 1919

A los Sres.		*E. Lafore y C.ª,*	*París.*
,,	,,	*Matas y Gubert,*	*Londres.*
,,	,,	*M. Jordi y C.ª,*	*Dublín.*
,,	,,	*N. E. Casagui,*	*Milán.*

Muy señores míos: Ruego a Vdes. se sirvan entregar colectivamente, al dador de la presente mi amigo **D. Eduardo Ribera,** *desde esta fecha hasta el 1.º de abril próximo, las cantidades que necesite hasta la suma de veinte mil francos, de cuyos valores podrán reintegrarse contra recibos duplicados o giros a mi cargo, rogándoles se sirvan estampar al dorso las entregas.*

Esperando dispensarán buena acogida a mi recomendado, les da gracias anticipadas y se reitera de Vdes. afectísimo S. S.

Q. B. S. M.

Emilio González.

Abonarés

546. Definición.—Llamamos *abonaré* a un documento en virtud del cual el librador manda a una persona que entregue a un tercero, o a su orden, una cantidad determinada que el primero abona al segundo.

El abonaré ejerce las funciones de letra de cambio.

MODELO DE UN ABONARÉ

Núm. ....

Dejo abonada al **Sr. D. Teodoro Salvatierra**, *la cantidad de cuatrocientas pesetas que, en virtud de este documento, se servirá mandar pagar al Sr. D. Salvador Albert y Pey, o a su orden, valor recibido en metálico (o en géneros) de dicho señor (o de D. F. de T.)*

Gerona, 24 de junio de 1919.

Francisco Loperena

Por Ptas. 400

Cheques

547. Definición.—El *cheque* es un documento de pago, por el que el librador manda al librado entregue al portador del documento todos o parte de los fondos que el primero tiene en poder del segundo.

El librador de un cheque debe tener la seguridad de que los fondos son disponibles, ya que éste es un documento pagadero a la presentación.

Puede librarse a cargo de una persona residente en la misma plaza que el librador, o residente en otra distinta.

El tenedor de un cheque debe presentarlo al cobro dentro de los *cinco días* siguientes al de su giro, si el librado reside en la misma población que el librador; dentro de los *ocho*, si es sobre plaza distinta, y de los *doce*, si se expidió desde el extranjero sobre cualquier plaza de la Península. Si transcurren estos plazos, el tenedor pierde su acción contra los endosantes, mas no contra el librador; pero si el librado se hubiese declarado en quiebra después de transcurrido el plazo de la circulación, el tenedor pierde su acción contra el librador.

El cheque debe estar fechado en letra, y no en cifra.

MODELOS DE CHEQUES

Núm. ....

Gerona, siete de septiembre de 1919.

A la vista, se servirá V. mandar pagar a **D. José Vilaret**, o a su orden, la cantidad de dos mil veinte pesetas, que anotará V. en cuenta de S. S.

Benito Perpiñá.

Sr. D. Rómulo Pérez

VALENCIA

Barcelona, veinticinco de abril de 1919.

Núm. ....   Pesetas 8,500

Crédit Lyonnais

BARCELONA

Páguese a la orden de **D. José Aguado**

la cantidad de ocho mil quinientas pesetas.

CRÉDIT LYONNAIS

Agencia de Barcelona

El Cajero,

P. Vigueaux.

Pagadero en el Crédit Lyonnais, de Madrid.

Cambio nacional

548. Definición. — *Cambio nacional o interior* es el que se verifica entre plazas de una misma nación.

549. Cotización o negociación de las letras giradas sobre plazas de una misma nación. — Las letras libradas sobre plazas de un mismo país se cotizan *a la par, con beneficio o con daño.*

550. Cambio a la par. — Se dice que el cambio entre dos plazas está *a la par* cuando, entregando *cien unidades de moneda* en una plaza comercial, recibimos *una letra* de igual valor pagadera en la otra plaza.

551. Cambio a beneficio. — El cambio está *a beneficio*, cuando cada *cien unidades en letra* sobre una plaza determinada nos cuestan *más de ciento en metálico* en la plaza de nuestra residencia.

552. Cambio a daño. — El cambio está *a daño*, cuando cada *cien unidades en letra* sobre una plaza determinada nos cuestan *menos de ciento en metálico* en la plaza de nuestra residencia.

553. Qué se deduce de esto. — De lo que llevamos dicho se deduce que el beneficio o daño del cambio son siempre relativos al papel, es decir, se refieren al librador o vendedor de la letra.

De modo, pues, que si el cambio entre dos plazas está a *beneficio*, se entiende a beneficio para el que da la letra y a daño para el que la toma, y si está a *daño*, se entiende a daño para el que da la letra y a beneficio para el que la toma o compra.

554. Valores que tiene una letra de cambio según lo expuesto. — De lo expuesto, se deduce que toda letra tiene dos valores: el *nominal*, que es el que lleva escrito el documento; el *efectivo*, que es la cantidad que paga el comprador o cobra el vendedor de la letra, por razón del daño o beneficio de la cotización.

555. Causas que determinan las variaciones de los cambios entre dos plazas. — Son las mayores o menores existencias de letras en una plaza pagaderas en la otra, y la mayor o menor demanda en la primera de estas letras sobre la segunda.

Para dar a nuestros lectores una idea clarividente de las causas que determinan estas variaciones de los cambios entre dos plazas, veamos lo que dice sobre el particular el Sr. Rodero de la Calle, ilustrado oficial 1.° del *Banco de España*, en su magnífica obra *Cálculos Mercantiles y Operaciones de Banca:*

«Se sabe que todas las poblaciones, ya sean grandes o pequeñas, tienen algo que vender y algo que comprar, y que son conocidos en cada provincia y en cada país los centros de contratación.

Si el centro Zaragoza envía al centro Barcelona granos y harinas por valor de 200,000 pesetas, y Barcelona manda a Zaragoza paños y perfumería por valor de 300,000 pesetas, y suponemos que esto sucede al mismo tiempo, y que durante ocho días no hay movimiento de esas mercancías de un punto a otro, y que los comerciantes que recibieron en ambas plazas los géneros no tienen entre sí relación alguna, cosa bien fácil, atendiendo al distinto tráfico que representa el ejemplo puesto, sucederá que los que recibieron en Barcelona los granos y harinas, los vendieron y tienen en sus cajas las 200,000 pesetas; pero como el género no era suyo, tienen que enviar esta cantidad a Zaragoza.

Los que en esta plaza han realizado los paños y perfumerías tienen 300,000 pesetas que enviar a Barcelona.

Si no existiera la letra de cambio, pronto se terminaba el negocio, pues los comerciantes de Barcelona llevarían las 200,000 ptas. a Zaragoza, y se cruzarían en el camino con los comerciantes de Zaragoza que llevaban las 300,000 pesetas a Barcelona.

Esto no puede en absoluto existir, y para evitarlo, se creó la letra de cambio, pues por medio de los centros de contratación, de los banqueros, de los corredores, etc., en Barcelona se sabría que había en la plaza un núcleo de fabricantes y perfumistas que podrían extender y vender letras que serían pagadas en Zaragoza, por una suma total de ptas. 300,000, con la cual los barceloneses habrían realizado el importe de sus mercancías.

Ahora bien, como en la misma plaza existe otro núcleo de comerciantes que han recibido de Zaragoza granos y harinas por valor de 200,000 ptas., es indudable que estos compradores irían a casa de aquellos vendedores y les tomarían letras por importe de 200,000 pesetas, que enviarían a Zaragoza en pago de lo que compraron. Esta sería la marcha del asunto si se hubiese estipulado que los vendedores de Barcelona habían de cobrarse girando a cargo de sus compradores de Zaragoza, y que los compradores de Barcelona habían de pagar a sus vendedores mandándoles letras sobre Zaragoza para que las realizaran.

Se comprende fácilmente que también podría hacerse el negocio dando letras los vendedores de Zaragoza, a cargo de sus compradores de Barcelona por valor de 200,000 ptas., cuyas letras serían buscadas por los compradores en Zaragoza para pagar a sus vendedores de paños y perfumería de Barcelona ptas. 300,000.

La cuestión puede reducirse a estas palabras:

Barcelona debe a Zaragoza..............................	Ptas.	200,000
Zaragoza debe a Barcelona..............................	»	300,000
De modo que, tratándose de terminar el negocio propuesto, tenemos que hay en Barcelona quien cede letras sobre Zaragoza por..	»	300,000
Pero sólo hay quien las tome por la suma de	»	200,000
O que hay en Zaragoza quien cede letras sobre Barcelona por valor de	»	200,000
Pero se buscan por más importe, o sean	»	300,000

Sucedería, pues, que la oferta de letras en Barcelona sobre Zaragoza, sería mucho mayor que la demanda, y por lo tanto, habría que establecer algún aliciente para venderlas, y éste sería el darlas más baratas, es decir, contentarse con recibir en Barcelona menos de 100 ptas. en metálico por 100 ptas. en letra sobre Zaragoza. Esta diferencia es la llamada cambio, y, suponiendo que recibamos 99 ptas. en metálico, el cambio es 1 % *daño.*

Por contra, si damos letra en Zaragoza sobre Barcelona, como la demanda es superior a la oferta, el papel vale más que el dinero, de modo que podríamos recibir 101 ptas. en metálico por 100 ptas. que diéramos en letra. Aquí es el cambio 1 % *beneficio.*

En Barcelona, pues, sería el cambio..........................	1 % daño.
Y en Zaragoza..	1 % beneficio.»

556. Cómo sabremos el cambio entre una plaza y las demás de un mismo país. — Consultando los *Boletines de Cambio* que publican los diarios de las plazas comerciales respectivas. Los cambios expresados en estos boletines se llaman oficiales, y son formados diariamente por el *Colegio de Corredores.*

557. Objeto que podemos proponernos en las cuestiones sobre cambio nacional. — Podemos proponernos las cuestiones siguientes:

1.ª *Hallar el valor efectivo, conociendo el nominal y el cambio.*
2.ª *Hallar el valor nominal, conociendo el efectivo y el cambio.*
3.ª *Hallar el cambio, conociendo los valores efectivo y nominal.*

558. Circunstancias a que hay que atender en cada caso. — Hay que atender a las siguientes:

1.ª Si el cambio está a la par, a beneficio o a daño. 2.ª Si concurren o no gastos. 3.ª Si la letra es a plazo corto o a fecha larga.

En la cotización oficial, las letras se consideran a 8 días. Si son a más, se llaman a fecha larga.

559. Gastos que pueden ocurrir en la compra o venta de letras. — Los gastos que pueden ocurrir en la compra o venta de letras son: corretaje, comisión de banca y timbre.

560. Gastos de corretaje. — El corredor de letras percibe, generalmente, el 1 ‰ sobre el valor nominal, tanto del comprador de la letra como del vendedor.

561. Comisión de banca. — Comisión de banca o de caja es la comisión que percibe el comprador o vendedor de letras por cuenta ajena. Esta comisión se toma sobre el valor nominal o sobre el efectivo, según convenio entre ambas partes, y fluctúa entre $^1/_4$ y $^1/_2$ %.

562. Observación importante acerca de los gastos que concurren en un problema. — Hay que tener presente que estos gastos *se añaden* si se trata de una compra de letra, y que *se deducen* tratándose de una venta.

563. Resolución de los problemas sobre cambio nacional. — Los problemas sobre cambio nacional pueden resolverse por la regla de tres y por la conjunta.

Si concurren gastos y el problema se resuelve por regla de tres, se halla primero el efectivo de 100 por cambio y gastos; y si la letra es a fecha larga, se determina el efectivo de 100 por cambio, gastos y descuento, y luego se plantea la regla de tres.

Si el problema se resuelve por conjunta, hay que tener presente:

1.° *Que en las equivalencias relativas a los gastos, uno de los dos términos es 100 y el otro, 100 más los gastos si es compra de letra, y 100 menos los gastos si se trata de una venta.*

2.° *Si los gastos aumentan el resultado de la operación, los términos de las equivalencias han de escribirse de menor a mayor, y si los gastos tienden a disminuir el resultado de la operación, los términos de las equivalencias se escriben de mayor a menor.*

Cuando se trata de letras a fecha larga, para los efectos del descuento, se rebajan de los días que constituyen el plazo de cada letra, los 8 días que se consideran legales al papel a fecha corta y los días que el correo emplearía para llevar la letra desde la plaza en que se compra o vende a la en que ha de ser pagada. De modo, pues, que si el plazo de una letra librada en Barcelona s/ Málaga, fuere 60 días, y suponiendo que el correo tarda 2 días en ir de una plaza a otra, al verificar el descuento, contaríamos sólo 50 días como plazo de la letra en cuestión.

564. Cambio especial del Banco de España para las letras que facilita contra sus sucursales y viceversa. — El *Banco de España* facilita letras sobre todas sus sucursales, y éstas a cargo del *Banco*, por cantidad que no baje de 250 pesetas cada letra, al cambio fijo de 0'15 % beneficio. Si la letra es menor de 250 pesetas, el cambio es otro, y por lo menos, se cobra lo que corresponde a 250 pesetas a 0'15 % beneficio.

565. Fórmula general para la resolución de los problemas sobre cambio nacional. — Todos los problemas relativos a cambio nacional, pueden resolverse por esta proporción: 100 : 100 *más o menos el cambio* (según esté a beneficio o daño) : : *el valor nominal de la letra* : *su valor efectivo.*
Si concurren gastos, el segundo término de la proporción ha de estar modificado por cambio y gastos, y cuando los giros son a fecha larga, por cambio, gastos y descuento.

Ejemplos.

Letras a plazo corto. — Operaciones sin gastos. — Cambio a beneficio

HALLAR EL EFECTIVO

1.° *He tomado en esta de Barcelona una l/ de 6000 ptas. s/ Málaga, a 8 d/v, al cambio de $^1/_2$ % beneficio. ¿Cuánto he tenido que desembolsar?*

Solución razonada

Como el cambio está a beneficio y somos compradores, es a daño para nosotros. Luego la cuestión será:

S.	Si para obtener 100 ptas. en l/	he de desembolsar	100'50 ptas. efectivas,	
P.	» » 6000 »	desembolsaré	x » »	

$$100 : 6000 :: 100'50 : x = 6030 \text{ ptas.}$$

Resolución por la fórmula general

$$100 : 100'50 :: 6000 : x = 6030.$$

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. valor efectivo		6000 ptas. v. n.

x ptas. v. ef. = 6000 ptas. v. n.
100 ptas. v. n. = 100'50 ptas. v. ef.

$$x = \frac{6000 \times 100'50}{100} = 6030.$$

HALLAR EL NOMINAL

2.º *Tomando en Barcelona una l/ s/ Málaga, a 8 d/v., al camb. de* $^1/_2$ % *beneficio, desembolsé* 6030 *ptas. efectivas. ¿De cuánto era la l/?*

Solución razonada

El camb. es a b.º y somos compradores; luego es a d.º para nosotros. El cálculo será:

S.	Si entregando 100'50 ptas. efectivas	compramos	100 ptas. en l/,
P.	» 6030 » »	compraremos	x » »

$$100'50 : 6030 :: 100 : x = 6000 \text{ ptas.}$$

Resolución por la fórmula general

$$100 : 100'50 :: x : 6030 = 6000.$$

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. n.		6030 ptas. ef.

x ptas. n. = 6030 ptas. ef.
100'50 ptas. ef. = 100 » n.

$$x = \frac{6030 \times 100}{100'50} = 6000 \text{ ptas. nom.}$$

HALLAR EL CAMBIO

3.º *Una l/ de* 6000 *ptas. s/ Málaga, a 8 d/v, costóme en Barcelona* 6030 *pesetas. ¿A qué cambio fué tomada?*

Solución razonada

S.	Si para comprar 6000 ptas. en l/	desembolsé	6030 ptas. ef.,
P.	» » 100 » »	desembolsaré	x » »

$$6000 : 100 :: 6030 : x = 100'50 \text{ ptas.}$$

De modo, que la adquisición de una l/ de 100 ptas. nos costó 100'50 pesetas ef.; luego desembolsamos más que no recibimos en l/; luego el camb. fué a b.º, y este tanto de b.º, como hemos dicho en otro lugar, es el exceso sobre 100, es decir, $^1/_2$.

Resolución por la fórmula general

$$100 : 100 \pm x \,(+ \text{ o } - \text{ el cambio}) :: 6000 : 6030.$$

El resultado de la proporción nos dice que el primer medio es 100'50; luego el cambio fué $^1/_2$ % b.°

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. ef. cambio		100 ptas. n.

$$\begin{array}{lcl} x \text{ ptas. ef. cambio} & = & 100 \text{ ptas. n.} \\ 6000 \text{ ptas. n.} & = & 6030 \;\text{»}\; \text{ef.} \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{100 \times 6030}{6000} = 100'50 \text{ ptas. ef.}$$

Luego el cambio es a $^1/_2$ % beneficio.

Letras a plazo corto. — Operaciones sin gastos. — Cambio a daño

HALLAR EL EFECTIVO

4.° *¿Cuánto me costará en Barcelona una l/ s/ Málaga de 6000 pesetas, a 8 d/v al cambio de $^1/_2$ % daño?*

Solución razonada

Como el cambio está a d.° y somos compradores, es a b.° para nosotros.
Luego la cuestión será:

S. Si para comprar 100 ptas. en l/ he de desembolsar 99'50 ptas. ef.,
P. » » 6000 » » desembolsaré x » »

100 : 6000 : : 99'50 : x = 5970 ptas. ef.

Resolución por la fórmula general

100 : 99'50 : : 6000 : x = 5970 ptas.

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. ef.		6000 ptas. n.

$$\begin{array}{lcl} x \text{ ptas. ef.} & = & 6000 \text{ ptas. n.} \\ 100 \;\text{»}\; \text{n.} & = & 99'50 \;\text{»}\; \text{ef.} \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{6000 \times 99'50}{100} = 5970 \text{ ptas. ef.}$$

HALLAR EL NOMINAL

5.° *¿Cuál será el valor nominal de una 1.ª de cambio s/ Málaga, a 8 d/v, tomada al camb. de $^1/_2$ % d.°, habiendo satisfecho al librador 5970 ptas?*

Solución razonada

S. Si pagando 99'50 ptas. ef. compro 100 ptas. en l/,
P. » 5970 » » compraré x » »

99'50 : 5970 : : 100 : x = 6000 ptas. v. n.

Resolución por la fórmula general

100 : 99'50 : : x : 5970 = 6000 pesetas.

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. v. n.		5970 ptas. v. ef.

$$\begin{array}{lcl} x \text{ ptas. v. n.} & = & 5970 \text{ ptas. v. ef.} \\ 99'50 \;\text{»}\; \text{v. ef.} & = & 100 \;\text{»}\; \text{v. n.} \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{5970 \times 100}{99'50} = 6000 \text{ ptas., v. n.}$$

HALLAR EL CAMBIO

6.° *Una l/ de 6000 ptas., s/ Málaga, a 8 d/v costóme 5970 ptas. efectivas. ¿A qué cambio la tomé?*

Solución razonada

S. Si para comprar una l/ de 6000 ptas. desembolsé 5970 ptas. ef.,
P. » » » » 100 » desembolsaré x » »

$$6000 : 100 :: 5970 : x = 99'50 \text{ ptas.}$$

De modo, que la adquisición de una l/ de 100 ptas., sólo me costó 99'50 pesetas ef.; luego desembolsé menor cantidad de la que recibí en l/; luego el cambio fué a d.°, y este tanto de d.°, como hemos dicho en otro lugar, es lo que falta al coste de una l/ de 100 pesetas, para llegar a esta cantidad, es decir, $^1/_2$.

Resolución por la fórmula general

$$100 : 100 \pm x\,(+ \text{ o } - \text{ el cambio}) :: 6000 : 5970$$

El resultado de esta proporción nos dice que el valor del primer medio es 99'50; luego el cambio fué a $^1/_2$ % d.°

Por conjunta:

B.	R.	P.
x ptas. ef. cambio		100 ptas. n.

$$\begin{aligned} x \text{ ptas. ef. cambio} &= 100 \text{ ptas. n.} \\ 6000 \text{ ptas. n.} &= 5970 \text{ » ef.} \end{aligned}$$

$$x = \frac{5970 \times 100}{6000} = 99'50 \text{ ptas. ef.}$$

Luego el cambio fué a $^1/_2$ % daño.

Letras a plazo corto.—Operaciones con gastos.—Cambio a beneficio o daño

HALLAR EL EFECTIVO

Si tomamos o vendemos l/ por cuenta de un corresponsal y nos valemos de *corredor*, debemos abonar a éste un tanto % o ‰ y cargar un tanto % por el servicio que prestamos, es decir, la comisión de banca o caja, el coste del timbre, etc.
Tengamos presente que *estos gastos se añaden si es compra de l/, y se restan si es venta.*

7.° *Hemos negociado por cuenta de S. Ruiz, de Valencia, una l/ de 8000 pesetas a 8 d/v, al c/ de 1 % b.°, abonando 1 ‰ de corretaje y retirando $^1/_2$ % por nuestra comisión de caja. ¿Cuál es el líquido de la negociación?*

Solución razonada

Podríamos hallar el efectivo de 100 por cambio y gastos y plantear la regla de tres que hemos visto en los casos anteriores; pero también podemos proceder así:

Principal de la l/		8000 ptas.
Cambio 1 % b.° s/ 8000 ptas.		80 »
		8080 ptas.
A deducir:		
Corretaje 1 ‰ s/ 8000 ptas.	8 ptas.	48 ptas.
Comisión $^1/_2$ % s/ 8000 »	40 »	
Líquido producto		8032 ptas.

Si el cambio fuese a *daño*, el problema sería el mismo, rebajando el cambio que aquí añadimos.

Resolución por la fórmula general

Para hallar el 2.º término de la proporción, diremos: negociando 100 pesetas en l/, cobramos por cambio 101 ptas.; menos 0'10 % de corretaje y $^1/_2$ % de comisión, en suma, 0'60, son 101 ptas. — 0'60 ptas. = 100'40 pesetas. Luego la proporción será:

$$100 : 100'40 :: 8000 : x = 8032 \text{ ptas.}$$

HALLAR EL NOMINAL

8.º *Hemos vendido géneros por cuenta de V. Arroyo, de Sevilla, resultando líquidas a su favor ptas. 24600, y recibimos orden de remitirle dicha suma, tomando en ésta de Barcelona l/ a 4 d/v s/ aquella plaza, lo que verificaremos al cambio de $^1/_8$ % daño. ¿De cuánto será la l/ que podremos adquirir, pagando 1 °/₀₀ de corretaje, retirando nuestra comisión de $^1/_4$ % y 12 ptas. por el coste del timbre de la l/?*

Solución razonada

Cantidad que tenemos		24600 ptas.
Deduciendo: $^1/_4$ % comisión s/ 24600 ptas.	61'50 ptas.	
Timbre	12 »	73'50 »
Queda para invertir en l/		24526'50 ptas.

Veamos ahora cuánto nos cuesta una l/ de 100 ptas. por cambio y corretaje:

100 ptas. en l/ nos cuestan por cambio	99'875 ptas. ef.
Por l/ °/₀₀ corretaje	0'10 »
Valor ef. de una l/ de 100 ptas. por cambio y corretaje	99'975 ptas.

Diremos ahora:

S. Si gastando 99'975 ptas. ef. compramos una l/ de 100 ptas.,
P. » 24526'50 » » compraremos » » x »

$$99'975 : 24526'50 :: 100 : x = 24532'63 \text{ ptas. en l/.}$$

Y mandaríamos a nuestro corresponsal la cuenta siguiente:

Coste de una l/ de ptas. 24532'63 al camb. de $^1/_8$ % d.º		Ptas. 24501'96
Gastos. 1 °/₀₀ corretaje s/ 24532'63 ptas.	24'54	
$^1/_4$ % comisión s/ 24600	61'50	
Timbre	12	98'04
Coste total		Ptas. 24600'00

Si el cambio a que tomamos la letra fuese a *beneficio*, el cálculo sería el mismo, con la sola diferencia de que, al calcular el valor ef. de una l/ de 100 pesetas por cambio y corretaje, añadiríamos el tanto de cambio, en vez de restarlo, como hemos hecho estando el cambio a daño.

Resolución por la fórmula general

Hallaremos, ante todo, la cantidad líquida para invertir en la compra de l/ como en la resolución anterior. Quedan, pues, líquidas, 24526'50 ptas.

Determinaremos ahora, el segundo término de la proporción, como en la anterior resolución cuando hemos hallado el coste de una l/ de 100 ptas. por cambio y corretaje. Dicho segundo término es 99'975. Luego la proporción será:

$$100 : 99'975 :: x : 24526'50$$

$$x = 24532'63 \text{ ptas. nom. de la l/.}$$

HALLAR EL CAMBIO

9.º *Negocié por cuenta de Ruiz una l/ de 8000 ptas. n. a 8 d/v, quedando 8032 pesetas efectivas a su favor. ¿A qué cambio la cedí, teniendo en cuenta que pagué 1 °/₀₀ de corretaje y que retiré mi comisión de caja a razón de $^1/_2$ %?*

Solución razonada

S.	Si vendiendo 8000 ptas. n.	quedaron liquidadas 8032	por cambio,	comisión	y corretaje,
P.	» 100 »	quedarían » x	»	»	»

$$8000 : 100 :: 8032 : x = 100'40 \text{ ptas.}$$

Luego si añadimos a esta cantidad el tanto $^0/_{00}$ de corretaje y el tanto por % de comisión, quedará el efectivo de 100 ptas. nominales por razón de cambio.

Es decir:

Efectivo de 100 ptas. n. por cambio, comisión y corretaje	100'40 ptas.
$^1/_2$ % comisión	0'50 »
1 $^0/_0$ corretaje	0'10 »
Efectivo de 100 ptas. n. por razón de cambio......................	101 ptas.

Luego el cambio fué a 1 % beneficio.

Si hubiese sido compra de letra, del resultado de la proporción hubiéramos deducido los gastos, y el resto hubiera sido el ef. de 100 ptas. nom. por cambio.

Obsérvese que, cuando el cambio es a b.º, el resultado final es mayor que 100, y este exceso es el cambio; y cuando es a d.º, el resultado final es menor que 100, y la diferencia entre 100 y el resultado es el tanto % de cambio.

Resolución por la fórmula general

$$100 : 100 \pm x\,(+ \text{ o } - \text{ el camb.}) :: 8000 : 8032$$

Resolviendo esta proporción, hallamos que el valor del primer medio es 100'40. De modo, que, negociando 100 ptas. en l/, quedan 100'40 ptas. por cambio, comisión y corretaje; luego si añadimos a esta cantidad el corretaje, 0'10 %, y la comisión, 0'50 %, en suma 0'60, tendremos el líquido de 100 ptas. por cambio, esto es:

$$100'40 + 0'60 = 101; \text{ luego el camb. fué a } 1\ \%\ \text{b.º}$$

Letras a fecha larga. — Operaciones sin gastos. — Cambio a beneficio o daño

HALLAR EL EFECTIVO

Hemos de tener presente lo dicho en otro lugar, esto es:

Cuando se trata de letras a fecha larga, como los cambios se fijan para el papel cuyo plazo no pase de 8 a 12 días, resulta que el plazo de una l/ a 60 días, por ejemplo, para los efectos del descuento, será 60 días menos 8 días; y como el papel a 8 días se supone que ha de ir a la aceptación igualmente que el papel a fecha larga, hemos de rebajar del plazo de éste los días de correo que serán necesarios a la letra para llegar a la plaza en que ha de ser aceptada; resultando que el plazo de dicha letra a 60 días, para los efectos del descuento, serán los días que medien entre la fecha de la aceptación y la de su pago, deduciendo antes los 8 días mencionados.

10. *Tenemos en cartera una l/ s/ Cádiz, a 60 d/f, de ptas. 4000, y la negociamos al camb. de $^3/_4$ % b.º abonando el interés del 6 %. Suponiendo que el correo tarda 3 días en llegar a la plaza pagadora, ¿cuánto recibiremos en efectivo?*

Solución razonada

Plazo de la l/, 60 días fecha; rebajando 8 días y 3 de correo, en suma, 11 días, su plazo será 49 días:

Principal de la l/..................................	4000 ptas.
Más $^3/_4$ % s/ 4000 por b.º del cambio	30 »
	4030 ptas.
Descuento de 6 % s/ 4000 por 49 días................	32'22 »
Líquido que obtendremos	3997'78 ptas.

Si el cambio hubiese sido a daño, la operación hubiera sido la misma con la sola diferencia que hubiéramos rebajado del nominal las 30 ptas. por razón del cambio, en vez de añadirlas, como hemos hecho siendo el cambio a beneficio.

Resolución por la fórmula general

El segundo término de la proporción ha de ser 100 modificado por cambio y descuento. Negociando 100 ptas. en l/, al camb. de $^3/_4$ % b.º, obtenemos 100'75 pesetas efectivas, y deduciendo los intereses de 100 ptas., en 49 días (por la razón expuesta en la resolución anterior) al 6 % anual, que importan 0'805 ptas., el segundo término de la proporción será: 100'75 — 0'805 = 99'945.

Luego la proporción será: 100 : 99'945 :: 4000 : x.

x = 3997'80 ptas., con una diferencia de 0'02 ptas., que no altera el resultado de la operación.

HALLAR EL NOMINAL

11. *Hemos de reembolsarnos 5000 ptas. que nos debe nuestro corresponsal en Bilbao, y nos da orden de hacerlo librando a s/c a 30 d/f. Estando el cambio s/ dicha plaza a $^1/_2$ % daño y cobrando el tomador de nuestro giro el 6 %, ¿de qué nominal será la l/ que deberemos librar?*

Solución razonada

Supongamos 2 días de correo. El plazo será, pues, 20 días.

Vendiendo una l/ de 100 ptas., cobramos por cambio..................	Ptas. 99'50
Descuento 6 % s/ 100 por 20 días	» — 0'33
Vendiendo una l/ de 100 ptas., cobraremos por camb. y descuento....	Ptas. 99'17

Diremos ahora:

S. Si para cobrar 99'17 ptas. ef. hemos de librar una l/ de 100 ptas.,
P. » » 5000 » » deberemos » » » x »

99'17 : 5000 :: 100 : x = 5041'85 ptas. nom.

Si el cambio hubiese sido a b.º, hubiéramos añadido a 100 el tanto % de cambio que ahora hemos restado, y hubiéramos continuado el problema como en el caso anterior.

Resolución por la fórmula general

El segundo término de la proporción ha de ser 100 modificado por camb. y descuento. Como se ve en la resolución anterior, vendiendo 100 ptas. en l/, cobramos por cambio y descuento 99'17.

Luego la proporción será: 100 : 99'17 :: x : 5000.

x = 5041'85 ptas., nom. de la l/.

HALLAR EL CAMBIO

12. *Hemos negociado una l/ de 5041'85 ptas., por la que hemos recibido 5000 pesetas, haciendo un descuento de 6 % por 20 días. ¿A qué cambio hemos hecho la negociación?*

Solución razonada

S. Si vendiendo una l/ de 5041'85 ptas. n. hemos cobrado 5000 ptas. ef.,
P. » » 100 » » cobraremos x »

5041'85 : 100 :: 5000 : x = 99'17,

valor efectivo de una l/ de 100 ptas. por cambio y descuento. Añadiendo a este resultado el descuento de 100 ptas. al 6 % por 20 días, que es ptas. 0'33, tenemos el efectivo de 100 por razón del cambio. Es decir:

Efectivo de 100 ptas. nominales por cambio y descuento	99'17 ptas.
Descuento de 6 % s/ 100 ptas. por 20 días	0'33 »
Efectivo de 100 ptas. n. por cambio..............................	99'50 ptas.

Lo que nos indica que la negociación se hizo al cambio de $^1/_2$ % daño.

Si el último resultado hubiese sido mayor que 100, el cambio hubiera sido a b.º, cuyo tanto % de b.º lo hubiera determinado el exceso del resultado sobre 100.

Resolución por la fórmula general

100 : 100 ± x (+ ó — el camb.) :: 5041'85 : 5000

Resolviendo esta proporción, hallamos que el valor del primer medio es 97'17. De modo que, vendiendo 100 ptas. en l/, recibimos 99'17 ptas. por cambio y descuento; luego, si añadimos a este resultado el descuento correspondiente a 100 pesetas, por 20 días, al 6 % al año, que es 0'33 ptas., tenemos el efectivo de 100 pesetas en l/ por razón del camb.; esto es, 99'17 + 0'33 = 99'50 pesetas; luego el camb. fué a $^1/_2$ % d.º

Letras a fecha larga.—Operaciones con gastos.—Cambio a beneficio o daño

HALLAR EL EFECTIVO

13. *López, de Mataró, me encarga tome por su cuenta una l/ de 8500 ptas. s/ Madrid, a 45 d/f. Estando el cambio a $^3/_4$ % b.º, pagando 1 ‰ de corretaje y contando mi comisión a $^1/_4$ %, ¿cuánto deberé cargar en cta. a dicho señor, abonándome el librador el interés de 8 % por 35 días y pagando yo 4 ptas. por el timbre correspondiente?*

Solución razonada

Principal de la letra	8500	ptas.
Cambio $^3/_4$ % b.º s/ 8500 ptas.	63'75	»
Comisión $^1/_4$ %	21'25	»
Corretaje 1 ‰	8'50	»
Timbre	4	»
	8597'50	ptas.
A deducir 8 % de interés s/ ptas. 8500 por 35 días	65'20	»
Coste de la l/, que cargo en la cuenta de López	8532'30	ptas.

Resolución por la fórmula general

Hallamos, primero, el segundo término de la proporción, que, en este caso, ha de estar modificado por cambio, corretaje y descuento. Una l/ de 100 ptas. nos cuesta 100'75 ptas. por cambio más 0'10 ptas. por corretaje, en suma, 100'85 pesetas; y deduciendo de esta cantidad el descuento de 100 ptas., al 8 %, por 35 días, que es 0'767 ptas., tenemos 100'083, que es el segundo término de la proporción; luego ésta será: 100 : 100'083 : : 8500 : x.

x = 8507'055 ptas., cantidad que nos cuesta la compra de la l/ encargada. Como, además, hemos desembolsado el importe del timbre, esto es, 8507'055 pesetas + 4 ptas. = 8511'055 ptas., López nos debe esta suma más nuestra comisión de banca, $^1/_4$ %, sobre dicha suma, que es 21'28 pesetas. Luego cargaremos en la cuenta de López 8511'055 + 21'28 ptas. = 8532'33 ptas., resultado hallado en la resolución anterior, con una diferencia de 0'03 que no altera el resultado de la operación.

HALLAR EL NOMINAL

14. *He negociado una l/ s/ Santander a 60 d/f, al cambio de 1 % daño, $^1/_2$ % de comisión y 1 ‰ de corretaje, cediendo al tomador el interés de 8 %. Habiendo recibido 6000 ptas. efectivas, ¿de cuánto era dicha letra?*

Solución razonada

Ocho días del plazo de la cotización y 2 días de correo, son 10 días: abonaremos, pues, 50 días de intereses al 8 %.

Veamos el líquido que recibiremos por la negociación de una letra de 100 ptas.

Una l/ de			ptas.	100
A deducir:	Cambio 1 % d.º	1	»	
	Comisión $^1/_2$ %	0'50	»	
	Corretaje 1 ‰	0'10	»	
	Intereses de 50 d/ s/ ptas. 100	1'09	»	2'69
	Líquido de una l/ de 100 ptas.			97'31

Diremos ahora:

S.	Si para recibir	97'31 ptas. ef.	hemos de entregar	una l/ de 100 ptas.				
P.	» »	6000	» »	deberemos	»	»	x	»

97'31 : 6000 :: 100 : x = 6165'86 ptas. v. n.

Suponiendo que esta negociación la hemos hecho por cuenta de un correspon sal, presentaremos a éste la cuenta siguiente:

Nominal de la l/			Ptas. 6165'86
A deducir:	Cambio 1 % d.º	Ptas. 61'65	
	Comisión $^1/_2$ % s/ el valor n.	» 30'82	
	Corretaje 1 $^o/_{oo}$ s/ ídem.	» 6'16	
	Interés de 50 días al 8 %	» 67'57	» 166'20
	Líquido á su favor		Ptas. 5999'66

ó 6000, si bien existe una diferencia de 0'34 ptas. debida a la inexactitud de las divisiones. Cuando esto sucede, que es muy frecuente, se redondea la cantidad, ya en más, ya en menos, siendo tolerada por ambas partes esta alteración.

Resolución por la fórmula general

Ante todo, como en la resolución razonada anterior, hallaremos el efectivo de 100 ptas. en l/, que es el segundo término de la proporción, modificado por cambio, corretaje, comisión y descuento, cuyo término es 97'31. Luego la proporción será:

100 : 97'31 :: x : 6000

x = 6165'86 ptas., nom. de la l/ negociada.

HALLAR EL CAMBIO

15. *Hemos negociado una l/ s/ Santander a* 60 *d/f, de ptas.* 6165'86, *recibiendo* 6000 *ptas. efectivas. Los gastos que ha motivado la operación son los siguientes: comisión de banca,* $^1/_2$ %*; corretaje* 1 $^o/_{oo}$. *¿A qué cambio se ha verificado la negociación, teniendo en cuenta que abonamos el interés de* 8 % *por* 50 *días?*

Solución razonada

Nominal de la letra			Ptas. 6165'86
Menos:	Comisión $^1/_2$ % s/ 6165'86 ptas.	30'82	
	Corretaje 1 $^o/_{oo}$ s/ ídem	6'16	
	Interés de 8 % s/ ídem durante 50 días	67'57	» 104'55
	Líquido de una l/ de 6165'86 ptas. por cambio		Ptas. 6061'31

Si hubiésemos vendido a la par, esta cantidad sería la percibida; pero sólo hemos recibido 6000 ptas.; luego el cambio ha importado 61'31 ptas., es decir, ha sido a daño, porque hemos recibido menor cantidad efectiva que la que recibiríamos estando el cambio a la par.

La cuestión, pues, será:

S.	Si una l/ de	6165'86 ptas.	ha importado	por cambio 61'31 ptas.			
P.	» »	100	» importará	»	»	x	»

6165'86 : 100 :: 61'31 : x = 0'99, ó 1 % camb. d.º

Resolución por la fórmula general

100 : 100 ± x :: 6165'86 : 6000

Resolviendo esta proporción, hallamos que el valor del primer medio es 97'31; añadiendo a esta cantidad 0'50 por comisión, 0'10 por corretaje y los intereses de 100 ptas. por 50 días al 8 %, que son 1'09 ptas., tenemos en suma

97'31 + 0'50 + 0'10 + 1'09 = 99;

luego el cambio fué a 1 % d.º

Facturas de descuento

566. Definición.—Llamamos *factura de descuento* a la que extiende el tenedor de documentos de crédito, para presentar al banquero con quien ha concertado su negociación, a un determinado tanto por ciento de descuento.

567. Cómo se extienden y resuelven. — Se escriben en columna los capitales, a continuación los respectivos vencimientos, seguidamente los días que faltan para el vencimiento de cada capital y después los *números*, esto es, los productos de los capitales por los tiempos respectivos. Se suman los números, y esta suma se divide por el divisor fijo, dando el cociente el descuento total, el cual se resta de la suma de capitales, y la diferencia es la cantidad líquida que debe pagar el tomador de los documentos que se negocían.

Véase la siguiente

FACTURA de los efectos presentados por D. Emilio García a los Sres. L. Romero y Hermano, a descuento de 6 %, en el día de la fecha, 20 de febrero de 1919.

Clase	Pesetas	Cts.	Vencimientos	Días	Números
Letra	4500	»	1.º marzo	9	40500
Ídem	800	»	25 »	33	26400
Ídem	1200	50	30 abril	69	82834
Pagaré	2600	»	10 mayo	79	205400
Letra	450	»	6 junio	106	47700
	9550	50			402834

— 67 ' 14, interés al 6 %

9483 ' 36 ptas. líquido a cobrar.

Gerona, 20 *de febrero de* 1919.

Siguiendo la costumbre general en el comercio, hemos calculado los intereses tomando el divisor fijo correspondiente al año comercial, de 360 días. (*Véase pág.* 180. — *Tabla de divisores fijos.*)

568. Hay quien calcula los intereses letra por letra, por los días de cada una, y estos intereses se escriben en la columna de *intereses*, que substituye a la de números. En ambos casos, el resultado es el mismo.

569. Si el banquero que toma los efectos exigiese comisión, ésta se añadiría a los intereses y la suma se restaría de la de capitales, siendo el resultado la cantidad a cobrar.

Facturas de negociación

570. Definición. — Las *facturas de negociación* se diferencian de las de descuento, en que los efectos que se descuentan son pagaderos en plaza distinta de aquélla en que la operación se verifica.

571. A qué hay que atender en la formación de estas facturas. — Además de los intereses, es preciso atender al tanto por ciento de cambio, el que se añade a la suma de capitales si el cambio es a *beneficio*, o se resta si es *con daño*.

572. Cómo se extienden y resuelven. — Las facturas de negociación constan de las mismas columnas que las de descuento, con más las de *plaza* y *cambios*. Exigen las mismas operaciones y además las de añadir a la suma de capitales el *beneficio* que resulta de los cambios, o restar la *pérdida* o *daño*.

Véase la siguiente

***FACTURA** de los efectos presentados por D. J. Dalmáu Carles al banquero D. Manuel Iturralde, al 6 % de descuento, en el día de la fecha, 20 de enero de 1919.*

Efectos	Pesetas	Cts.	Plazas	Vencimientos	Cambios	Días	Números
Letra	6000	»	Santander	Enero 30	$^1/_2$ % b.º	10	60000
»	450	»	Cádiz	Febrero 15	$^1/_4$ % d.º	26	11700
	6450	»					71700

– 13 ‘ 07 { 11‘95 ptas., descuento al 6 %
1‘12 » cambio $^1/_4$ % d.º s/ ptas. 450.

6436 ‘ 93

+ 30 ptas., cambio $^1/_2$ % b.º s/ ptas. 6000.

Ptas. 6466 ‘ 93, líquido a recibir.

Gerona, 20 *de enero de* 1919.

Como en la factura de *descuento* anterior, hemos tomado el divisor fijo correspondiente al año comercial.

573. En pago de los efectos negociados, a veces recibimos otros efectos. En este caso, formamos la factura de los efectos vendidos y recibimos la de los efectos que se nos entregan en pago. La diferencia entre ambas es lo que debemos recibir o pagar.

Protesto de letras.—Cuentas de resaca

574. Qué se entiende por protesto de una letra. — Se llama *protesto* de una letra a un documento formalizado por un escribano público ante dos testigos, en el que se exponen las causas por qué el librado se niega a la aceptación o pago de la letra mencionada.

La palabra *protesto* significa que el tenedor de la letra protesta contra todos los gastos y perjuicios que pudieren ocurrir.

575. Clases de protesto. — El protesto de una letra puede ser por cuatro causas.

1.ª *Por falta de aceptación*, que tiene lugar cuando el librado no quiere aceptar la letra girada a su cargo.
2.ª *Por falta de pago*, el cual sucede cuando el librado, llegado el día del vencimiento, no paga la letra que antes aceptó.
3.ª *Por falta de aceptación y pago*, cuando el día del vencimiento, el librado se niega al pago de la letra que ya se le protestó por falta de aceptación.
4.ª *A falta de mejor seguridad*, el cual se verifica cuando se sabe que el librado ha hecho suspensión de pagos o se presenta en quiebra.

576. Cuándo debe verificarse el protesto de una letra. — El art. 504 del *Código de Comercio*, previene que el protesto de todo documento de crédito debe hacerse antes de la puesta del sol del día siguiente al en que se hubiere negado la aceptación o el pago.

Si el día siguiente al de aceptación o vencimiento fuese festivo, el protesto se hará en el primer día hábil.

577. Cuando una l/ es protestada por falta de aceptación y es a días vista, los días para su vencimiento se cuentan desde aquél en que se hace el protesto.

El escribano retiene en su poder la letra protestada y el testimonio de protesto hasta la puesta del sol del mismo día, y si durante este tiempo el pagador se presentase para satisfacer el importe de la letra y los gastos que el protesto ha ocasionado, el escribano admitirá el pago y le hará entrega de la letra protestada.

578. Cómo se reembolsa el tenedor de una letra protestada. — El tenedor de una letra protestada puede reembolsarse del valor de la misma y de los gastos que el protesto ha ocasionado, extendiendo una letra del montante total a cargo del librador o de cualquier endosante. Esta letra, en virtud de la cual se verifica el reembolso, se llama *resaca*, y el tipo a que se negocía, *recambio*.

579. El *recambio* ha de ser al tipo corriente en la plaza el día en que se hace el giro, lo que se consigna en la *cuenta de resaca* por certificación de un corredor de número, o de dos comerciantes si en la plaza no hubiese corredor.

580. Cuenta de resaca. — *Cuenta de resaca* es una nota detallada de las cantidades que determinan el valor nominal de la letra que se libra, para el reembolso del valor de una letra protestada y los gastos que el protesto ha motivado. La cuenta de resaca ha de contener las partidas siguientes:

1.ª Capital de la letra protestada. 2.ª Gastos del protesto o protestos. 3.ª Derechos de timbre para la resaca. 4.ª Comisión de giro. 5.ª Gastos de correspondencia. 6.ª Corretaje de la negociación de la resaca. 7.ª Timbre móvil de 10 céntimos para la cuenta de resaca. 8.ª Recambio, si la negociación se verifica a daño.

La comisión de giro se toma sobre el valor de la letra protestada, sobre este valor y gastos, o sobre el nominal de la resaca.

581. Documentos que han de acompañar a la resaca. — Las letras resacas que se giran han de ir acompañadas de la letra original protestada, de un testimonio del protesto y de la cuenta de resaca.

582. Costumbre generalmente establecida para verificar el reembolso. — El Código de Comercio, en su artículo 527, faculta al tenedor de una letra protestada para reembolsarse en la forma antes mencionada; mas luego, en el artículo 529, sanciona la costumbre generalmente establecida en el comercio, y que consiste en unir a la letra protestada el testimonio de protesto y la cuenta de resaca correspondiente y pasarla al último endosante, éste al penúltimo y así sucesivamente, cobrando unos de otros, hasta que el librador paga a la persona a cuya orden la extendió o endosó. Así, no hay, pues, necesidad de extender la letra resaca.

583. Razonemos la formación de una cuenta de resaca. Supongamos que los señores Morató, Busquéts y C.ª, de Barcelona, nos endosaron una l/ de Ptas. 4000 c/ R. Saullehí, de ésta, la que ha sido protestada por falta de aceptación y pago, y vamos a reembolsarnos librando a c/ de dichos señores, acompañando los testimonios de protesto y la correspondiente cuenta de resaca.

Supongamos que el recambio es a $1/2$ % daño, que los gastos de protestos importan 12'75 pesetas, que los de correspondencia ascienden a 1'50 ptas., que cobramos $1/4$ % de comisión, que el corredor que ha intervenido en la negociación de la letra resaca cobra 1 ‰ y que el timbre de la l/ que giramos para el reembolso nos cuesta 2 ptas.

Desde luego se ve que hemos de reembolsarnos las cantidades siguientes:

Principal de la letra protestada	4000	ptas.
Coste de los protestos	12'75	»
Comisión $1/4$ % s/ Ptas. 4000	10	»
Timbre para el reembolso	2	»
Gastos de correspondencia	1'50	»
Sello móvil para la cuenta de resaca..................	0'10	»
Total....................	4026'35	ptas.

Debemos, por tanto, librar una l/ cuyo nominal permita reembolsarnos las 4026'35 pesetas y satisfacer los gastos de recambio y corretaje. Hallemos el nominal de la letra resaca.

Veamos, primero, el efectivo que recibiremos vendiendo una l/ de 100 ptas. a $1/2$ % daño y pagando 1 ‰ de corretaje.

Nominal			Ptas.	100
Menos { Recambio $1/2$ % daño..................	Ptas.	0'50	»	
Corretaje 1 ‰ (o 0'10 %).............	»	0'10	»	0'60
Efectivo de una l/ de 100 ptas. por cambio y corretaje..........			Ptas.	99'40

Diremos ahora:

S. Si para cobrar 99'40 ptas. ef. hemos de librar una l/ de 100 ptas. n.,
P. » » 4026'35 » » deberemos » » » » x » »

$$99'40 : 4026'35 :: 100 : x = 4050'65 \text{ ptas.},$$

valor nominal de la l/ resaca que libraremos para el reembolso. Tenemos, pues, que si a las cantidades anteriores añadimos el $1/2$ % s/ Ptas. 4050'65 por el recambio a daño y el 1 ‰ por el corretaje s/ la misma cantidad, la suma dará el nominal de la resaca, ptas. 4050'65.

En efecto:

Suma a reembolsar	Ptas.	4026'35
Recambio $1/2$ % d.º s/ Ptas. 4050'65..................	»	20'25
Corretaje 1 ‰ s/ Ptas. 4050'65......................	»	4'05
Nominal de la resaca librada............	Ptas.	4050'65

Explicado el modo de hacer las operaciones, extendamos la *Cuenta de resaca.*

CUENTA DE RESACA de una primera de cambio de **pesetas cuatro mil**, *girada en Valencia en 20 de mayo de 1919 por don Eduardo Lozano, a 8 d/v., o/. R. Sanllehi, de Gerona, y orden Morató, Busquéts y C.ª, de Barcelona, que ha sido protestada por falta de aceptación y pago, según testimonio que se acompaña, ante el Notario D. Cayo Cardellach, a saber:*

Principal de la l/ protestada............................	*Ptas.*	4000
Coste de los protestos......................................	»	12'75
Comisión $^1/_4$ % *s/ Ptas.* 4000...........................	»	10
Timbre para el reembolso..................................	»	2
Gastos de correspondencia................................	»	1'50
Timbre móvil para la cuenta de resaca..................	»	0'10
	Ptas.	4026'35
Recambio $^1/_2$ % *daño s/ el nominal de la l/ resaca*........	»	20'25
Corretaje 1 $^0/_{00}$ *s/ id. íd.*..................................	»	4'05
Total..........	*Ptas.*	4050'65

de cuya cantidad, **cuatro mil cincuenta pesetas, sesenta y cinco céntimos,** *me reembolso en una primera de cambio que he extendido hoy, a la orden de D. José Soto y León y a cargo de mis cedentes, los Sres. Morató, Busquéts y C.ª, de Barcelona.*

Gerona, 15 *de junio de* 1919.

José Dalmau Carles.

Como corredor de número que soy de esta plaza, certifico que el cambio corriente de hoy s/ Barcelona, es al tipo de medio por ciento daño.

Gerona, 15 *de junio de* 1919.

Ricardo Gómez

Si la resaca se negociase a beneficio, que es muy difícil por la poca aceptación que tiene una letra de estas condiciones, el tanto % de cambio se añadiría al efectivo de 100 al calcular el nominal de la resaca. Cuando el cambio está a beneficio, todo lo más las resacas alcanzan, generalmente, el cambio a la par.

Sistema monetario español

Unidad monetaria .... La peseta, de 100 céntimos.
Monedas efectivas .... (Véase el número 277.)

Circulan, además, algunas monedas de plata y oro de acuñación anterior, cuyo número va disminuyendo cada día.

Islas de Cuba y Puerto Rico

Rige, todavía, el mismo sistema monetario que en nuestra península; pero la moneda que circula es de procedencia española, mejicana y de los Estados Unidos. Se cuenta, generalmente, por pesos fuertes o duros.

La *onza* de oro se admite por 17 duros españoles; el *duro mejicano* = 8 reales = 5'41 pesetas. El duro se divide en 8 reales de 34 maravedises; el *real* se divide en 4 *cuartillos* = 0'66 pesetas.

Islas Filipinas

Se cuenta por duros y centavos. Circulan las monedas siguientes: *De oro:* El *doblón* = 4 duros; el *escudo* = 2 duros; el *escudillo* = 1 duro. *De plata:* las piezas de 50 *centavos*, de 10 *centavos* y de 2 *centavos*.

Monedas, pesas y medidas usadas en las naciones más importantes y su equivalencia con las españolas

ALEMANIA

Unidad monetaria. — *El marco*, o *reichsmarc*, de 100 céntimos (*phennings*), que equivale a 1'23 pesetas.

Monedas efectivas

De oro

La *doble corona*,	de 20	marcos;	ley, 900	milésimas;	peso, 7'964954	gramos.
La *corona*,	» 10	»	» 900	»	» 3'98248	»
La *pieza*,	» 5	»	» 900	»	» 1'99124	»

De plata

La pieza de	5	marcos;	ley, 900	milésimas;	peso, 27'775	gramos.
La » »	2	»	» 900	»	» 13'887	»
La » »	1	»	» 900	»	» 6'943	»
La » »	0'50	»	» 900	»	» 3'471	»

De níquel. — De 10 y de 5 *phennings*.

De bronce. — De 2 y de 1 *phenning*.

Pesas y medidas

El sistema métrico decimal, en esta forma:

Unidad de peso. — El kilogramo (2 libras Zollverein); *Neulot* = 1 decagramo; *phund* = $^1/_2$ Kg.; *centner* (quintal) = 50 Kgs.; *tonne* = 1000 Kgs.

Medidas de longitud. — *Stab* = 1 metro; *Kette* = 1 decímetro; *neuzoull* = 1 centímetro; *strich* = 1 milímetro.

Medidas de capacidad. — *Kubit-stab* (metro cúbico); *kanne* (litro); *fass* (hectolitro); *neuscheffel* (medio hectolitro).

Medidas de superficie. — *Quadrat-stab* (metro cuadrado).

Medida itineraria. — *Mille* (milla) = 7500 metros.

AUSTRIA HUNGRÍA

UNIDAD MONETARIA. — *El florín*, de plata, de 100 céntimos (*Kreutzers*), que equivale a 2'47 pesetas.

MONEDAS EFECTIVAS

De oro

El ducado;	ley, 986 milésimas;	peso, 3'490 gramos	= 11'85 pesetas.		
La pieza de 8 florines;	» 900 »	» 6'452 »	= 20 »		
» » » 4 »	» 900 »	» 3'226 »	= 10 »		

De plata

El doble florín;	ley, 900 milésimas;	peso, 24'691 gramos.	
El florín;	» 900 »	» 12'345 »	
El $^1/_4$ de florín;	» 520 »	» 5'341 »	defectuosas.
La pieza de 20 Kreutzers;	» 500 »	» 2'666 »	defectuosas.
» » » 10 »	» 400 »	» 1'333 »	defectuosas.

De cobre. — Piezas de 4, de 1 y de $^1/_2$ *Kreutzer.*

PESAS Y MEDIDAS. — Está oficialmente admitido el sistema métrico decimal.

FRANCIA

UNIDAD MONETARIA. — El *franco*, de 100 céntimos = 1 peseta.

MONEDAS EFECTIVAS: *De oro.* — Piezas de 100, 50, 20, 10 y 5 francos.

De plata. — Piezas de 5, 2, 1, 0'50 y 0'20 francos.

De bronce.—Piezas de 10, 5, 2 y 1 céntimos de franco, tanto en ley como en el peso, como el moderno sistema monetario español.

PESAS Y MEDIDAS.—El sistema métrico decimal.

BÉLGICA, SUIZA E ITALIA

UNIDAD MONETARIA. — El *franco*, de igual equivalencia que el francés. En Italia se llama *lira.*

Las demás monedas de oro, plata y bronce, como en Francia.

PESAS Y MEDIDAS. — Las del sistema métrico decimal.

INGLATERRA

UNIDAD MONETARIA. — La *libra esterlina* (£), que se divide en 20 *chelines* o sueldos, y el chelín, en 12 *peniques* o dineros.

MONEDAS EFECTIVAS

De oro

El *soberano* o £;	ley, 0'916 $^2/_3$;	peso, 7'988 gramos	= 25'20 pesetas.
El *medio soberano;*	» 0'916 $^2/_3$;	» 3'994 »	= 12'60 »

De plata

La *corona*	de 5 chelines;		ley, 0'925;	peso, 28'276 gramos.
La $^1/_2$ *corona,*	» 2 »	6 pqs.;	» 0'925;	» 14'138 »
El *florín,*	» 2 »		» 0'925;	» 11'310 »
El *chelín,*	»	12 »	» 0'925;	» 5'655 »
El $^1/_2$ *chelín,*	»	6 »	» 0'925;	» 2'828 »
La pieza,	»	4 »	» 0'925;	» 1'885 »
» »	»	3 »	» 0'925;	» 1'414 »

De bronce. — El *penique, el medio penique* y el $^1/_4$ *de penique* (facthing).

PESAS Y MEDIDAS

Es permitido, desde 29 de julio de 1864, el uso del sistema métrico decimal; no obstante, es casi general el uso de las pesas y medidas antiguas, excepto en la expresión de los datos de los trabajos científicos, para lo cual se emplean las unidades métricas.

Longitud. — La unidad es la *yarda imperial*, de 3 pies (*feet*), de 12 pulgadas (*inches*) = 0'9144 metros.

El *fathom* = 2 yardas imperiales = 1'829 metros.
El *pole* = 5 $^{1}/_{2}$ yardas = 5'029 metros.
El *chain* = 4 poles = 20'116 metros.
El *firlong* = 40 poles = 201'164 metros.
35 yardas = 32 metros.

Itinerarias. — La *milla* común = 5000 pies = 1523'97 metros.

Superficie. — La *yarda cuadrada* (square yard) = 0'8360971 metro cuadrado; el *rood* cuadrado = 30 $^{1}/_{4}$ yardas cuadradas = 25'2919 metros cuadrados. — *Para superficies agrarias.* — El *acre* = 4 *roods* = 160 *roods* cuadrados = 4840 yardas cuadradas = 40'4671 áreas.

Volumen. — La *yarda cúbica.* = 0'7645134 metro cúbico.

Capacidad para líquidos. — El *gallón imperial* = 4'543458 litros; el *barril* de 36 gallones = 163'56 litros; el *cuarto* (2 pintes) = 1'13587 litros; el *pinte* ($^{1}/_{8}$ de gallón) = 0'56793 litros.

Para áridos. — La unidad es el *bushel imperial* de 8 gallones; el *sak* = 3 bushels; el *quarter* = 8 bushels; el *chaldron* = 10 saks.

1 bushel = 36'348 litros; 10 quarters = 29'078 hectolitros.

Pesas. — El *ton* (tonelada de 20 quintales) = 1016 kilogramos; el *centweight* (quintal) = 112 libras = 50 $^{3}/_{4}$ kilogramos.

El *quarter* = 28 libras; la libra = 16 onzas; la onza = 16 *dracmas*.
La libra = 0'4535 kgs.; la onza = 0'0283 kgs.; el dracma = 0'00177 kgs.

PORTUGAL

Unidad monetaria. — El *rei*, que viene a valer $^{1}/_{2}$ céntimo de peseta; moneda imaginaria. La pieza acuñada de menos valor es la de 3 reis (bronce). En los cambios, se toma como unidad el *milréi* (1000 reis); 1000 *milréis*, o un millón de reis, se llama *conto*, y 1000 contos, un *conto de contos*.

Monedas efectivas

De oro

La *corona*	de 10 milréis;	ley, 0'916 $^{2}/_{3}$;	peso, 17'735 gramos	= 56	ptas.
La $^{1}/_{2}$ *corona*,	» 5 »	» 0'916 $^{2}/_{3}$;	» 8'868 »	= 28	»
El $^{1}/_{5}$ de *corona*,	» 2 »	» 0'916 $^{2}/_{3}$;	» 3'574 »	= 11'20	»
El *milréis*	» 1 »	» 0'916 $^{2}/_{3}$;	» 1'774 »	= 5'60	»

Como que Portugal, más que nación independiente, viene a ser una colonia inglesa, la moneda de oro de más circulación es la libra esterlina, por valor de 4500 reis, declarada de curso legal por la ley de 31 de enero de 1851.

De plata

La pieza de 5 *tostones*,	o 500 reis;	ley 0'916 $^{2}/_{3}$;	peso, 12'50	gramos.
La » » 2 »	o 200 »	» 0'916 $^{2}/_{3}$;	» 5	»
La » » 1 *tostón*,	o 100 »	» 0'916 $^{2}/_{3}$;	» 2'50	»
La » » $^{1}/_{2}$ »	o 50 »	» 0'916 $^{2}/_{3}$;	» 1'25	»

De bronce. — Piezas de 20, de 10, de 5 y de 3 reis.

Circulan monedas españolas de plata y oro, pero con gran descuento.

En los comercios, ajustan la cuenta a razón de 44 a 46 reis por un real español u 880 reis por duro. Este último cambio es el señalado por las Compañías portuguesas de ferrocarriles.

Pesas y medidas. — Tiene admitido el sistema métrico decimal desde 1860; su uso es obligatorio desde 1863.

HOLANDA

Unidad monetaria. — El *florín*, dividido en 100 céntimos = 2'10 pesetas.

Monedas efectivas

De oro

El *Guillermo*, de 10 florines; ley, 0'900; peso, 6'729 gramos.

De plata

La pieza de 2 1/2 florines;	ley,	0'945;	peso,	25 gramos.
La » » 1 florín;	»	0'945;	»	10 »
La » » 1/2 »	»	0'945;	»	5 »

De bronce. — Piezas de 2'50 céntimos, de 1 céntimo y 1/2 céntimo.

Pesas y medidas

Desde 1816, admite el sistema métrico decimal, aunque con diferente nomenclatura, puesto en uso en 1821. Las palabras kilogramo, hectogramo, decagramo, gramo, decigramo, se cambian, respectivamente, por estas: *pond*, *ons*, *lood*, *wgtje*, *korrel*.

DINAMARCA, SUECIA y NORUEGA

Los tres reinos tienen igual sistema monetario.

Unidad monetaria. — La *corona* (krona) de 100 ore (céntimos) = 1'39 ptas.

Monedas efectivas

De oro

La pieza de 20 *coronas;*	ley,	0'900;	peso,	8'960 gramos.
La » » 10 »	»	0'900;	»	4'480 »
La » » 5 »	»	0'900;	»	2'240 »

De plata

La pieza de 2 *coronas;*	ley,	0'900;	peso,	15 gramos.
La » » 1 »	»	0'900;	»	7'500 »
La » » 50 *ore;*	»	0'600;	»	5 »
La » » 40 »	»	0'600;	»	4 »
La » » 25 »	»	0'600;	»	2'420 »
La » » 10 »	»	0'400;	»	1'450 »

De bronce. — Piezas de 5, 2 y 1 ore.

Pesas y medidas

En Dinamarca, es obligatorio el sistema métrico decimal, desde 1861. Igualmente en Suecia y Noruega, desde 1881.

RUSIA

Unidad monetaria. — El *rublo* de plata de 100 *copecks* = 4 pesetas.

Monedas efectivas

De oro

El 1/2 *imperial*, de 5 rublos;	ley	0'916 2/3;	peso,	6'545 gramos.
El nuevo *imperial*, de 10 »	»	0'916 2/3;	»	13'090 »

De plata

El *rublo*, nueva acuñación; ley, 0'900; peso, 20 gramos.

La pieza de 50 *copecks*, nueva acuñación;	ley,	0'900;	peso	10 gramos.
La » » 25 » »	»	0'900;	»	5 »

Circulan, también, piezas de 20, 15, 10 y 5 copecks, a la ley de 0'500.

De bronce. — Piezas de 5, 3, 1, 0'50 y 0'25 copecks.

Pesas y medidas principales

Longitud. — El pie = 0'3049 metros.
Superficie. — El *dessättn* = 2400 sascheen cuadrados = 109'25 áreas.
Volumen. — El *sascheen cúbico* = 9'71215 metros cúbicos.
Capacidad para áridos. — El *tschetwert* = 209'907 litros.
Para líquidos. — El *vedro* = 12'3 litros.
Pesos.— El *pud* = 16'381 kilogramos.

ESTADOS UNIDOS (América del Norte)

Unidad monetaria. — El *dollar* (peso), de 100 centavos = 5'18 pesetas.

MONEDAS EFECTIVAS

De oro

La *doble águila*, de	20	dollars; ley,	0'900; peso,	33'436	gramos.
El *águila*	» 10	» »	0'900; »	16'718	»
La $^1/_2$ *águila*,	» 5	» »	0'900; »	8'359	»
La pieza,	» 3	» »	0'900; »	5'015	»
$^1/_4$ de *águila*	» 2 $^1/_2$	» »	0'900; »	4'179	»
El *dollar*,			0'900; »	1'672	»

De plata

El *dollar nuevo;*	ley,	0'900; peso,	26'729	gramos.
El $^1/_2$ *dollar nuevo;*	»	0'900; »	12'500	»
El $^1/_4$ » »	»	0'900; »	6'250	»
El $^1/_5$ » »	»	0'900; »	5	»
El $^1/_{10}$ » »	»	0'900; »	2'500	»

De níquel. — Piezas de 5 y 3 centavos.

De bronce. — Piezas de 2 y 1 centavo.

PESAS Y MEDIDAS. — Se usa, generalmente, el sistema inglés, siendo permitido el métrico decimal.

Cambio extranjero

584. Definición. — Cambio *extranjero* o *exterior* es el que se verifica entre plazas de naciones diferentes.

585. Cómo se verifica el cambio entre dos plazas de distintas naciones. — El cambio, entre dos plazas de diferentes naciones, se verifica dando la una un número *fijo* de sus monedas por un número *variable* de la otra.

586. Cómo cambia España con las demás naciones. — Desde 1887, las plazas españolas cambian con las de Francia, Italia, Suiza y Bélgica, a la par, a un tanto p. % de daño o de beneficio, debido a la semejanza de sus sistemas monetarios. Con las demás naciones, cambia dando más o menos pesetas por una moneda extranjera, la cual, generalmente, es la unidad monetaria del país.

España cambia con Inglaterra dando 25 ptas. y más o menos céntimos por 1 libra esterlina; 1 pta. y más o menos céntimos por 1 marco imperial, con Alemania; 2 ptas. y más o menos céntimos por un florín, con Austria; etc. Antes de 1887, por R. D. de 18 de febrero de 1847, España cambiaba con las demás naciones dando 1 duro, *cantidad fija*, por un *número variable* de monedas extranjeras.

Si decimos que el cambio entre Madrid y Viena está a 2'30, significa que cada florín en letra nos cuesta 2'30 ptas. efectivas si somos compradores, o cobramos dicha cantidad si somos vendedores.

Si entre Madrid y París está a 2'75, queremos decir que cada 100 francos en letra nos cuestan 102'75 ptas. efectivas si somos compradores, o cobramos dicha cantidad si somos vendedores.

Si entre Barcelona y Londres está a 25'60, significa que 1 libra esterlina (£ E.) en letra nos cuesta 25'60 ptas. en efectivo si somos compradores, o cobramos dicha cantidad si somos vendedores.

Si entre Barcelona y Berlín está a 1'35, significa que por 1 marco en 1/ cobraremos o pagaremos 1'35 ptas. efectivas.

Si entre Madrid y La Haya está a 2'20, indica que por 1 florín en letra cobraremos o pagaremos 2'20 ptas. efectivas.

Si entre Madrid y Lisboa está a 5'75, indica que una letra de 1000 reis nos cuesta 5'75 ptas. si somos compradores, o que cobraremos 5'75 ptas. por cada 1000 reis en 1/ si somos vendedores.

Si entre Barcelona y San Petersburgo está a 4'30, quiere decir que por 1 rublo en 1/ cobraremos o pagaremos 4'30 pesetas. Etc., etc.

587. Cuándo el cambio extranjero está alto y cuándo, bajo. — El cambio extranjero *está alto* cuando está *sobre la par*, y *bajo*, en el caso contrario.

A las naciones de cambio *cierto* o *fijo*, les conviene el cambio alto, y a las de cambio *incierto* o *variable*, bajo. Asimismo, conviene el cambio *alto* a los libradores o vendedores de letras, y *bajo*, a los tomadores o compradores.

588. Cómo sabremos el estado del cambio entre una plaza de nuestro país y otra extranjera.— Consultando la sección comercial de los diarios de la plaza de nuestro país, o los *boletines de cambios corrientes* formalizados por el *Colegio de Corredores*.

589. Casos que pueden presentarse en las cuestiones sobre cambio extranjero. — Pueden presentarse tres cuestiones: *hallar el efectivo, hallar el nominal* y *hallar el cambio*.

590. Cómo se resuelven.—Todos estos casos se resuelven por medio de la regla de tres y también, por la conjunta.

Para resolverlos por regla de tres, puede darse la siguiente proporción:

Una moneda de la nación con la cual se cambia, es a las pesetas que nos cuesta o cobramos, al cambio estipulado (según que seamos compradores o vendedores), como el número de monedas extranjeras que forman el nominal de la letra, es a las pesetas que nos costará o cobraremos. Si concurren gastos, el segundo término de la proporción ha de estar modificado por estos gastos.

EJEMPLOS:

HALLAR EL EFECTIVO

1.º *¿Cuánto nos costará una l/ s/ París, de francos* 2000, *a* 8 *d/v, tomada al cambio de* 2'80 % *b.º?*

Solución razonada

S.	Si una l/ de	100	francos	nos cuesta	102'80	ptas.	efectivas,
P.	» »	2000	»	nos costará	x	»	»

$$100 : 2000 :: 102'80 :: x = 2056 \text{ ptas.}$$

Resolución por la fórmula general

Como cambiamos con las plazas francesas como si fuesen interiores o nacionales, la proporción será, según hemos dicho al tratar del cambio nacional:

$$100 : 102'80 :: 2000 : x = 2056 \text{ pesetas.}$$

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas.		2000 francos.

$$x \text{ ptas.} = 2000 \text{ francos}$$
$$100 \text{ francos} = 102'80 \text{ ptas.}$$

$$x = \frac{2000 \times 102'80}{100} = 2056 \text{ ptas. efectivas.}$$

HALLAR EL NOMINAL

2.º *Una letra s/ París, a* 8 *d/v, tomada al cambio de* 2'80 % *b.º, importó* 2056 *pesetas. ¿De cuánto era dicha l/?*

Solución razonada

S.	Si con	102'80	ptas. ef.	compramos	una l/ de	100	francos,
P.	»	2056	» »	compraremos	» »	x	»

$$102'80 : 2056 :: 100 : x = 2000 \text{ francos.}$$

Resolución por la fórmula general

$$100 : 102'80 :: x : 2056;\ x = 2000 \text{ francos}$$

Por conjunta

B.	R.	P.
x francos		2056 ptas.

$$\begin{array}{l} x \text{ francos} = 2056 \text{ ptas.} \\ 102'80 \text{ ptas.} = 100 \text{ francos} \end{array}$$

$$x = \frac{2056 \times 100}{102'80} = 2000 \text{ francos.}$$

HALLAR EL CAMBIO

3.º *Una letra de 2000 francos, s/ París, a 8 d/v, costó 2056 ptas. ¿A qué cambio fue tomada?*

Solución razonada

S. Si una l/ de 2000 francos nos cuesta 2056 ptas.
P. » » 100 » » costará x »

$$2000 : 100 :: 2056 : x = 102'80 \text{ ptas.}$$

Si la hubiésemos tomado a la par, una l/ de 100 francos hubiera costado 100 pesetas, y como nos cuesta 102'80, el exceso, 2'80, es el cambio: luego fué tomada al cambio de 2'80 % b.º

Resolución por la fórmula general

$$100 : 100 \pm x :: 2000 : 2056$$

$$100 \pm x = 102'80 \text{ y } x = 2'80, \text{ cambio b.º}$$

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. cambio		100 francos en l/

$$\begin{array}{l} x \text{ ptas. ef.} = 100 \text{ francos en l/} \\ 2000 \text{ francos en l/} = 2056 \text{ ptas. ef.} \end{array}$$

$$x = \frac{100 \times 2056}{2000} = 102'80 \text{ ptas.} = 2'80 \text{ ptas. cambio.}$$

HALLAR EL EFECTIVO

4.º *¿Cuánto nos costará una l/ de 120 £ E., s/ Londres, tomada al cambio de 25'40?*

Solución razonada

S. Si una l/ de 1 £ E. nos cuesta 25'40 ptas.,
P. » » 120 » » » costará x »

$$1 : 120 :: 25'40 : x = 3048 \text{ pesetas.}$$

Resolución por la fórmula general

$$1 : 25'40 :: 120 : x = 3048 \text{ ptas.}$$

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas.		120 £ E.

$$\begin{array}{l} x \text{ ptas.} = 120 \text{ £ E.} \\ 1 \text{ £ E.} = 25'40 \text{ ptas.} \end{array}$$

$$x = \frac{120 \times 25'40}{1} = 3048 \text{ pesetas.}$$

HALLAR EL NOMINAL

5.º *Empleando* 3048 *ptas. en l/ s/ Londres tomada al cambio de* 25'40, *¿de cuánto será la l/ que podremos comprar?*

Solución razonada

S. Si con 25'40 ptas. ef. compramos una l/ de 1 £ E.,
P. » 3048 » » compraremos » » x »

25'40 : 3048 : : 1 : x = 120 £ E.

Resolución por la fórmula general

1 : 25'40 : : x : 3048; x = 120 £ E. en l/.

Por conjunta

B.	R.	P.
x £ E. en l/.		3048 ptas. ef.

x £ E. en l/. = 3048 ptas. ef.
25'40 ptas. ef. = 1 £ E.

$$x = \frac{3048}{25'40} = 120 \text{ £ E.}$$

HALLAR EL CAMBIO

6.º *Una letra de* 120 £ E., *sobre Londres, costó* 3048 *ptas. ¿A qué cambio se tomó?*

Solución razonada

S. Si una l/ de 120 £ E. costó 3048 ptas.,
P. » » 1 » costará x »

120 : 1 : : 3048 : x = 25'40 ptas. cambio.

Resolución por la fórmula general

1 : x : : 120 : 3048; x = 25'40 ptas. cambio

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. cambio		1 £ E.

x ptas. cambio = 1 £ E.
120 £ E. = 3048 pesetas.

$$x = \frac{3048}{120} = 25'40 \text{ ptas. cambio.}$$

591. Cómo se resuelven los problemas de cambio extranjero cuando concurren gastos. — Cuando concurren gastos, estos problemas se resuelven por medio de la regla de tres que antes hemos dado (**590**) y también, por la conjunta.

Si el problema se resuelve por conjunta, debe tenerse presente que la relación de los gastos se coloca de menor a mayor si los gastos tienden a aumentar el resultado, y de mayor a menor, si tienden a disminuirlo.

EJEMPLOS:

HALLAR EL VALOR EFECTIVO

1.º *¿Cuánto costará una l/ sobre Londres, de* 300 £ *E., tomada por orden de mi corresponsal en Santander al cambio de* 25'75, *pagando* 1 ‰ *de corretaje y contando nuestra comisión de* $^1/_4$ %?

Solución razonada

L/ de 300 £ E., al cambio de 25'75	Ptas.	7725
Corretaje 1 $^{o}/_{oo}$ s/ ptas. 7725	»	7'72
Comisión $^{1}/_{4}$ % s/ » »	»	19'31
Nos costará	Ptas.	7752'03

Resolución por la fórmula general

Modificando el segundo término de la proporción por gastos, tendremos:

Valor de 1 £ E. en l/ por cambio	Ptas.	25'75
Corretaje 1 $^{o}/_{oo}$ s/ ptas. 25'75	»	0'02575
Comisión $^{1}/_{4}$ % s/ » »	»	0'064375
Valor de 1 £ E. en l/ por cambio y gastos,	Ptas.	25'840125

Luego la proporción será:

1 : 25'840125 :: 300 : x = 7752'03 ptas.

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas.		300 £ E.

x ptas. = 300 £ E.
1 £ E. = 25'75 ptas.
100 ptas. = 100'35 ptas. por comisión y corretaje.

$$x = \frac{300 \times 25'75 \times 100'35}{100} = 7752'03 \text{ pesetas.}$$

Obsérvese que hemos resuelto el problema anterior siendo compradores. Si hubiésemos vendido o negociado la letra mencionada, para hallar el líquido a recibir, el problema hubiera sido como sigue:

	L/ de 300 £ E. al cambio de 25'75		Ptas. 7725
Deducir: {	Corretaje 1 $^{o}/_{oo}$ s/ ptas. 7725	Ptas. 7'72	
	Comisión $^{1}/_{4}$ % s/ » »	» 19'31	27'03
	Efectivo a recibir		Ptas. 7697'97

Resolución por la fórmula general

Vendiendo una l/ de 1 £ E., cobramos			Ptas. 25'75
Menos { corretaje 1 $^{o}/_{oo}$ s/ ptas. 25'75...	Ptas. 0'02575		
comisión $^{1}/_{4}$ % s/ » »	» 0'064375	»	0'090125
Líquido de 1 £ E. en l/ por cambio y gastos			Ptas. 25'659875

Luego la proporción sería:

1 : 25'659875 :: 300 : x = 7697'97 ptas.

Por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. ef.		300 £ E. en l/

x ptas. = 300 £ E.
1 £ E. = 25'75 ptas.
100 ptas. = 99'65 ptas. por comisión y corretaje.

$$x = \frac{300 \times 25'75 \times 99'65}{100} = 7697'97 \text{ pesetas.}$$

HALLAR EL NOMINAL

2.° *Tengo en mi poder* 10000 *ptas. de mi corresponsal en Albacete, y recibo orden de remesarle dicha cantidad en l/ s/ Londres, que tomaré al cambio de* 25'50, *pagando* 1 $^{o}/_{oo}$ *de corretaje y retirando mi comisión de* $^{1}/_{4}$ %. *¿De cuántas £ E. será la letra que podré adquirir?*

Solución razonada

Efectivo en mi poder	10000 ptas.
Deduciendo $^1/_4$ % comisión s/ 10000 ptas........	25 »
Líquido a invertir en l/	9975 ptas.
1 £ E. en l/ cuesta por cambio	Ptas. 25'50
Más 1 $^0/_{00}$ corretaje s/ ptas. 25'50	» 0'0255
1 £ E. en l/ costará..........	Ptas. 25'5255

S. Si con 25'5255 ptas. compro 1 £ E. en l/,
P. » 9975 » compraré x » »

25'5255 : 9975 :: 1 : x = 390'785 £ E. en l/

Resolución por la fórmula general

Líquido a invertir en l/	Ptas. 9975
1 £ E. en l/ cuesta por cambio................	Ptas. 25'50
Más 1 $^0/_{00}$ corretaje s/ ptas. 25'50	» 0'0255
Valor de 1 £ E. en l/	Ptas. 25'5255

1 : 25'5255 :: x : 9975; x = 390'785 £ E. en l/

Por conjunta

B.	R.	P.
x £ E. en l/		9975 ptas. ef.

x £ E. = 9975 ptas.
100'10 ptas. = 100 » (corretaje).
25'50 » = 1 £ E.

$$x = \frac{9975 \times 100}{100'10 \times 25'50} = 390'785 \text{ £ E. en l/.}$$

HALLAR EL CAMBIO

3.º *Tenía en mi poder* 10000 *ptas. de mi corresponsal en Albacete, y recibí orden de remesarle dicha cantidad en l/ s/ Londres tomada mediante* 1 $^0/_{00}$ *de corretaje y retirando mi comisión de* $^1/_4$ %. *La l/ tomada fué de* 390'785 £ *E.: ¿a qué cambio se hizo la operación?*

Resolución

B.	R.	P.
x ptas. cambio		1 £ E. en l/

x ptas. ef. = 1 £ E. en l/.
390'785 £ E. = 10000 ptas.
100'35 ptas. (com.ⁿ y corretj.) = 100 ptas. ef.

$$x = \frac{10000 \times 100}{390'785 \times 100'35} = 25'50 \text{ ptas., cambio.}$$

592. Observación importante para la determinación del cambio por medio de la regla conjunta, en los problemas sobre cambio extranjero en que concurren gastos. — Debe tenerse presente que, después de preparada la conjunta hasta incluir el efectivo de la letra, se forma esta igualdad: *ciento más todos los gastos por ciento igual a ciento*, si es compra de letra; y *ciento menos todos los gastos por ciento igual a ciento*, si es venta de letra.

Cambio indirecto

593. Objeto del cambio indirecto. — El cambio indirecto tiene por objeto remitir fondos a una plaza o sacarlos de la misma, sirviéndonos de una o más plazas intermedias.

Esto tiene lugar cuando no hay cambio abierto entre dos plazas; cuando guerras, inundaciones u otras causas imposibilitan los negocios, y cuando el medio indirecto es más ganancioso que el directo.

Las operaciones de cambio indirecto pueden verificarse entre plazas de una misma nación y entre plazas de naciones diferentes. Las plazas intermedias pueden ser una, dos o más, si bien en la práctica generalmente es una sola.

594. Cómo se resuelven los problemas sobre cambio indirecto. — Estos problemas se resuelven haciendo para cada plaza el cálculo aritmético a que da lugar la operación que en dicha plaza se verifica.

EJEMPLOS: 1.º *Desde Madrid quiero remitir a París* 7500 *francos, y en vez de tomar en ésta, l/ s/ la capital de Francia, hallo más ventajoso ordenar a mi corresponsal en Barcelona que tome en esta plaza l/ s/ París al cambio de* 2'20 *b.º, autorizándole, asimismo, para que se reembolse girando una l/ a m/s a* $^1/_4$ % *daño y haciéndome remesa de la letra tomada s/ París. Mi citado corresponsal cobra por estas dos operaciones* $^1/_4$ % *de comisión y paga* 2 *corretajes a* 1 ‰*: ¿cuánto me cuesta la letra de francos* 7500 *que recibo?*

Veamos, primero, cuánto me cuesta la l/ en Barcelona por cambio y gastos:

	Ptas.	*Frs. Ptas.*	*Frs. Ptas.*
L/ de 7500 francos al cambio de 2'20 b.º	7665	= (100 : 102'20	: : 7500 : x).
Comisión $^1/_4$ % s/ 7665	19'16		
Corretaje 1 ‰ s/ Ptas. 7665	7'66		
Mi corresponsal en Barcelona ha de reembolsarse ptas.	7691'82, que lo hará en l/ a m/c a $^1/_4$ % d.º		

Veamos ahora de cuánto será la l/ que librará a m/c para reembolsarse.

Vendiendo 100 ptas. en l/, cobrará por cambio 100 — 0'25 = 99'75 ptas. efectivas; menos 1 ‰ (o 0'10 p. %) de corretaje, son 99'65 ptas. efectivas. Luego la cuestión será:

S. Si para cobrar 99'65 ptas. ef. ha de librar una l/ de 100 ptas.,
P. » » 7691'82 » » » » » » x »

99'65 : 7691'82 : : 100 : x = 7718'83 ptas., coste de nuestra remesa de francos 7500 sobre París por mediación de Barcelona.

Resolución por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. en Madrid		7500 francos en París

x ptas. en Madrid = 7500 fr. en París.
100 fr. = 102'3022 ptas. en Barcelona (cambio y corretaje).
100 ptas. = 100'25 » (comisión).
100 » = 100'35 » (cambio y corretaje.)

$$x = \frac{7500 \times 102'3022 \times 100'25 \times 100'35}{100 \times 100 \times 100} = 7718'83 \text{ ptas.}$$

2.º *Desde Barcelona, quiero retirar* 8000 *ptas. en poder de mi corresponsal en Madrid. Para ello, ordeno a Sánchez, de Valencia, gire s/ Madrid a* $^1/_2$ % *b.º, y yo libraré s/ Valencia a* $^1/_4$ % *d.º — Dando al de Valencia* $^1/_8$ % *de comisión y pagando dos corretajes a* 1 ‰ *cada uno, ¿cuánto me producirá esta operación indirecta?*

En Valencia, 8000 ptas. $^1/_2$ % b.º son	Ptas. 8040
Menos 1 ‰ corretaje s/ Ptas. 8000	» — 8
	Ptas. 8032
Menos $^1/_8$ % comisión s/ Ptas. 8000	» — 10
En poder de mi corresponsal en Valencia para reembolsarme	Ptas. 8022

Veamos, ahora, el efectivo de la l/ que libraré.

Librando una l/ de 100 ptas., cobro por cambio 100 — 0'25; menos 1 ‰ corretaje = 100 — 0'25 — 0'10 = 100 — 0'35 = 99'65. Luego la cuestión será:

S.	Si librando una l/ de	100 ptas.	recibo	99'65 ptas. efectivas,	
P.	» » »	8022 »	recibiré	x »	»

$$100 : 8022 :: 99'65 : x = 7993'92 \text{ ptas.}$$

Resolución por conjunta

B.	R.	P.
x ptas. en Barcelona		8000 ptas. en Madrid

x ptas. en Barcelona	= 8000	ptas. en	Madrid.
100 ptas.	= 100'40	» »	Valencia (por cambio y corretaje).
100 »	= 99'875	»	(por comisión).
100 »	= 99'65	»	en Barcelona (por cambio y corretaje).

$$x = \frac{8000 \times 100'40 \times 99'875 \times 99'65}{100 \times 100 \times 100} = 7993'92 \text{ pesetas.}$$

595. Qué debe tenerse presente en la resolución de estos problemas. — En la resolución de los problemas de cambio indirecto, debe tenerse presente:

1.º Que todo se reduce a convertir las monedas de una plaza a las de otra, por los cambios que cada una tiene con la plaza intermedia.

2.º Si el problema se resuelve por conjunta, cada término de las igualdades debe expresar las monedas pagadas o cobradas en la plaza respectiva.

3.º Si se trata de colocar fondos en una plaza, los gastos deben aumentar el resultado del problema; y si se trata de retirar fondos, deben disminuir dicho resultado, por lo que las igualdades de la conjunta deben colocarse de modo que produzcan en la conjunta el efecto conveniente.

Arbitrajes

596. Definición. — Llamamos *arbitrajes* a los cálculos que hace un comerciante o banquero, para determinar el medio más ventajoso de efectuar el pago de una deuda o el cobro de una cantidad, en una plaza distinta de aquélla en que reside. Otras veces, el comerciante o banquero se propone especular con el cambio de las letras, los fondos públicos y materias de oro y plata.

597. Arbitraje simple o directo. — El arbitraje se llama *simple* o *directo*, cuando comparamos el precio de un valor existente en una plaza con el de otro valor existente en otra plaza distinta.

598. Arbitraje compuesto o indirecto. — El arbitraje se llama *compuesto* o *indirecto*, cuando la comparación se verifica añadiendo a las dos plazas mencionadas otra u otras en las que existe el mismo valor, calculando así el medio más ventajoso de verificar la compra o realizar la venta.

Los arbitrajes indirectos carecen de la importancia comercial que algunos les atribuyen, ya porque muchas veces no es posible encontrar el papel que se necesita para realizar una operación calculada, ya porque otras veces el papel no reúne suficientes condiciones de garantía, etc.

Ejemplos de arbitraje directo

1.º *Nuestro corresponsal en Santander nos debe* 2500 *pesetas, y tratamos de averiguar cómo nos reintegraremos con más ventaja, esto es, si girando a su cargo y negociando la letra, o bien ordenándole que nos haga remesa tomando letra sobre la plaza de nuestra residencia.*

La plaza de nuestra residencia es Barcelona. En esta plaza, el papel s/ Santander, a 8 d/v, está, supongamos, al cambio de 1 % beneficio, y en Santander, el papel s/ Barcelona, a 8 d/v, se cotiza, por ejemplo, a $^1/_2$ % daño.

Como en Barcelona seremos vendedores, el cambio nos proporciona un beneficio de 1 %; en Santander, seríamos compradores, y el cambio a $^1/_2$ % daño sería a $^1/_2$ % beneficio para nosotros. Luego nos es más ventajoso librar a cargo de nuestro corresponsal, ya que obtenemos un beneficio de $^1/_2$ %.

2.º *Hemos de pagar* 2000 *francos en París, y queremos saber el medio más beneficioso, siendo Barcelona la plaza de nuestra residencia.*

En Barcelona, el papel s/ París a 8 d/v, está, supongamos, a 2'50 b.º, y en París, el papel s/ Barcelona se cotiza, supongamos también, a 0'98 d.º, es decir, a 1 % próximamente. Luego nos es más ventajoso que el de París libre a nuestro cargo, ya que ganamos 1'50 %.

3.º *Debemos a Londres* 100 £ *E., y tratamos de averiguar el medio más ventajoso de hacer el pago.*

En Barcelona, plaza de nuestra residencia, el papel s/ Londres está, por ejemplo, al cambio de 26'20, y en Londres, el papel s/ Barcelona se cotiza, supongamos, al cambio de 46.

Según esto, si en Barcelona tomamos l/ s/ Londres, nos costará 100 × 26'20 = 2620 pesetas.

Si el de Londres libra a nuestro cargo al cambio de 46 (46 peniques por 5 pesetas), la l/ será de 2608'70 ptas.

Luego nos conviene más este último medio, siempre y cuando, como en los demás casos, los gastos que puedan concurrir no destruyan el beneficio que resulta por razón del cambio.

599. Medios de que dispone el que desde una plaza comercial quiere situar fondos en otra, valiéndose o no de una plaza intermedia.—Si la plaza de nuestra residencia es Barcelona, y queremos colocar fondos en París, tenemos para ello varios medios, siendo los principales los siguientes:

1.º Tomar en Barcelona l/ s/ París.

2.º Ordenar que, desde París, giren a nuestro cargo.

3.º Comprar en Barcelona papel s/ Londres y remitirlo a París para su negociación.

4.º Comprar en Barcelona papel s/ Londres y remitirlo a esta plaza para que lo negocíen, y con el producto de esta operación tomar l/ s/ París y remitirla a esta plaza para satisfacer nuestro débito.

5.º Que el de Londres guarde el líquido de esta negociación, y pague el giro que hará a su cargo el de París.

6.º Que el de Londres atienda al giro que hará a s/c el de París, y que luego gire a n/c para reembolsarse.

Etc., etc.

Estos problemas, de poca aplicación práctica, se reducen a calcular el coste de la operación considerada en cada uno de los medios de que se dispone para realizarla, a fin de escoger el que más ventajas ofrezca. Se reducen, pues, a puras cuestiones de cambio nacional o extranjero, con o sin gastos, las que hemos estudiado ya en el lugar correspondiente.

Par intrínseca o monetaria

600. Definición.—Par intrínseca de una moneda es el valor del metal fino o puro que contiene (oro o plata) comparado con otra moneda. Para ello, hay que atender al peso y a la ley.

En España, se ha adoptado el oro como única base de compensación.

Así, la par intrínseca de la libra esterlina en francos es 25'221 francos; en pesetas, 25'20 pesetas. La par intrínseca del marco banco, en francos, es 1'2346 francos; en pesetas, 1'23 pesetas. La del dollar, en francos, es 5'183 francos, y en pesetas, 5'18 pesetas.

601. Determinación de la par intrínseca de una moneda. — Se halla primero el peso de su metal puro, multiplicando el peso de la moneda por su ley (**276**, *Fórm.* 2.ª), y luego se forma la siguiente proporción:

El peso del oro puro de una moneda : *al valor que esta moneda representa* : : *el peso del oro puro de la moneda cuya par se desea averiguar* : x.

Para mejor inteligencia de nuestros lectores, pondremos el ejemplo siguiente:

Hállese la par intrínseca de la libra esterlina, en pesetas. (Esto es, hallar la par intrínseca entre Inglaterra y España.)

Solución.—La £ pesa 7'988 gramos, y su ley es 0'916 $^2/_3$. El peso de su metal fino, es, pues, 7'988 × 0'91666 = 7'3222 gramos.

La pieza española de a 25 pesetas, cuya ley es 0'900, pesa 8'06451 gramos, y su metal puro es 8'06451 × 0'900 = 7'25805 gramos.

Luego tenemos la proporción siguiente:

Si 7'25805 gramos oro puro valen 25 pesetas, 7'3222 gramos oro puro valdrán x pesetas. Esto es:

$$7'25805 : 25 :: 7'3222 : x$$

$$x = 25'221 \text{ pesetas}$$

De consiguiente, la par intrínseca de la £, en pesetas, es 25'221 pesetas, a pesar de haber fijado el Gobierno 25'20, como se ve en el cuadro siguiente:

CAMBIOS FIJOS que rigen desde 1.º de julio de 1895 para el pago en el extranjero de todo servicio del Estado no convenido, con arreglo a lo dispuesto en la ley y Real orden de 24 y 27 de junio de dicho año.

(Par intrínseca con España)

NACIONES	MONEDAS EXTRANJERAS	Equivalencia en moneda española — Ptas.	Cts.
Alemania	Reich Mark de 100 pfennig	1	23
América inglesa	Dollar	5	25
Austria-Hungría	Florín de 100 kreutzers	2	47
Bélgica	Franco de 100 céntimos	1	
Brasil	Mil reis	2	83
Cochinchina francesa	Piastra de comercio	5	40
Colombia	Peso de oro	5	
Colonias inglesas	Veinte céntimos de plata Hong-Kong	0	95
Chile	Peso de 100 centavos	5	
Dinamarca	Krone de 100 ore	1	39
Egipto	Piastra de 40 paras	0	26
Estados Unidos de América	Dollar de 100 centavos	5	18
Finlandia (Rusia)	Markka	1	
Francia	Franco de 100 céntimos	1	
Grecia	Drachma de 100 lepta	1	
Haití	Gourdo	4	96
Indias inglesas	Roupia	2	38
Inglaterra	Libra esterlina	25	20
Italia	Lira de 100 céntimos	1	
Isla Mauricia (colonia inglesa)	Veinte céntimos	0	41
Japón	Yen de 100 sen	5	17
Méjico	Peso de 100 centavos	5	43
Mónaco	Franco de 100 céntimos	1	
Noruega	Krone de 100 ore	1	39
Países Bajos	Florín de 100 céntimos	2	10
Persia	Thoman de 100 schais	11	83
Perú	Sol de 10 dineros o 100 céntimos	5	
Portugal	Mil reis	5	60
República Argentina	Peso	5	
Rumanía	Ley de 100 Banis	1	
Rusia	Rublo de 100 kopeks	4	
Servia	Dinar de 100 paras	1	
Suecia	Krone de 100 ore	1	39
Túnez	Piastra	0	62
Turquía	Piastra	0	23
Uruguay	Piastra o peso	5	
Venezuela	Venezolano (peso)	5	

Cuentas corrientes sin interés

602. Definición. — *Cuenta corriente* es el estado demostrativo de las cantidades que una persona debe a otra y de las que ésta debe a la primera.

Por insignificante que sea el comercio que una casa realice, estas cuentas son de la mayor importancia, puesto que en ellas se consignan los valores de los géneros que el comerciante vende a su cliente y las cantidades que éste entrega a cuenta de lo que debe.

603. Debe y Haber. — El *Debe* y el *Haber* son las dos partes constitutivas y esenciales de toda cuenta corriente. Anotamos en el *Debe* las cantidades que entregamos a nuestro cliente y las que pagamos por orden y cuenta suyos; y anotamos en el *Haber* las cantidades que nos entrega a cuenta de su débito y las que paga por orden y cuenta nuestros.

De lo que se deduce, pues, que la diferencia entre el Debe y el Haber fija siempre la verdadera situación entre el comerciante y su cliente.

Cuando en el Debe de una cuenta anotamos una cantidad, se dice que la *cargamos o adeudamos en cuenta*. Si es en el Haber, se dice que la *acreditamos o abonamos en cuenta*.

604. Deudor y acreedor. — Llamamos *deudor* al que recibe dinero, género o cualquier otro efecto, y *acreedor*, al que lo entrega; o en otros términos: *deudor* es el que debe, y *acreedor*, aquél a quien se debe.

Si vendo géneros a Gómez, a 2 meses plazo, Gómez es el *deudor*, y yo el *acreedor*. Si Gómez me presta 1000 pesetas, yo soy el *deudor*, y Gómez el *acreedor*.

605. Valores de mi cuenta. — Son *valores de mi cuenta* los procedentes de operaciones verificadas por un corresponsal con arreglo a mis instrucciones, siendo *míos*, por consiguiente, los resultados. Si por éstos resulto debiendo a mi corresponsal, debo reintegrarle, en su plaza, la cantidad que resulte debiéndole; y si resulto acreedor, dicho corresponsal me acredita, en su plaza, la cantidad que me deba, sin otros gastos, para cuando yo verifique el reembolso.

606. Valores de su cuenta. — Son *valores de su cuenta* los que resulten de operaciones que hemos hecho por orden y cuenta de un corresponsal, siendo de *éste* los resultados. Si por éstos le resulto deudor, le pagaré, en mi plaza, la cantidad que le deba, y en el caso de que le resulte acreedor, él está obligado a pagar, en mi plaza, la cantidad que me deba.

Véase el siguiente modelo de una cuenta corriente sin interés.

Debe *D. Román Solita, su cuenta corriente con D. José González* Haber

FECHAS		CONCEPTOS	PTAS.	CTS.
1919	»			
Enero...	15	500 cartapacios **Puig** a 4 ptas. el 100..........	20	»
»	20	6 resmas papel rayado a 3 ptas. una	18	»
Febrero.	6	3 docenas manuscritos **Ortiz** a 10 ptas. docena..	30	»
»	18	4 1/2 » aritméticas **Segura** a 10'50 ptas. doc.ª	47	25
Marzo...	30	2 » cajas plumas **Eguren** a 0'75 ptas. caja.	18	»
Abril...	20	1 caja yeso	2	20
			135	45
Mayo...	1.º	Saldo a mi favor que pasa a cta./n.	97	70

FECHAS		CONCEPTOS	PTAS.	CTS.
1919				
Febrero.	16	Recibido a cta.	22	75
Marzo...	25	» »	15	
			37	75

Gerona, 1.º de mayo de 1919

S. E. u O.

J. González.

Cuentas corrientes con interés

607. Cuándo las cuentas corrientes se llaman con interés. — Las cuentas corrientes se llaman *con interés* cuando por los valores o cantidades que el uno entrega al otro, paga el que recibe un tanto por ciento convenido.

608. Cuentas corrientes con interés recíproco y con interés no recíproco. — Las cuentas corrientes son *con interés recíproco*, cuando ambas partes se pagan recíprocamente un mismo interés por las cantidades que se entregan; bien sean en metálico, letras, pagarés, mercaderías, etc. Son con interés *no recíproco*, cuando el interés que una parte paga a la otra es distinto del que ésta satisface a la primera.

609. Saldar una cuenta. — Saldar una cuenta es igualar la suma de los capitales del Debe con la de los del Haber, y la diferencia entre ambas sumas se llama *saldo*. Ambas sumas se igualan añadiendo el saldo a la menor.

610. Saldo deudor y saldo acreedor. — El *saldo* se llama *deudor*, cuando el Debe de una cuenta es mayor que su Haber, y *acreedor*, en el caso contrario, es decir, cuando el Haber es mayor que el Debe.

611. Liquidar una cuenta. — Liquidar una cuenta es proceder a la suma de los capitales deudores y acreedores, para saber si debemos o alcanzamos.

612. Métodos empleados para llevar las cuentas corrientes con interés. — Estos métodos son tres: el *directo o antiguo*, el *indirecto o moderno* y el *hamburgués o por escalas*.

Los tres métodos difieren en la manera de calcular los días de interés.

613. Qué debe tenerse presente para llevar estas cuentas. — Debe tenerse presente:

1.º Que el que recibe *debe* o es *deudor*, y el que entrega *acredita* o es *acreedor*.
2.º Que tienen igual significación las palabras *debe*, *débito* y *cargo*, como también las siguientes: *haber*, *crédito* y *data*.
3.º Las cantidades de *débito* se escriben en el lado izquierdo de la cuenta, y las de *crédito*, en el derecho.
4.º El producto de un capital por los días que le corresponden se designa con el nombre de *números*.
5.º Las entregas en metálico o en especie empiezan a ganar interés desde el día en que se verifican, y las letras o pagarés, desde el día de su vencimiento o negociación.
6.º La cantidad por la cual se dividen los números para calcular los intereses, se llama *divisor fijo*.

MÉTODO DIRECTO

614. Resolución de una cuenta corriente con interés por el método directo. — Para resolver una cuenta corriente con interés por el *método directo*, se practica lo siguiente:

1.º Se escriben los asientos u operaciones en la parte correspondiente, es decir, en el *debe* o en el *haber*, según que *entreguemos o recibamos*.

2.° Se escriben, frente de cada capital y en la columna correspondiente, los *días* que a este capital corresponden.

3.° Se multiplica cada capital por los *días* que gana interés; se *prescinde de las notas decimales* que el producto tuviere y *de las dos primeras* de los enteros, y las cifras restantes son los *números* que corresponden a este capital, los cuales se anotan en la columna correspondiente.

615. Cómo se calculan los días de interés. — En el método directo, se calculan los días de interés contando los que median desde la fecha del vencimiento de cada capital a la en que se cierra la cuenta. *Esta fecha se conviene con anticipación por ambas partes interesadas.*

616. Números rojos o encarnados. — Cuando un capital tiene vencimiento posterior a la fecha del cierre de la cuenta, se calculan los días que median entre la fecha del cierre de la cuenta y la fecha del vencimiento de dicho capital; se escriben estos días en la columna respectiva, se multiplican por su capital, prescindiendo de las notas decimales que el producto tuviere y de las dos primeras de los enteros, y las notas restantes, que son los números, se escriben en la columna respectiva, con tinta de distinto color (o con carácter de letra diferente). Estos números se llaman *rojos o encarnados.*

617. Cierre de la cuenta. — Llegada la época del cierre, convenida anticipadamente por ambas partes, se procede a determinar el resultado de las operaciones realizadas, practicando lo siguiente:

1.° Si hubiese números encarnados en el *debe*, se pasan al *haber como números naturales;* y al *debe*, en la misma forma, los que hubiese en el *haber*.

2.° Se suman, separadamente, los números del *debe* y los del *haber*, *dejando de incluir los encarnados;* se restan ambas sumas, y la diferencia es el *saldo de números*, el cual se escribe en la columna de números del lado en que haya menor suma.

3.° La diferencia de números se divide por el *divisor fijo* correspondiente al tanto por ciento estipulado, *despreciando antes las dos primeras cifras de la derecha de este divisor*, y el *cociente da los intereses*, los cuales se escriben en la columna de capitales del lado en que la suma de números haya sido mayor.

4.° Se suman los capitales del *debe* y del *haber*, se restan ambas sumas, y la diferencia es el *saldo de capitales a cuenta nueva*, que se escribe en la columna de éstos, en el lado en que la suma sea menor.

5.° Se suman las dos columnas de capitales y las dos de números, debiendo resultar las dos del *debe* iguales, respectivamente, a las dos del *haber*, si las operaciones se han verificado sin error.

618. Nueva apertura de la cuenta. — Si ambas partes continúan las operaciones, se abre de nuevo la cuenta, pasando el saldo de capitales a la columna de éstos del lado en que la suma era mayor antes de cerrar la cuenta corriente.

Es costumbre bastante generalizada entre banqueros y comerciantes cerrar las cuentas corrientes cada tres meses.

Por si surgiere alguna duda referente al *divisor fijo*, véase lo que sobre el caso decimos al resolver las cuestiones de interés procediendo por este método (**383**).

Razonamiento en que se funda el método directo

Supongamos que los intereses recíprocos son a 6 % y que la cuenta empieza en 1.° de enero y se cierra en 31 de marzo próximo.

Supongamos, asimismo, que el *Debe* de la cta. es así:

Enero 10.—*Mi entrega en metálico:* 8000 *ptas.*

Y que el *Haber* sea:

Febrero 20.—*Su entrega en metálico:* 7000 *ptas.*

Las 8000 ptas. del *Debe* ganarán intereses durante los días que median entre el 10 de enero y el 31 de marzo, esto es, 80 días. Luego teniendo en cuenta lo que hemos dicho al explicar el interés por divisores fijos, los *números* del *Debe* serán:

$$8000 \times 80 = 640000$$

Y los intereses correspondientes a estos *números*, $\frac{640000}{6000} = \frac{6400}{60}$; pues, si partimos dividendo y divisor por 100, el cociente no altera. Por esta razón, al calcular los *números* correspondientes a cada capital, despreciamos las dos primeras notas enteras de la derecha, y luego, al dividir la diferencia de *números* por el *divisor fijo*, despreciamos también las dos cifras primeras de su derecha.

Verificando la división anterior, los intereses del *Debe* serán:

$$\frac{6400}{60} = 106\text{'}66 \text{ ptas.}$$

Las 7000 ptas. del *Haber* ganan intereses los días comprendidos entre el 20 de febrero y el 31 de marzo, esto es, durante 39 días; luego los *números* del *Haber* serán:

$$7000 \times 39 = 273000$$

Y los intereses:

$$\frac{273000}{6000} = \frac{2730}{60} = 45\text{'}50$$

Intereses del *Debe*	Ptas.	106'66
» » *Haber*	»	45'50
Diferencia a favor del *Debe*	Ptas.	61'16

Hallemos, ahora, *abreviadamente*, el saldo de intereses:

Números del *Debe*	640000
» » *Haber*	273000
Diferencia a favor del *Debe*	367000

Intereses de esta diferencia,

$$\frac{367000}{6000} = \frac{3670}{60} = 61\text{'}16 \text{ ptas.}$$

De modo, pues, que *llegada la época del cierre, se hallan los números correspondientes a cada capital; se suman los números del Debe y los del Haber; se halla la diferencia, y esta diferencia se divide por el divisor fijo correspondiente al tanto % anual estipulado, siendo el cociente los intereses, que irán a aumentar los capitales del lado de la cuenta en que la suma de números hubiese sido mayor.* Hecho esto, sólo falta cerrar la cuenta por los saldos de números y de capitales.

Números rojos o encarnados

Proceden, como ya hemos dicho, de los capitales que se presentaren con vencimiento posterior a la época señalada para el cierre de la cuenta. También hemos dicho que, *llegada la época del cierre, los números encarnados del Debe de la cuenta se trasladan al Haber como números naturales, y viceversa, dejando de sumar los encarnados al proceder a la suma de los números de ambos lados de la cuenta.*

Nada más natural y evidente. Los días comprendidos entre la fecha del cierre y la del vencimiento, multiplicados por su respectivo capital, dan por resultado números indebidos y en contra, por lo mismo, de la parte que los motiva; pues incluir estos capitales en la cuenta que se cierra, es lo mismo que adelantar sus vencimientos, y justo es que aquél a quien se favorece pague los intereses que le correspondan.

Más claro todavía:

Supongamos que, en 20 de enero, Juan ha de pagar a Pedro 5000 ptas. Llega el día del vencimiento, fecha en que saldan sus cuentas, y el primero entrega al segundo 3000 ptas. en metálico y una letra a 30 días, de 2000 ptas. Naturalmente que, para no sufrir quebranto los intereses del segundo, el primero ha de abonarle el interés que ambos convengan deben producir las 2000 ptas. durante los 30 días que el segundo tardará en percibirlas. Luego estos intereses son en contra del que los motiva, y si Juan y Pedro tuviesen operaciones a cta. corriente llevada por el método directo, estos intereses irían a favor de Pedro.

Esta es la razón evidente del por qué, al saldar la cta., los números encarnados del *Debe* pasan al *Haber*, y viceversa, como números naturales, dejando de contarse en la suma de números los encarnados de cualquier lado de la cuenta.

MÉTODO INDIRECTO

619. Resolución de las cuentas corrientes con interés por el método indirecto. — Las cuentas corrientes con interés por el *método indirecto*, se resuelven anotando los asientos como en el directo. La diferencia entre ambos métodos consiste en la manera de contar los días y en el modo de verificar el cierre.

620. Cómo se cuentan los días.— En el método indirecto, se empieza a contar los días partiendo de la fecha de la primera operación que se hace, bien pertenezca al *debe*, bien al *haber;* es decir, se dan a cada capital los días que median entre la fecha de la primera operación y la fecha de su vencimiento. Frente al capital de la primera operación y en la columna de números, se escribe la palabra *Época*, para indicar la fecha de partida en la determinación de los *números*.

621. Ventajas de este método sobre el directo. — Ofrece la gran ventaja de no tener que señalar la época para el cierre de la cuenta y además, la desaparición de los números encarnados.

622. Cómo se cierran las cuentas corrientes por el método indirecto. — Se practican las operaciones siguientes:

1.ª Se suman separadamente los capitales del *debe* y los del *haber;* se halla la diferencia entre ambas sumas, y esta diferencia se escribe entre columnas, como ***saldo interino de capitales***, en el lado de la cuenta en que haya menor suma.

2.ª Esta diferencia de capitales se multiplica por los días que ha durado la cuenta, y el producto, ***después de separadas las notas decimales y las dos primeras de los enteros***, se escribe en la columna de números del mismo lado.

3.ª Se suman los números del debe y los del haber; se restan ambas sumas, y la diferencia se escribe por saldo en el lado en que la suma sea menor.

4.ª Esta diferencia de números se divide por el divisor fijo, y el cociente son los intereses, los cuales se llevan a la columna de capitales del mismo lado, es decir, del lado en que haya menor suma de números.

5.ª Se suman de nuevo los capitales, y la diferencia se escribe por saldo en el lado en que la suma sea menor. Si no hay error, las sumas de capitales y números del debe son, respectivamente, iguales a las del haber.

Este método es el más usado, por as ventajas que ofrece sobre el directo.

Explicación razonada del método indirecto

Ya hemos dicho que, por este método, se dan a cada capital, para producir interés, los días que median entre la *época*, o vencimiento del primer capital (bien sea éste del *Debe*, bien del *Haber*), y la fecha de su vencimiento. Naturalmente, los días que se dan a un capital, no son los que éste produce interés y, multiplicando dicho capital por estos días, los *números* que se obtienen son *indebidos o falsos;* pues los *números verdaderos* los hallaríamos multiplicando dicho capital por los días que realmente gana interés, que son, precisamente, los días que median entre la fecha de su vencimiento y la del cierre de la cuenta. Pero, procediendo así, ¿podremos hallar los números verdaderos? Fácilmente. Si multiplicamos, después, dicho capital por los días que ha durado la cuenta; esto es, *por los días que no ha producido interés más los que ha producido*, el producto será heterogéneo, esto es, será los números *falsos* y *verdaderos*, en conjunto, de dicho capital, y como los números *falsos* los hemos hallado ya antes, si del segundo producto de números (falsos y verdaderos) quitamos el primero (los falsos), claro está que el resto ha de ser los *números verdaderos* del citado capital. Para mayor claridad, pondremos un ejemplo:

Sea la cta. siguiente, con interés recíproco de 6 %, cerrada en 31 marzo.

Debe.

Fechas		Conceptos	Vencimientos		Capitales	Días	Números
Enero	1	Mi entrega en ef.	Enero	1	6000	0	Época
Febrero	20	Mi pago por s/cta.	Febrero	20	8000	50	4000

Haber.

Fechas		Conceptos	Vencimientos		Capitales	Días	Números
Marzo	20	Su entrega en ef.	Marzo	20	4000	78	3120

Tomemos, por ejemplo, la partida del *Haber*, 4000 ptas. Se dan a este capital 78 días, esto es, los que median entre la *época*, 1.º enero, y la fecha de su vencimiento, el 20 de marzo; luego los 3120 números son *falsos*, pues los *números verdaderos* los hallaríamos multiplicando las 4000 ptas. por los días que van desde el 20 de marzo hasta el día del cierre, 31 de marzo, que son 11 días, durante los cuales ganan, realmente, interés las 4000 ptas. Si ahora multiplicamos las 4000 pesetas por los días que ha durado la cuenta, 89 días, esto es, 78 + 11, tendremos: $4000 \times 89 = 356000$, o lo que es lo mismo, por la simplificación, 3560 números *debidos* e *indebidos*. Tenemos, pues:

Números debidos e indebidos	3560
Números indebidos o falsos	— 3120
Números *debidos* o *verdaderos*	440, que dividi-

dos por el divisor fijo correspondiente a la tasa del interés, 6000, o, en virtud de la simplificación, por 60, tenemos $\frac{440}{60} = 7'33$ ptas., intereses verdaderos del *Haber*.

Fijémonos, ahora, en el *Debe* de la cuenta, teniendo presente que lo que pasa con la partida del *Haber*, sucede con todos los demás capitales.

Los números *indebidos* o *falsos* son 4000; los *verdaderos* y *falsos juntos*, serán $6000 + 8000 = 14000$ multiplicado por los días que ha durado la cuenta, esto es: $14000 \times 89 = 1246000$, o lo que es lo mismo, por la simplificación 12460, números *falsos* y *verdaderos en conjunto*. Luego vemos que:

Números falsos y verdaderos (o debidos e indebidos).....	12460
Números falsos o indebidos.........................	— 4000
Números debidos o verdaderos.......................	8460, que,

divididos por el divisor fijo correspondiente, 6000, ó 60, en virtud de la simplificación, tenemos $\frac{8460}{60} = 141$ ptas., intereses verdaderos del *Debe*.

Ahora bien:

Intereses del Debe	Ptas.	141
Idem del Haber	» —	7'33
Saldo de intereses a favor del *Debe*	Ptas.	133'67

Seguros de lo expuesto, que *constituye el secreto del método indirecto*, hallemos la fórmula que nos dé la regla para saldar, abreviadamente, estas cuentas por el método en cuestión.

Llamemos C a la suma de capitales del *Debe* de la cta., que suponemos mayor que la suma de los del *Haber;* t, al número de días que la cta. ha durado; d, al divisor fijo, y N, a la suma de números falsos o indebidos del mismo *Debe.*

Según lo antes demostrado, los números falsos y verdaderos, en conjunto, del Debe, serán:

$$C \times t$$

y siendo N la suma de los falsos, los números verdaderos serán la diferencia, esto es:

$$(C \times t) - N$$

y partiendo esta diferencia por el divisor fijo, tendremos los intereses verdaderos del *Debe;* luego estos séran:

$$\frac{(C \times t) - N}{d}.$$

Llamemos c a la suma de capitales del Haber, que es, como antes hemos dicho, menor que la suma de los del *Debe*, y n, a la suma de números falsos o indebidos del mismo lado de la cuenta. Los números falsos y verdaderos, en conjunto, serán:

$$c \times t$$

y siendo n la suma de los falsos, los números verdaderos serán la diferencia, esto és:

$$(c \times t) - n$$

y partiendo esta diferencia por el divisor fijo, tendremos los intereses verdaderos del *Haber;* luego estos serán:

$$\frac{(c \times t) - n}{d}.$$

Como los intereses del *Debe* son en contra de los del *Haber*, hay que hallar su diferencia, y suponiendo mayores los del *Debe*, la diferencia de intereses será:

$$\frac{(C \times t) - N}{d} - \frac{(c \times t) - n}{d}.$$

Para restar dos quebrados cuyos denominadores son iguales, basta restar los numeradores y dar a la resta el denominador común. Luego la resta será:

$$\frac{(C \times t - N) - (c \times t - n)}{d}.$$

Si al minuendo y al substraendo añadimos o quitamos un mismo número, la resta no altera. Luego si del substraendo del numerador del quebrado quitamos $- n$, le aumentamos en este número, y para que el resto no altere, hemos de añadir el mismo número al minuendo; luego el quebrado será:

$$\frac{(C \times t - N + n) - (c \times t)}{d}$$

o lo que es igual, quitando los paréntesis,

$$\frac{C \times t - N + n - c \times t}{d}$$

que es también igual a

$$\frac{C \times t - c \times t + n - N}{d}$$

y separando el factor t, común a los dos primeros términos del numerador, tenemos:

$$\frac{(C - c)\,t + n - N}{d}$$

cuya fórmula nos dice que, para liquidar, abreviadamente, los intereses de una cuenta corriente, por el método indirecto, *se multiplica la diferencia entre las sumas de los capitales del Debe y el Haber por el número de días que ha durado la cuenta; que este producto* (separando las dos primeras notas enteras de la derecha y las decimales si las hubiere) *se añade a los números del lado de la cuenta cuya suma de capitales es menor; que de esta suma se resta la suma de los números del lado contrario, y que la diferencia se divide por el divisor fijo correspondiente.*

Hallado el saldo de intereses, falta sólo averiguar *a qué capitales debe añadirse*, si a los del *Debe*, o a los del *Haber*.

Para ello, apliquemos la demostración anterior a la cta. corriente que antes hemos propuesto.

Los intereses del *Debe* serán:

$$\frac{(14000 \times 89) - 400}{6000} = \frac{(140 \times 89) - 4000}{60};$$

y los del *Haber*,

$$\frac{(4000 \times 89) - 3120}{6000} = \frac{(40 \times 89) - 3120}{60}$$

y el saldo, *a favor del Debe*,

$$\frac{(140 \times 89) - 4000}{60} - \frac{(40 \times 89) - 3120}{60};$$

pero como ambos quebrados tienen igual denominador, la resta será:

$$\frac{[(140 \times 89) - 4000] - [(40 \times 89) - 3120]}{60}.$$

Si del substraendo quitamos — 3120, lo aumentamos en este número; luego, para que el resto no altere, debemos aumentar el minuendo en este número; luego el quebrado será:

$$\frac{[(140 \times 89) + 3120 - 4000] - (40 \times 89)}{60}$$

o lo que es igual, quitando los paréntesis,

$$\frac{140 \times 89 + 3120 - 4000 - 40 \times 89}{60},$$

que es también igual a

$$\frac{140 \times 89 - 40 \times 89 + 3120 - 4000}{60},$$

y separando el factor 89, común a los dos primeros términos del numerador, resulta:

$$\frac{(140 - 40)\,89 + 3120 - 4000}{60}.$$

Resolviendo las operaciones indicadas, hallamos, a favor del *Debe*,

$$\frac{8020}{60}\,(*) = 133\text{'}67 \text{ ptas. de interés,}$$

cantidad que ha de ir a aumentar los capitales del *Debe;* de lo que deducimos,

(*) Si esta cantidad fuese negativa, como puede suceder, indicaría que hay que rebajar de los capitales del *Debe* el valor de los intereses, *lo que equivaldría tanto como añadirlos al Haber,* y entonces se vería cómo en el *Haber* de la cuenta hay menor suma de números que en el *Debe*.

pues, como regla general, *que los intereses han de ir a la columna de capitales del lado de la cuenta en que hay menor suma de números.*

Adviértase que en la cuenta anterior, para calcular los intereses, hay que añadir los números que resultan de multiplicar la diferencia de capitales por los días que ha durado la cta., que es 14000 — 4000 = 10000 × 89 = 890000, lo que da 8900 números, que corresponden al *Haber*, *por ser el lado de la cta. donde hay menor suma de capitales.* De modo, pues, que en el *Debe* hay 4000 números, y en el *Haber*, 3120 + 8900 = 12020.

De conformidad con lo expuesto, procedamos a resolver la siguiente cuenta corriente por los dos métodos que acabamos de explicar:

Enero	1.º—Entregado a D. Pedro López para dar comienzo a nuestras operaciones de c/c con interés recíproco de 6 %	Ptas.	5600
»	10.—Mi entrega en efectivo	»	800
»	15.—Su entrega en efectivo	»	500
Febrero	20.—Su endoso a m/o c/ Ros, al fin corriente	»	1000
»	26.—Su remesa café, 20 qq. a 25 $ uno	»	2500
Marzo	3.—Mi endoso a s/o c/ Soriano al 15 abril próx.	»	900'75
»	12.—Su pago por m/cta. a Ibáñez	»	125'50
»	20.—M/g a s/c o/ Cruz al fin abril próx	»	540

Se cierra la cta. en 31 de marzo.

MÉTODO DIRECTO

DEBE *D. Pedro López, de Barcelona, s/cta. corrte. al interés recíproco de 6 0/0 anual, con C. Sanz, cerrada en 31 de marzo de 1919.* **HABER**

Debe

Fechas 1919			Vencimientos		Capitales		Días	Números
Enero...	1	Mi entrega en efectivo	Enero	1	5600	»	89	4984
»	10	Mi » » »	»	10	800	»	80	640
Marzo...	3	Mi endoso a s/o. c/. Soriano ...	Abril	15	900	75	15	**135**
		Números encarnados del Haber ..	....		......	...	...	162
		Intereses a m/f. $\frac{4118}{60}$	....		68	63		
					7369	38		5786
		Saldo a m/f. a cta. nueva, Ptas...........			2703	88		

Haber

Fechas 1919			Vencimientos		Capitales		Días	Números
Enero...	15	Su entrega en efectivo	Enero	15	500	»	75	375
Febrero.	20	Su endoso a m/o. c/. Ros......	Febrero	28	1000	»	31	310
»	26	Su remesa 20 qq. café a 25 duros q......................	»	26	2500	»	33	825
Marzo...	12	Su pago por m/cta. a Ibáñez ..	Marzo	12	125	50	19	23
»	20	Mi g/. a s/c. o. Cruz..........	Abril	30	540	»	30	**162**
		Números encarnados del Debe ...	....		....	...	...	135
		Saldo de Números...........	....		....	...	...	4118
		Saldo de capitales a cta. nueva..	....		2703	88		
					7369	38		5786

S. E. u O.

Gerona, 31 de marzo de 1919.

C. Sanz.

MÉTODO INDIRECTO

DEBE *D. Pedro López, de Barcelona, s/cta. corrte. al interés recíproco de 6 0/0 anual, con C. Sanz, cerrada en 31 de marzo de 1919.* **HABER**

Debe

Fechas 1919			Vencimientos		Capitales		Días	Números
Enero...	1	Mi entrega en efectivo	Enero	1	5600	»	»	Época
»	10	Mi » » »	»	10	800	»	9	72
Marzo...	3	Mi endoso a s/o. c/. Soriano ...	Abril	15	900	75	104	936
		Saldo de números..............	....		......	...	...	4116
		Intereses a m f. $\frac{4116}{60}$	....		68	60		
					7369	35		5124
		Saldo a m/f. a cta. nueva, Ptas...........			2703	85		

Haber

Fechas 1919			Vencimientos		Capitales		Días	Números
Enero...	15	Su entrega en efectivo	Enero	15	500	»	14	70
Febrero.	20	Su endoso a m/o. c/. Ros......	Febrero	28	1000	»	58	580
»	26	Su remesa 20 qq. café a 25 duros q......................	»	26	2500	»	56	1400
Marzo...	12	Su pago por m. cta. a Ibáñez..	Marzo	12	125	50	70	87
»	20	Mi g/. a s/c. o. Cruz..........	Abril	30	540	»	119	642
		Saldo interino de capitales 2635'25×	....		....	...	89	2345
		Saldo de capitales a cta. nueva..	....		2703	85		
					7369	35		5124

S. E. u O.

Gerona, 31 de marzo de 1919.

C. Sanz.

NOTA.— Comparando el resultado obtenido por este método con el obtenido por el método anterior, se observa una diferencia de *tres céntimos de pta.*, que ninguna alteración representa.

MÉTODO HAMBURGUÉS

623. Ventajas del método hamburgués. — Ofrece las siguientes:

1.ª Calcula los intereses directamente, como el método directo.
2.ª No tiene números encarnados.
3.ª No necesita la señalación de la fecha del corte o cierre de la cuenta.
4.ª Da noticia exacta, al día, del saldo de sus partidas, por cuya razón ha sido llamado por algunos *método de saldos continuados*.
5.ª Es aplicable a los casos en que *el debe* y *el haber* devengan un mismo interés y a los casos en que el interés es distinto; es decir, es aplicable a los casos en que el interés es recíproco y a los en que no lo es.

624. Resolución de las cuentas corrientes por este método. — Del modo siguiente:

1.º Se escribe el primer capital y se multiplica por los días que median desde su vencimiento hasta el vencimiento del segundo; se prescinde de las notas decimales del producto y de las dos primeras de los enteros, y se llevan las notas restantes a la columna de números del *débito* o del *crédito*, según que el capital multiplicado corresponda al debe o al haber.
2.º Debajo del primer capital, se escribe el segundo, se suman si ambos pertenecen a una misma cuenta, y se restan si pertenecen a cuenta distinta.
3.º Esta suma o resta se multiplica por los días que median desde el vencimiento del segundo capital hasta el vencimiento del tercero (separando las cifras que ya sabemos), y el producto se lleva a la columna de números del *débito* o del *crédito*, según que la suma o resta corresponda al debe o al haber.
4.º Debajo de esta suma o resta se escribe el tercer capital, sumándolo con ella si pertenecen a una misma cuenta, y restándolo si pertenecen a cuenta distinta.

Y así continuamos hasta llegar al corte o cierre de la cuenta, cuya última suma o resta se multiplica por los días que median entre la fecha del último vencimiento y la del cierre.

625. Cómo se cierran las cuentas corrientes por el método hamburgués. — Para cerrar las cuentas corrientes por el método hamburgués, se practica lo siguiente:

Si los intereses son recíprocos: Se suman las dos columnas de números, y al pie de cada una se escriben las sumas debajo de una rayita horizontal; se halla la diferencia entre ambas sumas y se escribe por saldo debajo de la menor; esta diferencia se divide por el divisor fijo correspondiente al tanto por ciento convenido, siendo el cociente los intereses, los cuales se escriben debajo del último saldo de capitales, sumándolos con él, si ambas cantidades corresponden al *débito* o al *crédito*, y restándolos, si una fuese del *débito* y otra del *crédito*.

Si los intereses no son recíprocos: Se suman las dos columnas de números, y cada suma se divide por el divisor fijo correspondiente, colocando los cocientes, que son los intereses, en la columna respectiva (de intereses del débito o del crédito). Se restan ambos cocientes, y la diferencia es el *saldo de intereses*, que se escribe, por saldo, debajo del cociente menor y también debajo de la última suma o resta de capitales, para sumar ambas cantidades, si pertenecen a una misma cuenta, o restarlas si pertenecen a cuenta distinta. Esta última suma o resta es el *saldo a cuenta nueva*.

626. Cómo se procede cuando algún capital tiene vencimiento anterior al que le precede. — Cuando un capital vence antes que el que le precede, el producto del capital por los días va también a la columna de números; pero en sentido contrario del que le correspondería, esto es, va a la *columna de números de débito*, si la última suma ó resta pertenece al *crédito*, y a la *columna de números del crédito*, si la suma o resta pertenece al *débito*.

627. Qué debe hacerse cuando, llegado el día del cierre de la cuenta, hay un capital de vencimiento posterior. — Cuando un capital tiene vencimiento posterior a la fecha del cierre, se multiplica la última suma o resta de capitales por los días que median desde la fecha del cierre a la del vencimiento del mencionado capital, colocando el producto en la columna de números; pero también en sentido contrario del que le correspondería, según se ha dicho anteriormente.

Procedamos a la liquidación de la cuenta corriente anterior por el método hamburgués, advirtiendo que las iniciales D. o C., puestas delante de una cantidad, indican si ésta pertenece al débito o al crédito.

MÉTODO HAMBURGUÉS

CUENTA CORRIENTE al interés recíproco de 6 % *anual, con* **D. Pedro López,** *de Barcelona, cerrada en* 31 *de marzo de* 1919.

Fechas		Vencimientos		Iniciales		Capitales		Días	Números	
				Débito	Crédito	Pesetas	Cts.		Débito	Crédito
1919										
Enero.	1	Enero.	1	D.	»	5600	»	9	504	»
»	10	»	10	D.	»	800	»			
				D.	»	6400	»	5	320	»
»	15	»	15	»	C.	500	»			
				D.	»	5900	»	44	2596	»
Febr.º.	20	Febr.º.	28	»	C.	1000	»			
				D.	»	4900	»	2	»	98
»	26	»	26	»	C.	2500	»			
				D.	»	2400	»	48	1152	»
Marzo.	3	Abril..	15	D.	»	900	75			
				D.	»	3300	75	34	»	1122
»	12	Marzo.	12	»	C.	125	50			
				D.	»	3175	25	49	1555	»
»	20	Abril..	30	»	C.	540	»			
				D.	»	2635	25	30	»	790
									6127	2010
Saldo de números						......	...	......	......	4117
Intereses a m/f. $\frac{4117}{60}$						68	61			
Saldo a m/f. a cta. nueva. Ptas.....						2703	86		6127	6127

S. E. u O.

Gerona, 31 de marzo de 1919. C. Sanz.

Liquidemos, ahora, una cuenta corriente con intereses *no recíprocos.*

Propongamos la siguiente entre D. Julián Carmona, de Bilbao, y D. P. Anchorena, de Gerona, siendo el interés del *Débito* de 4 % y de 6 % el del *Crédito:*

Abril 6.	— Entregado en efectivo a dicho señor para empezar nuestras operaciones a cuenta corriente.	Ptas.	8000
» 15.	— Su l/. a m/o. c/. Capdevila, a 8 d/v.........	»	600
» 26.	— Mi endoso a s/o. c/. Suárez, al fin corriente ...	»	1500'50
Mayo 10.	— Su entrega a R. Ruiz, de Bilbao, por m/o. y cta.	»	900
» 25.	— Mi entrega por s/cta. a López, de Gerona.....	»	2500
Junio 2.	— Mi g/. a s/c. o/. Noguer, al fin corriente........	»	640'75
» 15.	— Su endoso a m/o. c/. Rovira, a 8 d/v.........	»	1000

Para el efecto consiguiente en los endosos, admitamos dos días de correo entre Gerona y Bilbao.

Época del cierre de la cta., 30 de junio.

MÉTODO HAMBURGUÉS

CUENTA CORRIENTE con **D. Julián Carmona,** *de Bilbao, al interés de* 4 % *el* **Débito** *y de* 6 % *el* **Crédito,** *cerrada en* 30 *de junio de* 1919.

Fechas		Vencimientos		Iniciales		Capitales		Días	Números		Intereses	
				Débito	Crédito	Pesetas	Cts.		Débito	Crédito	D. 4 %	C. 6 %
1919												
Abril	6	Abril	6	D.	»	8000	»	19	1520	»		
»	15	»	25	»	C.	600	»					
				D.	»	7400	»	5	370	»		
»	26	»	30	D.	»	1500	50					
				D.	»	8900	50	10	890	»		
Mayo	10	Mayo	10	»	C.	900	»					
				D.	»	8000	50	15	1200	»		
»	25	»	25	D.	»	2500	»					
				D.	»	10500	50	36	3780	»		
Junio	2	Junio	30	»	C.	640	75					
				D.	»	9859	75	5	»	492		
»	15	»	25	»	C.	1000	»					
				D.	»	8859	75	5	442	»		
									8202	492		
Intereses de números						......	...		....	....	91'13	8'20
Saldo de números y de intereses.						......	...		....	7710		82'93
Intereses a m/f.						82	93					
Saldo a m/f. a cta. nueva. Ptas.						8942	68		8202	8202	91'13	91'13

S. E. u O.

P. Anchorena.

Gerona, 30 de junio de 1919.

Imposiciones

628. Definición. — Llamamos *imposiciones* a las cantidades iguales que, en épocas periódicas, se colocan a interés compuesto en algún establecimiento, con objeto de reunir un capital determinado al cabo de cierto tiempo.

Al finalizar la época señalada, las cantidades impuestas y los intereses compuestos que han producido han de sumar el capital que se propuso reunir.

629. Casos que pueden ocurrir en las cuestiones sobre imposiciones. — En las cuestiones sobre imposiciones, pueden ocurrir cuatro casos:

1.º *Determinar la imposición que debe hacerse para obtener un determinado capital.*
2.º *Determinar el capital que se obtendrá con una imposición determinada.*
3.º *Determinar el tanto por ciento a que se ha de hacer la imposición para reunir un capital determinado.*
4.º *Determinar el tiempo necesario para la obtención del capital.*

La aplicación más importante que se ha hecho de las imposiciones es, indudablemente, las *Cajas de Ahorros*, establecimientos creados con el benéfico fin de guardar las economías de las clases trabajadoras, beneficiándolas con un determinado interés.

Cada *Caja de Ahorros* se rige por un reglamento especial, en el que se determinan el mínimum y máximum de las imposiciones, el interés anual que devengan las cantidades depositadas y el medio de ser retiradas por los imponentes.

La administración del establecimiento lleva una cuenta corriente para cada imponente, y a fin de año los intereses devengados por las sumas impuestas se acumulan al capital.

630. Cómo se resuelven.—Estos problemas se resuelven fácilmente sirviéndose de la siguiente

TABLA que indica la cantidad que debe imponerse al principio de cada año, al interés compuesto que se expresa, para reunir un capital de 100

Años	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %
1	98'039	97'087	96'154	95'238	94'340
2	48'534	47'826	47'134	46'458	45'796
3	32'035	31'411	30'803	30'210	29'633
4	23'787	23'207	22'643	22'096	21'565
5	18'839	18'287	17'753	17'236	16'736
6	15'542	15'010	14'496	14'002	13'525
7	13'185	12'671	12'174	11'697	11'239
8	11'423	10'918	10'435	9'974	9'532
9	10'051	9'557	9'086	8'637	8'210
10	8'954	8'469	8'009	7'572	7'157
11	8'057	7'580	7'130	6'704	6'301
12	7'310	6'841	6'399	5'983	5'592
13	6'678	6'217	5'783	5'377	4'996
14	6'137	5'682	5'257	4'859	4'489
15	5'669	5'220	4'802	4'414	4'053
16	5'260	4'817	4'406	4'026	3'675
17	4'899	4'461	4'058	3'686	3'344
18	4'579	4'147	3'749	3'385	3'053
19	4'292	3'865	3'475	3'119	2'794
20	4'035	3'613	3'229	2'880	2'565
21	3'802	3'386	3'008	2'666	2'359
22	3'591	3'179	2'808	2'473	2'174
23	3'399	2'992	2'731	2'299	2'007
24	3'223	2'820	2'460	2'140	1'857
25	3'061	2'663	2'309	1'996	1'720

631. Cómo se resuelve el primer caso. — Para determinar la imposición conociendo el capital que se quiere obtener, el tanto por ciento y el tiempo, *se busca en la columna de los años el número de éstos que se fijen en el problema, y corriendo horizontalmente hacia la derecha hasta la columna del tanto por ciento a que se haga la imposición, se hallará en ella la cantidad que debe imponerse cada año para obtener el capital* 100. Luego se forma la siguiente regla de tres:

S. *Si para obtener* 100, *ha de imponerse la cantidad hallada en la tabla,*
P. *para obtener el capital dado, deberá imponerse x.*

EJEMPLO: *Deseando formar un capital con que dotar a una niña, se desea saber qué cantidad deberá imponerse anualmente al interés compuesto de* 3 %, *para obtener* 5000 *ptas. al cabo de* 20 *años.*

Resolución

S. Si para obtener 100 ptas. al cabo de 20 años, he de imponer anualmente 3'613 ptas.
P. » » 5000 » » » » » » deberé » » x »

100 : 5000 :: 3'613 : x = 180'65 ptas.

632. Cómo se resuelve el segundo caso. — Para determinar el capital que se obtendrá, conociendo la imposición, el tanto por ciento y el tiempo, *se busca en la tabla la imposición de* 100 *en el tiempo dado, y luego se forma esta proporción:*

S. *Si imponiendo anualmente la cantidad hallada en la tabla, se obtiene el capital* 100,
P. *imponiendo la cantidad que se da, se obtendrá el capital* x.

EJEMPLO: *Cierto sujeto impone anualmente* 300 *ptas., durante* 12 *años, al* 4 % *interés compuesto. ¿Cuánto retirará al cabo de este tiempo?*

Resolución

S.	Si imponiendo anualmente	6'399 ptas.	obtiene	100 ptas.	de	capital,
P.	» »	300 »	obtendrá	x	»	» »

6'399 : 300 : : 100 : x = 4688'23 ptas.

633. Cómo se resuelve el tercer caso. — Para determinar el tanto por ciento, conociendo la imposición, el capital y el tiempo, *se busca primero la imposición que corresponde a* 100 *por medio de esta proporción:*

El capital dado : *su imposición* : : 100 : x (*o a su imposición*).

Partiendo luego, horizontalmente, del número de años de la tabla, en la columna en que se halle el resultado de la proporción, está el tanto por ciento que se busca.

EJEMPLO: *¿A qué tanto por % anual han de imponerse* 180'65 *ptas., para que, al cabo de* 20 *años, se obtengan* 5000 *ptas. de capital?*

Resolución: 5000 : 180'65 : : 100 : x = 3'613, cuyo resultado, partiendo horizontalmente, hacia la derecha, de los 20 años de la tabla, se halla en la columna del 3 %. Éste es, pues, el tanto por ciento buscado.

634. Cómo se resuelve el cuarto caso. — Para determinar el tiempo, conociendo la imposición, el capital y el tanto por ciento, *se halla, ante todo, la imposición que corresponde al capital* 100, *por medio de la proporción que hemos dado en el tercer caso* (*capital dado* : *su imposición* : : 100 : *su imposición*); *se busca la cantidad obtenida en la columna del tanto por ciento, y frente de esta cantidad, en la columna de los años, está el número de años que se busca.*

EJEMPLO: *¿Cuánto tiempo han de imponerse anualmente* 180'65 *ptas. al interés compuesto de* 3 %, *para reunir* 5000 *ptas. de capital?*

Resolución

5000 : 180'65 : : 100 : x = 3'613 ptas., imposición de 100.

Buscando, ahora, esta cantidad en la columna vertical del 3 %, y corriendo horizontalmente hacia la izquierda hasta la columna de los años, frente la cantidad hallada se ven 20, que es el número de años que se busca.

634 bis. Cálculo de la imposición. — Llamemos i a la imposición, c al capital que se desea reunir, t al número de años y r al tanto por 1 anual.

La primera imposición i producirá intereses compuestos durante t años; la suma de esta imposición con sus intereses compuestos será (**382**) $i\,(1+r)^t$.

La segunda imposición ganará intereses durante $t-1$ años y se convertirá en

$$i\,(1+r)^{t-1}.$$

La tercera imposición, al cabo de $t-2$ años, se convertirá en

$$i\,(1+r)^{t-2}.$$

....

....

La última imposición sólo ganará interés durante 1 año y se convertirá, por tanto, en

$$i\,(1+r).$$

Pero, como la suma de las imposiciones con sus intereses compuestos debe de ser igual al capital que deseamos reunir, tenemos:

$$i\,(1+r)^t + i\,(1+r)^{t-1} + i\,(1+r)^{t-2} + \ldots\ldots + i\,(1+r) = c.$$

Sacando i de factor común,

$$i\,[(1+r)^t + (1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + \ldots\ldots + (1+r)] = c \quad (1).$$

La expresión encerrada entre [ ] es la suma de los términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $1 + r$, el último $(1+r)^t$ y la razón $(1+r)$; por tanto, (**673**, 3.ª propiedad),

$$(1+r)^t + (1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + \ldots\ldots + (1+r)$$
$$= \frac{(1+r)^t\,(1+r) - (1+r)}{(1+r)-1},$$

o bien,

$$(1+r)^t + (1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + \ldots\ldots + (1+r) = \frac{(1+r)^{t+1} - (1+r)}{r}.$$

Substituyendo este valor en la fórmula (1), tenemos:

$$i \cdot \frac{(1+r)^{t+1} - (1+r)}{r} = c.$$

Multiplicando por r los dos miembros de esta igualdad,

$$i\,[(1+r)^{t+1} - (1+r)] = cr,$$

y dividiendo los dos miembros por $(1+r)^{t+1} - (1+r)$,

$$i = \frac{cr}{(1+r)^{t+1} - (1+r)},$$

fórmula que nos permite hallar la imposición buscada.

Anualidades

635. Definición. — Llamamos *anualidades* a unos pagos iguales hechos cada año, con el objeto de extinguir un capital que se debe con sus intereses compuestos.

636. Casos que pueden presentarse en las cuestiones sobre anualidades. — En las cuestiones sobre anualidades, pueden presentarse cuatro casos, a saber:

1.º *Determinar el capital que debe amortizarse.*

2.º *Determinar la anualidad que debe satisfacerse para la amortización de un capital.*

3.º *Determinar el número de años que deberán transcurrir hasta que la deuda sea extinguida o amortizada.*

4.º *Determinar el interés compuesto que devenga el capital que se ha de amortizar, esto es, el tanto por ciento.*

637. Cómo se resuelven. — Los problemas sobre anualidades se resuelven fácilmente por medio de la siguiente

TABLA que indica la cantidad que debe pagarse cada año, para extinguir una deuda de 100 al interés compuesto que se expresa

Años	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %
1	102'000	103'000	104'000	105'000	106'000
2	51'505	52'261	53'020	53'781	54'544
3	34'676	35'353	36'035	36'721	37'411
4	26'262	26'903	27'550	28'201	28'860
5	21'216	21'836	22'463	23'098	23'740
6	17'853	18'460	19'076	19'702	20'336
7	15'451	16'051	16'661	17'282	17'914
8	13'651	14'246	14'853	15'472	16'104
9	12'252	12'843	13'449	14'070	14'702
10	11'133	11'723	12'329	12'951	13'587
11	10'218	10'808	11'415	12'039	12'679
12	9'456	10'046	10'655	11'283	11'928
13	8'812	9'403	10'014	10'646	11'296
14	8'260	8'853	9'467	10'102	10'759
15	7'783	8'377	8'994	9'634	10'296
16	7'365	7'961	8'582	9'227	9'896
17	6'997	7'595	8'220	8'870	9'545
18	6'670	7'271	7'899	8'555	9'236
19	6'378	6'981	7'614	8'275	8'962
20	6'116	6'722	7'358	8'024	8'719
21	5'879	6'487	7'128	7'800	8'501
22	5'663	6'275	6'920	7'597	8'305
23	5'467	6'060	6'731	7'414	8'128
24	5'287	5'981	6'559	7'247	7'968
25	5'122	5'700	6'401	7'095	7'823

638. Cómo se resuelve el primer caso. — Para determinar el capital que debe amortizarse, conociendo la anualidad, el tiempo y el tanto por ciento, *se busca, en la tabla, la anualidad que debe satisfacerse para amortizar el capital* 100 *en el tiempo dado, y luego se plantea y resuelve la regla de tres siguiente:*

S. *Si pagando la anualidad de la tabla, amortizamos el capital* 100,
P. *pagando la anualidad del problema, amortizaremos el capital x.*

EJEMPLO: *Cierta corporación quiere destinar anualmente, durante* 24 *años,* 6000 *pesetas a la amortización de un empréstito que se propone contratar. ¿De qué cantidad será el empréstito, en el supuesto de que aquélla pagará el interés compuesto de* 4 % *sobre el capital que se le facilite?*

Resolución

S. Si pagando anualmente 6'559 ptas. se amortiza el capital 100,
P. » » 6000 » » amortizará » » x

6'559 : 6000 : : 100 : x = 91477'35 ptas., cantidad que puede contratarse.

639. Cómo se resuelve el segundo caso. — Para determinar la anualidad, conociendo el capital, el tiempo y el tanto por ciento, *se busca en la tabla la anualidad que hay que satisfacer para amortizar el capital* 100 *en el tiempo dado, y luego se plantea y resuelve la regla de tres siguiente:*

S. *Si para amortizar el capital* 100, *ha de satisfacerse la anualidad que la tabla indica,*

P. *para amortizar el capital del problema, deberá satisfacerse la anualidad* x.

EJEMPLO: *Un industrial, a causa de varios negocios desgraciados, queda con un descubierto de* 12500 *ptas., y conviene con sus acreedores que extinguirá la deuda en* 8 *años, pagando el interés compuesto de* 6 % *anual. ¿Cuánto deberá entregar cada año para amortizar dicho capital y sus intereses compuestos?*

Resolución

S. Si para amortizar un cap. de 100 ptas., en 8 años, ha de pagarse una anualidad de 16'104 ptas.
P. » » » » 12500 » » » » deberá » » » » x »

100 : 12500 : : 16'104 : x = 2013 ptas. anualidad buscada.

640. Cómo se resuelve el tercer caso. — Para determinar el número de años que deberá pagarse una determinada anualidad, conociendo el capital, la anualidad y el tanto por ciento, *se busca, ante todo, la anualidad que corresponde al capital* 100, *por medio de la siguiente proporción:*

Capital dado : *su anualidad* : : 100 : x (*o a su anualidad*).

La cantidad hallada se busca en la columna vertical del tanto por ciento, y corriendo horizontalmente hacia la izquierda hasta la columna de los años, el número de años que se encuentra al frente de la cantidad hallada, es el tiempo que se busca.

EJEMPLO: *Deseando amortizar* 12500 *ptas. y sus intereses compuestos de* 6 % *anual, pagando una anualidad de* 2013 *ptas., ¿cuántos años deberán transcurrir hasta extinguir la deuda?*

Resolución

12500 : 2013 : : 100 : x = 16'104 ptas., anualidad del capital 100.

Buscando, ahora, la cantidad hallada en la columna del 6 %, y corriendo horizontalmente hacia la izquierda hasta la columna de los años, se ve en ésta, frente de la cantidad hallada, 8 años, que es el tiempo que se busca.

641. Cómo se resuelve el cuarto caso. — Para determinar el tanto por ciento, conociendo el capital, la anualidad y el tiempo, *ante todo, se plantea y resuelve la proporción dada en el tercer caso* (*capital dado* : *su anualidad* : : 100 : *su anualidad*). *Partiendo luego horizontalmente del número de años de la tabla, en la columna del tanto por ciento en que se encuentre el resultado de la proporción, está el tanto por ciento que se busca.*

EJEMPLO: *Un industrial, en* 8 *años, pagando anualmente* 2013 *ptas., amortizó* 12500 *ptas. y sus intereses compuestos. ¿A qué tanto por ciento se calculó el interés compuesto de esta deuda?*

Resolución

12500 : 2013 : : 100 : x = 16'104 ptas., anualidad del capital 100.

Partiendo, ahora, del número de años de la columna 8, que son los años que se dan en el problema, y siguiendo horizontalmente hacia la derecha, la cantidad que arroja la proporción se encuentra en la columna del 6 %, que es el tanto por ciento que se busca.

641 bis. Cálculo de la anualidad. — Llamemos a a la anualidad, c al capital que debe amortizarse, t al número de años y r al tanto por 1 anual.

La anualidad a pagada al cabo del primer año producirá intereses compuestos durante $t-1$ años; la suma de este capital a con sus intereses compuestos será, por tanto, (**382**)

$$a\,(1+r)^{t-1}.$$

La anualidad a pagada al finalizar el segundo año producirá intereses compuestos durante $t-2$ años, y se convertirá en

$$a(1+r)^{t-2}.$$

La anualidad a pagada al terminar el tercer año se convertirá en

$$a(1+r)^{t-3}.$$

....

....

La anualidad pagada al terminar el penúltimo año producirá interés durante un solo año, y se convertirá en

$$a(1+r)$$

La última anualidad a no producirá ningún interés.

Evidentemente, la suma de todas las anualidades con sus intereses compuestos ha de ser igual al capital c, que se desea amortizar, más sus intereses compuestos, o sea

$$c(1+r)^t; \text{ luego,}$$

$$a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+a(1+r)^{t-3}+\ldots\ldots+a(1+r)+a=c(1+r)^t.$$

Sacando a de factor común en el primer miembro de la igualdad anterior, tenemos:

$$a[(1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+(1+r)^{t-3}+\ldots\ldots+(1+r)+1]=c(1+r)^t. \quad (1)$$

Pero la expresión encerrada entre [ ] es la suma de los términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 1, el último término $(1+r)^{t-1}$ y la razón $(1+r)$; luego, (**673**, 3.ª propiedad),

$$(1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+(1+r)^{t-3}+\ldots\ldots+(1+r)+1$$
$$=\frac{(1+r)^{t-1}(1+r)-1}{(1+r)-1},$$

o sea:

$$(1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+(1+r)^{t-3}+\ldots\ldots+(1+r)+1=\frac{(1+r)^t-1}{r}.$$

Substituyendo este valor en la fórmula (1), tenemos:

$$a\cdot\frac{(1+r)^t-1}{r}=c(1+r)^t.$$

Multiplicando por r los dos miembros de esta igualdad,

$$a[(1+r)^t-1]=cr(1+r)^t,$$

y dividiendo los dos miembros de la igualdad anterior por $(1+r)^t-1$,

$$a=\frac{cr(1+r)^t}{(1+r)^t-1},$$

fórmula que nos da el valor de la anualidad buscada.

En el caso de desear extinguir una deuda pagando cantidades iguales cada *semestre*, o cada *trimestre*, o cada *mes*, etc., a representará, en la fórmula anterior, la cantidad *semestral*, *trimestral*, *mensual*, etc. buscada, siendo t el número de *semestres*, *trimestres*, *meses*, etc. en los cuales quiere extinguirse la deuda, y representando r el tanto por 1 *semestral*, *trimestral*, *mensual*, etc. correspondiente.

Amortizaciones

642. Definición. — Llamamos *amortización* a la extinción de una deuda y sus intereses compuestos por medio de pagos iguales y periódicos, hechos anualmente.

Las cuestiones sobre amortización son, pues, las mismas que hemos estudiado al tratar las anualidades.

Este procedimiento es el seguido por los gobiernos, diputaciones, ayuntamientos, empresas, etc., para la recogida de los valores cuando levantan un empréstito.

Rentas vitalicias

643. Definición. — Llamamos *rentas vitalicias* a las rentas o pensiones que reciben anualmente hasta su muerte, los individuos que, con este objeto, han cedido una determinada cantidad, el usufructo de una finca o alguna otra clase de valores.

Desde luego se comprende que los contratos de esta naturaleza no es fácil los realicen los padres de familia; mas si deben recomendarse a aquellos individuos sin sucesión cuyo capital les produzca una renta con la cual han de vivir rodeados de privaciones. Prestando su capital a un tanto por ciento determinado, claro está que han de obtener menor rendimiento que el que puede ofrecerles la persona o sociedad que quedará poseedora de su fortuna al extinguirse su existencia; y este rendimiento será tanto mayor, cuanto más avanzada su edad sea, ya que ésta está en razón inversa de la cantidad de vida probable que les queda.

644. Causa que determina la mayor o menor importancia de la renta vitalicia que se recibe por cesión de una cantidad. — Depende de la edad de la persona cedente; puesto que, cuántos más años tenga, menos le quedan de vida probable, y tanto más crecida será la renta que podrá percibir.

645. Cómo se calculan los años de vida probable que tiene una persona. — Por las tablas de mortalidad humana, siendo las más aceptadas por las compañías de seguros sobre la vida las de Duvillard y Duparcieux.

646. Cómo se calcula la renta vitalicia que disfrutaría una persona cediendo una determinada cantidad. — Primero se calcula su vida probable por medio de la tabla de mortalidad, y luego, valiéndose de la *tabla de amortizaciones*, se ve la anualidad que correspondería para la amortización del capital e intereses que cede, durante los años que tiene de vida probable. Esta anualidad sería la renta.

EXTRACTO DE LAS TABLAS VITALICIAS DE DUVILLARD

EDAD — Años	VIDA PROBABLE — Años	EDAD — Años	VIDA PROBABLE — Años
1	37	45	20
5	45 $^5/_7$	50	17
10	43	55	14
15	39	60	11
20	35 $^1/_2$	65	8 $^2/_3$
25	32 $^1/_2$	70	6 $^1/_2$
30	29 $^1/_2$	75	5
35	26	80	3 $^1/_2$
40	23	85	2 $^4/_5$

Las sociedades de seguros sobre la vida se dedican, principalmente, a estos negocios.

Estas sociedades son de la mayor importancia por los beneficios que proporcionan. Cada día van adquiriendo mayor crédito, y es muy seguro que, en día no muy lejano, nadie las mirará con el recelo injustificado con que algunos todavía actualmente las consideran.— Son dignas de toda recomendación el *Banco Vitalicio de España*, domiciliada en Barcelona, la *Unión de Norwick*, de Inglaterra, así como *La Equitativa*, de Nueva York, la cual tiene sucursales en casi todas las naciones de Europa y América.

Las operaciones sobre *rentas vitalicias*, dan lugar a las mismas cuestiones que hemos estudiado al tratar las *anualidades* y *amortizaciones*.

EJEMPLO: *Un caballero sin familia y que tiene 45 años de edad, cede a la compañía de seguros sobre la vida Banco Vitalicio de España una casa y varios campos de su propiedad, valorada en 20000 ptas. la primera, y en 15000 ptas. los terrenos mencionados. Conviniendo a 5 % la tasa del interés, ¿qué renta anual percibirá?*

Resolución

Por la *tabla de Duvillard*, vemos que el caballero mencionado tiene 20 años de vida probable. Luego todo se reduce a calcular la anualidad que debe satisfacerse para amortizar en 20 años las 35000 ptas. que constituyen su fortuna, contando los intereses compuestos a 5 %.

En la *tabla de amortizaciones*, hallamos que, para extinguir en 20 años el capital 100 y sus intereses compuestos de 5 %, hemos de satisfacer la anualidad 8'024.

Luego el cálculo será:

S. Si para amortizar el capital 100 ptas. corresponden de anualidad 8'024 ptas.
P. » » » 35000 » corresponderán » x »

100 : 35000 :: 8'024 : x = 2808'40 ptas., renta anual.

Falsa posición, o método de las hipótesis

647. Definición. — Regla de *falsa posición* es aquélla en virtud de la cual, por medio de *uno* o *dos* supuestos falsos, se halla el resultado verdadero de una cuestión.

648. Su división — Divídese en *simple* y *doble*. Es simple cuando, para hallar el resultado verdadero, basta un *solo número supuesto falso;* y es doble cuando son necesarios *dos números supuestos falsos.*

En el fondo, la *falsa posición* no es más que un procedimiento analítico por el que se resuelven varios problemas aritméticos y muchos de los que corresponden al Álgebra.

649. Resolución de los problemas de falsa posición simple.—*Se elige un número a arbitrio, se toman de él los múltiplos o submúltiplos que indica el problema, y si no resulta el número que buscamos, se forma la siguiente proporción:*

Resultado del número elegido es al número que se da en el problema, como el número elegido es al que tratamos de averiguar.

EJEMPLOS: 1.º *Distribúyanse 3900 pesetas entre tres personas, de manera que la primera reciba tres veces más que la segunda, y ésta, la mitad de lo que corresponda a la tercera.*

Resolución: Como corresponde á la segunda la mitad de lo que perciba la tercera, supondremos dar á ésta un número que sea múltiplo de 2, por ejemplo, este mismo número:

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Parte de la 3.}^{\text{a}}\ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \\ \text{Parte de la 2.}^{\text{a}}\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ \text{Parte de la 1.}^{\text{a}}\ldots\ldots\ldots\ldots & 3 \end{array}\right\} = 6.$$

Como la suma de estas partes da 6, y no el número de pesetas que se ha de repartir, 3900, claro está que 2 pesetas no es lo que corresponde a la persona 3.ª Planteando la proporción anterior, tendremos:

$$6 : 3900 :: 2 : x.$$

$$x = \frac{3900 \times 2}{6} = \frac{7800}{6} = 1300 \text{ ptas., parte de la persona 3.ª}$$

De consiguiente:

Parte de la 3.ª	1300 ptas.
» » 2.ª $\left(\frac{1300}{2}\right)$	650 »
» » 1.ª (3 × 650)	1950 »
Cantidad dada para distribuir	3900 ptas.

La proporción 6 : 3900 :: 2 : x es evidente; pues la cuestión se reduce a dividir el número 3900 en partes proporcionales a los números 2, 1 y 3 (**404**).

2.º *Hállese un número tal, que su mitad, tercio y quinta parte sumen* 248.

Resolución: Elijamos un número cualquiera que sea múltiplo de 2, de 3 y de 5, a fin de que no resulten quebrados que siempre dificultan el cálculo; por ejemplo, el número 30:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Mitad de 30} \ldots\ldots\ldots\ldots & 15 \\ \text{Tercio de 30} \ldots\ldots\ldots\ldots & 10 \\ \text{Quinto de 30} \ldots\ldots\ldots\ldots & 6 \end{array}\right\} = 31$$

Como estas partes suman 31, y no 248, claro está que el número 31, de que proceden, no es el pedido. Planteando la proporción dada para la resolución de la falsa posición simple, tendremos:

$$31 : 248 :: 30 : x$$

$$x = \frac{248 \times 30}{31} = 240, \text{ número buscado.}$$

Comprobación

Mitad de 240	120
Tercio de 240	80
Quinto de 240	48
Suma dada en el problema	248

Tampoco es difícil el razonamiento en que se funda la proporción

$$31 : 248 :: 30 : x$$

En efecto; si dos cantidades tienen entre sí una razón cualquiera, sus mitades, sus terceras, sus quintas, etc., partes, guardan la misma razón (**340** — 1.ª y **347**); luego los números 31, 248, 30 y x (número buscado) formarán proporción; de consiguiente, diremos:

S. Si 31 (suma de la mitad, tercia y quinta partes) proviene del número 30,
P. 248 (cuando la suma de estas partes dé este número) provendrá del núm. x

$$31 : 248 :: 30 : x$$

650. Resolución de los problemas de falsa posición doble. — Antes de dar la regla general para la resolución de los problemas de esta clase, cuya explicación razonada corresponde al Álgebra, deseamos que el lector nos siga en la resolución del siguiente

PROBLEMA: *Se tienen tres depósitos llenos de vino de la misma clase: hay en el 1.º 40 litros más que en el 2.º; el 3.º contiene tanto como los otros dos, y el contenido de los tres es 440 litros. ¿Qué cantidad de vino hay en cada depósito?*

Primera solución. — Un error en *menos* y otro en *más*.

1.er supuesto:		2.º supuesto:	
Contenido del 2.º depósito.	60 litros.	Contenido del 2.º depósito. .	142 litros.
El del 1.º será.	100 »	El del 1.º será............	182 »
Y el del 3.º	160 »	Y el del 3.º.	324 »
Contenido total supuesto. .	320 litros.	Contenido total supuesto. .	648 litros.
1.er error, 440 — 320 = 120 litros.		2.º error, 440 — 648 = — 208 litros.	

12480 = 208 del 2.º error × 60 del 1.er supuesto
17040 = 120 del 1.er error × 142 del 2.º supuesto

Sumas...... 29520 : 328 = 90 litros, contenido del 2.º depósito.

Comprobación....	Contenido del 2.º depósito..................		90 litros.
	» » 1.er »	(90 + 40)........	130 »
	» » 3.er »	(90 + 130)........	220 »
	Contenido de los tres depósitos		440 litros.

Segunda solución. — Ambos errores son en *menos*.

1.er supuesto:		2.º supuesto:	
Contenido del 2.º depósito.	60 litros.	Contenido del 2.º depósito.	65 litros.
El del 1.º será	100 »	El del 1.º será	105 »
Y el del 3.º	160 »	Y el del 3.º.............	170 »
Contenido total supuesto.	320 litros.	Contenido total supuesto.	340 litros.
1.er error, 440 — 320 = 120 litros.		2.º error, 440 — 340 = 100 litros.	

6000 = 100 del 2.º error × 60 del 1.er supuesto
7800 = 120 del 1.er error × 65 del 2.º supuesto

Diferencias.... 1800 : 20 = 90 litros, contenido del 2.º depósito.

Tercera solución. — Ambos errores son en *más*.

1.er supuesto:		2.º supuesto:	
Contenido del 2.º depósito.	142 litros.	Contenido del 2.º depósito.	150 litros.
El del 1.º será	182 »	El del 1.º será...........	190 »
Y el del 3.º.............	324 »	Y el del 3.º	340 »
Contenido total supuesto.	648 litros.	Contenido total supuesto.	680 litros.
1.er error, 440 — 648 = — 208 litros.		2.º error, 440 — 680 = — 240 litros.	

34080 = 240 del 2.º error × 142 del 1.er supuesto
31200 = 208 del 1.er error × 150 del 2.º supuesto

Diferencias.... 2880 : 32 = 90 litros, contenido del 2.º depósito.

Por las tres soluciones del mismo problema que anteceden, se ve que las dos suposiciones falsas originan, inevitablemente, dos errores, los cuales pueden ser: 1.º *Uno en menos y otro en más;* 2.º *Ambos errores en menos,* y 3.º *Ambos errores en más:*

De todo lo cual se desprende la siguiente

651. Regla. — *Para resolver un problema de falsa posición doble, se eligen dos números cualesquiera, y se combina cada uno con arreglo a las condiciones del problema. Si ninguno de los dos números es el que se busca, como sucede casi siempre, se originan dos errores, que pueden ser uno en más y el otro en menos, ambos en más o ambos en menos.*

En el primer caso, se multiplica el segundo error por el primer número supuesto, y el primer error por el segundo número supuesto; se suman estos productos, y la suma se divide por la suma de los errores: el cociente es el número que se deseaba averiguar.

Si los errores originados son ambos en más o en menos, se multiplican, igualmente, el segundo error por el primer supuesto, y el primer error por el segundo supuesto; se restan los productos obtenidos, y su diferencia se divide por la diferencia de los errores: el cociente es, también, el número que se deseaba averiguar.

NOTA.—No negaremos que la regla de falsa posición tenga su importancia; pero estamos muy lejos de concederle la que algunos autores nacionales y extranjeros le atribuyen. Nosotros acudimos siempre al análisis, y rarísimas veces hemos de valernos de la regla anterior para la resolución de los problemas de esta índole.

Véase con qué sencillez resolvemos el problema anterior:

Si los 3 depósitos contienen 440 litros, y el 3.º contiene tanto como los dos primeros, el contenido del 3.er depósito es $\frac{440}{2} = 220$ litros.

Si del contenido del 1.º y 2.º depósitos, 220 litros, quitamos el exceso del contenido del 1.º sobre el del 2.º, tendremos: $220 - 40 = 180$ litros.

Luego el contenido del 2.º depósito es $\frac{180}{2} = 90$ litros,

y el contenido del 1.º, $90 + 40 = 130$ litros.

OTRO PROBLEMA: *Preguntaron a un individuo qué edad tenía, y contestó: «Si a los años que tengo añadís su mitad, cuarto y quinto, la suma será 78 años.» ¿Qué edad tenía?*

Por falsa posición doble

1.er supuesto:		2.º supuesto:	
Edad del individuo	20 años.	Edad del individuo	80 años.
$^1/_2$ de esta edad	10 »	$^1/_2$ de esta edad	40 »
$^1/_4$ » » »	5 »	$^1/_4$ » » »	20 »
$^1/_5$ » » »	4 »	$^1/_5$ » » »	16 »
	39 años.		156 años.
1.er error, $78 - 39 = 39$ años.		2.º error, $78 - 156 = -78$ años.	

1560 = 78 del 2.º error × 20 del 1.er supuesto
3120 = 39 del 1.er error × 80 del 2.º supuesto

Sumas........ 4680 : 117 = 40 años, edad del individuo.

Comprobación

Edad hallada	40 años.
$^1/_2$ de 40 años	20 »
$^1/_4$ » 40 »	10 »
$^1/_5$ » 40 »	8 »
Suma dada...........	78 años.

Solución analítica

Considerando la edad del individuo como un todo y éste representado por 1, tendremos que: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 78$ años.

Reduciendo a un común denominador los quebrados del primer miembro de la igualdad anterior, y observando, si se quiere, que 20 es el m. c. m. de los denominadores, tenemos:

$$\frac{20 + 10 + 5 + 4}{20} = 78$$

ó bien, $\frac{39}{20} = 78$

Luego 78 años es $\frac{39}{20}$ de la edad del individuo.

De consiguiente, $\frac{1}{20}$ de esta edad es $\frac{78}{39}$, y $\frac{20}{20}$ de esta edad, o toda la edad $\frac{78 \times 20}{39} = \frac{1560}{39} = 40$ años.

Averías

651′. Qué se entiende por avería. — Se entiende por avería, según el Código de Comercio, todo gasto extraordinario y eventual que sobreviene a un buque, a su cargamento, o a ambas cosas a la vez, bien sea por causa de un temporal o de cualquier otro accidente.

651″. Clasificación de las averías.—En rigor, sólo se admiten dos clases de averías: *simples o particulares* y *gruesas o comunes*.

651‴. Avería simple. — Se consideran como *averías simples*, todos los gastos y perjuicios causados en el buque o en su cargamento, que no hayan redundado en beneficio y utilidad de todos los interesados en el mismo buque y su carga. Estas averías se soportan por el dueño del objeto que ocasionó el gasto, o recibió el daño.

651⁗. Avería común o gruesa.—Se llaman *averías comunes o gruesas*, los daños y gastos ocasionados deliberadamente para salvar el buque y su cargamento. Son daños ocasionados para evitar mayores perjuicios, que benefician los intereses de todos, y, por tanto, han de ser satisfechos *a prorrata* por todos los interesados en el buque y su cargamento.

El reconocimiento y liquidación de una avería, se hace por peritos nombrados a propuesta de los interesados o de sus representantes. Si éstos no lo hiciesen, los nombra el Juzgado de primera instancia del puerto de la descarga; si fuese en un país extranjero, el cónsul español, y, en su defecto, la autoridad judicial que entienda en los negocios mercantiles.

651′′′′′. Cómo se liquida una avería. — Para liquidar una avería, se forman los cuatro estados siguientes:

En el primero, se detalla el importe de las pérdidas, o la masa de la avería.

En el segundo, se expresan los valores que contribuyen al pago de la avería.

En el tercero, se hace el reparto de las pérdidas entre los valores sujetos a contribución.

En el cuarto, se calculan las contribuciones y los reintegros efectivos.

EJEMPLO: *Liquidación de la avería gruesa ocurrida en la goleta «Libertad», de la matrícula de Barcelona, capitán don Lorenzo Cufí, armadores Lladó, Pugnáu y C.ª, ocurrida en el viaje que ha verificado desde Barcelona a Cádiz. Los peritos infrascritos, nombrados por etc., etc.* ....
....

ESTADO 1.º

Importe de las pérdidas o masa de la avería

1.º — 4 pipas aguardiente pertenecientes a E. Pérez, arrojadas al mar, valoradas en	Ptas.	800
2.º — 20 fardos cáñamo, de P. Gómez, arrojados al mar y estimados en	»	1000
3.º — 10 sacos harina, de S. Tauler, arrojados al mar, valorados en	»	250
4.º — Pérdida del áncora y cadena	»	600
5.º — Honorarios de los peritos y gastos del Juzgado	»	500
Total de la avería	Ptas.	3150

ESTADO 2.º

Valores que contribuyen al pago de la avería

1.º — 16 pipas aguardiente, de E. Pérez, estimadas en	Ptas.	3200	Ptas.	4000
4 » » » íd., arrojadas al mar.	»	800		
2.º — 100 fardos cáñamo, de P. Gómez, estimados en	»	5000	»	6000
20 » » » íd. echados al mar.....	»	1000		
3.º — 10 sacos harina, de S. Tauler, arrojados al mar y estimados en			»	250
4.º — 100 Hl. petróleo, salvados, de Ruiz, valorados en.........			»	2500
5.º — Valor del buque averiado....................	Ptas.	60000	»	62600
Fletes con descuento de los salarios del capitán y tripulación	»	2000		
Pérdida del áncora y cadena	»	600		
Total de los valores que responden de la avería...			Ptas.	75350

Antes de hacer el estado tercero, veamos el tanto por ciento de pérdida que la avería representa.

Diremos:

S.	Si 75350 ptas.	han perdido	3150 ptas.
P.	100 »	habrán perdido	x »

$$75350 : 100 :: 3150 : x$$

$$x = \frac{3150 \times 100}{75350} = 4'179 \%$$

ESTADO 3.º

Repartimiento de las pérdidas entre los valores que responden de la avería

La base de este repartimiento es el 4'179 %. Los valores que responden de la avería contribuyen con:

1.º	Las mercaderías de Pérez	por 4'179 % s/	4000 ptas.	=	Ptas.	167'26
2.º	» » » Gómez	» » » »	6000 »	=	»	250'75
3.º	» » » Tauler	» » » »	250 »	=	»	10'46
4.º	» » » Ruiz	» » » »	2500 »	=	»	104'49
5.º	El buque	» » » »	62600 »	=	»	2616'05
	Total				Ptas.	3149'01

ESTADO 4.º

Contribuciones efectivas y reembolsos efectivos

De los datos anteriores resulta que:

E. Pérez debe cobrar......................	Ptas.	800		
y contribuye con	»	— 167'26		
Luego, cobrará en efectivo..................			Ptas.	632'74
P. Gómez debe cobrar......................	Ptas.	1000		
y contribuye con	»	— 250'75		
Luego, cobrará..............................			»	749'25
S. Tauler debe cobrar......................	Ptas.	250		
y contribuye con	»	— 10'46		
Luego cobrará..............................			»	239'54
Los peritos y el Juzgado deben cobrar......................			»	500
Los reembolsos efectivos son..........			Ptas.	2121'53
Ruiz nada pierde y debe pagar			Ptas.	104'49
El buque con los fletes y demás pérdidas contribuye con..............................	Ptas.	2616'05		
y sólo debe cobrar..........................	»	— 600		
Deberá pagar en efectivo			»	2016'05
Las contribuciones efectivas son de			Ptas.	2120'54

Razones y proporciones aritméticas

652. Razón aritmética. — Llamamos *razón aritmética, o por diferencia,* a la comparación entre dos números, con objeto de averiguar en cuánto el primero excede al segundo, o el segundo excede al primero. De consiguiente, una razón aritmética no es más que una resta indicada.

653. Términos de toda razón aritmética. — La razón aritmética tiene, como la geométrica, dos términos: el primero, llamado *antecedente*, y el segundo, *consecuente*. La diferencia entre el antecedente y el consecuente se llama *exponente* de la razón, o simplemente *razón*.

654. Cómo se escribe una razón aritmética. — Toda razón aritmética se escribe poniendo un punto (·), que se lee *es a*, entre el antecedente y el consecuente. *Así:* $8 \cdot 4 = 4$; $12 \cdot 5 = 7$; etc.

Dos razones aritméticas son *iguales* cuando tienen exponentes iguales; v. gr.: $6 \cdot 2$ y $9 \cdot 5$, pues ambas tienen igual exponente, 4.

655. Propiedades de las razones aritméticas. — De lo que llevamos dicho, se deduce que las propiedades de las razones aritméticas son las mismas que las de la substracción, es decir:

Si aumentamos o disminuímos el antecedente, la razón aumenta o disminuye.

Si aumentamos o disminuímos el consecuente, la razón disminuye o aumenta.

Si aumentamos o disminuímos de un mismo número el antecedente y el consecuente, la razón no sufre alteración.

De esta última propiedad, se deduce que:

Dada una razón aritmética, pueden hallarse otras que sean iguales a la propuesta, añadiendo o quitando un mismo número al antecedente y al consecuente.

Sea la razón $12 \cdot 8 = 4$.

Añadiendo a sus dos términos el número 5, tenemos:

$$17 \cdot 13 = 4,$$

razón igual a la propuesta, ya que tienen ambas igual exponente.

Quitando de ambos términos de la razón dada al número 3, tenemos:

$$9 \cdot 5 = 4,$$

razón igual a la propuesta.

656. Razón aritmética compuesta. — Es la que resulta de sumar, ordenadamente, los antecedentes y los consecuentes de dos o más razones aritméticas, llamadas *simples o componentes.*

V. g.:

$$\text{Razones simples} \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} 8 \cdot 6 \\ 7 \cdot 3 \end{cases}$$

$$\text{Razón compuesta} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15 \cdot 9$$

657. Proporción aritmética. — *Proporción aritmética o equidiferencia,* es la expresión de dos razones aritméticas iguales.

658. Cómo se escribe una proporción aritmética. — Para escribir una proporción aritmética, se unen ambas razones iguales por medio de *dos puntos* (:) que se leen *como*. V. g.: 6 · 4 : 9 · 7.

El primero y cuarto términos se llaman *extremos*, y el segundo, y tercero *medios*.

659. División de las proporciones aritméticas. — Se dividen, como las geométricas, en *discretas* y *continuas*. Son discretas las que tienen los términos medios desiguales, y continuas, las que los tienen iguales.

V. gr.: Es continua la siguiente: 12 · 8 : 8 · 4.

Es discreta la siguiente: 8 · 4 : 16 · 12.

En la proporción continua, el término medio se llama *medio diferencial* entre los extremos.

660. Propiedad fundamental de las proporciones aritméticas.— Es la siguiente: *la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios.*

Sea la proporción 8 · 4 : 16 · 12, en la que 4 es la razón. Como que cada antecedente es igual al exponente respectivo más la razón, tenemos que $8 = 4 + 4$, y $16 = 12 + 4$. Substituyendo, en la proporción anterior, 8 y 16 por sus equivalentes, tendremos:

$$4 + 4 \cdot 4 : 12 + 4 \cdot 12$$

Donde vemos que $4 + 4 + 12 = 4 + 4 + 12$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

También se dice que, *en la proporción continua, la suma de los extremos es igual al duplo del término medio, o al duplo del medio diferencial.*

661. Corolarios. — Dados tres términos de una proporción aritmética, puede hallarse el término desconocido o incógnito:

1.º *Si el término incógnito es un extremo, se suman los dos medios, y de esta suma se resta el extremo conocido.*

Así, en la proporción 20 · 6 : 18 · x, tenemos:

$$x + 20 = 6 + 18;\ \text{luego}\ x = (6 + 18) - 20 = 4.$$

2.º *Si el término desconocido es un medio, se suman los dos extremos, y de la suma se resta el medio conocido.*

En la proporción 9 · x : 6 · 4, tenemos:

$$x + 6 = 9 + 4;\ \text{luego}\ x = (9 + 4) - 6 = 7.$$

3.º *Si la proporción aritmética es continua, para hallar un extremo restaremos el extremo conocido del duplo del término medio.*

Así, en la proporción 12 · 9 : 9 · x, tenemos:

$$x + 12 = 9 + 9,\ \text{o bien},\ x + 12 = 2 \times 9;\ \text{luego}\ x = 2 \times 9 - 12 = 6.$$

4.º *Si el término incógnito es el medio diferencial, sacaremos la mitad de la suma de los extremos.*

Así, en la proporción 12 · x : x · 6, tenemos:

$$x + x = 12 + 6,\ \text{ó bien},\ 2 \times x = 12 + 6;\ \text{luego}\ x = \frac{12 + 6}{2} = 9.$$

662. Proporción aritmética compuesta.—Es la que se obtiene sumando, ordenadamente, los antecedentes y los consecuentes de dos o más proporciones simples o componentes.

Sean las equidiferencias siguientes:

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 9 : 18 \cdot x \\ 8 \cdot 4 : x \cdot z \\ 5 \cdot 3 : z \cdot n \\ \hline 12 + 8 + 5 \cdot 9 + 4 + 3 : 18 \cdot n \end{array}$$

Proporción compuesta: $25 \cdot 16 : 18 \cdot n$

Progresiones aritméticas

663. Definición. — Llamamos *progresión* (*) *aritmética*, o *por diferencia*, a una serie de números, tales, que cada uno excede a su anterior, o es excedido por éste, en una misma cantidad.

664. División. — Las progresiones aritméticas, o por diferencia, se dividen en *crecientes* y *decrecientes*.

Son crecientes, cuando cada término excede a su anterior en una misma cantidad.

Son decrecientes, cuando cada término es excedido por el que le precede en una misma cantidad.

EJEMPLOS:

Progresión aritmética creciente:

$$\div 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \ldots.$$

Progresión aritmética decreciente:

$$\div 21 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \ldots.$$

Y se leen: como 5 es a 7, es a 9, es a 11, es a 13, es a 15, etc.
como 21 es a 19, es a 17, es a 15, es a 13, es a 11, etc.

Las progresiones aritméticas son, por lo que se ve, una serie de razones aritméticas iguales. Las anteriores significan, pues, que:

$$5 \cdot 7 : 7 \cdot 9 : 9 \cdot 11 : 11 \cdot 13 : 13 \cdot 15 : 15 \cdot 17 : 17 \cdot 19 : 19 \cdot 21$$

Y que:

$$21 \cdot 19 : 19 \cdot 17 : 17 \cdot 15 : 15 \cdot 13 : 13 \cdot 11 : 11 \cdot 9 : 9 \cdot 7 : 7 \cdot 5$$

ESCOLIO. — Obsérvese, pues, que *cuatro términos consecutivos de una progresión aritmética forman una proporción aritmética.*

665. Signo de la progresión aritmética.—A toda progresión aritmética, se le antepone, como hemos visto, este signo $\div$.

666. Razón de la progresión aritmética. — Es la cantidad uniforme con que aumentan o disminuyen sus términos.

Así, en la progresión $\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23$, la razón es 4.
En la $\div 18 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3$, la razón es 3.

667. Propiedades de las progresiones aritméticas. — Las principales son las siguientes:

1.ª PROPIEDAD. — *Un término cualquiera de toda progresión aritmética creciente es igual al primero, más la razón multiplicada por el número de términos que preceden al término tomado.*

Y si la progresión es decreciente, un término cualquiera es igual al primero, menos la razón multiplicada por el número de términos que preceden al tomado.

(*) Del latín *progressio*, adelantarse.

En efecto: Sea la progresión creciente $\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \ldots\ldots \cdot p \cdot q \cdot u$, en la que a es el primer término; u, el último; n, el número de términos de la progresión, y r, la razón. Según la definición de progresiones (**663**), tenemos:

2.º término, $b = a + r$.
3.er » $c = b + r = a + 2r$
4.º » $d = c + r = a + 3r$
.... y llamando l al término que ocupa el lugar m, m.º término, $l = a + (m - 1)\,r$, que es lo que queríamos demostrar.

El último término u será: $u = a + (n - 1)\,r$. (1)

Sea, ahora, la progresión decreciente $\div u \cdot q \cdot p \cdot \ldots\ldots \cdot d \cdot c \cdot b \cdot a$, en la que n es el número de términos, r, la razón, y u, el primer término. Según la definición de progresiones (**663**), tendremos:

2.º término, $q = u - r$
3.er » $p = q - r = u - 2r$
.... y llamando l al término que ocupa el lugar m, m.º término, $l = u - (m - 1)\,r$, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplos:

En la progresión creciente $\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23$, cuya razón es 4, tendremos: $15 = 3 + (4 \times 3)$; $19 = 3 + (4 \times 4)$; $23 = 3 + (4 \times 5)$; etc.

En la decreciente $\div 18 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3$, cuya razón es 3, tendremos: $15 = 18 - (3 \times 1)$; $9 = 18 - (3 \times 3)$; $6 = 18 - (3 \times 4)$; etc.

Corolario. — *En toda progresión por diferencia, la suma de los términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de estos extremos.*

Sea la progresión creciente $\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot p \cdot q \cdot u$, siendo r la razón. c y p son dos términos equidistantes de a y u. Queremos demostrar que $c + p = a + u$.

En efecto: $c = a + 2\,r$ (1), y $u = p + 2\,r$, de donde, $p = u - 2\,r$ (2). Sumando ordenadamente las dos igualdades (1) y (2), tenemos:

$c + p = a + 2\,r + u - 2\,r$, o sea $c + p = a + u$, que es lo que queríamos demostrar.

Escolio. *Si el número de términos es impar, el principio también es cierto para el término medio, pues el duplo de éste es igual a la suma de los extremos.* En efecto:

Sea la progresión $\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot u$, cuya razón es r. Para el término medio, c, tenemos $c = a + 2\,r$, y $c = u - 2\,r$. Sumando estas dos igualdades,

$$c + c = a + 2\,r + u - 2\,r, \quad \text{o sea,} \quad 2\,c = a + u.$$

2.ª Propiedad. — *La razón de toda progresión aritmética, creciente o decreciente, es igual al cociente de dividir la diferencia entre los términos mayor y menor por el número de términos de la progresión menos uno.*

En efecto, de la fórmula (1) de la propiedad anterior, $u = a + (n - 1)\,r$, se deduce: $u - a = (n - 1)\,r$; por tanto, $r = \dfrac{u - a}{n - 1}$, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplos: Sea la progresión creciente $\div 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$, cuya razón es 2. Llamando x a la razón, tendremos, según la regla:

$$x = \frac{12 - 2}{5} = \frac{10}{5} = 2, \text{ razón de la progresión.}$$

Sea la decreciente $\div 16 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4$, cuya razón es 3. Llamando x a la razón, tendremos, según la regla:

$$x = \frac{16 - 4}{4} = \frac{12}{4} = 3, \text{ razón de la progresión.}$$

668. Consecuencia que se deduce de la segunda propiedad. — Se deduce que:

Para interpolar, entre dos números dados, los términos diferenciales, o medios aritméticos, que se desee, basta determinar la razón de la progresión.

Ejemplos:

1.° *Propongámonos interpolar 4 medios diferenciales entre los números 2 y 12.*
Claro está que dicha progresión tendrá 6 términos.
Hallemos la razón:

Término mayor............ 12
» menor........... 2

Llamando x a la razón, ésta será: $x = \frac{12-2}{5} = \frac{10}{5} = 2.$

Luego, si queremos progresión creciente, ésta será:

$$\div 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$$

Y, si queremos progresión decreciente, ésta será:

$$\div 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$$

2.° *Interpolar 6 medios aritméticos entre los números 4 y 9.*
Dicha progresión tendrá 8 términos.
Hallemos la razón:

Término mayor............9
» menor...........4

Llamando x a dicha razón, ésta será: $x = \frac{9-4}{7} = \frac{5}{7}.$

Progresión creciente: $\div 4 \cdot 4\,{}^5/_7 \cdot 5\,{}^3/_7 \cdot 6\,{}^1/_7 \cdot 6\,{}^6/_7 \cdot 7\,{}^4/_7 \cdot 8\,{}^2/_7 \cdot 9.$
» decreciente: $\div 9 \cdot 8\,{}^2/_7 \cdot 7\,{}^4/_7 \cdot 6\,{}^6/_7 \cdot 6\,{}^1/_7 \cdot 5\,{}^3/_7 \cdot 4\,{}^5/_7 \cdot 4.$

Escolio. —*Si entre los términos consecutivos de una progresión aritmética se interpola un mismo número de medios aritméticos, los términos de la progresión y los medios interpolados forman una nueva progresión.*

Porque siendo el mismo el número de términos de cada progresión parcial y siendo iguales las diferencias $u - a$ para cada una de estas progresiones, la fórmula $r = \frac{u-a}{n-1}$ nos dará una misma razón por cada progresión parcial; y como el último término de una de éstas es el primero de la siguiente, las progresiones parciales formarán una sola progresión.

Ejemplo: Sea la progresión $\div 1 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$. Si interpolamos dos medios aritméticos entre los términos de esta progresión y llamamos r, r' y r'' a las razones de cada progresión parcial, tendremos:

$$r = \frac{7-1}{4-1} = 2 \qquad r' = \frac{13-7}{4-1} = 2 \qquad r'' = \frac{19-13}{4-1} = 2.$$

La nueva progresión, es, pues:

$$\div 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$$

3.ª Propiedad. — *El número de términos de toda progresión aritmética es igual a una suma cuyo primer sumando es la unidad, y el segundo, el cociente que se obtiene partiendo la diferencia entre el término mayor y el menor por la razón.*

En efecto: De la fórmula (1) de la primera propiedad, $u = a + (n-1)\,r$, se deduce: $u - a = n\,r - r$; de donde, $n\,r = r + u - a$, y despejando n,

$$n = 1 + \frac{u-a}{r}, \text{ que es lo que queríamos demostrar.}$$

Ejemplo: Sea la progresión:

$$\div 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21,$$

cuya razón es 2. Llamando x al número de términos, tendremos:

$$x = 1 + \frac{21-5}{2} = 1 + 8 = 9, \text{ número de términos de la progresión.}$$

4.ª Propiedad. — *La suma de los términos de toda progresión aritmética, es igual a la suma del mayor y del menor multiplicada por el número de términos y dividida por 2.*

En efecto: Sea la progresión $\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot p \cdot q \cdot u$; siendo u el número de sus términos y representando por S su suma, tendremos:

$$S = a + b + c + d + e + p + q + u$$

o bien,

$$S = u + q + p + e + d + c + b + a.$$

Sumando ordenadamente estas dos igualdades,

$$2S = (a + u) + (b + q) + (c + p) + (d + e) + (e + d) + (p + c) + (q + b) + (u + a)$$

o bien (**667**-1.ª *Propiedad-Corolario*) $2S = (a + u)\,n$, de donde $S = \frac{(a + u)\,n}{2}$, que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo: Tomemos la progresión $\div 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$, la cual tiene 6 términos. Según la regla, tendremos:

$$12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = \frac{(12 + 2) \times 6}{2} = \frac{14 \times 6}{2} = \frac{84}{2} = 42;$$

luego $12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 42$; y sumando, en el primer miembro de esta igualdad, tendremos $42 = 42$.

Problemas de progresiones por diferencia

1.ª Propiedad.—*Un industrial debe cierta cantidad, que promete hacer efectiva en 12 meses, dando el primer mes 50 pesetas, el segundo 60, el tercero 70, y así sucesivamente, aumentando en 10 pesetas cada mes. ¿Qué cantidad deberá entregar el mes quinto y cuánto, el último?*

La resolución de este problema se reduce a hallar el *quinto* y el *doceavo* términos de una progresión aritmética creciente cuyo primer término es 50 y 10 la razón.

Hallemos el quinto término. Llamándole x, tendremos:

$$x = 50 + (10 \times 4) = 50 + 40 = 90 \text{ pesetas.}$$

Para el término doceavo, tendremos:

$$x = 50 + (10 \times 11) = 50 + 110 = 160 \text{ pesetas.}$$

2.ª Propiedad.—*Cierto individuo contrató con un minero el hacer un pozo de 22 metros de profundidad, dándole 3 ptas. por el primer metro, y conviniendo en que le aumentaría el valor de cada metro sucesivo en una cantidad fija. Listo el pozo, el propietario entregó al minero 87 ptas. por el último metro: ¿cuál fué la cantidad fija con que se aumentó el valor de cada metro?*

La cuestión se reduce a calcular la razón de una progresión aritmética creciente que tiene 22 términos, siendo el primero y el último 3 y 87 respectivamente.

Llamando x a la razón, tendremos:

$$x = \frac{87 - 3}{21} = \frac{84}{21} = 4 \text{ pesetas.}$$

Consecuencia que se deduce de la 2.ª propiedad.—*Una persona pagó cierta cantidad en 14 meses, dando 3 ptas. el primer mes y 55 el último, aumentando en una cantidad fija la entrega de cada mes. Véase cuánto dió cada mes.*

La cuestión se reduce a interpolar 12 medios diferenciales entre los números 3 y 55, para lo cual hemos de hallar, primero, la razón de la progresión.

La razón será:

$$x = \frac{55 - 3}{13} = \frac{52}{13} = 4.$$

La progresión, pues, será:

$$\div\, 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 27 \cdot 31 \cdot 35 \cdot 39 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 51 \cdot 55,$$

cuyos términos nos dicen las cantidades que entregó mensualmente.

3.ª PROPIEDAD.—*Se han distribuído 162 manzanas entre un número de niños, dando a cada uno 3 manzanas más que al anterior. ¿Entre cuántos niños se han distribuído las 162 manzanas, si el primero ha recibido 6, y 30 el último?*

La cuestión se reduce a calcular el número de términos de una progresión cuyo primero y último términos son 6 y 30, y 3 la razón.

Llamando x al número de términos, tendremos:

$$x = 1 + \frac{30 - 6}{3} = 1 + 8 = 9 \text{ niños.}$$

4.ª PROPIEDAD.—*Una piedra abandonada en el espacio recorre 4'9044 metros el primer segundo de la caída; 14'7132 m. en el segundo; 24'5220 m. en el tercer segundo; es decir, cada segundo recorre 9'8088 m. más que el anterior. ¿Cuál fué el espacio recorrido en 12 segundos?*

La cuestión se reduce a determinar la suma de los términos de una progresión que tiene 12 términos, siendo el primero 4'9044, y 9'8088 la razón.

Hallemos, primeramente, el último término.

Llamándole x, tendremos:

$$x = 4'9044 + 9'8088 \times 11 = 4'9044 + 107'8968 = 112'8012.$$

Llamando z a la suma de los términos, será:

$$z = \frac{(112'8012 + 4'9044) \times 12}{2} = \frac{117'7056 \times 12}{2} = \frac{1412'4672}{2} = 706'2336 \text{ metros,}$$

espacio recorrido por la piedra.

Progresiones geométricas

669. Definición. —Progresión geométrica, o por cociente, es una serie de números tales, que cada uno de ellos contiene al que le precede, o es contenido por éste, el mismo número de veces.

De lo que se deduce que las progresiones geométricas pueden ser, como las aritméticas, *crecientes* y *decrecientes*.

EJEMPLOS:

Progresión geométrica creciente: $\div\, 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$
» » decreciente: $\div\, 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2$

670. Signo de las progresiones geométricas. —Lo forman una rayita y cuatro puntos dispuestos en esta forma $\div$

671. Razón de la progresión geométrica.—Se llama razón de una progresión geométrica, el cociente uniforme que se obtiene dividiendo entre sí dos términos consecutivos; o bien, el número que, con sus unidades, indica las veces que un término contiene a su anterior o es contenido por éste.

672. Cómo se leen.—Las progresiones geométricas se leen como las aritméticas. Así, la progresión $\div\, 1 : 4 : 16 : 64 : 256$, se leerá: como 1 es a 4, es a 16, es a 64, es a 256. Lo que significa que 1 es a 4 como 4 es a 16, como 16 es a 64, como 64 es a 256.

Por lo que se ve, toda progresión geométrica no es otra cosa que una serie de razones geométricas iguales, pues la progresión anterior equivale a

$$1 : 4 :: 4 : 16 :: 16 : 64 :: 64 : 256.$$

ESCOLIO. —*Obsérvese, pues, que cuatro términos consecutivos de una progresión geométrica forman una proporción geométrica.*

672 bis. Propiedades de las progresiones geométricas. — Las principales propiedades de las progresiones geométricas son, entre otras, las siguientes:

1.ª PROPIEDAD. — *Un término cualquiera de toda progresión geométrica creciente es igual al término primero, multiplicado por la razón elevada a una potencia cuyo exponente sea el número de términos que preceden al buscado.*

Si la progresión es decreciente, un término cualquiera es igual al primero dividido por la misma potencia de la razón (*).

En efecto: Sea la progresión creciente: $\div a : b : c : d : \ldots\ldots : p : t : u$, siendo n el número de términos, y q la razón de la progresión.

Según la definición de estas progresiones (**669**),

2.º término $b = a \times q$
3.er » $c = b \times q = a \times q^2$
4.º » $d = c \times q = a \times q^3$
.... y llamando l al término que ocupa el lugar m, m.º término $l = a \times q^{m-1}$, que es lo que queríamos demostrar.

El último término u será: $u = a \times q^{n-1}$ (1).

Sea, ahora, la progresión decreciente $\div u : t : p : \ldots\ldots : d : c : b : a$, siendo n el número de términos, y q la razón de la progresión.

Según la definición de estas progresiones (**669**),

2.º término $t = \dfrac{u}{q}$

3.er » $p = \dfrac{t}{q} = \dfrac{u}{q^2}$

.... y llamando l al término que ocupa el lugar m, m.º término, $l = \dfrac{u}{q^{m-1}}$, que es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLOS:

1.º *Sea la progresión geométrica creciente* $\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, *cuya razón es* 2. Apliquemos la regla anterior calculando los términos 3.º y 5.º

Llamando x al término 3.º, tendremos:

$$x = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8, \text{ término 3.º de la progresión.}$$

Llamando n al término 5.º, tendremos:

$$n = 2 \times 2^4 = 2 \times 16 = 32, \text{ término 5.º de la progresión.}$$

2.º *Sea la progresión decreciente* $\div 972 : 324 : 108 : 36 : 12 : 4$, *cuya razón es* 3.

Calculemos los valores de los términos 4.º y 6.º

Llamando x al término 4.º, tendremos:

$$x = \frac{972}{3^3} = 36, \text{ término 4.º de la progresión.}$$

Llamando n al término 6.º, tendremos:

$$x = \frac{972}{3^5} = \frac{972}{243} = 4, \text{ término 6.º de la progresión.}$$

COROLARIO. — *En toda progresión geométrica, el producto de los términos equidistantes de los extremos es igual al producto de estos extremos.*

Sea la progresión creciente $\div a : b : c : d : p : t : u$, cuya razón es q. Sean c y p los términos equidistantes de los extremos. Queremos demostrar que $c \times p = a \times u$.

(*) El término primero es igual al cociente del último dividido por una potencia de la razón cuyo exponente es el número de términos menos uno de la progresión, *si es creciente*.

Si es decreciente, el primer término es igual al producto del último por la misma potencia de la razón.

En efecto: $c = a \times q^2$ (1) y $u = p \times q^2$, de donde, $p = \frac{u}{q^2}$ (2).

Multiplicando ordenadamante las dos igualdades (1) y (2),

$c \times p = a \times q^2 \times \frac{u}{q^2}$, o bien, $c \times p = a \times u$, que es lo que queríamos demostrar.

ESCOLIO. — *Si el número de términos es impar, también se verifica la propiedad anterior para el término medio, pues su cuadrado es igual al producto de los términos extremos.* En efecto:

Sea la progresión $\div\, a : b : c : d : p : t : u$, cuya razón es q.

Para el término medio d, tenemos: $d = a \times q^3$ y $d = \frac{u}{q^3}$. Multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, $d \times d = a \times q^3 \times \frac{u}{q^3}$, o sea, $d^2 = a \times u$.

2.ª PROPIEDAD. — *La razón de toda progresión geométrica, creciente o decreciente, es igual al término mayor dividido por el menor, de cuyo cociente se extrae la raíz indicada por el número de términos menos* 1.

En efecto: De la fórmula (1) de la propiedad anterior, $u = a \times q^{n-1}$, se deduce:

$$\frac{u}{a} = q^{n-1}, \text{ de donde } q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}, \text{ que es lo que queríamos demostrar.}$$

EJEMPLOS:

Determinar la razón de la progresión geométrica creciente $\div\, 3 : 18 : 108 : 648$.
Llamando x a esta razón, tendremos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{648}{3}} = \sqrt[3]{216} = 6, \text{ razón de la progresión.}$$

Sea la progresión decreciente $\div\, 108 : 36 : 12 : 4$, cuya razón es 3.
Llamando z a esta razón, tendremos:

$$z = \sqrt[3]{\frac{108}{4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{1}} = \sqrt[3]{27} = 3, \text{ razón de la progresión.}$$

673. Consecuencia que se deduce de la segunda propiedad. — Se deduce que:

Para interpolar entre dos números los medios geométricos que se desee, basta determinar la razón de la progresión.

EJEMPLO: *Interpolar 2 medios geométricos entre los números* 5 *y* 625.

Desde luego se ve que esta progresión tendrá cuatro términos.
Hallemos la razón de la progresión.
Término mayor, 625; término menor, 5. Llamando x a la razón, tendremos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{625}{5}} = \sqrt[3]{\frac{125}{1}} = \sqrt[3]{125} = 5, \text{ razón de la progresión.}$$

En progresión	creciente:	$\div\ 5 : 25 : 125 : 625.$
»	» decreciente:	$\div\ 625 : 125 : 25 : 5.$

ESCOLIO. — *Si entre los términos consecutivos de una progresión geométrica se interpola un mismo número de medios geométricos, los términos de la progresión y los medios interpolados forman una nueva progresión.*

Porque siendo el mismo el número de términos de cada progresión parcial y siendo iguales los cocientes $\frac{u}{a}$ para cada una de estas progresiones, la fórmula $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ nos dará una misma razón para cada progresión parcial; y como el último término de una de éstas es el primero de la siguiente, las progresiones parciales formarán una sola progresión.

Ejemplo: Sea la progresión $\div\!\div$ 2 : 18 : 162 : 1458. Si interpolamos un medio geométrico entre los términos de esta progresión y llamamos q, q' y q'' a las razones de cada progresión parcial, tendremos:

$$q = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3 \qquad q' = \sqrt{\frac{162}{18}} = 3 \qquad q'' = \sqrt{\frac{1458}{162}} = 3.$$

La nueva progresión será, pues,

$$\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458.$$

3.ª Propiedad. — *La suma de los términos de que se compone toda progresión geométrica, es igual al producto del término mayor por la razón, menos el término menor, dividido por la razón menos* 1.

En efecto: Sea la progresión $\div\!\div\ a : b : c : d : p : t : u$, y representemos por q la razón y por S la suma de sus términos, tendremos:

$$S = a + b + c + d + p + t + u \quad (1)$$

Multiplicando ambos miembros por la razón, resultará:

$$Sq = aq + bq + cq + dq + pq + tq + uq$$

o bien:
$$Sq = b + c + d + p + t + u + uq, \quad (2)$$

puesto que, según la definición de las progresiones (**669**) $b = aq$; $c = bq$; etc.

Restando ordenadamente de la igualdad (2) la (1) y reduciendo términos semejantes,

$$Sq - S = uq - a$$

o
$$S(q - 1) = uq - a$$

de donde
$$S = \frac{uq - a}{q - 1},$$ que es lo que queríamos demostrar.

Hallemos la suma de los términos de la progresión $\div\!\div$ 5 : 25 : 125 : 625, cuya razón es 5.

Según dicha regla, tenemos:

$$5 + 25 + 125 + 625, \text{ o su igual } 780 = \frac{(625 \times 5) - 5}{5 - 1};$$

y efectuando las operaciones indicadas en el segundo miembro de esta igualdad, tenemos por resultado 780, lo que nos prueba la verdad de la regla.

Así en las progresiones aritméticas como en las geométricas, pueden darse otras varias propiedades. Nos hemos ceñido a las de mayor aplicación. Véanse los siguientes

Problemas de progresiones por cociente

1.ª Propiedad. — *Un jugador apostó 2 pesetas y perdió el juego; repitió la misma operación 5 veces, triplicando cada vez la cantidad, y perdió siempre. ¿Cuánto perdió la quinta vez?*

La resolución de este problema se reduce a hallar el quinto término de una progresión geométrica creciente que tiene 5 términos, cuyo primer término es 2, y 3 la razón. Llamando x al término que se busca, tendremos:

$$x = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162 \text{ pesetas, cantidad que perdió la 5.ª vez.}$$

2.ª Propiedad. — *Cierto individuo empezó un negocio con 300 ptas., y al cabo de tres años, reunía un capital de 64800 ptas. Si su capital aumentó en igual relación todos los años, ¿cuál es esta relación?*

La resolución de este problema se reduce a hallar la razón de una progresión geométrica cuyos términos 1.º y 4.º son 300 y 64800 respectivamente. Llamando x a la razón, tendremos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{64800}{300}} = \sqrt[3]{\frac{648}{3}} = \sqrt[3]{216} = 6,$$ relación en que aumentó anualmente su capital.

3.ª Propiedad. — *El dueño de un caballo ofreció venderlo con la condición de que debían pagarle 1 céntimo de peseta por el primer clavo de sus herraduras; 2 céntimos por el segundo; 4 céntimos por el tercero, y así sucesivamente, duplicando hasta el último clavo, que alcanzaba el número 32. Aceptada la condición por el comprador, procedieron a determinar el valor del caballo: ¿cuánto cobró el vendedor?*

El precio del caballo será la suma de los 32 términos de una progresión geométrica creciente cuyo primer término es 1, y 2 la razón.

Hallemos, primero, el término mayor. Llamándole x, tendremos:

$$x = 1 \times 2^{31} = 1 \times 2147483648 = 2147483648.$$

Llamando z a la suma de los términos, será:

$$z = \frac{(2147483648 \times 2) - 1}{2 - 1} = \frac{4294967296 - 1}{1} = 4294967295$$ céntimos, equivalentes a 42949672'95 pesetas.

Nota. — Hemos tomado este problema, que se lee en casi todos los libros que tratan esta materia, para que se vea prácticamente la pasmosa rapidez con que crecen los términos de las progresiones geométricas.

Del complemento aritmético

674. Definición y objeto. — *Complemento aritmético de un número* es la cantidad que le falta para valer la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene dicho número. De modo, que el complemento aritmético de los números dígitos es lo que les falta para llegar a 10; el de los números de dos cifras, lo que les falta para llegar a 100; el de los números de tres cifras, lo que les falta para llegar a 1000, y así sucesivamente.

Así, el complemento aritmético de 7 es $10 - 7 = 3$; el de 65 es $100 - 65 = 35$; el de 896 es $1000 - 896 = 104$; el de 12580 es $100000 - 12580 = 87420$; etc.

De lo dicho se deduce la siguiente regla práctica:

Para hallar el complemento aritmético de un número, se restan de 9 cada una de sus cifras, excepto la primera cifra significativa de la derecha, que se resta de 10.

Por medio del complemento aritmético, la operación de restar se convierte en sumar, para lo cual *se añade al minuendo el complemento del substraendo, rebajando de la suma una unidad de la cifra inmediata superior a la primera de la izquierda del complemento.*

Ejemplo: *Hállese la diferencia entre los números* 84652 *y* 74581.

Procedimiento ordinario		*Por el complemento*	
	84652	Minuendo..................	84652
	— 74581	Complemento del substraendo.	+ 25419
Diferencia	10071	Diferencia	~~1~~10071

Es decir, que hemos hallado la diferencia quitando de la suma del minuendo con el complemento del substraendo, la unidad inmediata superior a la primera cifra de la izquierda del complemento.

Esto está fundado en que, en vez de quitar 74581 de 84652, añadimos a este número lo que falta al primero para valer 100000; luego quitando 100000 de la suma, hemos de obtener en el resto la diferencia deseada.

Cuando el substraendo no tiene el mismo número de guarismos que el minuendo, para mayor facilidad, el complemento del substraendo se hace referir al del minuendo; es decir, se toma por complemento del substraendo la diferencia entre éste y el número formado por la unidad seguida de tantos ceros como notas tiene el minuendo, quitando de la suma una unidad del orden más elevado.

Ejemplo: *Hállese la diferencia entre* 8596 *y* 453.

Procedimiento ordinario

	8596
	— 453
Diferencia......	8143

Por el complemento

Minuendo	8596
Complt.º del substr. (10000-453)	+ 9547
Diferencia	18143

Vemos que la diferencia es la suma menos la unidad del orden más elevado.

675. Aplicación importante del complemento aritmético. — El complemento aritmético tiene aplicación importante cuando, de la suma de varias cantidades, hay que quitar la suma de otras; pues en vez de hacer dos sumas y una resta, todo se reduce a una suma, esto es: *se suman los sumandos que constituyen el minuendo con los complementos aritméticos de los sumandos que constituyen el substraendo, quitando luego del orden de unidades más elevado de la suma, tantas unidades como complementos se hayan tomado.*

Ejemplo:

De la suma de estos números {9450, 2863, 5492, 4725, 9736} *hemos de restar la suma de estos* {2895, 1253, 2153, 1852, 3659}

Procedimiento ordinario:

Minuendo	32266	.... Totales	11812
Substraendo	— 11812		
Diferencia	20454		

Por el complemento:

Sumandos que forman el minuendo	9450 2863 5492 4725 9736
Complementos de los sumandos del substraendo	7105 8747 7847 8148 6341
	70454

Rebajando ahora 5 unidades (por ser cinco los complementos) del número de unidades de orden más elevado de la suma (7 decenas de millar), quedan 20454, diferencia hallada por el procedimiento ordinario.

Si todos los sumandos no tienen igual número de guarismos, como sucede casi siempre, téngase presente lo que hemos dicho antes, esto es, de referir todos los complementos al del sumando o sumandos que mayor número de guarismos tengan:

Ejemplo:

De la suma de los números {9456, 863, 596, 9} *réstese la suma de éstos* {1254, 836, 7}

Procedimiento ordinario:	10924......	Totales	2097
	— 2097		
Diferencia	8827		

Por el complemento:

Sumandos del minuendo .... $\left\{\begin{array}{r}9456\\863\\596\\9\end{array}\right.$

Complementos de los sumandos del substraendo .... $\left\{\begin{array}{r}8746\\9164\\9993\end{array}\right.$

Diferencia hallada............ $\overline{3}8827$

En este ejemplo, cuyos sumandos no tienen igual número de guarismos, hemos referido el complemento de los sumandos del substraendo a 10000 porque hay dos sumandos que de este número deberían restarse para hallar su complemento, y luego hemos quitado 3 unidades del orden más elevado de la suma.

OTRO EJEMPLO: *Hállese el resultado de* $8462 + 15 + 428 - 156 - 13 + 9 - 25$.

Sumandos del minuendo .... $\left\{\begin{array}{r}8462\\15\\428\\9\end{array}\right.$ Sumandos del substraendo .... $\left\{\begin{array}{r}156\\13\\25\end{array}\right.$

Procedimiento ordinario: 8914 .... Totales........... 194

— 194

Diferencia...... 8720

Por el complemento:

Minuendo .... $\left\{\begin{array}{r}8462\\15\\428\\9\end{array}\right.$

Complementos .... $\left\{\begin{array}{r}9844\\9987\\9975\end{array}\right.$

Diferencia hallada........... $\overline{3}8720$

Hemos referido los complementos a 10000 y restado tres unidades del número que contenía las del orden más elevado de la suma.

NOTA.—La aplicación del complemento aritmético ofrece, al tenedor de libros, un medio excelente para determinar con prontitud el saldo de una cuenta, y más aún, como medio de comprobación una vez hallado el saldo por el procedimiento ordinario.

Logaritmos (*)

676. Idea de los logaritmos.—Se llaman *logaritmos* (**) los términos de una progresión aritmética que empieza por cero, correspondientes a los de una progresión geométrica que empieza por la unidad.

La razón de dichas progresiones puede ser cualquiera.

Cada dos progresiones en las condiciones mencionadas, originan un *sistema de logaritmos*.

677. Base de un sistema de logaritmos.—Se llama base de un sistema de logaritmos, el número cuyo logaritmo es la unidad.

Puede haber infinidad de sistemas de logaritmos. *El sistema de logaritmos vulgares* tiene el número 10 por base, a fin de que se acomode al sistema de numeración empleado en nuestros cálculos, esto es, al décuplo o decimal. Las tablas logarítmicas más usadas en España son las de Vázquez Queipo.

Las dos progresiones que originan el sistema vulgar de logaritmos son las siguientes:

(*) Fueron inventados por el escocés Juan Napier en 1614. Briggs compuso y aplicó los de la base 10, por cuya general aceptación han recibido el nombre de *ordinarios* o *vulgares*. La palabra *logaritmo* se abrevia así: *log*.

(**) Del griego *logos*, discurso, y *arithmos*, número.

Números	÷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : 10000000, etc.
Logaritmos	÷ 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7, etc.

De lo dicho se deduce que la base es 10 por ser el número que se corresponde con el logaritmo 1, y que: 0 es el logaritmo de 1; 1, el de 10; 2, el de 100; 3, el de 1000; 4, el de 10000; etc. Obsérvese también que los términos correspondientes de la progresión aritmética son los exponentes a que se ha de elevar la base o razón del sistema para producir, desde el 2.º término en adelante, los demás términos de la progresión geométrica.

678. Logaritmo de un número.—Es el exponente a que se ha de elevar la base del sistema para producir dicho número.

Así, el logaritmo de 100 es 2 porque la base del sistema ordinario, 10, ha de elevarse a la segunda potencia para producir el número dado, 100.

679. Objeto de los logaritmos. — Por medio de los logaritmos, se abrevian extraordinariamente los cálculos, pues con su auxilio se resuelven con suma facilidad los problemas más complicados. *La operación de multiplicar se reduce a una suma; la de dividir, a una resta; la elevación a potencias, a una multiplicación, y la extracción de raíces, a una división.*

680. Propiedades de los logaritmos vulgares. — Son las siguientes:

1.ª La unidad tiene por logaritmo *cero*.

2.ª Todo número formado por la unidad seguida de ceros tiene por logaritmo un número entero.

3.ª Los números comprendidos entre 1 y 10 tienen por logaritmo un número mayor que *cero* y menor que 1, es decir, *una fracción;* los comprendidos entre 10 y 100, un logaritmo mayor que 1 y menor que 2, esto es, 1 y una fracción; los comprendidos entre 100 y 1000, un logaritmo mayor que 2 y menor que 3, es decir, 2 y una fracción, y en general, *el logaritmo de todo número tiene tantas unidades más una fracción, como notas menos una tiene dicho número.*

681. Característica y mantisa. — La parte entera del logaritmo de un número se llama *característica* (*), y la parte decimal, *mantisa* (**). La característica de un número entero tiene tantas unidades *menos una* como guarismos tiene el número, y la mantisa consta de *seis notas decimales* (***).

De modo, pues, que la característica del log. de un número se halla con suma facilidad. Así, la de 7 es 0, la de 58 es 1, la de 450 es 2, la de 3896 es 3, la de 45800 es 4, etc.

Los números formados por la unidad seguida de ceros, carecen de mantisa, como hemos dicho ya; pero suele ésta representarse por seis ceros.

682. Logaritmos de los números decimales. — Acerca de ellos, debe saberse:

1.º Los números decimales tienen la misma mantisa que si fuesen enteros.

2.º Su característica es substractiva o negativa, y se escribe poniendo encima de ella el signo menos. Tiene siempre tantas unidades *más una* como ceros lleva la fracción entre la coma y la primera cifra significativa.

Así: el log. de 0'03, por ejemplo, se escribirá en esta forma: $\bar{2}.477121$.

3.º Los números decimales formados por la unidad *precedida de ceros* carecen de mantisa, lo mismo que los enteros formados por la unidad seguida de ceros, teniendo presente que su característica es negativa.

(*) Del griego *character*, señal.
(**) Del etrusco *mantisa*, añadidura.
(***) Aquí, como en todos los ejemplos relativos a logaritmos, nos referimos a logaritmos calculados por las tablas de Vázquez Queipo, pues dan los logaritmos con seis notas decimales.

Así: el log. de 0'001 no tiene mantisa, como tampoco la tiene, según sabemos, el log. de 1000. El log. de dicho número es, pues, $\overline{3}.000000$.

683. Logaritmos de los quebrados comunes. — Para hallar el logaritmo de un quebrado común, se transforma en decimal y se busca el logaritmo del número decimal equivalente. También puede hallarse restando el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador. El logaritmo de un número mixto se halla reduciendo el mixto a quebrado, y hallando el logaritmo del quebrado equivalente.

Como ya se habrá observado, para escribir el log. de un número, se pone en seguida la característica, luego un punto, y a continuación las seis notas decimales de la mantisa. El log. del número 1264, por ejemplo, se escribirá así: 3.101747.

684. Logaritmo de un número mixto. — Para hallar el log. de un número mixto (que consta de parte entera y parte decimal), *se pone por característica la correspondiente al log. del número que forma la parte entera; su mantisa es la que correspondería al log. del número dado considerado como entero, esto es, el número entero que resulta prescindiendo del signo decimal.*

EJEMPLO: *Hallar el log. del núm.* 124'456.

La característica del log. del número 124, que forma la parte entera, es 2, pues ésta tiene tres notas. La mantisa será la del log. del número 124456, que es 095016. Luego el log. del núm. 124'456 es 2.095016.

685. Dado un número, determinar su logaritmo, y dado un logaritmo, determinar el número a que corresponde. — Para resolver estos problemas, haremos uso de las *tablas de logaritmos.*

El manejo de las tablas logarítmicas consiste en la resolución de los dos problemas mencionados. Como para la aplicación de los logaritmos a las cuestiones aritméticas es indispensable la posesión de unas tablas y en ellas se explica la manera de manejarlas, creemos inútil consignar aquí las reglas y ejemplos necesarios, que el alumno leería sin comprender, ya que se vería imposibilitado de seguir la resolución de los casos prácticos que explicaríamos para la debida aplicación de las reglas.

686. Cómo se suman los logaritmos. — En la suma de logaritmos, hemos de distinguir dos casos:

1.º Que las características de los logaritmos sumandos sean homogéneas, esto es, todas positivas o negativas.

2.º Que dichas características sean heterogéneas, es decir, unas positivas y otras negativas.

Para resolver el primer caso, procedemos como si los sumandos fuesen números decimales, dando a la característica de la suma el mismo signo de los sumandos; pero, teniendo en cuenta que, siendo las mantisas siempre positivas, su suma es siempre positiva. Por tanto, en el caso de ser las características de los sumandos todas negativas, si de la suma de las mantisas resultan algunas unidades, estas unidades tienen que restarse de la suma de las características, que es una suma negativa.

EJEMPLOS:

$$\begin{array}{r} 2.920465 \\ +\ 2.930440 \\ +\ 1.518514 \\ +\ 3.040009 \\ \hline 10.409428 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ \ \ \overline{1}.719911 \\ +\ \overline{4}.960172 \\ +\ \overline{2}.062582 \\ +\ \overline{3}.010088 \\ \hline \ \ \ \overline{9}.752753 = \overline{10} + 1.752753 \end{array}$$

Para resolver el segundo caso, se suman primero las mantisas, escribiendo por característica de la suma la diferencia entre la suma de las características positivas y la de las negativas, dándole el signo que tenga la suma mayor.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{r} 1.849419 \\ +\ \overline{2}.469433 \\ +\ \overline{5}.500143 \\ +\ 3.092370 \\ \hline \overline{2}.911365 \end{array}$$

De la suma de las mantisas, llevamos 1, y decimos: 1 y 1 son 2, más 3 son 5 (suma de características positivas), menos 7 (suma de las negativas), es menos 2.

687. Cómo se restan los logaritmos. — Los logaritmos se restan del mismo modo que los números decimales; pero ha de tenerse presente que debe cambiarse el signo de la característica del substraendo.

EJEMPLOS:

$$\begin{array}{r} 3.004321 \\ -\ 4.870053 \\ \hline \overline{2}.134268 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.808886 \\ -\ \overline{4}.950382 \\ \hline 5.858504 \end{array}$$

En el primer ejemplo, después de restar los décimos, hemos dicho: 3 menos 1 que hemos tomado para restar los décimos, son 2; menos 4 (cambiando el signo) son menos 2. En el segundo ejemplo, después de haber restado los décimos, también hemos dicho: 2 menos 1 que hemos tomado para restar los décimos, es 1; más 4 (cambiando el signo) son 5.

688. Cómo se multiplican los logaritmos. — Cuando la característica es positiva, se procede como en la multiplicación de decimales, teniendo presente que la mantisa o fracción decimal del logaritmo producto, no ha de contener más que seis notas, y que deben suprimirse las que excedan de este número.

EJEMPLO: *Multiplíquese por* 25 *el log.* 2.301030.

$$\begin{array}{r} 2.301030 \\ \times\ 25 \\ \hline 11\ 505150 \\ 46\ 02060 \\ \hline 57.525750 \end{array}$$

Cuando la característica es negativa, se hace primero la multiplicación de la mantisa, cuyo producto es siempre positivo; se multiplica en seguida la característica, que da un producto negativo, y se suman ambos productos.

EJEMPLO: *Multiplíquese por* 40 *el log.* $\overline{2}$.724685.

	$\overline{2}$.724685
	× 40
Producto parcial de la mantisa	28.987400
» » » » característica......	$\overline{80}$.000000
Producto total..........	$\overline{52}$.987400

Tengamos en cuenta la regla dada para sumar logaritmos cuyas características son heterogéneas.

689. Cómo se dividen los logaritmos. — Los logaritmos de característica positiva se dividen siguiendo las reglas comunes de la aritmética.

EJEMPLOS:

```
Log. 2.765669  / 5
     2 7        0.553133
       26
        15
         06
          16
           19
            4
```

```
Log. 3.022676  / 2
     1 0        1.511338
       02
        02
         06
          07
           16
            0
```

Cuando la característica es negativa, pueden ocurrir dos casos:

1.º Que la característica del log. dividendo sea múltiplo del divisor.
2.º Que la característica del dividendo no sea múltiplo del divisor.

El primer caso se resuelve por las reglas comunes de la aritmética, teniendo presente que la característica del cociente es negativa.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{l|l} \overline{12}.476350 & 2 \\ \hline \quad 0\,4 & \overline{6}.238175 \\ \quad\ 07 & \\ \quad\ \ 16 & \\ \quad\ \ \ 03 & \\ \quad\ \ \ \ 15 & \\ \quad\ \ \ \ \ 10 & \\ \quad\ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

El segundo caso se resuelve del modo siguiente: Se añade a la característica un número negativo que sumado con ella, dé un múltiplo del divisor; seguidamente se añade el mismo número, pero positivo, a la mantisa, y se verifica la operación como en los casos anteriores, con la única diferencia que, al bajar la cifra de las décimas, se baja con ella (colocándola a su izquierda) la cifra que representa el número añadido.

EJEMPLO: *Divídase por* 3 *el log.* $\overline{8}.463285$.

Disposición

$$\overline{8}.463285 : 3 = \overline{9} + 1.463285$$

$$\begin{array}{l|l} \overline{9} + 1.463285 & 3 \\ \hline 014 & \overline{3}.487761 \\ \ 26 & \\ \ \ 23 & \\ \ \ \ 22 & \\ \ \ \ \ 18 & \\ \ \ \ \ \ 05 & \\ \ \ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

Como la característica $\overline{8}$ no es múltiplo del divisor 3, añado a aquella $\overline{1}$, y resulta $\overline{9}$, y la misma unidad, con signo positivo, la añado a la mantisa, obteniendo así $\overline{9} + 1.463285$. Divido la característica $\overline{9}$ y obtengo por cociente $\overline{3}$ (característica del cociente); bajo en seguida la cifra de las décimas precedida de la cifra añadida, 1, y obtengo el dividendo parcial 14, que divido por 3 y me da el cociente 4; y así continúo la división hasta obtener en el cociente las seis notas decimales que forman la mantisa de todo logaritmo.

690. Complemento logarítmico. — Llámase *complemento logarítmico* de un número al complemento aritmético de su logaritmo.

Así, si queremos hallar el complemento logarítmico del número 425, hallaremos su log., que es 2.628389; luego, el complemento aritmético de este logaritmo que es (por las reglas dadas al tratar el complemento aritmético) 7.371611. Luego el complemento logarítmico del número 425 es 7.371611.

691. Aplicación de los logaritmos a la multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces. — 1.º El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores. Luego *para hallar el producto de dos o más números, se suman sus logaritmos y se determina el número correspondiente al log. suma.*

EJEMPLO: *Hállese el producto de* 425 *por* 68.

Log. de 425	= 2.628389
Log. de 68	= 1.832509
Log.	4.460898,

que corresponde al número 28900, producto de multiplicar entre sí los dos números dados.

2.º El log. de un cociente es igual al log. del dividendo menos el log. del divisor. Luego *para hallar el cociente de dos números, se resta el log. del divisor del log. del dividendo, y se busca el número a que corresponde el log. diferencia.*

EJEMPLO: *Hállese el cociente de* 3648 *por* 456.

Log. de 3648....................	3.562055
Log. de 456....................	— 2.658965
Log............................	0.903090, que corres-

ponde al número 8, cociente de la división propuesta.

3.º El log. de una potencia es igual al producto del log. de la base por el exponente de la potencia. Luego *para elevar un número a una potencia cualquiera, se determina el log. del número dado, se multiplica este log. por el exponente de la potencia, y el número correspondiente al log. producto es la potencia buscada.*

EJEMPLO: *¿Cuál es la sexta potencia del número* 25?

Log. de 25....................	= 1.397940
	× 6
Log............................	8.387640, correspon-

diente al número 244140449, que es la potencia pedida.

4.º El log. de una raíz es igual al log. del radicando partido por el exponente de la raíz. Luego *para extraer una raíz cualquiera de un número dado, se determina el log. de este número, y se divide por el exponente o índice de la raíz, y el número correspondiente al log. cociente es la raíz que se busca.*

EJEMPLO: *Extráigase la raíz sexta del número* 262144.

Log. de 262144 = 5.418540.
Log. 5.418540 : 6 = Log. 0.903090, que corresponde al número 8, raíz 6.ª del número propuesto.

5.º El exponente de una potencia es igual al log. de la potencia partido por el log. de la raíz. Luego, *para hallar el grado de una raíz, conociendo esta raíz y su potencia, se hallan los log. de la potencia y de la raíz, y se divide el primero por el segundo. El cociente es el grado de la raíz.*

Así, en el ejemplo anterior, si nos propusiéramos hallar el grado de 8, raíz del número 262144, diríamos: log. de 262144 = 5.418540; log. de 8 = 0.903090; luego 5.418540 : 0.903090 = 6, grado de la raíz.

Aplicación de los logaritmos a las cuestiones de interés compuesto

692. Los problemas de interés compuesto pueden resolverse por medio de la siguiente proporción:

1 *es a* 1 *más el tanto por* 1 *elevado al número de años, como el capital es a la suma de capital e intereses* (**382**).

Aplicando la mencionada proporción, sólo podemos resolver los problemas en que nos propongamos calcular el interés o el capital; pero valiéndonos de los logaritmos, podemos hallar cualquiera de los términos desconocidos que la antedicha proporción ofrezca. Para ello, se plantea la mencionada proporción, y se observan las reglas siguientes:

Si el término desconocido es un medio, se obtiene su valor restando el logaritmo del medio conocido del logaritmo del segundo extremo.

Si el término desconocido es un extremo, se halla su valor sumando los logaritmos de los medios.

En uno y otro caso, el resultado nos dará el logaritmo del término buscado; hallando luego, por las tablas, el número a que corresponde.

Téngase presente que el logaritmo del segundo término de la proporción debe multiplicarse por el exponente que lleve, antes de sumarlo o restarlo.

EJEMPLOS: 1.º *¿En cuánto se convertirán 200 ptas., prestadas durante 40 años, al interés compuesto de 6 %?*

$$1 : 1'06^{40} :: 200 : x$$

$$\begin{array}{lr} \text{Log. } 1'06^{40} = 0.025306 \times 40 = & 1.012240 \\ \text{Log. } 200 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = & + \ 2.301030 \\ \hline \text{Log. } \ldots\ldots & 3.313270 \end{array}$$

que corresponde al número 2057'17. El prestador tendrá, pues, 2057'17 ptas. al cabo de 40 años.

2.º *Prestóse un capital, por 40 años, al interés compuesto de 6 % anual, obteniendo el prestador, al cabo de dicho tiempo, 2057'17 ptas. ¿Cuál fué el capital prestado?*

$$1 : 1'06^{40} :: x : 2057'17$$

$$\begin{array}{lr} \text{Log. } 2057'17 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = & 3.313270 \\ \text{Log. } 1'06^{40} = 0.025306 \times 40 = & - \ 1.012240 \\ \hline \text{Log.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2.301030, \end{array}$$

que corresponde al número 200, capital que se prestó.

3.º *¿A qué tanto por ciento de interés compuesto anual debería prestarse un capital de 200 ptas., para que se convirtiera en 2057'17 ptas. al cabo de 40 años?*

$$1 : (1 + x)^{40} :: 200 : 2057'17$$

$$\begin{array}{lr} \text{Log. } 2057'17 = & 3.313270 \\ \text{Log. } 200 = & - \ 2.301030 \\ \hline & 1.012240 = \text{Log. } (1 + x) \times 40 \end{array}$$

Luego Log. $(1 + x) = 1.012240 : 40 = 0.025306$, cuyo logaritmo corresponde al número 1'06. De modo que 1'06 es 1 más el tanto por 1; quitando 1, queda 0'06, esto es, el tanto por 1; y si a 1 corresponde 0'06, a 100 corresponderán $0'06 \times 100 = 6$, que es el tanto % anual buscado.

4.º *¿Cuánto tiempo deberían estar prestadas 200 ptas., al interés compuesto de 6 % anual, para convertirse en 2057'17 ptas?*

$$1 : 1'06^{x} :: 200 : 2057'17$$

$$\text{Log. } 1'06 \times x = \text{Log. } 2057'17 - \text{Log. } 200;$$

esto es: $0.025306 \times x = 3.313270 - 2.301030$

o bien: $0.025306 \times x = 1.012240;$

luego $x = \dfrac{1.012240}{0.025306}$. Multiplicando dividendo y divisor por 1.000,000, tenemos $\dfrac{1012240}{25306} = 40$, número de años que deberá estar prestado el capital.

FÓRMULAS QUE SE DEDUCEN DE LAS OPERACIONES PRECEDENTES

Representemos por a el capital puesto a interés; por r, el tanto que se paga anualmente por unidad; por n, el número de años que el capital permanece prestado, y por A, la suma en que ha de convertirse el capital prestado, al finalizar el tiempo n.

La proporción general será: $1 : (1 + r)^{n} :: a : A$.

Las fórmulas siguientes darán, respectivamente, cada uno de estos valores, cuando se conozcan los otros tres.

693. *Fórmula* 1.ª Log. A. = Log. a + Log. $(1 + r) \times n$.

Cuya fórmula nos dice que, *para hallar la cantidad en que se conver-*

tirá un capital, se suma el log. del capital con el log. de 1 más el tanto por 1 multiplicado por el tiempo, y el número correspondiente al log. suma será la cantidad buscada.

694. *Fórmula* 2.ª Log. a. = Log. A. — Log. $(1 + r) \times n$.

Cuya fórmula nos dice que, *para hallar el capital, del log. del capital y ganancia se resta el log. de 1 más el tanto por 1 multiplicado por el tiempo, y el número correspondiente al log. resta será el capital buscado.*

695. *Fórmula* 3.ª $\text{Log. } (1 + r) = \dfrac{\text{Log. } A - \text{Log. } a}{n}$

Cuya fórmula nos dice que, *para hallar el tanto por ciento, del log. de capital y ganancia se resta el log. del capital, y se divide la resta por el tiempo. El cociente es el log. de* 1 *más el tanto por* 1. *Se busca el número a que este log. corresponde; se quita* 1 *de este número, y la resta es el tanto por* 1 *que, multiplicado por* 100, *da de producto el tanto por ciento anual.*

696. *Fórmula* 4.ª $n = \dfrac{\text{Log. } A - \text{Log. } a}{\text{Log. } (1 + r)}$

Cuya fórmula nos dice que, *para determinar el tiempo que deberá estar prestado un capital, del log. de capital y ganancia se resta el log. del capital, y la diferencia se divide por el log. de* 1 *más el tanto por* 1. *El cociente es el tiempo que se deseaba averiguar.*

Puede suceder, aunque rarísimas veces, que la tasa o tanto de interés no se refiera a 100 y sí, a una cantidad cualquiera, como por ejemplo, 1 duro, 1 onza, etc. Otras veces, la tasa mencionada no es el interés de 1 año, sino de 1 semana, 1 mes, 1 trimestre, etc. Cuando esto sucede, se ve primero el interés que corresponde a 100 y se plantea en seguida la proporción general considerando las semanas, meses, etc., como si fuesen años.

Caso particular del interés compuesto

697. Las cuestiones de interés compuesto ofrecen un caso especial, *que consiste en calcular el capital conociendo el tanto por ciento, el tiempo y el beneficio total.* Para resolverlo, se plantea la proporción general (1 : 1 + *el tanto por* 1 *elevado al número de años* :: *capital* : *capital y ganancia*), se invierten los términos de la misma y se aplica a la proporción que resulta la propiedad siguiente: *diferencia de antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente, como diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

Con la aplicación de esta propiedad, desaparece la incógnita del segundo medio, y el problema queda reducido a una sencilla proporción.

Ejemplo: *¿Qué capital deberá prestarse al interés compuesto de 4 % anual, para obtener un beneficio de 5000 ptas. al cabo de 5 años?*

Resolución

$$1 : 1'04^5 :: x : (x + 5000)$$

Invirtiendo, tendremos..............	$1'04^5 : 1 :: (5000 + x) : x$
Aplicando la propiedad.............	$(1'04^5 - 1) : 1 :: (5000 + x) - x : x.$
O bien	$(1'04^5 - 1) : 1 :: 5000 : x$
Verificando las operaciones indicadas..	$0'2166 : 1 :: 5000 : x$

Luego $x = \dfrac{5000}{0'2166} = 23{,}084'025$ pesetas.

Números inconmensurables

698. Ya hemos definido los números inconmensurables (**13**), diciendo que son aquéllos que no pueden expresarse exactamente ni por unidades enteras ni fraccionarias.

699. Origen de los números inconmensurables. — La extracción de raíces es el origen aritmético de los números inconmensurables, según demuestra el siguiente *teorema:*

La raíz de cualquier grado de todo número que no sea potencia perfecta del mismo grado, es un número inconmensurable.

En efecto; sea N un número que no es potencia perfecta del grado m, y llamemos r a la raíz de dicho grado. Tendremos, naturalmente, la igualdad:

$$\sqrt[m]{N} = r; \text{ por lo que } r^m = N.$$

Admitamos dos casos: 1.º, que N sea número entero; 2.º, que N sea número fraccionario.

Si N es número entero, su raíz r no puede ser un número entero ni un número fraccionario: no puede ser entero, porque N no es, según la hipótesis, potencia perfecta del grado m; tampoco r puede ser un número fraccionario, porque, convertido éste en irreducible, si ya no lo fuese, su potencia m daría otra fracción irreducible, y no el número entero N.

Supongamos, ahora, que N sea el número fraccionario $\frac{A}{B}$. Convertido en irreducible, si ya no lo fuese, su raíz r no puede ser un número entero ni uno fraccionario: no puede ser entero porque, en este caso, r^m sería igual a la fracción irreducible $\frac{A}{B}$, lo cual es un absurdo. Tampoco r puede ser un número fraccionario, como por ejemplo, $\frac{a}{b}$; porque entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{A}{B}$, es decir, $\frac{A}{B}$ sería una potencia perfecta del grado m.

Queda, pues, demostrado que r no puede ser un número entero ni un número fraccionario; luego r ha de ser, forzosamente, un número inconmensurable.

También se originan los números inconmensurables cuando la relación de la cantidad con la unidad no puede determinarse exactamente. (**9** — **4.º**)

700. *Todo número inconmensurable se halla comprendido entre dos conmensurables, cuya diferencia puede ser menor que cualquier cantidad dada.*

En efecto; sea N un número inconmensurable cualquiera.

Formemos la serie $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n} \ldots\ldots \frac{r}{n}, \frac{r+1}{n} \ldots\ldots$ en la cual n y r expresan dos números enteros cualesquiera. El primer término de la serie es 0, y el último puede ser cualquier número dado tomado bastante lejano del primero. Todos los términos de la serie son números enteros o fraccionarios y, por tanto, conmensurables (**13**); de consiguiente, N no puede ser uno de ellos; luego se halla comprendido entre dos de ellos consecutivos, como por ejemplo, entre $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$, cuya diferencia es $\frac{1}{n}$, y esta diferencia puede ser menor que cualquier cantidad asignable, dando a n el valor conveniente. Queda, pues, demostrado que todo número inconmensurable se halla comprendido entre dos conmensurables cuya diferencia puede ser tan pequeña como se quiera.

ESCOLIO. — En el caso presente, la expresión del número inconmensurable es una de las dos fracciones $\frac{r}{n}$ o $\frac{r+1}{n}$, con un error menor que $\frac{1}{n}$.

701. *Todo número inconmensurable se puede representar por una fracción decimal.*

En efecto, si A es una cantidad inconmensurable con la unidad B, se hallará las veces que A contiene a B verificando la división; supongamos que este cociente es z y que se obtiene el residuo R. Partiendo R por la *décima parte* de B, se hallará un cociente que llamaremos a, y un residuo que representaremos por R'. Partiendo R' por la *centésima parte* de B, se hallará un cociente, que llamaremos b, y un residuo que representaremos por R''. Procediendo de una manera semejante, se hallarán las *milésimas, diezmilésimas*, etc., de B contenidas en los residuos sucesivos, obteniendo, por tanto, la igualdad

$$A = z'ab\ldots.$$

que es lo que queríamos demostrar.

COROLARIO. — *La fracción decimal equivalente a un número inconmensurable es, necesariamente, inexacta, no periódica.*

Es evidente, pues toda fracción exacta o periódica es equivalente al número conmensurable expresado por su quebrado generador (**188**).

Cantidades conmensurables.

De las cantidades variables y sus límites

702. Cantidad conmensurable. — Cantidades conmensurables son las que contienen un número exacto de veces a otra de su misma especie, llamada *medida común.*

703. *La razón de dos cantidades conmensurables es igual a la de los números de veces que contienen a su medida común.*

En efecto; sean A y B dos cantidades conmensurables y m, su medida común, la cual suponemos contenida 4 veces en A y 5 veces en B. Si m se halla contenida en A 4 veces, $A = 4\ m$, y si m se halla contenida 5 veces en B, será $B = 5\ m$.

Es decir, que $A = 4\ m$ y $B = 5\ m$.

Dividiendo ordenadamente los primeros y los segundos miembros de ambas igualdades, tenemos $\frac{A}{B} = \frac{4\ m}{5\ m}$; y simplificando el segundo miembro de esta última igualdad, resulta $\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$ conforme al enunciado.

704. Cantidad constante. — Cantidad constante es aquélla que conserva siempre el mismo valor con respecto a una unidad fija.

Los números enteros y los quebrados ordinarios son cantidades constantes.

705. Cantidad variable. — Cantidad variable es la que puede tener diferentes valores.

Las fracciones decimales periódicas y las raíces aproximadas son cantidades variables; pues sabemos que sus valores aumentan a medida que se van obteniendo con mayor número de cifras decimales.

706. Límite de una cantidad variable. — Se llama *límite* de una cantidad variable, la cantidad constante a la cual puede aproximarse la variable cuánto se quiera, sin poder nunca igualar a dicha cantidad constante.

Las cantidades variables pueden variar aumentando o disminuyendo. El límite al cual tiende una variable aumentando, se llama *límite superior*, y el límite al cual tiende una variable disminuyendo, se llama *límite inferior*. Cuando una variable puede aumentar de un modo indefinido, tiene, como límite superior, el *infinito;* y cuando puede disminuir indefinidamente, tiene, como límite inferior, el *cero*. El infinito, se señala con esta expresión $^1/_0 = \infty$; el cero, con ésta: $^0/_1 = 0$. La circunferencia es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos en un círculo; $^1/_9$ es el límite de la fracción 0'1111....; $^1/_3$, el límite de 0'33333....; etc.

707. Teorema llamado «de los límites». — *Si dos cantidades variables, que tienen límites, son constantemente iguales, dichos límites son también iguales.*

Sean C y C' dos cantidades variables iguales, cuyos límites son, respectivamente, L y L'; digo que $L = L'$.

En efecto; si C tiene por límite a L, C puede aproximarse a L tanto como se quiera, esto es, en menos de cualquier cantidad dada por pequeña que ésta sea; pero no puede aproximarse igualmente a una cantidad fija mayor o menor que L; luego *toda cantidad variable*, C, *no tiene más que un límite*, que es L.

Ahora, si C es igual a C', C y C' constituyen una misma cantidad; luego los dos límites de las dos cantidades variables son límites de una misma cantidad, y *como que una cantidad variable no puede tener más que un solo límite*, claro es que ambos límites son iguales, esto es, $L = L'$ conforme al enunciado.

Operaciones con los números inconmensurables

708. Los números inconmensurables, cualquiera que sea su origen (**699**), pueden expresarse siempre, aproximadamente, por números conmensurables (**701**) cuyo grado de aproximación sea tal que el error cometido sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que ésta sea; por esta razón los números inconmensurables se consideran como límites de números conmensurables que se les aproximan indefinidamente.

Considerados los números inconmensurables como límites de números conmensurables que se les aproximan indefinidamente, los resultados de las operaciones hechas con números inconmensurables serán los límites de los resultados de las mismas operaciones practicadas con los números aproximados, y el error que se cometa será tanto menor cuanto mayor sea la aproximación de dichos números a los inconmensurables que representan. De consiguiente:

709. *Para efectuar una operación cualquiera con números inconmensurables, se substituyen éstos por números conmensurables que se les vayan aproximando cada vez más, y el resultado de la operación practicada con estos números expresará, con cierto error, el valor del resultado de la misma operación verificada con los números inconmensurables. Dicho error será tanto menor cuanto mayor sea el grado de aproximación de los números conmensurables que substituyan a los inconmensurables.*

Los cálculos con números aproximados procedentes de la extracción de raíces, conviene efectuarlos directamente, expresando el resultado en decimales con la aproximación que se quiera.

Así, el producto de $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ se hallará extrayendo la $\sqrt{10}$; pues,

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}.$$

De manera, que extrayendo la $\sqrt{10}$ con la aproximación que se quiera, tendremos el valor del producto de los dos números inconmensurables $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$.

710. *El producto de dos o más factores inconmensurables no altera, aunque se invierta el orden de estos factores.*

En efecto; sea *a b c d* el producto de varios factores inconmensurables. Este producto, según hemos dicho (**708**), es el límite del producto que se obtendría substituyendo, respectivamente, dichos factores inconmensurables por valores conmensurables que se les aproximaran cada vez más.

El orden de estos factores conmensurables no altera su producto (**54** y **61**); luego, su límite, que es el producto *a b c d* de los factores inconmensurables, tampoco variará cualquiera que sea el orden en que estos factores se multipliquen.

Puede considerarse como complemento de este capítulo lo que exponemos en los números **214**, **215**, **216**, **217**, **218**, **219**, **234** bis, **235**, **236** y **237**.

Cálculo de números aproximados

Muchos números conmensurables y todos los inconmensurables se expresan aproximadamente en decimales. Cuando hay que efectuar una operación cualquiera con números conmensurables o inconmensurables, y se opera con otros números que expresan el valor aproximado de unos u otros, es evidente que se obtendrá el resultado con un error, que será tanto menor, cuanto mayor sea la aproximación de los números tomados a los que cada uno de ellos substituye. Esta substitución de números, frecuentísima en el cálculo de decimales e indispensable en el de los inconmensurables, ha dado origen a los dos problemas siguientes, que constituyen la

711. Teoría de las aproximaciones. — 1.º *Dados varios números aproximados en menos de una cantidad determinada, hallar la aproximación del resultado de una operación cualquiera verificada con ellos.*

2.º *Dada la aproximación que ha de tener el resultado de una operación verificada con números aproximados, hallar la aproximación que ha de tener cada uno de estos números.*

ADICIÓN

712. La adición de números aproximados se funda en los dos principios siguientes:

1.º *El error de la suma de dos o más números aproximados por defecto es, por defecto, igual a la suma de los errores de los sumandos.*

2.º *Para que el error, por defecto, de la suma de números aproximados por defecto sea menor que una unidad de un orden determinado, basta que el error de cada sumando sea menor que una unidad inferior en un orden a la prefijada, si los sumandos son menos de diez; que el error de cada sumando sea menor que la unidad inferior en dos órdenes a la prefijada, si los sumandos son más de diez y menos de ciento, y así sucesivamente.*

De este principio segundo, se deduce la siguiente

713. Regla práctica. — *Para obtener, con un error por defecto menor que una unidad de determinado orden, la suma de varios números aproximados, si éstos no son más de diez, se valúan todos por defecto con un error menor que la unidad inferior en un orden a la prefijada y se suman estos valores, tachando en la suma la primera cifra de la derecha, y agregando una unidad a la siguiente. Si los sumandos son más de diez y menos* *de cien, se valúan todos por defecto con un error menor que la unidad inferior en dos órdenes á la prefijada y se suman estos valores, tachando en la suma las dos primeras cifras de la derecha y agregando una unidad a la siguiente, y así sucesivamente.*

EJEMPLO: *Hállese la suma de* 3'457896 + 2'5876294 + 0'5893261, *con un error menor que* 0'001.

3'4578 + 2'5876 + 0'5893 6'6347	Dispondremos la operación como hemos hecho, y como la verdadera suma está comprendida entre 6'6347 y 6'6357, de conformidad con la regla dada, la suma pedida será 6'635.

SUBSTRACCIÓN

714. La substracción de números aproximados se funda en los dos principios siguientes:

1.º *El error de la diferencia de dos números aproximados por defecto es, por defecto o por exceso, igual a la diferencia de los errores de dichos números.*

2.º *Para que el error de la diferencia de dos números aproximados por defecto sea menor que una unidad de un orden determinado, basta que el error de cada número sea menor que dicha unidad.*

De este segundo principio, se deduce la siguiente

715. Regla práctica.—*Para obtener, con un error menor que una unidad de determinado orden, la diferencia de dos números aproximados, se valúan ambos por defecto con un error menor que la unidad prefijada, y se restan estos valores; debiendo tener presente que el error de la diferencia será por defecto o por exceso, según que el del minuendo sea mayor o menor que el del substraendo.*

EJEMPLOS: *Verifíquense las restas siguientes, obteniendo los resultados con un error menor que* 0'001: 1.ª, 25'847632 — 4'931257.... 2.ª, 13'678249 — 9'287941....

	1.ª		2.ª
	25'847 — 4'931		13'678 — 9'287
Diferencias........	20'916	....	4'391

En la resta 1.ª, el error del resultado es *por defecto*, por cuanto el error del minuendo es mayor que el del substraendo, ya que en el minuendo despreciamos 0'000632, y en el substraendo, sólo despreciamos 0'000257.

En la 2.ª, el error del resultado es *por exceso*, pues el error del minuendo es menor que el del substraendo, ya que en el minuendo despreciamos solamente 0'000249, y en el substraendo, 0'000941.

MULTIPLICACIÓN

716. La multiplicación de números aproximados se funda en los tres principios siguientes:

1.º *El error del producto de un número aproximado por defecto, por uno exacto, es, también por defecto, igual al producto de éste por el error del primero.*

2.º *Para que el error del producto de un número aproximado por defecto, por uno exacto que consta de un solo orden de unidades, sea menor* *que una unidad de determinado orden, basta con que, si el factor exacto consta sólo de unidades, o de decenas, o de centenas, etc., el error del aproximado sea, respectivamente, menor que una unidad inferior en uno, dos, tres, etc., órdenes al de la prefijada, y si el factor exacto consta sólo de décimas, o de centésimas, o de milésimas, etc., el error del aproximado sea respectivamente igual a la unidad prefijada o inferior a ella en uno, dos, etcétera, órdenes.*

3.º *Para que el error del producto de un número aproximado por cualquier número exacto sea menor que una unidad de determinado orden, es necesario y suficiente que el error de cada uno de los productos parciales del número aproximado, por las distintas cifras del exacto, sea menor que una unidad inferior en uno o dos órdenes al de la prefijada, según que la suma de los valores absolutos de las cifras del exacto no llegue a* 10, *o sea mayor que* 10 *y menor que* 100. (*)

De estos dos últimos principios, se deduce la siguiente

717. Regla práctica.—*Para obtener, con un error menor que una unidad de determinado orden, el producto de un número aproximado por defecto, por uno exacto, se procede del modo siguiente:*

Si la suma de los valores absolutos de las cifras de éste no es mayor que 10, *se coloca la cifra de las unidades de primer orden del número exacto debajo de la que en el aproximado sea del orden inmediato inferior al de la aproximación prefijada; a la derecha de aquélla, se colocan, en orden inverso, las demás cifras de la parte entera del multiplicador, y a la izquierda, también en orden inverso, las de la parte decimal, si la hubiere; se efectúan las multiplicaciones parciales de las cifras del multiplicador por el multiplicando, empezando cada una en la cifra de éste que se halle sobre la del multiplicador que origina el producto parcial respectivo, y se escriben éstos unos debajo de otros, correspondiéndose en columna sus primeras cifras de la derecha; se suman los productos parciales, y prescindiendo de la primera cifra de la derecha de la suma, se aumenta la anterior en una unidad.*

Si la suma de los valores absolutos de las cifras del factor exacto es mayor que 10, *pero menor que* 100, *se sigue igual procedimiento; pero colocando la cifra de las unidades de primer orden del número exacto debajo de la que en el aproximado sea inferior en dos órdenes al de la aproximación prefijada, y prescindiendo de las dos primeras cifras de la derecha de la suma, se aumenta la anterior en una unidad.*

EJEMPLOS: 1.º *Hallar el producto de* 6'8439257 *por* 600, *con un error menor que* 0'01.

Disposición de la operación:

$$\begin{array}{r} 6'8439257 \\ \times \quad 006 \\ \hline 4106352 \end{array}$$

Conforme con la regla, el producto es 4106'36.

2.º *Calcular el producto de* 7'2534972 *por* 0'06 *con menor error que* 0'01.

Disposición de la operación:

$$\begin{array}{r} 7'2534972 \\ \times \quad 600 \\ \hline 432 \end{array}$$

Conforme con la regla, el producto es 0'44.

(*) Prescindimos de los casos en que la suma de los valores absolutos de las cifras del factor exacto sea mayor que 100, porque no se presentan en la práctica corriente; pues para que esta suma fuese mayor que 100, sería necesario que dicho factor tuviera, por lo menos, doce cifras, de las que once fuesen iguales a 9.

NOTA IMPORTANTE. — Del examen de la resolución de los dos casos anteriores, se desprende, evidentemente, que, cuando el número exacto por qué se multiplica el aproximado tiene una sola cifra significativa, basta colocar las cifras del número exacto del modo expresado en la regla anterior (**717**), verificar la multiplicación de la cifra significativa por el multiplicando y concluir la operación como indica la regla mencionada.

3.º *Hállese el producto de* 4'8632975 *por* 32'13 *con un error menor que* 0'01.

Disposición de la operación:

```
 4'8632975
 ×3123
 ---------
  145896
   9926
    486
    144
 ---------
  156452
```

Como la suma de los valores absolutos de las cifras del factor exacto, 32'13, no llega a 10, la cifra de las unidades simples de este factor, por la aproximación con que se pide el producto, se coloca debajo de las milésimas del factor aproximado, y las demás, por el orden expresado en la regla. El producto pedido, de conformidad con dicha regla, es, pues, 156'46.

4.º *Determínese, con un error menor que* 0'01, *el producto de* 5'8032976 *por* 48'75.

Disposición de la operación:

```
 5'8032976
 ×  5784
 ---------
 2321316
  464256
   40621
    2900
 ---------
 2829093
```

Como la suma de los valores absolutos de las cifras del factor exacto, 48'75, es mayor que 10 y menor que 100, la cifra de las unidades simples de este factor, por la aproximación con que se pide el producto, se coloca debajo de las diez milésimas del factor aproximado, y las demás, por el orden expresado en la regla. El producto pedido es, pues, 282'91, de conformidad con dicha regla.

DIVISIÓN

718. La división de números aproximados se funda en los dos principios siguientes:

1.º *El error del cociente de un número aproximado por defecto, por uno exacto, es igual al cociente del error de aquél por éste.*

2.º *Para que el error del cociente de un número aproximado por defecto, por uno exacto, sea menor que una unidad de determinado orden, basta que el error del dividendo sea menor que el producto del divisor por la unidad prefijada.*

De este segundo principio, se deduce la siguiente

719. Regla práctica.—*Para obtener, con un error menor que una unidad de determinado orden, el cociente de un número aproximado por uno exacto, se multiplica el divisor por la unidad prefijada, se valúa el dividendo, por defecto, con un error menor que la mayor unidad contenida en este producto, y se verifica la división por el procedimiento ordinario, aumentando en una unidad la primera cifra de la derecha del cociente.*

EJEMPLOS: 1.º *Hállese el cociente de* 9'4863205 *por* 46, *con un error menor que* 0'001.

```
9'48   | 46
0 280  |------
  04   | 0'206
```

El error del dividendo ha de ser menor que el producto 46 × 0'001 = 0'046; para que esto suceda, basta que dicho error sea menor que 0'01; verificando la operación como al margen, se obtiene el cociente 0'206, siendo el pedido, según la regla, 0'207.

2.º *Calcúlese, con menor error que 0'001, el cociente de 6'24875932 por 0'75.*

6'2487	0'75
248	8'331
237	
120	
45	

El error del dividendo ha de ser menor que el producto 0'75 × 0'001 = 0'00075; para que esto suceda, basta que dicho error sea menor que 0'0001; verificando la operación como al margen, se obtiene el cociente 8'331, siendo el pedido, según la regla, 8'332.

Puede considerarse como complemento de este capítulo lo que exponemos en los números **209**, *casos* 2.º, 3.º y 4.º, y **230**, *casos* 2.º, 3.º y 4.º

Elementos de Estenoritmia (*)

720. Definición. — Se llama *Estenoritmia* la parte de la aritmética que se ocupa de la abreviación y simplificación de los cálculos.

La índole especial de nuestro libro nos obliga a circunscribir las dimensiones de este capítulo dentro de estrechísimos límites. Sólo expondremos las simplificaciones y abreviaciones que consideramos de más inmediata aplicación práctica. Aquellos de nuestros lectores que deseen adquirir conocimientos más extensos de esta materia y de otras que sólo hemos podido tratar elementalmente, pueden consultar la excelente obra *Manual Práctico del Comerciante y del Dependiente de Comercio*, debida a la peritísima pluma de *D. Emilio Oliver Castañer*, a quien la bibliografía comercial española debe las mejores obras contemporáneas que, según nuestro concepto, se han publicado en nuestra patria.

ADICIÓN

721. *Para hallar, con rapidez, la suma de varios números dígitos, o de dígitos y polidígitos de dos guarismos, se agrupan mentalmente de dos en dos, o de tres en tres, sumando las sumas sucesivas de los sumandos agrupados.*

EJEMPLOS: 1.º *Hallar la suma de*: 8, 4, 5, 2, 6, 5, 7, 3, 8, 5.

Los agruparemos mentalmente, así: 8,4 | 5,2 | 6,5 | 7,3 | 8,5, y contaremos. 12, 19, 30, 40, 53.

También podríamos agruparlos de este modo: 8,4,5 | 2,6,5 | 7,3 | 8,5, y contar: 17, 30, 40, 53.

2.º *Hallar la suma de*: 9, 5, 5, 30, 42, 4, 11, 9, 3.

Pueden agruparse así: 9,5,5 | 30,42, | 4,11 | 9,3, y contar: 19, 91, 106, 118.

722. *Cuando han de verificarse sumas largas, para no fatigar la memoria y evitar equivocaciones, pueden emplearse procedimientos que ofrecen la ventaja de no tener que recordar las unidades que se llevan; ya porque se prescinde de ellas, ya porque se escriben a fin de no olvidarlas.*

EJEMPLO: *Sumar* 2847259 + 4327082 + 876534 + 743 + 950 + 47 + 9.

(*) De las voces griegas *stenos*, estrecho, y *arithmos*, número.

1.er procedimiento	2.º procedimiento	3.er procedimiento
2847259	2847259	**212233**
4327082	4327082	2847259
876534	876534	4327082
743	743	876534
950	950	743
47	47	950
9	9	47
34	34	9
29	32	8052624
23	26	
20	22	
13	15	
19	20	
6	8052624	
8052624		

Por el primer procedimiento, obtenemos, separadamente, los totales parciales de las unidades, decenas, centenas, etc., para formar después el total general.

Por el segundo, se escriben los totales parciales para recordar las unidades superiores que se llevan, que se agregan en cada suma parcial; se escribe también la primera cifra de la derecha de cada suma parcial, y al haber sumado el último orden de unidades, se tiene la suma total.

Por el tercer procedimiento, que es el más sencillo, nos limitamos a escribir arriba de cada columna de cifras, las unidades que llevamos de la suma parcial anterior, sumando cada vez las unidades llevadas.

723. Reglas para la suma mental abreviada. — 1.ª *A menudo, añadiendo o quitando una o más unidades a cualquiera de los sumandos, queda éste transformado en un número compuesto de una cantidad exacta de decenas o centenas, lo que facilita la operación.*

Ejemplos: Para sumar, por ejemplo, 47 y 9, se suman $47 + 10 = 57$, y se quita 1, lo que da 56. Así aconsejamos se proceda siempre que se trate de añadir 9 a otro número.

Si se han de sumar 35 y 19, diremos: $35 + 20 = 55$; quitando 1 quedan 54.

Para añadir 8, sumaremos 10 y restaremos 2. Así: $49 + 8 = (49 + 10 - 2) = 57$;

2.ª *Cuando se quieran sumar dos números de dos o más guarismos, sin alterarlos ni descomponerlos, se principiará por los guarismos de la izquierda.*

Así, para sumar 154 y 26, se dirá: $15 + 2 = 17 = 170$; más $4 + 6 = 10$, son 180.

Para sumar $1526 + 3442$, diremos: $15 + 34 = 49$ centenas, más $26 + 42 = 68$ unidades. Total, 4968.

SUBSTRACCIÓN

724. *Para restar varios números de uno solo, de cada orden del minuendo se resta la suma mental de los números que ocupan el mismo orden en los substraendos.*

Minuendo....	42782
Substraendos.	— 125
	— 280
	—1263
	— 42
	— 99
	— 7
Resta........	40966

Si del número 42,782 hemos de restar $125 + 280 + 1263 + 42 + 99 + 7$, dispondremos la operación como al margen, y diremos: 5 y 3, 8, y 2, 10, y 9, 19, y 7, 26; de 26 a 32 van 6, que los escribo en el resto, y llevo 3. 3 y 2, 5, y 8, 13, y 6, 19, y 4, 23, y 9, 32; de 32 a 38, van 6, que los escribo en el resto y llevo 3. 3 y 1, 4, y 2, 6, y 2, 8; de 8 a 17, van 9, que escribo en el resto, y llevo 1. 1 y 1, 2; de 2 a 2 va 0, que escribo en el resto. De 0 a 4 van 4, que escribo en el resto.

725. *Puede convertirse la operación de restar en otra de sumar, sin recurrir al complemento aritmético* (**674**).

	8637
	— 2486
Resta....	6151

Propongámonos restar 2486 de 8637. Fundándonos en que el minuendo es igual a la suma del substraendo con el resto, operaremos como si la substracción estuviese hecha y fuésemos a comprobarla, así: 6 y 1 (escribimos 1 en el resto) son 7; 8 y 5 (escribimos 5 en el resto) son 13, y llevo 1; 1 y 4 son 5, y 1 (escribimos 1 en el resto) son 6; 2 y 6 (escribimos 6 en el resto) son 8.

MULTIPLICACIÓN

726. *Prescindiendo de las unidades de orden superior que llevamos, es indiferente empezar la multiplicación por las unidades inferiores o por las superiores.*

Propongámonos la multiplicación de 1875 × 9.

1875	1875
× 9	× 9
45	9
63	72
72	63
9	45
16875	16875

727. *Cuando uno de los factores se compone de cifras consecutivas, la multiplicación puede suplirse por una suma.*

Propongámonos multiplicar 426 × 123 y 78 × 23.

	426		
	426		78
	426		78
	426		78
	426		78
	426		78
Producto......	52398	Producto......	1794

728. *Cuando uno de los factores se compone de un número formado por uno o más nueves, la operación de multiplicar puede suplirse por una resta.*

Multipliquemos: 1.º, 875 × 9; 2.º, 2496 × 99; 3.º, 4620 × 999.

1.º	875	2.º	2496	3.º	4620
	— 875		— 2496		— 4620
Producto....	7875	Producto....	247104	Producto....	4615380

729. *Multiplicar un número cualquiera por 45; por ejemplo,* 864.

864 × 100	86400
Mitad de 86400	43200
Esta $^1/_2$, corriendo un lugar a la derecha	— 43200
Diferencia, que es el producto	38880

730. *Multiplicar un número cualquiera por* 11, 111, 1111, etc.

Basta tomar el multiplicando por sumando tantas veces como la unidad está en el multiplicador, corriendo cada vez hacia la izquierda, uno, dos, tres, etc., lugares.

Multipliquemos 2462 por 11 y 111:

	1.º	2.º
	2462	2462
	2462	2462
		2462
Producto....	27082	273282

731. *Cuando la unidad se halle en el multiplicador, podemos operar como si no estuviera, haciendo servir al multiplicando como producto parcial de dicha unidad.*

Multipliquemos 458 por 123 y 458 por 213.

	458 × 123	458 × 213
	916	916
	1374	1374
Producto....	56334	97554

732. *Multiplicar un número cualquiera por* 5, 50, 500, 5000, etc.

Basta añadir a la derecha del multiplicando uno, dos, tres, cuatro, etc., ceros, y sacar la mitad del número que resulte; esta mitad es el producto.

Multipliquemos 256 por 5, 50, 500 y 5000.

256 × 5	256 × 50	256 × 500	256 × 5000
$^1/_2$ 2560	$^1/_2$ 25600	$^1/_2$ 256000	$^1/_2$ 2560000
Producto 1280	Producto 12800	Producto 128000	Producto 1280000

733. *Multiplicar un número cualquiera por* 4 *o por* 6.

Basta añadir un cero a la derecha del multiplicando, sacar la mitad y restar en el primer caso, o sumar en el segundo.

EJEMPLOS: 256 × 4 = ...	256	256 × 6 = ...	256
Mitad de 2560	1280	Mitad de 2560.............	1280
Resta, que es el producto....	1024	Suma, que es el producto..	1536

734. *Multiplicar un número cualquiera por* 25.

Se le añaden dos ceros a su derecha y se saca $^1/_4$.

EJEMPLOS: 423 × 25 = ...	42300	1754 × 25 = ...	175400
4.ª parte, que es el producto..	10575	4.ª parte, que es el producto.	43850

735. *Multiplicar un número cualquiera por* 125.

Se le añaden tres ceros a su derecha y se saca $^1/_8$.

EJEMPLOS: 126 × 125 = .	126000	2653 × 125 = ...	2653000
8.ª parte, que es el producto.	15750	8.ª parte, que es el producto.	331625

736. *Multiplicar un número cualquiera por* 150 *y por* 155.

Para multiplicarlo por 150, se le añaden dos ceros y se le suma la mitad; si el multiplicador es 155, se hace lo propio, añadiéndole la mitad más, corrida un lugar hacia la derecha.

EJEMPLOS: 426 × 150 = .	42600	426 × 155 = ...	42600
Más la $^1/_2$	21300	Más la $^1/_2$	21300
Suma, que es el producto.....	63900	Otra $^1/_2$ corrida a la derecha..	21300
		Suma, que es el producto...	66030

737. *Es conveniente conocer el método de partes alícuotas, que, en determinados casos, puede tener ventajosa aplicación.*

Multipliquemos 492 por 166.

Para repetir	100 veces el multiplicando, bastará	añadirle dos ceros . . .	49200
» »	50 » » » »	tomar la $^1/_2$	24600
» »	10 » » » »	añadirle un cero	4920
» »	5 » » » »	tomar la $^1/_2$ del 10 . . .	2460
» »	1 » » » »	añadirlo a la suma . .	492
Repetido	166 veces el multiplicando, el producto es la suma.		81672

738. *Hallar el producto de dos factores de igual número de cifras cada uno, sirviéndose de los complementos aritméticos* (**674**).

Se toma la diferencia entre uno de los factores y el complemento del otro a una potencia de 10, colocando a la derecha tantos ceros como tenga esta potencia; se añade a este resultado el producto de los dos complementos, y la suma es el producto buscado. Sea la multiplicación 989 × 998.

Producto de los complementos a 1000.	11 × 2 =	22
989 — 2 = 998 — 11 = 987, añadiendo tres ceros.		987000
Suma, que es el producto.		987022

739. *Hallar el producto de dos factores que no tienen igual número de cifras por el método de los complementos aritméticos.*

Si ambos factores no tienen igual número de cifras, se practica la regla dada en el caso anterior, igualando antes las cifras, añadiendo los ceros necesarios a la derecha del factor que tenga menos, teniendo cuidado de suprimir después estos ceros de la derecha del producto. Sea la multiplicación 9986 × 95. Igualando las cifras del segundo factor, tendremos 9986 × 9500.

Producto de los complementos a 10000	14 × 500 =	7000
9986 — 500 = 9486, añadiendo cuatro ceros.		94860000
Suma, que es el producto.		94867000

Sea la multiplicación 0'84 × 9'9843.

Procederemos como si hubiéramos de multiplicar 84000 × 99843.

Producto de los complementos a 100000.	16000 × 157 =	2512000
84000 — 157 = 83843, añadiendo cinco ceros.		8384300000
Suma, que es el producto.		8'386812000

Separamos de la suma 9 notas para decimales, porque hemos corrido el signo decimal 5 notas en el primer factor y 4 en el segundo; luego el producto obtenido por la suma, era 100000 × 10000 = 1,000,000,000 de veces mayor que el verdadero.

DIVISIÓN

740. *Dividir un número cualquiera por* 5, 50, 500, 5000, etc.

Se le multiplica por 2, y se separan de la derecha del producto, una, dos, tres, cuatro, etc., notas para decimales.

Dividamos: 480 : 5; 720 : 50; 84276 : 500; 48950 : 5000.

$$480 : 5 = \frac{480 \times 2}{10} = 96'0; \qquad 720 : 50 = \frac{720 \times 2}{100} = 14'40;$$

$$84276 : 500 = \frac{84276 \times 2}{1000} = 168'552; \qquad 48950 : 5000 = \frac{48950 \times 2}{10000} = 9'7900.$$

741. *Dividir un número cualquiera por* 25.

Se le multiplica por 4, separando de la derecha del producto dos notas para decimales.

Dividamos 2475 y 374500 por 25.

$$2475 : 25 = \frac{2475 \times 4}{100} = 99'00; \quad 374500 : 25 = \frac{374500 \times 4}{100} = 14980'00.$$

742. *Dividir un número cualquiera por* 125.

Se le multiplica por 8, separando de la derecha del producto tres notas para decimales.

Dividamos 675480 y 128925 por 125.

$$675480 : 125 = \frac{675480 \times 8}{1000} = 5403'840; \; 128925 : 125 = \frac{128925 \times 8}{1000} = 1031'400.$$

743. *Tabla de multiplicadores y divisores que dan los mismos resultados.*

Para completar las reglas anteriores substituyendo la división por la multiplicación, copiamos la curiosa tabla que M. Gossart nos ha legado en su excelente tratado de Estenoritmia:

Divisores	Multiplicadores	Divisores	Multiplicadores
2	0'5	40	0'025
2'25	0'444	45	0'022
4	0'25	50	0'02
4'5	0'222	66	0'01515...
5	0'2	75	0'01313...
8	0'125	80	0'125.
9	0'111	90	0'011...
10	0'1	99	0'0101...
11	0'0909...	110	0'00909...
12'5	0'08	111	0'009...
15	0'066	125	0'008
20	0'05	198	0'00505
25	0'04	250	0'004
30	0'033	666	0'00150150

Nada más fácil que aplicar la tabla precedente. Dividamos, por ejemplo, 480 : 25. Al divisor 25, vemos que corresponde el multiplicador 0'04; luego la división propuesta se transforma en esta multiplicación: 480 $\times$ 0'04 o bien $\frac{480 \times 4}{100} = 19'20$, cociente buscado.

Dividir 2694 : 99. Al divisor 99, corresponde el multiplicador 0'0101....; luego la división propuesta se transforma en esta multiplicación: 2694 $\times$ 0'0101.

744. *Dividir un número cualquiera por un divisor que pueda descomponerse en dos o más factores.*

La división suele ser más corta partiendo sucesivamente por cada uno de estos factores. Si hemos de dividir 582000 por 12, como 12 = 4 $\times$ 3, podemos proceder así:

$$\begin{array}{rl} & 582000 : 4 \\ \hline & 145500 : 3 \\ \hline \text{Cociente.......} & 48500 \end{array}$$

Si en las divisiones parciales hubiese residuos, se calculan sus cocientes como si tales residuos no existieran, y al terminar la última división, se multiplica el último residuo por el divisor que le precede, y a este producto se le añade el residuo de la división anterior; se multiplica esta suma por el tercer divisor, se añade al producto el residuo de esta división, y así sucesivamente.

Sea el dividendo 42835 y el divisor 42, igual á 7 × 6.

División ordinaria

42835	/ 42
083	
415	$1019 + \frac{37}{42}$
37	

Detalle de la división abreviada

$$42835 : 7 = 6119 + 2$$
$$6119 : 6 = 1019 + 5$$
$$5 \times 7 = 35;\ 35 + 2 = 37$$

Como en la división ordinaria, el cociente es 1019, más 37 a dividir por 42, o sea, $1019 \frac{37}{42}$.

Nota. — Al tratar la multiplicación abreviada, explicamos el excelente método de los complementos aritméticos; la aplicación de éstos a la división la consideramos desventajosa casi siempre, razón por la cual dejamos de tratarla, así como otros métodos de división abreviada por ser, en nuestro concepto, de recomendación muy discutible.

POTENCIAS

745. *Hallar el cuadrado de cualquier número.*

Podemos aplicar el recomendable método de los complementos aritméticos, que hemos explicado (**738**). Hallemos el cuadrado de 896.

Producto de los complementos a 1000.... 104 × 104 =	10816
896 — 104 = 792, añadiéndole tres ceros	792000
Suma, que es la segunda potencia buscada......	802816

Para obtener, abreviadamente, la 3.ª, 4.ª, 5.ª, etc., potencia de cualquier número, en nuestro concepto, debemos acudir siempre al sencillísimo empleo de los logaritmos (**691.** — 3.º).

RAÍCES

746. *Extraer la raíz cuadrada de cualquier número.*

Por los procedimientos ordinarios, calculamos *la mitad más una* de las cifras de la raíz, y se determinan las restantes partiendo el dividendo por el duplo de la parte hallada de la raíz. El residuo que queda siempre es menor que la unidad.

Sea $\sqrt{8764329325}$. Desde luego, vemos que la raíz tendrá cinco guarismos.

√ 87,6 4,3 2,93,25	93617
6 6,4	18
— 5 4 9	
1 1 5 3,2	186
— 1 1 1 9 6	
3,3 6 9	/ 1872
1 4,9 73	
1 8 69	

Después de haber llegado a la tercera cifra de la raíz, 936, hemos duplicado este número, obteniendo 1872, que pasa a ser divisor. El resto obtenido anteriormente era 336; bajamos a su derecha la cifra primera de la parte no bajada del número propuesto, y obtenemos 3369, que dividimos por 1872, obteniendo 1 de cociente, que es la 4.ª cifra de la raíz. Multiplicamos 1 por 1872 y restamos el producto del dividendo; a la derecha del resto, 1497, bajamos la cifra siguiente, y obtenemos 14973, que dividimos por 1872, obteniendo 7, que es la 5.ª cifra de la raíz. Multiplicamos 7 × 1872, y el producto lo restamos de 14973.

747. *Extraer la raíz cúbica de cualquier número.*

Por el procedimiento ordinario, calculamos como en la cuadrada, la *mitad más una* de las cifras de la raíz, y se determinan las restantes partiendo el dividendo por el triplo del cuadrado de la parte hallada de la raíz. El residuo siempre es menor que la unidad. Sea, por ejemplo, $\sqrt[3]{98965474253628}$. Desde luego, vemos que la raíz tendrá cinco guarismos.

$\sqrt[3]{98.965.474.253.628}$ | 46255
— 64
34 9 .... | 48
— 97 336
1 629 4 .... | 6348
— 98 611 128
35,43462 / 6,40332
34,18025
2,16365

Después de haber llegado a la tercera cifra de la raíz, 462, hemos hallado el triplo del cuadrado de este número, obteniendo 640332, que pasa a ser divisor. El resto obtenido anteriormente era 354346; bajamos a su derecha la cifra primera de la parte no bajada del número propuesto, y obtenemos 3543462, que dividimos por 640332, obteniendo 5 de cociente, que es la cuarta cifra de la raíz. Multiplicamos 5 $\times$ 640332, y el producto lo restamos del dividendo; a la derecha del resto, 341802, bajamos la cifra siguiente y obtenemos 3418025, que dividimos por 640332, obteniendo 5, que es la 5.ª cifra de la raíz. Multiplicamos 5 $\times$ 640332, y el producto lo restamos de 3418025.

Para obtener, abreviadamente, las raíces que hemos extraído y, sobre todo, las de grado superior, aconsejaremos siempre a nuestros lectores acudan al empleo de los logaritmos, mediante cuyo auxilio, tan breve como sencillo, nos ahorramos el engorroso trabajo de laboriosas operaciones (**691.** — 4.º)

Diferentes sistemas de numeración

748. Ya hemos dicho (**24**) que sistemas de numeración son las diferentes combinaciones convencionales inventadas para la expresión y representación de los números.

Sabemos también (**25**) que el número de signos empleados para la representación de los números, o el número de unidades de un orden cualquiera que se necesite para componer una unidad del orden inmediato superior, se llama *base* de un sistema.

Sabemos, asimismo, que el valor relativo de los signos depende del lugar que ocupen en el número, y que, por lo mismo, es necesario un signo, el *cero*, para ocupar aquellos lugares que carezcan de unidades. Esto sucede, naturalmente, en todos los sistemas.

Los sistemas de numeración toman el nombre del número que les sirve de base. Así, si la base fuese *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *doce*, etc., los sistemas de numeración se llamarían, respectivamente, *binario*, *ternario*, *cuaternario*, *quinario*, *duodecimal*, etc.

Por la misma razón, nuestro sistema se llama *décuplo* o *decimal*.

En todos los sistemas, la cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades tantas veces mayores que ésta como indica la base. De modo, pues, que la unidad de segundo orden, por ejemplo, que en el sistema decimal vale 10, en el binario vale 2; en el ternario, 3; en el cuaternario, 4; en el quinario, 5; en el duodecimal, 12, y así sucesivamente. La unidad del tercer orden, que en el sistema decimal vale 100, ó 10 $\times$ 10, en el binario vale 4, ó 2 $\times$ 2; en el ternario, 9, ó 3 $\times$ 3; en el cuaternario, 16, ó 4 $\times$ 4; en el quinario, 25, ó 5 $\times$ 5; en el duodecimal, 144, ó 12 $\times$ 12, y así sucesivamente.

Véanse los signos que son necesarios para representar los números según sean los sistemas.

Binario,	cuya base es 2	....	1, 0.
Ternario,	» » » 3	....	1, 2, 0.
Cuaternario,	» » » 4	....	1, 2, 3, 0.
Quinario,	» » » 5	....	1, 2, 3, 4, 0.
....	....	....	....
Decimal,	» » » 10	....	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.
Undecimal,	» » » 11	....	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, 0.
Duodecimal,	» » » 12	....	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, *b*, 0.

Naturalmente que, siendo 10 los signos del sistema ordinario, necesitamos otro signo más, *a*, para el undecimal, a fin de representar el número 10, y dos *a* y *b*, para el duodecimal, a fin de representar los números 10 y 11.

Siendo el *cero* el signo de carencia de unidades de un orden, y siendo cada cifra tantas veces mayor que su inmediata de la derecha como indica la base del sistema, los signos 1 y 0, escritos así, 10, representan *once* en el sistema undecimal; el 1 y *dos ceros*, esto es, 100, representa 11 × 11, ó 121, en el mismo sistema; el 1 y *tres ceros*, 1000, representa 11 × 11 × 11; ó 1331; etc.

En el duodecimal, 10 representa *doce;* 100, representa 12 × 12, ó 144; 1000, representa 12 × 12 × 12, ó 1728; etc.

749. Transformación de un número del sistema decimal en otro de cualquier sistema. — Seguiremos la regla siguiente: *Se divide el primero por la base del último, y el residuo representa las unidades de primer orden del número que se busca; se divide el cociente obtenido por la misma base, y el residuo indica las unidades de segundo orden; se divide el cociente nuevamente obtenido por la misma base, y el residuo representa las unidades de tercer orden, y así sucesivamente, hasta hallar un cociente menor que la base; teniendo presente que el último cociente expresará las unidades del último orden superior del número que se deseaba averiguar.*

Ejemplos: 1.º *Transformar el número* 487 *del sistema décuplo o decimal, en otro equivalente del sistema quinario.* — *R.* 3422.

	487	/5				
	37	97		/5		
Primer orden	2	47		19		/5
	2.º orden.	2	*3.er orden.*	4	*4.º orden*	3

2.º *¿A qué número corresponde del sistema cuaternario el* 1566 *del sistema décuplo?* — *R.* 120132.

	156,6,		/4							
	36		391	/4						
	06		31	97		/4				
Primer orden.	2	2.º	3	17		24		/4		
				3.º	1	4.º	0	6		/4
							5.º	2	6.º	1

3.º *El número* 87406 *del sistema común, ¿a qué número del duodecimal corresponde?* — *R.* 426*ba*.

	87406,	/ 12			
	034	728,3,	/ 12		
	100	083	606,	/ 12	
	046	2.º 11 = *b*	3.º 06	50	/ 12
Primer orden.	10 = *a*			4.º 2	5.º 4

750. Transformación de un número de un sistema cualquiera en otro del sistema decimal. — Se sigue la regla siguiente: *Se multiplica la primera cifra de la izquierda del número dado por la base del sistema a que pertenece, y al producto obtenido se le añade la segunda cifra; se multiplica esta suma por la misma base, y al producto obtenido se le añade la cifra tercera, y así sucesivamente, hasta haber añadido a un producto la última cifra, partiendo siempre de la izquierda. La última suma es el número que se busca.*

EJEMPLOS: 1.º *¿A qué número corresponde del sistema decimal el 3422 del quinario? — R.* 487.

$$3 \times 5 = 15,\ + 4 = 19$$
$$19 \times 5 = 95,\ + 2 = 97$$
$$97 \times 5 = 485,\ + 2 = 487$$

2.º *Transformar en número del sistema decimal el* 120132 *del sistema cuaternario.—R.* 1566.

$$1 \times 4 = 4,\ + 2 = 6$$
$$6 \times 4 = 24,\ + 0 = 24$$
$$24 \times 4 = 96,\ + 1 = 97$$
$$97 \times 4 = 388,\ + 3 = 391$$
$$391 \times 4 = 1564,\ + 2 = 1566$$

3.º *Averigüese a qué número del sistema décuplo equivale el* 426*ba del duodecimal.—R.* 87406.

$$4 \times 12 = 48,\ + 2 = 50$$
$$50 \times 12 = 600,\ + 6 = 606$$
$$606 \times 12 = 7272,\ + b \text{ (que vale 11)} = 7283$$
$$7283 \times 12 = 87396,\ + a \text{ (que vale 10)} = 87406$$

751. *Para transformar un número de un sistema cualquiera en otro equivalente de otro sistema, se pasa primero al sistema decimal, y después, del decimal, al sistema que se desea.*

EJEMPLO: *Averigüese a qué número del sistema óctuplo equivale el* 425 *del sistema séptuplo.—R.* 327.

$$4 \times 7 = 28,\ + 2 = 30$$
$$30 \times 7 = 210,\ + 5 = 215 \text{ del sistema decimal.}$$

$$\begin{array}{lllll} & 215 & \underline{/\ 8} & & \\ & 55 & 26 & \underline{/\ 8} & \\ \textit{Primer orden.} & 7 & 2.^{\text{o}}\ 2 & 3.^{\text{o}}\ 3 & \end{array}$$

Equivale al número 327.

752. Para sumar números de cualquier sistema de numeración, basta sólo tener presente la relación que guardan entre sí los diferentes órdenes de unidades.

EJEMPLO: *¿Cuál es la suma de los números* 125 + 437 + 843*a*0, *pertenecientes al sistema undecimal?*

$$\begin{array}{lr} & 125 \\ & 437 \\ & \underline{843a0} \\ \textit{Suma}\ldots\ldots\ldots\ldots & 84951 \end{array}$$

EXPLICACIÓN: La suma de la primera columna de la derecha es 12, y como que cada 11 unidades de un orden cualquiera constituyen una unidad del inmediato superior, en 12 unidades de primer orden hay una unidad de segundo orden y una de primero, que la escribo.

La suma de las unidades de la segunda columna (o de 2.º orden) más la unidad que llevo de la suma de la primera, son 16, que componen una unidad de tercer orden más 5 del 2.º, que las escribo; etc.

753. Para restar números de cualquier sistema de numeración, basta también tener presente la relación que guardan entre sí los diferentes órdenes de unidades, a fin de saber las unidades de orden inferior a que equivale la unidad del inmediato superior que añadimos a la cifra deficiente del minuendo, cuando la correspondiente del substraendo es mayor que ella.

EJEMPLO: *Del número* 84765, *réstese el* 69281, *suponiendo que ambos pertenecen al sistema duodecimal.*

$$\begin{array}{lr} & 84765 \\ & \underline{-\ 69281} \\ \textit{Resto}\ldots\ldots\ldots\ldots & 174a4 \end{array}$$

EXPLICACIÓN: De 1 a 5, van 4, que los escribo; de 8 a 6, no se puede restar; tomo una unidad del orden superior inmediato, que vale 12 del inferior; 12 y 6 son 18; de 8 a 18 van 10 = *a*, que los escribo; 1 que llevo más 2, son 3; de 3 a 7, van 4, que los escribo; de 9 a 4, no se puede restar; tomo una unidad del orden superior inmediato, que vale 12 del inferior; 12 más 4 son 16; de 9 a 16, van 7; etc.

754. Para multiplicar números correspondientes a cualquier sistema, basta conocer la relación que guardan entre sí las unidades, esto es, la base del sistema, a fin de sacar de cada producto parcial las unidades que contenga del orden superior inmediato.

EJEMPLO: *Hállese el producto de* 5104 *por* 25, *correspondiendo ambos números al sistema séxtuplo.*

$$\begin{array}{r} 5104 \\ \times\quad 25 \\ \hline 41532 \\ 14212 \\ \hline 224052 \end{array}$$

Producto total............... 224052

EXPLICACIÓN: Digo: 5 × 4 son 20; en 20 unidades de primer orden hay 3 de segundo orden y sobran 2, que las escribo; 5 × 0 son cero, más 3 son 3, que las escribo; 5 × 1 es 5, que las escribo; 5 × 5 son 25, que componen 4 unidades del orden superior inmediato y 1 del orden que se multiplica, escribo 1 y las 4 del orden superior; etc.

755. Para dividir números correspondientes a cualquier sistema de numeración, es suficiente conocer la relación que guardan entre sí las unidades y cuánto se ha dicho para el restar (**708**); pues el mecanismo de la división siempre es el mismo que el del sistema décuplo.

EJEMPLO: *Dividir* 5*a*8324 *por* 7*a*6, *correspondiendo ambos términos al sistema undecimal.*

$$\begin{array}{r|l} 5a8324 & 7a6 \\ \cline{2-2} 20a2 & 829 \quad \textit{Cociente.} \\ 7014 & \\ 555 & \end{array}$$

Prueba

$$\begin{array}{r} 7a6 \\ \times\ 829 \\ \hline 656a \\ 14a1 \\ 5874 \\ \hline 5a787a \\ +\ 555 \\ \hline 5a8324 \end{array}$$

Procedemos de la manera siguiente: Separamos cuatro cifras de la izquierda del dividendo, y dividimos las dos primeras cifras 5*a*, esto es, 65, (5 × 11 + *a*, que vale 10) por la primera de la izquierda del divisor. Tantearemos el 9 diciendo: 9 × 7 son 63; a 65 van 2, que valen 22 (2 × 11), más 8, son 30; 8 × *a* (que vale 10), son 80; 80 > 30, la cifra es mala. Probemos el 8: 8 × 7, son 56; a 65, van 9; 9 > 8, la cifra es buena. Multiplicamos el divisor por 8, y el producto lo restamos del primer dividendo parcial, diciendo: 6 × 8, son 48, que no puede restarse de 3; añado a esta cifra 5 unidades de segundo orden, que valen 55; 55 + 3, son 58; de 48 a 58 van 10, esto es, *a*. 8 × *a*, son 80; más 5, son 85, que no puede restarse de 8; añado a esta cifra 7 unidades de tercer orden, que valen 77, y la suma es 85; de 85 a 85 va 0. 8 × 7 son 56; más 7, son 63; de 63 a 65 van 2. Para hallar la segunda cifra del cociente, a la derecha del resto 20*a*, bajo la cifra siguiente del dividendo, y tengo el segundo dividendo parcial, 20*a*2. Divido las dos primeras cifras de la izquierda, 20, esto es, 22, (2 × 11 + 0) por la primera de la izquierda del divisor, y así sucesivamente.

FIN DE LA ARITMÉTICA TEÓRICA

PARTE PRÁCTICA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Numeración entera, hablada y escrita

I

1. ¿Qué es una unidad? — Nombrar muchas unidades. — Contar por unidades hasta diez (*). — Escribir los diez primeros números y leerlos después.

2. ¿Qué es una decena? — Diez bolas, ¿qué componen? — ¿Cuántas bolas componen una decena? — Contar por unidades desde diez hasta veinte. — Escribir y leer después los números comprendidos entre diez y veinte.

3. ¿Cuántas decenas componen veinte bolas? En dos decenas de bolas, ¿cuántas bolas hay? — Contar por unidades de veinte hasta treinta. — Escribir y leer después los números comprendidos entre veinte y treinta.

4. ¿Cuántas decenas componen treinta bolas? — En tres decenas de bolas, ¿cuántas bolas hay? — Contar por unidades desde treinta hasta cuarenta. — Escribir y leer después los números comprendidos entre treinta y cuarenta.

5. ¿Cuántas decenas componen cuarenta bolas? — En cuatro decenas de bolas, ¿cuántas bolas hay? — Contar por unidades desde cuarenta hasta cincuenta. — Escribir y leer después los números comprendidos entre cuarenta y cincuenta.

6. ¿Cuántas decenas componen cincuenta bolas? — En cinco decenas de bolas, ¿cuántas bolas hay? — Contar por unidades desde cincuenta hasta sesenta. — Escribir y leer después los números comprendidos entre cincuenta y sesenta.

7. ¿Cuántas decenas componen sesenta bolas? — En seis decenas de bolas, ¿cuántas bolas hay? — Contar por unidades desde sesenta hasta setenta. — Escribir y leer después los números comprendidos entre sesenta y setenta.

8. ¿Cuántas decenas componen setenta bolas? — En siete decenas de bolas, ¿cuántas bolas hay? — Contar por unidades desde setenta hasta ochenta. — Escribir y leer después los números comprendidos entre setenta y ochenta.

9. ¿Cuántas decenas componen ochenta bolas? — En ocho decenas de bolas, ¿cuántas bolas hay? — Contar por unidades desde ochenta hasta noventa. — Escribir y leer después los números comprendidos entre ochenta y noventa.

10. ¿Cuántas decenas componen noventa bolas? — En nueve decenas de bolas, ¿cuántas bolas hay? — Contar por unidades desde noventa hasta ciento. — Escribir y leer después los números comprendidos entre noventa y ciento.

11. ¿Qué es una centena? — ¿Cuántas decenas tiene una centena? — ¿Cuántas unidades? — Cien bolas, ¿qué constituyen? — Y diez decenas de bolas, ¿qué forman?

12. Contar por unidades desde uno hasta ciento.

13. Contar por decenas desde diez hasta ciento.

14. Escribir los números: diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa y ciento. Leerlos después todos empezando por el primero, y después empezando por el último, diciendo cuántas decenas y unidades contiene cada uno.

15. Escribir los números siguientes: once, quince, diez y nueve; veintidós, veinticinco, veintisiete; treinta y cuatro, treinta y seis, treinta y ocho; cuarenta, cuarenta y tres, cuarenta y cuatro, cuarenta y nueve; cincuenta y uno, cincuenta y cinco, cincuenta y siete. — Leerlos todos empezando por el primero y después, empezando por el último. — Decir cuántas decenas y cuántas unidades contiene cada uno.

16. Escribir los números siguientes: sesenta, sesenta y dos, sesenta y cinco, sesenta y ocho, sesenta y seis; setenta y uno, setenta y tres, setenta y cinco; ochenta y cuatro, ochenta y seis, ochenta y ocho, ochenta y nueve; noventa y tres, noventa y siete, noventa y nueve, ciento. — Leerlos todos empezando por el primero y luego, por el último. — Decir cuántas decenas y cuántas unidades contiene cada uno.

17. Escribir y leer después los números siguientes: ciento, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos, novecientos. — Decir cuántas unidades, decenas y centenas tiene cada uno.

18. Contar por unidades desde ciento hasta doscientos. — Idem por decenas. — Idem por unidades desde doscientos hasta trescientos. — Idem por decenas.

19. Contar por unidades desde trescientos hasta cuatrocientos. — Idem por decenas. — Idem por unidades desde cuatrocientos hasta quinientos. — Idem por decenas.

20. Contar por unidades desde quinientos hasta seiscientos. — Idem por decenas. — Contar por unidades desde ochocientos hasta novecientos. — Idem por decenas.

21. Escribir y leer después los números siguientes, diciendo cuántas unidades, decenas y centenas tiene cada uno: ciento uno, ciento dos, ciento tres.... ciento nueve. —

(*) Es muy conveniente que estos ejercicios se practiquen siempre con el auxilio del tablero contador.

Doscientos uno, doscientos dos..... doscientos nueve.—Trescientos uno, trescientos dos.... trescientos nueve. — Cuatrocientos uno, cuatrocientos dos..... cuatrocientos nueve.— Quinientos uno, quinientos dos..... quinientos nueve.

22. Hacer lo propio con los siguientes: seiscientos uno..... seiscientos nueve. — Setecientos uno..... setecientos nueve. — Ochocientos uno..... ochocientos nueve. — Novecientos uno..... novecientos nueve.

23. Hacer lo propio con los siguientes: ciento diez, ciento veinte, ciento treinta..... ciento noventa. — Doscientos diez..... doscientos noventa. — Trescientos diez..... trescientos noventa. — Cuatrocientos diez..... cuatrocientos noventa. — Quinientos diez..... quinientos noventa. — Seiscientos diez..... seiscientos noventa. — Setecientos diez..... setecientos noventa. — Ochocientos diez..... ochocientos noventa. — Novecientos diez..... novecientos noventa.

24. Escribir y leer después varios números de tres cifras significativas. — Decir cuántas unidades, decenas y centenas tiene cada uno.

25. ¿Qué es un millar? — ¿Cuántas centenas forman un millar? — ¿Qué constituyen diez centenas? — ¿Cuántas decenas tiene un millar? — ¿Qué constituyen cien decenas?

26. Escribir y leer después los números siguientes: mil, dos mil, tres mil..... nueve mil. — Contar por centenas hasta mil. — Idem por decenas.

27. Escribir y leer después los números siguientes: mil uno, mil dos, mil tres, mil cuatro..... mil nueve. — Dos mil uno..... dos mil nueve. — Tres mil uno..... tres mil nueve. — Cuatro mil uno..... cuatro mil nueve.— Cinco mil uno..... cinco mil nueve. — Nueve mil uno..... nueve mil nueve.

28. Idem los siguientes: mil diez..... mil noventa. — Dos mil diez..... dos mil noventa. — Tres mil diez..... tres mil noventa. — Cuatro mil diez..... cuatro mil noventa. — Cinco mil diez..... cinco mil noventa. — Seis mil diez..... seis mil noventa. — Siete mil diez..... siete mil noventa. — Ocho mil diez..... ocho mil noventa. — Nueve mil diez..... nueve mil noventa.

29. Idem los siguientes: mil ciento..... mil novecientos. — Dos mil ciento..... dos mil novecientos. — Tres mil ciento..... tres mil novecientos. — Cuatro mil ciento..... cuatro mil novecientos. — Nueve mil ciento..... nueve mil novecientos.

30. Idem varios números de cuatro cifras significativas. — Después de leídos, decir cuántas unidades, decenas, centenas y millares tiene cada uno.

31. ¿Qué es una decena de millar? — Cuántos millares componen una decena de millar? — Contar por millares hasta una decena de millar. — Escribir y leer después números de cinco cifras, indicando cuántas unidades contienen de cada orden.

32. ¿Qué es una centena de millar? — ¿Cuántas decenas de millar componen una centena de millar? — Contar por decenas de millar hasta una centena de millar. — Escribir y leer después números de seis cifras, indicando las unidades de cada orden.

33. ¿Qué es un millón? — ¿Cuántas centenas de millar forman un millón? — Contar por centenas de millar hasta un millón. — Escribir y leer después los números siguientes: un millón; dos millones; doce millones; cincuenta millones; doscientos treinta millones; un millón, un mil, uno; dos millones, diez mil, diez, etc.

34. Escribir y leer números de siete o más guarismos, combinando la cifra cero a menudo, y diciendo siempre las unidades de los diferentes órdenes.

II

35. Escribir al dictado los números siguientes, diciendo las unidades de sus órdenes:

24	14	10	190	808	777	699	804	111	505	717	3,000	9,000	6,060	5,010	3,030
36	18	81	400	880	333	906	408	888	550	771	4,000	4,004	6,600	5,100	3,300
40	66	18	404	888	609	800	480	777	700	177	5,000	4,040	8,880	5,555	3,303
82	55	32	440	701	960	814	840	444	707	789	6,000	4,400	6,600	3,333	3,033
90	91	100	444	700	690	841	488	500	770	1,000	7,000	4,444	6,666	3,000	3,800
76	48	109	800	710	966	184	222	555	777	2,000	8,000	6,006	5,001	3,003	5,050

36. Idem los siguientes:

50,000	20,200	40,010	44,400	10,110	14,506	90,909	99,000	70,701	77,700
60,000	22,000	40,100	44,044	10,111	28,970	99,900	99,991	70,777	77,107
80,000	22,200	41,000	44,004	10,001	90,000	99,909	70,000	77,000	50,001
70,000	22,202	40,444	10,010	10,101	90,009	99,999	70,700	77,707	50,010
20,002	35,480	40,404	10,010	14,650	90,090	99,109	70,707	77,770	50,100
20,020	40,001	40,440	10,100	14,605	90,900	90,999	70,770	77,777	58,432

37. Idem los siguientes:

24,850	20,472	100,000	110,000	800,080	888,888	443,520	200,000
42,809	85,116	100,001	111,111	800,800	888,008	765,500	500,000
78,416	32,994	100,100	800,000	808,000	888,080	124,102	500,500
12,896	67,508	101,000	800,008	880,000	888,800	336,495	500,550

38. Idem los siguientes:

1$_1$000,000	6$_1$000,600	6$_1$606,666	84$_1$000,084	90$_1$900,000	75$_1$324,423
2$_1$000,000	6$_1$006,000	6$_1$600,600	84$_1$000,804	90$_1$909,909	91$_1$165,284
9$_1$000,000	6$_1$600,000	6$_1$000,016	84$_1$804,000	13$_1$865,500	62$_1$876,555
8$_1$000,000	6$_1$606,600	6$_1$006,006	84$_1$408,804	18$_1$960,002	43$_1$000,010
6$_1$000,006	6$_1$660,000	42$_1$000,000	90$_1$000,009	33$_1$333,303	10$_1$003,003
6$_1$000,060	6$_1$666,660	29$_1$704,001	90$_1$888,800	45$_1$808,020	75$_1$333,111

39. Idem los siguientes:

124$_1$875,644	954$_1$000,000	800$_1$880,888	100$_1$000,000	128$_1$316,010
802$_1$600,006	875$_1$492,001	524$_1$773,116	742$_1$528,902	875$_1$668,444
346$_1$752,816	800$_1$000,000	760$_1$243,600	605$_1$746,812	201$_1$102,615

40. Idem los siguientes:

4,000$_1$000,000	6,000$_1$000,000	126,346$_1$208,600	643,100$_1$284,606
8,000$_1$000,000	8,436$_1$702,880	865,774$_1$000,002	718,865$_1$318,019

4$_2$000,000$_1$000,000	875$_2$614,896$_1$208,745	175$_2$000,000$_1$800,000	556$_2$700,000$_1$000,000
8$_2$064,125$_1$442,128	900$_2$000,000$_1$000,001	820$_2$772,512$_1$113,001	742$_2$184,556$_1$332,716
126$_2$875,745$_1$018,665	604$_2$000,000$_1$000,020	12$_2$000,007$_1$000,000	124$_2$350,750$_1$900,712

Ejercicios de sumar números abstractos

1. 8 + 2 + 3	**5.** 2 + 3 + 9	**9.** 7 + 6 + 6	**13.** 4 + 4 + 4	**17.** 7 + 6 + 5
2. 1 + 5 + 9	**6.** 4 + 6 + 8	**10.** 9 + 2 + 4	**14.** 8 + 8 + 8	**18.** 5 + 3 + 9
3. 3 + 7 + 6	**7.** 7 + 7 + 7	**11.** 8 + 1 + 3	**15.** 9 + 7 + 4	**19.** 9 + 8 + 7
4. 7 + 5 + 8	**8.** 5 + 5 + 5	**12.** 6 + 6 + 6	**16.** 9 + 9 + 9	**20.** 7 + 5 + 9

21. 5 + 2 + 3 + 4	**27.** 8 + 4 + 1 + 8	**33.** 7 + 6 + 8 + 3	**39.** 8 + 8 + 8 + 8
22. 3 + 1 + 6 + 4	**28.** 5 + 8 + 9 + 6	**34.** 9 + 4 + 7 + 8	**40.** 9 + 9 + 9 + 9
23. 4 + 2 + 5 + 8	**29.** 4 + 7 + 2 + 9	**35.** 5 + 6 + 4 + 9	**41.** 9 + 8 + 7 + 6
24. 5 + 4 + 1 + 6	**30.** 3 + 9 + 4 + 5	**36.** 4 + 4 + 4 + 4	**42.** 7 + 6 + 8 + 9
25. 6 + 5 + 3 + 7	**31.** 6 + 4 + 8 + 2	**37.** 6 + 6 + 6 + 6	**43.** 8 + 5 + 4 + 4
26. 7 + 4 + 5 + 9	**32.** 9 + 5 + 3 + 9	**38.** 7 + 7 + 7 + 7	**44.** 9 + 8 + 7 + 7

45. 24 + 15	**49.** 68 + 17	**53.** 88 + 22	**57.** 60 + 32	**61.** 46 + 77	**65.** 79 + 65
46. 32 + 14	**50.** 76 + 22	**54.** 99 + 11	**58.** 77 + 19	**62.** 87 + 56	**66.** 18 + 99
47. 16 + 28	**51.** 35 + 48	**55.** 47 + 25	**59.** 10 + 99	**63.** 49 + 84	**67.** 99 + 98
48. 37 + 43	**52.** 33 + 77	**56.** 86 + 40	**60.** 87 + 90	**64.** 27 + 96	**68.** 88 + 88

69. 425 + 670	**75.** 870 + 969	**81.** 875 + 493	**87.** 700 + 900	**93.** 129 + 876
70. 724 + 209	**76.** 674 + 222	**82.** 600 + 900	**88.** 474 + 811	**94.** 477 + 888
71. 280 + 750	**77.** 918 + 909	**83.** 947 + 786	**89.** 119 + 899	**95.** 998 + 702
72. 442 + 572	**78.** 908 + 776	**84.** 247 + 308	**90.** 595 + 291	**96.** 796 + 895
73. 601 + 954	**79.** 555 + 999	**85.** 789 + 921	**91.** 647 + 874	
74. 426 + 800	**80.** 666 + 777	**86.** 616 + 786	**92.** 836 + 745	

97. 8,642 + 5,762 + 8,490	**102.** 4,375 + 9,065 + 5,487	**107.** 2,358 + 9,078 + 4,329
98. 7,689 + 9,000 + 8,975	**103.** 7,512 + 8,643 + 7,984	**108.** 8,075 + 7,000 + 5,984
99. 8,946 + 1,863 + 1,865	**104.** 2,489 + 5,632 + 4,360	**109.** 7,498 + 2,754 + 7,789
100. 7,543 + 3,850 + 7,906	**105.** 5,698 + 4,761 + 9,840	**110.** 8,888 + 7,777 + 6,666
101. 5,386 + 4,759 + 8,000	**106.** 1,587 + 6,943 + 9,086	

111. 7$_1$846,329 + 4$_1$252,901 + 8,632 + 910
112. 543,289 + 42,780 + 32,895 + 326 + 25
113. 470,986 + 42,759 + 2,460 + 186 + 28 + 3
114. 284,672 + 896 + 7,429 + 846,320 + 8,645
115. 3 + 84 + 126 + 6,432 + 67,983 + 478,950
116. 8 + 60 + 352 + 4,681 + 74,529 + 784,632
117. 67 + 7,429 + 867,590 + 72,430$_1$968,680
118. 862,095 + 734,698 + 29 + 486 + 10 + 849,760
119. 9 + 6,000 + 38 + 7$_1$543,289 + 3,759 + 4 + 869 + 306
120. 846,729 + 46,325 + 6,724 + 543 + 32 + 9 + 367
121. 8$_1$632,496 + 46,320 + 389 + 84 + 8 + 4$_1$672,904

122. 47,238 + 764 + 8 + 64,329 + 10 + 80,005 + 48,634 + 6 + 8,720
123. 1,964 + 60 + 7,853 + 21,896 + 301 + 800,006 + 54,324 + 75 + 410
124. 32$_1$875,946 + 12,789 + 12 + 47,563 + 54,632 + 124 + 10 + 876,965
125. 840,000 + 50,000 + 864,000 + 90,006 + 750,000 + 8,000 + 50,009
126. 4$_1$759,000 + 975,400 + 5,000 + 37,500 + 8$_1$470,000 + 900 + 70,000
127. 15 + 7,000 + 8$_1$467,000 + 50 + 1,000 + 485,000 + 7,500 + 8,000
128. 74,280 + 59,432 + 75,043 + 680,075 + 1,400 + 900,653 + 809

129.	130.	131.	132.
432	8,463	54,329	47,320
+ 584	+ 9,650	+ 34,652	+ 896,432
+ 542	+ 8,742	+ 84	+ 75,490
+ 846	+ 5,427	+ 7,598	+ 800,006
+ 975	+ 8,942	+ 16	+ 754,320
+ 740	+ 1,273	+ 754	+ 9,800
+ 597	+ 6,524	+ 8,975	+ 460,708
+ 432	+ 8,945	+ 72,359	+ 12
+ 976	+ 7,896	+ 124	+ 84,762
+ 876	+ 6,236	+ 8	+ 963,789

133.	134.	135.	136.
846,329	9.654,378	4.759,864	46.328,960
+ 537,298	+ 5.678,946	+ 5.708,099	+ 45.798,097
+ 647,857	+ 97,999	+ 654,873	+ 999
+ 94,320	+ 888	+ 8,799	+ 54.329,855
+ 9,639	+ 7.789,866	+ 8.645,439	+ 876,679
+ 732,594	+ 5.946,328	+ 758,996	+ 877
+ 8,670	+ 877,999	+ 1.804,078	+ 25.479,625
+ 502,435	+ 8,888	+ 9.998,877	+ 7.984,392
+ 9,000	+ 9.977,489	+ 6.579,849	+ 87.549,879
+ 87	+ 5.076,098	+ 776,467	+ 90.512,396
+ 46,798	+ 6.140,987	+ 2.987,548	+ 47.598,978
+ 894,576	+ 4.987,896	+ 6.487,598	+ 75.896,439
+ 162,407	+ 95,988	+ 7,799	+ 4.972,605
+ 543,298	+ 7.489,769	+ 876,245	+ 968,977
+ 897	+ 6,709	+ 7.649,875	+ 95.478,694
+ 49,789	+ 476,589	+ 75,498	+ 72.984,693
+ 89,677	+ 889,977	+ 498,627	+ 57.498,297
+ 94,768	+ 97,689	+ 9.788,596	+ 6.439,876

Ejercicios de restar números abstractos

1. 4 — 2	8. 9 — 3	15. 96 — 74	22. 80 — 30	29. 99 — 99	36. 478 — 211
2. 8 — 6	9. 7 — 1	16. 98 — 13	23. 90 — 40	30. 64 — 64	37. 933 — 101
3. 7 — 3	10. 6 — 2	17. 66 — 51	24. 37 — 26	31. 864 — 542	38. 415 — 210
4. 9 — 5	11. 84 — 12	18. 79 — 66	25. 67 — 10	32. 676 — 410	39. 789 — 788
5. 8 — 1	12. 75 — 23	19. 74 — 21	26. 44 — 21	33. 599 — 300	40. 695 — 412
6. 3 — 2	13. 96 — 13	20. 89 — 33	27. 98 — 96	34. 900 — 100	
7. 8 — 2	14. 84 — 52	21. 66 — 20	28. 75 — 75	35. 999 — 873	

41. 876 — 638	49. 692 — 274	57. 6,821 — 5,409	65. 8,002 — 3,008	73. 2,000 — 96
42. 643 — 229	50. 468 — 329	58. 7,402 — 4,208	66. 4,025 — 2,178	74. 7,402 — 18
43. 578 — 409	51. 8,916 — 1,179	59. 8,769 — 5,989	67. 8,469 — 3,531	75. 6,080 — 97
44. 839 — 249	52. 7,894 — 4,388	60. 6,283 — 4,927	68. 9,603 — 4,057	76. 2,194 — 78
45. 873 — 124	53. 5,676 — 2,590	61. 7,402 — 5,009	69. 8,475 — 7,889	77. 6,320 — 95
46. 160 — 129	54. 2,465 — 1,096	62. 8,000 — 6,000	70. 6,328 — 4,592	78. 7,328 — 91
47. 830 — 340	55. 8,674 — 2,587	63. 9,000 — 3,000	71. 4,206 — 90	79. 4,296 — 43
48. 530 — 180	56. 9,402 — 3,096	64. 7,000 — 4,009	72. 1,843 — 87	80. 7,640 — 97

81. 65,325 — 476	93. 23,463 — 821	105. 732,950 — 432,954	117. 198,507 — 158,507
82. 87,060 — 849	94. 56,328 — 470	106. 846,053 — 293,794	118. 290,465 — 280,465
83. 10,090 — 708	95. 62,149 — 191	107. 657,148 — 374,391	119. 658,790 — 458,791
84. 96,328 — 979	96. 2,046 — 274	108. 821,084 — 624,384	120. 649,325 — 589,970
85. 51,043 — 685	97. 476,209 — 432,862	109. 897,004 — 790,594	121. 523,000 — 503,000
86. 43,271 — 900	98. 920,187 — 340,789	110. 632,182 — 154,980	122. 214,362 — 110,000
87. 58,305 — 780	99. 287,054 — 120,428	111. 876,429 — 475,387	123. 875,963 — 627,982
88. 43,762 — 459	100. 735,894 — 305,900	112. 470,518 — 247,614	124. 643,280 — 436,098
89. 38,070 — 790	101. 240,000 — 200,000	113. 754,896 — 487,590	125. 357,642 — 289,061
90. 63,290 — 905	102. 870,000 — 500,000	114. 632,089 — 195,000	126. 846,793 — 482,354
91. 42,103 — 764	103. 400,090 — 200,050	115. 463,287 — 463,287	127. 680,000 — 379,826
92. 86,359 — 104	104. 607,800 — 510,000	116. 759,645 — 380,462	128. 543,029 — 407,019

129.	7.432,895 — 246,328	138.	9,435.832,018 — 7,328.594,974
130.	5.438,976 — 152,098	139.	42,189.530,085 — 47.326,548
131.	6.475,004 — 5.346,094	140.	12,459.837,209 — 56.786,924
132.	5.910,364 — 63,289	141.	96,536.894,126 — 84,765.979,187
133.	6.743,982 — 896,450	142.	54,090.807,020 — 10,907.050,408
134.	7.900,000 — 4.987,562	143.	12,548.976,439 — 7,456.384,059
135.	6.432,875 — 6.000,000	144.	74,895.347,512 — 24.375,998
136.	6.984,373 — 800,000	145.	90,000.000,750 — 7,564.389,075
137.	5.000,000 — 2.846,752	146.	84,632.972,435 — 120.000,020

Ejercicios de multiplicar números abstractos

1. 8 × 2	15. 8 × 7	29. 29 × 2	43. 16 × 0	57. 73 × 6	71. 45 × 8	85. 96 × 9
2. 9 × 3	16. 9 × 8	30. 70 × 2	44. 95 × 4	58. 95 × 6	72. 79 × 8	86. 37 × 8
3. 5 × 2	17. 0 × 9	31. 64 × 3	45. 78 × 4	59. 78 × 6	73. 80 × 8	87. 54 × 7
4. 0 × 3	18. 7 × 8	32. 75 × 3	46. 89 × 4	60. 69 × 6	74. 76 × 8	88. 65 × 6
5. 8 × 4	19. 9 × 9	33. 98 × 3	47. 24 × 5	61. 12 × 7	75. 45 × 8	89. 39 × 9
6. 9 × 3	20. 6 × 7	34. 61 × 3	48. 36 × 5	62. 30 × 7	76. 75 × 8	90. 87 × 8
7. 6 × 4	21. 8 × 9	35. 39 × 3	49. 70 × 5	63. 43 × 7	77. 32 × 9	91. 49 × 9
8. 7 × 5	22. 9 × 0	36. 61 × 3	50. 89 × 5	64. 56 × 7	78. 80 × 9	92. 98 × 7
9. 0 × 4	23. 0 × 8	37. 24 × 3	51. 61 × 5	65. 89 × 7	79. 75 × 9	
10. 3 × 0	24. 42 × 2	38. 45 × 4	52. 35 × 5	66. 78 × 7	80. 33 × 9	
11. 3 × 5	25. 57 × 2	39. 80 × 4	53. 79 × 5	67. 19 × 7	81. 90 × 9	
12. 9 × 6	26. 49 × 2	40. 32 × 4	54. 16 × 6	68. 16 × 8	82. 61 × 9	
13. 0 × 7	27. 80 × 2	41. 64 × 4	55. 38 × 6	69. 32 × 8	83. 45 × 9	
14. 5 × 6	28. 33 × 2	42. 39 × 0	56. 24 × 6	70. 12 × 8	84. 78 × 9	

93. 863 × 23	104. 865 × 96	115. 223 × 76	126. 846 × 90	137. 846 × 170
94. 740 × 56	105. 768 × 47	116. 402 × 54	127. 128 × 70	138. 729 × 130
95. 965 × 45	106. 453 × 79	117. 207 × 85	128. 635 × 90	139. 267 × 100
96. 681 × 78	107. 680 × 60	118. 695 × 32	129. 718 × 10	140. 800 × 900
97. 209 × 94	108. 975 × 18	119. 899 × 10	130. 649 × 30	141. 700 × 808
98. 478 × 17	109. 689 × 46	120. 523 × 70	131. 896 × 80	142. 600 × 505
99. 975 × 88	110. 775 × 79	121. 890 × 10	132. 645 × 600	143. 900 × 708
100. 672 × 93	111. 688 × 42	122. 437 × 40	133. 328 × 700	144. 600 × 404
101. 574 × 72	112. 195 × 37	123. 296 × 10	134. 800 × 321	
102. 856 × 32	113. 840 × 96	124. 749 × 80	135. 544 × 800	
103. 178 × 74	114. 712 × 94	125. 125 × 50	136. 675 × 900	

145. 80,000 × 5,000	154. 84,200 × 4,286	163. 53,284 × 1,749	172. 1.257,000 × 298,746
146. 90,000 × 7,000	155. 75,000 × 7,542	164. 43,769 × 8,935	173. 7.432,863 × 100,000
147. 77,659 × 6,748	156. 75,000 × 4,338	165. 37,458 × 2,976	174. 3.600,000 × 980,000
148. 45,768 × 3,075	157. 72,986 × 4,875	166. 72,400 × 8,005	175. 4.800,090 × 700,054
149. 98,214 × 8,935	158. 10,000 × 1,000	167. 4.328,954 × 980,065	176. 8.275,439 × 469,586
150. 47,641 × 5,904	159. 74,329 × 1,546	168. 8.715,643 × 459,810	177. 7.524,893 × 807,060
151. 82,075 × 9,472	160. 28,635 × 1,000	169. 9.634,825 × 319,400	
152. 54,689 × 4,096	161. 42,098 × 6,007	170. 5.460,086 × 498,009	
153. 12,762 × 8,650	162. 87,295 × 4,807	171. 2.475,984 × 367,982	

178.	247.896,531 × 1.080,750	186.	4,728.954,890 × 472.000,890
179.	498.270,540 × 8.900,543	187.	5,328.006,472 × 823.054,009
180.	754.389,070 × 5.489,600	188.	2,754.286,750 × 100.000,000
181.	894.325,784 × 4.287,598	189.	1,000.000,000 × 985.427,685
182.	129.843,280 × 5.555,553	190.	5,328.946,730 × 894.000,476
183.	777.778,888 × 4.422,668	191.	5,674.286.249 × 567.423,781
184.	858.585,470 × 8.766,780	192.	6,375.489,027 × 788.741,205
185.	954.321,894 × 5.986,432	193.	2,435.894,328 × 542.863,791

Ejercicios de dividir números abstractos

1. 8 : 1	14. 9 : 5	27. 24 : 4	40. 42 : 6	53. 64 : 8	66. 55 : 9
2. 6 : 1	15. 8 : 6	28. 20 : 4	41. 57 : 6	54. 72 : 8	67. 64 : 9
3. 2 : 2	16. 10 : 2	29. 16 : 4	42. 23 : 6	55. 23 : 8	68. 21 : 9
4. 4 : 2	17. 12 : 2	30. 25 : 4	43. 26 : 6	56. 36 : 8	69. 48 : 9
5. 8 : 2	18. 14 : 2	31. 25 : 5	44. 21 : 7	57. 75 : 8	70. 76 : 9
6. 9 : 2	19. 13 : 2	32. 40 : 5	45. 49 : 7	58. 18 : 8	71. 40 : 9
7. 6 : 3	20. 15 : 2	33. 45 : 5	46. 63 : 7	59. 63 : 9	72. 80 : 9
8. 9 : 3	21. 12 : 3	34. 24 : 5	47. 56 : 7	60. 45 : 9	73. 70 : 8
9. 4 : 3	22. 21 : 3	35. 32 : 5	48. 23 : 7	61. 81 : 9	74. 60 : 8
10. 8 : 3	23. 29 : 3	36. 38 : 5	49. 45 : 7	62. 27 : 9	75. 50 : 7
11. 8 : 4	24. 15 : 3	37. 12 : 6	50. 68 : 7	63. 54 : 9	
12. 7 : 4	25. 19 : 3	38. 18 : 6	51. 24 : 8	64. 63 : 9	
13. 6 : 4	26. 14 : 3	39. 36 : 6	52. 40 : 8	65. 72 : 9	

76. 2.463,294 : 2
77. 6.350,846 : 2
78. 9.432,080 : 2
79. 8.720,590 : 2
80. 4.895,329 : 2
81. 6.516,435 : 2
82. 4.875,607 : 2
83. 3.529,863 : 2
84. 8.463,501 : 3
85. 2.746,914 : 3
86. 9.038,592 : 3
87. 8.647,503 : 3
88. 1.476,328 : 3
89. 2.846,507 : 3
90. 7.532,846 : 3
91. 3.089,569 : 3
92. 6.754,300 : 4
93. 8.532,000 : 4
94. 4.752,924 : 4
95. 2.754,324 : 4
96. 1.298,757 : 4
97. 3.895,207 : 4
98. 8.956,321 : 4
99. 9.534,283 : 4
100. 9.876,490 : 5
101. 7.824,540 : 5
102. 2.435,985 : 5
103. 1.243,295 : 5
104. 7.894,321 : 5
105. 4.328,964 : 5
106. 7.642,019 : 5
107. 3.451,286 : 5
108. 8.856,204 : 6
109. 1.548,561 : 6
110. 9.807,210 : 6
111. 2.395,476 : 6
112. 8.965,348 : 6
113. 3.508,931 : 6
114. 4.759,327 : 6
115. 1.085,405 : 6
116. 6.129,424 : 7
117. 2.456,265 : 7
118. 1.526,063 : 7
119. 8.113,280 : 7
120. 7.543,248 : 7
121. 9.425,743 : 7
122. 2.109,547 : 7
123. 8.243,561 : 7
124. 9.543,000 : 8
125. 5.320,000 : 8
126. 7.593,512 : 8
127. 5.694,832 : 8
128. 2.957,401 : 8
129. 4.637,850 : 8
130. 9.634,873 : 8
131. 5.123,946 : 8
132. 1.987,542 : 9
133. 2.643,075 : 9
134. 4.275,990 : 9
135. 9.243,045 : 9
136. 2.163,789 : 9
137. 6.432,008 : 9
138. 7.518,094 : 9
139. 2,400,058 : 9
140. 7.524,630 : 7
141. 2.895,432 : 7
142. 4.598,763 : 7
143. 8.675,946 : 8
144. 5.900,000 : 8
145. 4.520,853 : 8
146. 5.243,960 : 9
147. 3.218,406 : 9
148. 1.115,554 : 9
149. 2.223,300 : 9
150. 1.144,433 : 9
151. 8.407,594 : 9

---

152. 8.467,254 : 10
153. 1.245,630 : 10
154. 4.538,960 : 10
155. 2.354,200 : 10
156. 5.489,000 : 10
157. 6.543,282 : 20
158. 4.593,240 : 30
159. 2.985,437 : 40
160. 8.960,534 : 50
161. 3.281,946 : 60
162. 4.532,000 : 70
163. 7.952,431 : 80
164. 2.846,714 : 90
165. 4.528,936 : 11
166. 8.943,250 : 11
167. 6.143,290 : 21
168. 1.275,432 : 21
169. 5.467,982 : 31
170. 2.195,070 : 31
171. 1.354,890 : 41
172. 6.594,300 : 41
173. 5.320,890 : 51
174. 1.122,572 : 51
175. 6.329,842 : 61
176. 7.254,089 : 61
177. 5.318,054 : 71
178. 1.235,480 : 71
179. 9.574,023 : 81
180. 5.689,342 : 81
181. 2.634,742 : 91
182. 1.005,090 : 91
183. 7.254,321 : 12
184. 2.489,324 : 12
185. 5.438,091 : 22
186. 1.270,009 : 22
187. 7.459,820 : 32
188. 1.546,789 : 32
189. 6.754,392 : 42
190. 9.654,378 : 42
191. 5.438,609 : 52
192. 6.140,072 : 52
193. 1.894,392 : 62
194. 9.875,400 : 62
195. 8.635,407 : 72
196. 6.348,119 : 72
197. 1.166,558 : 82
198. 4.759,328 : 82
199. 1.200,000 : 92
200. 5.349,862 : 92
201. 6.543,802 : 13
202. 7.489,240 : 13
203. 1.250,400 : 23
204. 2.809,543 : 23
205. 5.294,306 : 33
206. 2.790,050 : 33
207. 9.854,279 : 43
208. 7.542,780 : 43
209. 1.790,054 : 53
210. 2.225,554 : 53
211. 9.898,750 : 63
212. 2.457,893 : 63
213. 5.984,270 : 73
214. 9.864,321 : 73
215. 5.432,908 : 83
216. 6.543,298 : 83
217. 4.572,905 : 93
218. 5.632,984 : 93
219. 7.000,000 : 14
220. 2.548,900 : 14
221. 9.547,289 : 24
222. 1.295,674 : 24
223. 7.548,090 : 34
224. 7.896,540 : 34
225. 1.298,065 : 44
226. 2.543,089 : 44
227. 5.960,003 : 54
228. 6.573,098 : 54
229. 7.788,956 : 64
230. 8.973,548 : 64
231. 9.742,584 : 74
232. 1.289,420 : 74
233. 5.732,895 : 84
234. 5.724,319 : 84
235. 8.230,798 : 94
236. 1.751,296 : 94
237. 5.270,094 : 15
238. 2.749,657 : 15
239. 9.853,289 : 25
240. 7.298,653 : 25
241. 3.233,484 : 35
242. 9.632.874 : 35
243. 1.976,328 : 45
244. 9.743,200 : 45
245. 4.334,000 : 55
246. 2.890,752 : 55
247. 1.881,746 : 65
248. 4.876,329 : 65
249. 1.897,462 : 75
250. 3.482,739 : 75
251. 2.400,000 : 85
252. 9.467,348 : 85
253. 9.000,000 : 95
254. 4.000,082 : 95
255. 7.348,963 : 16
256. 9.487,630 : 16
257. 8.475,769 : 26
258. 7.240,000 : 26
259. 8.943,007 : 36
260. 2.874,596 : 36
261. 9.750,000 : 46
262. 1.292,704 : 46
263. 9.754,896 : 56
264. 1.243,298 : 56
265. 5.670,809 : 66
266. 2.010,409 : 66
267. 3.287,591 : 76
268. 9.574,280 : 76
269. 2.132,090 : 86
270. 1.535,409 : 86
271. 1.532,945 : 96
272. 9.432,805 : 96
273. 1.331,678 : 17
274. 4.253,945 : 17
275. 3.410,905 : 27
276. 9.000,006 : 27
277. 4.500,009 : 37
278. 4.986,750 : 37
279. 8.954,320 : 47
280. 9.654,320 : 47
281. 1.290,075 : 57
282. 8.943,020 : 57
283. 2.145,963 : 67
284. 7.400,002 : 67
285. 3.984,752 : 77
286. 4.562,398 : 77
287. 9.540,308 : 87
288. 6.742,091 : 87
289. 1.572,946 : 97
290. 6.677,895 : 97
291. 4.532,980 : 18
292. 3.645,190 : 18
293. 4.295,879 : 28
294. 5.946,009 : 28
295. 6.677,948 : 38
296. 4.896,729 : 38
297. 4.623,590 : 48
298. 8.976,429 : 48
299. 1.294,325 : 58
300. 9.436,002 : 58
301. 1.294,732 : 68
302. 4.000,000 : 68
303. 7.000,206 : 78
304. 9.860,090 : 78
305. 9.643,289 : 88
306. 6.543,286 : 88
307. 5.427,643 : 98
308. 6.430,009 : 98
309. 3.406,070 : 19
310. 6.432,894 : 19
311. 8.205,043 : 29
312. 3.754,809 : 29
313. 4.632,504 : 39
314. 4.267,590 : 39
315. 2.452,080 : 49
316. 7.787,796 : 49
317. 6.674,328 : 59
318. 4.120,735 : 59
319. 4.386,294 : 59
320. 8.762,543 : 69
321. 8.275,437 : 69
322. 8.467,594 : 79
323. 9.653,600 : 79
324. 1.243,589 : 89
325. 3.245,839 : 89
326. 1.532,286 : 99
327. 8.432,963 : 99
328. 5.729,431 : 99

---

329. 4.328,667 : 100
330. 4.532,896 : 200
331. 5.687,843 : 300
332. 8.247,694 : 400
333. 6.328,964 : 500
334. 8.243,900 : 600
335. 7.843,200 : 700
336. 1.284,000 : 800
337. 5.764,000 : 900
338. 8.432,750 : 400
339. 3.289,700 : 800
340. 3.275,400 : 700
341. 8.760,000 : 100
342. 6.423,000 : 100
343. 9.452,700 : 600
344. 5.964,000 : 800
345. 4.328,000 : 500
346. 4.876,500 : 600
347. 3.280,000 : 900
348. 8.476,329 : 453
349. 6.870,906 : 275
350. 7.463,280 : 790
351. 6.543,800 : 980
352. 1.243,806 : 463
353. 7.429,869 : 781
354. 1.235,084 : 649
355. 4.874,231 : 518
356. 2.349.852 : 399
357. 7.248,351 : 877
358. 1.532,904 : 186
359. 2.475,086 : 199
360. 2.743,568 : 189
361. 3.254,372 : 297
362. 2.876,519 : 368
363. 1.643,927 : 508
364. 4.639,867 : 109

365. 247.689,600 : 8,400	**373.** 742.598,608 : 9,560	**381.** 218.777,666 : 9,821
366. 157.632,900 : 2,500	**374.** 236.018,954 : 4,198	**382.** 534.087,060 : 6,500
367. 427.598,000 : 8,000	**375.** 165.328,756 : 1,897	**383.** 746.538,426 : 8,972
368. 275.964,000 : 3,090	**376.** 864.329,548 : 4,790	**384.** 519.430,700 : 1,000
369. 954.327,089 : 6,000	**377.** 153.208,243 : 6,704	**385.** 943.280,000 : 1,000
370. 536.000,740 : 9,000	**378.** 953.278,642 : 4,009	**386.** 210.873,496 : 8,754
371. 428.728,900 : 7,500	**379.** 632.870,549 : 1,898	
372. 863.954,781 : 5,432	**380.** 534.280,795 : 2,579	

387. 2,745.890,632 : 74,289	**391.** 2,758.964,395 : 47,612	**395.** 2,854.037,064 : 94,275
388. 6,408.927,512 : 19,864	**392.** 8,543.209,635 : 89,676	**396.** 8,795.432,632 : 47,659
389. 2,354.872,860 : 62,005	**393.** 2,705.400,000 : 87,000	**397.** 7,523.460,000 : 95,000
390. 8,764.095,384 : 18,765	**394.** 5,463.287,563 : 27,890	**398.** 2,864.360,000 : 75,432

399. 2,750.480,924 : 275,460	**403.** 6,321.854,769 : 841,295	**407.** 7,653.289,631 : 777,777
400. 4,925.076,328 : 354,789	**404.** 9,534.708,098 : 198,789	**408.** 8,887.776,665 : 909,997
401. 5,320.804,729 : 712,086	**405.** 1,654.328,654 : 790,008	**409.** 7,450.000,000 : 896,548
402. 7,452.983,428 : 650,432	**406.** 2,475.386,400 : 759,000	**410.** 9,432.786,432 : 198,711

411. 94,765.089,218 : 8.643,295	**417.** 84,325.163,200 : 1.000,000
412. 52,807.065,490 : 1.895,406	**418.** 54,328.053,429 : 7.521,896
413. 84,300.099,127 : 9.705,648	**419.** 56,328.940,050 : 1.998,790
414. 12,496.738,958 : 1.375,096	**420.** 20,015.043,286 : 3.370,050
415. 94,300,860,000 : 7.890,000	**421.** 72,543.089,651 : 5.263,083
416. 16,432.842,531 : 1.985,200	**422.** 38,950.000,000 : 7.542,896

423. 574,320.896,580 : 57$_1$896,067	**426.** 235,403.289,806 : 548.000,006
424. 751,234.890,612 : 14$_1$985,670	**427.** 75.432,895.324,650 : 1,989.769,478
425. 896,730.000,000 : 934$_1$567,821	**428.** 35.897,432.896,801 : 98,416.320,750

Problemas de sumar y restar números enteros concretos

I

1. Antonio tenía 25 premios y recibió 12: ¿cuántos premios tuvo entonces?

2. Antonio tenía 25 premios y perdió 12: ¿cuántos premios le quedaron?

3. Enrique compró 32 bolas, que añadió a las 24 bolas que ya poseía: ¿cuántas bolas tuvo?

4. Enrique compró 32 bolas, y dió 24 a un amigo: ¿cuántas bolas le quedaron?

5. Cierto labrador, en un día, cobró 260 reales por una parte, y 86 por otra. ¿Cuántos reales obtuvo?

6. Cierto labrador cobró 260 pesetas, y gastó 86. ¿Cuántas pesetas le quedaron?

7. Un depósito contiene 250 litros de agua, y se le añaden 75 litros. ¿Qué cantidad de agua hay en él?

8. Un depósito contenía 250 litros de agua, y sacaron de él 75 litros. ¿Qué cantidad de agua quedó?

9. Periquillo tiene 40 céntimos en la mano derecha y 25 céntimos en la mano izquierda, y su mamá le pone 30 céntimos en el bolsillo. ¿Qué dinero tiene Periquillo?

10. Periquillo tenía 40 céntimos en la mano derecha y 25 en la izquierda, y dió 30 céntimos a su mamá. ¿Qué dinero quedó a Periquillo?

11. Emilio, Paquito y Joaquín guardan sus aleluyas dentro de una misma caja: el primero posee 146 aleluyas; el segundo, 96, y 280 el tercero. ¿Cuántas aleluyas hay en la caja?

12. Las 146 aleluyas que poseía Emilio, las 96 que tenía Paquito y las 280 de Joaquín se hallaban depositadas dentro de una misma caja. Joaquín quiso retirar las suyas: ¿cuántas aleluyas quedaron en la caja?

13. Un campesino poseía 24 bueyes, 32 caballos y 7 vacas, y compró 9 corderos. ¿Cuántas cabezas de ganado tuvo entonces el campesino?

14. Un campesino poseía 24 bueyes, 32 caballos, 7 vacas y 9 corderos, y vendió los 32 caballos. ¿Cuántas cabezas de ganado quedaron al campesino?

II

15. Luis tiene 7 bolas, Juanito tiene 12 y Evaristo tiene 9. ¿Cuántas bolas tienen los tres juntos?

16. Al felicitar un niño a sus padres y abuelos en el día de Navidad, le regalaron: su papá, 5 pesetas; su mamá, 4 pesetas; su abuelo, 6 pesetas, y 2 pesetas su abuelita. ¿Cuántas pesetas tuvo el niño?

17. El mes de enero tiene 31 días; febrero, 28; marzo, 31; abril, 30; mayo, 31; junio, 30; julio, 31; agosto, 31; septiembre, 30; octubre, 31; noviembre, 30, y diciembre 31. ¿Cuántos días tiene el año?

18. Un albañil ha de cobrar lo que ha ganado en 4 meses de trabajo. El primer mes ganó 62 pesetas; el 2.º, 54 pesetas; el 3.º, 70, y el 4.º 68. ¿Cuántas pesetas ha de cobrar el citado albañil?

19. Un padre reparte su capital entre sus cuatro hijos: al 1.º, le da 24,500 pesetas; al 2.º, 15,009 pesetas; al 3.º, 14,000 pesetas, y 6,499 al 4.º ¿Cuál era la fortuna del padre?

20. Un jugador, en tres distintos días, ha perdido las siguientes cantidades: el 1.º, 12,500 pesetas: el 2.º, 28,490 pesetas, y el 3.º, 89 pesetas. ¿Cuánto ha perdido en todo?

21. Cierto individuo debe 450 pesetas al sastre, 70 al zapatero, 1,280 al tendero y 9 al repartidor de la correspondencia. ¿Qué cantidad necesita para pagar sus deudas?

22. El trigo recolectado por un agricultor, durante 5 años, fué como sigue: en 1880, 2,520 hectolitros; en 1881, 3,600 hectolitros; en 1882, 3,596 hectolitros; 6,100 en 1883, y 4,499, en 1884. ¿Cuántos hectolitros recolectó en el citado quinquenio?

23. Una señora nació en 1865. ¿En qué año cumplirá 42 años?

24. Se desea saber cuánto había prestado un caballero que ha recibido 4,500 pesetas y aun le quedan a deber 98 pesetas.

25. Un caballero que murió a la edad de 40 años, había nacido en el año 1848. ¿En qué año murió?

26. Dos cazadores, en dos días, han cobrado las piezas de caza siguientes: el primer día, 6 conejos, 4 liebres y 8 perdices; el segundo día, 12 perdices, 2 liebres y 3 conejos. ¿Cuántas piezas han cobrado, y cuántas de cada clase?

27. Un obrero, en 7 días, ha hecho 28 metros de obra, por los que ha recibido 32 pesetas; en 12 días ha hecho 50 metros, por los que ha cobrado 52 pesetas, y por último, en 9 días, ha hecho 36 metros, recibiendo por este trabajo 44 pesetas. Se desea saber cuántos días ha trabajado, cuántos metros ha hecho y cuánto ha cobrado en todo.

28. Un cometa que aparece cada 70 años, se vió en 1886. ¿En qué año volverá a aparecer?

29. Un comerciante ha vendido 637 kilogramos de género por 6,427 pesetas; 439 kilogramos por 4,969 pesetas, y 174 kilogramos por 8,627 pesetas. ¿Cuántos kilogramos de género ha vendido y cuánto ha cobrado?

30. Un criado gana, mensualmente, 150 pesetas, y cobra sus salarios por semestres vencidos. ¿Cuántas pesetas recibe cada medio año?

31. Un padre dispone, en su testamento, que, al fallecer, se entreguen a sus tres hijos las cantidades siguientes: al hijo mayor, 42,000 pesetas; al 2.º, 35,000 y al menor, sordo-mudo, tanto como al 1.º y al 2.º ¿Qué cantidad correspondió al menor y cuánto, a los tres en junto?

32. Tres obreros se han repartido cierta cantidad: el 1.º ha recibido 46 pesetas; el 2.º, 9 pesetas más que el 1.º, y el 3.º, 28 pesetas más que el 2.º ¿Qué cantidad se han repartido y cuál es la parte de cada uno?

33. Cierto género ha costado 4,632 pesetas. ¿Por cuánto debe venderse para ganar 360 pesetas?

34. Un criado gana, mensualmente, 20 pesetas, y en 1.º de enero le aumentan su sueldo en 4 pesetas cada mes. ¿Cuánto deberá recibir en fin de abril del mismo año, en el supuesto de que no ha cobrado los tres meses anteriores?

35. El pueblo A. dista del pueblo B. 46 kilómetros; el pueblo B. dista del pueblo C. 653 kilómetros; este último pueblo dista del D. 159 kilómetros; el pueblo D. está a 99 kilómetros del pueblo E., y este último, a 258 kilómetros del pueblo F. ¿Cuánto dista el pueblo A. del pueblo F.?

36. Dos operarios, cuyo jornal es de 4 pesetas, trabajan en una misma fábrica; el 1.º trabaja los 6 días laborables de la semana, y el 2.º descansa el lunes, gastando lo que importa un jornal. ¿Qué cantidad líquida queda semanalmente a uno y otro obrero?

37. En una huerta hay 126 perales, 95 manzanos, 215 almendros, 8 cerezos y 77 nogales. ¿Cuántos árboles hay en conjunto?

38. Un comerciante compró, en Francia, géneros por valor de 4,860 pesetas. Satisfizo 640 pesetas por derechos de aduana, 96 pesetas por transporte y otro tanto por gastos de comisión y acarreo, desde la estación del ferrocarril al almacén. ¿Cuál es el valor de los géneros comprados?

39. Se han mezclado 300 kilogramos de nitro con 50 kilogramos de carbón y 50 de azufre, para hacer pólvora de cañón. ¿Cuántos kilogramos de pólvora se han obtenido?

III

40. Perico tenía 65 aleluyas, y entregó 20 a su hermano. ¿Cuántas le quedaron?

41. Luis y Antonio recibieron 136 naranjas, de las que regalaron 48 a Pepito. ¿Qué número de naranjas les quedó?

42. Hállese un número que, sumado con 146, dé 8,675.

43. Si de las 68 páginas que tiene un compendio de Geografía supiese un niño 46 ¿cuántas le faltarían aprender?

44. Una niña tenía 49 cerezas, y se comió 18. ¿Cuántas le quedaron?

45. Una caja llena de café pesa 215 kilos, y vacía, 35. ¿Qué cantidad de café contiene?

46. Un jugador perdió 4,532 pesetas de las 28,600 que tenía. ¿Cuántas pesetas le quedaron?

47. Un tendero compra una partida de géneros por 1,460 pesetas, y la vende por 1,602 pesetas. ¿Qué ganancia realiza?

48. D. Juan había nacido en el año 1856, y murió en 1890. ¿Qué edad tenía el día de su fallecimiento?

49. La imprenta se inventó en 1445, y la pólvora de cañón, en 1474. ¿Cuántos años hace que los hombres conocen ambos inventos?

50. ¿En qué año nacieron dos personas que acaban de fallecer, sabiendo que la 1.ª tenía 60 años, y 35 años la 2.ª?

51. Tengo 450 pesetas, y recibo 42 que me debía un amigo. Si gasto 213 pesetas en la compra de un traje, ¿cuánto me quedará?

52. En un almacén hay cáñamo de tres clases, y 1,450 quintales métricos en todo. Si hay 623 quintales de 1.ª clase y 240 quintales de 2.ª, ¿cuántos habrá de la clase 3.ª?

53. Un jugador tenía 45,683 pesetas, y perdió 2,400 pesetas la vez 1.ª, 965 pesetas la 2.ª y 18,699 pesetas la 3.ª ¿Cuánto le quedó?

54. Gutenberg inventó la imprenta en el año 1445, y Colón descubrió la América en 1492. ¿Cuántos años hacía que la humanidad se utilizaba de aquel civilizador invento, al descubrirse las Américas?

55. Wat inventó la primera máquina de vapor completa en 1784, y Dawy obtuvo la luz eléctrica en 1801. ¿Cuántos años mediaron entre ambas fechas?

56. Los navegantes genoveses y catalanes descubrieron las islas Canarias en 1345, y el francés Sebastián Cabot descubrió el famoso Banco de Terranova en 1496. ¿Cuántos años transcurrieron desde el primer descubrimiento hasta la fecha del segundo?

57. Si Barcelona cuenta, aproximadamente, 533,000 habitantes y Madrid 540,000, ¿cuántos habitantes faltan a la ciudad primera para tener igual población que la segunda?

58. Un comerciante ha cobrado 3 letras en un mismo día: la 1.ª, de 25,483 pesetas; la 2.ª, de 15,009, y la 3.ª, de 875. Al propio tiempo, ha satisfecho una factura de compra que importaba 18,450 pesetas, y el alquiler anual de la casa-almacén, que asciende a 1,006 pesetas. ¿A cuánto asciende lo cobrado, a cuanto lo pagado y cuál es su diferencia?

59. En una bodega hay 14 hectolitros de vino de a 45 pesetas el hectolitro; 29 hectolitros de a 52 pesetas uno; 126 hectolitros de a 64 pesetas, y 9 hectolitros de a 100 pesetas. De momento, se venden 6 hectolitros de la 1.ª clase, 28 de la 2.ª, 104 de la 3.ª y 4 hectolitros de la clase de a 100 pesetas. ¿Cuántos hectolitros de vino quedan en la bodega?

60. Las 8 secciones en que se hallan clasificados los niños de una escuela, tratan de obsequiar al señor cura del pueblo en el día de su santo, ofreciéndole la *Vida de San Pablo*, precioso libro que vale 25 pesetas. La 1.ª sección contribuye con 2 pesetas; la 2.ª, con 3; la 3.ª, con 2; la 4.ª, con 5; la 5.ª, con 4; la 6.ª, con 2, y la 7.ª y la 8.ª con 1 peseta cada una. ¿Cuánto tendrá que añadir el maestro?

61. Luisa gastó 68 pesetas de las 120 que tenía, y Pepita gastó 19 de las 76 que le dió su mamá. ¿Cuál de las dos quedó con más dinero?

62. Pedro, Enrique y Luisito tenían 100 pesetas cada uno, y han gastado lo siguiente: el 1.º, 18 pesetas; el 2.º, 37, y 49 pesetas el 3.º ¿Cuánto ha quedado á cada uno y cuánto reunirían juntando lo que les queda?

63. Francisco y Pepe tienen 420 pesetas cada uno, y 246 pesetas cada uno, Juan y Andrés. Francisco gasta dos veces 120 pesetas; Pepe invierte 60 pesetas en la compra de un traje, y Juan y Andrés gastan 77 pesetas cada uno. Se pregunta: ¿cuánto reunían los cuatro juntos, cuánto queda a cada uno y cuánto tendrían si juntaran lo que les queda?

64. Determínese un número que, sumado con 120 y 4,613, dé de suma 439,654.

65. Si a la suma de dos números se añade su diferencia, ¿qué representa la suma obtenida?

66. La diferencia de dos números añadida á la suma de los mismos, da de total 1,648. ¿Cuál es el mayor de dichos dos números?

67. Si á la suma de dos números se añade la diferencia de los mismos, se obtiene por resultado 1,260. Averigüese el número mayor.

68. Un joyero ha vendido una pulsera y un juego de botones, siendo el precio de la primera joya, mayor que el de la segunda. El valor de ambas cosas sumado con lo que la pulsera ha costado de más, asciende a 80 pesetas. ¿Qué valor tiene la pulsera?

69. Si de la suma de dos números quitamos su diferencia, ¿qué representa la diferencia obtenida?

70. La suma de dos números es 60, y su diferencia, 12. ¿Cuál es el número menor?

71. La suma de dos números es 647, y la diferencia de los mismos, 229. ¿Cuál es el menor?

72. La suma de dos números es 1,071, y la diferencia de los mismos, 721. ¿Cuál es el número mayor?

73. La diferencia entre dos números es 350, y la suma de los mismos, 990. ¿Cuáles son estos números?

74. Si quitamos la suma de dos números del duplo del mayor, ¿qué obtendremos por resultado?

75. La suma de dos números es 19, y 12, el número mayor. Hállese la diferencia entre dichos números.

76. La suma de dos números es 54, y 24 es el duplo del menor. ¿Qué diferencia existe entre ambos números?

Problemas de multiplicar y dividir números enteros concretos

I

1. Hágase el número 1,240 dos veces mayor.
2. Hágase el número 1,240 dos veces menor.
3. Hállese un número 4 veces mayor que el número 84,700.
4. Hállese un número 4 veces menor que el número 84,700.
5. Antonio tenía 7,580 pesetas, y Juan era dueño de una cantidad 5 veces mayor. ¿Cuántas pesetas poseía Juan?
6. Antonio tenía 7,580, pesetas y Juan era dueño de una cantidad 5 veces menor. ¿Cuántas pesetas poseía Juan?
7. Se sabe que, en un parque de artillería, hay 8 veces más granadas que bombas; si el número de bombas es 6,504, ¿cuántas granadas hay?
8. Se sabe que, en un parque de artillería, hay 8 veces menos bombas que granadas; si el número de granadas es 6,504, ¿cuántas bombas hay?
9. ¿Cuántos meses hay en 48 años?
10. ¿Cuántos años hay en 48 meses?
11. ¿A cuántos reales equivalen 160 duros?
12. ¿A cuántos duros equivalen 160 reales?
13. ¿Cuántos metros son 184,670 decámetros?
14. ¿Cuántos decámetros son 184,670 metros?
15. ¿Cuántas pesetas valen 1,256 litros de alcohol, a 2 pesetas el litro?
16. Si 1 litro de alcohol vale 2 pesetas, ¿cuántos litros se comprarán con 1,256 pesetas?
17. ¿Cuántos días hay en 6,048 semanas?
18. ¿Cuántos semanas hay en 6,048 días?
19. Pagando el azúcar a 2 pesetas el kilo, ¿cuántas pesetas valdrán 4,000 kilos de azúcar?
20. Pagando el azúcar a 2 pesetas el kilo, ¿cuántos kilos de azúcar se comprarán con 4,000 pesetas?
21. Si 1 jornal de albañil importa 4 pesetas, ¿cuántas pesetas importarán 224 jornales de albañil?
22. Si 1 jornal de albañil importa 4 pesetas, ¿cuántos jornales de albañil podrán pagarse con 224 pesetas?
23. Dando 5 estampas a cada niño, ¿cuántas estampas se necesitarán para premiar a los 80 niños que asisten a un colegio?
24. Dando 5 estampas a cada niño, ¿cuántos niños podrán premiarse con 80 estampas?
25. Entregando 3 pesetas a cada persona, ¿cuántas pesetas recibirán 960 personas?
26. Si tres personas han de repartirse 960 pesetas, ¿cuántas pesetas recibirá cada persona?

II

27. Hágase 69 veces mayor el número 45,618.
28. Hágase 768 veces mayor cada uno de los números siguientes: 87,428 y 2,609.
29. Ernesto tiene 26 pelotas, y su hermano posee 9 veces más. — ¿Cuántas pelotas tiene su hermano?
30. Un niño tiene 7 años, y la edad de su padre es 5 veces mayor. — ¿Cuál es la edad del padre?
31. La fortuna de Emilio es de 25,890 pesetas, y su padre, al fallecer, le legó un capital 6 veces mayor. — ¿Qué fortuna heredó Emilio?

32. ¿Cuántas pesetas hay en 836 duros?

33. ¿Cuántos minutos componen 36 horas?

34. ¿Cuántas naranjas hay en 4,620 docenas?

35. ¿A cuántos días equivalen 14 años?

36. El que comprase una pieza de percal cuyo tiro fuese 23 metros, ¿cuántos decímetros de percal tendría?

37. ¿Cuántas pesetas hay en 79 duros y 4 pesetas?

38. ¿Cuántos reales componen 19 duros, 3 ptas. y 2 reales?

39. ¿A cuántos kilogramos equivalen 4 toneladas métricas, 2 quintales métricos y 5 kilogramos?

40. ¿Cuántos decímetros hay en 4 decámetros, 6 metros y 2 decimetros?

41. ¿Cuántas horas son 4 semanas y 7 horas?

42. ¿Pagando un género a 15 pesetas el kilogramo, ¿cuánto valdrán 9 kilogramos?

43. ¿Cuánto importará la venta de 45 metros de paño, al precio de 6 pesetas el metro?

44. Para el laboreo de un campo, se emplearon 38 jornales, que fueron satisfechos a 3 pesetas uno. ¿Cuánto necesitó el propietario para pagar los 38 jornales mencionados?

45. ¿Cuánto tuvo que satisfacer un tabernero por la compra de 48 hectolitros de vino tinto, al precio de 4 pesetas el decalitro?

46. Pagando un género a 8 pesetas el kilogramo, ¿cuánto abonaré por la compra de 4 quintales métricos?

47. ¿Cuál será el valor de 27 docenas de naranjas a 3 céntimos cada naranja?

48. Siendo 6 pesetas el precio de una gallina, ¿cuánto importará la venta de 32 pares?

49. ¿Cuánto importarán 854 metros de cierto género, a 100 pesetas el metro?

50. El que comprase 245 quintales métricos de madera a 10 pesetas el quintal, ¿cuánto debería entregar?

51. Un sastre recibió de París 2 docenas y media de gabanes adornados con pieles, pagándolos a 200 pesetas cada uno. ¿Cuántas pesetas tuvo que entregar?

52. Pagando el coñac a 3 pesetas el litro, ¿cuánto importará la compra de 2 hectolitros, 4 decalitros y 9 litros?

53. Un padre, al hacer testamento, señaló 5,000 pesetas a su hijo mayor; el duplo a su hijo segundo; el cuádruplo, a una hija, y el quíntuplo, al hijo menor, niño de 3 años. ¿Cuánto correspondió a cada uno?

54. En 1885, un maestro zapatero vendió 560 pares de botas; en 1886, vendió el cuádruplo que el año anterior; en 1887, el quíntuplo que en 1886, y en 1888, tantos pares como en los dos primeros años. ¿Cuántos pares de botas vendió cada año y cuántos, en total?

55. Un tratante en aceites ha adquirido las partidas siguientes: 46 hectolitros de Aragón a 60 pesetas el hectolitro; 124 hectolitros del Ampurdán a 58 pesetas uno; 6 hectolitros de Andalucía a 62 pesetas, y 75 hectolitros de Tortosa a 70 pesetas ídem. ¿Cuánto ha importado la adquisición de las 4 partidas mencionadas?

56. Pagando el vino a 2 pesetas el decalitro, y vendiéndolo a 27 pesetas el hectolitro, ¿cuánto se ganará en la compra-venta de 23 hectolitros?

57. Un platero tiene 24 docenas y media de cubiertos de plata valorados en 22 pesetas cada uno. ¿A cuánto asciende su valor?

58. Cierto aguador posee un carretón del cual se sirve para llevar el agua a domicilio, en el cual caben 12 cántaros. Lo llena 18 veces cada día, y vende el cántaro de agua a 12 céntimos de peseta. ¿Cuántos céntimos gana por día y cuántos, por semana?

59. Un tendero tiene 20 piezas de damasco de seda de a 36 metros cada una; 12 piezas de paño de a 33 metros cada una, y 9 piezas de satén, de a 20 metros cada una. Si vendiese las primeras a 24 pesetas el metro, las segundas a 5 pesetas ídem y a 7 pesetas las terceras, ¿cuánto cobraría en todo?

60. Para redimir del servicio de las armas a su hijo, un trabajador ha resuelto depositar en una caja de ahorros la mitad de las 2 pesetas que en fumar gasta semanalmente. ¿Qué cantidad habrá ahorrado al cabo de los 20 años?

61. Un ganadero poseía 2,450 cabras, cuyo precio medio calculaba en 18 pesetas por cabeza, de las que vendió 96, y murieron 45. Se pregunta: ¿cuántas cabras le quedaron, cuánto valían las perdidas, cuánto cobró por las que vendió y cuánto valen las que le quedaron?

62. Cierto comerciante en granos compró 246 hectolitros de maíz, a 2 pesetas el decalitro, de los que en seguida vendió 126 hectolitros a 25 pesetas uno, y al cabo de 5 días, el resto, a 26 pesetas el hectolitro. Averígüese la ganancia realizada, teniendo en cuenta que satisfizo 56 pesetas por gastos de transporte.

63. De los 86 hectolitros de vino que posee un almacenista, ha vendido 32 a 50 pesetas el hectolitro; 46, a 51 pesetas, y el resto, a 49 pesetas ídem. ¿Cuánto cobrará en junto?

64. El hombre respira, por término medio, 16 veces por minuto, y en cada inspiración introduce, poco más o menos, en sus pulmones, 135 centímetros cúbicos de oxi-

geno. En cada espiración, devuelve a la atmósfera 105 centímetros cúbicos de dicho gas. ¿Qué cantidad de oxígeno consume el hombre por hora?

65. Un económico trabajador tiene un jornal de 6 pesetas diarias, de las que destina 3 al sostenimiento de su familia y el sobrante, a la caja de ahorros. Suponiendo que cada mes trabaja 25 días, averígüese: 1.º, cuánto habrá ganado en 1 año; 2.º, cuánto habrá gastado, y 3.º, cuánto habrá economizado.

66. Un tratante en tapones compró 6 balas de *trefinos* a 9 duros el mil; 15 balas de *puntiagudos*, a 5 pesetas el mil; 120 miles de *modelo*, a 14 pesetas uno, y 3 balas y media de *segunda buena*, a 8 pesetas el millar. Teniendo una bala 30 miles, averígüese cuántos miles de tapones compró y cuánto tuvo que desembolsar.

III

67. Hágase 45 veces menor el número 32,450.

68. Si el número 3,453 se hace 249 veces menor y 199 veces el número 4.396,075, ¿qué resultados se obtendrán?

69. El abuelo de Luisito regaló a éste 2,456 bolas de variados colores, asegurándole que su compañero Enrique tenía 5 veces menos bolas que él. ¿Cuántas bolas tenía Enrique?

70. La fortuna de un propietario asciende a 84,520 pesetas, habiendo heredado de su padre un capital 14 veces menor. ¿Cuál era la fortuna del padre?

71. ¿Cuántas veces el número 56 está contenido en 28,632?

72. ¿Cuántas veces están contenidos en 19,440 los números 184 y 4,320?

73. En un cesto hay 36,584 huevos. ¿Cuántos pares de huevos contiene?

74. La altura de una torre es 120 metros, y la longitud de la sombra que proyecta es 40 metros. ¿Cuántas veces la altura de la citada torre es mayor que la longitud de su sombra?

75. Seis niños han de repartirse 576 naranjas. ¿Cuántas corresponderán a cada uno?

76. Martín, Lucía y Celestina han recibido 963 aleluyas, que han de repartirse en partes iguales. ¿Cuántas recibirá cada uno?

77. Siete hombres y 9 mujeres han sacado un premio de la lotería, consistente en 50,000 pesetas, interesando en partes iguales en la compra del billete. ¿Cuánto recibirá cada uno?

78. Un padre, en su testamento, dispone que, al fallecer, las 2,400 hectáreas de viñedo y las 36,000 pesetas que posee sean repartidos entre dos hijos y una hija en partes iguales. — ¿Cuál será la herencia de cada uno?

79. ¿Cuántos duros hay en 28,000 reales?

80. El que reciba 4,855 pesetas, ¿cuántos duros tendrá?

81. ¿Cuántos quintales métricos componen 2,400 kilogramos?

82. El que vendiese 24,800 decímetros de paño, ¿cuántos decámetros entregaría?

83. Redúzcanse a quintales métricos 286,000 kilogramos.

84. ¿Cuántas hectáreas componen 1.578,000 centiáreas?

85. ¿Cuántos meses de 30 días hay en 1,256 días?

86. ¿Cuántos kilómetros componen 728,000 metros?

87. ¿Cuántos años componen 46,380 días?

88. La compra de 24 gorras importó 72 pesetas. ¿Cuánto costó cada una?

89. Un cortante adquirió 6 corderos por 108 pesetas. ¿Cuánto vino a satisfacer por cada uno?

90. ¿Cuántas pesetas vale 1 quintal métrico de café, si por 36 quintales se han pagado 7,200 pesetas?

91. Un almacenista vendió 46 hectolitros y 25 litros de vino por 440 pesetas. Determínese a razón de cuánto vendió el litro.

92. Un propietario pagó 96 pesetas por 30 jornales empleados en el laboreo de un campo de su pertenencia. ¿Cuántas pesetas y céntimos le costó cada jornal?

93. La compra de 40 quintales métricos de corcho ha costado a un fabricante de tapones 1,070 pesetas. ¿Cuántas pesetas y céntimos le cuesta 1 quintal?

94. Si 1 kilo de manteca vale 5 pesetas, ¿cuántos kilos se podrán comprar con 2,560 pesetas?

95. Pagando el quintal métrico de algarrobas a 4 pesetas, ¿cuántos quintales se comprarán con 4,300 pesetas?

96. Un panadero desea adquirir harina de a 25 pesetas el quintal métrico. ¿Cuántos quintales métricos comprará empleando 42,500 pesetas?

97. Un fabricante de tapones ha empleado 4,000 ptas. en corcho de a 20 pesetas el quintal métrico. ¿Cuántos kilogramos ha comprado?

98. El litro de vino superior se paga a 3 pesetas. ¿Cuántos litros se podrán adquirir con 49 pesetas?

99. Antonio cobró 510 pesetas, de una parte, y 130 pesetas de otra, empleando lo cobrado en damasco de a 2 pesetas el decímetro. ¿Cuántos metros compró?

100. ¿Cuál es la mitad de 246, el tercio de 95,361, el cuarto de 2,816, el quinto de 2,465, el sexto de 786,216 y el noveno de 843,237?

101. Dividiendo por 100 el número 24,800, ¿qué cociente se obtendrá?

102. Háganse, abreviadamente, las divisiones siguientes: 24,000 : 100 — 800 : 10 — 1.860,000 : 1,000 — 34,270.000 : 10,000.

103. Háganse, abreviadamente, las siguientes divisiones: 24, 880 : 10 — 94,600 : 600 — 984,600 : 70 — 9.847,000 : 2,400 — 98.320,000 : 36,000 — 4,572.180,000 : 7.860,000.

104. Con el producto de la venta de 84 quintales métricos, 45 kilogramos de café a 2 pesetas el kilogramo, ¿cuántos litros de coñac compraré, si el precio de uno es 3 pesetas?

105. Sabiendo que el sonido se propaga con una velocidad aproximada de 343 metros por segundo, ¿cuánto tardaríamos en oír la detonación de un cañonazo, disparado a 150,000 metros de distancia?

106. Un hortelano dispone de dos aljibes para el riego de su huerta. En el primero, caben 30,000 litros de agua, y 74,650 litros en el segundo. Suponiendo que para el riego de la cuarta parte de su huerta necesita, ordinariamente, 6,000 litros, ¿cuántas veces podrá regar toda la huerta, teniendo llenos los dos aljibes?

107. Un comerciante ha gastado 24,000 pesetas del modo siguiente: el quinto, en vino de Jerez de a 3 pesetas el litro; el cuarto, en cacao de a 6 pesetas el kilo, y el resto, en café de a 2 pesetas ídem. ¿Cuánto ha adquirido de cada cosa?

108. En la caja de un banquero hay 324,000 pesetas, de las que invierte los dos novenos en el pago de 5 letras, y los tres octavos, en satisfacer varias partidas. ¿Cuánto le queda?

109. Cierto individuo, que poseía 22,504 pesetas, ha cobrado el valor de 35 decámetros de franela a 160 céntimos de peseta el metro, y el capital que actualmente posee quiere invertirlo como sigue: los tres octavos, en bacalao de a 24 pesetas el quintal m.; un doceavo, en vino de a 5 pesetas el decalitro, y el resto, en manteca de a 5 pesetas el kilo. ¿Cuánto adquirirá de cada cosa?

110. Un libro tiene 800 páginas, y cada 16 de ellas constituyen 1 pliego de impresión. ¿Cuántos pliegos tiene dicho libro?

111. Si 1 decalitro de vino superior vale 5 pesetas, ¿cuántos hectolitros del mismo vino se podrán comprar con 1,234 pesetas?

112. Pagando a 2 pesetas el metro de tela, ¿cuántas piezas de a 60 metros una podrán adquirirse con 850 pesetas?

113. Un panadero ha hecho las siguientes compras de trigo a 14 pesetas el hectolitro: 240 hectolitros, americano; 12 hectolitros, de Andalucía; 600 decalitros, de Aragón, y 120 decalitros del Ampurdán. ¿Cuánto ha gastado?

114. Un tejedor ha hecho, en 1 año, 20 piezas de a 30 metros cada una. ¿Cuántos metros ha venido a tejer diariamente, habiendo trabajado, por término medio, 24 días cada mes?

115. La circunferencia se divide en 300 partes iguales, llamadas grados: cada grado, en 60 partes iguales llamadas minutos, y cada minuto, en 60 partes iguales llamadas segundos. ¿Cuántos segundos de grado ha recorrido diariamente un móvil, que ha seguido una circunferencia en 72 días?

116. La luz del sol llega a la tierra en 8 minutos, 13 segundos. ¿Cuántas leguas recorre en 1 segundo, siendo 34.500,000 leguas la distancia que del sol nos separa?

117. Un mercader compra el género a 20 pesetas los 100 kilogramos, y lo vende a 22 pesetas ídem. ¿Cuántos quintales métricos habrá comprado y vendido, habiendo realizado una ganancia de 42 pesetas?

118. Un albañil ha empleado 24,000 ladrillos en la construcción de cuatro columnas iguales, de 2 metros cuadrados de base por 6 metros de altura. ¿Cuántos centenares de ladrillos han entrado en cada columna?

119. Cuatro hermanos han de repartirse 7,866 pesetas que les ha legado un pariente fallecido. El primero debe recibir la mitad; el segundo, el tercio de lo que quede; el tercero, el tercio del sobrante, y el cuarto, el resto. ¿Cuánto recibirá cada uno?

120. En el pago de los jornales que han de invertirse en la edificación de una quinta, se han de emplear 12,284 pesetas. ¿Cuántos días durará su construcción empleándose 22 obreros, cada uno de los cuales gana 3 pesetas de jornal?

121. Un comerciante gana 10 pesetas por cada quintal métrico de bacalao que vende, y en abril del corriente año, ganó lo siguiente: la 1.ª semana, 556 pesetas; la 2.ª, 460 pesetas; la 3.ª, 34 pesetas, y la 4.ª semana, 28 pesetas. ¿Cuántos quintales de bacalao vendió durante el citado mes?

122. Cierto individuo poseía en metálico 2,253 pesetas, y tomó a préstamo una cantidad tres veces mayor, para invertirla, junto con la anterior, del modo siguiente: 303 pesetas en el pago de varias deudas; 120 pesetas, en la compra de varios muebles, y el resto, en paño de a 15 pesetas el metro. ¿Qué cantidad de paño pudo comprar?

123. Si un fabricante de botones quiere sacar 400 ptas. de 28,800 botones, ¿a cuánto tendrá que vender la gruesa?

124. Un vendedor de huevos tiene 480 que le cuestan 40 pesetas. ¿A cuánto tendrá que vender la docena, deseando ganar 20 pesetas?

125. Por sesenta y cuatro madejas de seda, una bordadora ha satisfecho 90 pesetas, pagando dicho género a razón de 3 pesetas el hectogramo. ¿Cuánto pesa la seda adquirida?

126. Un arquitecto ha empleado 240 pesetas en baldosas de a 10 pesetas una; 1,600 pesetas, en ladrillos de a 100 pesetas el millar, y 22,000 pesetas en planchas de bronce de a 1,000 pesetas una. ¿Cuánto ha comprado de cada cosa?

127. Nueve pescadores han cogido 24,000 sardinas, y las han vendido a 15 pesetas el millar, repartiéndose lo cobrado y dando doble parte a uno de ellos por ser dueño de la barca. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

128. ¿Cuánto costará el gas empleado durante 5 meses en el alumbrado de una escuela de adultos, teniendo en cuenta lo siguiente: 1.º, que las clases duran 2 horas diarias; 2.º, que cada mes hay 24 días de clase; 3.º, que hay 6 mecheros para el alumbrado; 4.º, que cada mechero consume 100 litros de gas por hora, y 5.º, que cada 100 litros de gas valen 50 céntimos de peseta?

129. Un labrador compró a un tendero 8 sacos de arroz de a 2 quintales métricos cada uno, a 20 pesetas el quintal, conviniendo que le pagaría con trigo de a 14 pesetas el hectolitro. ¿Qué cantidad de trigo tuvo que entregar?

130. Juan debía a Pedro 50 pesetas, y le compró 8 decalitros de vino, entregando, en pago de todo, 90 pesetas. ¿A razón de cuánto pagó el litro de vino?

131. Un depósito recibe agua de tres caños, de los cuales el 1.º da 6 litros por minuto; el 2.º, 4 litros, y 8 litros el 3.º, en la misma cantidad de tiempo. ¿Cuántos litros de agua habrá en dicho depósito habiendo manado: 2 horas y media el primer caño, 1 hora y cuarto el segundo y tres cuartos de hora el tercero?

132. He comprado dos piezas de lanilla de a 40 metros cada una, a razón de 2 pesetas el metro, habiendo satisfecho, además, 6 pesetas por embalaje y transporte. ¿A cuánto deberé vender el metro queriendo ganar 33 pesetas?

133. Un tabernero compró 20 hectolitros y 2 decalitros de vino a 3 pesetas el decalitro, y luego lo vendió a 2 pesetas el decalitro, ganando 98 pesetas. ¿Qué cantidad de agua añadió?

134. Un comerciante en tapones vendió 6 balas (*) y 18 miles de *trefinos*, a 46 pesetas el millar; 3 balas y media de *modelo*, a 14 pesetas el mil, y 54,000 *regulares*, a 5 pesetas ídem. Si el dinero cobrado lo invierte en corcho de a 25 pesetas el quintal métrico, ¿cuántos quintales podrá adquirir?

135. Un sastre ha comprado 4 piezas de paño de a 25 metros cada una, para uniformar a los alumnos internos de un colegio. Suponiendo que, por término medio, se necesitan 3 metros para cada abrigo, 2 metros para cada americana y chaleco y 1 metro para el pantalón, ¿cuántos trajes podrá confeccionar con el paño comprado?

136. Cierto individuo tenía 3,000 pesetas, y empleó la mitad de los cuatro quintos de dicho valor en ron de 28 grados, que pagó a 12 pesetas el decalitro. ¿Cuántos decalitros compró?

137. Se han gastado 625 pesetas para dar una ración de vino a todos los soldados de una división; 1 litro ha proporcionado dos raciones, y cada barril de vino, cuya capacidad es 250 litros, ha costado 125 pesetas. Se pregunta: 1.º, cuántos soldados componen la división, y 2.º, el coste de una ración.

138. Calcúlense: los dos quintos de 24,300; los tres cuartos de 7,848; los tres octavos de 488,000, y los cinco sextos de 58,446.

139. Un agricultor vendió 156 hectolitros de trigo a 14 pesetas uno y 68 hectolitros de maíz a 10 pesetas ídem, y el dinero cobrado lo invirtió del modo siguiente: 154 pesetas, en el pago de una deuda; la décima parte del sobrante, en la compra de un caballo; el tercio de lo que sobró, en vino de a 40 pesetas el hectolitro, y el sobrante lo dió en dote a su hija menor. Averigüese el valor del caballo, el vino que compró y el dote de la joven.

140. El administrador de una sociedad cooperativa de consumo compraba el aceite a 10 pesetas el decalitro, y lo vendía a 12 pesetas ídem. Al cabo de tres meses, observó que, después de satisfacer 46 pesetas por transportes, el beneficio realizado con dicha mercancía importaba 150 pesetas. ¿Qué cantidad de aceite vendió en el citado tiempo?

141. Un económico trabajador depositó, el año anterior, 300 pesetas en la caja de ahorros, después de atender a los gastos de su familia, que alcanzaron a 3 pesetas diarias. Suponiendo que los días de trabajo fuesen 25 cada mes, averigüese el jornal diario que ganaba el mencionado obrero.

142. El dueño de una bodega compró 2 hectolitros y 3 decalitros de vino de Valencia, a 2 pesetas el decalitro, y, al medirlo, encontró una tara de 20 litros. ¿A qué precio resultó el litro, teniendo en cuenta la tara mencionada?

143. El que comprase 4 hectolitros de vino a 3 pesetas el decalitro, y se propusiera venderlo 5 céntimos de peseta por litro más barato de lo que por ídem le cuesta, ¿qué agua debería añadir?

(*) La bala de tapones tiene 30 miles.

144. Un tabernero compró 6 hectolitros, 4 decalitros de vino a 2 pesetas el decalitro; pagó 12 pesetas por varios gastos, y se propuso venderlo 5 céntimos de peseta por litro más barato de lo que por id. le costaba, realizando, además, una ganancia de 50 pesetas. ¿Qué cantidad de agua tuvo que añadir?

145. Se han empleado 200 pesetas en la compra de cierto número de metros de paño de dos calidades. Un metro de la 1.ª clase vale 6 pesetas, y 8 metros de esta clase valen tanto como 12 metros de la clase 2.ª Se han comprado tantos metros de una clase como de otra. ¿Cuántos metros de cada clase se han comprado?

146. Juan y Antonio han de repartirse 24,600 ptas. de modo que el 1.º reciba doble cantidad que el 2.º ¿Cuánto corresponderá a cada uno?

Ejercicios de divisibilidad

1. Escríbanse cinco números que sean divisibles por 2, y cuya cifra fina sea distinta en cada uno.
2. Escribir seis números divisibles por 3.
3. Idem otros seis que lo sean por 4.
4. Idem cinco que lo sean por 5.
5. Idem otros cuatro que lo sean por 6.
6. Indíquense cinco números divisibles por 7
7. Idem otros cinco que lo sean por 8.
8. Idem cinco números que lo sean por 9.
9. Pónganse otros cinco que lo sean por 10.
10. Escríbanse cuatro números divisibles por 11.
11. Fórmense cuatro múltiplos del número 46.
12. Idem seis múltiplos del 25.
13. Idem seis múltiplos del número 60.
14. ¿Por qué números dígitos es divisible el número 843,324?
15. ¿Por cuáles lo es el número 2,850?
16. Escríbanse cuatro números divisibles por 100.
17. Idem tres que lo sean por 1,000.
18. Idem cuatro que sean divisibles por 10,000.
19. Escríbanse tres números divisibles por 25.
20. Díganse todos los factores o divisores menores que 12 del número 846,000.
21. Averígüense todos los divisores menores que 12 del número 786,456.
22. Idem los divisores menores que 12 del número 989,340.
23. ¿Por qué números menores que 12 puede dividirse el número 83,750?
24. Fórmese un número divisible por todos los números pares menores que 10.
25. Idem un número divisible por todos los números dígitos impares.
26. Idem un número divisible por todos los números dígitos.

Ejercicios sobre máximo común divisor, números primos y mínimo común múltiplo

I

1. Hállese el m. c. d. de los números: 1.º, de 80 y 40; 2.º, de 36 y 12; 3.º de 2538 y 846.

2. Hállese el m. c. d. de los números: 1.º, 84 y 36; 2.º, 95 y 50; 3., 9000 y 700; 4.º, 57 y 23.

3. Hallar el m. c. d. de los siguientes números; 1.º, 128 y 192; 2.º, 7290 y 96; 3.º 7417 y 970; 4.º 8716 y 5308.

4. Determínese el m. c. d. de los números: 1.º, 80, 30 y 50; 2.º, 45, 20 y 15.

5. Averígüese el m. c. d. de los números: 1.º, 1008, 300 y 48; 2.º, 168, 245 y 547; 3.º, 6768, 2880 y 1125; 4.º, 428, 786 y 960.

6. Hállese el m. c. d. de los siguientes números: 1.º 216, 72 y 128; 2.º, 360, 320 y 60; 3.º, 400, 9800, 4500 y 3250.

II

7. Descomponer en sus factores primos los números siguientes: 10, 100, 1000 y 10000.

8. Descompónganse los números siguientes en sus factores primos o simples: 452, 69510, 3724 y 2400.

9. Hallar todos los divisores primos de los siguientes números: 16335, 2646, 3500 y 873425.

10. Hallar todos los divisores (primos y compuestos) del número 100.

11. Hállense todos los divisores de los números 426 y 750.

12. Hállense todos los divisores de los siguientes números: 960, 1728 y 8398.

13. Hallar los divisores comunes a los números 360 y 240.

14. Determínense los factores comunes a los números 456, 540 y 90.

15. Procediendo por el método de factores primos, hállese el m. c. d. de: 1.º, 80 y 40; 2.º, 36 y 12; 3.º, 2538 y 846. (*)

16. Operando por el método de factores primos o simples, hallar el m. c. d. de los números: 1.º, 84 y 36; 2.º, 95 y 50; 3.º, 9000 y 700; 4.º, 57 y 23.

17. Procediendo por el método de factores primos, hállese el m. c. d. de: 1.º, 128 y 192; 2.º, 7290 y 96; 3.º 7417 y 970; 4.º, 8716 y 5308.

18. Procediendo por el método de factores primos, hállese el m. c. d. de: 1.º, 80, 30 y 50; 2.º, 45, 20 y 15.

19. Operando por el método de factores simples, hállese el m. c. d. de: 1.º, 1008, 300 y 48; 2.º, 168, 245 y 547; 3.º, 6768, 2880 y 1125; 4.º, 428, 786 y 960.

20. Empleando el método de los factores primos, hállese el m. c. d. de: 1.º, 216, 72 y 128; 2.º, 360, 320 y 60; 3.º, 400, 9800, 4500 y 3250.

III

21. Hállese el m. c. m. de los siguientes números, procediendo por el método ordinario y por el de factores primos: 1.º, 24 y 40; 2.º, 25 y 65; 3.º, 124 y 416.

22. Operando por el método ordinario y por el de factores primos, hállese el m. c. m. de los siguientes números: 1.º, 490 y 625; 2.º, 719 y 3701; 3.º, 2000 y 970.

23. Determínese el m. c. m. de los siguientes números, procediendo por el método ordinario y por el de divisores primos: 1.º, 130, 190 y 70; 2.º, 1252, 820 y 908; 3.º, 200, 650 y 448.

24. Hallar el m. c. m. de los números siguientes: 42, 24, 21, 12 y 7.

25. Determínese el m. c. m. de 800, 400, 500, 200, 50 y 25.

Operaciones con los números decimales

I

1. Verifíquense las sumas siguientes:

1.ª 0'75+0'476+0'8946+0'984769+0'25.
2.ª 0'465+3'25+24'789+0'19+134'789643.
3.ª 72'25+0'00078+18+4367'846329+13+0'25.
4.ª 0'756+26+1'750+0'0000012+9+1298+0'65+8100+0'75+924000+6'66.
5.ª 67842+0'6+18'659+1+0'0009+84762+678'5+1246'789432063+0'4+0'998.
6.ª 0'798643+0'25+96+13628'3+63'98400+18943'9+0'00007+206+1'1+156'85+0'7840006329.

II

2. Verifíquense las restas siguientes:

1.ª, 0'85 — 0'25; 2.ª, 0'843 — 0'472; 3.ª, 24'78462 — 0'98270; 4.ª, 4'2489 — 2'182; 5.ª, 184'289460 — 0'45; 6.ª, 1263'24893 — 24'528914; 7.ª, 84'75 — 26'7698436; 8.ª, 789640'42 — 140; 9.ª, 2870000'125 — 4328; 10.ª, 1843'9 — 12'275; 11.ª, 184632 — 846'7243; 12.ª, 189436 — 0'7895; 13.ª, 4789560 — 0'847630; 14.ª, 94328000 — 900'78000; 15.ª, 8943253 — 842070'98060; 16.ª, 18432'125 — 478'89430; 17.ª, 4'9000 — 2'500.

III

3. Verifíquense las multiplicaciones siguientes:

1.ª, 125'75×46; 2.ª, 48'748×125; 3.ª, 64328×6'75; 4.ª, 125×19'436; 5.ª, 7'3×2'5; 6.ª, 125'40×13'468; 7.ª, 7289'658×9'36; 8.ª, 432,600×9'504; 9.ª, 0'456×3'9; 10.ª, 0'75×0'8463; 11.ª, 0'4875×2; 12.ª, 863×0'896· 13.ª, 8463'25×10; 14.ª, 863'2589×100; 15.ª, 14763'29986×1000; 16.ª, 6'7843290×100000; 17.ª, 0'3574×100000; 18.ª, 3'6×100000; 19.ª, 5'43×100000; 20.ª, 0'246×0'100098; 21.ª, 2'43000×6000; 22.ª, 6'78000×3'800; 23.ª, 785'74000×6'500; 24.ª, 0'75000×0'400; 25.ª, 643'789000×0'40; 26.ª, 354'870×10000.

IV

4. Háganse las siguientes divisiones, aproximando el cociente hasta las milésimas:

1.ª, 6432'75 : 34; 2.ª, 18823'825 : 128; 3.ª, 754'8960 : 980; 4.ª, 63285 : 2'25; 5.ª, 32986 : 32'985; 6.ª, 46'75 : 7'48; 7.ª, 1289'489 : 6'75; 8.ª, 64329'759 : 8'3250; 9.ª, 53428'9 : 432'7846; 10.ª, 4328060'75 : 349'7846; 11.ª, 43270980'357460 : 1329'786; 12.ª, 784'600 : 7'200; 13.ª, 9843'0698000 : 12986'75000; 14.ª, 27'76300 : 9'50000; 15., 64320'953000 : 84'750; 16.ª, 0'2789 : 0'320; 17.ª, 0'98432 : 4'72; 18.ª, 24'7590 : 0'6432; 19.ª, 0'894350 : 0'6430; 20.ª, 643289 : 0'64320; 21.ª, 0'473290 : 29864; 22.ª, 7894'270 : 9'54000; 23.ª, 98,460 : 76'58; 24.ª, 124632 : 846'125.

(*) Resolvemos por el método de factores primos los mismos ejercicios que antes hemos propuesto por el método ordinario, esto es, los ejercicios de este capítulo que llevan los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

5. Háganse, abreviadamente, las divisiones siguientes:
1.ª, 75'25 : 10; 2.ª, 1846'37 : 100; 3.ª, 6432'8 : 1000; 4.ª, 0'750 : 10; 5.ª, 789632'25 : 10; 6.ª, 4632'286 : 1000; 7.ª, 3286'2 : 10000; 8.ª, 43289 : 100; 9.ª, 0,12486 : 10000; 10.ª, 0'0029 : 100000; 11.ª, 98426 : 10; 12.ª, 32869 : 1000; 13.ª, 184632 : 1000000; 14.ª, 8432986 : 1000000000; 15.ª, 0'8463 : 10000000; 16.ª, 0'12 : 100000; 17.ª, 7'8 : 1000; 18.ª, 12'5 : 100.

6. Hállese la mitad de los siguientes números, aproximando el cociente hasta las milésimas:
1.º, 7846'48; 2.º, 12; 3.º, 38'756; 4.º, 98437; 5.º, 3289'9840; 6.º, 3298'759; 7.º, 39860; 8.º, 5986'75800; 9.º, 94325; 10.º, 0'2984; 11.º, 0'28436; 12.º, 0'000398; 13.º, 0'75325.

7. Idem el tercio de los siguientes:
1.º, 92356'47; 2.º, 486396'846; 3.º 15320906'21421; 4.º, 75498; 5.º, 325408; 6.º, 6432; 7.º, 43298'754; 8.º, 0'8463; 9.º, 0'000756; 10.º, 0'498600.

8. Idem el cuarto de éstos:
1.º, 86432'600; 2.º, 7598400'48; 3.º, 329863'75924; 4.º, 632080'75946; 5.º, 328463; 6.º, 5983; 7.º, 576'8416; 8.º, 0'7829000; 9.º, 0'009836; 10.º, 0'7895; 11.º, 0'008670.

9. Idem el quinto de éstos:
1.º, 7896'55; 2.º, 24896'7890; 3.º, 463298'154700; 4.º, 7894'32; 5.º, 64894'53295; 6.º, 84632'89632; 7.º, 3846; 8.º, 653280; 9.º, 483759; 10.º, 43298'75906; 11.º, 83'75890; 12.º, 0'7895; 13.º, 0'04380; 14.º, 0'04832; 15.º, 0'79840; 16.º, 0'004986.

10. Idem el sexto de los siguientes:
1.º, 7463'28; 2.º, 46329'0516; 3.º, 9325489'846300; 4.º, 8607'12000; 5.º, 5328432; 6.º, 759846; 7.º, 48963'1300; 8.º, 5432867'953041; 9.º, 5328'432000; 10.º, 0'643212; 11.º, 0'463284; 12.º, 0'00084; 13.º, 0'5347; 14.º, 0'000658500.

11. Idem el séptimo de los siguientes:
1.º, 23005'213; 2.º, 203036'498; 3.º, 380309'0690; 4.º, 38078642558'92690; 5.º, 43298'756; 6.º, 8432962; 7.º, 28439546; 8.º, 0'59241; 9.º, 0'006048; 10.º, 0'05921230; 11.º, 0'784.

12. Idem el octavo de éstos:
1.º, 7643298'75000; 2.º, 9437564'512; 3.º, 64329'860000; 4.º, 764332'760; 5.º, 438632000; 6.º, 45327'8154; 7.º, 43283201; 8.º, 64328'3292; 9.º, 0'843512; 10.º, 0'08193; 11.º, 0'000600; 12.º, 0'7590; 13.º, 0'32846.

13. Idem el noveno de éstos:
1.º, 4891104'882; 2.º, 43506043'9425; 3.º, 68789'47500; 4.º, 48632'5443; 5.º, 546328'7500; 6.º, 437'545; 7.º, 3289437; 8.º, 630850021; 9.º, 4280600; 10.º, 0'11556; 11.º, 0'044064; 12.º, 0'784229; 13.º, 0'00063290.

14. Idem el décimo de los siguientes:
1.º, 78432'84; 2.º, 28463'789; 3.º, 35984'5; 4.º, 0'6432; 5.º, 12433; 6.º, 12'243; 7.º, 0'48460; 8.º, 4'7896; 9.º, 3'642; 10.º, 0'0025; 11.º, 0'000846; 12º, 46328; 13.º, 75; 14.º, 0'7896; 15.º, 86329; 16.º, 432900; 17.º, 75000.

15. Idem el onceavo de los siguientes:
1.º, 137'891; 2.º, 531600'278; 3.º, 8684103'1398; 4.º, 92752; 5.º, 298643'8960; 6.º, 123845; 7.º, 896435'80900; 8.º, 0'86856; 9.º, 0'82852; 10.º, 0'0078960; 11.º 0'789000.

16. Idem el doceavo de los siguientes:
1.º, 10119'84; 2.º, 63274'152; 3.º, 769289'824; 4.º, 6432'895; 5.º, 284329'32800; 6.º, 0'107556; 7.º, 0'1290672; 8.º, 0'72598; 9.º, 0'327000; 10.º, 8463295; 11.º, 41792; 12.º, 75986'4328.

17. Háganse las siguientes divisiones abreviadamente:
1.ª, 728'6 : 200; 2.ª, 94323'630 : 3000; 3.ª, 84632'800 : 400; 4.ª, 63274'152 : 12000; 5.ª, 846325 : 50; 6.ª, 432'460 : 500; 7.ª, 648936 : 600; 8.ª, 75243 : 8000; 9.ª, 32'6 : 20000; 10.ª, 0'288 : 30; 11.ª, 0'84329 : 50; 12.ª 0'00021 : 300; 13.ª 0'7846 : 9000; 14.ª, 0'0075 : 300000; 15.ª, 896 : 80; 16.ª, 125 : 50000; 17.ª, 842 : 20000; 18.ª, 9846'25 : 11000.

V

18. D. Juan, el día de su cumpleaños, regaló 0'50 pesetas a su nieto Luis; 0'40 ídem, a su nieto Enrique; 0'75 ídem, a Periquillo; 20 céntimos a su nieta Angelita, y 35 céntimos a su ídem Encarnación. ¿Cuántas pesetas regaló?

19. Cierto sujeto, el día de Navidad, dió las propinas siguientes: al cartero, 50 céntimos de peseta; al aguador, 60 céntimos; al peluquero, 25 céntimos; al sereno, 30 céntimos; 75 céntimos al mozo del café, y 80 céntimos a la portera. ¿Cuánto dió en todo?

20. Un viticultor ha vendido las siguientes partidas de vino: 146'75 hectolitros a uno, 209'125 hectolitros a otro y 7'9 hectolitros a un tercero. ¿Qué cantidad de vino ha vendido?

21. El empresario de una carretera tiene 8 trabajadores que ganan los jornales siguientes: los 3 primeros, 4'25 pesetas cada uno; 2, a razón de 3'75 pesetas ídem; 1 que cobra 3 pesetas, y los otros 2, a razón de 2'50 ídem. ¿Cuánto gasta diariamente para el pago de la brigada?

22. Una casa tiene de altura: desde los cimientos hasta el primer piso, 3'75 metros; desde el primer piso hasta el segundo, 3'50 metros, desde el piso 2.º hasta el 3.º, 2'95 metros, y desde el 3.º hasta el tejado, 2 metros y medio. Dígase la altura de la casa.

23. Un tejedor tejió una pieza en 4 días: el 1.º, hizo 6'25 metros; el 2.º, 5'70 metros; el 3.º, 7 metros, y el 4.º, 8'005 metros. ¿Cuántos metros medía dicha pieza?

24. Un piano fué vendido en 2,496'75 pesetas, perdiendo el vendedor 965'20 pesetas sobre el valor de la compra. ¿Cuánto le había costado al vendedor?

25. El peso de un carro es 4'25 quintales métricos, y se le cargan tres bultos que pesan 7'40 quintales m., 6'305 quintales m. y 9'84750 quintales ídem, respectivamente. ¿Qué peso tendrá que arrastrar la caballería?

26. Un tendero ha invertido en azúcar las cantidades siguientes: 60'25 pesetas en la compra de 2'759 quintales métricos; 90'125 pesetas en la de 4'50 quintales ídem; 35 pesetas en la adquisición de 1'90 quintales ídem: 245'128 pesetas en la compra de 10 quintales ídem, y 0'25 pesetas en la de 0'030 quintales ídem. ¿Cuántas pesetas gastó y cuántos quintales métricos compró?

27. Antonio recibió 22'75 pesetas; José, otro tanto; Luis, tres veces lo que el primero; Federico, 150 pesetas, y otro tanto, Serafín. ¿Cuánto recibieron los cinco juntos?

28. Un esterero compró 12'75 quintales métricos de esparto por 60'75 pesetas; 14 quintales métricos por 56'125 pesetas; 126'759 quintales métricos por 378 pesetas; 99'95 quintales métricos por 246'28467 pesetas; 3 quintales métricos por 9 pesetas, y 0'75 quintales métricos por 4'20 pesetas. ¿Cuántos quintales métricos de esparto compró y cuánto gastó?

29. En el sorteo de mozos para el reemplazo de 1880, correspondieron: tres décimas de soldado a una aldea, cinco décimas a otra, siete décimas a otra y a otra, tanto como a la segunda. ¿Con cuántos soldados contribuyeron las cuatro aldeas?

30. Un jugador perdió, en 4 jugadas, las cantidades siguientes: la 1.ª, 9,456'25 pesetas; la 2.ª, doble cantidad que la 1.ª; la 3.ª, 456 pesetas, y tres veces esta cantidad la 4.ª vez. ¿Cuánto perdió en todo?

31. Un capitalista, al fallecer, dejó la fortuna siguiente: en metálico, 42,098'25 pesetas; en fincas, 128,596 pesetas; en títulos de la Deuda, tanto como en metálico y en fincas, y en joyas y mobiliario, 10,480'75 pesetas. ¿A cuánto ascendía la mencionada fortuna?

32. La compra de un buque ascendió a 124,850'75 pesetas, debiendo, además, abonar el comprador, las cantidades siguientes: por gastos de escritura, 124'85 pesetas; por varias reparaciones que hizo en seguida, 1,256'75 pesetas, y 350 pesetas al corredor por cuya mediación hizo la compra. ¿Cuál fué el valor del buque?

VI

33. De un depósito que contenía 24,650'75 litros de agua, se sacaron 9,497'20 litros. ¿Cuántos litros de agua quedaron en el depósito?

34. Cierto individuo compró géneros por 6,480'895 pesetas, y los vendió por 6,935'75 pesetas. ¿Cuánto ganó?

35. Un propietario, en 1890, pagaba 2,560 pesetas por contribución, y en 1891 satisfizo por el mismo concepto 2,607'75 pesetas. ¿Qué cantidad le aumentaron?

36. Un tendero llevó al mercado 149'56 pesetas, de las que empleó 76 en arroz, y lo demás, en harina. ¿Cuánto gastó en harina?

37. De un carro que llevaba 124'75 quintales métricos, descargaron 96'259 quintales ídem. ¿Qué carga le quedó?

38. Un pordiosero recogió cierto día 0'95 pesetas en metálico, y al día siguiente, 0'75. ¿Cuánto recogió de menos el segundo día?

39. Una caja llena de cierto género, pesa 250'75 kilogramos, y vacía, 36'125 kilogramos. ¿Cuál es el peso del género contenido?

40. Un tabernero tenía 345'784 hectolitros de vino, y en dos días vendió: el 1.º, 37'009 hectolitros, y 97'5 hectolitros el 2.º ¿Qué cantidad de vino le quedó?

41. Un andarín, en 3 días, recorrió: el 1.º, 96'75 kilómetros; el 2.º, 87'5 kilómetros, y 104'90 kilómetros el 3.º Debiendo recorrer 309 kilómetros; ¿cuánto le quedó por recorrer?

42. Un comerciante vendió género por valor de 2,530'25 pesetas, realizando una ganancia de 360'847 pesetas. ¿Cuánto le costaban dichos géneros?

43. El mismo comerciante del problema anterior, ha comprado géneros por valor de 9,350'75 pesetas, y los ha vendido perdiendo 48 pesetas. ¿En cuánto los ha vendido?

44. Una señora ha empleado: en percal, 18'25 pesetas; en tela, 26 pesetas, y 0'95 pesetas en hilo. Paga la cuenta entregando un billete de Banco de a 50 pesetas. ¿Cuánto le han de devolver?

45. Un obrero, en 4 semanas, ha ganado: la 1.ª, 25'75 pesetas; la 2.ª, 28'15 pesetas; la 3.ª, 35 pesetas, y 26'05 pesetas la 4.ª Durante este tiempo, ha gastado: en manutención, 48'75 pesetas; en gastos menores, 12 pesetas, y 15 pesetas en el alquiler de la casa. ¿Cuánto ha ahorrado?

46. Un banquero tenía en caja 156,490'75 pesetas en metálico; 36,480 pesetas en billetes de Banco, y cobró letras por valor de 20,486'95 pesetas. El mismo día entregó: a varios clientes, 40,560'20 pesetas; 300 pesetas a su señora para gastos de familia, y 14,650'95 pesetas para atender al pago de cinco letras. ¿Cuánto le quedó en caja?

47. Un tejedor hace, en 1 día, 4'25 metros de cierta tela, y recibe 8'65 pesetas por su trabajo. Otro tejedor hace, en igual cantidad de tiempo, 5'905 metros y percibe 10 pesetas. Se pregunta: cuánto tejió el segundo más que el primero y cuánto ganó más que él.

48. Un taponero, en una semana, hizo los tapones siguientes: el lunes, 850; el martes, 1,400; el miércoles, 200; el jueves, 755; el viernes, 1,500, y el sábado 1,250, cobrando 25'05 pesetas por su trabajo. Otro taponero hizo, en la misma semana: el lunes, 1,000 tapones; el martes, 1,500; el miércoles, 1,250; el jueves, 2,100; el viernes, 3,050, y el sábado 900, recibiendo 36'75 pesetas. Dígase cuál de los dos hizo más tapones y cuántos hizo, y cuánto ganó el segundo más que el primero?

49. Una fuente, en 3 días, ha llenado su depósito, habiendo manado 120'500 litros el primer día; 154'85 litros el día segundo, y 90 litros el tercer día. Otra fuente llena también, en tres días, su depósito, dando 160'250 litros el primer día; 240 litros el día segundo, y 86 litros el día tercero. ¿Qué diferencia existe entre la capacidad de ambos depósitos?

50. ¿Cuál es el número que, sumado con 125'75, da de suma 4,586'125?

51. Emilio tiene 0'95 pesetas, y recibe 4'25 pesetas de su padre, 0'75 pesetas de su madre y 3'09 pesetas de su hermano mayor. ¿Cuántas pesetas le faltan para poder comprar una gramática francesa que vale 5'25 pesetas y el diccionario de Picatoste, que se vende en 6'45 pesetas?

52. Un ladrillero hace, en dos días: el 1.º, 500 ladrillos, por los que le dan 4'25 pesetas, y el 2.º, 650, por los que cobra 5'35 pesetas. Otro ladrillero hace, el primer día, 700 ladrillos y 450 ladrillos el 2.º, por los que cobra 6'95 y 3'85 pesetas, respectivamente. ¿Cuál de los dos ha hecho más ladrillos y cuántos, y cuál de los dos ha ganado más y cuánto?

VII

53. Si el número 1,246'75 se hace 46'32 veces mayor, ¿qué número resultará?

54. Determínense los 0'25 del número 124.

55. D. Nicomedes posee las 0'045 de la fortuna de Julián, que se calcula en 125,490'75 pesetas. ¿Cuál es la fortuna del primero?

56. Un almacenista de vinos de Málaga vendió a Román Solita los 0'5 de sus existencias, que ascendían a 4,650'750 hectolitros. ¿Cuántos hectolitros recibió el mencionado Solita?

57. Cierto individuo sacó un premio de la lotería de Navidad consistente en 50,000 pesetas, de las que entregó a un amigo los 0'75, por interesar así en la compra del billete. ¿Cuánto tuvo que entregar?

58. ¿Cuántos reales hay en 24'756 duros?

59. ¿Cuántas pesetas componen 964 monedas de oro de a 25 pesetas cada una?

60. ¿A cuántos kilogramos equivalen 24'125 quintales métricos?

61. Pagando el kilogramo de cierta droga a 54'25 pesetas, ¿cuánto valdrán 14'750 kilogramos?

62. Un empleado gana, diariamente, 3'25 pesetas: ¿cuál es su sueldo anual?

63. ¿Cuánto debo recibir por la venta de 2 hectolitros, 3'50 decalitros de vino, a 4'25 pesetas el decalitro?

64. Un panadero compró 62 quintales mét., 3'25 kilos de harina a 0'12 pesetas el kilo. ¿Cuánto tuvo que entregar?

65. Un sastre compró 46'75 decámetros de paño a 3'5 pesetas el metro, y 42 decámetros de satén a 8'50 pesetas el metro. ¿Cuánto tuvo que entregar?

66. El dueño de una bodega compró 18'40 hectolitros de aceite, a 8'25 pesetas el decalitro; 6'24 hectolitros de habichuelas a 18'75 pesetas uno, y 42'50 litros de alcohol a 2'50 pesetas el litro. ¿Cuánto entregó?

67. Un encuadernador compró los 0'25 de 450 resmas de papel, a 0'05 ptas. el cuadernillo. ¿Cuánto pagó?

68. Un fabricante de tapones tenía 26'50 balas de *modelo*, de las que vendió 154 miles a 16'25 pesetas uno, y el resto, a 0'25 pesetas por mil más barato. ¿Cuánto cobró?

69. Un librero compra 4 docenas de libros a 2'50 pesetas cada libro; le dan 13 libros por docena y, como paga al contado, le rebajan 15 pesetas del montante de la factura. ¿Qué beneficio realizará, vendiendo los libros a 3'15 pesetas cada uno?

70. Para solemnizar la apertura de un establecimiento de drogas al por mayor y menor, el dueño acordó distribuir 1'25 kilogramos de arroz y 0'50 kilogramos de carne, a cada pobre. Habiendo socorrido a 100 pobres, ¿cuánto gastó de cada cosa?

71. El Director de un colegio de internos, ha comprado 89'50 hectolitros de vino a 25 pesetas uno, y 40 serones de carbón a 2'50 pesetas uno. ¿Cuánto ha desembolsado?

72. Pagando las baldosas a 100 pesetas el ciento, ¿cuánto valdrán 24'5 millares?

73. Un carbonero tenía en almacén 1,250 serones de carbón de 1'50 quintales m. cada uno; compró, en 1.° de enero, 800 serones de igual peso, y en 25 de marzo, adquirió 530 serones de 1'25 quintales m. cada uno. Al cabo de un mes vendió 159 quintales m. a 6'25 pesetas uno y 930 quintales ídem a 6'50 pesetas ídem. ¿Cuántos quintales m. de carbón le quedaron, y cuánto cobró por lo vendido?

74. Los talleres de fundición de los señores Planas, Flaquer y Compañía, de Gerona, gastan diariamente 20 quintales m. y medio de carbón mineral, que compran a 2'50 pesetas el quintal m. ¿Cuánto gastan, por dicho concepto, en 1 día, en 1 semana, en 1 mes de 25 días de trabajo y en 1 año?

75. Los señores Salvadó y Rahola, de Barcelona, encargaron a la fábrica de blusas de Isidro Mató y C.ª, de Gerona, 20 docenas y media de blusas azules a 5'25 pesetas la pieza; 6 docenas ídem, hilo superior, a 7'45 pesetas ídem, y 9 docenas y media ídem, clase extra, a 8'05 pesetas ídem. Al cabo de un mes, la casa de Barcelona había realizado los géneros mencionados a los siguientes precios: las blusas azules, a 80'75 pesetas la docena; las de hilo superior, a 104'25 pesetas la docena, y la clase extra, a 106'05 pesetas ídem. ¿Cuál fué el beneficio líquido realizado, habiendo satisfecho 20 pesetas por diferentes gastos?

76. ¿Cuál será el valor de 28 gruesas y media de cajas de cerillas finas, 1.ª clase, a 0'50 pesetas la docena, corriendo a cargo del comprador los gastos de remisión, que importan 2 pesetas y 30 céntimos?

VIII

77. Si distribuímos 84,369'75 pesetas entre 28 individuos, ¿cuántas pesetas cada uno recibirá?

78. Una compañía se compone de 50 individuos, 1 capitán, 2 tenientes, 3 alféreces y 4 sargentos, e interesan, por partes iguales, en la compra de un billete de la lotería, al que ha correspondido un premio de 24,680'950 pesetas. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

79. ¿Cuántos duros y fracción hay en 124,850'75 pesetas?

80. ¿Cuántos duros y fracción componen 84,675'75 reales?

81. La compra de 45'25 kilogramos de bacalao importó 379 pesetas. ¿A razón de cuántas pesetas resultó el kilo?

82. Un cerdo que pesaba 180'75 kilogramos, se vendió por 451'875 pesetas. ¿A cuánto se pagó el kilo?

83. Se han vendido 8 sacos de café, de peso 114'25 kilogramos cada uno, a 323'50 pesetas los 100 kilogramos, empleando el dinero cobrado en azúcar de a 20'45 pesetas el quintal métrico. ¿Cuántos kilos de azúcar se han comprado?

84. Si 1 litro de vino vale 0'24 pesetas, ¿cuántos hectolitros se comprarán con 633'75 pesetas?

85. Un valenciano tenía 42,500 naranjas; vendió las tres quintas partes a 38'75 pesetas el millar, y el resto, a 4'125 pesetas el 100. ¿Cuánto cobró?

86. El que emplease los tres octavos de 629'95 pesetas en harina de a 20'80 pesetas el quintal métrico, ¿qué cantidad compraría?

87. Una fuente, en 20 días, ha manado 128,650 hectolitros, 40'75 decalitros de agua. ¿Qué cantidad ha dado en 1 día?

88. Un tratante en granos cobró una letra de 9,560'50 pesetas con quebranto de 12'75 pesetas, y el líquido lo empleó como sigue: la quinta parte, en tela de a 0'95 pesetas el metro; la mitad del sobrante, en paño de a 18'25 pesetas el metro; y el resto, en vinagre de a 0'25 pesetas el litro. ¿Cuánto obtuvo de cada cosa?

89. El dueño de una tienda compró 18 hectolitros y medio de habichuelas por 240'625 pesetas. ¿A razón de cuánto pagó el hectolitro?

90. Un arenal de 46'75 hectáreas se ha comprado por 12,400'75 pesetas. Hállese el valor de 1 área.

91. Los Sres. Barangé e Hijos, fabricantes de jabón, han vendido 20 cajas de ídem, conteniendo, cada una, 23'45 kilogramos de dicha mercancía, a 2'50 pesetas los 5 kilos. Los gastos de transporte son de cuenta del comprador, e importan 5'75 pesetas cada 4 cajas. Se pregunta: ¿cuánto cuesta al comprador medio kilo de jabón?

92. En 30 días, se han quemado 420 hectolitros de carbón cok. Este combustible se paga a 3'50 pesetas los 100 kilog., y 1 hectol. pesa 45 kilos. Según esto, ¿cuánto vendrá a gastarse durante el primer trimestre de un año bisiesto?

93. Un tendero tiene vino de 4 clases: 6 hectol., 25 litros de 0'20 ptas. el litro; 32 decalitros, de 0'30 ptas. el litro; 2 hectol., 7 litros, de 0'15 ptas. ídem, y 350 litros, de 0'18 pesetas ídem. Lo mezcla todo. ¿A cuánto deberá vender el litro de mezcla, queriendo realizar un beneficio de 80'75 pesetas?

94. Mezclando 9 decalitros y 6 litros de vino valenciano, con 7 decalitros y medio de vino de Jerez, ¿qué cantidad de vino de cada clase contendrá el litro de mezcla?

95. Se ha vendido carbón por valor de 7,070'94 pesetas, siendo 9 pesetas el precio de los 100 kilogramos. ¿Cuántos metros cúbicos de madera se han necesitado para obtener el carbón vendido, sabiendo que cada metro cúbico de madera produce 0'385 metros cúbicos de carbón, y que el peso de 1 metro cúbico de carbón es de 241 kilogramos?

96. Un vendedor de frutas compra las granadas a 10'75 ptas. el ciento, y las manzanas, a 8'20 pesetas el millar: vende las granadas a 15 céntimos de peseta cada una, y las manzanas a 25 céntimos de ídem la docena. ¿Cuántas manzanas y granadas ha vendido en 1 día, sacando 4'80 pesetas de ganancia por el primer concepto, y 2'60 por el segundo?

97. Un cortante quiere emplear 1,183'75 pesetas en cabritos y corderos, deseando adquirir igual número de unos que de otros. Siendo 8 y 12'25 pesetas, respectivamente, el precio medio de cada cabeza de dichas dos clases de ganado, ¿cuántas reses de cada clase podrá comprar?

98. Repártanse 110,005'50 pesetas entre dos personas, de modo que la 1.ª reciba tantas piezas de a 5 pesetas como la 2.ª de a 0'50 de ídem. ¿Cuántas monedas recibirán?

99. Se sabe que cada 3 kilogramos de harina dan 4 kilog. de pan. ¿Qué beneficio obtendrá un panadero que ha comprado 60 sacos de harina, de peso cada uno 325 kilos, a razón de 58'75 pesetas los 100 kilos, vendiendo el pan de a 2 kilogramos a 0'95 pesetas?

100. Un rebaño consta de 60 carneros, 40 ovejas y 26 corderos. El representante de una compañía de cortantes ofreció al propietario 14'25 pesetas por cada carnero, 9'25 pesetas por cada oveja y 6'95 pesetas por cada cordero, y otro ofreció quedarse con el rebaño dando 10'95 pesetas por cada res. ¿Con qué comprador debe tratar el dueño?

101. Un panadero obtiene 178 panes de a 1'50 kilos cada uno, con 200 kilogramos de harina, que le cuestan 90'50 pesetas. ¿A qué precio debe vender cada pan para ganar 0'10 pesetas en cada uno, suponiendo que los gastos de elaboración importan 10'50 pesetas?

102. El principal de un comercio tomó a un dependiente, dándole 5'50 pesetas cada día, si comía y dormía fuera de la tienda, y sólo 3 pesetas diarias, viviendo en casa del principal. Transcurridos 40 días, el dependiente recibió 145 pesetas. ¿Cuántos días vivió en casa de su principal?

103. Cierto sujeto alquiló 4 yeguas para la trilla del trigo segado en un campo de su propiedad, pagando, diariamente, 2 ptas. por yegua. Cada animal trilló, por día, 100 haces de trigo, cada uno de los cuales dió, por término medio, 4 litros de grano. Siendo 200 hectolitros el resultado de la cosecha, averígüese: 1.º cuántos días duró la trilla; 2.º, el número de haces trillados, y 3.º, cuánto entregó al dueño de las caballerías.

104. Un fumador compró 27,000 cigarros habanos a 426'25 pesetas el millar. Vendió 3,500 a un amigo, a 52'50 pesetas el 100; 4,850 a otro, a 48'50 pesetas ídem: 12,350 a otro, a 52'25 pesetas ídem, y él se quedó con el sobrante. ¿A cuánto le salió el centenar de cigarros que guardó para su consumo?

105. Una compañía de ómnibus tiene 80 caballos; cada caballo consume, semanalmente, 14 litros de avena, que se vende a 20'75 ptas. el hectolitro. Dicha compañía tiene, además, 20 empleados, que cobran por término medio 129'20 pesetas al mes cada uno. ¿Cuál es el gasto diario de la referida compañía, contando lo meses de 30 días.

106. Un comerciante ha pagado 1,268'85 pesetas por la compra de 12'70 hectolitros de vino de una 1.ª calidad, y 20'45 hectolitros de una 2.ª calidad. Se sabe que el hectol. de la 2.ª calidad cuesta 4'50 ptas. más que el hectol. de la 1.ª Según esto, averígüese: 1.º, el precio del hectolitro de cada calidad; 2.º, el beneficio que realizaría el comerciante vendiendo todo el vino a 39'50 pesetas el hectolitro.

Operaciones con los números complejos

I

1. Pónganse bajo la forma decimal de quintal los complejos siguientes:
   1.º 6 quintales, 3 arrobas, 9 libras, 2 onzas, peso catalán.
   2.º 9 quintales, 2 arrobas, 5 libras, 10 onzas, peso castellano.
   3.º 46 quintales, 20 libras, 11 onzas, y $^3/_9$, peso catalán.
   4.º 120 quintales, 45 onzas, y $^1/_2$, peso castellano.
   5.º 3 arrobas, 20 libras, 1 onza, peso catalán.
   6.º 15 libras, 2 onzas, peso castellano.
2. Redúzcanse a duros y fracción los complejos siguientes:
   1.º 26 duros, 4 pesetas, 3'25 reales.
   2.º 9 duros, 3 pesetas, 2 reales.
   3.º 3 pesetas, 3 reales y $^2/_5$.
   4.º 4 onzas de oro, 2 duros, 14 reales.
   5.º 6 onzas de oro, 4 pesetas, 1 real y $^3/_8$.
   6.º 7 escudos, 2 pesetas y $^{25}/_{46}$.
   7.º 3 doblones, 18 reales.
3. Pónganse baja la forma decimal de pipa, los complejos siguientes:
   1.º 4 pipas, 2 cargas, 3 mallales, 5 porrones, 2 patricones, medidas de Gerona.

2.° 2 pipas, 3 cargas, 9 porrones, 1 patricón, medidas de idem.
3.° 5 pipas, 4 mallales, 3 porrones, medidas de idem.
4.° 3 cargas, 6 mallales, 5'25 patricones, medidas de idem.
5.° 27 mallales, 15 porrones y $^3/_5$ idem, medidas de idem.
6.° 120 porrones y 2 $^3/_8$ patricones, medidas de idem.

4. Redúzcanse a canas y fracción de idem, los complejos siguientes:
1.° 64 canas, 3 palmos, 2 cuartos, medida catalana.
2.° 9 canas, 7 palmos, 3 cuartos y $^5/_9$ » »
3.° 128 canas, 12 cuartos, » »
4.° 9 palmos, 1 cuarto, » »
5.° 130 palmos, 2 cuartos y $^{12}/_{25}$. » »

5. Transfórmense en cuarteras y fracción de idem los complejos siguientes:
1.° 20 cuarteras, 3 cuartanes, 2 mesurones, 1 picotín, medidas de Gerona.
2.° 9 cuarteras, 1 cuartán y 3 $^1/_8$ picotines, medidas de idem.
3.° 2 cuartanes, 5 mesurones, medidas de Gerona.
4.° 5 cuarteras, 14 picotines, » »
5.° 1 cuartán y 4 $^2/_7$ picotines, » »

6. Pónganse bajo la forma decimal de año, los complejos siguientes:
1.° 26 años, 3 meses, 2 días, 9 horas, 7 minutos.
2.° 5 años, 9 días, 23 horas, 40 minutos.
3.° 4 siglos, 20 meses, 14 días, 15 horas.
4.° 2 siglos, 1 año, y 36 $^7/_9$ días.
5.° 32 meses, 2 semanas, 5 días, 30'50 minutos.

7. Háganse las siguientes reducciones:
1.ª 6 quintales, 3 arrobas, 5 onzas, peso catalán, a arrobas y fracción de id.
2.ª 9 duros, 2 pesetas, 2'13 reales, a pesetas y fracción de idem.
3.ª 20 quintales, 5 y $^1/_2$ libras, peso castellano, a arrobas y fracción de idem.
4.ª 14 libras, peso castellano, a fracción de quintal.
5.ª 11'85 reales, a fracción de duro.
6.ª 4 varas, 2 pies y 5 pulgadas, a varas y fracción.
7.ª 76'885 reales, a fracción de pieza de oro de a 10 duros.
8.ª 14 reales, a fracción de duro.
9.ª 1'25 cuartanes, a fracción de cuartera, medidas de Gerona.
10.ª 4 pesetas, a fracción de onza de oro.
11.ª 6 pesetas, 3'75 reales a fracción de moneda de oro de a 20 duros.
12.ª 20 varas y 18 pulgadas, a varas y fracción.
13.ª 18 onzas, peso catalán, a fracción de quintal.
14.ª 2 canas, y 3 $^2/_5$ cuartos, medidas de Gerona, a palmos y fracción de idem.
15.ª 20 quintales, 2 libras y 8 $^3/_8$ onzas, peso castellano, a arrobas y fracción.
16.ª 7 toesas, 1 vara, 2 pies y 25 líneas, a varas y fracción.
17.ª 7'95 reales, a fracción decimal de duro.

II

8. Un almacenista de corchos tiene las existencias siguientes, peso catalán: 40 quintales, 3 arrobas, 7 libras de *trefino;* 128 quintales, 2 arrobas, 5 libras de *modelo;* 340 quintales, 1 arroba de *segunda*, y 2,500 quintales de *regular*. ¿Cuántos quintales tiene en todo?

9. Un agricultor gerundense ha recolectado: 60 cuarteras, 3 cuartanes, 5 mesurones de trigo candeal; 45 cuarteras, 2 cuartanes de cebada; 15 cuarteras, 1 cuartán, 2 mesurones de avena, y 62 cuarteras, 4 mesurones de mijo. ¿Cuántas cuarteras de grano ha recolectado?

10. La fortuna de un caballero es como sigue: en efectivo, 42,500 duros, 4 pesetas, 3 reales; en fincas rústicas, 180,000 duros, 18 $^3/_4$ reales; en idem urbanas, 40,156 duros, 3 pesetas, 1 real; en papel del Estado, 60,570 duros; en mobiliario, 5,700 duros, 1 peseta, 3 reales, y le deben 1,250 duros, 1 peseta, 3 $^3/_5$ reales. ¿Cuánto suma la fortuna del mentado caballero?

11. Un vendedor de cintas tiene una pieza que mide 40 canas, 3 palmos, 2 cuartos; otra, cuyo tiro es 28 canas y 7 palmos; otra, igual a la primera; otra, de 35 canas, 3 cuartos, y otra cuyo tiro es 60 canas, 4 palmos y 3 cuartos. ¿Cuántas canas, palmos y cuartos de cinta, medidas catalanas, posee el mencionado individuo?

12. La casa F. López y Compañía, de Gerona, ha hecho las ventas siguientes: 3 pipas, 2 cargas, 5 mallales de vino de Valencia, por 120 duros, 4 pesetas, 3 reales; 1 pipa, 7 mallales, 6 porrones, 3 $^1/_2$ patricones de vino del Priorato, por 45 duros, 7 reales; 3 cargas, 5 mallales, 14 porrones, 3 patricones idem de Jerez, por 300 pesetas, y 2 mallales, 15 porrones, 2 patricones de mistela, por 30 pesetas y $^1/_2$. ¿Cuántas pipas, cargas, mallales, porrones y patricones de vino se han vendido, y cuál es su valor?

13. El dueño de una carbonería catalana vendió 7 quintales, 2 arrobas, 14 libras de carbón de encina superior, por 8 duros, 15 reales, y 12 quintales, 29 libras de carbón de alcornoque por 12 duros, 3 pesetas. Al día siguiente, realizó 30 quintales, 3 arrobas de la 1.ª clase por 180 pesetas, 2 reales, y 36 arrobas, 20 libras de la 2.ª por 46 pesetas, 3 reales. ¿Qué cantidad de carbón vendió de cada clase y cuánto cobró?

III

14. Tenía 450 duros, 3 pesetas, 2 reales, y gasté 56 duros, 2 pesetas, 3 reales. ¿Cuánto me quedó?

15. De un depósito que contenía 3 pipas, 2 cargas, 5 mallales, 7 porrones, 3 patricones de vino, medidas de Gerona, se han vendido 1 pipa, 3 cargas, 10 porrones, 3 patricones. ¿Cuánto ha quedado en él?

16. Un padre, al fallecer, legó a sus dos hijos 42,560 duros, 3 pesetas, 2 reales, de cuya cantidad corresponden 18,653 duros, 4 pesetas y $1/2$ al hijo menor. ¿Cuánto heredó el mayor?

17. Un tratante en cereales ha adquirido 146 cuarteras, 3 cuartanes y $1/2$ de maíz, y necesita 350 cuarteras, 20 picotines, medidas de Gerona, por haberse comprometido a facilitar esta partida a un comisionista de Valencia, en el término de cuatro días. ¿Qué cantidad de maíz le falta comprar?

18. En la caja de cierto banquero, hay, en metálico, 36,590 duros, 3 pesetas, 2 reales, y en el día de hoy se cobrarán letras por valor de 2,560 duros, 14 reales, y se pagarán otras por valor de 4,690 duros, 3 pesetas y $3/4$. ¿Qué cantidad habrá en dicha caja al cerrar las operaciones de hoy?

19. Un comerciante de Barcelona ha recibido de Nueva York un cargamento de algodón en rama, consistente en 4,520 quintales, 3 arrobas, 6 libras, peso catalán, y en el acto ha vendido las tres partidas siguientes: a un comisionista de Zaragoza, 630 quintales y $1/2$; a un fabricante de tejidos, de Mataró, 1,346 quintales, 2 arrobas, 20 libras, 6 onzas, y a otro fabricante, de Manresa, 90 quintales, 3 arrobas, 15 libras. ¿Qué cantidad de algodón le ha quedado?

20. En un almacén hay 460 barriles de a 3 cargas, 5 porrones cada uno, petróleo, medidas catalanas, distribuído de la siguiente manera: 420 cargas, 3 mallales y $1/2$ refinado extra superior; 526 cargas, 22 porrones refinado superior, y el sobrante no refinado. ¿Qué existencia hay de esta última clase?

IV

21. ¿Cuánto valen 209 quintales, 3 arrobas, 5 libras, 3 onzas, peso catalán, de cierta mercadería a 49 duros, 2 pesetas, 3 reales el quintal?

22. En febrero último, compré dos piezas de franela, de a 20 canas, 3 palmos y $1/2$, cada una, a 3 pesetas, 2 reales $3/4$ la cana, y 3 piezas de a 35 canas, 7 palmos cada una a 2'75 pesetas la cana. ¿Cuánto pagué?

23. Un fabricante de tapones vendió 28 balas y 18,500 *trefinos pequeños*, a 124 duros, 2 pesetas, 3 reales la bala. ¿Cuánto cobró?

24. Averigüese el valor de 29,450 tapones *puntiagudos*, a 40 duros, 2 pesetas, 3 $1/2$ reales la bala.

25. ¿Cuál es el valor de 6 balas y 9,850 tapones *trefinos gruesos*, a 12 duros, 4'25 pesetas el mil?

26. Si 1 quintal catalán de bacalao de Islandia vale 6 duros, 14 reales, ¿cuál será el valor de 60 quintales, 24 libras, habiendo satisfecho además el comprador, 14'75 pesetas por gastos de transporte?

27. La fábrica de cerillas de Valencia *El Globo*, ha remitido a su corresponsal en Barcelona 2,500 gruesas y 7 docenas de cajas de 1.ª clase a 3 pesetas, 2 reales y cuartillo la gruesa. ¿Cuál es el valor de la mencionada remesa?

28. Un electricista ha comprado 3 arrobas, 5 libras y 5 onzas, peso castellano, de sal amoníaco a 18 duros, 4 pesetas y $1/2$ el quintal. ¿Qué cantidad ha satisfecho?

29. Si cada 5 libras de jabón valen 1'50 pesetas, ¿cuál será el valor de 9 cajas del indicado género, de peso cada una 1 quintal, 3 arrobas, 8 y $3/4$ libras, peso catalán?

30. Siendo 5 duros, 3'25 pesetas el precio de 1 quintal castellano de harina blanca, clase extra, ¿cuánto importará la venta de 40 sacos, de peso cada uno 1 quintal, 2 arrobas, 15'50 libras?

31. Pagando el millar de ladrillos a 2 duros, 1 peseta, 3 reales y cuartillo, ¿cuánto desembolsaré por la compra de 46,580 ladrillos?

32. ¿Cuánto deberá abonar una modista por la compra de 7 palmos, 3 cuartos de cinta azul, al precio de 3 pesetas 2'75 reales la cana?

33. Pagando las habas a 10 pesetas, 2 reales y cuartillo la cuartera de Gerona, ¿cuál será el valor de 3 cuartanes, 2 y $1/2$ picotines?

34. Un pescador ha comprado una pieza de cuerda cuya longitud es 70 varas, 2 pies, 9 pulgadas, a 0'75 pesetas la vara. ¿Cuánto ha debido abonar?

35. Un cordelero, en 8 días, hiló 240 canas, 2 palmos y $1/2$ de cuerda. ¿Cuánto hilarían, en el mismo tiempo, 14 cordeleros igualmente hábiles?

36. Un tejedor, en 1 día, tejió 6 canas, 3 $1/2$ palmos de cierta tela. ¿Qué cantidad harían 8 tejedores igualmente hábiles, en 20 días?

37. Un tendero ha comprado, en la fábrica de papel *La Gerundense*, 46 resmas, 9 manos, 3 cuadernillos de papel de empaquetar, a 4 duros, 4 pesetas, 3 reales, 20 maravedises la bala. ¿Cuánto debe pagar?

38. Un esterero compró 250 fardos de esparto, de 1 quintal, 2 arrobas, 7 libras, peso catalán, cada uno, a 3'50 pesetas el quintal, y los vendió a razón de 1 duro, 4 pesetas, 3 reales y $^1/_2$ cada 2 quintales. ¿Cuánto ganó, habiendo satisfecho 8'25 pesetas por 5 días de almacenaje?

39. El caño de una fuente, en 1 hora, mana 120 mallales, 3 porrones y $^1/_2$ de agua, medidas gerundenses. ¿Cuál será la cantidad de agua dada por el mismo caño, en 9 días, manando 12 horas cada día?

40. Narciso Pla, de Gerona, tratante en granos, ha comprado: 50 cuarteras, 3 cuartanes y $^1/_2$ de trigo a 14 pesetas, 2 reales la cuartera, y 24 cuarteras y $^1/_2$ ídem a 3 duros, 1 peseta, 1 real ídem, corriendo de su cuenta los gastos de transporte, que han importado 6 duros, 18 reales. Luego ha vendido el trigo de ambas compras a 16'75 pesetas la cuartera. ¿Cuánto ha ganado en el negocio?

41. De las 20 pipas, 3 cargas, 7 mallales y 15 porrones de vino que tiene un agricultor gerundense, da 2 pipas, 20 mallales a un hijo suyo; guarda 5 pipas, 2 cargas, 10 porrones para el consumo de su familia, y vende el sobrante a 40 pesetas, 3'25 reales la carga. ¿Cuánto debe cobrar?

42. Un tratante en corchos ha comprado 40 fardos de corcho de Córcega, de 1 quintal, 2 arrobas, 20 libras, peso castellano, cada fardo, a 4 duros, 14 reales el quintal; al pesarlo, encuentra a faltar 2 libras por fardo, y vende el peso limpio a 25 pesetas y $^1/_2$ el quintal, abonando 5'75 pesetas por comisión. ¿Qué beneficio le produce esta compraventa?

43. Cierto tabernero ha comprado 2 pipas, 3 cargas, 4 mallales y $^1/_2$ de vino del Ampurdán a 5'45 pesetas el mallal, medidas de Gerona. Mezcla luego con el vino comprado 7 mallales y $^3/_5$ de agua, y vende la mezcla a 0'40 pesetas el porrón. ¿Qué beneficio obtiene?

44. El tabernero que se menciona en el anterior problema, ha comprado 4 pipas 3 y $^1/_2$ mallales de vino tinto a 42 duros, 3 pesetas la pipa, abonando, además, 30'25 pesetas por transporte. Mezcla con el vino anterior 3 cargas, 7 mallales, 9 porrones, 3 patricones de vino de a 4'75 pesetas el mallal y 14 mallales y $^1/_2$ de agua, vendiendo luego la mezcla a 0'50 pesetas el porrón. ¿Qué beneficio obtiene?

45. Compré a un campesino catalán un cerdo que pesó 120 carniceras, 2 $^1/_2$ libras, a 2 pesetas la carnicera, y yo le entregué una pieza de pana de a 20 canas, 7 palmos a 6'25 pesetas la cana, y 14 arrobas, 7 libras, peso catalán, de guano del Perú, a 12'05 pesetas el quintal. ¿Quién debe a quién?

V

46. Cinco individuos han de repartirse 3 onzas de oro, 15 duros, 3 pesetas, 3 reales. ¿Cuánto recibirá cada uno?

47. Siete faquines han de almacenar, por partes iguales, 2,800 quintales, 3 arrobas, 6 libras de corcho, peso catalán. ¿Cuánto tendrá que almacenar cada uno?

48. Se han comprado 4 pipas, 3 cargas, 6 mallales, 2'5 porrones de vino, medidas de Gerona, por 169 duros, 2'75 pesetas. ¿A razón de cuánto se ha pagado la pipa?

49. La Compañía de los ferrocarriles de Tarragona a Barcelona y Francia ha comprado a una fundición de Bruselas 1,250 quintales, 2 arrobas, 14 libras de railes, peso catalán, por 1,280 duros, 19 reales. ¿A razón de cuánto ha pagado el quintal?

50. Cuatro labradores, por 6 jornales cada uno, han cobrado 70 pesetas, 3'25 reales. ¿Cuánto ganaba diariamente cada labrador?

51. Pagando los huevos a 1 peseta, 2 reales y cuartillo la docena, ¿cuánto vale un par de huevos?

52. Un panadero compró 20 sacos de harina, de a 6 arrobas, 14 libras, 10 onzas, peso catalán, cada uno, por 160 duros, 3'80 pesetas. ¿A cuánto pagó el quintal?

53. Siendo 1'50 pesetas el precio de 1 libra de chocolate, clase superior, ¿cuántas libras se comprarán con 9 duros, 4 pesetas y $^5/_6$?

54. Pagando el vino de Alella a 14 pesetas, 3 reales el mallal de Gerona, ¿a cuánto resulta el porrón?

55. Si 1 arroba catalana de azúcar blanco vale 9 pesetas, 2 reales, ¿a cuánto resulta la libra?

56. Vendiendo la bala de tapones *regulares*, a 45 duros, 2 pesetas y $^1/_2$, ¿a cuánto resulta el millar?

57. Un alpargatero ha empleado 450 duros, 15 reales en cáñamo de Bolonia, que ha pagado a 30'75 pesetas el quintal. ¿Cuántos quintales ha comprado?

58. Vendiéndose las habas a 10'75 pesetas la cuartera de Gerona, ¿cuántas cuarteras se comprarán con 90 duros, 4 pesetas, 3 $^3/_8$ reales?

59. Pagando el mijo a 13 pesetas, 2 reales la cuartera de Gerona, ¿qué cantidad podrá adquirir un tratante en granos, con 3 onzas de oro, 5 duros, 18 reales?

60. Si 1 libra de tabaco picado, peso catalán, vale 24 reales, ¿cuántas arrobas podrán comprarse con 40 duros, 3 pesetas y $^1/_2$?

61. Siendo 6'25 pesetas el precio de 1 mallal gerundense de vino de Valencia, ¿qué cantidad de vino podrá adquirirse con 150 duros, 3 pesetas, 3 reales?

62. Consumiendo una fragua 1 quintal, 2 arrobas, 6 libras y $^1/_2$ de carbón mineral cada día, ¿cuántas semanas de a 6 días de trabajo cada una podrá funcionar con 150 quintales, 2 arrobas, 20 libras de carbón, peso castellano?

63. Los 100 palomos de que consta un palomar, consumen, diariamente, 1'50 picotines de vezas. ¿Cuántos meses podrán comer con 20 cuarteras, 3 cuartanes, 2 mesurones de vezas, medidas de Gerona, que ha comprado su dueño?

64. Con el producto líquido de la venta de 40 quintales, 2 arrobas, 9 libras de corcho de Africa, a 20 pesetas, 2 reales el quintal, peso catalán, he adquirido arroz de Valencia que he pagado a 4 duros, 2 pesetas, 3 reales el quintal. ¿Qué cantidad de arroz he comprado?

65. Un fabricante de tapones ha vendido los siguientes: 7 balas, 2,500 *segunda flaca*, a 8'25 pesetas el millar; 70 balas, 9,500 *puntiagudos*, a 48 duros, 14 reales la bala, y 3 balas, 4,900 *modelo*, a 3 duros, 2'50 pesetas el mil. Del valor total le han firmado una letra a 30 días, que ha cobrado con rebaja de 5 duros, 4'25 pesetas, y el líquido lo ha invertido en corcho de a 4 duros, 4 pesetas y $^1/_2$ el quintal catalán. ¿Qué cantidad de corcho ha comprado?

66. El dueño de una tienda de comestibles compró un cerdo, de peso 90 carniceras y 2'50 libras, por 45 duros, 14 reales, satisficiendo, además, 40 pesetas, 3 reales por derechos de consumos. ¿A razón de cuánto le resulta la carnicera?

67 Con lo que cobre vendiendo 4 pipas, 2 cargas, 15 porrones, 3 patricones de aguardiente, medidas de Gerona, a 12'25 pesetas el mallal, quiero comprar, en cantidades iguales, vino y vinagre. Siendo 7 pesetas, 2 reales el valor de 1 mallal de vino y 0'25 pesetas el de 1 porrón de vinagre, ¿cuánto podré comprar?

68. He remitido a mi corresponsal en Tarragona una letra de 2,480'75 pesetas para que satisfaga a Ros, de aquella plaza, por mi cuenta, 45 duros, 14 reales, y emplee el líquido del modo siguiente: los $^3/_8$ en esparto pleita verde de a 18'50 reales el fardo; la $^1/_2$ del sobrante, en vino de a 4'25 pesetas el mallal, y el resto, en habichuelas de a 16 pesetas, 2 reales la cuartera gerundense. ¿Cuánto recibiré de cada cosa?

69. Tomás Figuier, de Málaga, me remite, para vender por su cuenta, 450 serones de pasas, 1.ª calidad, de peso cada uno 18 libras y $^1/_2$, que realizo a 0'75 pesetas la libra, descontando 1'50 libras por el peso de cada serón. Habiendo satisfecho 50'75 pesetas por varios gastos, y retirando mi comisión de 1'50 reales por cada serón, ¿cuánto debo satisfacer a mi comitente?

70. Remití a mi corresponsal en Barcelona, para vender de mi cuenta, 14 piezas de tejido de seda de Lión, de tiro cada una 30 canas, 7 palmos y $^1/_2$, al precio de 3 duros, 2 pesetas y $^1/_2$ la cana. Realizados dichos géneros, mi citado corresponsal me avisa haber satisfecho 8 duros, 4'12 pesetas por varios gastos y haber retirado su comisión de 0'35 pesetas por cada cana, quedando el líquido a mi disposición, cuyo valor le doy orden de invertir en azufre de a 1 duro, 4 pesetas, 3'75 reales el quintal catalán. ¿Cuántos quintales de azufre recibiré?

71. He comprado 40 quintales, 3 arrobas, 5 libras de café caracolillo, peso catalán, a 48 duros, 4 pesetas y $^1/_2$ el quintal, habiendo, además, satisfecho los gastos siguientes: al comisionista por cuya mediación he hecho la compra, 15 pesetas, 3 reales; por cuatro días de almacén, 2 duros y $^1/_2$, y por transporte, 14'79 pesetas. Deseando vender dicho género y ganar 28 duros, 14 reales, ¿a cuánto debo vender el quintal?

72. He invertido 450 duros, 3 pesetas y $^1/_2$ en la compra de 11 pipas y $^1/_2$ de vino tinto, medidas de Gerona, por las que he satisfecho 16 duros, 4'25 pesetas por transporte y 52 duros y $^7/_9$ por derechos de consumo. Deseando vender el vino mencionado y ganar 5 duros, 2 pesetas por pipa, ¿a cuánto he de vender la carga?

73. Cobré 26 onzas de oro, 15 duros, 3'25 pesetas, y empleé: los $^3/_{12}$ en harina de 5'75 duros el quintal cat.; los $^2/_8$, en franela de a 4'25 pesetas la cana, y el sobrante, en azúcar de a 2 duros, 3 pesetas la arroba castellana. ¿Cuánto compré de cada cosa?

74. He adquirido las siguientes partidas de trigo: 40 cuarteras, 2 cuartanes, 1 mesurón, medidas de Gerona, a 15'25 pesetas la cuartera; 25 cuarteras, 3 cuartanes, 1 picotín, a 3 duros, 1 peseta, 2 reales ídem, y 9 cuarteras y $^1/_2$ a 12'29 pesetas ídem. Habiendo abonado 50'75 pesetas por gastos de transporte, y deseando ganar en la venta 20 duros, 18 reales, ¿a cuánto deberé facturar la cuartera de mezcla?

75. Mi corresponsal en Córcega ha comprado de mi orden y cuenta 6,500 quintales, 3 arrobas de corcho, peso catalán, a 3 duros, 9 reales el quintal, para cuya remesa ha fletado un buque a 0'75 pesetas por quintal de mercadería transportada. Habiendo satisfecho 500 pesetas por desembarque y 40 duros, 4'20 pesetas por el trabajo de conducción y almacenaje, ¿a cuánto deberé vender el quintal, queriendo ganar 850 duros, teniendo en cuenta que observo una tara de 20 $^1/_2$ quintales?

76. Un tabernero gerundense ha comprado 36 cargas, 15 porrones de vino de Tarragona a 5'75 pesetas el mallal. Deseando venderlo 5 céntimos de peseta por porrón más barato del precio que por ídem le resulta, ¿qué cantidad de agua deberá añadir?

77. El tabernero del problema anterior, ha comprado 2 pipas, 32 porrones de vino medidas de Gerona, a 38 duros, 6'75 pesetas la pipa, habiendo pagado por varios gastos 18'80 pesetas. Queriendo ganar 60'75 pesetas y vender dicho vino 0'03 pesetas por porrón más barato del precio a que por ídem le resulta, ¿qué cantidad de agua deberá añadir?

78. Véase la cantidad de agua que debería añadirse al vino mencionado en el anterior problema, si el comprador hubiese hallado una tara de 3 patricones por cada mallal.

79. Remití a mi corresponsal en Cádiz, para vender de mi orden y cuenta, 60 cajas de jabón de a 1'75 quintales cada una. Realizada la venta, recibo de mi citado corresponsal una letra de 496 duros, 4'25 pesetas, como producto líquido de la remesa. ¿A qué precio resulta vendida la arroba de jabón?

80. Cierto individuo permuta azúcar de 6'25 duros el quintal cat., por vino de 8 duros, 14 reales y $1/2$ la carga de Gerona. Conviniéndole 3 pipas, 2 cargas, 5 porrones de vino, ¿qué cantidad de azúcar deberá entregar?

81. Un comerciante en tapones ha comprado las 3 partidas siguientes de *modelo;* 4 balas, 2,800 a 16'75 pesetas el mil; 5 balas y $1/2$ a 2 duros, 4'90 pesetas ídem, y 124,500 a 94 duros, 2 pesetas y $1/2$ la bala. Habiendo satisfecho 30'25 pesetas por gastos de transporte, y deseando ganar 1'75 reales por mil, ¿a qué precio tendrá que facturar el millar de tapones de mezcla?

Ejercicios y problemas correspondientes a los números métrico-decimales

I

1. Dígase qué significan las abreviaciones siguientes:
1.ª 8 Mm., 9 Km., 7 Hm., 2 Dm., 3 m., 5 dm., 2 cm. y 3 mm.
2.ª 20 T. m., 8 qq. m., 7 Kg., 9 Hg., 5 Dg., 4 g., 8 dg., 9 cg. y 1 mg.
3.ª 60 Ml., 5 Kl., 2 Hl., 1 Dl., 3 h., 28 dl., 7 cl. y 6 ml.
4.ª 20 Mm.^{2}, 70 Km.^{2}, 6 Hm.^{2}, 13 Dm.^{2}, 9 m.^{2}, 15 dm.^{2}., 3 cm.^{2} y 55 mm.^{2}
5.ª 14 Ha., 9 a. y 6 ca.
6.ª 428 m.^{3}, 12 dm.^{3} y 975 mm.^{3}

2. Redúzcase a metros y fracción de ídem el compléjo siguiente: 6 Mm., 9 Km., 5 Hm., 3 Dm., 3 m., 8 dm., 7 cm. y 2 mm.

3. Hágase lo propio con el siguiente: 20 Mm., 5 Hm., 3 Dm., 9 cm. y 3 mm.

4. Reducir a Dm. y fracción el complejo 9 Km., 3 Dm., 6 m. y 95 mm.

5. Reducir a Mm. y fracción el complejo siguiente: 7 Dm., 8 m., 3 cm. y 9 mm.

6. Póngase bajo la forma decimal de Hm., Dm., cm., dm. y Mm. el complejo siguiente: 65 Mm., 75 Dm., 9 dm. y 26 mm.

7. Idem bajo la forma decimal de m., Dm., Km., cm. y mm. el complejo 45 Hm., 9 m. y 7 dm.

8. Idem bajo la forma decimal de mm., dm., m., Km. y Dm. el complejo 42 Dm. y 25 cm.

9. Reducir 120 m. a mm., cm., Dm., Hm. y Mm.

10. Póngase bajo la forma decimal de Kg., el complejo siguiente: 80 T. m., 6 qq. m., 35 Kg., 9 Hg., 5 Dg., 3 g., 8 dg., 1 cg. y 2 mg.

11. Idem bajo la forma decimal de Dg. el siguiente: 7 T. m., 2 qq. m., 5 Hg., 3 Dg., 6 cg. y 3 mg.

12. Redúzcanse a T. m., Kg., Dg. y mg., 26 qq. m., 25 Dg., 9 cg. y 6 mg.

13. Idem a mg., g., Hg., Kg., qq. m., y T. m.: 48 Kg., 2 Dg., 38 cg. y 6 mg.

14. Póngase bajo la forma decimal de Hg., Kg., T. m., dg. y mg., el complejo siguiente: 450 Hg., 38 g. y 124 mg.

15. Idem bajo la forma decimal de cg., Dg., qq. m. y T. m. el complejo siguiente: 2,450 Kg., 6 g., 25 dg., 40 cg. y 38 mg.

16. Redúzcase a l. y fracción, el complejo 24 Kl., 5 Hl., 3 Dl., 9 l., 3 dl., 2 cl. y 4 ml.

17. Idem a Hl. y fracción el complejo 30 Kl., 9 Dl., 6 dl. y 4 ml.

18. Idem a Kl., Dl., dl., y ml. 38 Hl., 5 l. y 45 cl.

19. Idem a cl., ml., Dl. y Kl.: 36 Hl., 5 l. y 128 ml.

20. Idem a Kl., l., Hl., dl. y ml.: 120 l., 45 cl. y 25 ml.

21. Idem a ml., dl., Hl. y Kl., 2,480 Dl.

22. Reducir a m.^{2} y fracción de ídem 46 Mm.^{2}, 28 Km.^{2}, 16 Hm.^{2}, 55 Dm.^{2}, 27 m.^{2}, 29 dm.^{2}, 57 cm.^{2} y 33 mm.^{2}

23. Póngase bajo la forma decimal de Dm.^{2} el complejo siguiente: 54 Mm.^{2}, 7 Hm.^{2}, 9 Dm.^{2}, 8 m.^{2}, 7 dm.^{2}, 6 cm.^{2}, y 2 mm^2.

24. Idem bajo la forma decimal de Hm.^{2}, el siguiente: 284 Mm.^{2}, 5 Km.^{2}, 36 Dm.^{2}, 5 dm.^{2} y 99 mm.^{2}

25. Idem bajo la forma decimal de dm.^{2}, el siguiente: 124 Km.^{2}, 249 Dm.^{2}, 480 cm.^{2}

26. Redúzcase a Dm.^{2}, dm.^{2}, mm.^{2}, Hm.^{2}, Mm.^{2}, el siguiente complejo: 1,384 m.^{2}, 7 dm.^{2} y 248 mm.^{2}

27. Idem a m.^{2}, cm.^{2}, mm.^{2}, Km.^{2} y Mm.^{2}, el siguiente complejo: 4,284 Dm.^{2}, 50 m.^{2}, 1,248 mm.^{2}

28. Póngase bajo la forma decimal de Mm.^{2}, Km.^{2}, cm.^{2}, mm.^{2} y Dm.^{2}, 2,846 m.^{2}

29. Reducir a Ha., a. y ca.: 49 Ha., 6 a. y 25 ca.

30. Idem a Ha., ca. y a.: 96 Ha. y 840 ca.

31. Idem a Km.^{2}, Ha., m.^{2}, a., Mm.^{2} y dm.^{2}, el complejo siguiente: 4,865 Dm.^{2}, 38 ca., 98 dm.^{2}, y 9 mm.^{2}

32. Idem a ca., Dm.^{2}, Hm.^{2}, cm.^{2}, m.^{2} y mm.^{2}, el siguiente: 145 Km.^{2}, 36 Ha., 9 a. y 1,946 mm.^{2}

33. Idem a Mm.^{2}, Ha., m.^{2}, cm.^{2} y mm.^{2}, 84,256 ca.

34. Póngase bajo la forma decimal de m.^{3}, el complejo siguiente: 9,428 m.^{3}, 296 dm.^{3}, 257 cm.^{3} y 234 mm.^{3}

35. Idem bajo la forma decimal de dm.^{3}, el siguiente: 8,543 m.^{3}, 64 dm.^{3}, 35 cm.^{3} y 18 mm.^{3}

36. Idem bajo la forma decimal de cm.^{3}, el siguiente: 4 m.^{3}, 2 dm.^{3}, 7 cm.^{3} y 9 mm.^{3}

37. Reducir a Dm.^{3}, cm.^{3} y mm.^{3} el siguiente: 39 m.^{3}, 7 cm.^{3} y 459 mm.^{3}

38. Idem a mm.^{3}, dm.^{3}, m.^{3} y Dm.^{3} el siguiente: 38 Dm.^{3}, 8,427 dm.^{3} y 12,490 mm.^{3}

39. Idem a m.^{3}, cm.^{3} y Dm.^{3}, 1.289,640 dm.^{3}

II

40. El empresario de una red telegráfica, en 4 meses que duraron los trabajos de instalación, tendió las cantidades de alambre siguientes: el 1.er mes, 4 Mm., 9 Hm., 28 m.; el 2.º, 50 Km., 27 Dm., 3 m., 45 cm.; el 3.º, 6 Mm., 28 Km., 3 Hm., 7 m., 2 dm., 25 mm., y el 4.º: 4,380 m. y medio. ¿Cuál es la longitud total del alambre empleado?

41. En un almacén de harinas, hay las siguientes existencias: de 1.ª clase, 20 T. m., 7 qq. m., 9 Kg., 3 Dg. y 25 cg.; de 2.ª clase, 483 qq. m., 26 Hg., 9 g., 3 dg., 9 cg. y 7 mg.; de 3.ª clase, 240 Kg., 37 Dg. y $^1/_2$, y de 4.ª clase, 37,860 Dg., 9 g., 7 cg. y $^1/_2$. Dígase la cantidad total de harina que hay en el almacén de referencia.

42. Se han echado a un depósito las 3 cantidades de vino siguientes: 3 Kl., 90 Dl., 7 l., 27 cl. y $^1/_2$ del Ampurdán: 36 Hl., 45 litros del Priorato, y 2,450 l., 25 cl., de Tarragona. ¿Qué vino contiene el mencionado depósito?

43. En un molino harinero, se ha molido el trigo siguiente durante el pasado mes; la 1.ª semana, 460 Hl., 36 l. y $^1/_2$; la 2.ª, 60 Kl., 9 Dl., 8 l., 7 dl., 5 cl. y $^1/_2$; la 3.ª, 485,300 l., 35 cl., y la 4.ª semana, 150 Kl., 60 l. Averigüese el total del trigo molido durante el tiempo mencionado.

44. El terreno que constituye una heredad, puede clasificarse de la manera siguiente: 20 Km.^{2}, 7 Hm.^{2}, 45 m.^{2}, 39 dm.^{2}, de arbolado; 5 Mm.^{2}, 896 Dm.^{2}, 675 m.^{2}, de cultivo, y 35 Ha., 7 a. y 43 ca. de prado y arenal. ¿Qué área tiene dicha heredad?

45. Cierto agricultor posee un campo cuya superficie es 6 Ha., 95 a., 7 m.^{2}, y ha adquirido una extensión de tierra contigua que mide 36 Dm.^{2}, 28 ca. y 248 cm.^{2} ¿Qué área tiene actualmente el campo de su propiedad?

46. Un cantero posee 456 m.^{3}, 58 dm.^{3} y 2,480 mm.^{3} de piedra labrada, y ha vendido 78 m.^{3} y $^1/_2$ a un albañil y 48,650 m.^{3}, 860 dm.^{3}, 2,870 mm.^{3} a un maestro de obras. ¿Qué cantidad de piedra tenía antes de verificar estas dos ventas?

III

47. De un montón de hierro viejo cuyo peso era 70 T. m., 6 quintales m., 7 Kg., 89 g., se han vendido 9 qq. m., 2,456 kilogramos y $^1/_2$. ¿Qué cantidad de hierro ha quedado para vender?

48. La longitud de una vía férrea en proyecto es de 75 Mm., 8 Km., 36 Dm., 25 cm., de los que se han construído ya 12 Km., 6 Hm., 37 m. y $^1/_2$. ¿Qué longitud tiene la parte por construir?

49. De una viga de hierro que pesaba 4,686 Kg., 65 g., se ha cortado un trozo cuyo peso es 2 qq. m., 9 Kg., 68 g. ¿Cuánto pesa actualmente la mencionada viga?

50. Un depósito contiene 36 Hl., 7 Dl., 2 l., 35 cl. de agua, y al echarle 228 y $^1/_2$ l., ha quedado completamente lleno. Por un accidente casual, ha caído en él una piedra cuyo volumen es 7 dm.^{3}, 38 cm.^{3} ¿Qué cantidad de agua ha quedado en el depósito?

51. De una pieza de tela que mide 20 m., 75 cm. de largo por 1'25 m. de ancho, se han vendido 9'45 m. ¿Qué área tiene la parte no vendida?

52. De un campo que mide 2 Ha., 20 a., 7 ca., y 48 dm.^{2}, se ha vendido una porción de forma rectangular cuyas dimensiones son 56 m., 35 cm. de largo, y 28 m. y $^1/_2$ de ancho. ¿Cuál es el área del terreno que ha quedado?

53. Un cantero tiene 2,450 m.^{3}, 120 dm.^{3} y 40 cm.^{3} de piedra, y ha destinado 650 m.^{3}, 4,280 cm.^{3} para la edificación de una casa. ¿Qué cantidad de piedra le quedará?

54. Un almacenista tenía trigo de dos clases: 2,450 Hl., 5 Dl., 45 cl. de la Mancha, y 4,209 Hl., 125 l. del Danubio, y en una semana vendió las partidas siguientes: a un

comisionista de Lérida, 120 Hl., 40 l. de la 1.ª clase y 250 Hl., 4 Dl. y $1/2$ de la 2.ª; a otro de Tarragona, 30 Hl. y $1/2$ de la 2.ª clase, y a Juan Rubio, de Granollers, 600 Hl., 2 Dl., 8 l. y $1/2$ de la 1.ª clase y 432 Hl., 25 l. de la 2.ª ¿Qué cantidad de trigo de cada clase le quedó?

55. En cierta bodega, hay un depósito lleno de aceite, cuyas dimensiones interiores son: altura, 1 m., 45 cm.; largo, 0'90 m., y ancho, 0'65 m. Se ha sacado de él una cantidad de aceite tal, que el nivel del líquido ha bajado 0'56 m. ¿Qué cantidad de aceite ha quedado en el depósito?

56. Un comerciante compró 460 T. m., 7 qq. m., 96 Kg. y $1/2$ de hulla de Inglaterra y 622 T. m., 4 qq. m., 40 Kg., 9 Dg. ídem de San Juan de las Abadesas. Ocho días después, recibió 56 T. m., 40 Kg. ídem del 1.º y 180 T. m. y $1/2$ del 2.º, y en los quince días siguientes vendió: a un herrero, 26 T. m., 46 Kg. del 1.º y 70 T. m., 5 qq. m., 9 Kg., 70 Dg. del 2.º, y al mayordomo de una fábrica de tejidos, 184 T. m., 450 Kg. y $1/2$ del 1.º y 380 T. m., 9 qq. m., 20 Kg. del 2.º Dígase la cantidad de carbón mineral que le quedó de cada clase.

IV

57. ¿Cuánto cobraré por la venta de 4 piezas de tela de a 2 Dm., 7 m., 45 cm., cada una, a 2'25 pesetas el m.?

58. Vendiendo el Kg. de ternera a 2'25 pesetas, ¿cuánto cobrará un ganadero por la venta de una res cuyo peso es 2 qq. m., 75 Kg., 9 Dg., 25 cg.?

59. El administrador de un hospital ha adquirido 36 Hl., 45 litros y $1/2$ de garbanzos, a 19'75 pesetas el Hl., y 96 Hl., 3 Dl., 6 l., 38 cl. de habichuelas a 14'25 pesetas el Hl. ¿Cuánto ha tenido que desembolsar?

60. Pagando el m.^{2} a 12'75 pesetas, ¿cuánto importará la compra de un solar que mide 2 Dm.^{2}, 46 ca. y 25 cm.^{2}?

61. Un terreno arbolado de forma rectangular, cuyas dimensiones son 839 m., 45 cm. de largo y 436 m. y $1/2$ de ancho, se ha comprado a 134'75 pesetas el área. ¿Cuál ha sido su valor?

62. Vendiendo un farmacéutico el agua destilada a 0'05 pesetas el Hg., ¿cuánto recibirá por la venta de la que llena un depósito que mide 1'25 m. de alto, 0'90 m. de largo y 0'45 m. de ancho?

63. Un ebanista ha comprado 45 m.^{3}, 856 dm.^{3} y $1/2$ de madera de caoba, a 28'50 pesetas el m.^{3} ¿Cuánto ha gastado?

64. Se ha dividido una propiedad en 7 partes iguales, siendo la superficie de cada una 17 áreas, 2 m.^{2} y 385 cm.^{2} Dígase el área de dicha propiedad antes de practicar la mencionada división.

65. Pagando los 100 Kg. de una mercadería a 29'50 pesetas, ¿cuánto deberé abonar por la compra de 76 T. m., 9 qq. m., 46 Kg., 36 g.?

66. Un tendero compró una caja de jabón de peso 246 Kg., 7 Dg., a 0'9375 ptas. el Kg., y lo vendió a 1'05 pesetas el ídem. ¿Qué beneficio realizó?

67. Una planchadora ha comprado 156 Kg., 3 Hg., 25 g. de carbón mineral a razón de 20'75 pesetas la T. m., y 47 Kg. y $1/2$ de almidón a 62'25 pesetas el q. m. ¿Cuánto ha pagado?

68. Si 1 Kg. de agua de mar contuviese 5 Dg. de sal, ¿qué cantidad de sal habría, aproximadamente, en 47 Hl., 5 Dl., 9 l., 36 cl. de dicha agua?

69. Hay que empapelar las cuatro paredes laterales de un salón cuyas dimensiones son: 18 m., 35 cm. de largo; 12 m. y $1/2$ de ancho, y 5'25 m. de altura. Pagando el papel a 0'6875 pesetas el m.^{2}, ¿cuál será el coste del papel empleado?

70. Las cuatro paredes de un salón que mide 9 m., 45 cm. de largo; 7 m. y $1/2$ de ancho, y 4'75 m. de altura, han de empapelarse empleando papel de 0'95 m. de ancho y cuyo precio es 1'3125 pesetas el m. ¿Cuánto importará la compra del papel necesario?

71. Si en el salón que se menciona en el problema anterior hubiese dos puertas de 2'95 m. de alto y 1'15 m. de ancho cada una, y 3 ventanas de 1'45 m. de alto y 0'85 m. de ancho cada una, ¿cuál sería el coste del papel empleado?

72. Un salón que mide 23 m., 45 cm. de largo por 18 m. y $1/2$ de ancho, ha de ser enladrillado con ladrillos que miden 1 dm. $1/2$ de largo por 0'08 m. de ancho. Pagando los mencionados ladrillos a 36'85 pesetas el millar, ¿cuánto costará la compra de los mismos?

V

73. Pagando el q. m. de madera a 6'50 pesetas, ¿a cuánto resulta el Kg. y a cuánto el Dg.?

74. Si 1 Kl. de ron superior vale 203'50 pesetas, ¿cuál será el valor de 1 Hl., de 1 Dl., de 1 l. y de 1 cl.?

75. Pagando la Ha. de cierto terreno a 4253'75 pesetas, ¿a cuánto resultaría el Dm.^{2}, el a. y la ca.?

76. Un andarín gana 612'50 pesetas por cada Km. que recorre. Según esto, ¿cuánto vendrá a ganar por cada Hm., Mm. y m. recorridos?

77. Vendiendo el m.^{3} de piedra a 8'25 pesetas, dígase a cuánto resulta el dm.^{3}, el cm.^{3} y el Dm.^{3}

78. En 4 meses, un niño ha crecido 4 cm., 8 mm. ¿Cuánto ha crecido cada día?

79. En 1890, un agricultor recolectó 120 Hl., 4 Dl., 3 l. de trigo, y en 1891, recolectó 602 Hl., 1 Dl., 5 l. ¿Cuántas veces la cosecha del último año ha sido mayor que la del anterior?

80. Pagando el Kg. de jabón a 1'85 pesetas, ¿qué cantidad se comprará con 725'50 pesetas?

81. El caño de una fuente, en 1 minuto, da 26 litros y $^1/_2$ de agua. ¿Qué tiempo necesitará para llenar su pilón, cuyas dimensiones son 3 m., 45 cm. de largo; 0'90 m. de ancho, y 1 m., 25 cm. de profundidad?

82. Un posadero compró 6 Hl., 9 l., 35 cl. de vino tinto de Tarragona y 124 Dl., 45 cl. de vino del Ampurdán, realizándolo todo, al por menor, en 1 mes y 45 días. ¿Qué cantidad de líquido vino a vender diariamente?

83. Se han comprado 3 piezas de franela, de a 20 m., 45 cm. cada una, por 304 pesetas y $^5/_8$ de ídem. ¿A cuánto resulta el m.?

84. Un montón de ladrillos, puestos uno encima de otro, ocupa un espacio de 45 m. y $^1/_2$ de largo; 6 m., 20 cm. de ancho y 2 m., 5 cm. de altura. ¿Cuántos ladrillos hay en el montón de referencia, si cada 8 ladrillos ocupan un espacio de 4 dm., 7 cm. de alto; 2 dm. de ancho, y 25 cm. de profundidad?

85. Un comerciante en granos ha vendido, a 14'75 pesetas la cuartera de 80 litros, el trigo contenido en un depósito de madera que mide 4 m., 95 cm. de largo; 2 m. y $^1/_2$ de ancho, y 3 m., 25 cm. de altura. ¿Cuánto ha cobrado?

86. Un viticultor de Sitjes tiene 4 Hl., 3 Dl., 8 litros de malvasía que quiere poner en botellas de a 2 y de a 1 litro. ¿Qué número de botellas necesitará de cada clase, suponiendo que tantas quiere llenar de una clase como de otra?

87. Plantando los árboles a razón de 26 por cada espacio de 6'27 m. de largo por 2 m. de ancho, ¿cuántos árboles tendrá un vergel de 4 Ha., 26 a. y 9 m.^{2}?

88. Se han comprado 16 Hl., 4 Dl., 8 l. de vino a razón de 5'90 pesetas el Dl.; 20 Dl. y $^1/_2$ a 50'25 pesetas el Hl., y 2,456 litros y $^1/_2$ a 7 pesetas $^3/_{12}$ de íd. el Dl. ¿A cómo resulta el litro de mezcla?

89. Pagando el doble Dl. de garbanzos a 8 pesetas, ¿a cómo resulta el Hl., el l. y el Kl.?

90. He vendido 3 botas de vino, de 1 Hl., 45 l. cada una, a 3'25 pesetas el Dl., y el dinero cobrado lo he invertido en palo campeche de a 14'562 pesetas el quintal métrico. ¿Qué cantidad he podido adquirir?

91. Se han invertido 1,049 pesetas en la compra de 49 quintales m., 32 Kg. y $^3/_4$ de ídem de harina, satisficiendo, además, 14 pesetas por transporte y 13'50 pesetas al corredor por cuya mediación se hizo la compra. ¿A cuánto resulta el Kg.?

92. Si 1 litro de aguardiente vale 0'75 pesetas, ¿cuántas botas de 1 doble Dl. cada una se podrán llenar con el vino obtenido, empleando 100 billetes de banco, de a 50 pesetas cada uno, en la expresada mercancía?

93. ¿Cuál será el peso de 2,500 monedas de plata de a 5 pesetas cada una, siendo la talla 40 en kilo?

94. Siendo la talla de las monedas de oro de a 100 pesetas 31 en kilo, y 155 la de las de a 20 pesetas, ¿cuánto pesarán 4,500 de las primeras y 860 de las segundas?

95. Ocupando medio decímetro en cubo cada 6 fichas de dominó, ¿cuántas fichas cabrán en una caja cuyo interior mide 1 m., 45 cm. de largo; 95 cm. de alto, y 45 cm. de ancho?

VI

96. ¿Cuántas canas de Gerona hay en 4,896'25 metros?

97. ¿Cuántos metros hay en 384 canas, 2 palmos, medida de Gerona?

98. ¿Cuántas canas de Gerona componen 4,507 Hm.?

99. ¿Cuántas canas de Gerona mide una pieza de cuerda, cuyo tiro es 47 Dm., 9 m., 25 cm.?

100. ¿Cuántos m. componen 84 varas, 2 pies y 7 pulgadas?

101. ¿Cuántas varas componen 40 Km., 7 Dm., 2 m. y 42 cm.?

102. Si reducimos 48 leguas y $^1/_2$ a m., ¿qué resultado obtendremos?

103. ¿A cuántas leguas equivalen 6 Mm., 7 Km., 2 Dm. 25 cm.?

104. ¿Cuántas canas de Gerona son 124 varas, 1 pie, 9 pulgadas y 10 líneas?

105. ¿A cuántas varas equivalen 149 canas, 3 palmos y 2 cuartos, medidas de Gerona?

106. ¿Cuántos Kg. componen 4,860 qq., 2 arrobas, 3 libras y 2 onzas, peso catalán?

107. ¿A cuántos qq. cat. equivalen 60 T. m., 9 qq. m., 20 Kg., 49 g.?

108. ¿Cuántos qq. castellanos componen 24,680 Kg., 7 Hg. y 49 g.?

109. ¿A cuántos Kg. equivalen 1,240 qq. castellanos, 2 arrobas, 20 libras y 15 onzas?

110. Si reducimos 20 qq. catalanes, 2 arrobas, 9'25 libras a quintales castellanos, ¿qué resultado obtendremos?

111. El que comprase 36 qq. castellanos, 1 arroba, 26'50 onzas de pasas, ¿cuánto tendría en peso catalán?

112. ¿Cuántos Hl. componen 46 cuarteras, 3 cuartanes, 1 mesurón $1/2$, medidas de Gerona?

113. ¿A cuántas cuarteras de Gerona equivalen 128 Hl., 9 Dl., 3 l. y 20 cl.?

114. ¿Cuántos Dl. hay en 126 cahices, 9 fanegas, 3 celemines, y 2 cuartillos?

115. ¿Cuántos cahices componen 140 Hl., 2 Dl., 7 l. y 40 cl.?

116. ¿Cuántas cuarteras de Gerona hay en 1,240 fanegas, 2 celemines y 3 cuartillos?

117. ¿Cuántas cargas gerundenses de vino son 120 Hl., 45 litros?

118. ¿A cuántos litros equivalen 3 pipas, 1 carga, 2 mallales y 3 porrones, medidas de Gerona?

119. El que comprase 124 mallales gerundenses de aceite, ¿cuántos litros tendría?

120. ¿A cuántos litros equivalen 84 mallales y $1/2$ de aceite, medida de Gerona?

121. El que tuviese 4 moyos, 9 cántaras, 2 azumbres y 3 cuartillos de vino, ¿cuánto tendría en medidas métricas?

122. Reduciendo a medidas de capacidad de Castilla 26 Hl., 30 litros de vino, ¿qué resultado obtendría?

123. ¿A cuánto equivalen 32 y $1/2$ vesanas de Gerona, en medidas métricas?

124. ¿Cuántas vesanas de Gerona componen 32 Ha., 9 a., 40 ca. y 42 dm.^{2}?

125. ¿Cuántas varas cuadradas componen 28 a., 7 ca. y 32 cm.^{2}?

126. Un campo cuya área es 360 varas cuadradas, 3 pies cuadrados y 98 pulgadas cuadradas, ¿qué área tendrá expresada en medidas métricas?

127. El área de cierta propiedad es 850 fanegas, 3 celemines, 9 estadales y 5 varas cuadradas: ¿qué área tendrá expresada en medidas métricas?

128. ¿A cuántos Km.^{2} equivalen 20 leguas cuadradas de Castilla?

129. ¿A cuántos metros cúbicos equivalen 240 canas cúbicas, 3 palmos cúbicos y 5 cuartos cúbicos, medida de Gerona?

130. Redúzcanse a metros cúbicos 456 varas cúbicas y 20 pies cúbicos.

131. ¿A cuántas varas cúbicas equivaldrán 2,460 canas cúbicas y 65 palmos cúbicos, medidas de Gerona?

132. ¿Cuánto pagaré por la compra de 45 canas, 3 palmos y $1/2$, medida de Gerona, a 2'50 pesetas el m.?

133. ¿Cuál es el valor de 850 qq., 3 arrobas, 5 libras y $1/2$ de corcho, peso catalán, a 20'75 pesetas el quintal métrico?

134. ¿Cuánto deberé abonar por la compra de 50 T. m., 9 qq. m., 30 Kg. y $1/2$ de carbón vegetal, a 5'25 pesetas el quintal catalán?

135. Resúelvase el problema anterior, siendo el quintal castellano la unidad cuyo precio se conoce.

136. A razón de 0'75 pesetas el Dm., ¿cuánto importará la venta de una pieza de bramante, cuyo tiro es 64 Hm., 35 m., 40 cm.?

137. Pagando el quintal catalán de cierto género a 73'75 pesetas, ¿a cuánto resulta el quintal métrico y a cuánto el Kg.?

138. Si por 1 T. m. de hierro se pagan 41'75 pesetas, dígase el valor de 1 quintal catalán y el de 1 libra castellana.

139. ¿Cuántos metros tiene, aproximadamente, el perímetro de un campo, al que se da una vuelta en 2,450 pasos?

140. Pagando el trigo a 16'25 pesetas la cuartera de Gerona, ¿a cuánto resulta el Hl. y a cuánto el doble Dl.?

141. ¿Cuánto cobrará un colono por la venta de 36 cuarteras, 2 cuartanes, 1 mesurón de trigo, medidas de Gerona, a 18 pesetas el Hl., y cuánto, por la de 480 Hl., 40 litros de maíz a 12'75 pesetas la cuartera de 80 litros?

142. A razón de 12'80 pesetas el mallal de Gerona, ¿cuánto valen 48'50 Hl. de aceite?

143. Si 1 pipa de vino, medida de Gerona, vale 245 pesetas, ¿qué valor tiene 1 Hl.?

144. ¿Cuánto debe abonar un posadero por la adquisición de 4 pipas, 3 cargas, 19 porrones de vino, medida de Gerona, a 48 pesetas y $3/5$ el Hl.?

145. Vendiendo el arroz a 0'25 pesetas la libra, peso catalán, ¿cuántos Kg. se comprarán con 149 pesetas?

146. Vendiendo a 0'50 pesetas el porrón, el vino contenido en un depósito de 2 canas, 3 palmos y $1/2$ de largo; 1 cana, 3 palmos de ancho, y 3 canas y $1/2$ de alto, medidas de Gerona, ¿cuánto cobraré?

147. Un huerto cuya superficie mide 4 áreas, 68 ca. y $5/6$ se ha vendido a razón de 42 duros, 15 reales la vesana de Gerona. ¿Cuánto ha cobrado el vendedor?

148. Determínese el valor de un campo de forma rectangular, cuyo largo es 350 pasos y el ancho 216, a razón de 60 duros y $^7/_9$ de ídem la vesana de Gerona.

149. Pagando el m.^{2} de damasco a 30 pesetas, ¿a cuánto resulta la cana cuadrada de Gerona, y a cuánto la vara cuadrada?

150. ¿Cuánto cobrará un cantero por la venta de 48 canas cúbicas, 20 palmos cúbicos de piedra, medidas de Gerona, a 3'15 pesetas el m.^{3}?

151. Un obrero ha comprado, a razón de 0'625 pesetas el m.^{3}, la arcilla que ha salido de una zanja que mide 150 canas y 3 palmos de largo; 3 canas y $^1/_2$ de ancho y 2 canas 5 palmos de profundidad, medidas de Gerona. ¿Cuánto ha de entregar?

152. ¿Cuántos Km. dista la tierra de la luna, si ambos astros se hallan a una distancia media de 67,000 leguas?

153. Pagando el vino a 50'75 pesetas el Hl., ¿cuánto importará la compra de 486 cántaras que he recibido de Orense?

154. La distancia que hay desde el cabo de Creus al de Finisterre es, aproximadamente, 198 leguas, y la que media desde el cabo de Peñas a la punta de Tarifa, es 872 kilómetros. Hállese en Km. la distancia primera y en leguas, la segunda.

155. La superficie de América es, aproximadamente, 1.400,000 leguas cuadradas y la de Europa, 9.259,295 kilómetros cuadrados. Dígase la 1.ª en Km.^{2} y la 2.ª en leguas cuadradas.

156. De una dehesa cuya superficie medía 128 fanegas, 3 celemines y 11 estadales, se vendieron 4 Ha., 29 a. y 50 ca. a 88 pesetas la vesana de Gerona. ¿Qué área tiene la superficie que quedó por vender, y cuánto desembolsó el comprador de la parte mencionada?

157. Determínese el importe de 20 fanegas, 4 celemines y 3 cuartillos de trigo candeal, a 18'25 pesetas la cuartera de Gerona.

158. El administrador de una sociedad recreativa ha comprado 8 quintales, 3 arrobas, 9 libras de café, peso catalán, a 3'75 pesetas el kilogramo, y 4 quintales, 45 libras de otra clase superior, peso castellano, a 5 pesetas el kilogramo, conviniendo en hacer el pago mensualmente a razón de 125'75 pesetas. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta el saldo de dicha cuenta?

159. Un tendero ha comprado 49 quintales, 3 arrobas, 6 onzas de higos, peso catalán, a 0'50 pesetas el Kg., y 6 quintales, 2 arrobas, 30 onzas, peso castellano, de pasas de Málaga, a 1'50 pesetas el Kg. ¿Cuánto debe abonar?

160. He remitido a mi corresponsal en Barcelona una letra, a la vista, de 8,500 pesetas, para que invierta este valor del modo siguiente: los $^2/_8$, en paño de a 8'90 pesetas el metro; los $^3/_{12}$, en harina de a 20'30 pesetas el quintal, y el resto, en garbanzos de a 20 $^1/_2$ pesetas la cuartera. ¿Cuántas canas de paño, medida de Gerona, Kg. de harina y Hl. de garbanzos recibiré de mi citado corresponsal?

VII

161. Una moneda de plata de a 5 ptas. pesa 25 gramos, y contiene 22'50 gs. de plata pura. ¿Cuál es la ley de dicha moneda?

162. La pieza de plata de a 2 ptas. pesa 10 gramos y contiene 1'650 gs. de liga. Hállese la ley de la aleación.

163. La pieza de oro de a 100 ptas. pesa 32'25806 gramos, de los que 3'225806 son de cobre. ¿A qué ley se acuña la moneda de referencia?

164. Las monedas de oro de a 50 ptas. pesan 16'12903 gramos cada una, y su ley es 900 milésimas. ¿Qué cantidad de oro puro contiene cada una?

165. ¿Qué cantidad de metal puro contienen 14 piezas de a 1 pta. cada una?

166. Calcúlese la cantidad de metal puro contenido en 45 piezas de oro de a 10 pesetas cada una.

167. Una moneda de oro de a 20 ptas. a la ley de 900 milésimas contiene 5'806449 gramos de metal puro. ¿Qué peso tiene?

168. Averígüese el peso de una moneda de oro de a 100 ptas., sabiendo que contiene 29'032254 gs. de metal fino.

169. ¿Qué valor representa un lingote de plata a la ley de 900 milésimas, que pesa 6 Kg., 125 gs.?

170. ¿Qué valor tendría el lingote del problema anterior, si fuese de oro y a la misma ley?

171. ¿Cuánto pesan 124,500 ptas. en oro?

172. ¿Qué valor representa un lingote de oro a la ley de 900 milésimas, cuyo peso es 4 Kg., 38 gs.?

173. ¿Cuántos gramos de cobre deberán añadirse a 450 gramos de plata pura, para obtener plata a la ley de 900 milésimas, esto es, a la ley de las monedas de a 5 ptas.?

174. ¿Cuántos gramos de cobre deberán añadirse a 450 gramos de plata pura, para obtener una aleación a la ley de las monedas de plata divisionarias, esto es, de 2 pesetas, de 1 pta., de 0'50 y de 0'20 ptas.

175. ¿Qué cantidad de plata pura se necesitaría para hacer 480 piezas de a 5 ptas.?

176. Determínese la plata pura necesaria para acuñar 4,000 piezas de a 1 peseta.

177. Cierto individuo entrega a la *Casa de Moneda* de Madrid un lingote de oro puro cuyo peso es 4 Kg., 20 gs., para que le acuñen monedas de oro de a 20 pesetas cada una. ¿Cuántas de estas monedas le entregarán?

178. Se han fundido 25 $^{3}/_{5}$ gramos de oro puro y 5 $^{3}/_{4}$ gramos de cobre. ¿A qué ley resulta la aleación?

179. La *Casa de Moneda* de Madrid ha acuñado, en 1 año, por 4.562,000 pesetas en oro y 3.875,400 ptas. en plata. ¿Cuántos quintales m. pesan las monedas acuñadas?

180. ¿Qué cantidad de cobre se necesita para acuñar 280,000 pesetas en monedas de a 5 pesetas?

181. ¿Cuántas monedas de oro de a 50 ptas. una podrían obtenerse con 46 hectogramos, 32 gs. de oro a la ley de 0'930, y qué cantidad de cobre se debería añadir?

182. ¿Qué peso tendrán las monedas de plata equivalentes a 456,000 pesetas en bronce?

183. Calcúlese el peso que tendrían las monedas de oro equivalentes a 2.430,500 pesetas en bronce.

184. ¿Cuál es el valor de un lingote de oro a la ley de las monedas de este metal, habiendo entrado en él 25 gramos de cobre?

185. Con 2 $^{1}/_{2}$ Kgs. de plata pura, ¿qué número de monedas de a 5 ptas. una podrán obtenerse? ¿Y si las monedas fuesen de a 0'50 ptas. una?

186. Un vaso de plata pesa 460 gramos, y contiene 58 gramos de cobre. Hállese la ley de la aleación y el valor que tiene su metal puro.

187. Un vaso de plata pesa 460 gramos, y su capacidad es 45 centilitros. ¿Qué valor, en monedas de cobre, se necesitará para ponerlo en equilibrio, luego que esté lleno de agua pura?

188. Se han fundido, a la vez, 1 pieza de a 5 ptas., 2 de a 1 pta., 1 de a 2 pesetas y 1 de a 0'50 ptas. ¿A qué ley resulta el lingote obtenido?

189. ¿Qué peso debería darse a la pieza de a 2 ptas. para que su valor intrínseco fuese igual a su valor nominal?

190. Cierto capitalista posee un lingote de plata pura cuyo peso es 4,875 gramos, y desea reducirlo a la ley de 900 milésimas, fundiéndolo con monedas de plata de a 1 peseta. ¿Cuántas de estas monedas debe fundir con el lingote mencionado?

Ejercicios y problemas sobre los quebrados comunes

I

1. Escríbanse diez quebrados que cada uno de ellos sea menor que una unidad.

2. Idem otros diez que cada uno de ellos sea mayor que una unidad.

3. Idem otros diez que cada uno de ellos sea igual a una unidad.

4. Escríbanse doce quebrados propios.

5. Idem doce quebrados impropios.

6. Idem diez números mixtos, y poner en forma de quebrado los números 6, 7, 8, 15, 12, 45, 126 y 450.

7. Transformar el número 7 en quebrado equivalente cuyo denominador sea 9.

8. Idem el número 5 en quebrado equivalente cuyo denominador sea 6.

9. Hágase lo mismo con los números 4, 3, 9, 14 y 25 cuyo denominador sea 26.

10. Redúzcanse a quebrados los números mixtos siguientes: 2 $^{5}/_{6}$, 4 $^{3}/_{4}$, 7 $^{1}/_{2}$, 24 $^{2}/_{9}$, 40 $^{7}/_{12}$ y 120 $^{1}/_{100}$.

11. Hágase lo propio con los siguientes: 4 $^{1}/_{12}$, 120 $^{36}/_{436}$, 7,204 $^{2}/_{1000}$ y 12,900 $^{18}/_{124}$.

12. De los quebrados $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$, $^{6}/_{4}$, $^{15}/_{4}$, ¿cuál es el mayor?

13. Dígase cuál es el mayor de los quebrados siguientes: $^{14}/_{8}$, $^{7}/_{8}$, $^{1}/_{8}$, $^{120}/_{8}$.

14. Idem cuál es el mayor de los siguientes: $^{8}/_{1}$, $^{8}/_{14}$, $^{8}/_{6}$, $^{8}/_{120}$, $^{8}/_{3}$.

15. Idem cuál es el mayor de los siguientes: $^{9}/_{128}$, $^{9}/_{3}$, $^{9}/_{8}$, $^{9}/_{35}$, $^{9}/_{2}$.

16. Transfórmense en fracción decimal equivalente los quebrados siguientes: $^{1}/_{2}$, $^{3}/_{5}$, $^{2}/_{9}$, $^{5}/_{6}$, $^{7}/_{15}$, $^{26}/_{140}$.

17. Idem los siguientes: $^{6}/_{10}$, $^{7}/_{100}$, $^{480}/_{100}$, $^{1846}/_{1000}$, $^{17}/_{40}$, $^{9}/_{1000}$, $^{462}/_{10000}$, $^{98}/_{436}$, $^{18}/_{9764}$.

18. Idem los siguientes: $^{6}/_{25}$, $^{1}/_{15}$, $^{7}/_{23}$, $^{128}/_{275}$, $^{9}/_{21}$, $^{39}/_{1000}$, $^{65}/_{10}$, $^{453}/_{10}$, $^{9843}/_{1000}$, $^{7}/_{100}$, $^{28}/_{10000}$, $^{3}/_{7}$, $^{8}/_{15}$.

19. Idem los siguientes a entero y fracción: $^{6}/_{3}$, $^{34}/_{9}$, $^{145}/_{3}$, $^{9}/_{2}$, $^{446}/_{8}$, $^{150}/_{5}$, $^{7848}/_{12}$, $^{7820}/_{4}$.

20. Redúzcanse a un común denominador los quebrados siguientes: $^{2}/_{5}$ y $^{1}/_{2}$: $^{3}/_{5}$, $^{2}/_{8}$ y $^{5}/_{9}$.

21. Idem los siguientes: $^{3}/_{8}$, $^{5}/_{6}$, $^{1}/_{9}$ y $^{4}/_{7}$.

22. Idem los siguientes: $^{3}/_{10}$, $^{1}/_{2}$, $^{5}/_{8}$, $^{24}/_{40}$.

23. De los quebrados $^{3}/_{9}$, $^{5}/_{6}$, $^{3}/_{12}$, ¿cuál es el mayor?
24. ¿Cuál es el mayor de los quebrados siguientes: $^{3}/_{9}$, $^{7}/_{24}$, $^{2}/_{8}$, $^{45}/_{128}$?
25. Simplifíquense los quebrados siguientes: $^{3}/_{12}$, $^{25}/_{175}$, $^{4}/_{8}$, $^{6}/_{9}$, $^{15}/_{750}$, $^{32}/_{6}$. $^{99}/_{36}$.
26. Idem los siguientes: $^{400}/_{200}$, $^{60}/_{50}$, $^{80}/_{20}$, $^{9000}/_{6000}$, $^{128}/_{6000}$, $^{3200}/_{800}$, $^{48}/_{36}$, $^{18}/_{6}$, $^{66}/_{11}$.

II

27. Súmense los siguientes quebrados: $^{3}/_{4}+^{5}/_{4}+^{1}/_{4}+^{7}/_{4}$.
28. Idem los siguientes: $^{3}/_{9}+^{1}/_{2}+^{2}/_{8}$.
29. Idem los siguientes: $^{4}/_{15}+^{6}/_{7}+^{28}/_{10}+^{34}/_{50}$.
30. Idem los siguientes: $3\ ^{1}/_{2}+^{5}/_{6}+4\ ^{1}/_{3}$.
31. Idem los siguientes: $8\ ^{3}/_{5}+12\ ^{3}/_{9}+^{5}/_{8}+6\ ^{2}/_{9}+^{2}/_{9}+8+5$.
32. Réstense los quebrados siguientes: $^{8}/_{9}-^{7}/_{9}$; $^{6}/_{12}-^{1}/_{12}$; $^{25}/_{37}-^{2}/_{37}$.
33. Idem los siguientes: $^{8}/_{9}-^{3}/_{5}$; $^{1}/_{2}-^{1}/_{8}$; $^{2}/_{3}-^{6}/_{15}$; $^{4}/_{7}-^{2}/_{9}$; $^{8}/_{30}-^{24}/_{116}$.
34. Idem los siguientes: $8\ ^{3}/_{4}-^{1}/_{2}$; $26\ ^{3}/_{5}-^{1}/_{5}$; $7\ ^{3}/_{8}-^{1}/_{2}$; $9\ ^{3}/_{4}-^{5}/_{6}$; $14\ ^{3}/_{9}-^{2}/_{5}$.
35. Idem los siguientes números mixtos: $4\ ^{3}/_{8}-2\ ^{1}/_{2}$; $20\ ^{5}/_{6}-2\ ^{1}/_{2}$.
36. Idem los siguientes: $7-^{2}/_{8}$; $28-^{2}/_{5}$; $12-5\ ^{1}/_{3}$; $38-2\ ^{7}/_{9}$.
37. Háganse las multiplicaciones siguientes: $^{3}/_{5}\times^{2}/_{8}$; $^{5}/_{6}\times^{2}/_{9}\times^{1}/_{2}$; $^{6}/_{9}\times^{1}/_{10}\times^{3}/_{4}$.
38. Idem las siguientes: $^{36}/_{29}\times^{1}/_{9}\times^{6}/_{36}\times^{4}/_{7}$; $^{3}/_{12}\times^{7}/_{8}\times^{2}/_{9}\times^{5}/_{7}\times^{24}/_{39}$.
39. Idem la siguiente: $6\ ^{3}/_{5}\times^{2}/_{9}\times4\ ^{3}/_{8}\times6\times7$.
40. Idem la siguiente: $7\ ^{3}/_{5}\times8\ ^{5}/_{6}\times9\ ^{3}/_{4}\times^{3}/_{8}\times^{1}/_{5}$.
41. Idem la siguiente: $6\times^{7}/_{8}\times5\times4\ ^{3}/_{5}\times^{5}/_{9}$.
42. Háganse las divisiones siguientes: $^{3}/_{5} : ^{5}/_{9}$; $^{2}/_{8} : ^{1}/_{3}$; $^{5}/_{9} : ^{3}/_{8}$; $^{4}/_{12} : ^{5}/_{6}$.
43. Idem las siguientes: $4\ ^{3}/_{8} : ^{5}/_{6}$; $6\ ^{3}/_{9} : ^{1}/_{2}$; $28\ ^{5}/_{7} : 4\ ^{3}/_{4}$; $9 : ^{3}/_{5}$; $380 : ^{1}/_{5}$; $^{6}/_{9} : 45$; $46\ ^{2}/_{5} : 2\ ^{3}/_{8}$; $^{3}/_{8} : 5\ ^{4}/_{7}$; $^{3}/_{7} : ^{1}/_{8}$; $4\ ^{3}/_{9} : 2\ ^{5}/_{7}$.

III

44. Tres amigos, Luis, Mariano y Enrique, reunieron las cantidades que sus familias les regalaron el día de Navidad: el 1.º recibió $^{6}/_{8}$ de pta.; el 2.º, $^{7}/_{8}$ de ídem, y $^{3}/_{8}$ el 3.º — ¿Cuánto sumaban los tres juntos?

45. Un cosechero de vinos vendió $^{2}/_{5}$ de Hl. a uno; $^{1}/_{5}$ de Hl. a otro; igual cantidad a un tercero, y $^{3}/_{5}$ de Hl. a una 4.ª persona. ¿Qué cantidad de vino vendió?

46. El que comprase $^{3}/_{8}$ de metro, $^{5}/_{6}$ de ídem, $^{3}/_{4}$ de ídem y $^{6}/_{14}$ de ídem, ¿cuánto tendría reuniendo las 4 cantidades mencionadas?

47. Los gastos diarios de un caballero son como sigue: para el almuerzo, $^{1}/_{8}$ de duro; para la comida, $^{3}/_{7}$ de ídem; para la cena, $^{5}/_{9}$ de ídem; para café, $^{3}/_{10}$ de ídem, y $^{2}/_{14}$ para otros gastillos. — ¿Cuánto gasta diariamente?

48. Para el traje de un colegial, se han necesitado las siguientes cantidades de paño azul: para el pantalón, $^{7}/_{9}$ de metro; para la americana, $^{19}/_{20}$ de ídem; para el chaleco, $^{1}/_{3}$ de ídem; y $3\ ^{3}/_{4}$ de ídem para abrigo y gorra.—¿Qué cantidad de paño se ha empleado?

49. Un agricultor vendió: $6\ ^{3}/_{8}$ hectolitros de trigo candeal; $3\ ^{3}/_{9}$ ídem de trigo chamorro; $20\ ^{2}/_{7}$ ídem más de la 1.ª clase y $^{60}/_{95}$ ídem ídem de la 2.ª — ¿Cuántos hectolitros vendió?

50. Un vendedor de telas, durante los 8 días de ferias de 1890 de la inmortal Gerona, vendió: el primer día, 32 m. y $^{3}/_{4}$; el 2.º, 63 m.; el 3.º, 15 m. y $^{3}/_{18}$; el 4.º, 128 m.; el 5.º, $^{24}/_{48}$ m.; el 6.º, 15 y $^{1}/_{2}$ ídem; el 7.º, 33 m. y $^{7}/_{8}$, y 27 ídem el día último.—¿Cuántos metros vendió en todo?

51. Un comerciante ha vendido una pieza de pana a cuatro personas: la 1.ª ha tomado 20 y $^{3}/_{9}$ metros; la 2.ª, 35 metros; la 3.ª, 12 y $^{1}/_{15}$ metros, y la 4.ª, 14 metros.—¿Qué longitud tenía la pieza?

52. Para la construcción de un entoldado de forma circular, se han necesitado 450 m. y $^{3}/_{5}$ de ídem de tela blanca de 1'25 m. de ancho; 150 m. ídem de color amarillo, de 1'50 metros ídem; otros tantos y $^{36}/_{45}$ ídem de ídem color rojo de la misma anchura, y 200 $^{7}/_{8}$ ídem ídem de color azul, de 1'60 metros de ancho. — ¿Cuántos metros de tela se han necesitado?

53. Dos poblaciones, A. y F., están unidas por un ferrocarril que tiene 4 estaciones intermedias: B., C., D. y E. Desde el pueblo A. al pueblo B., median $14\ ^{3}/_{9}$ kilómetros; desde el B. al C., 26 ídem; desde el pueblo C. al D., $12\ ^{24}/_{55}$ ídem; D. dista de E. tanto como B. dista de A., y E. se halla de F. a igual distancia que C. de B. — Determínese la longitud de la mencionada vía férrea.

54. Un comisionista compró $36\ ^{3}/_{8}$ quintales m. de alfalfa, por $82\ ^{1}/_{2}$ ptas.; $160\ ^{34}/_{65}$ ídem ídem por $960\ ^{3}/_{4}$ ptas., y 8 ídem por $56\ ^{9}/_{12}$ ídem. — ¿Qué cantidad de alfalfa compró y cuál fué la cantidad empleada?

55. Un fabricante de aguardientes compró 6 kgs. de anís por $18\ ^{5}/_{6}$ ptas.; 12 ídem por $37\ ^{3}/_{9}$ ídem, y $45\ ^{20}/_{35}$ ídem por $146\ ^{3}/_{4}$ ídem.—Determínese el anís comprado y la cantidad gastada.

IV

56. Tenía $^6/_8$ de tonelada métrica, de estaño, y vendí $^5/_8$ de tonelada.—¿Qué cantidad de estaño me quedó?

57. Tenía $^{36}/_{45}$ quintales m. de plomo y $^7/_9$ de Hl. de vino, y entregué $^{28}/_{45}$ quintales ídem del plomo mencionado y los $^2/_9$ del vino antedicho. — ¿Qué me quedó?

58. Un señor muy económico compró $^7/_{12}$ de m. de terciopelo para que el sastre le confeccionara un chaleco, y para lo que, únicamente, necesitó el industrial $^3/_9$ de m.—¿Qué cantidad de terciopelo le devolvió el sastre?

59. Un tejedor debía hacer los $^7/_8$ de un trabajo, y únicamente hizo los $^3/_4$.—¿Qué parte del citado trabajo quedó para hacer?

60. Un antojadizo bebedor había consumido los $^5/_8$ de 1 litro de vino, y en cinco minutos bebió hasta los $^{23}/_{25}$ del mencionado litro. — ¿Qué cantidad de vino consumió en el referido tiempo?

61. El que tuviese $^{75}/_{90}$ de peseta y desease reunir $^8/_9$ de ídem, ¿cuánto le faltaría?

62. ¿Con qué número debe sumarse el quebrado $^1/_5$ para obtener la suma $^{11}/_{12}$?

63. De un atún que pesaba 52 $^3/_4$ kilos, se vendieron 34 $^1/_2$ kilos. Dígase el peso de la parte que quedó.

64. Una joya de plata y oro pesa 3 hectogramos. — ¿Qué cantidad de plata hay, pesando $^7/_{12}$ de hectogramo el oro en ella empleado?

65. Un fundidor gana 36 $^7/_8$ pesetas cada semana, y gasta 29 $^5/_{12}$ ídem ídem.—¿Cuánto economiza por semana?

66. Recibí de un deudor 124 $^3/_4$ pesetas a cuenta de las 350 $^1/_8$ que debía.—¿Cuánto me debe aún?

67. De una pieza de paño cuyo tiro es 45 $^7/_9$ metros, se han cortado 32 metros, y de otra de percal que mide 60 m., se han vendido 40 $^3/_{12}$ m. — ¿Cuánto ha quedado en cada pieza?

68. Un panadero tenía 42 $^3/_5$ Hl. de trigo del Danubio, y compró 60 $^4/_7$ ídem de igual clase: mas al día siguiente cedió, al mismo precio, 18 $^{11}/_{12}$ Hl. a un amigo.—¿Qué cantidad de trigo le quedó?

69. De un depósito cuyo contenido es 4,536 litros de agua, se han sacado 1,090 $^3/_7$ litros y se van a sacar 976 $^1/_2$ litros. — ¿Qué cantidad de agua quedará en él?

70. La compra de una partida de corcho de Andalucía importó 950 $^7/_9$ pesetas; los gastos de transporte ascendieron a 175 $^1/_5$ pesetas, y 20 $^3/_4$ pesetas el desembarque y conducción al almacén. La reventa de dicho género se hizo en dos ocasiones distintas, cobrando el vendedor, la vez primera, 846 $^{75}/_{40}$ pesetas, y 530 $^3/_8$ pesetas, después.—¿Cuánto ganó el comerciante que realizó la operación?

V

71. ¿En $^7/_8$ de duro, cuántas pesetas hay?

72. ¿Cuántos litros componen $^{15}/_{17}$ de Dl.?

73. ¿Cuántos Kgs. componen $^{25}/_{40}$ de ton. mét.?

74. ¿Cuánto cobraré por la venta de $^3/_4$ de quintal m. de un género, a $^2/_5$ de peseta el quintal métrico?

75. Juan tenía $^3/_4$ de Hl. de aceite, y dió los $^5/_6$ a su amigo Joaquín. — ¿Cuánto aceite recibió?

76. ¿Qué peso representan los $^7/_{12}$ de $^5/_8$ de quintal m.?

77. En un depósito hay $^2/_3$ de Hl. de aguardiente superior, y se han vendido los $^4/_7$ del líquido contenido. — ¿Qué cantidad de aguardiente se ha vendido?

78. ¿Qué valor tendrían $^{15}/_{26}$ de Hl. a $^1/_8$ de peseta el Hl.?

79. Determínese el valor de $^8/_9$ de Dm. a $^1/_4$ de peseta el Dm.

80. ¿Cuánto deberé abonar por la adquisición de $^9/_{16}$ litro de vino tinto, a $^3/_4$ de peseta el litro?

81. La venta de 7 $^5/_9$ Hl. de garbanzos a 18 $^3/_4$ pesetas el Hl., ¿cuánto importará?

82. Un fondista ha comprado 9 kilogramos de carne de ternera, a 1 $^1/_2$ pesetas el kilogramo, y 6 $^3/_5$ ídem de cordero a 2 ídem ídem. — ¿Cuánto ha gastado?

83. El que vendiese los $^3/_4$ de los $^8/_9$ de 1 Dl. de vino a $^9/_{12}$ pesetas el Dl., ¿cuánto cobraría?

84. De un cerdo que pesaba 106 $^1/_2$ kilos, se vendieron los $^5/_6$ a 1 $^3/_4$ pesetas el kilo, y el sobrante, a 1 $^7/_8$ pesetas el ídem. — Hállese su valor.

85. Pagando el Kg. de cacao a 5 $^3/_4$ pesetas y el Kg. de café a 2 $^3/_5$ pesetas, ¿cuál será el valor total de 8 Kgs. de cacao y 4 $^3/_7$ Kgs. de café?

86. Un impresor gana 4 $^1/_2$ pesetas de jornal, de las que gasta diariamente los $^4/_7$, ahorrando lo demás. — ¿Cuánto gasta y cuánto ahorra cada semana, suponiendo que el domingo no trabaja?

87. Por los $^5/_8$ de un trabajo, un obrero recibió 60 pesetas.—¿Cuánto hubiera cobrado si hubiese hecho todo el trabajo?

88. Un tejedor se comprometió a hacer una pieza de lanilla cuyo tiro debía ser 60 metros; mas al haber tejido los $^7/_9$, negóse al cumplimiento de lo convenido, recibiendo 80 pesetas. — ¿Cuánto hubiera cobrado concluyendo dicho trabajo?

89. Si 1 quintal m. de una mercadería vale $^1/_8$ de peseta, ¿cuál será el valor de los $^3/_5$ de 4 $^3/_{12}$ quintales m.?

90. Al verificarse la liquidación de una tienda de comestibles, una señora compró 3 $^7/_8$ kg. de tocino a 2 $^8/_9$ pesetas el kilo; 6 ídem manteca a 3 $^2/_3$ ídem ídem; 4 kgs. de longanizas, a 6 $^3/_7$ ídem ídem, y 2 $^5/_{12}$ kgs. de embutidos a 5 pesetas ídem.—¿Cuánto gastó?

VI

91. Se han comprado $^3/_8$ de Hg. de azafrán por $^7/_9$ de peseta.—¿A cuánto resulta el Hg.?

92. Cinco niños han de repartirse $^{11}/_{12}$ de peseta.—¿Cuánto corresponderá a cada uno?

93. Tres niños y dos niñas han de repartirse, en partes iguales, $^8/_9$ de peseta que han recibido en premio de su aplicación. — ¿Qué parte corresponderá a cada uno?

94. La compra de $^3/_4$ de kg. de cierto género importó $^9/_{11}$ de peseta.—¿Cuál es, según esto, el precio de 1 kg.?

95. Por la venta de $^3/_9$ de litro de cierto elíxir, se han cobrado $^5/_7$ de peseta. —¿A cuánto resulta el litro?

96. Habiendo satisfecho 26 $^3/_4$ pesetas por 12 kgs. de turrón, ¿a cuánto resulta el kilo?

97. Si 1 dm. de paño vale $^1/_4$ de peseta, ¿cuántos dms. se comprarán con $^{25}/_{26}$ de peseta?

98. Siendo $^2/_{26}$ de peseta el precio de 1 gramo de anilina, ¿qué cantidad de anilina se podrá adquirir con $^7/_8$ de peseta?

99. Pagando $^{45}/_{63}$ de peseta por $^6/_{13}$ de metro de cinta ancha, novedad, ¿cuál es el precio de 1 metro?

100. Deseando emplear 740 pesetas en vino de Alella de a $^3/_4$ de peseta el litro, ¿cuántos litros se adquirirán?

101. Un vendedor de huevos cobró 728 pesetas, por cierta partida que había realizado a $^3/_5$ de peseta la docena. ¿Cuántos huevos había vendido?

102. Un obrero puede hacer cierto trabajo en 2 días, y otro puede hacerlo en 3 días. ¿Qué tiempo necesitarán los dos obreros trabajando juntos?

103. Un obrero hace cierto trabajo en 3 días, y otro, en 4 días. ¿Qué fracción de dicho trabajo harán juntos en $^3/_5$ de día?

104. Cierto empresario se comprometió a construir la carretera que debía unir dos pueblos de importancia, por 24,500 pesetas; mas dicho contrato quedó sin efecto, mediante convenio, al haber construído los $^5/_9$ de la mencionada carretera. ¿Cuánto debió recibir el empresario?

105. Para hacer un trabajo, se prometen a un obrero 64 $^3/_8$ pesetas; mas si dicho obrero hace solamente los $^7/_{12}$ del mencionado trabajo, ¿cuánto debe recibir?

106. Dos albañiles tomaron a destajo, y en partes iguales, la construcción de una pared por 644 $^3/_4$ pesetas, y al haber construído los $^7/_9$ de la misma, cobraron lo que les correspondía. ¿Cuánto recibió cada uno?

107. En 12 días, cierto andarín recorrió un trayecto de 2,024 $^5/_6$ kilómetros, recorriendo igual distancia cada día. ¿Cuál fué la distancia recorrida en 7 días?

108. Un quinqué, en 14 horas y $^1/_2$ consume $^8/_9$ de litro de petróleo, y otro, en 9 horas, consume $^5/_6$ de litro de ídem. ¿Cuál de los dos es más económico?

109. Una espita llena cierto depósito en 9 horas, y un orificio lo vacía en 12 horas. Manando a la vez la espita y el orificio, ¿en cuánto tiempo se llenará el mencionado depósito?

110. Un molino da 640 litros de harina en 9 horas, y otro, 830 litros en 6 horas. ¿En cuánto tiempo darán ambos 2 Hl. de harina?

111. Se vendería una pieza de paño en 156 ptas., si midiese $^1/_5$ más de la longitud que tiene. Siendo 6'50 ptas. el precio de 1 metro, hállese la longitud de la pieza.

Problemas de recapitulación

1. La diferencia entre dos números es 482, y el menor de los dos números es 215. ¿Cuál es el mayor?

2. Hállese un número que, si se le disminuye en 150, quede 2,340. ¿Cuál es este número?

3. ¿Cuál es el número que excede al 2,486 en 3 unidades, 6 centenas y 7 decenas?

4. En la venta de 302 quintales m. de azúcar, que habían costado 9,060 ptas., se han ganado 220 ptas. ¿Por cuánto deberá venderlos el comprador para ganar otro tanto?

5. Se han empapelado 5 habitaciones: para la 1.ª, se han necesitado 400 metros de papel de 0'90 m. de ancho; para la 2.ª, tantos como para la 5.ª y la 4.ª; para la 3.ª, tantos como para la 2.ª menos 52; para la 4.ª, tantos como para la 5.ª menos 45, y 600 metros para la 5.ª ¿Cuántos metros de papel se han necesitado para la 2.ª, 3.ª y 4.ª habitaciones, y cuántos entre todas?

6. En 1880, hacía 430 años que el alemán Gutenberg, imprimió, en Maguncia, el primer libro. ¿Cuántos años hace, actualmente, que la imprenta fué inventada?

7. Si me diesen 120 pesetas, podría pagar 100 pesetas que debo, y aun me sobrarían 65'50 pesetas. ¿Cuánto tengo?

8. Un piano fué vendido por 3,500 pesetas, y si el vendedor lo hubiese comprado 615 ptas. más barato, hubiera ganado en la reventa 960 ptas. ¿Qué beneficio ha realizado y en cuánto lo compró?

9. Si se hubiese vendido en 400 pesetas más una casa que costaba 20,000 pesetas, se hubieran ganado 920 pesetas. ¿Por cuánto se vendió?

10. Tres hermanos han heredado, a la muerte de su padre, 45,200 pesetas, de las que corresponden 9,000 al mayor y 14,000 al segundo. ¿Cuánto ha correspondido al tercero más que al mayor?

11. Si una persona tuviese 500 pesetas más que las que posee, podría pagar sus deudas, que ascienden a 4,520 pesetas, y aun le sobrarían 42 pesetas. ¿Cuántas pesetas tiene?

12. ¿Cuántas leguas mide el ecuador terrestre, teniendo cada grado 20 leguas?

13. Si el Sol es 1.384,500 veces mayor que la Tierra, y la Luna, 50 veces menor que la Tierra, ¿cuántas veces el Sol es mayor que la Luna?

14. Un sujeto se casó a los 27 años y murió en 1890, después de 32 años de matrimonio. ¿En qué año había nacido?

15. Veinte obreros, trabajando 12 horas diarias, han hecho un trabajo en 15 días. ¿Cuántos días, de igual número de horas, deberá emplear un obrero para hacer el mismo trabajo?

16. Un padre tiene 4 hijos y 3 hijas: da a cada hijo 52,000 pesetas; a cada hija 2,000 pesetas más que a cada hijo, y aun le sobran 68,000 pesetas. ¿Cuál es la fortuna del padre?

17. Una locomotora hace 40 km. por hora; otra sale 4 horas después de haberse puesto en marcha la primera, y recorre, por hora, igual distancia que la primera. Al cabo de 9 horas de puesta en movimiento la primera locomotora, ¿qué ventaja a la segunda llevará?

18. Repártanse 5,600 pesetas entre dos personas, de modo que la 1.ª reciba tantas monedas de a 5 pesetas como la otra de a 2. ¿Cuántas pesetas recibirá cada una?

19. Se han pagado 1,800 pesetas a unos obreros por 30 días de trabajo, a razón de 5 pesetas diarias cada obrero. ¿Cuántos eran los obreros?

20. Un empresario tiene 100 trabajadores, y les da 1,800 pesetas por cada 12 días de trabajo. ¿Cuánto gana, diariamente, cada obrero?

21. Tres fuentes han manado: la 1.ª, 120 Hl. de agua en 9 horas; la 2.ª, 3,250 litros en 8 horas, 40 minutos, y la 3.ª, 538 Dl. en 7 horas, 59 minutos. ¿Cuál es la más abundante y por qué?

22. Se han cambiado 40 metros de tela de a 4 pesetas uno, por paño de a 20 pesetas el metro. ¿Cuántos metros de paño se habrán recibido?

23. Dos operarios trabajan en un mismo taller, y el dueño de éste les da 95 pesetas por 10 jornales del 1.º, y 15 del 2.º, y otra vez, les da 65 pesetas por 10 jornales del 1.º y 5 del 2.º ¿Cuánto gana diariamente cada obrero?

24. Uno quiere hacer encuadernar 600 tomos: un obrero puede concluirlos en 10 días; otro, en 12 días, y un tercero se compromete a hacer lo mismo en 15 días. Trabajando juntos los 3 encuadernadores, ¿cuántos días necesitarán para encuadernar los referidos 600 tomos, y cuántos encuadernará cada uno?

25. Se han asociado 3 amigos para explotar un negocio. La suma de las cantidades con que intervienen el 1.º y el 2.º es 8,450 pesetas; las sumas de las cantidades del 1.º y del 3.º es 9,240 pesetas, y la suma de las partes del 2.º y del 3.º es 9,590 pesetas. ¿Con qué cantidad interviene cada uno en el negocio?

26. Distribúyanse 3 billetes de Banco de a 500 pesetas y 2 de a 50 ptas. entre 2 personas, de modo que la 1.ª tenga 400 ptas. más que la 2.ª

27. Repártanse 14,000 ptas. entre tres personas, de modo que la 1.ª tenga 100 ptas. más que la 2.ª, y ésta, 50 más que la 3.ª

28. Cuatro amigos han de repartirse 4,550 ptas., de modo que el 1.º tenga 200 más que el 2.º; el 2.º, 100 más que el 3.º y éste, 50 más que el 4.º ¿Cuánto recibirá cada uno?

29. He comprado 4 kilos de cacao y 6 kilos de café por 62 pesetas, y compro, de nuevo, 1 kilo del mismo cacao y 5 kilos del mismo café por 40 ptas. Hállese el precio de 1 kilo de cacao y el de 1 kilo de café.

30. Se han comprado 3 piezas de tela por 366 pesetas, a razón de 3 pesetas el metro: la 1.ª pieza tiene 30 metros, y la 2.ª, 50. ¿Cuánto tira la pieza tercera?

31. Un joven inexperto heredó 42,000 ptas., y cada año gasta 4,000 ptas. más de lo que su renta le permite. — ¿Dentro de cuántos años le quedarán solamente 6,000 pesetas del capital que heredó?

32. Dos amigos trabajaban en un mismo taller: por 7 jornales del 1.º y 5 del 2.º, cobraron 43 pesetas, y por 1 jornal del 1.º y 12 del 2.º, cobraron otra vez 40 pesetas. ¿Qué jornal ganaba uno y otro?

33. Dos andarines se dirigen el uno hacia el otro y la distancia que los separa es 368 kilómetros: el 1.º hace 14 kilómetros por hora, y el 2.º, 9 kilómetros. ¿Cuántas horas tardarán en encontrarse y a qué distancia, respectivamente, de los puntos de partida?

34. Dos correos andan en una misma dirección, y la distancia que los separa es 60 kilómetros: el 1.º hace 13 Km. por hora, y el 2.º, 16 Km. Dígase las horas que tardarán en encontrarse y a qué distancia de los puntos de partida.

35. Dos correos se dirigen el uno hacia el otro y la distancia que los separa es 654 kilómetros: el 1.º parte a las 8 de la mañana, y hace 18 Km. por hora; el 2.º parte 3 horas más tarde, y hace, por hora, 12 Km. ¿Cuántas horas tardarán en encontrarse y a qué distancia de los puntos de partida respectivamente?

36. Dos andarines se mueven en una misma dirección, y la distancia que los separa es 136 kilómetros: el 1.º sale a las 6 de la mañana, y hace 10 Km. por hora; el 2.º hace por hora 18 Km., y sale a las 10. ¿Cuántas horas transcurrirán hasta verificarse el encuentro, y a qué distancia de los puntos de partida se verificará?

37. Un panadero, en 1 día de 8 horas de trabajo, hace 500 panecillos, cada 10 de los cuales pesan 1 kilo. Según esto, ¿cuántos panaderos, igualmente diestros, serían necesarios para hacer, en 4 días, trabajando diariamente las mismas horas, un número tal de los indicados panecillos cuyo peso fuese 2,600 kilos?

38. Se han comprado un reloj, una leontina y una sortija por 4,000 ptas.: el valor de la sortija, que es 1,200 ptas., más el de la leontina, valen tanto como el reloj. Dígase el valor del reloj y el de la leontina.

39. Un reloj que adelanta 20 minutos cada 4 horas, se arregla con el de la población a las doce del día. ¿Qué hora señalará al día siguiente a las 8 de la mañana?

40. Un almacenista de corchos necesita 9,200 pesetas: ¿cuántos quintales métricos de corcho debe vender, de a 25 ptas. uno, para tener dicha cantidad y sobrarle 800 ptas.?

41. Un cuerpo de ejército consta de 6 batallones de 450 plazas cada uno. Por cada 2 soldados que sepan leer y escribir, hay 3 que sólo saben leer y 5 que no saben leer ni escribir. ¿Cuántos soldados hay que sólo saben leer; cuántos, leer y escribir, y cuántos, que no saben ni leer ni escribir?

42. ¿Qué número dividirá al 209,143, dando 615 de cociente y 43 de residuo?

43. Por cierto número de días de trabajo, un obrero ganó 104 pesetas, y si hubiese trabajado 12 días más, hubiera entonces cobrado 152 pesetas. ¿Cuánto ganaba cada día?

44. Cierto comerciante ha pagado 4,895 ptas. en monedas de a 5 ptas., de a 2'50 pesetas, de a 2 ptas., de a 1 pta. y de a 0'50 ptas., entregando igual número de monedas de cada clase. ¿Cuántas monedas de cada clase recibió el cobrador?

45. Trabajaban juntos dos albañiles, y al cabo de cierto número de días, el primero cobró 90 pesetas, y el segundo, 60. ¿Cuánto ganaba, diariamente, cada uno, sabiendo que el primero cobraba por día 2 pesetas más que el segundo?

46. Hay que empapelar las cuatro paredes de un salón cuyas dimensiones son: largo, 8 m., 45 cm.; ancho, 7 m., 2 dm., 9 cm., y alto, 4 m., 5 cm., empleando papel de 1'25 m. de ancho y que se vende a 0'65 ptas. el m. Habiendo en dicho salón dos puertas de 2'40 m. de alto y 1'05 m. de ancho, una ventana cuyas dimensiones son la $^1/_2$ de las de una puerta, y un friso al óleo de 0'75 m. de altura, ¿cuánto tendré que desembolsar por esta operación, si a la compra del papel debo añadir el pago de tres hombres a 2 $^1/_2$ jornales cada uno, ganando 4'50 pesetas por jornal?

47. Un vaso lleno de agua contiene 1 kg. de sal en disolución. Se derrama $^1/_5$ del contenido, y se llena de agua; se derrama $^1/_3$ del contenido, y se vuelve a llenar de agua; por último, se derrama la $^1/_2$ del contenido. Después de estas tres operaciones, ¿qué cantidad de sal queda disuelta en el vaso?

48. Un propietario dió a destajo la labranza de un viñedo de 6 Ha., 14 a. y 7 ca., pagando, por este trabajo, 773'50 pesetas. El destajista hizo su trabajo en 2 meses y 9 días, durante cuyo tiempo no hubo otras fiestas que las del domingo, y desea saber cuántos m.² vino a labrar diariamente, qué jornal sacó y cuánto recibió por cada medio Dm. en cuadro.

49. Tres espitas llenan un depósito cuyas dimensiones son : 4'50 m. de alto, 2'75 m. de ancho y 3'5 m. de largo. La 1.ª lo llena en 2'50 horas; la 2.ª, en 3'25 horas y la 3.ª, en 1 hora, 45 minutos, 30 segundos. Manando juntas las tres, ¿cuánto tiempo necesitarán para llenar el depósito; y si el agua en él contenida se congela, aumentando 75 milésimas de su volumen, qué valor tendrá el hielo que resulte, vendido a 0'15 pesetas el medio dm. en cubo?

50. Se compró una pieza de tela a razón de 20 $^1/_2$ ptas. cada 9 metros, y luego fué vendida a razón de 35 $^1/_4$ ptas. cada 12 metros. Se ganaron en la reventa 237 $^1/_2$ ptas. ¿Qué longitud tenía dicha pieza?

51. El dueño de una cristalería ha comprado 500 vasos a 3'75 ptas. la docena y 50 docenas de copas a 30 ptas. el ciento. ¿A qué precio deberá vender la docena de cada clase de piezas, hallando un deterioro de 40 vasos y 25 copas, y deseando ganar 35 ptas. en la venta de los vasos y 28 ptas. en la de las copas?

52. El decalitro de trigo pesa, aproximadamente, 7'50 Kgs., y el trigo se vende a 24'50 pesetas el Hl. Esto supuesto, calcúlese el valor del quintal m. de harina, sabiendo que 100 Kgs. de trigo dan 73'50 Kgs. de harina.

53. Si 1 caballo consume, diariamente, 15 Kg. de heno, otros tantos de paja y 10 litros de avena, ¿cuál será el gasto anual de 4 caballos, pagando el heno a 5'20 pesetas los 100 Kgs., la paja a 2'50 ptas. el quintal m., y la avena a 9 ptas. el Hl.?

54. Se han de confeccionar 1,920 pares de botas con destino a los soldados que componen un cuerpo de ejército. Un empresario se compromete a proporcionar el calzado en 32 días; otro, en 96 días, y otro, en 48 días. El general decide que los tres empresarios trabajen a un tiempo. ¿Cuántos días necesitarán para concluir el trabajo, y cuántos pares entregará cada empresario?

55. Tres espitas llenan un depósito: la 1.ª, en 30 minutos; la 2.ª, en 60 minutos, y la 3.ª, en 90 minutos. Manando las tres a la vez, ¿cuánto tiempo necesitarán para llenar el depósito?

56. Un librero ha comprado una partida de cartapacios. Si los vende a 3 ptas. el 100, ganará 24 ptas.; pero si los vende a 2'40 ptas. el 100, sólo ganará 9'60 ptas. Se pregunta cuántos cartapacios ha comprado y a cuánto ha pagado el centenar.

57. Un acaudalado cosechero tenía 5,680 Hl. de vino, de los que vendió una partida por 33,000 ptas. Calcúlese el número de Hl. que le quedaron por vender, sabiendo que le pagaron el litro de vino a 0'40 ptas.

58. Una máquina de vapor que funciona noche y día ha consumido, en 50 días de trabajo, 436,500 Kgs. de carbón. Un perfeccionamiento llevado a cabo en su construcción permite, obteniendo la misma fuerza, no consumir más que 2,530 Kgs. de carbón cada 40 horas. Calcúlese la economía anual que se obtendrá, suponiendo que el carbón se paga a 4'25 ptas. el quintal métrico y que dicha máquina funciona 340 días cada año.

59. Una caja llena de monedas de 5 y de 10 céntimos pesa 3 quintales métricos 40'75 Kgs. Siendo 20'50 Kgs. el peso de la caja, ¿cuántas pesetas componen las monedas contenidas?

60. Varios cubiertos de plata, a la ley de 900 milésimas, pesan 6 Kgs., 45 gs. ¿Cuál es el valor, en duros, de la plata pura que contienen?

61. Una compañía de alumbrado por gas tiene 12,400 abonados, cada uno de los cuales consume, mensualmente, por término medio, 40 metros cúbicos de flúido, que paga a 0'375 ptas. el metro cúb. Se sabe que 1 Kg. de hulla da 290 litros de gas. Qué cantidad de hulla necesita, anualmente, dicha compañía, y qué beneficio realiza, sabiendo: 1.º, que el precio medio del combustible es 30 ptas. la ton. m.; 2.º, que los gastos de la compañía ascienden a 1,300 ptas. cada mes.

62. Hay dos piezas de cierta tela de calidad distinta que tienen la misma longitud, siendo 64 ptas. la diferencia entre los valores de ambas. Dos metros de la 1.ª valen tanto como 3 de la segunda, y el precio de estos 5 metros es 19'20 pesetas. Calcúlese la longitud de una de estas dos piezas.

63. Tomaron un criado por 60 días, mediante la condición de que ganaría 3 ptas. cada día que trabajase y pagaría 2 ptas. cada día que dejase de acudir a su obligación. Transcurrido el tiempo convenido, el criado recibió 80 pesetas. Averigüense los días que trabajó y los que dejó de trabajar.

64. Un librero compró 104 volúmenes a razón de 1'75 ptas. cada uno, recibiendo 13 por docena y obteniendo, además, una bonificación de 10 por ciento, en virtud de efectuar el pago al contado. Se pregunta: 1.º, cuánto importó la compra, y 2.º, qué tanto por ciento de ganancia obtuvo, vendiendo los libros a 1'75 ptas. cada uno.

65. En una ciudad, se consumen, diariamente, 100,000 metros cúb. de gas. ¿Cuántas ton. m. de hulla se necesitarán cada mes de 30 días, sabiendo que 1 Kg. de hulla da, por término medio, 290 litros de flúido?

66. Un litro de agua pesa, aproximadamente, 52 gramos más que uno de vino. Hállese, pues, la capacidad de un depósito que, lleno de vino, pesa 300 kilogramos, y vacío, 42'50 Kgs.

67. Se compraron cuatro partidas de harina, de igual peso cada una, por 360 pesetas, las que fueron vendidas realizando una ganancia de 6 ptas. por cada quintal m. Averigüese el número de Kgs. de cada partida, sabiendo que se vendieron 40 Kgs. por 10'40 pesetas.

68. Para transportar cierta cantidad de leña seca a 400 metros de distancia, se emplean 6 individuos, cada uno de los cuales carga 200 Kgs. cada vez. Después de haber hecho 7 viajes todos los individuos, quedan aún por transportar las cinco séptimas partes de la leña. Calcúlense los metros cúbicos de leña que el montón contenía, sabiendo que 1 m. c. pesa 600 Kgs.

69. Un tabernero ha mezclado 45 litros de vino con 60 litros idem de otra clase inferior, cuyo precio es 32 ptas. el Hl. Si vende la mezcla a 0'70 ptas. el litro, saldrá ganando 31'80 ptas. Determínese el precio que tiene 1 Hl. de vino de la primera clase.

70. Hallar un número tal que, sumado con su quinta parte, dé 222.

71. Hallar dos números que, siendo uno 7 veces mayor que el otro, la suma de ambos sea 232.

72. Un depósito cuyas dimensiones son 4'50 metros de largo, 3'75 m. de ancho y 5 de profundidad, está lleno de vino, que se embotella en vasijas cuya capacidad es 1 litro. Sabiendo que se necesitan 5 minutos para llenar 4 botellas y que el depósito tiene un orificio por el que se pierden 7'992 litros cada 12 minutos, averiguar: 1.º, el tiempo empleado en vaciar el depósito; 2.º, el vino que pudo embotellarse, y 3.º, el vino perdido.

73. Un comerciante compró 650 qq. m., 70 Kgs. de algodón en rama, a 42'75 pesetas los 100 Kgs. Ha vendido los $^5/_9$ a 50'25 ptas. el quintal m., y desea obtener un beneficio total de 3,040 ptas. Hállese el precio a que debe vender el quintal m. de la cantidad que aun le queda.

74. Vendiéronse 87 canarios, entre machos y hembras, por 780 ptas. Si los machos se vendieron a 10 ptas. cada uno y las hembras a 4 ptas., ¿cuántos había de cada clase?

75. Un agricultor ha vendido, en dos veces sucesivas, el trigo, el maíz y el vino de su cosecha, vendiendo la vez primera 201 Hl. de trigo, 650 Hl. de maíz, y 20,502 litros de vino. Las cantidades vendidas constituyen, respectivamente, el 67 por 100 de sus existencias. ¿Cuánto recolectó de cada una de dichas tres materias?

76. Multiplicando un número, sucesivamente, por 5 y por 8, la diferencia entre ambos productos es 12. ¿Cuál es este número?

77. Un individuo compró cierto número de canarios a 5 ptas. cada uno. Se le escaparon los $^3/_8$ y vendió los restantes a 12 ptas. uno, ganando 500 ptas. Calcúlese el número de canarios que compró.

78. Si la combustión de 1 Kg. de madera de pino desarrolla los $^{15}/_{20}$ del calor que da la combustión de 1 Kg. de hulla; si el metro cúbico de madera de pino pesa 460 Kgs. y se paga a 10'50 ptas., y si el Hl. de carbón mineral pesa 90 Kgs.: ¿a cuánto deberá pagarse el Hl. de hulla, para que la calefacción cueste igualmente empleando cualquiera de ambos combustibles?

79. Preguntaron a un matemático qué edad tenía, y respondió: — «Si aumentáis el duplo de mis años en la $^1/_2$, el $^1/_4$ y el $^1/_8$ de los mismos, tendréis 1 siglo y 15 años más.» — ¿Qué edad tenía?

80. Cierto propietario poseía una vasta extensión de terreno de cultivo, distribuida de la siguiente manera: la $^1/_2$, en la siembra de trigo; $^1/_8$, en la siembra de cáñamo; la quinta parte en la de maíz, y el resto, 35 áreas, en la siembra de cebada y mijo. Averígüese el número de áreas que medía el terreno de referencia.

81. Un profesor compró, por 25'80 ptas., 600 cartapacios, unos de carácter inglés y otros de carácter español. Siendo 5'50 ptas. el precio del centenar de la primera clase y 4 ptas. el precio del de la segunda, ¿cuántos cartapacios había de cada clase?

82. Las $^5/_9$ partes de la leche que puede contener una vasija, pesa tanto como 412 monedas de plata de a 5 ptas. una. Si 1 Hl. de leche pesa 103 Kgs., ¿qué capacidad tiene dicha vasija?

83. He comprado 6 $^1/_2$ Hl. de vino por 406'25 ptas., y pongo dicho género en botellas de a $^3/_4$ de litro cada una, las que he pagado a 20'50 ptas. el centenar. Costando los tapones 30 ptas. el millar, y deseando realizar un beneficio de 20 por 100, se pregunta: 1.º, cuántas botellas podré llenar; 2.º, el precio a que deberé vender cada botella.

84. Adquirió Román un billete de la lotería y prometió a su esposa Soledad que, si saliese premiado, le compraría un reloj que costara 2 pesetas por cada 80 pesetas que el premio importara. Salió el billete premiado, y, después de haber comprado el reloj, quedaron al esposo 97,500 ptas. Calcúlese: 1.º, en cuanto salió premiado el billete y 2.º, cuánto costó el reloj.

85. Hállense dos números cuya suma sea 97, y su diferencia, 47.

86. Se vendieron los $^3/_5$ de una vasta extensión de terreno de cultivo, de excelente calidad, por 5.437,800 ptas., a razón de 3,420 ptas. la Ha. Más tarde, vendióse el resto de dicho terreno a 0'15 ptas. el metro cuadrado más caro que el anterior. Determínese: 1.º, el área de la extensión mencionada y 2.º, cuánto cobró el vendedor.

87. 8 Kgs. de café y 13 Kgs. de azúcar costaron 66 ptas., y el valor del café excedía al del azúcar en 14 ptas. Calcúlese el valor de 1 Kg. de café y el de 1 Kg. de azúcar.

88. Un depósito cuya capacidad es 280 Hls. puede recibir el agua de dos espitas. La 1.ª lo llena en 4 horas, y la 2.ª, en 3 $^1/_2$ horas. Hallándose el depósito completamente vacío y manando las dos espitas a la vez, se pregunta: 1.º, qué tiempo se necesitará para llenar los $^2/_3$ del depósito, y 2.º, cuántos litros de agua dará cada espita por minuto.

89. Dos albañiles se ocupan juntos en una misma obra, y al cabo de 6 días de trabajo, lo cobrado por ambos asciende a 48 ptas. Se sabe que el segundo ha recibido 12 ptas. menos que el primero. ¿Cuánto gana, diariamente, cada uno?

90. Se ha comprado una partida de vino del modo siguiente: los $^2/_5$, a 40 ptas. el Hl.; los $^4/_9$ del sobrante, a 38'25 ptas. el Hl., y el resto, que son 80 Dl., a 35 ptas. el Hl. Se pregunta: 1.º, cuántos litros componían la partida; 2.º, cuánto ha desembolsado el comprador.

91. Se tiene una vasija completamente llena de agua de mar; derrámanse los $^2/_9$ del contenido, y se echa agua potable hasta llenarla de nuevo; se decanta la vasija derramando los $^4/_7$ del contenido; vuelve a llenarse de agua potable y derrámanse, de nuevo, los $^5/_6$ del líquido contenido. ¿Qué cantidad de agua de mar queda en la vasija?

92. Un tratante en granos ha vendido 12 $^7/_8$ Hls. de trigo por 183'47 ptas., y sólo ha entregado al comprador 11 $^2/_5$ Hls. Hecha la reclamación correspondiente, ¿cuánto ha de devolver el vendedor al comprador?

93. Se tienen 2 pipas llenas de alcohol, habiendo, en junto, 1,040 litros, y los $^2/_5$ de la capacidad de la 1.ª es los $^6/_{25}$ de la de la 2.ª ¿Cuántos litros contiene cada pipa?

94. Una bola cae perpendicularmente, desde cierta altura, sobre una mesa de mármol. Al verificarse el choque, la bola sube; vuelve a caer; se eleva de nuevo, y así sucesivamente, subiendo 8 centímetros después de haber caído cuatro veces consecutivas sobre la mesa. Sabiendo que cada vez la bola se eleva hasta los $^2/_3$ de la altura de que ha caído, ¿de qué altura cayó la primera vez?

95. Un reloj que señala la hora verdadera el lunes a medio día, adelanta $^5/_6$ de minuto cada hora. ¿Qué hora será el miércoles próximo, cuando dicho reloj señale las 4 y 30 minutos de la tarde?

96. Un reloj que adelanta 8 segundos y $^7/_8$ por hora, lleva $^1/_4$ de hora de adelanto el lunes a las 11 de la mañana. Calcúlese el día y la hora en que habrá sido arreglado señalando la hora verdadera.

97. Los 160 niños que asisten a una escuela se hallan divididos en tres secciones. La 1.ª sección tiene tantos niños como las otras dos, y la 3.ª tiene 20 niños menos que la 2.ª Averigüese cuántos niños hay en cada sección.

98. Se vierten en un tonel 1 Hl., 46 litros de vino de a 48'75 ptas. el Hl.; 75 litros ídem de a 52 ptas. el Hl., y 4 $^1/_2$ Dls. íd. de a 0'45 ptas. el litro. Las cantidades vertidas llenan los $^5/_7$ de la capacidad del tonel, y se echa agua hasta llenarlo completamente. Averigüese cuánto vale 1 litro de la mezcla.

99. Pedro, Enrique y Joaquín se repartieron cierto número de bolas. El primero tomó los $^2/_5$ del total más 4; el segundo, los $^3/_8$ del total, más 15, y el tercero, 35 bolas que quedaban. Calcúlese: 1.º, cuántas bolas se repartieron, y 2.º, cuántas correspondieron a cada uno de los dos primeros.

100. En una fundición de objetos de cobre, trabajan 10 fundidores, 6 peones y 4 aprendices. El salario de un peón es los $^2/_5$ del de un fundidor, y el de un aprendiz, la $^1/_2$ del de un peón. ¿Cuánto gana, diariamente, cada uno, sabiendo que el dueño de la fundición necesita 792 ptas. para el pago de los salarios, cada semana de 6 días de trabajo?

Tanto por ciento, por mil, por gruesa, por docena, etc.

1. ¿Cuánto debe abonar un maestro albañil por la compra de 2,400 ladrillos, a razón de 12'50 pesetas el ciento?

2. Pagando las tejas a 48'50 ptas. el millar, ¿cuál será el valor de 46,850?

3. Comprando los botones a 6 pesetas la gruesa, ¿qué cantidad tendré que satisfacer a la casa Boileau y C.ª, de París, por una remesa de 200 cajas, conteniendo cada una 580 botones?

4. Si una docena de naranjas vale 0'75 ptas., ¿cuánto valdrán 6 serones de la fruta mencionada, siendo 400 naranjas el contenido de cada serón?

5. A razón de 1'25 pesetas la docena de estampas, ¿cuánto valdrán 856 que ha adquirido un maestro, para premiar a sus discípulos más aplicados?

6. Un vendedor de fósforos ha recibido 24,500 cajas de cerillas 1.ª clase, a 3'50 pesetas la gruesa, y 6,000 libritos jaramago a 2'95 pesetas ídem. — ¿Cuánto debe satisfacer?

7. ¿Cuánto deberá abonar un comerciante en ultramarinos por la compra de 400 quesos de Holanda, a razón de 111'25 ptas. cada 2 $^1/_2$ docenas, y pagando 2 % (2 por ciento) de comisión?

8. ¿Qué cantidad debo satisfacer a un corredor por cuya mediación he adquirido 2,000 pares de alpargatas a 13'25 pesetas la docena de pares, habiendo estipulado en 1 $^1/_2$ % el corretaje?

9. He adquirido 800 cigarros habanos a 63 pesetas el ciento. — ¿A qué precio debo vender cada cajón de a 50, queriendo realizar el 30 % de beneficio?

10. El dueño de un colmado compra el kilo de café sin tostar a 2'90 pesetas; sabiendo que al tostarlo pierde, aproximadamente, la tercera parte de su peso y que el trabajo empleado en tostar 1 kg. le cuesta 0'50 ptas., ¿a cuánto deberá vender el Kg. de café tostado, queriendo, además, ganar el 25 %?

11. Un comprador de tapones, al examinar los de un montón, halla un 60 % de a 20'75 pesetas el mil; un 10 % de a 18 pesetas ídem; un 15 % de a 15'50 pesetas ídem, y otro 15 % de a 12 pesetas.—¿Qué valor tiene un millar de los tapones mencionados?

12. El mismo comprador de tapones halla, en otro montón, el resultado siguiente: un 50 % de a 12'25 pesetas el millar; un 25 % de a 14 pesetas ídem; un 15 % de a 9 pesetas ídem, y un 10 % de 7'75 pesetas ídem. — ¿A cuánto debe comprar el millar de tapones queriendo ganar un 40 % en la reventa de los mismos?

13. ¿Cuánto tendrá que satisfacer un cafetero por la compra de 485 vasos a 3'25 pesetas la docena, haciendo el pago al contado con 8 % de rebaja?

14. Un tabernero paga el litro de vino rancio a 0'75 pesetas, y en cada barril de a 15 litros, halla 1 l. de tara por efecto de la absorción de las duelas.—¿A cómo debe vender el litro queriendo ganar un 20 %, satisficiendo 1 peseta por el transporte de cada barril de la antes mencionada capacidad?

15. El dependiente de una ferretería, ha vendido 8 paquetes de clavos de a 500 cada uno a 4'25 pesetas millar; 14,600 tornillos a 2 pesetas la gruesa, y 800 cerraduras a 7'45 pesetas la docena. — ¿Cuánto debe recibir, haciendo el comprador el pago al contado con 12 % de rebaja?

16. A razón de 14'50 pesetas la cuartera de 80 litros, ¿cuánto valen 46 Hl., 3 Dl. y 1/2 de trigo del Ampurdán?

17. Cierto individuo compró 1,850 docenas de naranjas a 25 pesetas el millar, y 40 centenares de manzanas a 0'56 pesetas la docena, satisficiendo por varios gastos 18'50 pesetas. Vendió luego las naranjas a 4 pesetas el ciento y las manzanas, a 7'35 pesetas ídem. — ¿Cuánto ganó?

18. Pagando cierta droga a razón de 6'50 pesetas el hectogramo, ¿a qué precio debe venderse el Kg. para ganar un 15 % ?

19. Un sujeto compra las granadas a 5 pesetas el ciento, hallando un 20 ‰ (*) que, por su mal estado, ha de retirar de la venta. — ¿Cuánto debe abonar por 1,450, descontando el valor de las averiadas?

20. ¿Cuánto deberá entregarse por 6 qq. m. y 1/2 de mineral a 41'25 pesetas la tonelada m., y 5 Ha., 25 ca. de terreno a 0'50 pesetas el medio m. en cuadro, rebajando de su valor total un 25 ‰?

Ejercicios y problemas sobre potencias y raíces

I

1. Hállese el cuadrado o segunda potencia, de los números siguientes: 1.°, 9; 2.°, 16; 3.°, 45; 4.°, 63; 5.°, 200; 6.°, 30; 7.°, 120; 8.°, 344; 9.°, 8760; 10.°, 4860; 11.°, 78462; 12.°, 4506000; 13.°, 842759.

2. Idem el cuadrado de los siguientes: 1.°, 0'25; 2.°, 0'476; 3.°, 0'777; 4.°, 0'12350; 5.°, 4'7289; 6.°, 124'9863.

3. Idem el cuadrado de los siguientes: 1.°, 3/5; 2.°, 7/9; 3.°, 1/2; 4.°, 4/9; 5.°, 7/25; 6.°, 4 3/5; 7.°, 68 9/125; 8.°, 20 1/125; 9.°, 3/36; 10.°, 7/850.

4. Idem el cubo, o 3.ª potencia, de los siguientes: 1.°, 7; 2.°, 8; 3.°, 11; 4.°, 13; 5.°, 18; 6.°, 20; 7.°, 35; 8.°, 42; 9.°, 59; 10.°, 70; 11.°, 92; 12.°, 109; 13.°, 342; 14.°, 973; 15.°, 644; 16.°, 1835; 17.°, 6427; 18.°, 24640; 19.°, 44800.

5. Idem el cubo de los siguientes: 1.°, 0'6; 2.°, 0'25; 3.°, 0'444; 4.°, 0'78960; 5.°, 0'439000; 6.°, 4'25; 7.°, 3'8964; 8.°, 125'423700; 9.°, 0'9002; 10.°, 146'3.

6. Idem el cubo de los siguientes: 1.°, 3/5; 2.°, 4/7; 3.°, 5/12; 4.°, 9/15; 5.°, 14/35; 6.°, 8 3/5; 7.°, 6 1/2; 8.°, 25 9/450; 9.°, 446 1/8; 10.°, 37 2/7; 11.°, 1 1/8; 12.°, 11 486/975.

7. Idem la 4.ª potencia de éstos: 1.°, 45; 2.°, 6000; 3.°, 950; 4.°, 476; 5.°, 1908; 6.°, 0'46; 7.°, 0'125; 8.°, 3/8; 9.°, 12 1/9.

8. Idem la 5.ª potencia de éstos: 1.°, 8; 2.°, 29; 3.°, 0'47; 4.°, 3/8; 5.°, 1/2; 6.°, 3 7/9.

9. Idem la 6.ª potencia de: 1.°, 2; 2.°, 1/2; la 7.ª de: 1.°, 9; 2.°, 1; 3.°, 3/9; la 8.ª de 36; y la 6.ª de 800.

II

10. Extraer la raíz cuadrada entera de los números siguientes: 1.°, 4; 2.°, 25; 3.°, 49; 4.°, 64; 5.°, 91; 6.°, 37; 7.°, 1; 8.°, 29; 9.°, 77; 10.°, 42; 11.°, 88; 12.°, 39; 13.°, 100; 14.°, 95; 15.°, 60; 16.°, 22; 17.°, 44; 18.°, 66; 19.°, 31; 20.°, 80; 21.°, 18; 22.°, 84; 23.°, 20; 24.°, 13; 25.°, 5; 26.°, 97; 27.°, 99; 28.°, 76; 29.°, 55; 30.°, 10; 31.°, 33.

11. Averígüense las partes de que consta el cuadrado de cada uno de los números siguientes: 1.°, 18; 2.°, 40; 3.°, 76; 4.°, 16; 5.°, 95; 6.°, 88; 7.°, 450; 8.°, 633; 9.°, 30.

12. Extraer la raíz cuadrada entera de los números siguientes: 1.°, 576; 2.°, 1,521; 3.°, 3,025; 4.°, 5,184; 5.°, 9,408; 6.°, 64,373; 7.°, 47.610,000; 8.°, 38,600; 9.°, 472,059; 10.°, 73,247; 11.°, 3.289,720; 12.° 19,932; 13.°, 743,044; 14.°, 98.320,091, 15.° 9,800; 16.°, 124.407,035; 17.°, 400,000; 18.°, 9.000,000; 19.°, 75.320,080; 20.°, 327.018,920; 21.°, 45.700,180.

(*) Léase 20 por mil.

13. Idem la raíz cuadrada de los siguientes números, aproximando la raíz hasta las milésimas, si no la tienen exacta: 1.º, 0'756432; 2.º, 0'84650; 3.º 0'7591; 4.º, 0'256; 5.º, 0'832; 6.º, 0'75; 7.º, 0'8; 8.º, 4'25; 9.º, 18'946; 10.º, 47'1962; 11.º, 0'7; 12.º, 14'9; 13.º, 27'95621; 14.º, 0'8976; 15.º, 442'2; 16.º, 0'87; 17.º, 3'9800; 18.º, 7'3.

14. Idem la raíz cuadrada de los siguientes números: 1.º, $^{25}/_{36}$; 2.º, $^{9}/_{16}$; 3.º, $^{16}/_{49}$; 4.º, $^{576}/_{1521}$; 5.º, $^{81}/_{100}$; 6.º $^{3}/_{5}$; 7.º, $^{7}/_{9}$; 8.º, $^{6}/_{13}$; 9.º, $^{5}/_{9}$; 10.º, $^{3025}/_{5184}$; 11.º, 7 $^{3}/_{5}$; 12.º, 26 $^{3}/_{9}$; 13.º, 8 $^{5}/_{7}$; 14.º, 46 $^{2}/_{8}$; 15.º, $^{1}/_{5}$; 16.º, $^{6}/_{49}$; 17.º, 11 $^{1}/_{8}$; 18.º, 2 $^{3}/_{4}$; 19.º, 15 $^{36}/_{183}$; 20.º, $^{2}/_{5}$; 21.º, $^{6}/_{9}$; 22.º, 28 $^{5}/_{8}$; 23.º, $^{3}/_{8}$.

15. Idem la raíz cuadrada de los números siguientes en menos de un céntimo, si no la tienen exacta: 1.º, 2,463; 2.º, 28,769; 3.º, 4.572,710; 4.º, 7,846'25; 5.º, 2.960,310'756; 6.º, 126,000 $^{1}/_{5}$; 7.º, 2,753'90; 8.º, 12,835'3769; 9.º, 9,864 $^{36}/_{45}$; 10.º, 2,876'976; 11.º, 8.769,000; 12.º, 84,275'3; 13.º, 4.621,893 $^{1}/_{9}$; 14.º, 194,600; 15.º, 337,502 $^{15}/_{73}$.

III

16. Extraer la raíz cúbica entera de los números siguientes: 1.º, 27; 2.º, 1; 3.º, 125; 4.º, 2; 5.º, 343; 6.º, 729; 7.º, 26; 8.º, 1,000; 9.º, 47; 10.º, 853; 11.º, 649; 12.º, 216; 13.º, 8; 14.º, 70; 15.º, 95; 16.º, 741; 17.º, 960; 18.º, 420; 19.º, 13; 20.º, 189; 21.º, 670; 22.º, 900; 23.º, 702; 24.º, 225; 25.º, 342; 26.º, 728; 27.º, 528.

17. Averígüense las partes de que consta el cubo de cada uno de los siguientes números: 1.º, 32; 2.º, 29; 3.º, 40; 4.º, 57; 5.º, 77; 6.º, 90; 7.º, 142; 8.º, 240; 9.º, 15.

18. Extraer la raíz cúbica entera de los siguientes números: 1.º, 6,425; 2.º, 2,975; 3.º, 28,490; 4.º, 37,433; 5.º, 128,660; 6.º, 874,550; 7.º, 666,666; 8.º, 5,896; 9.º, 37,592; 10.º, 1,497; 11.º, 846.342,620; 12.º, 75.800,602; 13.º, 9.003,002; 14.º, 78,896.356,282; 15.º, 9,400.000,609; 16.º, 467,000.007,966; 17.º, 28,637; 18.º, 798.632,000.

19. Idem la raíz cúbica de los siguientes, aproximando la raíz hasta las milésimas, si no la tienen exacta: 1.º, 0'25; 2.º, 0'732; 3.º, 0'9843; 4.º, 0'84637; 5.º, 0'248969; 6.º, 0'97327820; 7.º, 0'847632680; 8.º, 0'843289700; 9.º, 0'7896; 10.º, 0'12; 11.º, 0'842; 12.º, 8'4327; 13.º, 9'318906; 14.º, 12'275; 15.º, 84'3270; 16.º, 125'86320; 17.º, 864'372; 18.º, 916'0090.

20. Idem la raíz cúbica de los siguientes números: 1.º, $^{27}/_{64}$; 2.º, $^{125}/_{343}$; 3.º, $^{512}/_{729}$; 4.º, $^{3}/_{5}$; 5.º, $^{8}/_{17}$; 6.º, $^{353}/_{864}$; 7.º, $^{946}/_{209}$; 8.º, $^{784}/_{863}$; 9.º, $^{15}/_{32}$; 10.º, $^{37}/_{299}$; 11.º, 27 $^{5}/_{6}$; 12.º, 43 $^{9}/_{12}$; 13.º, 7 $^{3}/_{5}$; 14.º, 1 $^{216}/_{1000}$; 15.º, 846 $^{3}/_{9}$; 16.º, $^{16}/_{13}$.

21. Idem la raíz cúbica de los números siguientes, en menos de un céntimo, si no la tienen exacta: 1.º, 84,632; 2.º, 127,329; 3.º, 9,300; 4.º, 846,300; 5.º, 378,463'25; 6.º, 92163202'1289; 7.º, 8427632 $^{25}/_{125}$; 8.º, 32,789 $^{1}/_{5}$; 9.º, 263000'4576; 10.º, 12763209; 11.º, 8320719'1278961; 12.º, 12476'5; 13.º, 72789635 $^{125}/_{216}$; 14.º, 47201896 $^{1}/_{8}$; 15.º, 6432789579 $^{5}/_{6}$; 16.º, 8632600 $^{17}/_{49}$; 17.º, 64 $^{1}/_{2}$; 18.º, 37642 $^{470}/_{669}$.

IV

22. ¿Cuál es el número que, multiplicado por sí mismo, da 5,929?

23. Determínese la suma de los cuadrados de 36, de 8'35 y 450.

24. Cuadruplíquese la 4.ª potencia de 28'50, y triplíquese el cubo de 84.

25. ¿Qué diferencia hay entre el cuadrado del cuadrado del número 63 y la 4.ª potencia de dicho número?

26. Hállense los $^{3}/_{5}$ del cubo del número 420.

27. Una figura tiene 3 lados: el 1.º, mide 8 m.; el 2.º, 6 m., 35 cm., y el 3.º, 5'25 m. Averígüese la suma de las áreas de los cuadrados construídos sobre cada uno de dichos lados.

28. Un cuadrado tiene de área 625 m.² ¿Cuánto mide su lado?

29. Un propietario ha cercado de pared un campo de forma cuadrada cuya superficie mide 1 Ha., 63 a. y 84 ca. ¿Qué longitud tiene cada una de las 4 paredes?

30. Dígase el número cuyo cuadrado multiplicado por 30 da 18;750.

31. Un sujeto ha comprado un solar de forma cuadrada, a razón de 4 pesetas el m.² por 16,900 pesetas. ¿Qué longitud tiene el lado de dicho solar?

32. Hállese un número tal que, aumentando su raíz cuadrada en 25, dé 153.

33. Hállese la raíz cuadrada de 45'9 en menos de $^{1}/_{10000}$.

34. Si los 2,025 hombres que forman un cuerpo de ejército se colocaran en filas, de modo que la reunión de todas ellas formara un cuadrado perfecto, ¿cuántos hombres habría en cada fila?

35. Un campo de forma rectangular tiene de área 800 metros cuadrados, y la base es doble que su altura. Averígüense ambas dimensiones.

V

36. ¿Cuál es la suma de los cubos de 26 y 40?

37. Hállese la diferencia entre el cubo de 452 y la tercera potencia de 125.

38. Fórmese el cuadrado del cubo de 36 y el cubo del cuadrado de 150.

39. ¿Qué número, multiplicado dos veces por sí mismo, da de producto 74,088?

40. El cubo de un número hecho tres veces mayor da 128,625. ¿Cuál es este número?

41. La mitad del cubo de un número es 37,044. ¿Cuál es este número?

42. En un aljibe de forma cúbica, caben 3,375 litros de agua. ¿Qué profundidad tiene?

43. Extrayendo la raíz cúbica del producto de 20 por 6 veces el cuadrado de 15, ¿qué resultado se obtendrá?

44. Extráigase la raíz cúbica de la raíz cuadrada (o raíz 6.ª) del número 850, aproximándola hasta las centésimas.

45. ¿Cuál es la raíz cúbica de la raíz cúbica (o raíz 9.ª) del número 18,580 en menos de $^1/_{100}$?

46. Un cantero quiere construir un cubo perfecto de piedra berroqueña, cuyo volumen sea igual al de un pedazo de la misma piedra cuyas dimensiones son: alto, 1 m., 60 cm.; ancho, 1 m., 35 cm., y profundidad, 95 cm. ¿Qué lado deberá tener el cubo mencionado?

47. ¿Qué número, multiplicado dos veces por sí mismo, da 456 y $^5/_{12}$?

48. Extráigase la raíz cuadrada de 48'75 con menor error que $^1/_{1000}$.

49. ¿Cuál es la raíz cuarta del número 24,600, con mayor error que $^1/_{100}$?

50. En un depósito cuyas tres dimensiones son iguales, caben 24 Hl., 14 l. de trigo. ¿Cuál es su altura?

51. Hállese la raíz novena del número 794,280₁046,581.

52. Extráigase la raíz sexta del número 262,144.

53. Extrayendo la raíz doceava del número 16.777,216, ¿qué número se obtiene?

54. Hallese la raíz cuarta del número 17.850,625.

55. Determínese la raíz novena del número 1.953,125.

56. Extraer la raíz sexta del número 191.102,976.

57. Un terreno de forma rectangular tiene 625 m. de largo por 400 m. de ancho. Se pregunta en cuánto tendrá que disminuirse su longitud y aumentar su anchura, a fin de convertirle en un cuadrado de igual área que el rectángulo.

Problemas sobre peso específico

1. En una fábrica de gas, hay un montón de carbón de piedra, o hulla, cuyo volumen es 4,650 metros cúbicos. Siendo 0'3292 la densidad del citado carbón, determínese el peso de la cantidad mencionada.

2. Una columna cilíndrica de hierro fundido pesa 42,520 kilogramos. Determínese su volumen, sabiendo que la densidad del citado metal es 7'207.

3. Un bloque de piedra granítica cuyo peso es 9 toneladas mét., 4 quintales mét., 39 kg., 8 Hg., 3 Dg., 7 g. y 5 dg., tiene un volumen de 3 metros cúbicos, 475 dm.³ Averígüese el peso específico, o densidad, de la piedra granítica.

4. Hállese el peso del aire contenido en un salón cuyas dimensiones son: largo, 20'45 metros; ancho, 12'50 metros, y alto, 4 metros, sabiendo que 1 litro de aire pesa 1'299 gramos.

5. Dentro de una pipa, hay 3 hectolitros, 45 litros de vino tinto: ¿qué peso tiene el caldo mencionado, sabiendo que la densidad media del vino es 0'993?

6. ¿Qué cantidad de vino contiene un depósito, siendo 675'24 kgs. y 0'993, respectivamente, el peso y la densidad del líquido en cuestión?

7. Hállese el peso del alcohol puro que llena una pipa cuya capacidad es 500 litros, siendo 0'793 el peso específico del alcohol.

8. Si 1 decímetro cúbico de carbón vegetal pesa 0'250 kilogramos, ¿cuánto pesará el que contiene un montón cuyo volumen es 128'750 metros cúbicos?

9. Un prisma triangular de cristal común pesa 3 kgs., 400 gramos: ¿cuál es su volumen, siendo la densidad de este cristal 2'488?

10. El peso de 4 litros de agua de mar es 4'1052 kgs.; según esto, determínese la densidad del agua mencionada.

11. Un vaso, completamente lleno, contiene 2'425 kgs. de mercurio, 3'125 kilogramos de aceite de olivas y 1'680 kgs. de alcohol puro. ¿Cuánto pesa el vino común que dicho vaso puede contener, sabiendo que las densidades de dichos líquidos son las siguientes: mercurio, 13'598; aceite de olivas, 0'9158; alcohol puro, 0'793; vino (densidad media), 0'993?

12. Sumergiendo un trozo de mineral de plomo en un recipiente lleno de agua, se han desalojado 3'25 litros. ¿Qué peso tiene el trozo mencionado, sabiendo que la densidad del plomo es 11'3523?

13. Puesto un trozo de plomo dentro de un vaso lleno de agua pura, ha desalojado una cantidad de agua que pesa 1'300 kgs. El vaso y su contenido pesan ahora 13'4575 kilogramos más que antes. ¿Cuál es la densidad del plomo?

14. La densidad del hielo es 0'930. ¿Qué volumen tendrá un bloque de hielo que pesa 2 toneladas m., 45 kgs.?

15. Se han mezclado 12 litros de agua de mar con 9 litros de agua destilada: hállese la densidad de la mezcla, sabiendo que la densidad del agua de mar es 1'0263.

16. Un vaso lleno de aceite de almendras dulces pesa 20'455 kgs., y vacío pesa 3'280 kilogramos. Determínese la capacidad del vaso de referencia, siendo la densidad del aceite mencionado 0'917.

17. Pagando el litro de alcohol puro a 2 ptas., ¿a cuánto resulta el kilog., siendo 0'793 la densidad del alcohol?

18. Por 1 kg. de aceite de nueces, se han pagado 1'75 ptas. ¿A qué precio deberá venderse el litro, deseando ganar 0'50 ptas. por kg.? La densidad del aceite de nueces es 0'9227.

19. Sabiendo que la densidad del petróleo es 0'847, determínese la capacidad de una vasija que, vacía, pesa 12 kgs. y llena de petróleo, 45'50 kgs.

20. Se sabe que el aire pesa 770 veces menos que el agua destilada, y que la densidad del oxígeno es 1'1057 mayor que la del aire. ¿Cuánto pesa, según esto, 1 litro de oxígeno?

Razones y proporciones geométricas

I

1. Escribir cuatro razones geométricas.

2. Escríbanse ocho razones geométricas.

3. Hállese el exponente de cada una de las siguientes razones geométricas: 1.ª, 12 : 6; 2.ª, 24 : 8; 3.ª, 9 : 3; 4.ª, 462 : 154; 5.ª, 4320 : 10.

4. Determínese el exponente de cada una de las razones siguientes: 1.ª, 120 : 15; 2.ª, 36 : 9; 3.ª, 560 : 7; 4.ª, 436 : 186; 5.ª, 24107 : 5496.

5. Idem el exponente de éstas: 1.ª, 4'725 : 5; 2.ª, 124'75 : 4'32.

6. Idem el exponente de las siguientes:

1.ª, $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$; 2.ª, $\frac{7}{9} : \frac{3}{12}$; 3.ª, $\frac{45}{36} : \frac{2}{8}$; 4.ª, $4\frac{1}{2} : \frac{3}{5}$; 5.ª, $120\frac{3}{8} : \frac{1}{2}$;

6.ª, $\frac{13}{15} : 6\frac{1}{8}$; 7.ª, $\frac{126}{419} : 26\frac{3}{4}$.

7. Idem el de ésta: 128 Km., 6 Dm., 45 cm. : 3 Dm.

8. Multiplíquese por 3 cada una de las siguientes razones: 1.ª, 9 : 12; 2.ª, 45 : 8; 3.ª, 124 : 27.

9. Idem por 5 las siguientes:

1.ª, 2 : 10; 2.ª, 120 : 45; 3.ª, $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$; 4.ª, $\frac{5}{9} : \frac{7}{8}$; 5.ª, $4\frac{3}{5} : 1\frac{1}{7}$.

10. Divídanse por 2 las siguientes:

1.ª, 8 : 4; 2.ª, 12 : 6; 3.ª, 28 : 7; 4.ª, $\frac{3}{5} : \frac{1}{8}$; 5.ª, $\frac{4}{7} : \frac{5}{9}$; 6.ª, $4\frac{3}{5} : 2\frac{5}{6}$.

11. Idem por 3 las siguientes:

1.ª, 0'84 : 0'75; 2.ª, 24'72 : $\frac{5}{8}$; 3.ª, 12'51 : 27; 4.ª, 8460 : 20.

12. Simplifíquense las razones siguientes: 1.ª, 8 : 4; 2.ª, 18 : 6; 3.ª, 45 : 15; 4.ª, 124 : 60; 5.ª, 20 : 10; 6.ª, 489 : 27; 7.ª, 12800 : 6000; 8.ª, 24000 : 1000.

13. Idem las siguientes: 1.ª, 8'45 : 6'75; 2.ª, 14'75 : 68'60; 3.ª, 9 : 0'15; 4.ª, 0'7632 : 2; 5.ª, 780595 : 17280.

14. Fórmese la razón compuesta de las simples siguientes: 2 : 3; 8 : 12; 45 : 5; 75 : 20.

15. Idem la compuesta de las siguientes:

6 : 3; 15 : 3; $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$; 0'45 : 3; 12 : 4; $2\frac{3}{5} : 4\frac{1}{2}$.

16. Escribir 4 razones iguales a ésta: 9 : 6.

17. Idem 4 iguales a ésta: 12 : 120.

18. Idem 2 iguales a ésta: 0'45 : 0'25.

19. Idem 5 iguales a ésta: $\frac{3}{5} : \frac{1}{4}$.

20. Idem 10 iguales a ésta: 840 : 630; cinco por vía de multiplicación y cinco por vía de división.

21. Transfórmense las razones siguientes en otras equivalentes cuyos términos sean enteros:

1.ª, $\frac{3}{5}$: 6; 2.ª, 8 : $\frac{7}{12}$; 3.ª, $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$; 4.ª, $4\frac{1}{2}$: 9; 5.ª, $6\frac{1}{5} : 2\frac{4}{7}$.

II

22. Formar cuatro proporciones discretas.

23. Id. id. íd. continuas.

24. Dada la razón 24 : 36, formar dos proporciones discretas por vía de multiplicación y tres por vía de división.

25. Dada la razón 45 : 15, formar una proporción discreta y otra continua.

26. Con la razón 28 : 7, fórmese una proporción continua y dos discretas.

27. Fórmese una proporción continua cuyos términos extremos sean 2 y 8.

28. Siendo 1024 el producto de los términos extremos de una proporción continua, ¿cuál será el término medio?

29. Se sabe que 3600 es el producto de los términos extremos de una proporción continua: averígüese el medio proporcional.

30. Si $4 \times 5 = 2 \times 10$, fórmense, con estos cuatro números, todas las proporciones posibles.

31. Hágase lo mismo con los cuatro númmeros: $6 \times 7 = 2 \times 21$.

32. Fórmense tres proporciones continuas, tales, que el primer extremo de cada una de ellas sea 8 en la 1.ª, 20 en la 2.ª, $^2/_5$ en la 3.ª

33. Hállese el término extremo desconocido en cada una de las proporciones siguientes:

$$1.^a,\ 12 : 6 :: 36 : x;\ 2.^a,\ 15 : 45 :: 30 : x;\ 3.^a,\ 48 : 35 :: 192 : x$$

$$4.^a,\ 1200 : 800 :: 600 : x;\ 5.^a,\ 390 : 45 :: 78 : x;\ 6.^a,\ \frac{4}{5} : \frac{6}{9} :: \frac{2}{5} : x;$$

34. Determínese el valor del extremo incógnito en cada una de las proporciones siguientes:

$$1.^a,\ x : 6 :: 20 : 30;\ 2.^a,\ x : 7 :: 24 : 42;\ 3.^a,\ x : 12 :: 12 : 6;$$

$$4.^a,\ x : \frac{3}{4} :: \frac{3}{3} : \frac{3}{1};\ 5.^a,\ x : \frac{1}{8} :: \frac{3}{21} : \frac{1}{4};\ 6.^a,\ x : 6'120 :: 2'175 : 3'60.$$

35. Averiguar el término medio desconocido en cada una de las siguientes proporciones geométricas:

$$1.^a,\ 9 : 3 :: x : 12;\ 2.^a,\ 45 : 75 :: x : 15;\ 3.^a,\ 420 : 16 :: x : 4;$$

$$4.^a,\ \frac{1}{8} : \frac{4}{5} :: x : \frac{8}{5};\quad 5.^a,\ \frac{4}{15} : \frac{2}{6} :: x : \frac{2}{3}.$$

36. Hallar el medio incógnito de cada una de las siguientes proporciones:

$$1.^a,\ 360 : x :: 180 : 4;\ 2.^a,\ 8436 : x :: 2812 : 2614;\ 3.^a\ \frac{1}{8} : x :: \frac{1}{4} : \frac{5}{18}.$$

37. Simplificar las siguientes proporciones:

$1.^a,\ 142 : 426 :: 710 : x;\ 2.^a,\ 1240 : 8600 :: 620 : x;\ 3.^a,\ 120'45 : 100 :: 240'90 : x;$
$4.^a,\ 6000 : x :: 18000 : 1200;\ 5.^a,\ 45'750 : 42 :: x : 126;\ 6.^a,\ 0'125 : 0'35 :: x : 1'40.$

38. Simplificar las proporciones siguientes:

$1.^a,\ x : 126 :: 20 : 504;\ 2.^a,\ 18 : x :: 126 : 35;\ 3.^a,\ 48'75 : 3'120 :: x : 1'40;$

$$4.^a,\ 0'46 : 0'12 :: x : 0'48;$$

$$5.^a,\ 0'500 : x :: 2'500 : 20;\ 6.^a,\ 124'80 : x :: 499'20 : 750'40.$$

39. Tansformar las proporciones geométricas siguientes en otras equivalentes cuyos términos sean enteros:

$$1.^a,\ \frac{1}{12} : \frac{3}{7} :: \frac{1}{4} : \frac{9}{7};\quad 2.^a,\ \frac{4}{25} : \frac{2}{8} :: \frac{4}{5} : \frac{10}{8};$$

$$3.^a,\ \frac{124}{416} : \frac{432}{960} :: \frac{62}{416} : \frac{432}{1920};\quad 4.^a,\ \frac{3}{8} : \frac{1}{2} :: \frac{1}{8} : \frac{1}{6}.$$

40. Convertir las proporciones siguientes en otras equivalentes de términos enteros:

$$1.^a,\ \frac{6}{7} : \frac{5}{9} :: \frac{6}{14} : x;\quad 2.^a,\ \frac{3}{9} : \frac{2}{7} :: x : \frac{2}{21};\quad 3.^a\ \frac{24}{75} : \frac{14}{47} :: \frac{4}{2} : x;$$

$$4.^a,\ \frac{7}{16} : \frac{1}{8} :: x : \frac{1}{4}.$$

41. Dadas las siguientes proporciones, hállese la compuesta, y determínese el valor de su incógnita:

$$\begin{array}{l} 8 : 4 :: 24 : x \\ 18 : 6 :: x : y \\ 48 : 24 :: y : n \end{array}$$

Problemas de reglas de tres simples (*)

1. Veinte tejedores, en cierto número de días, hicieron 450 metros de paño. ¿Cuántos metros del mismo paño tejerán, en igual tiempo, 35 tejedores igualmente hábiles?

2. La compra de 480 Kg. de cierto género importó 2,500 ptas. ¿Cuántos kilogramos del mismo género se comprarán con 34,850 ptas.?

3. Una fuente, en 26 horas, da 45,860 litros de agua: ¿qué cantidad de agua da cada 14 horas?

4. ¿Cuántos palomos podrán comprarse con 39 ptas., pagándolos a 2'25 ptas. el par?

5. Un cortante, vendiendo diariamente 80 Kg. y $^1/_2$ de carne, saca una ganancia de 9'25 ptas. ¿Qué cantidad de carne debería cada día vender para ganar 11'75 ptas.?

6. Cuatro impresores, en 9 días, compusieron 46 páginas de cierta obra: ¿cuántos impresores serán necesarios para componer, en igual tiempo, 120 páginas?

7. Un andarín recorrió 420 Km. en 2 días y 5 horas. ¿Qué distancia vino a recorrer cada 6 horas?

8. El alumbrado de un café ha importado, en 1 mes, 228'75 pesetas. ¿Cuánto gastará el cafetero mensualmente, suprimiendo 4 de los 35 mecheros que ha venido encendiendo diariamente?

9. Se han pagado 7'45 ptas. por una cantidad de cal cuyo peso es 12,420 Kg. ¿A cuánto resulta el quintal métrico?

10. En una fortaleza, hay 4,500 hombres, los que tienen víveres para 4 meses y $^1/_2$. Si la guarnición mencionada disminuyera en 500 plazas, ¿para cuánto tiempo tendrían víveres?

11. Catorce carpinteros necesitaron trabajar 7 días para entarimar la planta baja de un almacén: para hacer el mismo trabajo en 4 días y $^1/_2$, ¿cuántos carpinteros se hubieran necesitado?

12. Se sabe que 13 albañiles emplearon 120 días en la edificación de una quinta. ¿Cuántos días hubieran necesitado 9 albañiles?

13. Para enladrillar un salón, se necesitan 850 ladrillos, cuyos largo y ancho son 18 y 12 centímetros respectivamente. ¿Cuántos ladrillos de igual largo serían necesarios si tuviesen de ancho 14 cm.?

14. Marchando con una velocidad media de 40 Km. por hora, un vapor ha necesitado 9 días, 14 horas para salvar la distancia que media entre dos puertos. ¿Cuántos días emplearía otro vapor navegando con una velocidad de 47 Km. por hora?

15. Con cierta cantidad de hilo, se han tejido 420 pañuelos de 0'45 m. de largo por 0'32 m. de ancho. ¿Cuántos pañuelos hubieran podido obtenerse, dándoles igual longitud y reduciendo su ancho a 0'28 m.?

16. Nueve zapadores han necesitado 24 días para abrir un foso. Dígase cuántos zapadores serían necesarios para abrir otro foso igual, empleando los mismos días, siendo la resistencia del terreno doble que la del foso anterior.

17. Para esterar un salón, se necesitan 40 metros de una estera cuyo ancho es 0'65 m. Si esta dimensión fuese 0'55 m., ¿cuántos metros de dicha estera se necesitarían?

18. Disponiendo los soldados a 1 metro de separación uno de otro, se necesitan 850 para cubrir cierta distancia. En el supuesto de que se aumentara en 0'05 m. la distancia que les separa, ¿cuántos soldados serían necesarios?

19. Los 14 hombres que tripulan un buque de vela tienen víveres para 49 días; en el caso de que el viaje durase 10 días más, ¿a qué parte de la que toman tendrían que reducir la ración diaria?

20. Para hacer los $^5/_6$ de un trabajo, un obrero emplea 26 días trabajando 9 horas cada día. ¿Qué parte del mismo trabajo puede hacer en 18 días, trabajando igual número de horas cada día?

21. Pagando los tapones trefinos a 49'75 ptas. el millar, ¿cuánto valen 124,800?

22. Dando una muela de molino 450 revoluciones por minuto, hace, en 18 horas, 14 Hl. de harina. ¿Cuántas vueltas por minuto debería dar para hacer, en las mismas horas, 25 Hl.?

23. Una fuente da 4,500 l. de agua en 36 minutos, y otra, 8 Kl., 49 l. en 1 hora. ¿Cuál es la más abundante?

24. Una locomotora recorre 26 Km. por hora, y otra, en 2 horas y 35 minutos, recorre una distancia de 65 Km. y $^1/_2$. Dígase cuál marcha con mayor velocidad.

25. ¿Cuántos tornillos podré adquirir con 128'75 ptas., pagándolos a 14'25 ptas. la gruesa?

(*) Aconsejamos a nuestros comprofesores no dejen de enseñar a sus discípulos la resolución de estos problemas y la de las diferentes cuestiones a que la regla de tres se aplica, por el método de reducción a la unidad a la vez que por el de proporciones.

26. Cargando 3 qq. m. cada viaje, una caballería transportó un montón de corcho en los $^7/_9$ del tiempo señalado de antemano. ¿Qué peso hubiera debido llevar cada viaje para hacer lo mismo, empleando todo el tiempo señalado?

27. Leyendo 20 hojas cada día, necesité 1 $^1/_2$ meses para leer cierto libro. Determínese el número de hojas que diariamente hubiera debido leer para concluirlo en 32 días?

28. En el mismo tiempo que 14 tejedores hacen 120 m. de cierta tela, 26 tejedores hacen 20 $^1/_2$ Dm. Dígase cuáles son los más diestros y por qué.

29. En una ciudadela, hay 2,450 soldados, que tienen víveres para 4 $^1/_2$ meses. Al cabo de 26 días, fallecen 280 individuos: ¿para cuántos días tendrán víveres los soldados restantes?

30. Un buque lleva 38 hombres de tripulación y tiene víveres para 250 días; mas al cabo de 40 días de viaje, recibe a bordo 15 hombres procedentes de otro buque naufragado: ¿cuánto les durarán los víveres de que disponen?

31. ¿Cuál será la altura de una torre cuya sombra mide 12 $^1/_2$ metros, sabiendo que, en el mismo sitio y hora, un bastón de 96 cm. de altura proyecta una sombra de 42 cm. de longitud?

32. Si 1 quintal catalán equivale a 41'6 Kg., ¿cuántas arrobas catalanas pesarán 480 Tm. y $^1/_2$ de carbón mineral?

33. Para empapelar un salón, se han necesitado 300 m. de un papel cuyo ancho es $^3/_4$ de metro: ¿cuántos metros se necesitarían de otro papel cuyo ancho es $^2/_3$ de metro?

34. Se ha comprado vino a 42 ptas. el Hl.: ¿a cuánto debe venderse la misma medida para ganar el 9 por 100?

35. Se ha vendido una cantidad de cacao a 12'25 ptas. el Kg. Habiéndolo comprado a 10'80 ptas. ídem, dígase qué ganancia por 100 se ha obtenido.

36. 180 grados del termómetro Farenheit, equivalen a 100 del termómetro centígrado y a 80 del Reamuur. ¿Cuántos grados del termómetro Farenheit equivalen a 46 del centígrado, y a cuántos grados centígrados equivalen 38 del Reaumur?

37. Se han comprado 40 resmas de papel por 512'25 ptas. ¿A razón de cuánto resulta cada 8 manos?

38. 32 obreros, durante 9 días, han trabajado 12 horas cada día para concluir un trabajo. ¿Cuántos obreros se hubieran necesitado para hacer el mismo trabajo en igual número de días y trabajando 9 y $^1/_2$ horas cada día?

39. Dos piezas del mismo merino tiran 46 m. la 1.ª y 59 m. la 2.ª Si la 2.ª cuesta 130 pesetas más que la 1.ª, ¿qué valor tiene cada pieza?

40. Dos carpinteros han trabajado en un mismo taller, 4'5 días el 1.º y 7 días el 2.º, habiendo cobrado por su trabajo, los dos juntos, 34'5 pesetas: ¿cuánto ha recibido cada uno?

41. Cierto sujeto ha comprado 146 litros de vino por 109'50 ptas. Si hubiese pagado dicha mercadería 0'05 pesetas más cara por litro, ¿qué cantidad de vino hubiera podido comprar?

Reglas de tres compuestas

1. Ocho albañiles, en 6 días, trabajando 9 horas cada día, han levantado una pared. ¿Cuántas horas diarias hubieran tenido que trabajar 5 albañiles, para hacer lo mismo en 10 días?

2. Se necesitan 4 Hl. de habas para mantener 12 caballos durante 45 días. ¿Qué cantidad de habas se necesitará para mantener 7 caballos durante 80 días?

3. Doce obreros, en 9 días, trabajando 7 horas cada día, han ganado 640 ptas. Esto supuesto, ¿cuánto ganarán 25 obreros, en 15 días, trabajando 6 horas cada día?

4. Un maizal de 23'5 áreas ha sido segado por 4 hombres, en 5 días, trabajando 10 horas cada día. ¿Cuántas horas diarias deberían trabajar 6 segadores igualmente diestros, para segar otro maizal doble que el primero, en 8 días?

5. Cuatro mineros, en 9 días, trabajando 8 horas cada día, abrieron un pozo de 18 metros, 45 cm. de profundidad. ¿Cuántos mineros serían necesarios para abrir otro pozo de 15'5 metros, trabajando 5 horas cada día durante 6 días, y tratándose de un terreno de triple resistencia que el anterior?

6. Se sabe que 150 zapadores, trabajando 10 horas diarias, emplearon 14 días para abrir un foso de 200 m. de largo, 2'25 m. de ancho y 3 m. de profundidad. ¿Cuántos días de 8 horas de trabajo cada uno necesitarán 2 brigadas de a 58 hombres cada una, para abrir otro foso de 320 m. de largo, 2 m. de ancho y 2'75 m. de profundidad?

7. Suponiendo que 12 tejedores, en 15 días, ocupándose 11 horas cada día, terminaron una pieza de 90 m. de largo y 1 m. 25 cm. de ancho, ¿qué largo tendría otra pieza, tejida por 10 obreros igualmente hábiles que los anteriores, trabajando 8 horas cada día durante 9 días, en el supuesto de que esta segunda pieza tuviese 1'60 m. de ancho?

8. Seis caballos, cuya fuerza de cada uno puede considerarse en 180 Kgs., conducen un coche cuyo peso es 5,480 Kg. Esto supuesto, si la fuerza de cada caballo fuese 200 Kgs., ¿qué número de caballos se necesitaría para conducir otro coche que pesara 6,200 Kgs.?

9. Seis piezas de franela, de 60 m. de largo y 0'90 m. de ancho, han costado 1,080 pesetas. ¿Cuál será el valor de 8 piezas de la misma tela cuyo largo es 90 m., siendo 1'25 metros su anchura?

10. Ocho carros, tirado cada uno por 3 caballerías, han empleado 6 días de 10 horas de trabajo cada día, para transportar 24,500 m.^{3} de piedra a 2 Km. de distancia. Esto supuesto, ¿cuántos carros, tirado cada uno por 2 caballerías, se necesitarían para transportar 18,500 m.^{3} de piedra a 1,600 m. de distancia, trabajando 9 días y 7 horas cada día?

11. Cuatro mineros, en 5 días, trabajando 6 horas cada día, han abierto un pozo de 26 m. de profundidad y 1'5 m. de diámetro. ¿Cuántos mineros se necesitarían para abrir otro pozo de triple profundidad y doble diámetro que el anterior en la mitad del tiempo antes empleado, trabajando doble número de horas cada día y en un terreno cuya resistencia fuese el cuádruplo que la del terreno anterior?

12. Un buque, tripulado por 14 marineros y llevando 9 pasajeros, emprende un viaje de 45 días. Al cabo de 20 días de navegación, recibe 4 individuos procedentes de otro buque naufragado, y a consecuencia de un temporal, ha de navegar 12 días más de los calculados. ¿Qué ración diaria pueden tomar?

13. Una fuente, en 2 días, manando 14 horas cada día, llena un depósito de 12 m. de largo, 8 m. de ancho y 1'45 m. de profundidad. Otra fuente, en 1 día y 20 horas, manando a razón de 9 horas cada día, llena su depósito, cuyas dimensiones son 8'5 m. de largo, 10 m. de ancho y 2'25 m. de profundidad. ¿Qué fuente es la más abundante?

14. Cuatro piezas de cierta tela, de tiro 45 m. cada una, han costado 6,320 ptas. ¿Cuánto costarán 12 piezas de otra tela, de 30 m. cada una, siendo la calidad de la 1.ª a la de la 2.ª como 3 es a 5?

15. En un depósito, hay el agua suficiente para las necesidades de 120 hombres durante 4 $^1/_2$ meses. ¿Para cuántos días tendrían agua 225 hombres, reduciendo la ración diaria a $^3/_5$ de la anterior?

16. Un obrero ha de hacer dos trabajos tales, que la dificultad del primero es a la del segundo como 3 es a 5. Se pregunta cuántos metros del segundo trabajo podrá hacer en 80 horas, sabiendo que ha hecho 200 metros del primer trabajo en 9 días de 10 horas de trabajo cada día.

17. Pagando los jornales a 3'5 ptas. cada uno, el laboreo de un campo de 6 Ha., 45 a. cuesta a un colono 700 ptas. ¿Cuánto ganaría, diariamente, cada labrador, si el laboreo de otro campo de 4 $^1/_2$ Ha. costase a su propietario 560'75 ptas.?

18. Tomando a destajo cierta obra, 20 individuos han obtenido un jornal diario de 32 ptas., habiendo empleado 40 días. ¿Qué jornal diario sacaría cada obrero, si 16 hiciesen, en 2 meses y 5 días, otra obra igual a la anterior?

19. Un móvil, en 5 días, empleando 8 horas cada día, ha recorrido una distancia de 320 Km., y otro móvil, en 3 días, empleando 10 horas por día, recorrió 280 Km. Averigüese cuál es el más veloz.

Problemas de interés simple y compuesto

I

1. ¿Qué interés producirán, en 1 año, 800 ptas. puestas al 6 %?

2. Determínese el rédito anual de 24,500 ptas., al 8 % de interés.

3. Cierto individuo prestó 60,000 ptas. al 9 % anual. ¿Qué beneficio obtuvo al cabo de 12 meses?

4. El que prestase, por 1 año, 18,000 ptas. al 4 $^1/_2$ % de interés, ¿qué rédito obtendría?

5. ¿Qué capital ha de imponerse al 7 % anual, para obtener 63 ptas. de intereses al cabo de 1 año.

6. Averigüese el capital que debería imponerse al 6 $^1/_2$ % anual, para obtener 1,599 ptas. de interés al cabo de 12 meses.

7. ¿Qué capital se necesita prestar al 5 y $^3/_4$ %, para proporcionarse una renta anual de 1,725 ptas.?

8. El día 24 de diciembre último cobré 720 ptas. en concepto de 1 año de intereses de un capital colocado al 4 % anual. ¿Cuál es este capital?

9. ¿A qué tanto por ciento anual deberán colocarse 900 ptas., para obtener, en 1 año, 54 ptas. de interés?

10. ¿A qué tanto por ciento anual deberían imponerse 90,000 ptas., para producir, en 365 días, 4,275 ptas. de interés?

11. Un caballero, en 15 de marzo de 1890, recibió 72 ptas. en concepto del interés correspondiente a 2,250 ptas. que en 15 de marzo de 1889 prestó a cierto sujeto. ¿A qué tanto p. % hizo el préstamo?

12. Cierto propietario vendió un terreno arbolado por 2,434 ptas., de cuyo importe recibió el correspondiente pagaré, y, 1 año después, recibió la indicada cantidad y 133'87 ptas. en concepto de intereses. ¿Qué tanto p. % anual le produjo su capital?

II

13. El que prestase 36,500 ptas., por 3 años, al 8 % anual, ¿qué interés recibiría al cabo de dicho tiempo?

14. Determínese el beneficio producido por 3,103 ptas., en medio año, al 5 % de interés anual.

15. Se han vendido 320 Ha., 9 a. y $^1/_2$ de terreno de regadío a 233'50 ptas. el Dm.^{2} Si el comprador satisface su importe al cabo de 3 años, abonando además los intereses simples de 4 $^1/_2$ % durante el expresado tiempo, ¿qué suma debe entregar?

16. Se han recibido 6,000 ptas., en concepto del interés simple de 5 años correspondiente a un capital impuesto al 6 % durante el expresado tiempo. ¿Cuál es este capital?

17. Para proporcionarme una renta anual de 2,500 ptas., ¿qué capital he de colocar al $^1/_2$ % mensual?

18. Un caballero quiso asegurar a su esposa una renta diaria de 6 ptas., y al efecto, impuso el capital correspondiente al 4 y $^3/_4$ p. % anual. ¿Qué capital empleó?

19. Un prestamista colocó 8,500 pesetas, y al cabo de 3 años, los intereses simples obtenidos ascendían a 1,785 pesetas. ¿A qué tanto p. % prestó su capital?

20. Al cabo de 5 años de haber impuesto un capital de 32,750 ptas., los intereses simples devengados importaron 9,006'25 pesetas. ¿A qué tanto p. % se hizo el préstamo?

21. Deseando obtener cada semestre 124 ptas. de beneficio, ¿a qué interés por ciento anual deberé colocar 6,200 ptas.?

22. Para redimir un censo anual de 147'1575 pesetas, cuya capitalización se ha convenido al 3 y $^1/_2$ p. %, ¿qué capital se necesita?

23. La redención de un censo anual, capitalizado al 3 y $^1/_2$ p. %, ha importado 4,204'50 pesetas. ¿De cuánto era dicho censo?

24. El redimir un censo anual de 147'1575 ptas., costó a un individuo 4,204'50 pesetas. ¿A qué tanto por % fué convenida la capitalización?

25. ¿Qué renta diaria obtendríamos prestando 18,500 ptas. al 6 y $^7/_8$ p. % anual?

III

26. ¿Qué interés producirán 4,620 ptas., impuestas al 6 p. % anual durante 5 meses?

27. El que prestase, por 160 días, 2,360 pesetas al 4 y $^1/_2$ p. % anual, ¿qué beneficio obtendría?

28. Averígüese el rédito producido por 7,283'50 ptas. prestadas por 6 y $^1/_2$ meses al 9 y $^1/_4$ p. % al año.

29. Colocando 5,012'50 ptas. al 3 y $^8/_9$ p. % al año, durante 7 meses y 20 días, ¿qué beneficio se obtendría?

30. Se han impuesto 42,800 ptas. al interés simple de 5 p. % anual durante 3 años, 4 meses y 25 días. Determínese el beneficio que se obtendrá al finalizar dicho tiempo.

31. ¿Qué cantidad deberá prestarse al 6 p. % anual, para obtener 301'5 ptas. de interés al cabo de 4 meses y medio?

32. Cierto sujeto, al cabo de 120 días de haber prestado una suma al 7 % anual, cobró los intereses correspondientes, que importaron 218'63 pesetas. ¿Cuál era la cantidad prestada?

33. Para obtener 1739'589 ptas. de beneficio al cabo de 8 meses y 9 días, ¿qué suma se deberá colocar al 8 $^1/_2$ p. % anual?

34. ¿A qué tanto p. % anual deberán imponerse 900 ptas. para producir, al cabo de 3 años y 45 días, 168'6575 ptas. de interés?

35. Determínese el tanto p. % anual a que deberían colocarse 6,980 ptas., para obtener, al cabo de 9 meses, 235'575 ptas. de interés.

36. Colocáronse a interés 3,680 pesetas durante 126 días, y el prestador obtuvo un beneficio de 114'332 ptas. Dígase el tanto p. %.

37. Prestáronse 800 ptas. al 6 p. % al año, y al cabo de cierto tiempo, el prestador recibió 24 ptas. de interés. ¿Por cuánto tiempo se hizo el préstamo?

38. Cierto individuo impuso 30,000 ptas. al 8 y $^1/_2$ %, y al cabo de cierto tiempo, recibió 1,718'63 ptas. ¿Por qué tiempo hizo el préstamo?

39. ¿Cuánto tiempo deberían permanecer impuestas al 6 % anual 23.100 ptas. para obtener 752'50 pesetas de interés?

IV

40. ¿A qué interés simple anual debería prestarse una suma para que, al cabo de 40 años, los intereses producidos importasen tanto como el capital prestado?

41. Al cabo de 12 meses de haber prestado una suma al 5 $^1/_2$ %, recibí 554'93 ptas. en concepto de capital e intereses: ¿qué capital presté?

42. ¿Qué capital deberá imponerse al 9 %, para que, al cabo 1 de año, se convierta en 24,525 pesetas?

43. Se impuso un capital al 4'5 p. % durante 4 meses, y transcurrido este tiempo, el prestador recibió 6597'50 ptas., en concepto de capital e intereses devengados. Determínese este capital.

44. Un comerciante, al cabo de 6 meses y 25 días de haber realizado una venta, cobró su importe y el interés de 5 % durante el expresado tiempo, recibiendo, en junto, 33,717'595 pesetas. ¿Cuánto importaban los géneros vendidos?

45. Propusieron a un propietario la venta al contado de una finca valorada en 42,000 pesetas; no accedió, y, 7 meses después, la vendió a 9 meses plazo, con interés de 4'5 %. ¿Cuánto cobró al cumplir los 9 meses?

46. Un propietario ha colocado 12,000 ptas. en cierta casa de banca, al 8 % anual. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que dicha suma se convierta en 12,240 ptas.?

47. ¿Qué es más beneficioso: colocar 6,000 ptas. al 6 % al año, o 3,500 pesetas al 5 y 2,500 al 7?

48. Un sujeto debe 2,000 ptas. al 6 % anual, y amortiza la deuda pagando 150 pesetas cada mes. ¿Cuánto deberá entregar al cabo de 1 año, época de la liquidación?

49. Cierto usurero presta 80 ptas. con beneficio de 2 ptas. cada mes. ¿A qué interés anual resulta?

50. Tengo una casa que consta de 3 pisos y planta baja destinada a almacenes. El alquiler de los almacenes produce 100 ptas. cada mes; el del primer piso, 160 ptas. ídem; el del segundo piso, 120 pesetas ídem, y 90 ptas. ídem el alquiler del piso tercero. Descontando el importe de la contribución anual, ptas. 150'75, reditúa la expresada finca el 4 y $^1/_2$ %: ¿cuál es su valor?

51. Cierto individuo depositó en una acreditada casa de banca 15,200 ptas. al 4 p. % anual. Dos años después, y sin retirar los intereses devengados, falleció, quedando el capital mencionado propiedad de un niño de 7 años, que, al cumplir los 23, cobró el capital depositado y los intereses simples producidos por la referida suma. ¿Cuánto cobró?

52. Vendí una heredad por 36,000 ptas., de las que cobré las tres quintas partes al contado, y el resto, a los 2 años y 5 meses, con los intereses correspondientes al 5 y $^1/_2$ % durante el expresado tiempo. ¿Cuánto recibí?

53. Presté 120,000 pesetas al interés de 5 $^3/_4$ p. % anual, y dicha cantidad me fué devuelta del modo siguiente: 5 meses después, 42,500 ptas.; transcurridos tres meses, 24,000 pesetas, y 7 meses después de la última entrega, recibí el resto con los intereses correspondientes. ¿Cuánto recibí?

54. Cuánto tiempo deberían estar prestadas 9,500 ptas. al 1 y $^1/_2$ % trimestral, para producir un beneficio de 73'70 ptas.?

55. Prestáronme 4,320 ptas. al $^1/_2$ por ciento mensual, durante 9 meses y 20 días. Al cabo de este tiempo, devolví la suma mencionada y los intereses respectivos, descontando, empero, el valor de dos libros pagados por cuenta del prestador, cuyos valores eran 7'45 ptas. el uno y 12'60 ptas. el otro. ¿Cuánto entregué?

56. Un propietario ha comprado un campo de 46 Ha., 35 a. por 12,500 ptas. ¿Por qué cantidad anual debe arrendar la Ha., para que su capital le produzca el 5 % al año?

57. En 25 de enero de 1890, presté 124 ptas., al 1 y $^1/_8$ p. % mensual, y en 15 de noviembre del mismo año recibí capital e intereses. ¿Cuánto recibí?

58. Un capitalista ha colocado 40,000 pesetas del modo siguiente: $^1/_4$, al 5 %; $^2/_5$, al 6 $^1/_2$ %, y el resto, al 4 %. Transcurridos 12 meses, retira todas estas sumas y las presta a un tanto por ciento único, mediante el cual su renta anual ha aumentado en 700 pesetas. ¿A qué tanto por ciento colocó últimamente su capital?

59. Se tienen dos pagarés: uno de 800 ptas. a 6 meses y otro de 1,650 ptas. a 8 meses. Reduciendo estos dos pagarés a uno solo a 12 meses y contando los intereses al 5 % anual, ¿de cuánto será el nuevo pagaré?

60. Cierto sujeto prestó una suma al interés simple de 6 p. % anual, y, 6 años después, retiró su capital cobrando los intereses correspondientes al expresado tiempo, con los cuales pudo adquirir un solar de 2,000 decímetros cuadrados, a 2'25 ptas. el decímetro cuadrado. ¿Qué capital había colocado?

61. Un sujeto compró un campo que debía satisfacer el día 20 de febrero, y no lo hizo hasta el 15 de junio del mismo año, contándole 50 ptas. de intereses al 4 por 100. ¿Cuál es el valor del campo?

62. Los capitales 800 ptas. y 500 ptas. se han puesto a un mismo interés durante 1 año, y la diferencia de intereses, al cabo del expresado tiempo, es 15 pesetas. ¿A qué tanto por ciento se impusieron?

V

63. Dígase el interés compuesto de 2,000 ptas., en 3 años, a razón de 5 por ciento anual.

64. Imponiendo 40,000 pesetas durante 4 años al interés compuesto de 6 por ciento, ¿qué beneficio se obtendría al cabo del expresado tiempo?

65. El que prestase 120,000 ptas. por 3 años y $^1/_2$, al interés compuesto de 4 y $^3/_4$ %, ¿en cuánto vería aumentado su capital?

66. Se han prestado 24,650 ptas. durante 5 años, al 3 $^1/_2$ % de interés compuesto. ¿Cuánto recibirá el prestador por capital e interés?

67. Un padre de familia, al nacer uno de sus hijos, impuso 50 pesetas al interés compuesto de 4 y $^1/_2$ % anual, al objeto de formar un capital con que redimirle del servicio de las armas; pero habiendo fallecido el niño a los 5 años, retiró el padre su capital. ¿Cuánto cobró?

68. Vendiendo 4 Ha., 20 ca. de terreno a 60'70 ptas. la vesana de 900 canas cuadradas (medida agraria de Gerona), y colocando su importe al interés compuesto de 5 y $^3/_4$ por % anual, ¿en qué cantidad se habrá convertido al cabo de 4 años, 3 meses y 20 días?

69. Cierto sujeto debía pagar 2,450 ptas. al cabo de 2 años, y propuso hacerlo por medio de un pagaré a 5 años y 3 meses. ¿De cuánto debió ser el pagaré, añadiendo al capital que lo motivó el interés compuesto de 5 % ?

70. Remití a mi corresponsal en Alicante 120 Hl. de vino tinto para que los vendiera de mi cuenta, y los realizó a 39'75 ptas. el Hl., habiendo satisfecho por mi cuenta los gastos de remesa, que importaron 150 ptas. Sufrió un quebranto inesperado en sus intereses, y propuso firmarme un pagaré del líquido a mi favor a 2 años plazo, abonándome el interés compuesto de 6 %. Averígüese el nominal del pagaré firmado, teniendo en cuenta que corresponde al corresponsal el 5 % por su trabajo de comisión.

Problemas de descuento (*)

I

1. Tengo un pagaré de 800 ptas. que vence al cabo de 1 año, y quiero negociarlo al 6 % de interés: ¿cuánto recibiré?

2. Descontando a razón de 9 % anual una letra de cambio de 4,500 ptas. cuyo plazo es 1 año, determínese la cantidad en metálico que recibirá el tenedor.

3. He tomado a Ruiz un pagaré de 24,000 ptas., a 12 meses, al 12 % de descuento. ¿Cuánto debo entregarle?

II

4. Un documento de crédito que vencía al cabo de 1 año, fué negociado al 5 %, recibiendo el tenedor 11,875 ptas. ¿De cuánto era el documento mencionado?

5. He tomado a R. Luque, al 6'5 % anual, una primera de cambio cuyo plazo es 12 meses, y le he entregado 1,683 ptas. efectivas. Averígüese el nominal del expresado documento.

6. Vendí una finca a cierto individuo, recibiendo un pagaré de su valor a 20 meses plazo; mas transcurridos 8 meses, el deudor me propuso entregar el efectivo mediante un descuento de 5 %. Aceptada su proposición, entregóme 14,060 ptas. ¿En cuánto vendí la referida finca?

III

7. Compré un solar de 120 m., 45 cm. de largo por 60'75 m. de ancho, a razón de 15'25 pesetas el m.^{2}, y satisfice su importe subscribiendo un pagaré a 18 meses. Transcurrido medio año, el estado de mis fondos me permitió recoger el pagaré, para lo cual entregué al vendedor 101,546'35 ptas. ¿Qué tanto % de descuento me concedió?

8. Tenía un pagaré de 15,400 ptas., cuyo plazo era 1 año, y lo cedí a S. Anglada y C.ª, recibiendo 13,937 ptas. ¿A qué tanto % de descuento verifiqué la negociación?

9. En 24 de junio de 1901, vendí una casa por 24,600 ptas., recibiendo la $^1/_2$ al contado y la otra $^1/_2$, en un pagaré al día de San Juan del año siguiente; mas el mismo día de recibirlo lo negocié, cobrando 11,685 ptas. Averígüese el tanto por 100 de descuento.

(*) Como el método *abusivo* es el generalmente empleado en la práctica comercial, los problemas en que no se indique el método seguido en la resolución, se entenderá que es el *abusivo*.

IV

10. Negociando, al interés de 6 % anual, una l/ de 950 ptas. que vence al cabo de 4 meses, ¿qué cantidad recibirá el tenedor?

11. Vendí una partida de géneros que importaron 24,500 ptas., y recibí, en pago, una letra de su valor, a 60 días fecha, que negocié al 12 %. ¿Cuánto recibí?

12. Desconté, al interés mensual de $^2/_5$ %, un pagaré de 496'70 ptas., que vencía al cabo de 3 meses y 26 días. ¿Qué cantidad cobré?

13. Vendí a López y C.ª 124 Hl., 45 l. de vino a 3'75 ptas. el doble Dl., y recibí en pago una letra de su valor, a 30 días fecha, que negocié al 1 % mensual, al cabo de 8 días de haberla recibido. ¿Qué líquido me produjo la venta mencionada?

V

14. Tenía una primera de cambio a 4 meses plazo, y la negocié al 4 $^1/_2$ % anual, recibiendo 1,576 ptas. ¿De cuánto era la letra mencionada?

15. A los 10 días de haber recibido una l/ que vencía al cabo de 55, la negocié al 1 % mensual, recibiendo 472'8987 ptas. Dígase el valor nominal de la letra mencionada.

16. Un comerciante ha vendido una partida de géneros, recibiendo en pago una l/ de su valor a 3 meses y 20 días. Transcurridos 15 días, procede a su negociación al 9 % anual, recibiendo 4,199'274 ptas. efectivas. ¿De cuánto era la l/ mencionada?

VI

17. Cierto comerciante vendió una partida de vino, recibiendo en pago una l/ de 4,680 ptas., a 30 días, que negoció cobrando 4,656'921 ptas. ¿A qué tanto por ciento se hizo la negociación?

18. Averigüese a qué tanto % de descuento fué negociado un pagaré de 440 ptas., que vencía al cabo de 15 días, habiendo recibido el tenedor 437'831 ptas. efectivas.

19. Vendí 40 Hl. y $^1/_2$ de trigo candeal a 14 ptas. la cuartera de 70 litros; cobré la $^1/_2$ al contado y la otra mitad en l/ c/. Rubio a 60 días, que negocié 20 días después, recibiendo 400'562 ptas. ¿A qué tanto % hice la negociación?

VII

20. Una letra de 1,600 ptas. ha sido negociada al 4 $^1/_2$ %, recibiendo el tenedor 1,576 pesetas efectivas. ¿Cuánto le faltaba para vencer?

21. Negocióse un documento de crédito de 6,500 ptas. al 5 $^3/_4$ % anual, convirtiéndose en 6,459'042 ptas. efectivas. ¿Cuánto faltaba para su vencimiento?

22. Determínese cuánto faltaría para el vencimiento de una letra de 6,600 ptas. que, negociada al 12 %, ha producido 6,458'959 ptas. efectivas.

VIII

23. Hállese, por e método real, el valor efectivo de un pagaré de 4,400 ptas., cuyo plazo es 1 año, negociado al 12 %.

24. En pago de la venta de una finca, recibí un pagaré de 12,600 ptas., a 14 meses plazo, que cobré 2 meses después mediante un descuento racional de 9 $^3/_5$ %. ¿Cuánto cobré?

25. Averigüese, por el método real o racional, el valor efectivo de una 2.ª de cambio de 8,850 ptas., que ha de cobrarse dentro de 4 meses, habiéndose pactado su negociación al $^1/_2$ % mensual.

26. Tenía una letra de 1,250 ptas. que vencía al cabo de 2 meses y 20 días, y la negocié al 7 y $^8/_9$ % descuento real, empleando el líquido en harina de a 24'50 ptas. el quintal métrico. ¿Qué cantidad de harina pude comprar?

IX

27. Hállese el descuento que corresponde a cada una de las facturas siguientes:

1.ª	De	2500	ptas. al	1	%	8.ª	De	12846'50	ptas. al	8 $^3/_9$	%
2.ª	»	5400	» »	2	»	9.ª	»	4579'7863	» »	9 $^1/_5$	»
3.ª	»	620	» »	3	»	10.ª	»	880	» »	10	»
4.ª	»	560	» »	4	»	11.ª	»	4678	» »	5	»
5.ª	»	4300	» »	5 $^7/_8$	»	12.ª	»	9986'25	» »	6	»
6.ª	»	1262'75	» »	6 $^1/_2$	»	13.ª	»	9000	» »	12	»
7.ª	»	4497'875	» »	7 $^2/_5$	»	14.ª	»	20000	» »	15 $^1/_2$	»

28. Descontando las facturas siguientes al tipo señalado por cada una, ¿qué valores se obtendrán?

1.ª	De	20000	ptas. al	$^1/_2$	%	6.ª	De	430'89	ptas. al	1 $^3/_4$	%
2.ª	»	1500	» »	$^3/_5$	»	7.ª	»	5563'50	» »	2 $^1/_4$	»
3.ª	»	8500	» »	3 $^1/_8$	»	8.ª	»	9900	» »	9 $^5/_6$	»
4.ª	»	496	» »	$^1/_3$	»	9.ª	»	7700	» »	11 $^1/_5$	»
5.ª	»	6720'50	» »	10 $^1/_2$	»	10.ª	»	24480	» »	6 $^4/_5$	»

X

29. En abril último, compré varios géneros a Badía y Colomer, de Valencia, por valor de 6,500 ptas., a 8 meses plazo, conviniendo en abonarles un interés de 5 % sobre dicha cantidad, durante el tiempo mencionado, de cuyo total, ptas. 6,716'66, suscribí un pagaré. Tres meses después, convine con dichos señores en recoger el documento mencionado. ¿Cuánto tuve que entregarles?

30. Vendí a Albareda y Compañía 850 qq. métricos de corcho a 8'70 ptas. el quintal m., conviniendo el pago a los 90 días, cobrando, empero, un interés de 4 $^1/_2$ % durante el tiempo mencionado, y al efecto, me entregaron una l/ de 7,477'054 ptas., valor de los géneros e intereses convenidos. Transcurridos 30 días, dichos señores me propusieron recoger la letra mencionada, y acepté su ofrecimiento. ¿Cuánto recibí?

Vencimiento común de pagos

1. Nos han de pagar 200 pesetas a los 3 meses; 500 pesetas a los 5 meses, y 1,200 pesetas a los seis meses. Queriendo hacer el pago en un solo plazo, ¿en qué época deberá efectuarse?

2. He comprado varios géneros por valor de 42,500 ptas., y entrego 3 letras: la 1.ª, de 30,000 ptas., a 2 meses plazo; la 2.ª, de 1,000, a 3 meses y 20 días, y la 3.ª, del valor del resto, a 4 meses y $^1/_2$. Conviniendo con el vendedor hacer el pago en un solo día, ¿cuándo será la fecha del vencimiento?

3. Deben cobrarse 600 pesetas a los 7 meses; 850 ptas. a los 9 meses; 4,500 a los 12 meses, y 6,252 a los 14 meses. Averígüese la época del vencimiento común.

4. Un tendero compró 45 Hl. de vino a 50'75 ptas. el Hl., y 9 Hl., 45 litros de aceite a 113'50 ptas. el Hl., entregando en pago 2 letras: la 1.ª, de 2,000 pesetas al 20 de abril, y la 2.ª, del resto, al 10 de mayo. No habiendo podido hacer efectiva la 1.ª, convienen satisfará las dos en un día determinado: ¿cuál es la fecha de este vencimiento, sin que resulte quebranto para el pagador ni el cobrador?

5. Un comerciante ha de pagar las facturas siguientes: la 1.ª, de 500 ptas., al 10 de enero; la 2.ª, de 860 ptas., al fin de enero; la 3.ª, de 1,500 ptas., al 31 de marzo, y la 4.ª, de 950, al 20 de abril. Conviniendo extender un pagaré del valor de todas, ¿qué fecha será la de su vencimiento?

6. Han de hacerse efectivas 5 sumas: 2,000 ptas., al contado; 390 ptas. a los 2 meses; 1,720 ptas., a 3 meses y 20 días; 3,800 ptas., a los 60 días, y 1,600 ptas., a 120 días. Hállese el vencimiento común.

7. Un banquero tiene 3 letras a c/ de una misma persona: 800 ptas. al 1.º de octubre; 1,000 ptas. al 25 del mismo mes, y 2,650 ptas. al 10 de noviembre. Convienen en que el pagador las hará efectivas en un solo pazo. ¿Qué día será?

8. El día 20 de marzo, un comerciante ha vendido harinas por 1,650'70 pesetas, que cobrará como sigue: 800 ptas., a 30 días; 650 ptas., a 60 días, y el resto, a 90 días. Hállese el vencimiento medio de la suma que ha de cobrar.

9. Un comerciante adeudaba a un banquero: 6,000 pesetas, que debía hacer efectivas a los 4 meses; 4,000 pesetas, a los 5 meses, y 8,000 pesetas, a los 8 meses. Convinieron hacer dichos pagos en un día único; mas 3 meses antes de este día, el deudor entregó 10,000 pesetas a cuenta. ¿Cuánto tiempo pudo retener el resto en su poder, sin que resultase perjuicio para ambos?

10. Vendí varios géneros por valor de 24,500 pesetas, recibiendo una l/ al 3 de febrero del valor de las $^2/_5$ partes; otra al 10 de marzo, del valor de la cuarta parte de la mencionada cantidad, y otra del valor del resto, al 20 de abril. Pocos días antes del vencimiento de la l/ primera, el pagador me propuso satisfacer, en un solo plazo, sus tres mencionados compromisos, y aceptada su proposición, me entregó un pagaré equivalente. ¿En qué época vencía?

Repartimientos proporcionales

1. Divídase el número 1,200 en partes proporcionales a los números 2, 3 y 5.

2. Si el número 8,700 se divide en partes proporcionales a 8, 12, 9 y 16, ¿qué resultados se obtendrán?

3. Tres individuos han de repartirse 24,560 ptas., de modo que, cuántas veces tome el 1.º 5 ptas., el 2.º, tome 4 y 3 el 3.º ¿Cuánto recibirá cada uno?

4. Repártase el número 7,500 en partes proporcionales a $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_3$ y $^1/_5$.

5. Dividir el número 6,420 en partes proporcionales a los números $^2/_3$, $^3/_5$ y $^1/_2$.

6. Un individuo, al fallecer, legó 124,500 ptas. para que fuesen invertidas en material de enseñanza con destino a las cuatro escuelas de su villa natal, añadiendo que dicha cantidad fuese distribuída en partes proporcionales a los niños matriculados en cada uno de los referidos establecimientos. Concurriendo 250 niños a la 1.ª escuela, 160 a la 2.ª, 125 a la 3.ª y 96 a la 4.ª, ¿cuánto deberá recibir cada escuela?

7. Cuatro obreros han recibido 650 ptas. por un trabajo: el 1.º ha hecho los $^{2}/_{5}$; el 2.º, $^{1}/_{3}$; el 3.º, los $^{2}/_{7}$, y el 4.º, el resto. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

8. Una fuente tiene 4 caños iguales, los cuales han manado 12,600 litros. El 1.º ha estado abierto 1 hora y 20 minutos; el 2.º, 90 minutos; el 3.º, 1 hora y 15 minutos, y el 4.º, 1 hora y $^{3}/_{4}$. ¿Cuántos litros ha dado cada caño?

9. Se han entregado 240 ptas. a dos obreros que han hecho un trabajo. El 1.º se ha ocupado en él 8 horas diarias durante 5 días, y el 2.º, 9 horas diarias durante 3 días. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

10. Un padre reparte su fortuna entre sus tres hijos de la manera siguiente: al primero, 18,000 ptas.; al 2.º, 15,000 ptas., y 12,800 ptas. al 3.º Los tres han de asegurar a un tío imposibilitado una renta diaria de 7 ptas. ¿Con qué cantidad anual ha de contribuir cada uno?

11. Distribúyanse 45,000 pesetas entre una mujer, 2 niñas y 1 niño, de modo que cada niña reciba doble que el niño, y la mujer, tanto como el niño y una niña.

12. Repártanse 19,500 ptas. entre tres personas, de modo que la 1.ª reciba doble que la 2.ª, y ésta, triple que la 3.ª ¿Cuánto recibirá cada una?

13. Un comerciante sólo puede dar a sus acreedores 24,500 ptas. Debe al 1.º 30,000 pesetas; al 2.º, 25,300 ptas.; al 3.º, 18,560 ptas., y 42,600 ptas. al 4.º ¿Cuánto cobrará cada uno?

14. Tres brigadas de obreros emprendieron un trabajo que duró 20 días, por el que han cobrado 3,400 pesetas. La 1.ª brigada se componía de 12 hombres; la 2.ª, de 15, y la 3.ª, de 21. ¿Cuánto ha ganado cada brigada?

15. Repártanse 15,600 ptas. entre 4 personas, de modo que la 1.ª tenga $^{1}/_{5}$ más que la 2.ª; ésta, $^{1}/_{4}$ más que la 3.ª, y ésta, doble que la 4.ª ¿Cuánto cobrará cada una?

16. Tres comerciantes han cargado un buque entregando cada uno géneros de igual clase y precio: el 1.º ha entregado géneros por valor de 12,600 pesetas; el 2.º, por valor de 24,500 ptas., y el 3.º, por valor de 30,975 ptas. La venta de dichos géneros ha producido 20,680 ptas. de beneficio. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

17. Dispuso un padre que su fortuna fuese repartida entre sus tres hijos en partes proporcionales a los años de cada uno. El 1.º tenía 15 años, y le correspondieron 8,500 pesetas; el 2.º tenía 12 años, y 9 años el 3.º Averígüese la fortuna del padre y la parte que correspondió a cada uno de los otros dos hijos.

18. Repártanse 180 ptas. entre dos personas, de modo que la parte de la primera sea los $^{4}/_{5}$ de la parte de la segunda.

19. Cierto individuo reparte su fortuna entre sus tres hijos: da al primero $^{1}/_{4}$, al 2.º, $^{2}/_{3}$ y al 3.º, 8,700 ptas. Dígase el capital del padre y la parte de cada uno de los otros dos hijos.

20. Repártanse 1,250 ptas. entre tres personas, de modo que la 2.ª reciba tres veces más que la 1.ª, y la 3.ª, la $^{1}/_{2}$ de lo que hayan recibido la 1.ª y la 2.ª juntas.

Problemas de compañía

I

1. Tres individuos juntaron sus capitales para la explotación de un negocio. El 1.º contribuyó con 5,000 pesetas; el 2.º, con 8,200 ptas., y con 10,000 ptas. el 3.º Ganaron 12,500 pesetas. ¿Cuánto correspondió a cada uno?

2. Asociáronse cuatro amigos para establecer una casa de comisiones. El 1.º contribuyó a la formación del capital social con 3,000 ptas.; el 2.º, con 2,500 ptas.; el 3.º, con 1,360 ptas,. y el 4.º, con 943 ptas. En 1 año, perdieron 2,800 ptas. ¿Cuánto correspondió a cada uno?

3. Tres individuos han puesto en un fondo común: el 1.º, 4,600 ptas.; el 2.º, 5,906 pesetas, y el 3.º, 3,350 ptas. Después de varias compras y ventas, hallan una ganancia de 6,500 pesetas. ¿Qué parte corresponde a cada uno?

4. Juan, Antonio y Luis reunieron 42,600 pesetas: el 1.º puso el tercio de esta cantidad; el 2.º, los $^{2}/_{5}$, y el resto, el 3.º Al cabo de 2 años, su capital social ascendía a 50,000 pesetas. ¿Cuánto había ganado cada uno?

5. Dos sujetos compraron una finca por 48,500 pesetas, y, cuatro meses después, la vendieron por 46,125 ptas. El 1.º había interesado 25,000 ptas., y el 2.º, lo demás. ¿Cuánto perdió cada uno?

6. Cuatro comerciantes compraron un buque por la suma de 90,000 ptas. Al cabo de cierto tiempo, procedieron a su venta, ganando el 1.º 3,500 ptas.; el 2.º, 4,000; el 3.º, 4,200, y 4,800 el 4.º: ¿con qué cantidad intervino cada uno en la compra del buque?

7. Rodríguez y Lorente, comerciantes, emprendieron un negocio para cuya realización necesitaron reunir 10,000 ptas., obteniendo, al fin, el 1.º, un beneficio de 2,160 pesetas, y el 2.º, de 1,440 ptas. ¿Qué cantidad puso cada uno?

8. Asociáronse tres individuos y al cabo de cierto tiempo, el 1.º, que había puesto 5,000 pesetas en el fondo social, retiró una ganancia de 3,333'333 pesetas, y el 2.º obtuvo por el mismo concepto, 3,066'667 ptas. Siendo 12,600 ptas. el capital social, averigüese el capital del 2.º y la ganancia del 3.º, sabiendo que éste intervino en el negocio con 3,000 pesetas.

II

9. Cierto individuo empezó la explotación de un negocio con 1,250 ptas. de capital; medio año después, uniósele un sobrino suyo con 2,300 ptas., y 4 meses después, juntóseles un tercero con 1,000. Al cabo de 14 meses, el balance social dió un beneficio de 1,870 pesetas. ¿Qué ganancia correspondió a cada uno?

10. Cuatro individuos hicieron un fondo común: el 1.º puso 4,500 ptas. durante 2 años; el 2.º, 3,250 ptas. durante 1 año y 8 meses; el 3.º, 2,000 ptas. durante 1 año y 4 meses, y el 4.º, 1,500 ptas. durante 10 meses. Después de verificar varias compras y ventas, hallaron un beneficio de 4,000 ptas. ¿Cuánto correspondió a cada uno?

11. Un comerciante empleó 4,500 ptas. en el negocio de exportación de frutos secos. Transcurridos 8 meses, otro comerciante interesó 3,000 ptas. en el negocio, y 5 meses después, un tercer comerciante asocióse a ellos aportando 2,600 ptas. Al cabo de 1 año y 10 meses, el balance social arrojó una pérdida de 650 pesetas. ¿Qué parte correspondió a cada uno?

12. Tres albañiles convinieron tomar a destajo la construcción de una casita, para lo cual aprontaron: 2,000 ptas. el 1.º, 1,900 ptas. el 2.º y 1,400 ptas. el 3.º Agotáronse los fondos 5 semanas después, y el 1.º desembolsó 400 ptas., el 2.º 300 y 500 el 3.º Diez semanas después de empezada la obra, dieron por terminada su misión, recibiendo 8,600 pesetas. ¿Qué parte correspondió a cada uno?

13. Pedro y Juan emprendieron un negocio, interesando el 1.º en 20,000 ptas. y en 14,500 ptas. el 2.º Al cabo de 8 meses, las necesidades sociales exigieron nuevos desembolsos, y al efecto, el 1.º puso 500 ptas. y 600 ptas. el 2.º, admitiendo, 2 meses después, a Francisco, quien aportó al fondo social 4,400 ptas. Transcurridos 20 meses, hallaron 4,000 pesetas de pérdida. ¿Cuánto perdió cada uno?

14. Asociáronse dos individuos para emprender un determinado negocio, contribuyendo el 1.º con 30,000 ptas., y con 20,600 el 2.º Al cabo de 5 meses, el 1.º retiró 5,000 pesetas, y el 2.º, 1,300. Obtuvieron 10,000 ptas. de pérdida, y su compañía duró 1 año. ¿Cuánto perdió cada uno?

15. Tres individuos compraron una mina en 60,000 ptas., desembolsando 20,000 pesetas el 1.º, 25,800 ptas. el 2.º y el resto el 3.º Empezáronse los trabajos de explotación, y, 4 meses después, admitían a un cuarto socio, quien aportó 6,400 ptas.; el 1.º puso entonces 900 pesetas más, el 2.º puso 3,200 y el 3.º retiró 600 ptas. del fondo de la sociedad. Al cabo de 1 $^1/_2$ años, vendieron la mina en 100,000 ptas. ¿Cuánto ganó cada uno?

16. Asociáronse tres individuos para la fabricación de tapones de corcho. El 1.º puso 128 qq. m. de corcho de a 29 ptas. el q. y 2,000 ptas. en metálico; el 2.º, 250 qq. m. de corcho trefino, de a 60 ptas. el q.; el 3.º, 90'75 qq. m. de corcho de a 18 ptas. el q. y 2,500 ptas. en metálico, admitiendo a un cuarto socio como director de la fabricación, a quien aseguraron un jornal diario de 7'50 ptas. y el 10 % de los beneficios que la sociedad realizase. Transcurridos 6 meses, el 1.º puso 7,500 pesetas, y 2 meses después, el 3.º retiró 800 ptas. Al cabo de 2 $^1/_2$ años, hubieron ganado 15,000 ptas. ¿Qué parte de ganancia retiró cada uno?

17. Asociáronse tres comerciantes: el 1.º puso $^1/_5$ del capital social; el 2.º, $^1/_3$ de ídem, y el 3.º 5,600 ptas. Averigüese el capital de cada uno y el capital social.

18. Se han constituido en sociedad cuatro individuos: el 1.º ha puesto $^1/_8$ del capital social; el 2.º, $^1/_6$; el 3.º, $^2/_3$; el 4.º, 5,375 ptas. Determínese el capital de cada uno y el capital social.

19. Asociáronse tres individuos, y al cabo de cierto tiempo, se repartieron los beneficios obtenidos. El 1.º percibió los $^4/_8$ del beneficio social; el 2.º, $^1/_4$ del resto, y el 3.º, el sobrante. ¿Qué parte del beneficio recibió cada uno?

20. Tres individuos se repartieron el beneficio obtenido en cierto negocio: el 1.º recibió $^1/_5$; el 2.º, $^1/_3$, y el 3.º, 7,000 ptas. ¿Qué cantidad correspondió al 1.º y al 2.º, y cuál fué el beneficio social?

Conjunta

1. ¿Cuántos duros valen 46 qq. m. de cierto género, a razón de 25 rs. los 30 Kg.?

2. Pagando el algodón en rama a 7 duros los 100 Kgs., ¿cuántas pesetas deberá desembolsar un fabricante por la compra de 120 balas, de 1 qq. y 3 arrobas (peso catalán) cada una?

3. Si 3 libras, moneda catalana, equivalen a 8 pesetas, ¿a cuántos reales equivaldrán 4,500 libras?

4. He comprado 470 qq., 3 arrobas de azufre, peso catalán, a razón de 18'75 pesetas el quintal castellano. ¿A cuánto resulta el Kg.?

5. Si 22 pies ingleses equivalen a 24 pies españoles, ¿a cuántos de éstos equivaldrán 450 de los primeros?

6. Si 4 libras catalanas de cierta droga valen 160 reales, ¿cuánto valdrán 100 Kg., sabiendo que 1 quintal catalán equivale a 41'6 Kg.?

7. Suponiendo que 1 libra esterlina equivale a 25 francos, y 5 francos, a 19 reales, ¿cuántos duros serán 860 libras esterlinas?

8. Sabiendo que 15 libras catalanas equivalen a 8 duros, y que 1 franco equivale a 0'95 pesetas, ¿qué relación existe entre el franco y la libra catalana?

9. Sabiendo que cada 16 durillos de aumento equivalen a 17 duros, y que 3 libras catalanas equivalen a 8 ptas., hállese la relación que existe entre la libra catalana y el durillo de aumento.

10. Sabiendo que el ducado de Castilla equivale a 11 reales vellón, y que el franco equivale a 0'95 ptas., determínese la relación que existe entre el franco y el ducado.

11. Teniendo la cana de Gerona 1'559 metros, y equivaliendo la vara de Castilla a 0'836 metros aproximadamente, hállese la relación entre la vara y la cana gerundense.

12. Teniendo en cuenta las relaciones mencionadas en el anterior problema, hállese la relación entre el pie castellano y el palmo de Gerona.

13. Un comerciante catalán ha comprado a un comisionista de Mallorca 120 millares de naranjas a 4 libras mallorquinas el millar. Averígüese el número de pesetas que ha debido entregar, teniendo en cuenta que 3 libras mallorquinas equivalen a 2 duros.

14. ¿Qué relación existe entre el duro y la libra valenciana, sabiendo que 17 libras valencianas equivalen a 64 pesetas?

15. ¿Cuántos duros deberá abonar un tendero catalán por la compra de 4,000 Kg. del arroz que ha adquirido en Valencia, a razón de 5 libras valencianas cada 100 Kg.?

16. Si 17 libras aragonesas o jaquesas equivalen a 16 duros, ¿qué relación existe entre la peseta y el sueldo aragonés, sabiendo, además, que la libra aragonesa tiene 20 sueldos?

17. Pagando cierto género a razón de 14'75 ptas. la cana de Barcelona, ¿a cuánto resulta el metro?

18. Si 40 cuarteras de trigo (medida de Gerona) importaron 120 duros, 4 pesetas y $^1/_2$, ¿a cuánto resulta el doble decalitro, teniendo en cuenta que la cuartera equivale a 72'32 litros?

19. He comprado en Inglaterra 4,200 T. m. de carbón mineral a 1'5 libras esterlinas cada 4 toneladas. — ¿Cuántos duros me costará la letra que deberé tomar para satisfacer la compra mencionada, si por cada libra esterlina en letra he de abonar 25'20 ptas.?

20. He comprado a un fabricante de Berlín una cantidad de géneros que ha importado 6,500 marcos. — ¿Cuántos duros me costará la letra que deberé remitirle, si el banquero me la cede a razón de 1'23 ptas. por marco?

Aligación

I

1. Un tratante en vinos tiene 7 Hl. de a 60 ptas. uno; 26 Hl., de a 48'50 ptas. ídem; 32 Hl., de a 48 ptas. ídem, y 2 Hl., de a 40 ptas. Si mezcla estas cantidades, ¿cuál es el valor de 1 Hl. de la clase que resulta?

2. Se han mezclado 9 Hls. de trigo de a 18 ptas. el Hl.; 12 Hls., de a 16 ptas.; 7 Hls., de a 15'50 ptas., y 35 Hls., de a 14 ptas. ídem. ¿A cuánto resulta el Hl. de mezcla?

3. Mezclando 30 qq. m. de harina de a 24 ptas. el quintal con 12 qq. m. de a 18'50 pesetas ídem, ¿a cuánto resulta el quintal m. de mezcla?

4. Mezclando 850 litros de ron de 32º con 70 litros de 26º, ¿de cuántos grados saldrá la mezcla?

5. Un cocinero mezcla 32 litros de agua a la temperatura de 0 grados con 56 litros de 80º y 44 litros de 65º. — ¿Qué temperatura tiene el agua que resulta?

6. Mezclando 250 litros de vino de a 0'40 ptas. el litro, con 168 litros de a 0'60 pesetas ídem y 90 litros de agua, ¿a cuánto resulta el litro de mezcla?

7. Se han fundido 2 lingotes de oro: el primero pesa 3 Kg., 45 g., y su ley es 800 milésimas; el segundo pesa 1 Kg., 20 g., y es a la ley de 670 milésimas. — ¿Cuál es la ley de la aleación?

8. Fundiendo 45 Hg. y $^1/_2$ de oro puro y 30 g. de cobre, ¿a qué ley resulta la aleación?

II

9. Uno tiene aguardiente de 4 clases: de a 6 ptas. el Dl., de a 4 ptas. ídem, de a 3 ptas. ídem y de a 2'50 ptas. — ¿En qué relación deberá hacerse su mezcla, deseando vender la clase que se obtenga a 3 $^1/_2$ ptas. el Dl.?

10. Dada la relación obtenida en el problema anterior, hallar otras tres distintas relaciones.

11. Deseando obtener vino de a 60 ptas. el Hl. con vino de a 80, de a 72, de a 58, de a 56 y de a 55, ¿en qué relación deberá hacerse la mezcla de las cinco clases mencionadas?

12. Dada la relación obtenida en el anterior problema, hallar 6 distintas relaciones.

13. Un platero necesita oro de 22 quilates, y sólo tiene de 18, de 23 y de 23 y $^1/_2$. ¿En qué relación deberá alear estas tres clases?

14. Un tendero quiere proporcionarse arroz de a 0'50 ptas. el Kg. con arroz de 4 distintas clases, cuyos precios son: 0'70 ptas., 0'55 ptas., 0'45 ptas. y 0'30 ptas. el Kg. ¿En qué relación deberá mezclar las cuatro clases mencionadas?

III

15. Un comerciante en cereales tiene maíz de a 14 ptas. el Hl., y 20 Hl. de a 11 pesetas. ¿Cuántos Hl. de la primera clase deberá mezclar con los 20 de la segunda, a fin de vender el Hl. de mezcla a 13 ptas.?

16. El comerciante que se menciona en el anterior problema tiene 40 Hl. de trigo de a 14 ptas. uno, y quiere mezclarlos con trigo de a 16 ptas. y de a 18'50 pesetas. ¿Cuántos Hl. de cada una de estas dos últimas clases deberá tomar, deseando vender a 15'50 pesetas el Hl. de mezcla?

17. Un fabricante de tapones de corcho tiene 46,500 tapones modelo, cuyo precio es 18 pesetas el millar, y deseando mezclarlos con tapones modelo de a 14, 16 y 13'5 pesetas el millar, ¿cuántos tapones deberá tomar de cada una de estas tres últimas clases, para que el millar de mezcla resulte a 15 y $^1/_2$ pesetas?

18. ¿Cuántos litros de aguardiente de 32º deberán mezclarse con 120 litros de 24º, para obtener aguardiente de 26º?

19. ¿Cuántos litros de agua deberán añadirse a 800 litros de vino de a 0'75 pesetas uno, para vender la mezcla a 0'50 ptas. el litro?

20. Un tratante de aceites tiene existencias de a 5, 6, 9 y 12 ptas. el Dl. ¿Cuántos Dl. de cada una de estas cuatro clases deberá mezclar con 1,600 litros de otra clase cuyo precio es 12'5 ptas. el Dl., a fin de que el aceite de mezcla le resulte a 7 ptas. el Dl.?

21. ¿Cuántos litros de vino de a 0'50 ptas. uno deberán mezclarse con 60 litros de a 0'40 ptas., y 42 litros de a 0'32 ptas., deseando vender la mezcla a 0'45 pesetas el litro?

22. Un almacenista tiene maíz de a 16 ptas. el Hl., de a 14 ptas., de a 12 ptas. y de a 11 ptas., y quiere proporcionarse maíz de a 15 ptas. el Hl., tomando 30 Hl. de la 3.ª clase y 20 Hl. de la 4.ª ¿Cuántos Hl. de la 1.ª clase y cuántos de la 2.ª entrarán en esta mezcla?

IV

23. ¿Cuántos quintales m. de harina de a 20 ptas. y de a 16 ptas. deberán tomarse para obtener 60 qq. m. de a 17'75 ptas.?

24. Un platero tiene oro de tres clases: de 750 milésimas, de 800 milésimas y de 900 milésimas. ¿Cuántos gramos de cada clase deberá tomar para que le resulte un lingote de 40 gs., a la ley de 850 milésimas?

25. Piden a un tabernero 100 Dls. de vino de a 4 ptas. el Dl., y sólo tiene de a 3'50 pesetas, de a 4'75 ptas., de a 5'25 ptas. y de a 6 ptas. ¿Cuántos Dl. deberá tomar de cada clase para obtener los 100 Dls. mencionados?

26. Se quieren obtener 640 litros de alcohol de 20º, con alcohol de 18º y de 30º. ¿Cuántos litros de cada clase deben entrar en la mezcla?

27. Un almacenista de vinos ha vendido 1,250 litros por 625 ptas., cuyo género se ha proporcionado con vino de a 0'30 ptas., de a 0'45 ptas. y de a 0'60 ptas. el litro. ¿Cuántos litros ha necesitado de cada clase?

28. Un pirotécnico ha de entregar 40 Kg. de pólvora, cuyo valor es 120 ptas. Teniendo solamente pólvora de a 2'50 ptas. el Kg. y de a 3'75 ptas. idem, ¿cuántos Kg. tomará de cada clase?

V

29. Se tienen dos clases de vino cuyos precios son, respectivamente, 45 y 60 pesetas el Hl. Para proporcionarse una tercera clase cuyo precio sea 50 pesetas el Hl., y deseando que entren en la mezcla 25 Hl. más de la 1.ª clase que de la 2.ª, ¿cuántos Hl. de cada clase se tomarán?

30. Cierto individuo posee cacao de dos clases, cuyos precios, respectivamente, son 3 y 8 ptas. el Kg. Deseando obtener una tercera clase de 5 ptas. el kilo, tomando 100 Kg. más de la 1.ª clase que de la 2.ª, ¿cuántos Kg. de cada clase deberá mezclar?

31. El dueño de un comercio de géneros ultramarinos tiene arroz de a 29 y de a 25'50 pesetas el q. m., y desea obtener una tercera clase para venderla a 27'70 ptas. el q. m. Queriendo que entren en la mezcla 10 qq. m. más de una clase que de otra, ¿cuántos quintales métricos de cada clase deberá tomar?

32. Un comerciante tiene arroz de dos clases: la 1.ª le cuesta a 28 ptas. el quintal métrico, y la 2.ª, a 5 ptas. los 25 Kgs. Queriendo proporcionarse arroz de a 25 ptas. el quintal m., y que entren en la mezcla 24 qq. m. menos de la 2.ª clase que de la 1.ª, ¿cuántos qq. m. de cada clase deberá tomar?

VI

33. He comprado 20 quintales m., 30 Kgs. de azúcar a 24'50 ptas. el q. m., y 16 quintales métricos, 9 Kg. de azúcar a 5'75 ptas. cada 25 Kgs. ¿A cuánto resulta el kilo de mezcla?

34. Si al vender mezclados los géneros que se detallan en el problema anterior, quisiéramos obtener un beneficio de 20 %, ¿a cuánto tendríamos que vender el quintal métrico?

35. Tengo algarrobas de a 8 ptas. el q. m., de a 2'25 ptas. los 25 kilos y de a 6'50 ptas. el quintal m. ¿En qué relación deberían mezclarse dichas tres clases, para obtener una cuarta clase de a 7'50 ptas. el quintal m.?

36. El latón se compone de 33 partes de zinc y 67 de cobre. ¿Qué cantidad de cobre y de zinc habrá en 28 Kg. de latón?

37. Se tienen 250 litros de vino de Málaga que valen 500 ptas. ¿Qué cantidad de agua se deberá añadir para vender la mezcla a 1'50 ptas. el litro y ganar 80 ptas.?

38. Se ha mezclado cacao de a 7 ptas. el kilo con cacao de a 4 ptas., obteniendo 80 Kgs. cuyo valor es 400 ptas. ¿Cuántos Kgs. han entrado de cada clase?

39. Dos obreros, trabajando el primero 5 horas y el segundo 7 horas, han hecho 24 metros de un tejido. Los mismos obreros, trabajando 8 horas el primero y 3 horas el segundo, han hecho 22 metros: ¿cuántos metros ha hecho cada uno, siendo igual su habilidad?

40. Tengo dos lingotes de oro, uno puro y el otro de 20 quilates. Se ha hecho una aleación en la proporción de 4 : 7: ¿cuál es la ley del oro que resulta? (*)

41. Cierto individuo posee un lingote de oro de 850 milésimas que pesa 45 gramos. ¿Qué cantidad de cobre se deberá añadir para rebajarlo a la ley de 760 milésimas?

42. Con 20 Hls. de trigo de a 18 ptas. uno, se han de mezclar 10 Hls. de otra clase para vender la mezcla a 16 ptas. ¿De qué precio serán los 10 Hls. que hay que añadir a los 20 de la clase primera?

43. Se tienen 30 litros de agua a la temperatura de 60º, y se quieren 42 litros a la temperatura de 50º. Determínese la temperatura del agua que se habrá de añadir.

44. Un almacenista de harinas ha de servir un pedido de 2,300 Kg. a 17 pesetas el quintal castellano, y sólo tiene 20 quintales castellanos de a 20 pesetas. ¿De qué precio deberán ser los quintales que habrá de adquirir para mezclar con los 20 mencionados?

45. Cierta corporación ha encargado a un platero la construcción de un objeto de arte, para lo cual el artista ha necesitado lo siguiente: 20 Dgs. de plata de 900 milésimas, 14 Dgs. a la ley de 650 milésimas, 3 Dgs. de estaño y 5 de cobre. ¿A qué ley resulta el objeto de arte mencionado?

46. Para obtener tinta indeleble para marcar ropa y que resista la intemperie, la acción de los álcalis, el agua caliente y el jabón, se funden, en 50 gramos de agua, 2 gramos de gelatina y 2 de bicromato de potasa, y luego, aparte, se disuelven, en 50 gramos de agua, 10 gramos de anilina del color que a la tinta se quiere dar, para verterlo y mezclarlo, seguidamente, todo en un frasco de cristal de color. Según esto, ¿cuántos gramos de cada cosa se necesitan para obtener medio Kg. de dicha tinta?

47. En la fabricación del jabón blanco de clase superior, entran las materias siguientes en esta proporción: aceite de oliva, 25 partes; aceite de coco, 3 partes; lejía de 10 grados, 30 partes. ¿Qué cantidad de cada una de estas materias se necesita para obtener 100 Kg. de jabón?

48. Para obtener la clase superior del lacre encarnado, se necesitan: goma laca de primera, 8 partes; trementina de Venecia, 2 partes; bermellón, 6 partes. ¿Cuánto ha entrado de cada materia en la elaboración de 64 Hgs. de lacre?

49. La tinta para los sellos de cautchú es un compuesto de anilina de color, alcohol y glicerina en la siguiente proporción: anilina, 6 gramos; alcohol, 16 gramos; glicerina, 100 gramos. ¿Cuántos gramos de cada ingrediente se necesitan para obtener 2 Kg. de la tinta mencionada?

50. Cierto individuo ha de entregar una partida de vino de 60 Hl. cuyo precio sea 40 ptas. el Hl., y para ello tiene dispuestas las siguientes cantidades: 12 Hl. de a 50 pesetas, 9 Hl. de a 38 ptas. y 6 Hl. de a 37 ptas. ¿De qué precio deberá ser el vino que le falta?

51. Un tratante en granos ha vendido 120 Hl. de trigo a razón de 25 pesetas uno, y quiere que en la mezcla que se propone hacer para obtenerlo entren 40 Hl. de a 28 pesetas y 18 Hl. de a 23 ptas. ¿De qué precio deberá ser el trigo que le falta?

52. Se han de obtener 60 Hls. de trigo de a 18 ptas. uno, mezclando 14 Hls. de a 26 pesetas, 10 Hls. de a 24 ptas. y otras dos clases cuyos precios son, respectivamente, 17 y 12 ptas. el hectolitro. Calcúlese la cantidad de trigo de cada una de las dos últimas clases que deberá entrar en la mezcla.

53. Para obtener 1 hectolitro de alcohol de 45 grados, con 15 litros de 50 grados, 20 litros de 48 grados, 9 litros de 47 grados y otras dos clases de 44 y 32 grados respectivamente, ¿cuántos litros de cada una de estas dos últimas clases se deberán tomar?

(*) El oro puro, antes, se consideraba de 24 quilates, y la plata, pura, de 32 gramos.

Comisiones (*)

1. Un comisionista ha vendido 460 Hl. de aceite a 84 ptas. el Hl., percibiendo una comisión de 2 %. ¿Cuánto le corresponde?

2. Encargué a mi corresponsal en Valencia la compra de una partida de vino, que importó 24,350 ptas. Debiéndole abonar una comisión de 2 $^1/_2$ %, ¿cuánto debo entregarle por su trabajo?

3. ¿Cuánto debe recibir un comisionista por la compra de 580 qq. m., 75 Kgs. de harina a 20'75 ptas. el quintal m., habiendo estipulado la comisión en 1 $^7/_8$ %?

4. Pagando a mi corresponsal en Barcelona un 5 % de comisión, y correspondiéndole 120 ptas. por la venta de una partida de esparto que ha realizado de mi cuenta, ¿cuánto ha importado la venta de mi género?

5. Un comisionista que recibe por su trabajo 3 $^1/_2$ %, ha percibido 218'75 ptas. por la venta de una partida de jabón. Debiendo emplear el líquido en l/ a l/o de su comitente, ¿qué cantidad podrá invertir?

6. Un comerciante de Gerona remitió a su corresponsal en Barcelona 620 qq. m., 75 kilogramos de heno, que el corresponsal realizó a 4'90 ptas. el q. m. Habiendo remitido el producto de la venta menos 106'458 ptas. que retuvo por su trabajo, ¿qué tanto p. % de comisión cobró?

7. Por la compra de una partida de harina, he remitido a mi corresponsal en Santander una letra de 3,640 ptas. ¿Cuál era el valor de dicha mercadería, deduciendo el 4 % de comisión?

8. Encargué a un comisionista de Tarragona la compra de 40 Hl. de vino tinto a 45'75 ptas. uno. Debiendo abonarle, además, una comisión de 2 $^1/_8$ %, ¿qué cantidad debo remitir a mi citado corresponsal?

9. Un fabricante de Sabadell remitió a un comisionista de Lérida 20 piezas de paño, de 40 metros cada una, que vendió a 18'50 ptas. el m. Realizada la mercadería, el comitente percibió 14,430 ptas. ¿Cuál fué el tanto p. % de comisión?

10. Un comisionista vendió una partida de géneros mediante una comisión de 5 %. Le correspondieron por esta operación 500 ptas.: ¿cuál fué el valor de los géneros vendidos y cuánto correspondió a su comitente, habiendo pagado 30 pesetas por varios gastos?

Corretajes

1. He encargado a un corredor la venta de una finca, que ha cedido por 8,400 pesetas. Debiendo cobrar por su trabajo 1 $^1/_2$ %, ¿cuánto le debo entregar?

2. He comprado, por mediación de corredor, 100 balas de algodón en rama, de peso cada una 150 Kgs., a 39'25 ptas. el quintal métrico. Siendo 1 $^3/_4$ % el tanto de corretaje, ¿cuánto debo entregar al corredor?

3. Siendo el corretaje 2 $^3/_5$ %, ¿cuánto acredita un corredor por la compra de 84,000 naranjas de Mallorca, a razón de 19'50 ptas. el millar?

4. Un corredor ha percibido 120 ptas. por haber intervenido en la compra de 800 quintales m. de harina. Siendo el corretaje 3 %, ¿cuánto importó dicha compra?

5. He entregado a un corredor la cantidad de 450 ptas. por su intervención en la venta de una casa de mi propiedad. El corretaje estipulado fué a razón de 1 $^1/_2$ %: ¿en cuánto vendí la mencionada finca?

6. Ríos y C.ª, corredores en la plaza de Algeciras, compraron de mi orden y cuenta 2,000 quintales m. de una mercadería, a razón de 4'50 ptas. el quintal m. Habiéndoles abonado 315 ptas. por su trabajo, ¿cuánto fué el tanto de corretaje?

7. He vendido, por mediación de corredor, 80 qq. m., 75 Kgs. de café, a razón de 142'25 ptas. el quintal m. Habiendo recibido un líquido de 11,256'95 ptas., ¿a qué tanto por % resulta el corretaje?

8. Cierto corredor me ha proporcionado la compra de una partida de bacalao á 5'50 ptas. los 25 Kgs. ¿Cuántos quitales m. he comprado, habiéndole producido esta operación 90'75 ptas., siendo 2'75 % el corretaje?

9. He comprado, por intervención de corredor, 1,250 gruesas de cajas de cerillas a razón de 4'25 ptas. la gruesa. Pagando un corretaje de 1 $^7/_8$ por ciento, ¿cuánto me ha costado la citada mercadería?

10. He vendido, por medio de corredor, una partida de pañuelos de seda a 8'75 pesetas la docena. Siendo 1 $^1/_2$ % el premio de corretaje y habiendo percibido el corredor 2'625 pesetas, ¿cuántos pañuelos vendí?

(*) Cuando en algún problema no se menciona el tipo de comisión, entiéndase que es la ordinaria de 2 %.

Taras

1. He vendido 120 fardos de corcho de Andalucía, de 150 $^1/_2$ Kgs. peso sucio, cada uno, a razón de 28'75 ptas. los 100 Kgs. de peso limpio. Rebajando 2 kilos por fardo por razón de tara, ¿cuánto cobraré?

2. Vendí 42 sacos de almendra, de peso 95 Kgs. cada saco, a razón de 42'25 pesetas los 100 Kgs. de peso limpio. Rebajando al comprador 1 $^1/_2$ Kgs. por cada saco en concepto de tara, ¿cuánto cobré?

3. ¿Cuánto deberé satisfacer por la compra de 4,600 Kgs. de azúcar refinado, a razón de 23'50 ptas. los 100 Kgs., obteniendo una rebaja de 12 $^1/_2$ % por razón de tara?

4. Siendo la tara 10 % por razón del embalaje, ¿cuál será el valor de una caja de té de 30 Kgs., 400 g., a razón de 2'75 ptas. el Kg. de peso limpio?

5. Por cada serón de carbón vegetal cuyo peso es 106 Kgs., se rebajan al comprador 13'25 Kgs. ¿A cuánto p. % resulta la tara?

6. He adquirido 2,500 sacos de sal molida de 150 kilos cada uno, obteniendo una rebaja de 6 kilos por saco por razón de la tela, y un 12 % del peso de cada saco por razón de la humedad. ¿A qué tanto por ciento resulta la tara?

7. Se han vendido 40 pipas de vino, de 20 Dl. cada una, a razón de 5 $^1/_2$ ptas. el doble Dl., con rebaja de 8 $^1/_2$ % por razón de la tara que determina la absorción de las duelas. ¿Cuánto ha satisfecho el comprador?

8. Un comerciante compró 4,600 Kgs. de café, peso sucio, a 2'75 ptas. el Kg., peso limpio, y entregó 11,385 ptas. ¿Cuánto le abonaron por tara y a cuánto ésta resulta por ciento?

9. He vendido 470 qq. m., 96 $^1/_2$ Kgs. de corcho, peso sucio, a 24 ptas. el quintal métrico de peso limpio, por 10,398'9072 ptas. ¿Cuánto he rebajado por tara y a cuánto resulta por ciento?

10. Se han comprado 18,600 Kgs. de una mercadería, y sólo se han pagado 14,136 kilogramos. ¿A qué tanto % resulta la tara?

11. Ordené a mi corresponsal en Barcelona la compra de 46 cajas de azúcar, lo que verificó a razón de 53'50 ptas. los 50 Kgs. de peso limpio. Siendo el peso sucio de cada caja 80 $^1/_2$ Kgs. y 6 % la tara, ¿cuánto tuve que remitir a mi corresponsal, habiendo estipulado su comisión en 2 $^3/_4$ %?

12. Se ha comprado una mercadería con 6 % de tara, siendo el peso limpio 38,070 kilogramos. Hállese la tara total y el peso sucio.

Ganancias o pérdidas

1. Un tabernero compra el Dl. de vino a 3'25 ptas., y lo vende a 5'05 ptas. ¿Qué ganancia por ciento realiza?

2. Cierto comerciante ha vendido una partida de géneros por 2,817'50 ptas., por la que había pagado 2,450 ptas. ¿Qué ganancia por ciento ha realizado?

3. Cierto tendero paga el Dl. de aceite a 9'25 ptas. ¿A cuánto debe vender el litro para obtener un beneficio de 12 %?

4. Hemos recibido de nuestro corresponsal en Valencia 450 qq. m. de uvas, que ha comprado de n/cta. a razón de 6'25 ptas. el q. castellano. Hallando una tara de 3 Kgs. por quintal castellano, pagando una comisión de 4 $^1/_2$ % y habiendo abonado 125'25 ptas. por gastos de transporte, ¿a cuánto deberemos facturar los 100 kilos, queriendo obtener en la venta un beneficio de 12 %?

5. Un censo, a razón de 5 %, me produce una renta mensual de 83'333 $^3/_{12}$ ptas.: ¿qué capital representa?

6. Vendí una finca en 4,800 ptas., y al cederla por esta cantidad, realicé un beneficio del 20 % del valor que me costaba. ¿En cuánto la había comprado?

7. Dos meses después de haber comprado un reloj, lo vendí por 92'575 pesetas, obteniendo una ganancia de 15 %. ¿Cuánto me había costado?

8. Compré una partida de corcho en pana que luego vendí por 29,440 ptas., obteniendo un quebranto de 8 %. ¿Cuánto me había costado?

9. Vendí en 121,250 ptas. una finca que me había costado 125,000 ptas. ¿Qué pérdida tuve por ciento?

10. Un tendero compra el vino a 60'75 ptas. el Hl.; paga 2 $^3/_5$ % de comisión; 7 pesetas por Hl. por derechos de consumos, y vende su género a 0'75 ptas. el litro: ¿qué gana o pierde por ciento?

Transportes

1. Desde Barcelona, se remitieron a una fábrica de papel continuo, de Gerona, 150 fardos de trapos, de peso 99'598 Kgs. cada uno aproximadamente, ajustando el transporte en 4'25 ptas. el quintal métrico. ¿Cuánto importó la conducción de la referida mercancía?

2. Un fabricante de tapones ha comprado 332'80 qq. m. de corcho, que ha de transportar por ferrocarril a una distancia de 150 Km. Estipulando el transporte a razón de 0'05 ptas. cada 100 kilos por kilómetro, ¿cuánto debe pagar?

3. El transporte de 4 Hl. de vino del Priorato costó a un comerciante 28'50 pesetas. ¿Cuánto importará el transporte de 60 Hls.?

4. La casa Torrellas y Soler, de Barcelona, remitió a la Habana 450 Hl. de vino seco, estipulando el flete a razón de 20 ptas. por Hl. y en un 10 % los derechos de capa. ¿Cuánto pagó?

5. Un comisionista de Sevilla embarcó en el vapor *Vinuesa* 57,500 Kgs. de corcho, a la consignación de los Sres. Hijos de G. Matas, de Barcelona, estipulando el flete a 3 $^1/_2$ ptas. por cada 100 kilos, y los derechos de capa a razón de 10 %. ¿Cuánto le costó la conducción de la referida mercadería?

6. Un comerciante malagueño ha remitido a Valencia 460 cajas de pasas, satisfaciendo 18'75 ptas. por el flete de cada 10 cajas y 8 % de capa. Determínese el coste de la remesa.

7. Nuestro corresponsal en Nueva Orleáns nos ha remitido 450 balas de algodón, de peso cada una 150'80 Kgs., que ha comprado de nuestra orden, a 45 pesetas el quintal métrico. Debiendo abonar 3 % de comisión, 1 $^1/_2$ % de corretaje, 4'75 ptas. por el flete de cada 100 kilos y 5 % de capa, ¿cuánto nos cuesta la compra mencionada?

8. Por flete y capa de 450 sacos de arroz, de 150 Kg., 400 g. cada uno, satisfice 1,675'08 pesetas, siendo 2'25 ptas. el flete de cada 100 kg. ¿A qué tanto p. % fué la capa?

9. He satisfecho al capitán del vapor *Extremadura* 341'998 ptas. por el transporte de 152 Hl. de maíz. Siendo el flete 1'50 ptas. por cada cuartera de 70 litros, ¿a cuánto resulta la capa?

10. Por el transporte de cierto número de serones de frutos secos, he satisfecho 654 pesetas. Siendo 5 ptas. el flete de cada 10 serones y 9 % la capa, ¿cuántos serones se han transportado?

Seguros (*)

1. ¿Cuánto me costará el seguro de 50,000 ptas. que remito a mi corresponsal en Cádiz, pagando una prima de 1°/₀₀ y teniendo en cuenta los derechos de póliza y timbre?

2. He remitido a Santander un cargamento de trigo cuyo valor es 60,500 pesetas. Satisfaciendo una prima de 2 $^1/_2$ %, ¿cuánto me costará el asegurar la remesa, teniendo en cuenta los gastos de póliza y timbre?

3. Un comerciante sevillano remite a su corresponsal en Matanzas 420 Hl. de vino tinto cuyo valor es 50 ptas. el Hl. ¿Cuánto le costará el seguro de sus géneros, pagando una prima de 1'5 %?

4. Gutiérrez y Castellano, de Huelva, remiten a Solano y C.ª, de Marsella, para vender de cuenta y mitad, 159 qq. m. de frutas secas, cuyo valor es 15,000 pesetas. Contratando en 2 % el seguro de sus géneros, ¿cuánto tendrán que desembolsar por esta circunstancia?

5. Un propietario aseguró una casa cuyo valor es 15,000 ptas., pagando de prima $^7/_8$ %. ¿Cuánto tuvo que desembolsar, contando los gastos de valoración, que importaron 15 ptas.; los de póliza, 10 ptas., y el timbre correspondiente?

6. Quiero remitir a un comisionista de Londres 150 bultos de tapones de diferentes clases, cuyo valor es 27,000 ptas. Asegurando las $^4/_5$ partes del valor de la remesa y siendo la prima 1'25 %, ¿cuánto debo desembolsar?

7. Lacalle, Reynal y C.ª, comisionistas establecidos en Buenos Aires, remiten, de mi orden y cuenta, una partida de cueros caballares, de peso 20,600 kilogramos y cuyo coste de compra es 21,000 ptas. Los gastos, según factura, son los siguientes: corretaje, 3 %; flete, 10 ptas. por quintal m.; capa, 5 %; prima del seguro, 1 %; póliza, 8'25 ptas., y timbre, 5 ptas. ¿Cuánto me cuestan los cueros mencionados?

8. Remitimos a Saliety y C.ª, de Bilbao, 20 piezas de paño de Lyón, de tiro cada una 25 metros, que valen 25 pesetas m. Habiendo satisfecho 317'50 pesetas por el seguro de dichos géneros, calcúlese el tanto por 100 de prima, costando 5 ptas. los derechos de timbre y póliza.

(*) En la resolución de estos problemas, téngase presente, además de la prima, los gastos de póliza y timbre.

9. Hemos remitido a un comerciante en géneros de ultramarinos, residente en Villajoyosa, 30 sacos de café, de peso cada uno 62'40 Kgs., a 134'50 pesetas los 41'60 kilogramos. Habiendo pagado 33'0125 ptas. por el seguro de la remesa, incluso los gastos de timbre y póliza, y siendo 2'75 ptas. el coste de estos dos últimos conceptos, ¿a qué tanto % se ajustó la prima?

10. Arquer y Villarroya, de Puerto Príncipe, me avisan haber embarcado en el vapor *Vulcano* 40 cajas de azúcar blanco, de peso cada una 50 Kgs. Importando el asegurar dichos géneros 12'225 pesetas, y sabiendo que la póliza costó 1 peseta y 3 pesetas el timbre, ¿cuánto será el coste total de los géneros que me remiten, habiendo fijado en 1 $^1/_2$ % la prima del seguro y siendo los fletes de cuenta del remitente?

11. El asegurar por el valor de sus $^3/_4$ partes una partida de géneros que remití a Casariego, de Milán, para que los vendiese de m/cta., me exigió un desembolso de 365 pesetas, incluyendo los gastos de timbre y póliza, que juntos importaron 5 ptas. ¿Cuánto importaba la remesa, habiendo fijado en 2 % la prima del seguro?

Trueques

1. He vendido una pieza de franela de 30 m. a 5 ptas. uno, y he recibido, en cambio, una partida de vino de a 0'50 ptas. el litro. ¿Qué cantidad de vino me han entregado en pago?

2. Compró un comerciante 1,981'44 litros de vino a razón de 64'25 ptas. el hectolitro, dando en pago trigo de a 16 ptas. la cuartera de 70 litros. ¿Cuántas cuarteras dió?

3. Vendí a 3 meses plazo 7,399'44 litros de vino de Jerez, a 24'25 ptas. los 15'48 litros, abonando por cuenta del comprador los gastos de transporte, que importaron 68'75 ptas., y cargando 4 $^1/_2$ % sobre el importe y gastos por ser la venta a plazo. Llegado el vencimiento, recibí en pago aceite de a 12 ptas. los 13'03 litros. ¿Cuántos litros recibí?

4. Tenía un lingote de plata a la ley de 800 milésimas, cuyo peso era 2 $^1/_2$ Kgs., y convine con un platero en cederlo por una cantidad de piezas de a 2 pesetas, cuyo peso fuese igual al del lingote. ¿Cuántas pesetas recibí?

Reducciones

1. Si 85 reales flojos de Navarra equivalen a 8 duros, y la libra esterlina equivaliese a 25'20 ptas., ¿qué relación existiría entre el real flojo de Navarra y la libra esterlina?

2. Si 100 metros equivalen a 92'12 varas de Galicia, y la cana de Barcelona equivale a 1'555 m., determínese la relación que existe entre la vara de Galicia y la cana barcelonesa.

3. Si 1 hectómetro equivale a 109'36 yardas inglesas, y la cana de Gerona equivale a 1'559 m., hállese la relación entre la yarda inglesa y la cana gerundense.

4. ¿Qué relación existe entre la libra inglesa y la libra catalana, sabiendo que 2'50 libras catalanas equivalen a 1 Kg., y que 100 Kgs. equivalen a 220'47 libras inglesas?

5. Averígüese la relación que existe entre el bushel inglés y el mallal de Gerona, si 100 litros son equivalentes a 2'751 bushels, y el mallal equivale a 15'48 litros.

6. Sabemos que 2'777 firlots de Escocia, para trigo, equivalen a 100 litros, y que la cuartera de Gerona equivale a 72'32 litros. ¿Qué relación existe entre el firlot escocés y la cuartera gerundense?

7. Sabiendo que 100 litros equivalen a 22'01 gallones imperiales de Inglaterra, a 28'05 gallones de Irlanda, y a 8'71 cántaros de Valencia, determínese la relación que existe entre el gallón inglés y el cántaro valenciano, y la existente entre éste y el gallón irlandés.

8. Si el ducado, moneda de oro alemana, equivale a 11'40 ptas., y el florín austriaco, a 2'38 ptas., ¿qué relación existe entre el ducado y el florín?

9. Si 3 libras, moneda catalana, equivalen a 8 ptas., y la libra esterlina, moneda inglesa, a 24'22 ptas., ¿qué relación existe entre la libra esterlina y la libra catalana?

Facturas.—Cuentas de venta y líquido producto

1. En 25 de enero del corriente año, D. Sebastián Ceballos, de Gerona, vende al contado a D. Camilo Bragulat los géneros siguientes: 60 m. fleco de seda, granate, a 7'25 ptas. el m.; 30 m. fleco de lana, gris, a 5'50 ptas. el m.; 40 m. de damasco de seda, color azul, a 21'25 ptas. el m.; 15 m. íd. de lana, color crema, a 18 ptas. el m. Hágase la factura correspondiente.

2. Los Sres. Corredor y Rigáu hermanos, de Figueras, han vendido al contado, en 3 de febrero del corriente año, a D. Leopoldo Codolar y Sancho, de Barcelona, los si-

guientes artículos: 12 Hl. de vino tinto a 40 ptas. los 123'84 litros; 180 Hl. de vino del Ampurdán a 36'75 ptas. ídem; 27 Hl. de vino moscatel a 90'25 ptas. ídem. Han satisfecho los gastos de transporte por cuenta del comprador, cuya operación ha importado 120 ptas. Extiéndase la factura hallando su total.

3. Los Sres. Barangé e Hijos, fabricantes de jabón en Gerona, han vendido, con la fecha de hoy, a E. Fernández, 4 cajas de jabón marca B. H., clase superior, cuyo peso es el siguiente: caja n.º 1, 40 Kg.; ídem n.º 2, 52 Kgs., 460 gr.; ídem n.º 3, 46 Kg., 750 gramos; ídem n.º 4, 36 Kg. Rebajando 5 % de tara; pagando el acarreo por cuenta del comprador, que importa 12'25 ptas., y siendo 0'60 ptas. el precio de 1 libra catalana de jabón, hágase la factura correspondiente.

4. La casa Antonio Soler y C.ª, de Cádiz, han vendido y remitido por ferrocarril a D. Constancio Ramírez, de Huelva, a 90 días fecha, las siguientes mercancías: 76 Hl. de vino tinto a 62'25 ptas. el Hl. y 124 Hl. ídem clase superior a 70'75 ptas. ídem. Los gastos de la remesa son como sigue: envases, 1,200 ptas.; acarreo a la estación del ferrocarril, 30 ptas.; guía y factor, 22'50 ptas.; portes, según talón, 530 ptas. Extiéndase la consiguiente factura.

5. D. César Eguilaz, comisionista en Málaga, ha comprado por orden y cuenta de Forcadell y Boada, de Barcelona, los géneros siguientes, que ha embarcado en el vapor *Rápido*, a la consignación del comprador: 650 balas de cáñamo, peso total 70,500 kg., a 29'50 ptas. el quintal métrico. Los gastos de la remesa son los siguientes: comisión, 3 %; flete, 3'5 ptas. por bala; seguro, 1 $^1/_2$ %; capa, 10 %; póliza y sello, 10'50 ptas.; embarque y acarreo, 60'90 ptas.; despacho, 14 ptas. Extiéndase la factura correspondiente.

6. Los Sres. Gómez y C.ª, de *Mayagüez*, han comprado por orden y cuenta de los Sres. Larache e Hijos, de la Coruña, 250 sacos de cacao, marca P. R., peso total 14,763'70 kilogramos peso sucio, a 128'50 ptas. el quintal métrico, peso limpio, que han sido remitidos por el vapor *Magallanes*, capitán Sánchez. Deben considerarse los siguientes gastos: comisión, 3 $^1/_5$ %; seguro, $^7/_8$ %; flete, 20 ptas. por cada 15 sacos; capa, 8 %; póliza y timbre, 12'50 ptas.; embarque y acarreo, 48'75 ptas. Tara, 2 kilos por saco. Valor en cuenta. Extiéndase la factura.

7. D. Juan Ametller y Río, de Gerona, ha vendido a D. Federico Anglada, de Lérida, los géneros que a continuación se expresan: 24 cortes de pantalón, fantasía, a 229'50 ptas. la docena; 2 piezas de paño, castaño, de tiro cada una 35 m., a 20 ptas. el m.; 3 piezas de cheviot, de 20 m. cada una, a 16'25 ptas. el m. El comprador obtiene un descuento de 4 % s/ el valor de la factura, y entrega al contado las $^4/_5$ partes del montante. El vendedor dispondrá del sobrante a pagar en l/ a 60 días. Extiéndase la factura.

8. Canadell y Roca, comisionistas establecidos en Barcelona, recibieron de D. L. Marqués, de Mataró, los géneros siguientes para vender de su cuenta: enero 20: 62 Hl. de vino tinto, vendidos a 52'25 ptas. el Hl.; febrero 14: 20 Hl. ídem ídem, vendidos a 60'50 ídem ídem; marzo 15: 9 Hl. de aguardiente, vendidos a 12 ptas. el Dl. Gastos: comisión, 4 $^1/_2$ %; transportes, 120'75 ptas.; almacenaje, 80 ptas.; acarreo, 30'25 ptas. Formalícese la cuenta de venta y líquido producto, pasando el líquido al crédito del comitente. Fecha de la liquidación, 20 de mayo próximo.

9. Don S. Casado y Reyes, de Sevilla, remitió a D. Andrés Rivera, de Palamós, 2,500 fardos de corcho, marca C. R., de peso total 125,000 Kgs., para vender de su orden y cuenta, que fueron realizados a 20'75 ptas. cada 41'60 kilos, mediante una comisión de 5 %. El comisionista satisfizo los gastos siguientes: fletes desde Sevilla a Palamós, al capitán del vapor *Elcano* por cuyo conducto recibió la mercancía, 750 ptas.; descarga, 320 ptas.; almacén, 180 ptas.; trabajo de pesar, 96'50 ptas.; acarreo, 40 ptas. Extiéndase la cuenta de venta y líquido producto, pasando la cantidad correspondiente al crédito del comitente.

10. Mariscal y C.ª, de Santander, remitieron al comisionista J. M. Laredo, de Barcelona, 260 sacos de harina, de peso sucio total 11,500 Kgs. para vender de su orden y cuenta, que fueron realizados a 20 ptas. cada 41'60 Kgs., rebajando por tara 1'15 Kgs. por saco, cobrando una comisión de 3 $^1/_2$ %. El comisionista abonó los siguientes gastos: corretaje, 1 $^1/_2$ %; almacenaje, 45'75 ptas.; descarga y acarreo, 32'25 ptas. Formalícese la cuenta de venta y líquido producto, pasando la cantidad correspondiente al crédito del comitente.

Prorrateo de facturas

1. Nuestro corresponsal en Santander nos remite 6,716 Kgs. de harina blanca, primera calidad, a razón de 12'725 ptas. los 50 kilos. ¿A cuánto nos resulta el quintal métrico abonando una comisión de 3 $^1/_2$ %, 1 $^1/_2$ % de corretaje y el transporte, que asciende a 250'50 pesetas?

2. Hemos comprado, por mediación del corredor, 125 cajas de jabón, de peso sucio cada una 46 Kgs., a razón de 0'625 ptas. el Kg., peso limpio. Siendo la tara 3 kilos por caja, el corretaje 3 ‰ e importando 80'76 pesetas los gastos de transporte, ¿a cuánto resulta el Kg. de peso limpio?

3. Un comerciante en ultramarinos ha comprado las tres partidas siguientes de café superior: 120 qq. m. a 195 ptas. el qq. m.; 420 qq. m. ídem a 210 ptas. ídem, y 98 qq. m. ídem a 228 ptas. ídem. Habiendo satisfecho 2,080 ptas. por diferentes gastos, ¿a qué precio le resulta el qq. m. de cada clase?

4. Averigüese el precio del quintal m. de café de cada clase que en el anterior problema se menciona, queriendo realizar un beneficio de 10 %.

5. He comprado 280 Kg. de miel a 4'25 ptas. uno; 350 Kg. de cacao a 12'25 ptas. uno, y 450 litros de vino generoso a 2'50 ptas. el litro. Satisficiendo 200 ptas. por diferentes gastos, y queriendo obtener en la venta un beneficio de 12 %, ¿a cuánto deberé vender la unidad de compra de cada uno de los géneros mencionados?

6. Don P. Ochoa, almacenista de vinos, ha comprado las siguientes partidas: 400 Hl. valenciano a 46'25 ptas. el Hl.; 109 Hl. del Priorato, a 48'50 ptas. íd., y 267 Hl. de Tarragona a 43 ptas. ídem. Ha pagado los gastos siguientes: comisión, 3 %; corretaje, 1 °/₀₀; transportes, 650 ptas. ¿A cuánto le resulta el Hl. de cada clase?

Liquidación de facturas

1. En 10 de enero del corriente año, compré a Llavería y Hermano varios géneros que importaron 6,400 ptas., valor al 10 de marzo próximo. Algunos días después, endosé a dichos señores las tres letras siguientes: 1.ª, de ptas. 2,000 al fin de enero; 2.ª, de pesetas 2,300, al 5 de marzo, y 3.ª, del valor del resto, ptas. 2,100, al 4 de abril. Averígüese si el pago del montante de la factura se hizo anticipado o retrasado, y los intereses que resultan a favor del comprador o del vendedor, suponiendo que ambas partes se abonan recíprocamente el 6 %.

2. Vendí a un panadero cierta cantidad de harina que importó 2,500 ptas., pagaderas al 24 de junio. Transcurridos 4 días, recibí dos pagarés, uno de ptas. 900 al 31 de mayo, y otro del resto, ptas. 1,600, al 10 de julio. Determínese si el pago se hizo anticipado o retrasado y qué intereses resultan por tal concepto, contándose éstos al 5 % por ambas partes.

3. En 1.° de junio del corriente año, compré 980 quintales m. de azúcar a 29 $^1/_2$ pesetas el quintal m., valor a 3 meses plazo. En 15 del mismo mes, entregué al vendedor las cuatro letras siguientes: una de 15,000 ptas. al fin de junio; otra de 12,300 ptas. al 10 de julio; otra de 850 ptas. al 20 de septiembre, y otra de 760 ptas. al 15 de octubre. Determínese si, por la anticipación de las dos letras primeras y por el retraso de las otras dos, se me deben o debo intereses y cuáles son éstos, contados al 4 %.

4. Cierto sujeto debía entregarme 40,000 ptas. el día 20 de marzo, y en 3 de febrero me entregó 18,600 ptas. para retrasar el pago del resto. ¿Cuándo deberá hacerlo efectivo sin que resulte perjuicio para ambos?

5. En 5 de abril, compré varios géneros, a tres meses plazo, por valor de 42,600 pesetas, y transcurridos 15 días, entregué al vendedor 2,430 ptas. ¿Cuándo deberé hacer efectivo el resto de mi cuenta?

6. Se compraron 1,240 quintales m., 86 Kgs. de corcho a razón de 49 pesetas los 41'6 Kgs., debiendo verificar el pago 90 días después, esto es, el día 1.° de octubre. Dos meses antes del vencimiento, el comprador entregó una l/ de cambio a la vista, valor de las $^3/_5$ partes del montante de la factura. ¿Cuándo deberá hacer efectivo el sobrante, sin que resulte quebranto para ambas partes?

7. Un comerciante vendió géneros por valor de 12,000 pesetas, pagaderas el día 10 de marzo; mas transcurrió esta fecha sin que el deudor entregara cantidad alguna. 40 días después satisfizo 10,000 pesetas a cuenta: ¿desde qué día debe el resto de la factura, cobrándole el 5 % sobre su débito durante los días que demoró la entrega?

8. El día 20 de noviembre, compré una partida de sacos de arroz, valor 2,800 pesetas, a pagar el 1.° de enero próximo. Circunstancias inesperadas me impidieron cubrir el compromiso, y el día 10 de febrero entregué 2,000 ptas. a cuenta de mi débito. ¿Desde qué fecha debo el resto sin perjuicio para ambas partes, y abonando a mi acreedor el 6 % por el retardo de mi entrega?

9. Cierto individuo vendió 46 Hl. de vino a 60 ptas. el Hl., valor al 15 de abril. Transcurrió la fecha del vencimiento sin que el deudor cubriera su compromiso, hasta que, en 1.° de mayo, entregó 800 ptas. a cuenta. ¿Desde cuándo debe el resto?

10. En 20 de marzo, vendí varios géneros por valor de 5,600 pesetas, a pagar en 20 de mayo; pero 15 días después de la venta, recibí 2,000 pesetas en efectivo y una l/ de 2,000 pesetas al 10 de mayo. ¿Cuándo deberé recibir el resto del importe de la factura?

Valores, fondos o efectos públicos

1. Vendiendo 4 títulos de la Deuda amortizable, serie B, al cambio de 75'50, ¿cuánto deberé cobrar estipulando el corretaje a $^1/_4$ °/₀₀?

2. Pagando al corredor $^1/_4$ °/₀₀, ¿cuánto deberé desembolsar por la compra de 2 títulos de la Deuda perpetua interior, serie E, al cambio de 82'25?

3. ¿Cuánto percibiremos por la venta de 6 títulos de la Deuda perpetua exterior serie F, al cambio de 54'60 $^1/_2$, pagando $^1/_4$ °/₀₀ de corretaje?

4. Cotizándose los títulos de 500 ptas. uno, de cierta deuda, al cambio de 104, ¿cuánto me costará la compra de 8 títulos, dando al corredor $1/8$ %?

5. Hemos encargado a nuestro corredor la venta de 12 obligaciones del Banco de Barcelona al curso corriente de 50'58 %, y la de 20 láminas, de 500 ptas. una, de cierta deuda, al curso de 98'75. Siendo el corretaje $1/8$ %, ¿cuánto recibiremos? (*)

6. Comprando 40 obligaciones del ferrocarril de Tarragona a Barcelona y Francia al cambio de 99'50, ¿cuánto desembolsaré siendo $1/8$ % el corretaje?

7. Estando el 4 % amortizable al cambio de 62'45, encargué a mi corredor invirtiera 156,187'50 ptas. en títulos de la serie D. ¿Cuántos títulos compré siendo el corretaje a $1/4$ ‰?

8. Siendo 60'75 $1/2$ la cotización del 4 % interior, ordeno la venta de las láminas necesarias de la serie C para proporcionarme 18,222'75 pesetas. Habiendo estipulado el corretaje a $1/8$ ‰, ¿cuántas láminas se habrán de vender?

9. Hemos invertido 15,337'50 pesetas en la compra de acciones del Puerto de Barcelona, al curso de 102 %. Dando al corredor $1/4$ %, ¿cuántas acciones hemos comprado?

10. Cotizándose las acciones del ferrocarril de Almansa a 42'25, he vendido un número de ellas que ha producido un líquido de 1,913'625 ptas. Siendo 325 ptas. el nominal de cada acción, y dando al corredor $1/8$ %, ¿cuántas acciones he vendido?

11. He tomado por mediación de corredor 8 láminas de cierta deuda, de 500 ptas. cada una, por las que he desembolsado 4,285 ptas.; ¿a qué cambio las he tomado siendo $1/8$ % el corretaje?

12. Ordené a mi corredor la venta de 20 títulos del 4 % amortizable serie B, y obtuve un líquido de 37,375 pesetas. ¿A qué cambio se hizo la operación pagando $1/4$ % de corretaje?

13. Costando 55,089 pesetas la compra de 3 títulos del 4 % exterior, serie F, adquiridos por medio de corredor, a quien dimos $1/8$ ‰, determínese el cambio a que se realizó la operación.

14. Vendí 35 acciones del Banco Hispano Colonial pagando $1/8$ % de corretaje, y cobré 17,828'125 ptas. Hállese el tipo de la cotización.

15. Cobrando el cupón de 1.º de enero correspondiente a 15 títulos del 4 % interior serie D, y dando 1 ‰ al corredor por cuya mediación se verificará el cobro, ¿cuánto recibiré?

16. Vencido el cupón trimestral correspondiente a 40 títulos de 500 ptas. uno, de una deuda al 6 %, ¿qué cantidad cobraré?

17. He cobrado por mediación de corredor el cupón de 1.º de octubre correspondiente a 120 láminas del 4 % amortizable, serie A. ¿Cuánto he recibido siendo 1 ‰ el corretaje?

18. Queriendo obtener una renta anual de 12,000 pesetas en papel que produce el 4 % y que se cotiza al cambio de 96 %, ¿qué capital debo invertir?

19. Para obtener una renta anual de 2,000 ptas. comprando 4 % interior al cambio de 65'50, ¿cuántos títulos de la serie C debo comprar y cuánto me costarán siendo $1/4$ ‰ el corretaje?

20. Empleando 2463'75 ptas. en acciones del Puerto de Barcelona, que se cotizan a 98'55 y que reditúan el 6 %, ¿qué renta anual se tendrá?

21. ¿Qué interés anual produce el dinero invertido en papel de la Deuda amortizable al 4 %, que se cotiza al cambio de 78'87 $1/2$?

22. Comprando títulos de una deuda al 5 % al cambio de 107, ¿qué interés produce el capital invertido?

23. Para que el dinero invertido en papel de la Deuda perpetua exterior produzca el 6 % anual, ¿a qué cambio se ha de cotizar?

24. Cierto individuo desea emplear un capital en papel del 4 % amortizable, de modo que le produzca el 8 %. ¿A qué cambio ha de comprar?

25. Deseamos invertir 125,000 ptas. en títulos de una deuda al 6 %, de modo que obtengamos un interés anual de 6 $1/2$ %. Cotizándose hoy dicho papel a 108, ¿cuánto debe bajar para realizar nuestro propósito?

26. Las acciones de cierta Sociedad anónima se cotizan a 86'75, teniendo desembolsado el 90 % del capital: ¿cuánto pierden por ciento?

27. Un banquero compró obligaciones de cierta Sociedad al cambio de 95, y las vendió con 2 $1/2$ % de pérdida sobre el dinero. ¿A qué cambio las vendió?

28. Tenemos 50,000 ptas. del 4 % exterior, compradas al cambio de 76'25 y 1 ‰ de corretaje. ¿A qué cambio deberemos venderlas, deseando ganar el 6 % sobre el efectivo empleado?

(*) Cuando no se anuncie el valor nominal de un título determinado, entiéndase que es de 500 pesetas.

29. Cierto individuo posee 30 títulos del 4 % interior, serie C, y este papel experimenta un alza de 40 céntimos. ¿Qué aumento de capital efectivo le representa?

30. El mismo individuo que en el anterior problema se menciona posee 18 títulos de una deuda, de 500 ptas. uno, que tomó al cambio de 98. Dicho papel se cotiza hoy a 97'25 $1/2$. ¿Qué disminución del capital efectivo representa la baja mencionada?

31. Encargué a mi corredor la compra de medio millón de pesetas en títulos del 4 % interior al cambio de 67'75. ¿A qué cambio debo hacer vender el papel comprado para obtener un beneficio líquido de 5 %, teniendo en cuenta que abono al corredor el corretaje de compra y el de venta a razón de $1/4$ ‰?

32. Ordené a mi corredor la compra de 500,000 pesetas en títulos del 4 % amortizable al cambio de 68'46, y tres días después le di orden de proceder a su venta, realizando un beneficio de 1,900 ptas. sin deducir los corretajes. ¿Qué alza hizo el papel?

Pignoración de valores públicos

1. Si pignoramos, por 60 días, en el Banco de España, 20,000 ptas. nominales del 4 % interior al cambio de 58'50, ¿qué efectivo recibiremos, teniendo en cuenta que pagamos intereses de 4'50 %, 1 ‰ de corretaje, póliza y 0'10 ptas. por el timbre móvil correspondiente? (*)

2. Conviniéndome fondos y poseyendo papel del 4 % amortizable, he convenido con el Banco de España la pignoración, por 90 días, de 30 títulos de la serie D, al cambio de 65'45. Hállese el efectivo que recibiré teniendo en cuenta el interés ordinario en esta clase de operaciones, 4'50 % anual, el 1 ‰ que el corredor percibe por su intervención, la póliza y el sello móvil necesario.

3. Un comerciante es poseedor de 26 acciones del Puerto de Barcelona, cuyo nominal es 500 ptas. cada una, y contrata con el Banco Hispano Colonial el préstamo posible sobre las mismas, por 30 días, al interés de 4 %. Siendo 98 el curso del cambio la víspera del contrato, ¿qué efectivo recibirá, teniendo en cuenta que paga $1/4$ ‰ de corretaje, póliza y sello móvil?

4. Cierto sujeto posee 25 títulos del 4 % exterior, serie C, y contrata con el Banco de España su pignoración por 30 días, al cambio de 65'25, pagando $1/4$ ‰ de corretaje, el interés de 4'50 % que dicho establecimiento exige ordinariamente, y los demás gastos que son consiguientes, tales como póliza y sello móvil. El efectivo recibido lo invierte en Deuda amortizable al cambio de 56'50 $1/2$, y ocho días después vende el papel adquirido al curso de 57'40. Hállese el resultado de la operación, teniendo en cuenta los corretajes correspondientes, a razón de $1/8$ ‰.

5. Uno tiene medio millón de ptas. en acciones del ferrocarril de Almansa, y las entrega en garantía del préstamo que le hace una casa de banca, por 40 días, conviniendo la pignoración al cambio de 36 %. Satisface el interés de 5 %, $1/2$ ‰ al corredor que interviene en el contrato y los gastos de timbre y póliza, por los que pagó 3'40 pesetas; emplea el líquido en obligaciones de los ferrocarriles de M. Z. A., tomadas por mediación de corredor al cambio de 105, y 30 días después vende el papel adquirido al curso de 105 $1/2$. ¿Qué ganancia o pérdida obtiene, si los corretajes se estipulan a $1/8$ %?

6. Hemos pignorado papel de la Deuda amortizable cotizado al cambio de 68, y hemos recibido 7,523'684 ptas. efectivas, habiendo antes satisfecho intereses de 90 días al 4'50 %; por corretaje, 7'616 ptas., y 0'20 ptas. por póliza y timbre. ¿Qué valor nominal hemos entregado en garantía?

7. Debiendo atender al pago de determinadas obligaciones, he entregado en garantía al Monte de Piedad, títulos del 4 % exterior, con el fin de proporcionarme el efectivo necesario, y al efecto, he recibido 11,788'951 ptas. Habiendo convenido la pignoración de dichos valores al cambio de 74'25; pagado intereses de 4 $1/2$ % por 60 días, 2'97 ptas. por corretaje, y 0'20 ptas. por póliza y timbre, ¿cuántos títulos de la serie A se han entregado?

8. ¿Qué cantidad nominal de la Deuda perpetua interior entregué en garantía al Banco Hispano Colonial, siendo la cotización de estos valores 69'25, y haciendo la pignoración por 30 días al 6 % de interés; si el corretaje importó 20'775 ptas., el timbre y la póliza, 3'10 ptas. y recibí un efectivo de 165,356'509 pesetas?

9. ¿A qué cambio ha de cotizarse en la Bolsa la Deuda amortizable, para que obtengamos 95,900 pesetas efectivas, pignorando en el Banco de España 140,000 pesetas nominales?

10. Cierto individuo poseía 10 títulos de la serie D del 4 % exterior, y los pignoró en el Banco de España recibiendo 34,980 pesetas. ¿A cuánto se cotizó en la Bolsa dicho papel la víspera del contrato de pignoración?

(*) Para determinar el valor de la póliza, véase siempre la *tarifa*, núm. 512.

Documentos de cambio y giro

1. Redactar la siguiente l/ 1.ª de cambio, a 8 días vista:
Número del giro, 24,560; plaza libradora, Gerona; plaza pagadora, Barcelona; fecha del giro, hoy; librador, D. Fernando Salvador y Roca; tenedor, D. Pedro Rebolledo; librado, D. Enrique Marqués, por saldo de cuentas; valor, 2,000 ptas. recibidas del tenedor. — Póngase el *recibí* del cobrador.

2. Extiéndase la siguiente 1.ª de cambio a 30 días fecha:
Número del g/, 250; plaza libradora, Valencia; íd. pagadora, Alicante; fecha del giro, hoy; librador, D. Cástulo García; tomador, D. Sebastián Garriga; librado, Sres. Alomar y Santamaría; valor, 3,500 ptas.; en cuenta con el tomador y por saldo de idem con el librado. — Póngase el *recibí* del cobrador.

3. Redáctese la 2.ª de cambio siguiente, a 15 días vista, nominal 860 pesetas:
Número del g/, 14,500; plaza libradora, Málaga; íd. pagadora, Palma de Mallorca; fecha del giro, hoy; librador, D. Conrado Valdespino; tomador, Sres. García y Hermano, quienes entregan el efectivo al librador; librado, D. Narciso Santoya, a cuenta de su débito. Póngase la aceptación, tres endosos y el *recibí* del endosado cobrador.

4. Extender la 3.ª de cambio siguiente, a fecha fija, de 5,500 ptas., valor recibido en géneros del tenedor y en cuenta con el librado.
Número del g/, 20,560; plaza libradora, Mataró; íd. aceptante, Figueras; librador, D. Manuel Ibáñez; tenedor, D. José Moradell; librado, D. Juan Arquer; fecha del giro, hoy. Pónganse además: indicación, cuatro endosos y el *recibí* del endosado cobrador.

5. Redactar una 1.ª de cambio, núm. 28,156, a la o/ del librador y a c/ de D. Aniceto Palahí, de Cádiz, a 15 d/v., nominal 150 ptas., por s/ con el librado, *sin gastos*. Es librador D. Lorenzo Cufí, de Albacete; fecha del giro, hoy; 6 endosos que no quepan en el dorso y el *recibí* del endosado cobrador.

6. Extender una 2.ª de cambio, núm. 408,700, a 60 d/v., a l/o. de N. González, valor recibido, con los datos siguientes:
Valor nominal, 4,000 ptas., por s/ con el librado, Corredor y C.ª, de Tarragona; plaza libradora, Barcelona; librador, D. José María Dalmáu; fecha del giro, hoy; aceptación; indicación a D. M. Carreras; cuatro endosos y el *recibí* del endosado cobrador.

7. Con los datos que se darán, extiéndase la correspondiente libranza:
Número de orden, 150; nominal, ptas. 4,500; plaza libradora, Gerona; a l/o. de don Salvador Carrasco; valor recibido del tomador; librador, D. Venancio Ulloa; librado, D. Casimiro Rocamora, de Santander.

8. D. R. Sánchez, de Zamora, presta, por 1 año, 300 ptas. al 5 % anual a D. Alberto Solís, de Cádiz. Extiéndase el correspondiente pagaré.

9. Don Juan Rosa y Lozano, propietario, residente en Calatayud, presta, por 7 meses y al 6 % anual, 12,500 ptas. a D. Teodoro Ribera, propietario y vecino de la misma ciudad. Redactar el pagaré correspondiente.

10. Redáctese el pagaré siguiente:
D. Leopoldo Avellaneda, de León, compra a 6 meses plazo, a D. Francisco Losada, de la misma ciudad, una casa valorada en 130,000 ptas.; de cuya cantidad paga el comprador intereses de 4 $^1/_2$ %, que se añaden al valor de la finca.

11. Cierto individuo presta a otro, por 4 meses y sin interés alguno, la cantidad de 4,000 ptas. Extiéndase el correspondiente pagaré.

12. Con los datos que se darán, redáctese la correspondiente carta-orden:
D. Ricardo Espino y Valdés, de Valencia, ordena a D. Silvio Comendador, de Alcira, mande pagar, a la orden de D. Jacinto Serrano, la cantidad de 1,960 pesetas.

13. Tomando los datos que se darán, escribir la correspondiente carta de crédito:
D. A. Graner, de Gerona, ha de dirigirse a Cádiz, y permanecer algún tiempo en dicha capital. Los Sres. Carreras Suñer y Hermanos, de Gerona, ordenan a su corresponsal gaditano, D. Rómulo Antúnez, entregue a Graner, durante todo el mes de abril, las cantidades que éste le pida hasta la suma de 6,000 pesetas.

14. El comerciante D. Juan Romero, de Gerona, ha de emprender un viaje que durará, próximamente, 3 meses, debiendo detenerse en Burdeos, París, Londres y Milán. No queriendo llevar consigo más que cantidades de poca consideración, se dirige al Banco Hispano Colonial y deposita una cantidad determinada, a fin de que esta sociedad bancaria le proporcione una *carta de crédito circular* hasta la suma de 25,000 pesetas. Extiéndase el documento que recibirá, dirigido a los corresponsales del Banco en las ciudades antes mencionadas.

15. La casa Ramírez, Sardol y C.ª, de Barcelona, ha de recibir 850 ptas. de D. Olegario Arellano, comerciante establecido en Vinaroz, y libra un abonaré de esta cantidad a favor de su corresponsal en Valencia, D. Gregorio Sánchiz. Extiéndase el mencionado documento.

16. La casa de banca *Crédito Gerundense* libra un cheque de 15,000 pesetas contra su sucursal en Barcelona, a la o/ de D. Esteban Santamaría, del comercio de Gerona. Redactar el documento mencionado.

Cambio nacional sin gastos

Vencimientos a fecha corta

1. ¿Cuánto deberé desembolsar por una l/ de 100 ptas. tomada a la par? ¿Cuánto me costará tomándola a 1 % b.º? ¿Cuánto, tomada a 1 % d.º?

2. Cuánto cobraré por la venta o negociación de una l/ de 100 ptas. cedida a la par; cuánto, cedida a 1 % b.º, y cuánto, cedida a 1 % d.º?

3. He tomado al cambio de 1 $^1/_2$ % b.º una l/ de 20,400 ptas. a 4 d/v. ¿Cuánto he desembolsado?
¿Cuánto me hubiera costado al cambio de 1 $^1/_2$ % d.º?

4. Negociando al cambio de $^3/_4$ % d.º una l/ de 1,800 ptas. a 8 d/v, ¿cuánto cobraré? ¿Cuánto percibiría negociándola a $^3/_4$ % b.º?

5. He endosado a Roca una 1.ª de cambio, a 8 d/v, de ptas. 6,800'75 al cambio de $^7/_8$ % d.º ¿Cuánto he cobrado?
¿Cuánto hubiera recibido al cambio de $^7/_8$ % b.º?,

6. Debiendo pagar a mi corresponsal en Valencia 5,400 ptas., tomo l/ de su valor a 8 d/v, al cambio de $^1/_4$ % d.º ¿Cuánto me cuesta?
¿Cuánto debería abonar, al cambio de $^1/_4$ % b.º?

7. He negociado al cambio de 1 $^1/_2$ % d.º una l/, á 8 d/v., de 6,450 ptas. ¿Cuánto he cobrado?
¿Cuánto hubiera recibido cediéndola a 1 $^1/_2$ % beneficio?

8. Nuestro corresponsal en Santander nos remitió una partida de sacos de harina blanca, cuyo coste y gastos ascienden a ptas. 6,500. Para reembolsarle, tomo l/ a s/o, a 2 d/v, al cambio de $^3/_4$ % d.º ¿Cuánto debo desembolsar?

9. Para reembolsarme las 48,500 ptas. que me debe mi corresponsal en Soria, libro a s/c una 1.ª de cambio a 12 d/v, que negocio al cambio de $^3/_8$ % beneficio. ¿Qué líquido me produce la operación?

10. Remití a Rocamora, de Huesca, 45 Hl. de vino, cuyo coste y gastos, según factura, importaron 2,560'75 ptas. Para realizar el cobro, libro a s/c una 1.ª de cambio a 15 d/v, que negocio al curso de 2 % d.º ¿Cuánto debo recibir?

11. Un cambista me ofrece moneda de plata y cobre al cambio de 1 $^1/_2$ % b.º ¿Cuánto recibiré en metálico, entregándole 1,250 ptas. en papel del Banco de España?

12. La sucursal del Banco de España en Gerona, me cede una l/ de pesetas 2,560'75 contra la sucursal de Valencia, a 4 d/v. ¿Qué cantidad en metálico debo entregar, sabiendo que unas sucursales de dicha Sociedad dan letras contra otras al cambio de 0'15 % b.º?

13. He tomado en la sucursal del Banco de España las 3 l/ siguientes, a 8 d/v, contra la sucursal de Málaga: 1.ª, de 1,250 ptas.; 2.ª, de 4,580'25; 3.ª, de 7,852 idem. ¿Cuánto he tenido que entregar?

14. López, de Badajoz, me remitió una partida de quintales de lana, cuyo coste y gastos, según factura, ascendían a 12,620'50 ptas. Para saldarle, tomo l/ a s/o, a 12 d/v, al cambio de 1 $^1/_8$ % b.º ¿Cuánto me cuesta la adquisición de dicha l/?

15. Encargué a un comisionista de Castellón de la Plana la compra de cierta cantidad de vino, cuyo coste y gastos, según factura, importaron 5,400 pesetas. Para reembolsarle, tomo l/ de s/v a 4 d/v, al cambio de 1 % d.º: ¿cuánto me cuesta dicha l/?

16. Un comerciante de Figueras, para reembolsarse del importe de una partida de géneros que vendió a otro de Barcelona, ha librado a c/ de éste una l/ a l/v que ha negociado al cambio de $^3/_8$ % b.º, recibiendo 2,690'05 ptas. ¿De cuánto era la l/ negociada?

17. Para recibir 24,875 ptas. efectivas, negociando l/ a 4 d/v al cambio de $^1/_2$ % d.º, ¿qué nominal deberá tener la l/?

18. Para satisfacer el importe de una remesa de frutos coloniales que me hizo un comisionista de Málaga, tomé l/ de s/v, a 8 d/v, al cambio de $^7/_8$ % b.º, para lo cual tuve que desembolsar 15,615'46 ptas. ¿De cuánto era dicha l/?

19. Caravallo, Rodón y C.ª, fabricantes en Palencia, vendieron a un comerciante gerundense una partida de mantas de lana y algodón. Para saldar s/cta. con la casa palentina, el de Gerona toma l/ a 10 d/v al cambio de 1 $^3/_5$ % d.º, desembolsando, al efecto, 9,348 ptas. ¿Qué valor tenían los géneros remesados?

20. He tomado una l/ de 5,496 ptas., pagando por ella 5,550'96 ptas. ¿A qué cambio se ha verificado la operación?

21. He adquirido una 1.ª de cambio de 3,200 ptas., desembolsando 3,176 pesetas. ¿A qué cambio la he tomado?

22. He cedido una 2.ª de cambio a 2 d/v, de ptas. 2,200, recibiendo 2,219'25 pesetas efectivas. ¿A qué cambio se ha verificado la negociación?

23. He endosado a Roca y Soler una 1.ª de cambio de ptas. 8,000, cargando en s/cta. 7,910 ptas. ¿A qué cambio se la he cedido?

Cambio nacional con gastos

Vencimientos a fecha corta

1. Debiendo satisfacer a mi corresponsal en Barcelona 6,820 ptas., encargo a mi corredor me proporcione l/ de este valor, a 8 d/v, s/ dicha plaza, lo que efectúa al cambio de 1 % b.º ¿Cuánto me cuesta dicha l/, dando al corredor 1 °/₀₀ por su trabajo? ¿Cuánto me hubiera costado tomándola al cambio de 1 % d.º?

2. García, de Mallorca, me debe 2,040'75 ptas., líquido producto de una partida de vino que ha vendido de m/cta. Deseando reembolsarme, libro a s/c una primera de cambio, que negocio mediante 1 °/₀₀ de corretaje, al cambio de 1 $^1/_2$ % d.º ¿Qué efectivo debo recibir?
¿Cuánto percibiría, cediendo la l/ a 1 $^1/_2$ % b.º?

3. Torreblanca y Alcaraz, de Pontevedra, compró de mi orden y cuenta una partida de bacalao, cuyo importe y gastos ascendieron a 2,250 ptas. Para satisfacerle la mencionada cantidad, tomé l/ s/ d/ plaza, a 4 d/v, al cambio de $^5/_8$ % d.º y 1 °/₀₀ de corretaje. ¿Cuánto me costó dicha l/?
¿Cuánto hubiera desembolsado, tomándola a $^5/_8$ % b.º?

4. Vendí a un fabricante 230 quintales m. de cierto género a 6 ptas. el q. m. Para reembolsarme, he librado a s/c una 1.ª de cambio a 10 d/v, que he negociado por mediación de corredor a $^3/_4$ % b.º ¿Cuánto he cobrado? (*)
¿Cuánto cobraría cediendo la l/ a $^3/_4$ % d.º?

5. He comprado por orden y cta. de mi corresponsal en Vinaroz, una partida de cueros cuyo valor es ptas. 9,500. Para reembolsarme, libro a s/c, a 8 d/v, por medio de corredor, al cambio de 1 % d.º ¿De cuánto debe ser la l/?
¿De cuánto sería si la negociase a 1 % b.º?

6. Villarroya, mi corresponsal en Ciudad Real, cobró por m/cta., en aquella plaza, 7,500 pesetas, para cuyo reembolso le encargo tome l/ a m/o, lo que efectúa mediante corredor, al cambio de $^1/_8$ % b.º ¿Qué cantidad en l/ recibiré, abonando a mi citado corresponsal $^1/_2$ % de comisión de banca?

7. Tengo en mi poder 7,450 ptas. de mi corresponsal en Cádiz, y me escribe le gire a 8 d/v la expresada cantidad, lo que efectúo tomando l/ s/ dicha plaza al cambio de 1 $^1/_2$ % d.º y 1 °/₀₀ de corretaje, cobrando $^1/_4$ % de comisión de caja. — ¿De cuánto será la l/ que tomaré?

8. Un comerciante de Madrid me remitió 15,000 ptas. para que tomase en esta plaza l/ a s/o, s/ Huelva, lo que efectué al cambio de $^3/_4$ % b.º y 1 °/₀₀ de corretaje. — ¿Qué cantidad en l/ pude adquirir, teniendo en cuenta que antes retiré $^1/_2$ % de comisión de banca y 6 ptas. por el timbre correspondiente?

9. Los Sres. Hijos de L. González, mis corresponsales en Zaragoza, me remiten 4,620 ptas. a fin de que las invierta en l/ a s/o, s/ Almería, a 4 d/v, la que me es facilitada por los Sres. Carreras Suñer Hermanos, de ésta, al cambio de $^7/_8$ % b.º y $^1/_5$ % de corretaje. Siendo $^1/_2$ % mi comisión de caja, ¿qué nominal tendrá la l/ que remitiré a mis corresponsales en Zaragoza, teniendo, también, en cuenta el coste del timbre, que importa 2 ptas.?

10. Debiendo pagar 8,575'25 ptas. a un fabricante de Alcoy, encargo a mi corresponsal en Barcelona me facilite l/ s/ dicha plaza, a 10 d/v, lo que efectúa por medio de corredor al cambio de $^1/_8$ % d.º Abonando a mi corresponsal una comisión de $^1/_2$ % sobre la cantidad desembolsada, y contando 4 ptas. por el timbre de la l/, ¿qué cantidad deberé abonar en cuenta a mi citado corresponsal?

11. Nuestro comitente D. T. Rosado nos remitió 60,351'20 Kgs. de corcho para vender de s/cta., el que hemos realizado a 29'75 ptas. los 100 Kgs. Recibimos orden de invertir el líquido producto de la venta en l/ a s/o, a 3 d/v, que tomamos por medio de corredor a $^5/_8$ % b.º Determínese el valor nominal de la l/ que tomaremos, siendo 5 % n/ comisión por la venta de la referida mercadería y deduciendo 8 ptas. por el timbre correspondiente.

12. Invirtiendo 24,800 ptas. en l/ a l/v, tomada por mediación de corredor al cambio de 2 % d.º, ¿de cuánto sería la l/ que podríamos adquirir?
¿Qué nominal tendría d/l si el cambio estuviese a 2 % b.º?

13. Negocié una l/ de 6,000 ptas., a 8 d/v, dando al corredor 1 °/₀₀, y recibí 6,054 pesetas efectivas. — ¿A qué cambio verificóse la operación?

14. He endosado, por mediación de corredor, una l/ a 4 d/v, de ptas. 4,450, recibiendo 4,401'05 ptas. efectivas. — ¿A qué cambio la he cedido?

15. He tomado, por medio de corredor, una l/ de 2,520 ptas., por la que he desembolsado 2,544'57 ptas. — ¿A qué cambio se ha convenido la operación?

(*) No se olvide que, cuando no fijemos el tanto de corretaje, debe entenderse que es el ordinario de 1 °/₀₀.

16. Encargué al corredor Galarza la adquisición de una l/ a 12 d/v, de ptas. 8,560, por la cual entregué 8,525'76 ptas. Determínese el cambio a que se hizo la operación.

17. Don Carlos García, comerciante, remitióme una l/ de ptas. 1,650 para que la negociara por s/cta., lo que efectué por medio de corredor y $^{1}/_{2}$ % de comisión de banca, quedando a s/f un líquido de 1,652'475 ptas. — ¿A qué cambio la negocié?

18. Vendí por o/ y cuenta de Salazar una remesa de cereales que arrojó un líquido a s/f de 26,850 ptas. Dicho comitente me encargó invirtiese esta cantidad en l/ a s/o, s/ Sevilla, a 8 d/v, lo que verifiqué ayer por medio de corredor, cobrándome $^{1}/_{4}$ % de comisión de caja y 13 ptas. por el timbre correspondiente. La l/ adquirida es de pesetas 26,776'569. — ¿A qué cambio se tomó?

Cambio nacional sin gastos

Vencimientos a fecha larga

1. Estando en Barcelona el cambio s/ Sevilla para el papel a fecha corta, a 1 % b.º, ¿cuánto nos costará una l/ de 4,200 ptas., a 60 d/f, siendo 6 % el tipo del descuento y considerando 3 días de correo, tiempo que la l/ necesita para ir a la aceptación?
¿Cuánto nos costaría la l/ anterior, si el cambio estuviese a 1 % d.º?

2. He librado una 1.ª de cambio s/ Santander, de ptas. 5,000, a 90 d/f, que he negociado a 1 $^{1}/_{2}$ % d.º, con descuento de 5 %. — ¿Cuánto he recibido, contando 4 días de correo?
¿Cuánto debería recibir si el cambio fuese a 1 $^{1}/_{2}$ % b.º?

3. Un comerciante, para cobrarse el valor de una remesa de mercaderías, gira a c/ del deudor una l/ de 800 ptas., a 30 d/f, que negocia a $^{1}/_{2}$ % d.º con descuento de 12 %. — ¿Cuánto recibe en efectivo, rebajando 1 día para la aceptación?

4. Debiendo reembolsarme 4,315'75 ptas. que me debe un comerciante de Lugo, libro a s/c una 1.ª de cambio a 20 d/f, que negocio al cambio de $^{3}/_{4}$ % b.º, con descuento de 9 %. Suponiendo que el correo tarda 4 días para llegar a la plaza pagadora, ¿cuánto recibiré por la mencionada negociación?

5. Los Sres. Hijos de P. Solano ceden a Santana Hermanos, de esta plaza, una l/ de 1,480'50 ptas., s/ Oviedo, a 60 d/f, al cambio de 1 $^{1}/_{2}$ % b.º con descuento de 6 %. Siendo 3 los días necesarios para proceder a la aceptación, ¿cuánto costará al tomador la l/ mencionada?

6. Para proceder al pago de una factura de 48,650 ptas., tomo l/ a 30 d/f, a $^{1}/_{2}$ % daño con descuento de 4 $^{1}/_{2}$ %. ¿Cuánto debo satisfacer, conviniendo en 2 los días de correo para la aceptación?

7. Debiendo reembolsarme 10,000 ptas. que me debe mi corresponsal en Jaén, libro a s/c una 1.ª de cambio a 60 d/f. Estando en ésta el cambio s/ d/p a 1 % d.º, y siendo el descuento a razón de 5 %, ¿de cuánto será la l/ que deberé librar, estipulando en 3 días los que serán necesarios para proceder a la aceptación?

8. Cedí en esta plaza una l/ a 40 días, s/ Zamora, a $^{1}/_{2}$ % b.º para el papel a fecha corta, estipulando el descuento en 10 %, y recibí en efectivo 8,477'30 pesetas. Suponiendo que el correo necesita 4 días para ir a aquella plaza, ¿qué nominal tenía la l/ negociada?

9. Por una l/ a 3 meses plazo que he tomado en esta plaza s/ la de Bilbao, al cambio de $^{3}/_{5}$ % b.º con descuento de 6 %, he satisfecho ptas. 13,552'573. Siendo 5 los días que hemos convenido necesarios para proceder a la aceptación, ¿qué valor nominal tiene dicha l/?

10. Remití a los Sres. Lubrano y C.ª, de Cádiz, varias piezas de tejidos, cuyo valor, según factura, ascendía a 2,684 ptas. Para reembolsarme, giro a s/c una l/ a 2 $^{1}/_{2}$ meses, que negocio a 1 $^{2}/_{5}$ % d.º con descuento de 5 $^{1}/_{2}$ %. ¿De cuánto deberá ser la citada l/, suponiendo que el correo necesita 3 días para llegar a la plaza pagadora?

11. He negociado una l/ de ptas. 1,480 a 60 d/f, recibiendo un efectivo de pesetas 1,460'68. ¿A qué cambio se ha verificado la negociación, habiendo contado 3 días para la aceptación y siendo el descuento a 6 %?

12. Negociando una l/ de 26,800 ptas., a 30 d/f, con descuento de 5 %, y recibiendo 26,994'576 ptas. efectivas, ¿a qué cambio se hizo la operación, habiendo convenido 2 días de correo para proceder a la aceptación?

13. He tomado una primera de cambio a 45 d/f, de ptas. 15,420, con descuento de 12 % al año, mediante un desembolso de 15,131'984 ptas., conviniendo en 3 días los de correo necesarios para la aceptación. ¿A qué cambio la he tomado?

14. Debiendo reembolsar a mi corresponsal en Lugo ptas. 2,990'50 que pagó por m/cta., tomo l/ de dicho valor a 45 días fecha, con 6 $^{1}/_{2}$ % de descuento, por la que entrego ptas. 3,017'7835. Siendo 4 días los de correo convenidos, ¿a qué cambio me han cedido la l/ mencionada?

Cambio nacional con gastos

Vencimientos a fecha larga

1. He tomado por orden y cuenta de Sanllehí, de Mataró, una l/ s/ Madrid de 4,620 pesetas, a 60 d/f, al cambio de 1 % b.° y 6 % de descuento, pagando 1 $^0/_{00}$ de corretaje y cobrando mi comisión de $^1/_4$ %. ¿Cuánto debo cargar en cta. a mi citado corresponsal, contando 2 ptas. por el timbre correspondiente y considerando 2 días de correo para la aceptación?

2. Necesitando remitir 8,650'50 ptas. a un fabricante de Pamplona, ordeno a mi corredor tome l/ s/ d/p, a 30 d/f, lo que verifica al cambio de $^1/_2$ % d.° con descuento de 5 $^3/_4$ %. Rebajando 3 días para la aceptación y contando 4 ptas. por el timbre debido, ¿cuánto deberé desembolsar?

3. He negociado una l/ de 956 ptas., s/ Sevilla, a 90 d/f, al cambio de 1 $^1/_2$ % d.° para el papel a fecha corta, pagando 2 $^0/_{00}$ de corretaje y abonando al tomador el interés de 9 % anual por 79 días. ¿Qué cantidad he recibido?

4. Vendí a un comerciante de Huelva una partida de géneros valor 9,500 ptas., y satisfizo dicho importe entregándome una l/ a 90 días fecha, c/ un banquero de dicha plaza, la que negocié 15 días después al cambio de $^1/_2$ % b.° y 1 $^0/_{00}$ de corretaje, con descuento de 8 %. Siendo 4 los días de correo necesarios para la aceptación de dicha letra, ¿qué cantidad recibí?

5. He tomado una l/ s/ Bilbao, a 40 d/f, al cambio de 1 % b.°, pagando 1 $^0/_{00}$ de corretaje. Siendo 5 los días necesarios para la aceptación y 10 % el descuento convenido, ¿de cuánto es la l/ mencionada, habiendo tenido que desembolsar 6,021'62 pesetas?

6. He tomado por mediación de corredor una l/ s/ Pontevedra, a 60 días fecha, al cambio de $^7/_8$ % d.°, deduciendo el descuento correspondiente a razón de 1 % mensual por 48 días, por cuya adquisición he desembolsado pesetas 8,690'576. ¿Qué nominal tiene dicha l/?

7. Negociamos por medio de corredor, a 1 $^1/_8$ % b.°, una primera de cambio s/ Zamora, a 2 meses fecha, con descuento de 8 % por 48 días, recibiendo pesetas efectivas 6,998'15. ¿De cuánto era dicha l/?

8. Negocié por o/ y cta. de mi corresponsal en Figueras, al cambio de 1 % d.°, una l/ s/ Santander a 45 d/f, pagando 1 $^0/_{00}$ de corretaje, con descuento de 12 % anual por 33 días y retirando mi comisión a razón de $^1/_2$ %. Quedando a favor de mi citado corresponsal ptas. 29,487'453, ¿de cuánto era dicha l/?

9. He tomado una l/ de 4,000 ptas., s/ Cádiz, a 60 d/f, pagando 1 $^0/_{00}$ de corretaje, con descuento de 6 $^1/_2$ % por 50 días, desembolsando 3,928'384 ptas. ¿A qué cambio la he tomado?

10. ¿A qué cambio se ha tomado una l/ de 5,260 ptas., s/ Vitoria, a 2 $^1/_2$ meses fecha, pagando 1 $^0/_{00}$ de corretaje, con descuento de 7 % por 63 días, habiendo desembolsado por ella ptas. 5,228'01?

11. He endosado a Ruiz, por mediación de corredor, una primera de cambio s/ Granada, de ptas. 26,512'75, a 90 d/f, con descuento de 1 % mensual por 79 días, recibiendo 25,598'788 ptas. ¿A qué cambio se ha verificado la operación?

12. Hállese el cambio a que se negoció una l/ de 658'50 ptas., a 30 d/f, s/ León, verificando la operación por medio de corredor, descontando los intereses correspondientes a razón de 9 % anual y contando 5 días de correo para la aceptación, habiendo recibido el endosante 671'542 ptas. efectivas.

Facturas de descuento y negociación

1. En 1.° de marzo, concerté con la casa bancaria Portilla y C.ª el descuento de las cuatro letras siguientes s/ esta plaza, al 6 % anual:

L/	número 428,	al fin corriente,	de	ptas.	8000
»	» 429,	al 10 abril,	»	»	4520
»	» 430,	al 30 »	»	»	850'75
»	» 431,	al 6 mayo,	»	»	500

Formalícese la correspondiente factura de descuento, indicando el líquido a cobrar.

2. Los Sres. Lacalle y Alvarez, en 10 de junio, tomaron los tres efectos siguientes, al 5 % de descuento:

L/	número 1415,	de ptas.	3500,	al fin junio,	c/ Ros,	de ésta
»	» 1416,	» »	625'50,	al 20 julio,	c/ Pla,	» »
Pagaré	» 46,	» »	2000,	al 30 septiembre,	c/ Ríos,	» »

Formalícese la factura de descuento, hallando el líquido a pagar.

3. Los Sres. Pascual y Rovírez, del comercio de esta plaza, en 15 de marzo último, negociaron con los Sres. Ordóñez e Hijo las seis l/ siguientes, s/ ésta, al 8 % y $^1/_8$ % de comisión de banca:

L/ número	1420,	c/ Hornós,	al fin marzo,		de ptas.	1200
» »	1421,	c/ Rovira,	al 20 abril,		» »	900'50
» »	1422,	c/ Salas,	al 5 mayo,		» »	2680
» »	1423,	c/ Darné	al 30 »		» »	615'75
» »	1424,	c/ García	al 2 julio		» »	4683
» »	1425,	c/ Solita,	al 10 »		» »	500

Extiéndase la factura de descuento, y dígase el líquido que los cedentes recibieron.

4. Con fecha de hoy, 24 de julio, he convenido con la casa de banca P. Unida y C.ª, de ésta, la negociación de los cuatro efectos siguientes s/ esta plaza, al 9 % y $^1/_4$ % de comisión:

L/ número	.632,	c/ Mir,	al 10 agosto,	de ptas.	1561'50
» »	633,	c/ Pons,	al 30 »	» »	8500'75
» »	634,	c/ Mas,	al 5 septiembre,	» »	600
Pagaré »	26,	c/ Molero,	al fin octubre,	» »	4596

Extiéndase la factura de descuento, hallando el líquido a recibir.

5. Hoy, 10 de enero, he concertado con la sucursal del Banco Hispano Colonial en esta plaza, la negociación de las tres l/ siguientes al 6 % de descuento:

L/ número	800,	s/ Cádiz,	al 10 febrero,	a 1 % b.º,	de ptas.	5000
» »	846,	s/ Málaga,	al fin »	a 1 % d.º,	» »	4400
» »	848,	s/ Bilbao,	al 30 marzo,	a $^1/_2$ % b.º,	» »	556

Extender la correspondiente factura de negociación, indicando la cantidad que debo recibir.

6. En 20 de septiembre, negocié con los Sres. S. Martínez y C.ª las cuatro l/ siguientes al 12 % de descuento:

L/ número	6580,	s/ Madrid,	al fin corriente,	a $^1/_2$ % b.º,	de ptas.	1000
» »	6581,	s/ Tarragona,	al 20 octubre,	a $^1/_4$ % d.º,	» »	4800
» »	6582,	s/ Lérida,	al fin ídem,	a 1 $^1/_2$ % d.º,	» »	950
» »	6583,	s/ Barcelona,	al 25 noviembre,	a 1 % b.º,	» »	2640

Extiéndase la factura de negociación, y hállese la cantidad que recibí.

7. He convenido con los Sres. Ballester, Ocaña y C.ª la negociación de las 5 l/ siguientes, al descuento de 6 $^1/_2$ % y $^1/_8$ % de comisión de banca:

L/ número	2450,	s/ Valencia,	al fin enero,	a 1 % d.º,	de ptas.	8126
» »	2451,	s/ Badajoz,	al 30 marzo,	a 1 % d.º,	» »	4965
» »	2452,	s/ Palma,	al ídem, ídem,	a 1 $^1/_2$ % b.º,	» »	900'50
» »	2453,	s/ Almería,	al 20 abril,	a $^3/_4$ % d.º,	» »	1000
» »	2454,	s/ Murcia,	al fin ídem,	a $^7/_8$ % b.º,	» »	2500

Suponiendo que el descuento se verifica el día 2 de enero, extiéndase la factura de negociación e indíquese la cantidad que debo recibir.

8. He cedido a los Sres. Bayo y C.ª, de ésta, con descuento de 12 % y $^1/_4$ % de comisión de caja, las tres l/ siguientes:

L/ número	265,	s/ Vinaroz,	al 30 abril,	a $^3/_5$ % d.º,	de ptas.	990
» »	266,	s/ Figueras,	al 20 mayo,	a 1 $^1/_4$ % b.º,	» »	2500
» »	267,	s/ Sevilla,	al fin ídem,	a $^1/_2$ % d.º,	» »	800'12

La operación se ha realizado en el día de hoy, 10 de abril.

Extiéndase la correspondiente factura de negociación y hállese la cantidad que cobraré.

Cuentas de resaca

1. Nuestro corresponsal en Barcelona, D. R. Linares, endosó a n/o, por s/ de s/cta., una 1.ª de cambio a 8 d/v, de ptas. 5,000, librada por D. José Alier, de dicha plaza, c/ Torroella y Albañá, de ésta. No habiendo el librado querido aceptar la l/, ordené el protesto por falta de aceptación, y 8 días después, el correspondiente por falta de pago, abonando al notario por ambas operaciones la cantidad de 20'50 ptas. Para reembolsarme, libré una resaca a c/ de mi corresponsal y a l/o de N. Soler, de ésta, a 4 d/v, que negocié a 1 % d.º y 1 º/ₒₒ de corretaje, contando mi comisión de banca a razón de $^1/_2$ % s/ el nominal de la l/ protestada, 3 ptas. por el timbre correspondiente, 1'25 pesetas por correspondencia y 0'10 ptas. por el sello móvil.

Redáctese la cuenta de resaca que deberá acompañar a la l/, y determínese el valor nominal de la misma.

2. Los Sres. Heras y Salvador, de Valencia, nos endosaron, por saldo de cuentas, una l/ de ptas. 4,520, c/ Núñez, de ésta, que protestamos por falta de aceptación y pago. Para reembolsarnos, libramos a c/ de d/Sres. y o/P. Segura, de ésta, una 1.ª de cambio que negociamos a $^7/_8$ % d.º y 1 º/ₒₒ de corretaje, cargando n/ comisión de banca, a razón de $^1/_2$ % s/ el valor nominal protestado. Siendo 22 ptas. los gastos de protestos, 1'50 ptas. los de correspondencia, 2 ptas. por timbre para el reembolso y además el sello móvil, formalícese la cuenta de resaca correspondiente y hállese el nominal de la l/ negociada.

3. P. Rodero, de Sevilla, libró una l/ de 3,300 ptas. a 8 d/v, a c/ de E. Laserna y a l/o de Molina y Fiol, quienes la endosaron a S. Marsal, y éste, a favor de C. Rocamora, la cual fué protestada por falta de aceptación y pago. Rocamora, para cubrirse

del montante de la l/ protestada y gastos satisfechos, libró una resaca a c/ de Rodero, la cual negoció a $^1/_4$ % d.º y 1 ‰ de corretaje, cargando $^1/_4$ % de comisión. Siendo 21'75 pesetas los gastos de protesto, 2'25 ptas. los de correspondencia; teniendo en cuenta el valor del timbre, que es 2 ptas., y el sello móvil correspondiente, extiéndase la cuenta de resaca y dígase el nominal de la l/ que se libra para el reembolso.

4. Libré una l/ de 820 ptas., a l/v, a l/o de P. Mediavilla y a c/ de R. Fernández, de Granada, para cobrarme el importe de una remesa de mercaderías, cuya l/ fué protestada por falta de pago. Para reembolsarse Mediavilla, gira a m/c una l/ del valor de la protestada y gastos ocurridos, la cual negoció al recambio de $^1/_8$ % b.º, 1 ‰ de corretaje y cargando su comisión a razón de $^1/_2$ %. Los gastos, además, de 0'60 ptas. por timbre y sello móvil, fueron los siguientes: protesto, 12'20 ptas.; correspondencia, 1'25 pesetas. Formalícese la correspondiente cuenta de resaca, y averigüese el montante de la l/ que deberé satisfacer.

Cambio extranjero sin gastos

1. ¿Cuánto nos costará una l/ de 4,500 francos, s/ Marsella, a 8 d/v, al cambio de 2'85 por ciento b.º?

2. Un banquero de esta plaza me ha facilitado dos l/ a 10 d/v, s/ París y Burdeos, respectivamente, la 1.ª de 2,420 francos y de 3,625 fr. la 2.ª, al cambio de 8'75 % b.º ¿Cuánto debo desembolsar?

3. Si las dos letras del problema precedente las hubiésemos tomado al mismo cambio, pero a d.º, ¿cuánto hubiéramos desembolsado?

4. Hemos cedido a los Sres. Galofre y C.ª una l/ de 2,000 fr., s/ Lyón, a 10 d/v, y otra de 1,600 liras, s/ Milán, a 8 d/v, al cambio de 5'20 % b.º la primera y a 2 % b.º la segunda. ¿Qué cantidad hemos recibido?

5. Los Sres. Zapater y C.ª, banqueros, nos han cedido una l/ s/ Londres, de 400 £ E., a 3 m/f, al cambio de 25'50. ¿Qué cantidad hemos desembolsado?

6. Debiendo reembolsarnos 150 £ E., 8 chelines, 9 peniques, que nos debe nuestro comisionista en Londres, libramos a s/c una l/ a 3 m/f, que negociamos al cambio de 25'60. ¿Cuánto hemos recibido? (*)

7. Hemos tomado una l/ de 950 fr., a 8 d/v, s/ Bruselas, al cambio de 2'50 % b.º, y hemos negociado otra de fr. 4,600, a 10 d/v, s/ Berna, a $^1/_2$ % d.º ¿Cuánto hemos pagado por la primera y cuánto hemos cobrado por la segunda?

8. ¿Cuánto deberé desembolsar por una l/ de 2,500 florines, s/ Viena, al cambio de 2'40?

9. Debiendo cobrar 2,640 marcos banco que me debe mi corresponsal en Hamburgo, libro a s/c una l/ de d/v, á 30 d/f, que negocio al cambio de 1'25. ¿Cuánto debo recibir?

10. Debiendo remesar a un comerciante de Lisboa 4,620 mil-reis, tomo en esta plaza l/ de d/v al cambio de 5'75. ¿Cuánto debo desembolsar?

11. ¿Qué cantidad debo entregar por la compra de una l/ de 820 rublos, s/ San Petersburgo, tomada al cambio de 4'30?

12. He negociado una l/ de 250 £ E., 14 chelines, 5 peniques, s/ Dublín, a 3 m/f, al cambio de 25'75. ¿Cuánto he cobrado?

13. Empleando 5,000 ptas. en l/ s/ París, a 8 d/v, al cambio de 4'25 % b.º, ¿de cuántos francos será la l/ que tomaré?
¿De cuántos francos sería la l/ si la tomase al mismo cambio, pero a d.º?

14. Una l/ a 8 d/v s/ Perpiñán, negociada al cambio de 12 $^1/_2$ % b.º, ha producido pesetas 6,750. ¿De cuánto era d/l?

15. He tomado una l/ a 8 d/v, s/ Burdeos, al cambio de 6 $^1/_2$ % b.º, y por ella he satisfecho ptas. 979'80. ¿De cuánto era d/l?

16. He endosado a L. Corredor una l/ s/ Amsterdam al cambio de 2'50, y he recibido ptas. 1,625. ¿Qué valor nominal tenía d/l?

17. Empleando 5,000 ptas. en l/ s/ Milán, a 10 d/v, al cambio de 2 % b.º, ¿de cuánto será la l/ que tomaré?
¿Qué nominal tendría d/l si la tomase al mismo cambio, pero a d.º?

18. Un comerciante gerundense libró y negoció una l/ a l/v, s/ Oporto, al cambio de 5'65, y recibió ptas. 7,062'50. ¿De cuánto era d/l?

19. Empleando 1,812'50 ptas. en l/ s/ Hamburgo, al cambio de 1'25, ¿qué nominal tendrá la l/ que tomaré?

20. Nuestro corresponsal en Santander nos remite 25,000 ptas. para que las invirtamos en l/ a 3 m/f, s/ Dublín, la que tomamos al cambio de 25'40. ¿De qué valor será la l/ que tomaremos?

21. He negociado una l/ s/ Liverpool, a 3 m/f, al cambio de 25'60, y he recibido 5,520'4096 pesetas efectivas. Hállese el valor nominal de d/l.

(*) 1 libra esterlina = 20 chelines; 1 chelín = 12 peniques.

22. Debiendo remitir fondos a París, he tomado una l/ de 3,000 francos s/ d/p, a 8 d/v, pagando por ella 3,300 ptas. ¿A qué cambio se ha verificado la operación?

23. Debiendo reembolsarme 4,520 francos que me debe un comerciante de Tolón, libro a s/c una 1.ª de cambio a 8 d/v, a l/o de D. Narciso Ariza, recibiendo 4,813'80 pesetas efectivas. ¿A qué cambio la he cedido?

24. ¿A qué cambio se ha tomado una l/ de 2,600 liras, s/ Milán, a 12 d/v, habiendo desembolsado el tomador 2,561 ptas.?

25. Por la negociación de una l/ a 3 m/f, s/ Manchester, de 45 £ E., recibí 1,145'25 pesetas. ¿A qué cambio se hizo la operación?

26. Necesitando remitir 850 florines a un fabricante de Presburgo, tomo l/ de dicha cantidad entregando 2,210 ptas. efectivas. ¿A qué cambio he adquirido d/l?

27. Un comisionista residente en Francfort me debía 2,450 marcos banco, y para reembolsarme, negocié una l/ a s/c, recibiendo 3,185 ptas. Averígüese el cambio de la negociación.

28. Un comerciante de Coimbra me remitió varios géneros, cuyo importe y gastos, según factura, ascendían a 2,480 mil-reis. Para saldarle, tomé l/s/d/p, a 15 d/v, por la que tuve que desembolsar ptas. 13,888. ¿A qué cambio la tomé?

29. ¿A qué cambio se tomó una l/ de 1,450 rublos, s/ Moscow, habiendo pagado por ella 6,307'50 ptas.?

30. Por la negociación de una l/ de 30,500 francos, s/ Zurich, a 15 d/v, recibí pesetas 30,461'875. ¿Cuál fué el cambio de la negociación?

Cambio extranjero con gastos

1. ¿Cuánto nos costará una l/ de 4,520 francos, a 8 d/v, s/ París, al cambio de 5'25 por ciento b.º tomada por mediación de corredor, a quien pagamos 1 º/ₒₒ?

2. Para satisfacer el importe de varios géneros que nos remitió un fabricante de Londres, le remitimos una l/ de 128 £ E., s/ d/p, que tomamos pagando 1 º/ₒₒ de corretaje, al cambio de 25'56. ¿Cuánto nos cuesta la adquisición de d/l?

3. Nuestro comisionista en Berlín, nos avisa haber realizado los géneros que le remitimos, siendo el líquido a nuestro favor 4,600 marcos banco. En vista de esto, ordenamos a n/ corredor negocie una l/ de dicho valor, lo que realiza al cambio de 1'35. ¿Qué cantidad debemos recibir?

4. Tomando por mediación de corredor una l/ de 5,000 florines, s/ Agram (Austria) al cambio de 2'20, ¿qué cantidad debemos entregar?

5. Nuestro corresponsal en Mataró nos encarga le proporcionemos una l/ de 500 £ E., 15 chelines, 9 peniques, a 90 d/f, s/ Birmingham (Inglaterra), la que tomamos por medio de corredor al cambio de 25'40, cargándole nuestra comisión de banca a razón de $^1/_2$ %. ¿Qué cantidad cargaremos en la cuenta de n/ corresponsal?

6. Tengo en Génova un crédito de 5,640 liras, y para retirarlo, libro a c/ de mi corresponsal al cambio de $^3/_4$ % b.º, 1 º/ₒₒ de corretaje y $^1/_4$ % de comisión de banca. ¿Qué líquido me produce la negociación?

7. Necesitando colocar fondos en París, ordeno a mi corredor tome una l/ s/ d/p, a 8 d/v, lo que verifica al cambio de 5'60 % b.º, y por la que desembolso ptas. 8,984'976. ¿De qué cantidad es d/l?

8. Mi corresponsal en Sabadell me remite 10,000 ptas. para que las invierta en l/ a s/o s/ Bruselas, la que tomo por intervención de corredor al cambio de 3'50 $^1/_2$ % b.º Contando mi comisión de caja a $^1/_2$ % y 4 ptas. por el timbre correspondiente, ¿qué nominal tendra la l/ que tomaré?

9. Como líquido producto de una venta de mercaderías, tenía en Dublín un crédito, para cuyo cobro ordené a mi corredor negociase una l/ a 3 m/f, al cambio de 25'60, recibiendo ptas. 3,839'99616. ¿De qué nominal era d/l?

10. P. Colorado me remite 25,000 pesetas para que las invierta en l/ s/ Edimburgo (Inglaterra), que tomo por intervención de corredor al cambio de 25'50, retirando mi comisión de banca al tipo usual de $^1/_2$ % y 12 ptas. por el timbre correspondiente. ¿Qué nominal tendrá la l/ que tomaré?

11. Un comisionista de Berlín escribe a su comitente en Barcelona que ha realizado los géneros que le remitió. Para cobrarse el de Barcelona, gira una l/ por medio de corredor, a quien paga el corretaje ordinario de 1 º/ₒₒ. Sien lo el cambio a 1'40, y habiendo recibido por la mencionada negociación ptas. 8,391'60, ¿De cuánto era d/l?

12. Debiendo depositar fondos en Praga (Austria), tomo por medio de corredor una l/ s/ d/p al cambio de 2'30, entregando 3,453'45 pesetas. ¿Qué nominal tiene d/l?

13. Los Sres. Carreras, Losada y C.ª, de esta plaza, me facilitaron una l/ de 4,000 francos, a 8 d/v, s/ Marsella, mediante un corretaje de 1 º/ₒₒ, por la que entregué pesetas 4,604'60. ¿A qué cambio me cedieron d/l?

14. He negociado por medio de corredor y $^1/_5$ % de comisión de banca, una l/ a 8 d/v, s/ Burdeos, de francos 12,500, recibiendo ptas. 13,179'09375. ¿A qué cambio se ha hecho la operación?

15. Un comerciante en tapones, para cobrarse 250 £ E., 14 chelines, 9 peniques, líquido producto de la venta de las mercaderías que remitió a los Sres. Espinet Bros, de Londres, ha negociado una l/ a c/ de d/ Sres., a 90 d/f, pagando 1 $^o/_{oo}$ de corretaje, por la que ha recibido pesetas 6,399'924. ¿A qué cambio se ha convenido la negociación?

16. Nuestro corresponsal en Valencia nos remite 40,000 pesetas para que las invirtamos en l/ a s/o, a 3 m/f, s/ Manchester, la que tomamos por mediación de corredor, contando nuestra comisión de banca a razón de $^1/_2$ %. La l/ tomada es de 1,565 £ E., 7 chelines, 3 peniques. ¿A qué cambio se ha verificado la operación?

17. Tengo 2,000 florines en poder de un comisionista de Viena, para cuyo reembolso libro a s/c por intervención de corredor, produciéndome la negociación 4,495'50 pesetas. ¿A qué cambio he negociado la l/?

18. Habiendo vendido varias mercaderías por cuenta de un corresponsal, recibo orden de invertir el líquido a s/f, pesetas 4,620, en l/ a s/o, s/ Berlín, a 30 d/f, la que tomo pagando el corretaje usual de 1 $^o/_{oo}$ y contando la acostumbrada comisión de banca, a razón de $^1/_2$ %. La l/ tomada es de marcos banco 3,401'709. ¿A qué cambio la he adquirido?

Cambio indirecto

1. Desde Barcelona, plaza de nuestra residencia, queremos remitir a Cádiz 4,000 pesetas, y al efecto, ordenamos a nuestro corresponsal en Valencia tome l/ s/ Cádiz al cambio de $^1/_2$ % d.° y que se reembolse librando a n/c, lo que verificará al cambio $^1/_8$ % d.° ¿Cuánto nos costará nuestra remesa, pagando en Valencia dos corretajes a razón de 1 $^o/_{oo}$, $^1/_2$ % de comisión de banca sobre el efectivo desembolsado y 2 ptas. por el timbre correspondiente para el reembolso de nuestro corresponsal?

2. Desde Madrid, donde residimos, queremos remitir a París 12,500 francos, y ordenamos a n/ corresponsal en Barcelona tome l/ s/ París al cambio de 5'40 % b.°, y que se reembolse librando a nuestro cargo al cambio de 1 % d.° Nuestro corresponsal cobra $^1/_2$ % de comisión sobre el efectivo desembolsado y paga dos corretajes a 1 $^o/_{oo}$. ¿De qué nominal será la l/ que librará a n/c para reembolsarse, teniendo en cuenta que también nos carga 6 ptas. por el importe del timbre de la l/ que gira?

3. Tengo en Madrid un crédito de 25,000 ptas., y para retirarlo, ordeno a mi corresponsal en Tarragona libre s/ Madrid al cambio de $^1/_2$ % b.°, librando yo s/ Tarragona a $^1/_4$ % d.° ¿Cuánto producirá la mencionada operación, pagando el de Tarragona un corretaje de 1 $^o/_{oo}$ y abonándole $^1/_2$ % de comisión s/ el nominal de su giro?

4. Desde Gerona, plaza de mi residencia, quiero retirar 6,000 pesetas que tengo en poder de mi corresponsal en Sevilla, para lo cual, ordeno a la *Sucursal del Crédito Gerundense* en Barcelona gire s/ Sevilla al cambio de $^1/_8$ % d.° y 1 $^o/_{oo}$ de corretaje, reembolsándome luego con l/ s/ Barcelona negociada a $^3/_4$ % b.° Pagando al corresponsal barcelonés $^1/_4$ % de comisión de banca s/ el nominal, ¿qué líquido me producirá la mencionada operación?

5. Desde Barcelona quiero remitir a Málaga 10,400 pesetas, para lo cual escribo a mi corresponsal en Santander tome l/ s/ Málaga a $^1/_2$ % d.° Para reembolsar al de Santander, tomo l/ s/ esta plaza a $^3/_4$ % d.° y 1 $^o/_{oo}$ de corretaje. Pagando el mismo corretaje en Santander, ¿cuánto me costará la remesa?

6. Desde Gerona, plaza de mi residencia, quiero retirar 400 £ E. que tengo en poder de M. Wilke y C.ª, de Dublín. Al efecto, doy orden a mi corresponsal en Barcelona de que gire contra la casa de Dublín al cambio de 25'70, librando yo a c/ del de Barcelona a $^1/_2$ % b.° Pagando dos corretajes a razón de 1 $^o/_{oo}$ cada uno, y dando al de Barcelona $^1/_4$ % de comisión, ¿cuánto me producirá esta operación indirecta?

7. Debiendo colocar en Berlín 8,000 marcos, ordeno a mi corresponsal en Londres tome l/ s/ d/p al cambio de 20'45 marcos banco por 1 £ E. y que se reembolse girando a m/c a 25'40. ¿Cuánto deberé satisfacer por la remesa mencionada?

Cuentas corrientes sin interés

1 El comerciante residente en Barcelona D. R. Godínez y Soler, extiende y remite a su cliente D. Juan Ferrer y Quintana, de Gerona, la cuenta detallada de las operaciones realizadas durante los meses de enero, febrero y marzo del corriente año, las cuales son como sigue:

Enero 10. — Mi remesa 1 docena paraguas a 10 ptas. uno.
» 20. — Mi » 20 pilas Leclanché a 7 ptas. una.
» 30. — Mi » cuellos, puños y corbatas, importando, según factura, pesetas 560'25.
Febrero 8. — M/g á s/c, o/ Cibils, a 8 d/v, de ptas. 550.
» 12. — Mi remesa bastones, según factura, ptas. 60'25.
» 26. — Mi » objetos perfumería, según factura, ptas. 240.

Marzo	15. — Su entrega en efectivo, ptas. 100.		
»	25. — Mi » a Pla por s/cta. y o/, 80 ptas.		
»	29. — Mi remesa 4 docenas petacas, a 10 ptas. docena.		

Extiéndase la cta. corriente y dígase el saldo, que pasa a cta. nueva.

2. El comerciante residente en Barcelona D. Enrique Soler, extiende y remite á su cliente en Gerona D. S. Corominas, la cuenta detallada de las operaciones verificadas durante los meses de abril, mayo y junio del corriente año, las que son como sigue:

Abril	1. — Saldo a m/f de la cta. anterior	Ptas.	560
»	10. — Mi remesa encajes, según factura	—	282
»	15. — Mi » 4 piezas muselina, según factura	—	948
»	28. — Mi » cortes vestido señora, según factura	—	1,020'50
Mayo	10. — Mi giro a s/c, o/ Vives, a 8 d/v	—	1,500
»	23. — Mi remesa hilo y botones, según factura	—	154
»	30. — Mi » tela colores para forros, según factura ...	—	96'75
Junio	15. — Su entrega en metálico..........................	—	250
»	26. — Mi remesa abanicos, según factura	—	128'50
»	28. — Mi entrega a Roca, por s/cta	—	500
»	30. — Mi remesa pañuelos y medias, según factura	—	420'13

Extiéndase la cta. corriente y dígase el saldo, del que dispone el acreedor en l/ a c/ del deudor a 8 d/v.

Cuentas corrientes con interés (*)

1. El banquero D. Pedro González, de Gerona, extiende y remite a su cliente el comerciante de la misma ciudad D. F. Cibils, su cuenta corriente al interés recíproco de 6 %, cerrada en 31 de marzo de 1911. Las operaciones que la constituyen son las siguientes:

Enero	1. — Su entrega en efectivo	Ptas.	4,400
»	8. — Mi giro a s/o, s/ Barcelona, al 18 corriente, c/ Anglada.	—	850
»	19. — Su endoso a m/o, al fin corriente, c/Pla	—	500
Febrero	12. — Mi entrega en efectivo	—	750'20
»	25. — Su » » »	—	600
Marzo	10. — Mi factura géneros	—	1,420
»	24. — Su » »	—	1,000
»	28. — Mi giro a s/o, a l/v, c/ Ros	—	429

Redáctese la cta. corriente por los métodos directo, indirecto y hamburgués, y dígase el saldo a cta. nueva.

2. El banquero González y el comerciante Cibils, de la cta. precedente, continúan las operaciones comerciales empezadas. En 30 de junio siguiente, el banquero presenta al referido comerciante la cta. corriente de las operaciones por entrambos verificadas durante los meses de abril, mayo y junio, al interés recíproco de 6 %, las cuales son como sigue:

Marzo	31. — Saldo a s/f de la cta. anterior......................	Ptas.	3,104'31
Abril	12. — Su entrega en metálico..........................	—	1,500
»	20. — Mi giro a s/o, s/ Alcoy, c/ Roca, al 10 mayo de	—	2,400
»	25. — Mi entrega a Sancho por s/cta.	—	250
Mayo	11. — Su » a Cama por m/cta	—	800
»	25. — Su endoso a m/o, c/ Pi, s/ Reus, al 20 junio	—	725
Junio	26. — Mi » a s/o, c/ Pérez, s/ Barcelona, al fin corriente.	—	1,280
»	30. — Su entrega en metálico..........................	—	330

Redáctese la cta. corriente por los métodos directo, indirecto y hamburgués, y dígase e saldo a cta. nueva.

3. El banquero González y el comerciante Cibils, de la cta. precedente, continúan las operaciones. En 30 de septiembre siguiente, el banquero presenta al comerciante la cta. corriente de las operaciones realizadas durante los meses de julio, agosto y septiembre, al interés recíproco de 6 %, las cuales son como sigue:

Junio	30. — Saldo a s/f de la cta. anterior......................	Ptas.	2,580'84
Julio	20. — Su entrega en metálico..........................	—	3,000
»	26. — Mi endoso a s/o, c/ Heras, al 15 agosto	—	800
Agosto	21. — Su » a m/o, c/ Carles, al 31 agosto	—	2,400
»	22. — Devolución de mi endoso c/ Heras, con gastos de protesto.	—	835
Septbre.	10. — » de su » c/ Carles, con gastos de protesto.	—	2,440'50
»	20. — Mi giro a s/o, c/ Riera, al fin octubre próximo, de	—	1,200'25
»	25. — Mi entrega en efectivo	—	5,000

(*) En la resolución de todas las cuentas corrientes con interés, al calcular los intereses, hemos tomado el divisor fijo correspondiente al año comercial, de 360 días, siguiendo la costumbre establecida en casi todas las casas de comercio de España y Francia.

Redáctese la cta. corriente por los métodos directo, indirecto y hamburgués, y dígase el saldo a cta. nueva.

4. El banquero González y el comerciante Cibils, de las cuentas anteriores, continúan las operaciones. En 31 de diciembre siguiente, el banquero presenta al comerciante la cta. corriente de las operaciones verificadas durante los meses de octubre, noviembre y diciembre, al interés recíproco de 5 %, cuyas operaciones son como sigue:

Septbre.	30. — Saldo a m/f de la cta. anterior	Ptas.	544'16
Octubre	12. — Mi factura géneros	—	1,200
»	25. — Mi entrega a Ros por s/cta.	—	82'50
Novbre.	10. — Mi endoso a s/o, c/ Albert, al 20 enero próximo	—	240'70
»	28. — Su giro a m/c, o/ Culla, al 8 diciembre	—	615
Dicbre.	12. — Su giro a m/c, o/ Mas, al fin corriente	—	426
»	26. — Mi giro a s/c, o/ Careta, al 22 febrero próximo	—	5,960'12

Redáctese la cta. corriente por los métodos directo, indirecto y hamburgués, y dígase el saldo a cta. nueva.

5. El banquero González y el comerciante Cibils, mencionados en las otras cuentas, continúan sus relaciones comerciales. En 31 de marzo de 1912, el banquero extiende y remite al comerciante la cta. corriente de las operaciones verificadas durante los meses de enero, febrero y marzo, al interés recíproco de 4 $^1/_2$ % anual, las cuales son como sigue:

Dicbre.	31 de 1911. — Saldo a s/f de la cta. anterior	Ptas.	2,785'57
Enero	15 de 1912. — Su endoso a m/o, al fin corriente	—	2,000
»	24. — Su entrega en metálico	—	450
Febrero	13. — Su pago por m/cta. a Serra	—	500
»	25. — Mi giro a s/c, o/ Vila, al fin abril	—	850'12
Marzo	6. — Su giro a m/o, c/ Tornel, al fin marzo	—	1,540
»	10. — Su remesa géneros	—	800
»	28. — Mi endoso a s/o, o/ Rico, al 2 mayo	—	9,980

Redáctese la cta. corriente por los tres métodos conocidos, y dígase el saldo a cta. nueva.

6. El banquero González y el comerciante Cibils, mencionados, continúan las relaciones comerciales. En 30 de junio de 1912, el banquero extiende y remite al comerciante la cta. corriente de las operaciones verificadas durante los meses de abril, mayo y junio, al interés recíproco de 4 % anual, las que son como sigue:

Marzo	31. — Saldo a m/f de la cta. anterior	Ptas.	962'81
Abril	12. — Su entrega en efectivo	—	1,000
»	20. — Mi entrega en efectivo	—	415
Mayo	16. — Mi giro a s/o, al 10 junio	—	800
»	20. — Su giro a m/o, al 20 junio	—	450
Junio	12. — Mi giro a s/c, al 15 julio	—	280'50
»	15. — Su giro a m/c, al 20 julio	—	1,200
»	20. — Su entrega en metálico	—	400
»	29. — Mi entrega en metálico	—	100'95
»	30. — Su giro a m/c, al 20 agosto	—	900

Redáctese la cta. corriente por los tres métodos y dígase el saldo a cuenta nueva.

7. La casa de banca Salvador y C.ª, de Valencia, extiende y remite a su cliente el comerciante de la misma ciudad D. Francisco Zapater, la cuenta corriente de las operaciones verificadas durante los meses de enero, febrero y marzo, al interés de 6 % anual el *Débito* y 4 % el *Crédito*, cerrada en 31 de marzo de 1911. Las operaciones verificadas son las siguientes:

Enero	1. — Su entrega en metálico	Ptas.	4,500
»	10. — Nuestro endoso a s/o, al fin corriente	—	1,000
»	20. — Nuestra entrega en efectivo	—	450
Febrero	6. — Su endoso a n/o, al fin corriente	—	950'25
»	18. — Nuestra entrega a Colomer por s/cta.	—	80
»	25. — Su giro a n/c, al 10 marzo	—	1,500
Marzo	20. — Nuestro endoso a s/o, al 30 corriente	—	870'75
»	31. — Su remesa en metálico	—	650'40

Redáctese la cta. corriente por el método hamburgués, y dígase el saldo a cuenta nueva.

8. La casa de banca Salvador y C.ª, de Valencia, y el comerciante Zapater, mencionados en la cta. corriente precedente, continúan las relaciones comerciales. En 30 de junio de 1911, la casa bancaria extiende y remite al comerciante la cta. corriente de las operaciones verificadas durante los meses de abril, mayo y junio, al interés de 5 % anual el *Débito* y de 3 % el *Crédito*. Las operaciones realizadas son como sigue:

Marzo	31. — Saldo a s/f de la cta. anterior	Ptas.	2,229'28
Abril	15. — Su remesa en metálico	—	1,600
»	20. — Nuestro giro a s/o, c/ Adroher, al fin corriente	—	6,400
Mayo	6. — Nuestro endoso a s/o, al 10 junio	—	1,000
»	15. — Nuestra entrega a Coris por s/cta.	—	800
»	30. — Su endoso a n/o, al fin junio	—	1,550
Junio	14. — Su remesa géneros	—	490
»	20. — Su giro a n/c, al 20 agosto	—	450'12

Extiéndase a cta. corriente por el método hamburgués, y dígase el saldo a cuenta nueva.

Imposiciones

1. ¿Qué cantidad debe imponerse anualmente al interés compuesto de 4 %, para obtener 300 ptas. al cabo de 19 años?

2. Un joven de 20 años desea reunir 12,000 ptas. cuando llegue a los 40 años de edad. ¿Qué cantidad deberá imponer anualmente al interés compuesto de 5 %?

3. Un obrero laborioso que se interesa por el porvenir de sus hijos, a fin de formar un capital con que dotar a una niña recién nacida, impone 30 ptas. anualmente al 4 % de interés compuesto. ¿Qué cantidad podrá retirar al cumplir la niña los 20 años de edad?

4. Un caballero impone anualmente el producto líquido del alquiler de una casa de su propiedad, al interés compuesto de 6 % anual. ¿Qué capital habrá acumulado al cabo de 12 años, suponiendo que la casa consta de 2 pisos y que saca mensualmente 25 ptas. del primero y 15 ptas. del segundo?

5. Cierto individuo impuso anualmente 2,401 ptas. al interés compuesto, y al cabo de 15 años retiró 50,000 ptas. ¿A qué tanto % hizo la imposición?

6. ¿A qué interés compuesto se impusieron anualmente y durante 10 años 757'20 pesetas, habiéndose retirado 10,000 ptas. al cabo del expresado tiempo?

7. Se sabe que cierto individuo destinaba anualmente 223'52 ptas. al interés compuesto de 6 %, y que cobró 8,000 ptas. por cantidades impuestas e intereses devengados. ¿Durante cuántos años hizo la imposición?

8. Una señora impuso, durante cierto número de años, 750'30 ptas. al interés compuesto de 4 % anual, y retiró 30,500 ptas. ¿Durante cuántos años hizo la mencionada imposición?

Anualidades, amortizaciones y rentas vitalicias

1. Careciendo de fondos con que atender a imprescindibles necesidades, el Ayuntamiento de cierta capital desea contratar un empréstito al interés compuesto de 4 % amortizable en 20 años, y al efecto, consigna en su presupuesto anual la cantidad de 20,000 ptas. con destino a la amortización. ¿Qué cantidad, en estas condiciones, podrá contratar?

2. Cierta corporación desea contratar un empréstito, amortizable en 25 años, pagando el interés compuesto de 3 % anual, y destinando la anualidad de 100,000 ptas. para la amortización. ¿A cuánto ascenderá la cantidad contratada?

3. Se ha hecho un préstamo de 120,000 ptas., amortizable en 12 años, al interés compuesto de 6 % anual. ¿Qué anualidad deberá satisfacerse para su extinción?

4. Deseando dar mayor extensión a su negocio, un comerciante ha tomado a préstamo 20,000 ptas. al interés compuesto de 5 % anual, comprometiéndose a extinguir la deuda en 9 pagos iguales. ¿Qué anualidad deberá satisfacer?.

5. Una deuda de 5,000 ptas. al interés compuesto de 2 %, quedó amortizada mediante una anualidad de 510'90 ptas. ¿Cuántos años se satisfizo la anualidad mencionada?

6. Cierta corporación contrató un empréstito de 250,000 ptas. al interés compuesto de 4 % anual, cuya cantidad amortizó pagando una anualidad de 18,395 ptas. ¿En cuánto tiempo extinguió la deuda?

7. Se sabe que un comerciante amortizó una deuda de 40,000 ptas. en 14 años, pagando una anualidad de 4,040'80 ptas. ¿A qué tasa se había convenido el interés compuesto?

8. Amortizóse un capital de 15,000 ptas. en 22 años, siendo la anualidad 941'25 ptas. ¿Cuál era el interés compuesto que devengaba el capital?

9. Una señora sin familia, de 50 años de edad, dueña de varias fincas valoradas en 40,000 ptas., contrata una renta vitalicia con una compañía de seguros sobre la vida, estipulando el interés compuesto a 4 % anual. ¿Qué pensión recibirá?

10. Un caballero sin familia, de 40 años de edad, contrata una renta vitalicia con la Compañía de seguros sobre la vida *La Previsión*. Siendo 34,500 ptas. el valor de sus fincas rústicas y urbanas, y conviniendo el interés compuesto a 3 % al año, ¿de qué pensión anual disfrutará?

Falsa posición

I

1. Se han de repartir 4,500 pesetas entre 3 personas, de modo que la 1.ª reciba las tres quintas partes de lo que corresponda a la 2.ª, y ésta, los $^7/_8$ de la parte correspondiente a la 3.ª ¿Cuánto recibirá cada una?

2. La mitad, el tercio y el dieciochoavo de un número suman 80. ¿Qué número es éste?

3. Pedro, Juan y Antonio reúnen juntos, 50 pesetas. Antonio tiene doble cantidad que Juan, y éste, tres veces más que Pedro. ¿Cuánto tiene cada uno?

4. Lo que ha importado la compra de un reloj, con la mitad y el octavo de este valor suman 65 ptas. ¿Cuál es el valor del reloj?

5. Preguntaron a un sujeto qué edad tenía, y respondió: «Si al duplo de mis años, añades el quinto de los mismos y la unidad, tendrás un siglo cabal.» ¿Qué edad tenía?

6. El duplo de los huevos que hay en un cesto, sumado con el tercio, el cuarto, el sexto de los mismos y media docena más, son 6 docenas. Averígüese el número de huevos que el cesto contiene.

7. Al ausentarse de su pueblo natal un filántropo caballero, entregó cierta cantidad para obras de beneficencia, la cual fué distribuída de la manera siguiente: la $^1/_2$ al asilo de ancianos desvalidos; la quinta parte, al hospital; la octava parte, a una familia desgraciada, y el resto, para limosnas a los pobres. El asilo, el hospital y la familia desgraciada, recibieron, en junto, 330 pesetas. Se pregunta cuánto desembolsó el caballero y qué recibió cada uno.

8. Enrique jugó durante 3 horas: en la 1.ª perdió $^1/_5$ del dinero que tenía; en la 2.ª, la sexta parte del mismo, y en la 3.ª, $^4/_{10}$ de ídem. Si hubiese perdido 35 ptas. más, hubiera perdido, en junto, 127 ptas. ¿Cuánto tenía cuando empezó a jugar?

9. La mitad, más el quinto, más la décima parte de la distancia que media entre dos pueblos es 200 metros. Hállese la distancia mencionada?

II

10. La edad de Juan es mayor que la de Antonio en 5 años; Francisco tiene tantos años como ellos dos, y los tres suman 70 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

11. Hállense dos números cuya suma sea 65, y su diferencia, 15.

12. Juan y Antonio, reuniendo su dinero, tienen 212 ptas. El 1.º tiene 148 ptas. más que el segundo: ¿cuánto tiene cada uno?

13. Hállese un número tal que, si de su quíntuplo se quitan 12 unidades, resulte dicho número más las mismas 12 unidades.

14. Un comerciante compró 42 Hl. de vino, satisficiendo por ellos 1,345 ptas. Parte de dicho vino lo pagó a 30 ptas. el Hl., y parte, a 35 ptas. ídem. ¿Cuántos Hl. compró de cada precio?

15. Un pastor dijo a otro: «Hermosos son los 100 corderos de tu rebaño.» Y el segundo contestó: «No llevo tantos corderos; pero los que llevo, el duplo de los que llevo, la décima parte de los mismos y 7 más, componen los 100 que tú has dicho.» ¿Cuántos corderos tenía en su rebaño?

16. Un padre tiene 30 años, y su hijo, 6. ¿Dentro de cuántos años la edad del hijo será el tercio de la del padre?

17. Cierto individuo se puso a jugar, y duplicó las pesetas que llevaba; volvió a jugar, y duplicó otra vez su dinero más 6 pesetas; jugó de nuevo y perdió el tercio del dinero que tenía, quedando con 36 pesetas. ¿Cuánto dinero tenía cuando empezó a jugar?

18. Un padre dice a su hijo: «Cada día que sepas la lección, te daré 10 céntimos, y tú me darás 5 céntimos cada día que no la sepas.» Transcurridos 40 días, el niño había ganado 175 céntimos. Averígüese los días que supo la lección y los que no la supo.

19. En un depósito, hay cierta cantidad de agua: se abre la espita que lo alimenta, y vierte en él doble cantidad de agua que la que contiene; se abre la espita de salida, y el depósito pierde 120 litros de líquido; vuelve a abrirse la espita primera, y el depósito recibe una cantidad de agua igual a la tercera parte de la que entonces contiene. Después de esta última operación, hay en el depósito 840 litros de agua. Hállese la cantidad de líquido que había primeramente en el depósito.

20. Los $^3/_4$ de un capital se han prestado al 6 % anual, y el resto, al 5 %. El prestador obtiene anualmente 690 ptas. de intereses: ¿cuál es dicho capital?

21. Prestando los $^2/_3$ de un capital al 4 % anual, y el resto al 7 %, se obtienen cada año 225 ptas. en concepto de intereses. Hállese dicho capital.

Razones y proporciones aritméticas

1. Escribir seis razones aritméticas.
2. Idem cuatro razones aritméticas iguales.
3. Idem cuatro razones aritméticas iguales a la siguiente: 4 · 2.
4. Dadas las razones aritméticas 8 · 2 — 5 · 4 — 3 · 7 — 15 · 46 — 128 · 19, hallar la razón compuesta.
5. Escribir seis proporciones aritméticas discretas.
6. Idem seis ídem ídem continuas.
7. Hallar el término desconocido en cada una de las proporciones aritméticas siguientes: 12 · 5 : 9 · x — 7 · 12 : 5 · x — x · 12 : 14 · 6 — x · 9 : 8 · 14.
8. Idem el de cada una de las siguientes: 15 · 20 : x · 12 — 40 · 30 : x · 3 — 16 · x : 23 · 16 — 8 · x : 7 · 12.
9. Los términos extremos de una proporción aritmética continua son 8 y 4. ¿Cuál es el medio diferencial?
10. Hállese el medio diferencial en cada una de las siguientes:

48 · x : x · 16 — 12 · x : x · 14 —
30 · x : x · 26 — 122 · x : x · 44

Progresiones aritméticas

I

1. Escribir cuatro progresiones aritméticas crecientes.
2. Idem cuatro ídem ídem decrecientes.
3. Idem las ídem ídem crecientes:

1.ª	Que tenga	12	términos y la razón sea	2.
2.ª	» »	20	» » »	3.
3.ª	» »	14	» » »	$^1/_2$.
4.ª	» »	26	» » »	$^2/_5$.

4. Idem las ídem ídem decrecientes:

1.ª	Que tenga	8	términos y la razón sea	2.
2.ª	» »	15	» » »	4.
3.ª	» »	12	» » »	$^1/_2$.
4.ª	» »	16	» » »	$^3/_7$.

5. Hállese el término 14.º de una progresión aritmética creciente cuyo primer término es 4 y la razón, 3.
6. Idem los términos 6.º, 15.º y 19.º de una ídem creciente cuyo primer término es 2, y 5 la razón.
7. Idem los términos 12.º, 23.º, 7.º y 30.º de una ídem creciente cuyo primer término es 6, y $^1/_5$, la razón.
8. Idem los términos 9.º, 12.º y 25.º de una progresión aritmética decreciente cuya razón es 4, y 128, el primer término.
9. El primer término de una progresión aritmética es 8, y el último término, 40. La progresión tiene 17 términos: ¿cuál es la razón?
10. Una progresión aritmética tiene 20 términos, y el mayor y el menor son 78 y 2, respectivamente. Hállese la razón.
11. Los términos mayor y menor de una progresión aritmética que tiene 26 términos son 94 $^1/_2$ y 7. Dígase la razón de la progresión.
12. Interpólense 8 términos diferenciales o medios aritméticos entre los números 8 y 26, en progresión creciente y decreciente.
13. Entre los números 120 y 6, interpolar 37 términos diferenciales o medios aritméticos, en progresión creciente y decreciente.
14. ¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética cuyos términos primero y último son 5 y 83, respectivamente, y 3 la razón?
15. ¿Cuál es el número de términos de una progresión aritmética cuya razón es 6, siendo 2 y 182 el primero y último términos?
16. Hállese la suma de los términos de una progresión aritmética que tiene 30 términos, siendo 2 y 176 el primero y último, respectivamente.
17. Determínese la suma de los términos de una progresión aritmética cuyo número de términos es 26, siendo el primero y último 164 y 14, respectivamente.

II

18. Cierto individuo ha de pagar una cantidad determinada en 2 años, verificando una entrega cada mes, y dando cada vez 40 ptas. más que la anterior. ¿Qué cantidad deberá entregar al efectuar el último pago, siendo 100 pesetas lo desembolsado la primera vez?

19. Un obrero se compromete a abrir un pozo de 15 metros de profundidad, recibiendo 3 ptas. por el primer metro, y aumentando en 2 ptas. el precio de cada uno de los metros sucesivos, a causa de la resistencia del terreno y de la dificultad que presenta el trabajo. ¿Cuánto ha recibido por el 5.º metro y cuánto, por el último?

20. Un almacenista de corchos ha vendido a 12 fabricantes de tapones un cargamento que recibió de Córcega, vendiendo al primer fabricante 300 quintales m., y a cada uno de los restantes, 50 quintales m. más que al que inmediatamente le precedía. ¿Cuánto ha cobrado por lo que compró el último, siendo 5 duros el precio de cada quintal m.?

21. Se amortizó una deuda en 12 plazos, dando en el primero 80 ptas., y aumentando cada uno de los sucesivos en una cantidad fija. Determínese la cantidad en que cada pago fué mayor que el precedente, sabiendo que la última cantidad entregada son 740 pesetas.

22. Preguntaron a un antiguo dependiente de una casa de banca qué sueldo anual ganaba, y contestó: «Llevo 20 años en esta casa, y mi sueldo ha sido aumentado anualmente en una cantidad fija. El primer año gané 3,000 ptas., y este año he cobrado 12,500.» ¿En cuánto fué aumentado su sueldo anualmente?

23. Un laborioso tejedor hizo una pieza en 14 días, terminando diariamente su trabajo luego de haber tejido lo que el día anterior y una cantidad fija determinada, la misma cada día. El primer día hizo 7 metros, y el último, 26 $^1/_2$. ¿Cuánto tejió cada uno de los demás días?

24. El dueño de una casa de huéspedes ha gastado, en enero, 300 pesetas, y en cada uno de los meses sucesivos, durante 1 año, ha gastado, mensualmente, una cantidad determinada más que el mes anterior. Sabiendo que en diciembre gastó 575 ptas., hállese lo gastado en cada uno de los otros meses.

25. Cierto individuo hizo el pago de sus deudas en un número de años determinado, dando el primer año 4,000 ptas., y en cada uno de los otros, 1,000 ptas. más que el año anterior. El último pago que verificó ascendió a 13,000 ptas. ¿En cuántos años extinguió su débito?

26. Un ebanista compró varias mercaderías efectuando el pago en diferentes plazos. El primero dió 90 ptas.; el segundo, 150; el tercero, 210; y así sucesivamente, dando cada plazo 60 ptas. más que el anterior. Se sabe que la última entrega fué de 450 ptas. ¿En cuántos plazos pagó los géneros?

27. Se han vendido varios géneros pagaderos en 12 plazos, dando en el primero 200 pesetas, y aumentando cada uno de los restantes en una misma cantidad. Debiendo ser el último plazo de 475 ptas., ¿cuál es el valor de los géneros?

28. Un taponero elaboró, en lunes, 1,500 tapones de corcho, y en cada uno de los restantes días de la semana hizo 150 tapones más que el anterior. ¿Cuántos tapones hizo el sábado y cuántos, en los seis días laborables de la semana?

29. Un reloj que da las horas y las medias, ¿cuántas campanadas da en 24 horas?

30. Tenemos una pila de ladrillos dispuestos en 20 filas de modo que cada una, a contar de la que forma la base, tiene un mismo número de ladrillos menos que la inmediata inferior. La fila superior tiene 45 ladrillos, y 235 la de la base. Se pregunta la cantidad uniforme de ladrillos con que disminuye cada fila, y el número de ladrillos que la pila contiene.

Progresiones geométricas

1. Escribir cuatro progresiones geométricas crecientes.
2. Idem cuatro ídem ídem decrecientes.
3. Idem las ídem ídem crecientes:

1.ª	Que	tenga	12	términos	y	la	razón	sea	2.
2.ª	»	»	20	»	»	»	»	»	3.
3.ª	»	»	14	»	»	»	»	»	5.
4.ª	»	»	6	»	»	»	»	»	3 $^3/_4$.

4. Idem las ídem ídem decrecientes:

1.ª	Que	tenga	8	términos	y	la	razón	sea	2.
2.ª	»	»	15	»	»	»	»	»	3.
3.ª	»	»	10	»	»	»	»	»	10.
4.ª	»	»	7	»	»	»	»	»	2 $^1/_5$.

5. Hállese el 5.º término de una progresión geométrica creciente cuyo término primero es 4, y 2 la razón.

6. Determínense los términos 4.º, 6.º y 8.º de una progresión geométrica creciente cuyo término primero es 5, siendo 3 la razón.

7. Averígüense los términos 3.º y 6.º de una progresión geométrica decreciente cuyo primer término es 972, siendo 3 la razón.

8. Hállese el término 1.º de una progresión geométrica creciente cuyo término 8.º es 640, y 2 la razón.

9. Determínese el primer término de una progresión geométrica decreciente cuya razón es 3, y 6 el último término, siendo 10 el número de términos.

10. Una progresión geométrica tiene 4 términos, siendo 3,136 y 49 los términos mayor y menor. ¿Cuál es la razón?

11. Hállese la razón de una progresión geométrica que tiene 5 términos, siendo el primero y último 21 y 13,125, respectivamente.

12. Los términos mayor y menor de una progresión geométrica que tiene 10 términos, son 157,464 y 8, respectivamente. ¿Cuál es la razón?

13. Interpólense dos medios geométricos entre los números 24 y 1,536, en progresión creciente y decreciente.

14. Interpólense tres medios geométricos, en progresión creciente y decreciente, entre los números 2 y 1,250.

15. Entre los números 2,048 y 4, interpólense ocho medios geométricos en progresión creciente y decreciente.

16. Hállese la suma de los términos de una progresión geométrica cuya razón es 2, siendo el término mayor 4,096, y el término menor, 8.

17. Los números 24 y 157,464 son, respectivamente, el primero y último términos de una progresión geométrica cuya razón es 3. ¿Cuál es la suma de los términos de dicha progresión?

18. Los números 1.562,500 y 20 son el primero y último términos de una progresión geométrica cuya razón es 5. Hállese la suma de los términos de dicha progresión.

II

19. Un móvil ha marchado durante 8 horas triplicando, en cada una, la velocidad. Si durante la hora primera recorrió 10 kilómetros, ¿cuál fué la distancia recorrida durante la quinta hora?

20. Si se duplicase cinco veces el dinero que tiene una persona, tendría 128 pesetas. ¿Cuánto tiene?

21. Un jugador perdió seis veces consecutivas el dinero que apostaba, triplicando siempre la cantidad. La séptima y última vez que jugó, perdió 6,561 ptas.: ¿cuánto perdió la vez primera?

22. Distribuyóse cierta cantidad entre 6 personas, dando a cada una la mitad de lo que recibió la anterior. Se sabe que la última percibió 5 pesetas: ¿cuánto correspondió a la primera?

23. Un tendero empezó su negocio con 1,580 pesetas, y tres años después tenía 12,640 pesetas. ¿En qué relación aumentó, anualmente, su capital

24. Un filántropo capitalista visitó su pueblo natal, y el día de su llegada distribuyó 20 pesetas entre los pobres, y continuó socorriéndoles durante nueve días más. Se sabe que el último día les dió 393,660 pesetas: ¿en qué relación aumentaron diariamente las cantidades donadas?

25. Si el filántropo que en el anterior problema se menciona, hubiese dado a los pobres 25 ptas. el primer día y 12,800 el último, guardando las cantidades entregadas una relación geométrica determinada, ¿cuánto hubiera distribuído cada día?

26. Una persona ha pagado sus deudas en 12 meses, triplicando cada mes la cantidad entregada el anterior. Se sabe que el último plazo fué de 14.171,760 ptas. ¿Qué cantidad debía?

27. Un rico y caritativo caballero ha favorecido a 8 familias necesitadas, dando a cada una doble cantidad que a la anterior. Entregó a la última 768 ptas.: ¿cuánto dió a la primera, y cuál es la cantidad total distribuída?

28. Si damos crédito a la historia, el inventor del juego de ajedrez debió recibir una recompensa del rey, y se contentaba con 1 grano de trigo para la primera casilla de las 64 del tablero; 2 granos de trigo para la segunda casilla; 4 para la tercera, y así sucesivamente, duplicando siempre el número de granos hasta la última casilla. Suponiendo quepan 25,000 granos de trigo en 1 litro y que por hectolitro se paguen 20 pesetas, ¿cuántos granos de trigo pidió y cuánto cobró al venderlo? (*)

(*) Este problema, que se lee en casi todos los autores que estudian las progresiones, demuestra claramente, como en otro lugar decimos, la asombrosa rapidez con que aumentan los términos de las progresiones geométricas.

Logaritmos

1. Hállese el log. de cada uno de los siguientes números:

1.° 6	7.° 98	13.° 387	19.° 1000	25.° 2506	31.° 94377
2.° 8	8.° 77	14.° 999	20.° 2590	26.° 2420	32.° 18442
3.° 10	9.° 65	15.° 651	21.° 4326	27.° 5900	33.° 124380
4.° 12	10.° 100	16.° 898	22.° 1569	28.° 10000	34.° 436599
5.° 54	11.° 250	17.° 584	23.° 9665	29.° 24650	35.° 154600
6.° 49	12.° 526	18.° 666	24.° 7443	30.° 18000	36.° 2846695

2. Idem el log. de cada uno de los siguientes:

1.° 0'37	8.° 0'0001	15.° 4'6	22.° 1/2, 23.° 20/45, 24.° 4 3/5
2.° 0'125	9.° 0'00095	16.° 6'25	
3.° 0'4356	10.° 0'00007	17.° 3'96	25.° 3/5, 26.° 36/125, 27.° 2 1/2
4.° 0'12	11.° 0'000009	18.° 8'25	
5.° 0'047	12.° 27'0075	19.° 124'456	28.° 7/8, 29.° 45/12, 30.° 4 3/8
6.° 0'007	13.° 6'00047	20.° 7'8470	
7.° 0'001	14.° 0'000001	21.° 4630'78965	31.° 5/6, 32.° 360/1450, 33.° 28 3/7

3. Hallar el log. de cada uno de los siguientes:

1.° 436125	6.° 156998 7/8	11.° 700000'85	16.° 0'00075
2.° 1530602	7.° 198427 3/4	12.° 0'02436	17.° 2'00001
3.° 2007003	8.° 469377 15/28	13.° 0'000001	18.° 25'0006
4.° 435628937	9.° 1000000'426	14.° 1250 125/340	19.° 0'12986
5.° 8467'009	10.° 9643'00019	15.° 476980 22/99	20.° 0'0000986

4. Hallar el número a que corresponde cada uno de los logaritmos siguientes:

1.° 0.301030	5.° 2.071882	9.° 2.351216	13.° 2.970300	17.° 4.870053	21.° 4.763254
2.° 1.397940	6.° 7.987445	10.° 2.920384	14.° 3.040088	18.° 0.978298	22.° 5.741220
3.° 1.505150	7.° 2.093422	11.° 3.031691	15.° 3.030478	19.° 2.542409	23.° 3.540712
4.° 1.986772	8.° 2.170262	12.° 2.960423	16.° 5.500143	20.° 6.220078	24.° $\overline{1}.883030$

25.° $\overline{1}.580126$	27.° $\overline{4}.960172$	29.° $\overline{1}.599818$
26.° $\overline{1}.719911$	28.° $\overline{4}.887708$	30.° $\overline{7}.468942$

31.° $\overline{2}.539703$

5. Determínese el número que corresponde a cada uno de los logs. siguientes:

1.° 4.259020	4.° 3.011401	7.° 1.415090	10.° $\overline{6}.000000$	13.° $\overline{1}.875061$
2.° 4.629430	5.° 5.640370	8.° $\overline{1}.579784$	11.° $\overline{2}.880814$	14.° 2.217352
3.° 2.629970	6.° 0.603215	9.° $\overline{4}.301030$	12.° $\overline{1}.000000$	15.° $\overline{4}.041393$

6. Súmense los logaritmos siguientes:

1.° 0.453690 + 2.154267 + 9.253640

2.° $\overline{3}.457604 + \overline{4}.251932 + \overline{5}.163090$

3.° 3.603283 + 4.081025 + $\overline{3}.126036$

4.° 4.220625 + $\overline{2}.094506 + \overline{2}.604305$ + 2.094506

5.° $\overline{3}.094562$ + 8.542231 + $\overline{5}.461230 + \overline{3}.284562$

7. Réstense los siguientes:

1.° 9.436220 − 7.263560' 2.° 2.903010 − 4.581020; 3.° $\overline{6}.946320$ − 2.843208;
4.° 2.321520 − $\overline{3}.603285$; 5.° $\overline{12}.043619 - \overline{25}.120904$; 6.° $\overline{9}.090390 - \overline{2}.403695$

8. Multiplíquense los siguientes:

1.° 8.540846 × 9; 2.° 3.064550 × 2; 3.° $\overline{4}.062532$ × 12; 4.° $\overline{2}.065032$ × 6;
5.° $\overline{1}.068032$ × 25; 6.° 4.182506 × 23'46; 7.° $\overline{2}.543225$ × 36; 8.° 26.094360 × 48;
9.° $\overline{13}.250490$ × 18; 10.° $\overline{10}.301030$ × 2'75.

9. Divídanse los siguientes:

1.° 54.253218 : 2; 2.° 20.558006 : 4; 3.° 26.081952 : 3; 4.° $\overline{12}.432065$: 4;
5.° $\overline{27}.025425$: 9; 6.° $\overline{54}.250432$: 12; 7.° $\overline{48}.598044$: 11: 8.° $\overline{25}.263042$: 8;
9.° $\overline{45}.603226$: 7; 10.° $\overline{18}.928402$: 5.

10. Hallar los productos siguientes por medio de los logaritmos:

1.° 456 × 25	4.° 986 × 754	7.° 28467 × 7846	10.° 860 × 15 × 740
2.° 864 × 13	5.° 847 × 964	8.° 175876 × 5496	11.° 145 × 798 × 800
3.° 876 × 954	6.° 9847 × 654	9.° 60000 × 7800	12.° 896 × 63 × 1840

13.° 546'84 × 75	15.° 1896'75 × 6'25	17.° 98476'15 × 0'4789
14.° 8646'25 × 125	16.° 46'007 × 12'875	18.° 1247'125 × 0'5476

11. Hállese el cociente de cada una de las siguientes divisiones por medio de los logaritmos:

1.ª 184675 : 8; 2.ª 756432 : 6; 3.ª 15768610 : 56; 4.ª 984632 : 96;
5.ª 8452125 : 125; 6.ª 124759 : 786; 7.ª 1247598 : 694; 8.ª 8467593 : 6849;
9.ª 784632 : 1890; 10.ª 8462'45 : 26; 11.ª 91847'695 : 4625; 12.ª 98'25 : 4'466

12. Elévense, por medio de los logaritmos, los números siguientes a la

6.ª potencia		9.ª potencia		5.ª potencia		4.ª potencia	
1.º	8	5.º	25	9.º	284	13.º	0'4563
2.º	12	6.º	49	10.º	1549	14.º	0'0789
3.º	45	7.º	65	11.º	24612	15.º	24'1250
4.º	39	8.º	150	12.º	15490	16.º	150'009

13. Extraer de los números siguientes, por medio de logaritmos, las raíces

Novena		Séptima		Quinta		Cuarta		Cúbica	
1.º	24650	4.º	12456	7.º	860000	10.º	12689760	13.º	124'6798
2.º	40860	5.º	956748	8.º	1254900	11.º	84677500	14.º	129847'50
3.º	12586	6.º	125560	9.º	86789000	12.º	125789647	15.º	875964'127

Interés compuesto

1. ¿En cuánto se convertirán 1,000 ptas., puestas al interés compuesto de 6 % durante 8 años?

2. Cierto individuo prestó 25,000 ptas. al interés compuesto de 5 % anual durante 40 años. ¿Cuánto recibió al finalizar el tiempo mencionado, en concepto de capital e intereses?

3. Un prestamista me ha facilitado 1,095 ptas. al interés compuesto de 4 % anual. Teniendo la seguridad de que podré devolver la expresada cantidad al cabo de 6 años, ¿qué beneficio habrá realizado el prestamista mencionado?

4. ¿Qué capital deberá prestarse al interés compuesto de 6 % anual para obtener, al cabo de 8 años, 1,593'85 ptas. en concepto de capital y ganancia?

5. Prestóse un capital al interés compuesto de 5 % durante 40 años, y se convirtió en 175,994'80 pesetas. ¿Cuál era este capital?

6. Se impuso un capital, durante 6 años, al interés compuesto de 4 %, y el prestador recibió 1,385'516 ptas. al finalizar el tiempo mencionado. Hállese dicho capital.

7. ¿A qué tanto por ciento de interés compuesto se colocaron 1,000 pesetas, habiéndose convertido en 1,593'85 ptas. después de transcurridos 8 años?

8. Hállese el tanto por 100 de interés compuesto a que se prestaron 25,000 ptas. durante 40 años, sabiendo que el prestador realizó un beneficio de 150,994'80 pesetas.

9. Un capital de 1,095 ptas., colocado a interés compuesto durante 6 años, se convirtió en 1,385'516 ptas. ¿A qué tanto % anual se hizo el préstamo?

10. Prestáronse 1,000 ptas. al interés compuesto de 6 % anual, y al cabo de cierto tiempo recibió el prestador 1,593'85 ptas. en concepto de capital y ganancia. ¿Por cuánto tiempo se hizo el préstamo?

11. Un caballero prestó 25,000 ptas. al interés compuesto de 5 % anual, y su hijo heredero cobró la cantidad prestada y el beneficio por ella producido, sumando un total de 175,994'80 pesetas. ¿Cuánto tiempo permaneció prestada la referida cantidad?

12. Colocáronse 1,095 ptas. al interés compuesto de 4 % al año, y al retirar la cantidad prestada, ésta había producido una ganancia de 290'516 ptas. ¿Por cuánto tiempo se hizo el préstamo?

13. ¿Qué suma deberá prestarse al interés compuesto de 3 $^1/_2$ % anual para obtener, al cabo de 6 años, un beneficio de 20,000 ptas.?

14. Calcúlese el capital que debería imponerse al interés compuesto de 5 % anual, para que los intereses producidos ascendiesen a 6,000 pesetas al cabo de 4 años.

FIN DE LA ARITMÉTICA PRÁCTICA

NOCIONES DE ÁLGEBRA

ÁLGEBRA

1. **Definición.** — Álgebra es la ciencia que trata de la cantidad en general.

2. **Representación de las cantidades algebraicas.**— En Álgebra, las cantidades se representan por medio de letras. Las primeras del alfabeto, a, b, c, d, etc., se emplean para representar las cantidades que se suponen conocidas; las últimas, z, x, y, etc., para representar las que se suponen desconocidas.

Cuando no bastan las letras del alfabeto, o cuando el que calcula lo tiene por conveniente, se representan las cantidades colocando una, dos, tres o más comas en la parte superior o inferior de las letras antes mencionadas. Así, a', a'', a''', etc., se leerán: *a prima*, *a segunda*, *a tercera;* $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ se leerán: *a subprima*, *a subsegunda*, *a subtercera*, etc.

3. **Signo de las cantidades algebraicas.** — Todas las cantidades algebraicas llevan el signo *más* o el *signo menos*. Las primeras se llaman *positivas* y las segundas, *negativas*. Cuando no llevan ningún signo, se les sobrentiende el signo *más*.

$+ ab$ y $5n$ son dos cantidades positivas; $- ab$, $- 5n$ son dos cantidades negativas.

En Álgebra, se emplean los mismos signos que en Aritmética y además, el *más menos* o *menos más* ($\pm$, $\mp$) llamado de ambigüedad, el cual indica que las cantidades que lo llevan pueden ser positivas o negativas.

4. **Expresión algebraica.** — Llamamos así a toda cantidad representada por letras, o números y letras.

5. **Término algebraico.** — Término de una expresión algebraica o literal, es toda cantidad separada de otra por medio del signo $+$ o del signo $-$.

Así, la expresión $a + b$ tiene dos términos.

6. **Elementos de un término algebraico.** — Todo término algebraico consta de las partes siguientes: *signo*, *coeficiente*, *letra* o *letras* y *exponente*.

7. **Coeficiente.** — Se entiende por *coeficiente* (*) todo número que precede a una o más letras, e indica las veces que ésta o éstas entran por sumandos; de modo, pues, que el coeficiente es un factor de la letra o letras. El coeficiente se suprime cuando es la unidad.

Así, m equivale a $+ 1m = 1 \times m$; en $6a$, el coeficiente es 6, e indica que la letra a está tomada seis veces por sumando; de modo que $6\,a = a + a + a + a + a + a = 6 \times a$. En la expresión $3ab$, el coeficiente es 3, e indica que ab se toma tres veces por sumando, es decir: $3ab = ab + ab + ab = 3 \times ab$.

8. **Qué representan las letras.**— Las letras, como ya hemos dicho, son los signos que representan las cantidades. Cuando van juntas dos o más, debe entenderse que constituyen el producto de ellas mismas multiplicadas entre sí.

De modo que $ab = a \times b$; $abcn = a \times b \times c \times n$.

9. **Exponente.** — Se llama *exponente* a un número que se escribe en la parte superior de la derecha de la letra, e indica las veces que ésta entra por factor.

Así, $a^3 = a \times a \times a$; $a^2\,b^3 = a \times a \times b \times b \times b$.

Si una letra no lleva exponente, se le sobrentiende la unidad.

De modo que, $a = a^1$.

(*) De las latinas *cum*, con, y *efficio*, hacer.

9 a. Grado de un término algebraico. — Si un término algebraico tiene la parte literal entera, *grado* de dicho término es la suma de los exponentes de sus letras. Si la parte literal es fraccionaria, *grado* del término es la diferencia entre los grados del numerador y denominador.

Así, $-4a^2b^3c$ es de 6.º grado; $2am$ es de 2.º grado; $-\frac{5mx^2z^4}{m^3z}$ es de 3.er grado.

10. División de las cantidades algebraicas. — Las cantidades algebraicas se dividen en *monomios* (*), *binomios* (**), *trinomios* (***) y *polinomios* (****).

Monomios son las cantidades algebraicas que tienen un solo término.

La expresión $3a^2b$ es un monomio.

Binomios son las que tienen dos términos.

$4ab^2 - m^3$ es un binomio.

Trinomios son las que tienen tres términos.

$5a + 3ab - n^2$ es un trinomio.

Polinomios son las que tienen cuatro o más términos.

$3ab^2 - b^3 + 9a^2b - 5a$ es un polinomio.

Los binomios, los trinomios, etc., también se distinguen con el nombre general de *polinomios*.

10 a. Grado de un polinomio. — Grado de un polinomio es el grado del término que lo tenga mayor.

$4ab^3 - 5a^2 + 4abc - 3a^3b^2c$ es un polinomio de 6.º grado por ser éste el grado del último término, que es el que lo tiene mayor.

10 b. Polinomio homogéneo. — *Polinomio homogéneo* es el que tiene todos sus términos del mismo grado.

$2x^2z^2 - 3x^3z + 4x^4 + 2xz^3 - z^4$ es un polinomio homogéneo porque todos sus términos son de 4.º grado.

11. Términos semejantes y desemejantes. — Se llaman términos *semejantes* los que tienen iguales letras con exponente igual en cada una.

Serán semejantes estos términos: $3a^2b + 24a^2b - a^2b$.
También éstos:

$$5a^4b^2cd^3 - 45a^4b^2cd^3 + 60a^4b^2cd^3 + a^4b^2cd^3.$$

Cuando los términos no reúnen estas circunstancias, se llaman *desemejantes*.

No serán semejantes estos términos: $3a^2b + 5a^4b^2c + a^2cd$.
Tampoco éstos: $3a^2b + 8a^2b^2 + 2ab^2$.

12. Simplificación de términos semejantes. — Cuando las expresiones algebraicas tienen términos semejantes, pueden simplificarse; para lo cual, si tienen signos iguales, se suman los coeficientes, y si los signos son desiguales, se restan.

PRIMER EJEMPLO: Simplificando los términos semejantes $4a^2b + 6a^2b + 12a^2b$, tendremos: $4a^2b + 6a^2b + 12a^2b = 22a^2b$.

(*) De las griegas *monos*, uno, y *nome*, división, parte.
(**) Del latín *bis*, dos, y del griego *nome*.
(***) Del latín *tres*, tres, y del griego *nome*.
(****) De las griegas *polys*, mucho, y *nome*.

SEGUNDO EJEMPLO: $a^2b^2c + 4a^2b^2c + 8a^2b^2c = 13a^2b^2c$.

TERCER EJEMPLO: $18a^3bc^2d - a^3bc^2d + 2a^3bc^2d + 15a^3bc^2d - a^3bc^2d + 5a^3bc^2d = 38a^3bc^2d$.

CUARTO EJEMPLO: $-a^4bcd^2 - 2a^4bcd^2 - 5a^4bcd^2 = -8a^4bcd^2$.

QUINTO EJEMPLO: $12adn^2 - 9adn^2 - 7adn^2 = -4adn^2$.

SEXTO EJEMPLO: $20af^3gz^5 + af^3gz^5 - 2af^3gz^5 - 19af^3gz^5 = 0$.

13. Valuación de las expresiones algebraicas. — Para valuar una expresión algebraica, no hay más que substituir las letras por sus valores numéricos respectivos y ejecutar las operaciones indicadas que resulten. Antes de verificar la valuación, es conveniente simplificar las expresiones todo lo posible.

EJEMPLO: *¿Qué valor tendrá el polinomio $a^2 + 5ab + 2acd^2 - a^2b + 4a^2bc$, sabiendo que $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$ y $d = 1$?*

Resolución

$$3 \times 3 + 5 \times 3 \times 2 + 2 \times 3 \times 5 \times 1 \times 1 - 3 \times 3 \times 2 + 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 411$$

— Adición de cantidades algebraicas

14. Definición. — *Sumar en Álgebra* es reunir en una sola expresión algebraica el valor de dos o más.

15. Cómo se suman las cantidades algebraicas. — Se colocan unas a continuación de otras con los mismos signos que llevan, y luego se simplifican si se puede.

EJEMPLOS: 1.º *Súmese $4a^2bc$ con $12acn^2$ con $-a^2bcn^3$.*

Planteo: $(4a^2bc) + (12acn^2) + (-a^2bcn^3)$.
Resultado: $4a^2bc + 12acn^2 - a^2bcn^3$.

2.º *Hállese la suma de las siguientes cantidades:*

$18a^4bc^2 + (5an^2bc^3 - 8a^4bc^2) + 3br^4 - an^2bc^3 - 23br^4$.
Resultado: $18a^4bc^2 + 5an^2bc^3 - 8a^4bc^2 + 3br^4 - an^2bc^3 - 23br^4$.
Resultado simplificado: $10a^4bc^2 + 4an^2bc^3 - 20br^4$.

3.º *¿Cuánto importa la suma de $(a^2b^3 + 3ab^2 + b^4) + (5b^3a^2) + (-ab^2) + (8b^4 - 2ab^2 + 2a^2b^3)$, siendo $a = 4$ y $b = 2$?*

Planteo: $a^2b^3 + 3ab^2 + b^4 + 5b^3a^2 - ab^2 + 8b^4 - 2ab^2 + 2a^2b^3$.
Resultado simplificado: $8a^2b^3 + 9b^4 = 1168$.

16. Como se ve en los ejemplos anteriores, la suma de cantidades algebraicas queda reducida a indicar la operación en cada caso, pues cada uno de los sumandos conserva, independientemente, en la suma, el valor indeterminado que representa. Como la suma obtenida es susceptible de simplificación si contiene términos semejantes, de aquí el que una suma algebraica pueda dar *resultado positivo, resultado negativo* y *cero.*

EJEMPLOS: 1.º Si hemos de sumar ab^2, con $5a^2b$, con $4ab^2$, con $-2a^2b$, la suma será:

$$ab^2 + 5a^2b + ab^2 - 2a^2b;$$

y simplificando este polinomio resulta

$$5ab^2 + 3a^2b, \text{ resultado positivo.}$$

2.º Sumando $-6ax^2$, con $4n^2b$, con ax^2, con $-9n^2b$, con $5ax^2$, la suma será

$$-6ax^2 + 4n^2b + ax^2 - 9n^2b + 5ax^2;$$

y simplificando este polinomio se obtiene

$$-5n^2b, \text{ resultado negativo.}$$

3.º Sumando $12ab$, con $-a^2z^3$, con $-10ab$, con a^2z^3, con $-2ab$, la suma será

$$12ab - a^2z^3 - 10ab + a^2z^3 - 2ab;$$

y simplificando el polinomio, se obtiene *cero*.

Substracción de cantidades algebraicas

17. Definición. — *Restar en Álgebra* es, dada una suma y uno de los dos sumandos que la constituyen, hallar el otro sumando.

18. Cómo se restan las cantidades algebraicas. — *Para restar cantidades algebraicas*, se escribe el minuendo y, a continuación, el substraendo con signos contrarios; esto es, *donde lleve* +, *se pone* −, *y donde lleve* −, *se pone* +. La resta se simplifica si se puede.

La regla anterior es casi evidente. Sea el minuendo a y el substraendo $b + c$. Digo que

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

En efecto, sumando el substraendo $b + c$ con la diferencia obtenida, $a - b - c$, la *suma será*

$$b + c + a - b - c.$$

Y simplificando esta suma, tendremos:

$$b + c + a - b - c = a,$$

esto es, sumando el substraendo con el resto, la suma es el minuendo; luego no hay error en la resta.

EJEMPLOS:

1.º Si de $20a^43b$ se quita $8a^2bn$, ¿qué resto se obtendrá?
Resultado: $20a^43b - 8a^2bn$.

2.º De $5abn^3$ quitar $-2a^2b^3$. $5abn^3 - (-2a^2b^3)$
Resultado: $5\ abn^3 + 2a^2b^3$.

3.º *Hállese el resultado de la substracción siguiente*:

$$(25ab^2n - 6a^3b + a) - (2a^3b + 2a^2b - ab^2n).$$

Resultado: $25ab^2n - 6a^3b + a - 2a^3b - 2a^2b + ab^2n$.
Resta simplificada: $26ab^2n - 8a^3b + a - 2a^2b$.

Multiplicación de cantidades algebraicas

19. Definición. — *Multiplicar en Álgebra* es hallar una tercera cantidad que sea en *valor* y *signo*, respecto de una primera cantidad dada, lo que es otra segunda dada respecto de la unidad positiva.

20. Casos que ofrece la multiplicación algebraica. — La multiplicación de cantidades algebraicas o literales ofrece tres casos:

1.º *Multiplicar un monomio por otro monomio.*
2.º *Multiplicar un polinomio por un monomio, o al contrario.*
3.º *Multiplicar un polinomio por otro polinomio.*

21. A qué debe atenderse en la multiplicación de un monomio por otro. — Hay que atender a *signos*, *coeficientes*, *letras* y *exponentes*.

22. Regla de los signos. — Conviene saber que signos iguales dan *más* en el producto, y signos desiguales dan *menos*.

Esto es: *más por más da más*, *menos por menos da más*, *más por menos da menos y menos por más da menos*.

23. Cómo se multiplican los coeficientes. — Los coeficientes se multiplican por las reglas de Aritmética.

24. Cómo se multiplican las letras y los exponentes. — Las letras *comunes* a todos los factores se escriben en el producto una sola vez con un exponente igual a la suma de los que ellas lleven; las letras *no comunes* se escriben igualmente en el producto, unas a continuación de otras, con sus propios exponentes.

EJEMPLOS: 1.º $(4a^2bn) \times (abn) = 4a^3b^2n^2$.

La carencia del signo de multiplicar entre los dos paréntesis también indicaría que las dos cantidades algebraicas se multiplican entre sí. En estos casos, el signo de multiplicar, generalmente, se suprime. También suele suprimirse cuando se separa un factor común. Así,

$$ax + bx - nx \text{ se indica } (a + b - n)x.$$

2.º $(-6a^3nm)(-5a^4bcn^2) = 30a^7n^3mbc$.
3.º $(8a^4b^2dn^3)(-{}^1/_4a^5bnx^2) = -2a^9b^3n^4dx^2$.
4.º $(-12c^2b^3d)(0{'}50ac^3d^5r^2) = -6ac^5d^6r^2b^3$.
5.º $({}^4/_7b^3r^2)({}^1/_5b^2rn) = {}^4/_{35}b^5r^3n$.
6.º $a^2b \times bn \times an^2 \times cb^2x = a^3b^4n^3cx$.
7.º $(a^3 + b^2 - an)\,a = a^4 + ab^2 - a^2n$.

25. Multiplicación de un polinomio por un monomio, o al contrario. — Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada término del polinomio por el monomio, escribiendo los productos unos a continuación de otros, y luego se simplifica si se puede.

EJEMPLO: Determínese el resultado de multiplicar:

$$9a^3bn^2 + ab^3d^2 - 5a^2b \text{ por } 2ac^2n^3.$$

Planteo:
$$\begin{array}{r} 9a^3bn^2 + ab^3d^2 - 5a^2b. \\ \times\ 2ac^2n^3. \\ \hline \end{array}$$

Producto: $18a^4c^2n^5b + 2a^2c^2n^3b^3d^2 - 10a^3c^2n^3b$.

26. Multiplicación de un polinomio por otro polinomio. — Para multiplicar un polinomio por otro, se toma por multiplicando el factor que tenga más términos, y el factor de menos términos, por multiplicador; se multiplica todo el multiplicando por cada término del multiplicador; los productos parciales se escriben unos a continuación de otros, y luego se simplifica si se puede.

EJEMPLOS: 1.º Hállese el producto de $4a^3b^2 + ad^2c - 5a^2n + ab$, por $2a^3bc - ab^2 + 3an$.

Planteo:
$$\begin{array}{r} 4a^3b^2 + ad^2c - 5a^2n + ab \\ \times\ 2a^3bc - ab^2 + 3an \\ \hline 8a^6b^3c + 2a^4bc^2d^2 - 10a^5bcn + 2a^4b^2c - 4a^4b^4 - a^2b^2cd^2 + 5a^3b^2n - a^2b^3 \\ + 12a^4b^2n + 3a^2cd^2n - 15a^3n^2 + 3a^2bn. \end{array}$$

2.º ¿Qué resultado se obtendrá multiplicando $-8bc^2 + 2ab^3 - 3c^4$, por $2c^2b - 6b^3a$?

Planteo:
$$\begin{array}{r} -8bc^2 + 2ab^3 - 3c^4 \\ \times\ 2c^2b - 6b^3a \\ \hline -16b^2c^4 + 4ac^2b^4 - 6c^6b + 48ab^4c^2 - 12a^2b^6 + 18ab^3c^4 = -16b^2c^4 + 52ac^2b^4 - \\ 6c^6b - 12a^2b^6 + 18ab^3c^4. \end{array}$$

27. Ordenación de un polinomio.— Ordenar un polinomio es escribirlo de modo que la letra más repetida, que se llama *principal*, aparezca disminuyendo su exponente de izquierda a derecha, o viceversa.

Ordenando el polinomio $4ab^2c - a^5b + a^3b^3n + a^2b^2 - a^4$, con respecto a la letra a, tendremos: $-a^5b - a^4 + a^3b^3n + a^2b^2 + 4ab^2c$; o bien: $4ab^2c + a^2b^2 + a^3b^3n - a^4 - a^5b$.

28. Multiplicación de polinomios ordenados. — Para multiplicar dos polinomios ordenados, se procede así: escrito el multiplicador debajo del multiplicando, se halla el producto del primer término del multiplicador por todo el multiplicando, empezando por la izquierda; en seguida se halla el producto del segundo término del multiplicador por todo el multiplicando, y este producto se escribe debajo del primero un lugar más hacia la derecha; se continúa asimismo con los demás términos del multiplicador, y la suma de los términos semejantes de los productos parciales da el producto total.

EJEMPLO: Multiplicando $c^4 + a^4 - 4ac^3 + 4a^3c - 6a^2c^2$ por $2ac + a^2 - c^2$, ¿qué producto se obtendrá?

Ordenando multiplicando y multiplicador con respecto a la letra a, tendremos:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
a^4 & +\,4a^3c & -\,6a^2c^2 & -\,4ac^3 & +\,c^4 & & \\
 & & \times\,a^2 & +\,2ac & -\,c^2 & & \\
\hline
a^6 & +\,4a^5c & -\,6a^4c^2 & -\,4a^3c^3 & +\,a^2c^4 & & \\
 & +\,2a^5c & +\,8a^4c^2 & -\,12a^3c^3 & -\,8a^2c^4 & +\,2ac^5 & \\
 & & -\,a^4c^2 & -\,4a^3c^3 & +\,6a^2c^4 & +\,4ac^5 & -\,c^6 \\
\hline
a^6 & +\,6a^5c & +\,a^4c^2 & -\,20a^3c^3 & -\,a^2c^4 & +\,6ac^5 & -\,c^6
\end{array}$$

Producto total: $a^6 + 6a^5c + a^4c^2 - 20a^3c^3 - a^2c^4 + 6ac^5 - c^6$

División de cantidades algebraicas

29. Definición. — *Dividir en Álgebra* es hallar el factor desconocido que, junto con otro conocido, forman un producto dado.

30. Casos que pueden ocurrir en la división algebraica. — Pueden ocurrir, principalmente, cuatro casos: 1.º Dividir un monomio por otro monomio; 2.º Dividir un polinomio por un monomio; 3.º Dividir un polinomio por otro polinomio; 4.º Dividir un monomio por un polinomio.

31. A qué hay que atender para dividir un monomio por otro. — En la división de un monomio por otro, hay que atender a cuatro cosas: *signos*, *coeficientes*, *letras* y *exponentes*.

32. Regla de los signos. — Es la siguiente: signos iguales dan *más* en el cociente, y signos desiguales dan *menos*; es decir: *más dividido por más da más, menos dividido por menos da más, más dividido por menos da menos y menos dividido por más da menos.*

33. Cómo se dividen los coeficientes. — Los coeficientes se dividen siguiendo las reglas aritméticas.

34. Cómo se dividen las letras y los exponentes. — Las letras comunes al dividendo y al divisor se escriben en el cociente con un exponente igual a la diferencia de los exponentes que llevan; las que sólo están en el dividendo se escriben en el cociente con su propio exponente, y las que sólo están en el divisor pasan al cociente cambiando el signo de su exponente.

EJEMPLOS:

1.º $(20a^4b^3c^2) : (5a^2b^2c) = 4a^2bc$.
2.º $(-30a^8bn^5d^3) : (-3a^5n^2) = 10a^3bn^3d^3$.
3.º $(15x^{20}c^3rn^2) : (-5x^6cnad^2) = -3x^{14}c^2rna^{-1}d^{-2}$.
4.º $(3ab^5r^4n^2x) : (-7ab^8r^3z^2) = -{}^3/_7b^{-3}rn^2xz^{-2}$.
5.º $(-{}^3/_5x^4a^m d^2c^n r^3) : ({}^1/_8x^4a^n d^5c^m z^5) = -{}^{24}/_5a^{m-n}d^{-3}c^{n-m}r^3z^{-5}$.

35. Valor de una cantidad elevada a la potencia cero. — Toda cantidad elevada a la potencia *cero* es igual a la unidad.

De lo que se deduce que $(8a^5b^3) : (4a^5b) = 2 \times 1 \times b^2 = 2b^2$, razón por la cual, como se habrá observado en los ejemplos anteriores, cuando una misma letra aparece en el dividendo y en el divisor con iguales exponentes, no se escribe en el cociente de la división.

36. Transformación de una cantidad de exponente negativo en otra equivalente de exponente positivo. — Cuando una letra tiene exponente negativo, puede transformarse en otra equivalente de exponente positivo, pasando dicha letra del numerador al denominador, o al contrario; y si carece del numerador, se le pone la unidad.

Así: $\dfrac{ab^{-3}}{n} = \dfrac{a}{nb^3}$; $\dfrac{xn^2}{az^{-2}} = \dfrac{xn^2z^2}{a}$; $a^{-n}x = \dfrac{x}{a^n}$; $a^{-5} = \dfrac{1}{a^5}$; etc.

37. División de un polinomio por un monomio. — Para dividir un polinomio por un monomio, se parte cada uno de los términos del polinomio por el monomio, y la reunión de los cocientes parciales da el cociente total.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{rrr|l}
40a^3b^5n & -\,10a^6b^2n^3 & +\,5a^2b^2x^2 & 5ab^2 \\ \cline{4-4}
-\,40a^3b^5n & & & 8a^2b^3n - 2a^5n^3 + ax^2 \\ \hline
0 & -\,10a^6b^2n^3 & & \\
 & +\,10a^6b^2n^3 & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & +\,5a^2b^2x^2 & \\
 & & -\,5a^2b^2x^2 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

38. División de un polinomio por otro polinomio. — Para dividir un polinomio por otro polinomio, se ordenan dividendo y divisor con respecto a una misma letra; se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, y el resultado es el primer término del cociente; se multiplica este término por todo el divisor, y el producto se resta del dividendo; seguidamente se divide el primer término de la resta por el primero del divisor, y el resultado es el segundo término del cociente, y se continúa del mismo modo hasta obtener cociente exacto. Si un primer término de una resta no es divisible por el primer término del divisor, la división es inexacta.

EJEMPLO: *¿Qué resultado se obtendrá partiendo:*

$$10a^3b^2 + a^5 + 5ab^4 + b^5 + 5a^4b + 10a^2b^3 \text{ por } a + b?$$

Resolución.—Ordenando el dividendo con respecto a la letra a, tendremos:

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Verifiquemos ahora la operación:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
a^5 & +\,5a^4b & +\,10a^3b^2 & +\,10a^2b^3 & +\,5ab^4 & +\,b^5 & a+b \\ \cline{7-7}
-\,a^5 & -\,a^4b & & & & & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ \cline{1-3}
0 & +\,4a^4b & +\,10a^3b^2 & & & & \\
 & -\,4a^4b & -\,4a^3b^2 & & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & +\,6a^3b^2 & +\,10a^2b^3 & & & \\
 & & -\,6a^3b^2 & -\,6a^2b^3 & & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & +\,4a^2b^3 & +\,5ab^4 & & \\
 & & & -\,4a^2b^3 & -\,4ab^4 & & \\ \cline{4-6}
 & & & 0 & +\,ab^4 & +\,b^5 & \\
 & & & & -\,ab^4 & -\,b^5 & \\ \cline{5-6}
 & & & & 0 & 0 &
\end{array}$$

39. Cómo se procede cuando la división es inexacta. — Cuando la división no es exacta, se completa el cociente con un quebrado cuyo numerador es el último resto, y su denominador, el divisor.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{l|l} 20a^8b^3 + 6a^5b^2 + 8a^3b & -10a^3 + 4a^2b \\ \cline{2-2} -20a^8b^3 + 8a^7b^4 & -2a^5b^3 + \dfrac{6a^5b^2 + 8a^7b^4 + 8a^3b}{-10a^3 + 4a^2b} \\ \hline \textit{Residuo:}\ 0 + 6a^5b^2 + 8a^7b^4 + 8a^3b & \end{array}$$

40. División de un monomio por un polinomio. — La división de un monomio por un polinomio nunca puede dar cociente exacto; pues tanto si el cociente fuese un monomio como un polinomio, multiplicado por el divisor, siempre daría un polinomio y no un monomio, como es el dividendo. En este caso, se procederá de modo que cada cociente parcial destruya el primer término del dividendo parcial de que provenga. Como siempre queda residuo, se continuará la división hasta descubrir la ley del cociente indefinido.

EJEMPLO: Dividamos x^2 por $x - a$.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x - a \\ \cline{2-2} -x^2 + xa & x + a + \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{a^3}{x^2} + \dfrac{a^4}{x^3} + \ldots + \dfrac{a^n}{x^{n-1}} \\ \hline 0 + xa & \\ \quad -xa + a^2 & \\ \hline \quad 0 + a^2 & \\ \quad\quad -a^2 + \dfrac{a^3}{x} & \\ \hline \quad\quad 0 + \dfrac{a^3}{x} & \\ \quad\quad\quad -\dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^4}{x^2} & \\ \hline \quad\quad\quad 0 + \dfrac{a^4}{x^2} & \\ \quad\quad\quad\quad -\dfrac{a^4}{x^2} + \dfrac{a^5}{x^3} & \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0 + \dfrac{a^5}{x^3}, \text{ etc.} & \end{array}$$

Quebrados algebraicos

41. Alteraciones que sufren los quebrados algebraicos y operaciones que con ellos se verifican. — Los quebrados algebraicos sufren las mismas alteraciones que los numéricos, y como éstos, se simplifican, reducen a un común denominador, suman, restan, multiplican y dividen.

42. Simplificación. — Para simplificar los quebrados algebraicos, debe tenerse presente si sus dos términos son monomios, o si alguno de ellos es un polinomio. En el primer caso, se dividen numerador y denominador por los factores que les sean comunes; en el segundo caso, para que la simplificación sea posible, es necesario que los factores sean comunes a todos los términos del numerador y del denominador.

EJEMPLOS: 1.° $\frac{4a^2b}{8ab^3} = \frac{a}{2b^2}$.

2.° $\frac{9ab^2 + 5a^4b - cb}{7nb} = \frac{(9ab + 5a^4 - c)\,b}{(7n)\,b} = \frac{9ab + 5a^4 - c}{7n}$.

43. Reducción a un común denominador. — Para reducir los quebrados algebraicos a un común denominador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás; pero antes se simplifican si se puede.

EJEMPLOS: 1.° $\frac{a}{b}, \frac{n}{m}, \frac{z}{x}, = \frac{amx}{bmx}, \frac{nbx}{mbx}, \frac{zbm}{xbm}$.

2.° $\frac{3ab^2}{4a^3b}, \frac{5n^3b}{n^3a}, \frac{9a^4b^6}{3a^3b^8n}$. Simplificándolos lo posible, tendremos:

$\frac{3b}{4a^2}, \frac{5b}{a}, \frac{3a}{b^2n}$; y verificando la reducción, $= \frac{3ab^3n}{4a^3b^2n}, \frac{20a^2b^3n}{4a^3b^2n}, \frac{12a^4}{4a^3b^2n}$.

44. Cómo se suman.— Si tienen un mismo denominador, se suman los numeradores, y a la suma se le da el denominador común; si no tienen un mismo denominador, se simplifican primero; se reducen luego a un común denominador, y se procede como en el caso anterior.

EJEMPLOS: 1.° $\frac{5a^3}{b^2} + \frac{2n}{b^2} + \frac{3nc}{b^2} = \frac{5a^3 + 2n + 3nc}{b^2}$.

2.° Los quebrados $\frac{3ab^2}{4a^3b} + \frac{5n^3b}{n^3a} + \frac{9a^4b^6}{3a^3b^8n}$ del número anterior, después de simplificados y reducidos a un común denominador, dan los quebrados equivalentes siguientes: $\frac{3ab^3n}{4a^3b^2n} + \frac{20a^2b^3n}{4a^3b^2n} + \frac{12a^4}{4a^3b^2n}$, cuya suma será:

$$\frac{3ab^3n + 20a^2b^3n + 12a^4}{4a^3b^2n}.$$

45. Cómo se restan.—Si tienen un mismo denominador, se restan los numeradores, y a la resta se le da el denominador común; si no tienen un mismo denominador, se simplifican primero, luego se reducen a un común denominador, y se procede como en el caso anterior.

EJEMPLOS: 1.° $\frac{4ab^2}{5ax^2} - \frac{ab^2n^3}{5ax^2} = \frac{4ab^2 - ab^2n^3}{5ax^2}$.

2.° $\frac{20ab^2n^5}{5a^3bn} - \frac{a^5bc}{4a^3bn}$. Simplificándolos, tendremos: $\frac{4bn^4}{a^2} - \frac{a^2c}{4n}$; y reduciéndolos a un denominador común, $= \frac{16bn^5}{4na^2} - \frac{a^4c}{4na^2} = \frac{16bn^5 - a^4c}{4na^2}$.

46. Cómo se multiplican. — Los quebrados algebraicos se multiplican como los numéricos, esto es, se multiplican entre sí los numeradores y entre sí los denominadores.

EJEMPLOS: 1.° $\frac{a}{b} \times \frac{d}{x} = \frac{ad}{bx}$.

2.° $\frac{4ab}{3x} \times \frac{6an^3}{a^2b} = \frac{24a^2bn^3}{3xa^2b} = \frac{8n^3}{x}$.

47. Cómo se dividen.—Para dividirlos, también se procede como en los numéricos: se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor. El primer producto es el numerador del quebrado cociente, y el segundo producto, su denominador.

EJEMPLOS: 1.º $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

2.º $\frac{4a^5b^3c}{8a^2bc^2} : \frac{9ab^2}{3ax} = \frac{4a^5b^3c \times 3ax}{8a^2bc^2 \times 9ab^2} = \frac{12a^6b^3cx}{72a^3b^3c^2} = \frac{a^3x}{6c}$.

Elevación a potencias

48. Definición.—Potencia de una expresión algebraica es el resultado de multiplicarla por sí misma una o más veces.

Así: $(4a^2b^3c)^2 = 4a^2b^3c \times 4a^2b^3c = 16a^4b^6c^2$.

49. A qué hay que atender para elevar un monomio a una potencia dada.— Para elevar un monomio a una potencia cualquiera, hay que atender a *signos, coeficientes, letras* y *exponentes.*

50. Regla de los signos. — Toda potencia de grado *par* debe llevar signo positivo, es decir, el signo *más;* pero si la potencia es de grado *impar*, llevará *el signo de la raíz.*

51. Regla de los coeficientes. — Los coeficientes se elevan a cualquier potencia siguiendo las reglas aritméticas.

52. Regla de las letras y exponentes. — Las letras de la raíz entran en la potencia con un exponente igual al producto del exponente que llevan en la raíz por el exponente de la potencia.

EJEMPLOS: 1.º $(4a^2b^3c)^2 = 16a^4b^6c^2$.

2.º $(-6a^5nc^3d)^4 = 1296a^{20}n^4c^{12}d^4$.

3.º $(3d^2cx^2)^3 = 27d^6c^3x^6$.

4.º $(-2a^3)^5 = -32a^{15}$.

53. Potencias de los polinomios. — Los polinomios se elevan a una potencia dada siguiendo las reglas de la multiplicación: tomándolos tantas veces por factor como unidades tiene su exponente.

EJEMPLOS: 1.º $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b$.

Verifiquemos estas multiplicaciones:

$$(a+b)a = a^2 + ab$$
$$(a+b)b = ab + b^2.$$

Sumando los segundos miembros, tenemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2.º $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = (a+b)a^2 + (a+b)2ab + (a+b)b^2$.

Verifiquemos estas multiplicaciones:

$$(a+b)a^2 = a^3 + a^2b$$
$$(a+b)2ab = 2a^2b + 2ab^2$$
$$(a+b)b^2 = ab^2 + b^3.$$

Sumando los segundos miembros, tenemos que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

3.° $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

4.° $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

ESCOLIO.—*Estos cuatro ejemplos nos demuestran, respectivamente, las partes de que constan el cuadrado y el cubo de la suma y de la diferencia de dos números.*

54. Regla para elevar abreviadamente un polinomio a la segunda potencia. — Para elevar, abreviadamente, un polinomio a la segunda potencia, se procede así: se cuadra el primer término; se multiplica el duplo de este primer término por todos los demás; se cuadra el segundo término; se multiplica el duplo de este segundo término por todos los demás; se procede lo mismo con los demás términos hasta tener el cuadrado del último término, y se ha concluído la operación.

EJEMPLO: $(x^2 + 3xz^2 + 2z^4 - z^2)^2 = x^4 + 6x^3z^2 + 4x^2z^4 - 2x^2z^2 + 9^2xz^4 + 12xz^6 - 6xz^4 + 4z^8 - 4z^6 + z^4.$

55. Regla para elevar abreviadamente un polinomio a la tercera potencia. — Para elevar, abreviadamente, un polinomio al cubo, se le considera como un binomio, tomando por primer término de éste el primer término del polinomio (o el primero y algunos más) y por este segundo término del binomio, los restantes del polinomio que no se hayan tomado.

EJEMPLO: Para elevar al cubo el polinomio $a + b + c$, le consideraremos como un binomio, de este modo: $a + (b + c)$ y tendremos: $(a + b + c)^3$, o bien $(a + (b + c))^3$ = [**53.**—*Ejemp.* 1.° *y* 2.°] $a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$

Extracción de raíces

56. Definición. — Raíz de una expresión algebraica es otra expresión que, multiplicada por sí misma una o más veces, produce la cantidad primera.

57. A qué hay que atender para la extracción de raíces de cantidades monomias. — Para extraer la raíz de un monomio, hay que atender a *signos, coeficientes, letras* y *exponentes.*

58. Regla de los signos. — Si la raíz es de grado impar, llevará el signo de la potencia.

Si la raíz es de grado par, llevará el signo de ambigüedad ($\pm$) si la potencia es positiva; si la potencia es negativa, la raíz no puede llevar el signo positivo ni el negativo y recibe el nombre de *cantidad imaginaria.*

Sabemos (**50**) que toda potencia de grado par es siempre positiva; es decir, que $(+a)^{2n} = +a^{2n}$ y $(-a)^{2n} = +a^{2n}$; no hay, por tanto, ninguna cantidad, ni positiva ni negativa, que elevada a una potencia de grado par dé una potencia negativa. Las *cantidades imaginarias* proceden, pues, de las raíces de grado par de cantidades negativas; su expresión general será, por tanto, $\sqrt[2n]{-a}$.

Vamos a dar unas nociones sobre las cantidades imaginarias *de segundo grado.*

Forma de las cantidades imaginarias de segundo grado.—Las cantidades imaginarias de grado par tienen la forma $\sqrt{-a}$; pero, como esta expresión es incómoda para el cálculo, vamos a transformarla.

Evidentemente, $-a = a \times -1$; luego, $\sqrt{-a} = \sqrt{a \times -1}$, o bien (**60**, *a*) $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$. Suponiendo $\sqrt{a} = \pm A$, tendremos: $\sqrt{-a} = \pm A\sqrt{-1}$. $\sqrt{-1}$ es el signo cualificador de las cantidades imaginarias y suele representarse por i; por tanto, $\pm A\sqrt{-1} = \pm A\,i$.

Clasificación de las cantidades imaginarias. — Las cantidades imaginarias se clasifican en *puras* o *monomias* y *complejas* o *binomias*.

Cantidades imaginarias *puras* son las de la forma $\pm A\sqrt{-1} = \pm A\,i$, es decir, son las que constan sólo de parte imaginaria.

Cantidades imaginarias *complejas* o *binomias* son las de la forma $B \pm A\sqrt{-1}$, o sea, las que constan de parte real y de parte imaginaria.

Cantidades imaginarias conjugadas son las que sólo difieren en el signo de la parte imaginaria. $B + A\sqrt{-1}$ y $B - A\sqrt{-1}$, o bien $B + A\,i$ y $B - A\,i$ son dos cantidades imaginarias conjugadas.

$\sqrt{B^2 + A^2}$ es el *módulo* de la expresión imaginaria $B \pm A\sqrt{-1}$.

59. Regla de los coeficientes. — La raiz de un coeficiente se extrae por las reglas que se dan en Aritmética.

60. Regla de las letras y exponentes. — Las letras de la potencia se escriben en la raíz con un exponente igual al cociente que se obtiene partiendo el exponente de cada letra por el exponente radical, esto es, por el exponente que indica el grado de la raíz.

EJEMPLOS: 1.º $\sqrt{25a^8} = \pm 5a^4$

2.º $\sqrt[3]{125x^{12}} = 5x^4$

3.º $\sqrt{36a^6dn^3} = \pm 6a^3d^{0'50}n^{1'50}$

4.º $\sqrt[3]{-64a^{15}x^2zn^5} = -4a^5x^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{3}}n^{\frac{5}{3}}$

De modo, pues, que toda potencia cuyo exponente es un quebrado, equivale a una raíz de índice igual al denominador del quebrado y cuya cantidad subradical es la base de dicha potencia, elevada al numerador del quebrado.

Así: $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$; $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{4}}m^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{a^3b^5m^7}$.

60 a. Raiz de un producto. — La raíz de un producto de varios factores, es igual al producto de las raíces de igual índice de dichos factores.

Así: $$\sqrt{2a^3bc^4} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^3} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c^4};$$
$$\sqrt[n]{abcm} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{m}.$$

60 b. Simplificación de radicales. — Un radical no varía de valor, multiplicando su índice por un número y elevando a una potencia de igual grado la cantidad subradical, o bien, dividiendo su índice por un número y extrayendo una raiz de igual índice de la cantidad subradical.

Así: $$\sqrt[2]{a} = \sqrt[2\times3]{a^3} = \sqrt[6]{a^3};$$
$$\sqrt[3]{2m^3n^4x} = \sqrt[3\times5]{(2m^3n^4x)^5} = \sqrt[15]{2^5m^{15}n^{20}x^5}; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}.$$
$$\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{\sqrt{a^6}} = \sqrt{a^3}; \quad \sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[n]{a}.$$

Por tanto, para simplificar un radical, se dividen el índice y los exponentes que tienen las letras de la cantidad subradical, por un mismo divisor.

Así: $$\sqrt[6]{x^4b^2a^8} = \sqrt[3]{x^2ba^4}.$$

En el caso de que algunos exponentes de las letras de la cantidad subradical sean divisibles por el índice de la raíz, se verifica la división y se ponen como coeficiente dichas letras afectadas de un exponente igual al cociente obtenido.

EJEMPLOS: $$\sqrt[3]{a^8b^3c} = \sqrt[3]{a^6a^2b^3c} = a^2b\sqrt{a^2c}.$$

En cuanto al coeficiente numérico de la cantidad subradical, se descompone, si es posible, en dos factores, uno de los cuales tenga raíz exacta; se extrae la raíz de éste, y la del otro queda indicada.

Así: $$\sqrt{18a^4m^6n} = \sqrt{9 \times 2a^4m^6n} = 3a^2m^3\sqrt{2n}.$$

60 c. Reducción de radicales a un índice común. — Para reducir dos o más radicales a un mismo índice, se multiplica el índice de cada uno por el producto de los índices de los demás y se eleva la cantidad subradical a una potencia de igual grado que dicho producto.

Así: $5\sqrt{mn}$, $2a\sqrt[3]{b^2c}$, $\sqrt[5]{2cn^4}$, se convierten en sus equivalentes:

$$5\sqrt[2\times15]{m^{15}n^{15}},\quad 2a\sqrt[3\times10]{b^{20}c^{10}},\quad \sqrt[5\times6]{2^6c^6n^{24}},$$

o sea $$5\sqrt[30]{m^{15}n^{15}},\quad 2a\sqrt[30]{b^{20}c^{10}},\quad \sqrt[30]{64c^6n^{24}}.$$

También puede verificarse la reducción de radicales a un índice común, hallando el mínimo común múltiplo de los índices, y éste será el índice común; se divide el mínimo común múltiplo por el índice de cada radical, y el cociente será la potencia a que ha de elevarse la cantidad subradical.

Sean $\sqrt{2a^3b}$, $-5c\sqrt[3]{am^2x^5}$ y $\sqrt[4]{mn}$ los radicales dados. El mínimo común múltiplo de los índices es 12; luego, los radicales equivalentes serán:

$$\sqrt[12]{2^6a^{3\times6}b^6},\quad -5c\sqrt[12]{a^4m^{2\times4}x^{5\times4}},\quad \sqrt[12]{m^3n^3},$$

o sea $$\sqrt[12]{64a^{18}b^6},\quad -5c\sqrt[12]{a^4m^8x^{20}},\quad \sqrt[12]{m^3n^3}.$$

60 d. Radicales semejantes. — Radicales semejantes son los que tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical, de modo que sólo pueden diferenciarse en el signo y el coeficiente del radical.

$3\sqrt[4]{a^2bx}$, $-4m\sqrt[4]{a^2bx}$ son radicales semejantes.

60 e. Reducción de radicales semejantes. — Para reducir varios radicales semejantes, se suman algébricamente sus coeficientes.

$$2b\sqrt{a^3n} + \sqrt{a^3n} - 3c\sqrt{a^3n} = (2b + 1 - 3c)\sqrt[3]{a^3n}.$$

$$3\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{abc} - 8\sqrt[3]{abc} = (3 + 1 - 8)\sqrt[3]{abc} = -4\sqrt[3]{abc}.$$

61. Raiz cuadrada de los polinomios. — Para extraer la raiz cuadrada de un polinomio, se ordena, primeramente, con respecto a una cualquiera de sus letras; se extrae la raíz cuadrada de su primer término, y se tiene el primer término de la raíz; se divide en seguida el segundo término del polinomio por el duplo del primer término de la raíz, y el cociente es el segundo término de ésta. Para hallar, en adelante, un término cualquiera, se eleva al cuadrado el polinomio que forman los términos obtenidos de la raíz, se resta este cuadrado del polinomio propuesto, y se divide el primer término del resto por el duplo del primer término de la raíz. Cuando se llegue a un resto *cero*, el polinomio obtenido será la raíz cuadrada exacta del polinomio propuesto.

EJEMPLO:

Extraer la raíz cuadrada del polinomio $24a^2b^2 + 4a^4 - 16a^3b + 4b^4 - 16ab^3$.

Ordenándole con respecto a la letra a, tendremos:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\sqrt{4a^4} & -16a^3b & +24a^2b^2 & -16ab^3 & +4b^4 & 2a^2 - 4ab + 2b^2 \\
-4a^4 & +16a^3b & -16a^2b^2 & & & \\
\hline
0 & 0 & +8a^2b^2 & -16ab^3 & +4b^4 & \\
 & & -8a^2b^2 & +16ab^3 & -4b^4 & \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Explicación. — Hemos extraído la raíz cuadrada del primer término del polinomio, $4a^4$, y hemos obtenido $2a^2$, primer término de la raíz. Seguidamente, hemos dividido el segundo término del polinomio, $-16a^3b$, por el duplo del primer término de la raíz, $4a^2$, y el cociente, $-4ab$, ha sido el segundo término de la raíz. Hecho esto, hemos elevado al cuadrado los dos términos obtenidos de la raíz (**54**), y este cuadrado lo hemos restado del polinomio propuesto. El primer término del resto, $8a^2b^2$, lo hemos dividido por el duplo del primer término de la raíz, $4a^2$, y el cociente, $2b^2$ ha sido el tercer término de la raíz. Hemos elevado al cuadrado el polinomio formado por los tres términos obtenidos de la raíz (**54**), y este cuadrado es, cambiando los signos para restarlo, $-4a^4 + 16a^3b - 8a^2b^2 - 16a^2b^2 + 16ab^3 - 4b^4$. Según la regla, debemos restar este cuadrado del polinomio propuesto; pero como ya hemos restado antes de él los términos 1.º, 2.º y 4.º, basta que ahora restemos los restantes, 3.º, 5.º y 6.º, en virtud de lo cual hallamos de resto *cero*.

62. Observaciones. — 1.ª Ningún binomio es cuadrado perfecto y, por lo tanto, no puede tener raíz cuadrada exacta; porque el cuadrado de un monomio da otro monomio; el cuadrado de un binomio da un trinomio; el de un trinomio, un cuadrinomio, etc.

2.ª Un polinomio no tendrá raiz cuadrada exacta: 1.º Si, después de ordenado con respecto a una cualquiera de sus letras, no tienen raíz cuadrada exacta el primero y último términos. 2.º Si el segundo término del polinomio no es divisible por el duplo del primer término de la raíz. 3.º Si el primer término de un resto no es divisible por el duplo del primer término de la raíz.

EJEMPLO: *Extraer la raíz cuadrada del polinomio* $6a^3 + 4a - 5a^2 + 9a^4 + 4$.

Ordenando el polinomio, tendremos:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\sqrt{9a^4} & +6a^3 & -5a^2 & +4a & +4 & 3a^2 + a - 1 \\
-9a^4 & -6a^3 & -a^2 & & & \\
\hline
0 & 0 & -6a^2 & +4a & +4 & \\
 & & +6a^2 & +2a & -1 & \\
\hline
 & & 0 & +6a & +3. &
\end{array}
$$

El primer término de este resto no es divisible por el duplo del primer término de la raíz; luego el polinomio propuesto no tiene raíz cuadrada exacta.

63. Raíz cúbica de los polinomios. — Para extraer la raíz cúbica de un polinomio, se ordena con respecto a una letra cualquiera; se extrae la raíz cúbica del primer término, y se tiene el primer término de la raíz; se divide en seguida el segundo término del polinomio por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz, y se tiene el segundo término de ésta. Para hallar, en adelante, cualquiera de los otros términos de la raíz, se eleva al cubo el polinomio que forman los términos hallados de la raíz, se resta este cubo del polinomio propuesto, y el primer término del resto se divide por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz. Cuando se llegue a un resto *cero*, el polinomio hallado será la raíz cúbica exacta del polinomio propuesto.

EJEMPLO: Extraer la raíz cúbica del polinomio siguiente: $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

Ordenándolo con respecto a la letra a, tendremos:

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3} & a + b + c \\
-a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
0 \qquad 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 & \\
-3(a+b)^2c = -3a^2c + 6abc - 3b^2c \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
-3(a+b)c^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 3ac^2 - 3bc^2 \qquad & \\
-c^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - c^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Explicación. — Hemos extraído la raíz cúbica del primer término, a^3, y hemos obtenido a, primer término de la raíz. Seguidamente, hemos dividido el segundo término del polinomio, $3a^2b$, por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz, $3a^2$, y el cociente b ha sido el segundo término de la raíz. Hemos elevado al cubo los términos hallados de la raíz, $a + b$, y este cubo lo hemos restado del polinomio propuesto. El primer término del resto, $3a^2c$, lo hemos dividido por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz, $3a^2$, y el cociente c ha sido el tercer término de la raíz.

Podríamos, ahora, elevar al cubo el polinomio raíz, $a + b + c$, y restar este cubo del polinomio propuesto; pero es más sencillo descomponerlo en un binomio (55), así: $(a + b + c)^3 = \big((a + b) + c\big)^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$; y como ya antes hemos restado del polinomio propuesto $(a + b)^3$, basta que ahora quitemos del mismo las otras tres partes, y hallamos de resto cero.

64. Observaciones. — Un polinomio no tiene raíz cúbica exacta:

1.º Cuando, ordenado con respecto a una letra cualquiera, el primero y último términos no tienen raíz cúbica exacta.

2.º Cuando el segundo término del polinomio no es divisible por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz.

3.º Cuando el primer término de un resto no es divisible por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz.

Cálculo de radicales

64 a. Adición y substracción de radicales. — Para sumar y restar radicales, basta seguir las reglas generales de adición y substracción de las cantidades algebraicas.

64 b. Multiplicación de radicales. — En la multiplicación de radicales, deben distinguirse dos casos: 1.º, *que los radicales tengan el mismo índice*; 2.º, *que lo tengan distinto*.

PRIMER CASO. — Para multiplicar dos o más radicales que tengan un mismo índice, basta multiplicar entre sí las cantidades subradicales, y el producto se coloca bajo un radical de índice igual al de los radicales factores, siguiendo, con respecto a los signos y coeficientes de éstos, las reglas generales de la multiplicación de cantidades algebraicas.

EJEMPLO:

$$2a\sqrt[7]{m^2n^3z} \times -4\sqrt[7]{bm^3n} = 2a \times -4 \times \sqrt[7]{m^2n^3z \times bm^3n} = -8a\sqrt[7]{bm^5n^4z}.$$

SEGUNDO CASO. — Para multiplicar dos o más radicales de índice distinto, se reducen a un índice común, y queda este caso reducido al anterior.

EJEMPLO:

$$\sqrt{a^3b} \times \sqrt[3]{2abc} = \sqrt[6]{a^9b^3} \times \sqrt[6]{4a^2b^2c^2} = \sqrt[6]{4a^{11}b^5c^2}.$$

64 c. División de radicales. — Deben distinguirse dos casos: 1.º, *que los radicales tengan un mismo índice;* 2.º, *que lo tengan distinto.*

PRIMER CASO. — Para dividir dos radicales de índice común, se dividen entre sí las cantidades subradicales, y se coloca este cociente debajo de un radical de un índice igual al de dividendo y divisor, observando con los signos y coeficientes de éstos las reglas generales de la división de cantidades algebraicas.

EJEMPLO: $$\frac{-a^2\sqrt[3]{m^4n^5c}}{a\sqrt[3]{m^3n}} = -a\sqrt[3]{\frac{m^4n^5c}{m^3n}} = -a\sqrt[3]{mn^4c}.$$

SEGUNDO CASO. — Para dividir dos radicales de índice distinto, se reducen a un índice común y se procede como en el caso anterior.

EJEMPLO:

$$\frac{-3b^2\sqrt{x^2mn}}{-ab\sqrt[4]{xm^2}} = \frac{-3b^2\sqrt[4]{x^4m^2n^2}}{-ab\sqrt[4]{xm^2}} = \frac{-3b^2}{-ab}\sqrt[4]{\frac{x^4m^2n^2}{xm^2}} = \frac{3b}{a}\sqrt[4]{x^3n^2}.$$

64 d. Potenciación de radicales. — Para elevar un radical a una potencia, se eleva la cantidad subradical a dicha potencia, conservando el mismo índice. Si el radical lleva coeficiente, también se eleva a dicha potencia.

EJEMPLO: $$\left(-3\sqrt{b^2c}\right)^3 = -27\sqrt{b^6c^3}.$$

64 e. Radicación de radicales. — Para extraer una raíz de un radical, basta multiplicar los índices. Si el radical tiene coeficiente, se extrae la raíz de éste, y si no la tiene exacta, se introduce en el radical.

EJEMPLOS: $$\sqrt{4a^2\sqrt{b^3c}} = \pm 2a\sqrt[4]{b^3c}$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt{m^2n}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2m^2n}} = \sqrt[6]{a^2m^2n}.$$

64 f. Observación general respecto al cálculo de cantidades afectadas de exponentes. — Por lo expuesto en los párrafos 36 y 60, conocemos la significación de los exponentes negativos y fraccionarios. Tenemos que advertir que las reglas relativas a los exponentes en el cálculo de las cantidades algebraicas, son *generales*, sean los exponentes enteros, fraccionarios, positivos o negativos; esto es, *que, en la multiplicación de cantidades algebraicas, se suman algebraicamente los exponentes de una misma letra; en la división, se resta algebraicamente el exponente que tiene la letra en el divisor del exponente que tiene la letra en el dividendo; en la potenciación, se multiplica el exponente de la letra por el de la potencia, y en la radicación, se divide el exponente por el índice de la raíz.*

Igualdad. — Identidad. — Ecuación

65. Igualdad. — Se entiende por *igualdad* la expresión de dos cantidades unidas por el signo *igual* (=). Estas dos cantidades toman el nombre de *miembros de la igualdad:* la colocada a la izquierda del signo se llama *primer miembro*, y la de su derecha, *segundo miembro.*

V. g.: $a + b = c + d$.

66. Propiedades de toda igualdad. — Son las siguientes:

1.ª *La igualdad subsiste* si sus dos miembros se aumentan en un mismo número.

EJEMPLO: $4 + 2 = 6$.

Añadiendo a ambos miembros el número 5, tendremos:

$$4 + 2 + 5 = 6 + 5.$$

Es decir, tenemos otra igualdad.

2.ª *La igualdad subsiste* si sus dos miembros se disminuyen en un mismo número.

EJEMPLO: $20 + 5 = 25$.

Quitando 2, de ambos miembros, tenemos:

$$20 + 5 - 2 = 25 - 2.$$

Es decir, tenemos otra igualdad.

3.ª *La igualdad subsiste* si sus dos miembros se multiplican por un mismo número.

Así: $12 - 3 = 9$

y $(12 - 3)\,6 = 9 \times 6$.

4.ª *La igualdad subsiste* si sus dos miembros se dividen por un mismo número.

Así: $8 + 4 = 12$

y $(8 + 4) : 3 = 12 : 3$.

5.ª *La igualdad subsiste* si sus dos miembros se elevan a una misma potencia.

EJEMPLO: $20 - 3 = 17$

y $(20 - 3)^2 = 17^2$.

6.ª *La igualdad subsiste* si de sus dos miembros se extrae una misma raíz.

Así $20 + 5 = 25$

y $\sqrt{20 + 5} = \sqrt{25}$.

Estas propiedades se fundan en el siguiente axioma:

Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales.

67. Identidad. — Identidad (*) es la igualdad cuyos dos miembros están representados del mismo modo. V. g.: $6a - r = 6a - r$.

67 bis. Ecuación. — Se da el nombre de *ecuación* (**) a toda igualdad cuyos miembros contienen una o más cantidades desconocidas o incógnitas. V. g.: $6x = 72$.

68. División de las ecuaciones. — Se dividen en *ecuaciones con una incógnita*, con *dos*, con *tres*, etc., según que tengan una, dos, tres o más cantidades desconocidas.

Ecuación con una incógnita: $6x = 72$
Idem con dos incógnitas: $4x + 3z = 120$
Idem con tres incógnitas: $5x + 12z - 2y = 458$.

68 bis. Grado de una ecuación. — Si tiene una sola incógnita, se llama *grado* de la ecuación al *mayor exponente* a que se halla elevada la incógnita.

Ecuación de 1.er grado con una incógnita: $4x + \frac{x}{5} = 60$
Idem de 2.º grado con una incógnita: $20x^2 + 12 = 80x - 5$
Idem de 3.er grado con una incógnita: $9x^3 + 2x^2 - x = 120$.

Si tiene más de una incógnita, se llama *grado* de la ecuación al grado del término que lo tenga *mayor*, siendo *grado de un término* la suma de los exponentes a que se hallan elevadas las incógnitas que de él forman parte.

Ecuación de 1.er grado con dos incógnitas: $2x - 3y = 20$
Idem de 2.º grado con tres incógnitas: $-4x^2 + 2xz - y + z = 3xy + 4$
Idem de 3.er grado con tres incógnitas: $3x^2z + 4yz^2 - 2y^2 + x = 5z^2 + 27$.

69. Resolver una ecuación. — Resolver una ecuación es hallar el valor de sus incógnitas, para lo cual éstas *se despejan*.

70. Despejar una incógnita. — Despejar una incógnita es verificar las operaciones necesarias hasta conseguir que la incógnita quede sola en un miembro de la ecuación, sin coeficiente ni exponente y con el signo positivo.

71. Cómo puede hallarse afectada una incógnita. — Toda incógnita puede hallarse afectada: *de una cantidad positiva, de una cantidad negativa, por vía de multiplicación, por vía de división, por una potencia y por una raíz.*

72. Cómo se despeja en cada caso. — Si la incógnita se halla afectada de una cantidad positiva, se la despeja pasando esta cantidad al otro miembro con signo negativo.

EJEMPLO: $x + 20 = 32$.

Pasando 20 al segundo miembro con signo negativo, tendremos:

$$x = 32 - 20.$$

Luego: $x = 12$.

Esto es evidente, pues si de los dos miembros de una igualdad se quita un mismo número, la igualdad subsiste.

Si la incógnita se halla afectada de una cantidad negativa, se la despeja pasando esta cantidad al otro miembro con signo positivo.

(*) Del latín *idem*, lo mismo.
(**) » » *æquus*, igual.

EJEMPLO: $x - 5 = 12.$

Pasando 5 al segundo miembro con signo positivo, tendremos:

$$x = 12 + 5.$$

Luego $x = 17$.

Esto es evidente, pues si los dos miembros de una igualdad se aumentan en un mismo número, la igualdad subsiste.

Si la incógnita se halla afectada por vía de multiplicación, se la despeja partiendo el otro miembro por el factor que la multiplica.

EJEMPLO: $x \times 5 = 20.$

Partiendo el segundo miembro por 5 y quitando del primero este factor, tendremos:

$$x = \frac{20}{5}.$$

Luego: $x = 4$.

Es evidente, pues si los dos miembros de una igualdad se dividen por un mismo número, la igualdad subsiste.

Si la incógnita se halla afectada por vía de división, se la despeja multiplicando el otro miembro por el número que la divide.

EJEMPLO: $\frac{x}{7} = 56.$

Multiplicando el segundo miembro por 7 y quitando del primero este divisor, tendremos:

$$x = 56 \times 7.$$

Luego: $x = 392$.

Es evidente, pues si los dos miembros de una igualdad se multiplican por un mismo número, la igualdad subsiste.

Si la incógnita se halla elevada a una potencia, se la despeja extrayendo del otro miembro la raíz del grado que indique el exponente de la incógnita.

EJEMPLO: $x^3 = 512.$

Extrayendo la raíz cúbica del segundo miembro, y quitando del primero el exponente 3, tendremos:

$$x = \sqrt[3]{512}.$$

Luego: $x = 8$.

Esto es evidente, pues si de los dos miembros de una igualdad se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

Si la incógnita se halla afectada por una raíz, se la despeja elevando el otro miembro a una potencia igual al exponente radical.

EJEMPLO: $\sqrt[3]{x} = 7.$

Elevando el segundo miembro a la tercera potencia, y quitando del primero el radical, tendremos:

$$x = 7^3.$$

Luego: $x = 343$.

Esto es también evidente, pues si los dos miembros de una igualdad se elevan a una misma potencia, la igualdad subsiste.

73. **Regla general para el despejo de las incógnitas.**—De todo lo dicho, se desprende la regla general siguiente:

Las cantidades que afectan a las incógnitas, pasan al otro miembro con signo contrario al que llevan en el miembro de la incógnita.

74. Cómo se despeja una incógnita cuando la afectan varios términos.— Cuando son dos o más los términos que afectan a una incógnita, se despeja del modo siguiente:

1.º *Se pasan a un miembro todos los términos que llevan la incógnita, y al otro miembro, todos los demás.*
2.º *Si en la ecuación hay quebrados, se quitan los denominadores, convirtiendo así en enteros todos los términos de la ecuación.*
3.º *Se simplifica la ecuación.*
4.º *Se verifica la operación que indica la ecuación final.*

75. Traslado de términos. — Como hemos dicho ya, los términos se pasan de un miembro a otro cambiando el signo.

EJEMPLO: Sea la ecuación: $\frac{x}{6} + \frac{x}{4} - 2 = 16 - \frac{x}{3}$.

Pasando al primer miembro $-\frac{x}{3}$ y al segundo -2, tendremos la ecuación:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 16 + 2.$$

76. Cómo se quitan los denominadores. — Para quitar los denominadores, se multiplica cada uno de los términos de la ecuación por el producto de los denominadores de los demás.

Quitando los denominadores de la ecuación anterior, tendremos:

Ecuación anterior: $\frac{x}{6} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 16 + 2$.

Ecuación resultante: $12x + 18x + 24x = 1152 + 144$.

77. Simplificación de la ecuación. — Se simplifica la ecuación, verificando las operaciones indicadas en la misma.

Simplificando la ecuación anterior tendremos:

Ecuación anterior: $12x + 18x + 24x = 1152 + 144$.

Ecuación resultante: $54x = 1296$.

78. Cómo se halla el valor de la incógnita en la ecuación final. — Verificando la operación necesaria, según la manera de hallarse afectada la incógnita.

En la ecuación final anterior, $54x = 1296$, la incógnita se halla afectada por vía de multiplicación, luego tendremos que

$$x = \frac{1296}{54}.$$

Luego: $x = 24$.

79. Cómo se procede cuando los dos miembros de la ecuación final son cantidades negativas. — Cuando los dos miembros de la ecuación final son cantidades negativas, se convierten en positivas dando signos contrarios a los dos miembros de la ecuación.

Supongamos la ecuación $-80x = -440$.

Escribiéndola con signos contrarios, se convertirá en esta otra: $80x = 440$.

Esta transformación es evidente, pues no hemos hecho otra cosa que multiplicar los dos miembros de la igualdad por -1.

80. Resolución de los problemas algebraicos que dan lugar a una ecuación de primer grado con una incógnita. — Después de un detenido examen del problema, se plantea la ecuación a que éste da lugar, y luego se procede al despejo de la incógnita, observando las reglas dadas, esto es: 1.º, *traslado de términos:* 2.º, *quitar los denominadores si los hay;* 3.º, *simplificar la ecuación;* 4.º, *resolución de la ecuación final.*

EJEMPLO: *Preguntaron a un joven cuántas pesetas llevaba en el bolsillo, y contestó:*

—Las pesetas que llevo, sumadas con su duplo y mitad, más 2, dan 30 pesetas. Averígüese cuántas pesetas llevaba.

Resolución:

Llamemos x a las pesetas que el joven tenía.

Planteo de la ecuación: $x + 2x + \frac{x}{2} + 2 = 30.$

Pasando $+ 2$ al segundo miembro, tendremos:

$$x + 2x + \frac{x}{2} = 30 - 2.$$

Quitando el denominador 2, resulta:

$$2x + 4x + x = 60 - 4.$$

Simplificando esta ecuación, $7x = 56$.

Resolviendo esta ecuación final, $x = \frac{56}{7}$.

Luego $x = 8$.

Llevaba, pues, 8 pesetas.

81. Comprobación del resultado de una ecuación.—Para comprobar el resultado de una ecuación, se escribe ésta substituyendo la incógnita por su valor hallado; se verifican las operaciones indicadas, y si resulta una *identidad*, es prueba evidente de que no ha habido error en la resolución del problema.

Comprobando el problema anterior, tendremos:

$$8 + 2 \times 8 + \frac{8}{2} + 2 = 30.$$

Verificando las operaciones indicadas: $8 + 16 + 4 + 2 = 30$.

Luego: $30 = 30$. Cuya identidad nos dice que el problema está bien resuelto.

Soluciones razonadas de algunos ejemplos

1. *La suma de tres números es 144; el segundo es duplo del primero, y el tercero tiene tantas unidades como la suma de los otros dos. ¿Cuáles son estos números?*

Resolución: Si al primer número le representamos por x, el segundo será $2x$, y como el tercer número es igual a la suma del 1.º más el 2.º, el tercer número será $x + 2x$, o lo que es igual, $3x$. Luego la ecuación será:

$$x + 2x + 3x = 144.$$

Simplificando esta ecuación, resulta $6x = 144$.

Luego $x = \frac{144}{6} = 24$.

El primer número es, pues	24
El segundo, dos veces 24, es... $24 \times 2 =$	48
El tercero, suma del 1.º y del 2.º, $24 + 48 =$	72
Prueba	144

2. *Añadiendo a un número la mitad y la cuarta parte de este número, resulta* 63. *Averígüese cuál es este número.*

Resolución: Si representamos el número pedido por x, su mitad será $\frac{x}{2}$ y su cuarta parte, $\frac{x}{4}$.

Luego la ecuación será: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 63.$

Quitando los denominadores, multiplicando todos los términos por 2×4, o por 8, tendremos: $8x + 4x + 2x = 504.$
Simplificando esta ecuación, $14x = 504.$

Luego $x = \frac{504}{14} = \frac{72}{2} = 36.$

Comprobación:

Número obtenido	36
Su mitad	18
Su cuarta parte	9
Suma dada.............	63

3.° *Si del duplo de un número se quitan las* $^4/_5$ *partes de este número y* 85 *unidades más, se obtiene* 4055. *Hállese este número.*

Resolución: Llamemos al número que se desea, x; su duplo será $2x$, y sus $^4/_5$ partes serán $x \times \frac{4}{5} = \frac{4x}{5}$.

Si, pues, de $2x$ restamos $\frac{4x}{5}$ más 85, debe resultar 4055.

Luego la ecuación será:

$$2x - \frac{4x}{5} - 85 = 4055.$$

Pasando 85 al segundo miembro, tendremos:

$$2x - \frac{4x}{5} - 4055 + 85.$$

Quitando el denominador, multiplicando todos los términos por 5,

$$10x - 4x = 20275 + 425.$$

Simplificando esta ecuación, $6x = 20700.$

Luego $x = \frac{20700}{6} = 3450$, número pedido.

Comprobación:

Número obtenido..............................		3450
Su duplo, $3450 \times 2 =$	6900	
Sus $^4/_5$ partes, $\frac{3450 \times 4}{5} = 2760$	$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} = -2845$	
Más...................... $+$ 85		
Diferencia dada	4055	

4. *Un padre tiene dos hijos: la edad del mayor es los* $^2/_5$ *de la del padre más* 8 *años, y la del menor, los* $^6/_{12}$ *de la edad del padre menos* 4 *años. El hijo mayor tiene* 6 *años más que el menor. Hállese la edad del padre.*

Resolución: Sea x la edad del padre.

La edad del hijo mayor será $x \times \frac{2}{5} + 8 = \frac{2x}{5} + 8$.

La del menor, $x \times \frac{6}{12} - 4 = \frac{6x}{12} - 4$.

Si de la edad del mayor quitamos la del menor, el resto es 6 años.

Luego la ecuación será:

$$\left(\frac{2x}{5} + 8\right) - \left(\frac{6x}{12} - 4\right) = 6.$$

Verificando la resta indicada en el primer miembro, y quitando los paréntesis, tendremos:

$$\frac{2x}{5} + 8 - \frac{6x}{12} + 4 = 6.$$

Quitando los denominadores, multiplicando los términos por $5 \times 12 = 60$,

$$24x + 480 - 30x + 240 = 360.$$

Haciendo la transposición para reunir en un solo miembro los términos que llevan la incógnita,

$$24x - 30x = 360 - 480 - 240.$$

Simplificando la ecuación, $-6x = -360$.

Multiplicando ambos miembros por -1, para que los signos sean positivos, resultará $6x = 360$.

Luego $x = \frac{360}{6} = 60$ años, edad del padre.

Comprobación:

Edad del hijo mayor, $\frac{2 \times 60}{5} + 8 = 24 + 8 = 32$ años.

Edad del menor, $\frac{6 \times 60}{12} - 4 = 30 - 4 = 26$ años.

$$32 \text{ años} - 26 \text{ años} = 6 \text{ años}$$
$$6 = 6$$

5. *En una bolsa, hay monedas de a 5 pesetas y en otra bolsa, monedas de a 2, sumando un total de 280 monedas. El valor de las monedas de a 5 pesetas excede al de las de a 2 en 560 pesetas. Hállese el número de monedas de cada clase.*

Resolución: Representando por x el número de monedas de a 5 pesetas, el número de las de a 2 será $280 - x$.

El valor, en pesetas, de las monedas de a 5 pesetas es $5x$, y el de las de a 2 pesetas es $(280 - x)\,2$.

Si del valor de las de a 5 pesetas quitamos el de las de a 2 pesetas, la diferencia es 560 pesetas; luego tenemos la ecuación

$$5x - (280 - x)\,2 = 560.$$

Verificando la multiplicación indicada en el primer miembro,

$$5x - (560 - 2x) = 560.$$

Quitando el paréntesis y verificando la resta, para lo cual debemos cambiar el signo al término $-2x$, resultará:

$$5x - 560 + 2x = 560.$$

Pasando 560 al segundo miembro, para reunir las incógnitas en uno solo,

$$5x + 2x = 560 + 560.$$

Y simplificando la ecuación, $7x = 1120$.

Luego $x = \frac{1120}{7} = 160$, monedas de a 5 pesetas.

El número de monedas de a 2 pesetas será, pues, $280 - 160 = 120$.

Comprobación

160 monedas de a 5 ptas. valen $160 \times 5 = 800$ ptas.
120 » » » 2 » » $120 = 2 = 240$ »

Exceso dado............ 560 ptas.

6. *Un platero tiene oro a la ley de* 0'975 *y oro a la ley de* 0'750. *Quiere obtener un lingote cuyo peso sea 2 Kgs. y a la ley de* 0'900: *¿qué cantidad de oro deberá tomar de cada clase?*

Resolución: Si llamamos x al peso del oro que tomará del lingote cuya ley es 0'975,

$2 - x$ será el peso del oro que deberá tomar del lingote cuya ley es 0'750.

Sabemos que, para obtener el peso del metal puro de una aleación, se multiplica el peso del lingote, moneda, etc., por su ley (*Aritmética.*—**276**. *Fórmula* 2.ª). Luego el oro puro contenido en el peso x será $x \times 0'975 = 0'975x$, y el oro puro contenido en el peso $2 - x$, será $(2 - x)\ 0'750$.

Ahora, la suma de estos dos pesos debe ser igual al peso del oro puro contenido en el nuevo lingote a la ley de 0'900, esto es, $2 \times 0'900$.

Luego la ecuación será:

$$0'975x + (2 - x)\ 0'750 = 2 \times 0'900.$$

Multiplicando todos los términos por 1000 para convertirlos en enteros,

$$975x + (2 - x)\,750 = 2 \times 900.$$

Verificando las operaciones indicadas,

$$975x + 1500 - 750x = 1800.$$

Pasando 1500 al segundo miembro, para reunir en uno solo los términos que llevan la incógnita,

$$975x - 750x = 1800 - 1500.$$

Y simplificando la ecuación,

$$225x = 300.$$

Luego $x = \frac{300}{225} = \frac{60}{45} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\ ^1/_3$ Kgs. del lingote cuya ley es 0'975.

Del lingote cuya ley es 0'750, se tomarán

$$2 - 1\ ^1/_3 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{1} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \text{ de Kg.}$$

Se tomarán:

Del lingote a la ley de 0'975 .... $1\ ^1/_3$ Kgs.
» » » » » » 0'750 .... $^2/_3$ »

Comprobación

El lingote de 2 Kgs. que se obtendrá, debe contener de oro puro:

$$2 \times 0'900 = 1'800 \text{ Kg.} = 1800 \text{ gramos.}$$

Las cantidades que se cortarán de los lingotes respectivos, contendrán:

$$\left.\begin{array}{l} 1\ ^1/_3 \times 0'975 = 1310 \text{ gramos oro puro} \\ ^2/_3 \times 0'750 = \ \ 500 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \end{array}\right\} 1800 \text{ gramos.}$$

7. *Cierto jugador apostó las dos quintas partes del dinero que llevaba, y perdió; jugó dos veces más perdiendo siempre la tercera parte del dinero que le quedaba, y se halló con* 960 *pesetas. Calcúlese el dinero que llevaba cuando empezó a jugar.*

Resolución: Llamemos x al dinero que el jugador llevaba cuando empezó a jugar.

Si perdió los $^2/_5$ de este dinero, le quedaron los $^3/_5$ del mismo; luego le quedó $\frac{3x}{5}$.

La segunda vez perdió $^1/_3$ de $\frac{3x}{5} = \frac{3x}{15}$; luego le quedaron los $^2/_3$ de $\frac{3x}{5}$, o doble de lo que perdió, esto es, $2 \times \frac{3x}{15} = \frac{6x}{15} = \frac{2x}{5}$.

La tercera vez perdió $^1/_3$ de lo que le quedaba, es decir, $^1/_3$ de $\frac{2x}{5} = \frac{2x}{15}$; luego le quedaron los $^2/_3$ de $\frac{2x}{5}$; o doble cantidad de la que perdió, esto es, $2 \times \frac{2x}{15} = \frac{4x}{15}$.

Luego la ecuación será: $\frac{4x}{15} = 960$.

Quitando el denominador, multiplicando ambos miembros por 15, tendremos

$$4x = 14400;$$

luego $x = \frac{14400}{4}$

y $x = 3600$ ptas., dinero que llevaba el jugador.

Comprobación:

Llevaba el jugador	Ptas.	3600
Perdió la 1.ª vez $\frac{3600 \times 2}{5}$ = ...	»	— 1440
Le quedaron	Ptas.	2160
Perdió la 2.ª vez $\frac{2160}{3}$ = ...	»	720
Le quedaron	Ptas.	1440
Perdió la 3.ª vez $\frac{1440}{3}$ = ...	»	480
Le quedaron	Ptas.	960

8. *Un hortelano ha vendido los* $\frac{2}{5}$ *menos* 10 *de las granadas que tenía en una cesta; si añadiese* 80 *granadas a las que le han quedado, el número de las que primeramente tenía se habría aumentado en* $\frac{1}{5}$*: ¿cuántas granadas había en la cesta antes de empezar la venta?*

Resolución: Llamemos x al número de granadas que había en la cesta.

Si el hortelano ha vendido los $\frac{2}{5} - 10$ granadas, le quedaban los $\frac{3}{5} + 10$ granadas, o bien $\frac{3x}{5} + 10$.

De consiguiente, $\frac{3x}{5} + 10 + 80$ debe ser igual al número de granadas que en la cesta había, x, más $\frac{x}{5}$, o bien $\frac{6x}{5}$.

La ecuación, pues, será:

$$\frac{3x}{5} + 10 + 80 = \frac{6x}{5}.$$

Quitando los denominadores, multiplicando todos los términos por 5×5, tenemos:

$$15x + 250 + 2000 = 30x$$

Pasando $15x$ al segundo miembro, se obtiene $250 + 2000 = 30x - 15x$.
Y verificando las operaciones indicadas, $2250 = 15x$.

Por lo que, $x = \frac{2250}{15}$

y $x = 150$, granadas que había en la cesta.

Comprobación:

$$\frac{3 \times 150}{5} + 10 + 80 = \frac{6 \times 150}{5}.$$

Verificando las operaciones indicadas, resulta la identidad $180 = 180$.

9. *Un rentista ha prestado los $^3/_5$ de su capital al 5 % anual, y el resto, al 6 %. Los intereses de la primera parte exceden cada año en 360 duros a los de la parte segunda: ¿qué capital posee dicho individuo?*

Resolución: Llamemos x al capital.

La parte colocada al 5 % será $\frac{3x}{5}$.

Y la parte colocada al 6 %, $\frac{2x}{5}$.

Los intereses de la parte primera serán $\frac{3x}{5} \times \frac{5}{100}$.

Y los intereses de la parte segunda, $\frac{2x}{5} \times \frac{6}{100}$.

De ahí la siguiente ecuación:

$$\frac{3x}{5} \times \frac{5}{100} - \frac{2x}{5} \times \frac{6}{100} = 360.$$

Verificando las operaciones indicadas, tendremos:

$$\frac{15x}{500} - \frac{12x}{500} = 360.$$

Quitando los denominadores, $7500x - 6000x = 90000000$.
Haciendo la reducción de términos semejantes, $1500x = 90000000$.

Luego $x = \frac{90000000}{1500} = \frac{900000}{15} = \frac{300000}{5} = 60000$ duros.

Comprobación

$$\frac{3 \times 60000}{5} \times \frac{5}{100} - \frac{2 \times 60000}{5} \times \frac{6}{100} = 360$$

$$1800 - 1440 = 360$$

$$360 = 360$$

10. *Un banquero descuenta dos pagarés que vencen al cabo de 1 año, a un mismo tanto por %; el 1.º es de 15,000 pesetas y el 2.º, de 24,000; el descuento del 2.º es mayor que el del 1.º en 810 pesetas. Determínese el tanto % a que se han verificado ambas operaciones.*

Resolución: Sea x el t. % de descuento.

El descuento del 1.er pagaré será $\frac{15000 \times x}{100} = 150x$

» » » 2.º » » $\frac{24000 \times x}{100} = 240x$

La ecuación, pues, será: $240x - 150x = 810$.
Reduciendo los términos semejantes, resulta $90x = 810$.

Luego $x = \frac{810}{90} = 9$ %.

Comprobación:

$$240 \times 9 - 150 \times 9 = 810$$
$$810 = 810$$

11. *Un banquero descuenta dos letras a cierto individuo a un mismo tanto %; la 1.ª de 8000 pesetas pagadera a 3 meses; la 2.ª de 6000 pesetas, a 2 meses; entrega 1950 pesetas más por la 1.ª que por la 2.ª Calcúlese el tanto % de descuento.*

Resolución: Llamemos x al t. % de descuento.

Hallemos el descuento de la letra 1.ª El descuento de 100 ptas. en 12 meses es x, y en 1 mes, $\frac{x}{12}$, y en 3 meses, $\frac{3x}{12}$; luego el descuento de 8000 ptas. en 3 meses es $\frac{3x}{12} \times 80 = 20x$.

Luego el banquero entrega por la letra 1.ª $8000 - 20x$.

Hallemos el descuento de la letra 2.ª El descuento de 100 ptas. en 12 meses es x, y en 1 mes, $\frac{x}{12}$, y en 2 meses, $\frac{2x}{12}$; luego el descuento de 6000 ptas. en 2 meses será $\frac{2x}{12} \times 60 = 10x$.

Luego el banquero entrega por la letra 2.ª $6000 - 10x$.

De consiguiente, la ecuación será:

$$8000 - 20x - (6000 - 10x) = 1950.$$

Verificando la resta indicada en el primer miembro de la ecuación, resulta:

$$8000 - 20x - 6000 + 10x = 1950.$$

Haciendo la trasposición de términos,

$$-20x + 10x = 1950 - 8000 + 6000.$$

Reduciendo los términos semejantes,

$$-10x = -50.$$

Multiplicando ambos miembros por -1, para cambiar el signo,

$$10x = 50.$$

Luego $x = \frac{50}{10}$, o bien $x = 5$ tanto p. % buscado.

Comprobación:

$$8000 - 20 \times 5 - (6000 - 10 \times 5) = 1950$$
$$7900 - 5950 = 1950$$
$$1950 = 1950$$

12. *Hallar tres números impares consecutivos, cuya suma sea* 447.

Resolución:

Llamando al número impar medio x, el mayor será $x + 2$, y el menor $x - 2$. La ecuación, pues, será:

$$x + x + 2 + x - 2 = 447.$$

Practicando la trasposición, resulta

$$x + x + x = 447 - 2 + 2.$$

Haciendo la reducción de términos semejantes y verificando las operaciones indicadas en el segundo miembro,

$$3x = 447.$$

Luego $x = \frac{447}{3}$, o bien, $x = 149$, número impar medio.

El número mayor será $149 + 2 = 151$; y el menor, $149 - 2 = 147$.

Comprobación:

$$147 + 149 + 151 = 447$$
$$447 = 447$$

13. *Hállese un número tal que, la suma de los cocientes de dicho número por* a, b *y* c *sea* d — r.

Resolución: Sea x el número que se busca. Tendremos, evidentemente, la ecuación siguiente:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} + = d - r.$$

Quitando los denominadores,

$$bcx + acx + abx = abcd - abcr.$$

Separando, en el primer miembro, el factor común x, y en el segundo el factor abc, resulta

$$(bc + ac + ab)\, x = (d - r)\, abc.$$

Luego

$$x = \frac{(d - r)\, abc}{cb + ac + ab}.$$

NOTA.—El valor de x, representado así, de un modo general, se distingue con el nombre de *fórmula*, por medio de la cual se resuelven todos los problemas en que concurren iguales condiciones que las del problema de que dicha fórmula procede.

14. *Contratóse un obrero ganando* n *pesetas cada día que trabajaría, y perdiendo* n′ *pesetas cada día que dejaría de trabajar. Al cabo de* b *días, ajustó cuentas con el principal, y cobró* a *pesetas. ¿Cuántos días trabajó y cuántos dejó de trabajar?*

Resolución: Si llamamos x al número de días que trabajó, dejaría de trabajar $b - x$ días.

Luego la ecuación será:

$$nx - (b - x)\, n' = a.$$

Verificando la multiplicación indicada en el primer miembro,

$$nx - n'\, b + n'\, x = a.$$

Haciendo la trasposición,

$$nx + n'\, x = a + n'\, b.$$

Separando, en el primer miembro, el factor común x,

$$(n + n')\, x = a + n'\, b.$$

Luego $x = \dfrac{a + n'\, b}{n + n'}$.

Soluciones imposibles

82. En la resolución de problemas algebraicos, sin haber padecido error, a veces se obtienen resultados que no satisfacen las condiciones del enunciado. Entre otros casos, citaremos los siguientes:

1.º Cuando resulta que *cero* es igual a una cantidad positiva o negativa.

2.º Cuando el resultado ha de ser un número entero, y se obtiene un quebrado o un mixto.

3.º Cuando el valor de la incógnita resulta una cantidad negativa.

Estos problemas se llaman de solución *imposible.*

EJEMPLOS: 1.º *Antonio tiene un número tal de pesetas que, si de la cuarta parte quita 8, le quedará la misma cuarta parte más 3. ¿Cuántas pesetas tiene?*

La ecuación será: $\frac{x}{4} - 8 = \frac{x}{4} + 3.$

$$\begin{aligned} 4x - 128 &= 4x + 48 \\ 4x - 4x &= 48 + 128 \\ 0 &= 176 \end{aligned}$$

O bien, $0 = 176$.

Resultando absolutamente imposible.

2.° *Cada vez que un tirador da en el blanco, gana 4 ptas., y pierde 2 pesetas cada vez que yerra. Después de 15 disparos, cobró 23 pesetas. ¿Cuántas veces acertó?*

Llamando x al número de veces que acertó, erraría $15 - x$ veces; luego la ecuación sería:

$$\begin{aligned} 4x - 2(15 - x) &= 23 \\ 4x - 30 + 2x &= 23 \\ 6x &= 23 + 30 \\ 6x &= 53 \\ x &= \frac{53}{6} \\ x &= 8\,{}^5/_6 \end{aligned}$$

De modo, que el tirador hubiera acertado $8\,{}^5/_6$ veces; resultado imposible, pues las veces que tiró y acertó no pueden fraccionarse.

3.° *Un padre tiene 36 años, y su hijo, 14. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad del padre sea el triplo de la del hijo?*

Si llamamos x á los años que han de transcurrir, luego de transcurridos, el padre tendrá $36 + x$ años, y el hijo, $14 + x$. Luego la ecuación es:

$$\begin{aligned} 36 + x &= 3\ (14 + x) \\ 36 + x &= 42 + 3x \\ 36 - 42 &= 3x - x \\ -6 &= 2x \\ -3 &= x \end{aligned}$$

El carácter negativo de este resultado, $x = -3$, indica, desde luego, la imposibilidad del problema.

Ecuaciones de primer grado con dos o más incógnitas

83. Sistema de ecuaciones. — Del planteo de un problema algebraico, puede, también, resultar más de una ecuación con más de una incógnita.

La reunión de dos o más ecuaciones, en las cuales cada una de las incógnitas representa el mismo valor, constituye un *sistema de ecuaciones*.

El conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen a todas las ecuaciones se llama *solución*.

Estos sistemas pueden ser *determinados*, *más que determinados* e *indeterminados*. Un sistema se llama *determinado* cuando el número de ecuaciones es igual al de sus incógnitas.

Se llama *más que determinado*, cuando contiene mayor número de ecuaciones que de incógnitas.

Se llama *indeterminado*, cuando contiene menor número de ecuaciones que de incógnitas.

84. Eliminar una incógnita. — Eliminar una incógnita en un sistema de ecuaciones, es deducir de éstas otro sistema equivalente que no contenga dicha incógnita.

85. Métodos de eliminación. — Los medios prácticos de verificar estas transformaciones, se llaman *métodos de eliminación*, siendo los más empleados los tres siguientes: *el de substitución, el de igualación y el de sumas y restas, o de reducción a coeficientes idénticos.*

86. Preparación de un sistema de ecuaciones. — Cualquiera que sea el método de eliminación que se adopte, es preciso observar las reglas siguientes:

1.ª Suponer conocido el valor de las incógnitas para formar las ecuaciones correspondientes.

2.ª Eliminar primero la incógnita de signo positivo cuyo coeficiente sea menor.

3.ª Pasar a un miembro los términos que tengan la incógnita, y al otro los que no la tengan.

4.ª Quitar los denominadores de cada ecuación.

5.ª Simplificar la ecuación todo lo posible.

Hecho esto, se tiene *preparado* el sistema para el despejo de las incógnitas.

Eliminación de incógnitas

Ya hemos dicho que los sistemas de ecuaciones pueden ser determinados, más que determinados e indeterminados.

Los estrechos límites en que encerramos, adrede, este trabajo, nos obligan a circunscribir nuestra exposición a los casos determinados, y para mayor claridad, admitiremos, primero, sólo dos incógnitas, empezando por explicar el

87. Método de substitución. — *En la eliminación de incógnitas por el método de substitución, se empieza por eliminar la incógnita más sencilla del sistema, y se substituye esta incógnita por su valor en las demás ecuaciones, obteniendo así una ecuación menos y una incógnita menos. Se preparan en seguida las demás ecuaciones* (**86**), *se elimina la incógnita más sencilla, y ésta se substituye por su valor en las demás ecuaciones, obteniendo, de nuevo, una ecuación menos y una incógnita menos, continuando así hasta obtener una sola ecuación con una sola incógnita, cuyo valor, después de obtenido, se substituye en las otras ecuaciones, hallando así los valores numéricos de todas las incógnitas.*

EJEMPLOS: 1.º Supongamos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 46 \\ x - z &= 14 \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Si nos proponemos eliminar la x, la despejaremos en una de las ecuaciones, en la segunda, por ejemplo, y resultará

$$x = 14 + z.$$

Substituyendo, ahora, en la otra ecuación, x por su valor, y despejando la incógnita z, se obtendrá:

$$14 + z + z = 46$$
$$2z = 46 - 14$$
$$z = \frac{46 - 14}{2}$$
$$z = \frac{32}{2}$$
$$z = 16$$

Substituyendo, ahora, en la primera ecuación de (A) z por su valor numérico, 16, se obtendrá el valor numérico de x, esto es:

$$x + 16 = 46$$
$$\text{Luego} \quad x = 46 - 16$$
$$\text{O bien} \quad x = 30$$

2.º Tomemos, ahora, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 9x - 4z = 13 \\ 6x + 3z = 54 \end{array}\right\} (B)$$

Como en el anterior sistema, ambas incógnitas son igualmente sencillas. Eliminando la x despejándola en la segunda ecuación, tendremos:

$$6x + 3z = 54$$
$$6x = 54 - 3z$$
$$x = \frac{54 - 3z}{6}$$

Simplifiquemos el valor de x, dividiendo por 3 el numerador y el denominador del quebrado, y resultará

$$x = \frac{18 - z}{2} \quad (C)$$

Substituyendo, ahora, en la primera ecuación del sistema (B), x por su valor hallado, se obtendrá:

$$\frac{9\ (18 - z)}{2} - 4z = 13$$
$$\frac{162 - 9z}{2} - 4z = 13$$
$$162 - 9z - 8z = 26$$
$$-9z - 8z = 26 - 162$$
$$-17z = -136$$
$$17z = 136$$
$$z = \frac{136}{17}$$
$$z = 8.$$

Substituyendo, en la ecuación de (C), $x = \frac{18 - z}{2}$, z por su valor numérico, 8, se obtendrá el valor numérico de x, esto es:

$$x = \frac{18 - 8}{2}$$
$$x = \frac{10}{2}$$
$$x = 5.$$

88. **Método de igualación.** — *En la eliminación de incógnitas por el método de igualación, después de haber preparado el sistema* (**86**), *se despeja la incógnita más sencilla de todas las ecuaciones. El valor de esta incógnita obtenida en la primera ecuación, se iguala con los valores de la misma incógnita obtenidos en las otras ecuaciones, resultando un nuevo sistema más sencillo que el primero, pues tiene una ecuación menos y una incógnita menos. Se vuelve a despejar una misma incógnita en cada una de las ecuaciones de este nuevo sistema, y el valor de esta incógnita obtenido en la primera ecuación se iguala con los valores de la misma incógnita obtenidos en las otras ecuaciones, resultando un tercer sistema con una ecuación menos y una incógnita menos; y así se continúa hasta obtener una sola ecuación con una sola incógnita, cuyo valor, después de obtenido, se substituye en las demás ecuaciones, hallando así los valores numéricos de todas las incógnitas.*

EJEMPLOS: Tomemos los mismos sistemas empleados en la aplicación del método anterior.

1.er *sistema*:

$$x + z = 46$$
$$x - z = 14$$

Eliminemos la incógnita de signo positivo en ambas ecuaciones despejándola en éstas, y tendremos:

$$\left.\begin{aligned} x &= 46 - z \\ x &= 14 + z \end{aligned}\right\} (A)$$

Como do cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí, tendremos

$$46 - z = 14 + z.$$

De donde resulta

$$46 - 14 = z + z$$
$$32 = 2z$$
$$z = \frac{32}{2}$$
$$z = 16.$$

Substituyendo, ahora, z por su valor numérico, 16, en cualquiera de las dos ecuaciones de (A), se tendrá el valor numérico de x, esto es:

$$x = 46 - 16$$
$$x = 30$$

O bien en la otra,

$$x = 14 + 16$$
$$x = 30$$

2.º *sistema:*

$$9x - 4z = 13$$
$$6x + 3z = 54$$

Preparando el sistema, tendremos:

$$9x = 13 + 4z$$
$$6x = 54 + 3z$$

Despejando la x en ambas ecuaciones, resulta:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{13 + 4z}{9} \\ x &= \frac{54 - 3z}{6} \end{aligned}\right\} (B)$$

De consiguiente,

$$\frac{13 + 4z}{9} = \frac{54 - 3z}{6}.$$

Luego,

$$78 + 24z = 486 - 27z$$
$$24z + 27z = 486 - 78$$
$$51z = 408$$
$$z = \frac{408}{51}$$
$$z = 8.$$

Substituyendo z por su valor numérico en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema (B), se hallará el valor numérico de x, esto es:

$$x = \frac{13 + 4 \times 8}{9}$$
$$x = 5.$$

O bien en la otra,

$$x = \frac{54 - 3 \times 8}{6}$$
$$x = 5.$$

89. Método de sumas y restas, o de reducción a coeficientes idénticos. — *El método de sumas y restas o de coeficientes idénticos, se funda en que la incógnita que se trata de eliminar tenga el mismo coeficiente en todas las ecuaciones, lo que se consigue multiplicando los dos miembros de cada ecuación por el producto de los coeficientes que tiene la misma incógnita en las demás ecuaciones del sistema. Hecho esto, si las ecuaciones só'o son dos, se suman o restan miembro a miembro: se suman, si la incógnita que se elimina tiene en ambas ecuaciones signo contrario; y se restan si los* *signos de dicha incógnita son iguales, después de lo cual el sistema queda ya reducido a una sola ecuación con una sola incógnita.*

Cuando las ecuaciones son más de dos, se compara la más sencilla con cada una de las otras, siguiendo en cada comparación la regla anterior, después de lo cual resulta un nuevo sistema con una ecuación menos y una incógnita menos. Y así se continúa hasta obtener una sola ecuación con una sola incógnita, cuyo valor, después de hallado, se substituye en las demás ecuaciones, hallando así los valores numéricos de todas las incógnitas.

EJEMPLOS: Tomemos los mismos sistemas de que nos hemos servido en la aplicación de los métodos anteriores.

1.er *sistema:*

$$\left.\begin{array}{l} x + z = 46 \\ x - z = 14 \end{array}\right\} (A)$$

Ambas incógnitas ya tienen igual coeficiente, la unidad.

Para eliminar la x, como tiene igual signo, el positivo, en ambas ecuaciones, restaremos ambas ecuaciones, miembro a miembro, y tendremos:

$$x + z - x + z = 46 - 14.$$
$$\text{O bien} \quad 2z = 32.$$
$$\text{Luego } z = \frac{32}{2}$$
$$z = 16.$$

Substituyendo z por su valor numérico en cualquiera de las ecuaciones de (A), la 1.ª por ejemplo, hallaremos el valor numérico de x, esto es:

$$x + 16 = 46.$$
$$\text{Luego} \quad x = 46 - 16$$
$$x = 30.$$

Si hubiésemos querido eliminar la z, como esta incógnita tiene signo distinto en ambas ecuaciones del sistema propuesto, hubiéramos sumado éstas ordenadamente, así:

$$x + z + x - z = 46 + 14.$$
$$\text{O bien} \quad 2x = 60.$$
$$\text{y} \quad x = \frac{60}{2}$$
$$\text{esto es, } x = 30.$$

Y substituyendo x por su valor numérico en cualquiera de las ecuaciones de (A), hubiéramos obtenido el valor de z.

Así, substituyéndolo en la primera, tendremos:

$$30 + z = 46.$$
$$\text{Luego} \quad z = 46 - 30$$
$$\text{y} \quad z = 16.$$

2.º *sistema:*

$$\left.\begin{array}{l} 9x - 4z = 13 \\ 6x + 3z = 54 \end{array}\right\} (C)$$

Para eliminar cualquiera de las dos incógnitas, z, por ejemplo, a fin de que los coeficientes de esta incógnita sean iguales en ambas ecuaciones, multiplicaremos la primera ecuación por 3, que es el coeficiente que lleva dicha incógnita en la ecuación segunda, y luego multiplicaremos la ecuación segunda por 4, que es el coeficiente de la incógnita que se elimina, en la ecuación primera.

Practicadas estas multiplicaciones, el sistema propuesto se convierte en el siguiente:

$$\begin{array}{l} 27x - 12z = \ \ 39 \\ 24x + 12z = 216 \end{array}$$

Obsérvese que el coeficiente de la incógnita que se elimina es ya igual en ambas ecuaciones y que dicha incógnita lleva signo distinto, por lo que sumaremos, miembro a miembro, ambas ecuaciones, obteniendo:

$$27x - 12z + 24x + 12z = 39 + 216.$$

$$\text{O bien, } 27x + 24x = 39 + 216$$
$$51x = 255.$$

$$\text{Luego } x = \frac{255}{51}$$

$$\text{y } x = 5.$$

Para hallar, ahora, el valor de z, substituiremos, en cualquiera de las dos ecuaciones de (C), la segunda, por ejemplo, x por su valor numérico, y resultará:

$$6 \times 5 + 3z = 54.$$
$$\text{O bien, } 30 + 3z = 54$$
$$\text{y } 3z = 54 - 30$$
$$\text{por lo que } 3z = 24$$
$$z = \frac{24}{3}$$
$$\text{y } z = 8.$$

90. Observación importante. — De los tres métodos de eliminación que hemos explicado, el más sencillo, cuando las incógnitas sólo son dos, es el de *sumas* y *restas*, y cuando las incógnitas son tres o más, el más recomendable es el de *substitución.*

A fin de imponer bien al principiante en la aplicación de los métodos de eliminación de que nos hemos ocupado, presentaremos un sistema determinado de tres incógnitas, tratado por cada uno de los métodos de referencia.

Sea el sistema siguiente:

(A)

$$\begin{aligned} x + z + y &= a \\ 2x + 3z + 4y &= b \\ 3x + 4z + 6y &= c \end{aligned}$$

Resolución por el método de substitución

Desde luego se observa que la primera ecuación del sistema es la más sencilla y que, en esta ecuación, tan sencilla es una incógnita como las otras.

Despejando la x, tendremos:

$$x = a - z - y.$$

Substituyendo, en las demás ecuaciones, x por su valor hallado, se obtendrá el nuevo sistema (B):

(B)

$$\begin{aligned} 2(a - z - y) + 3z + 4y &= b \\ 3(a - z - y) + 4z + 6y &= c \end{aligned}$$

Verificando las operaciones indicadas en el sistema (B), se obtendrá (C).

(C)

$$\begin{aligned} 2a - 2z - 2y + 3z + 4y &= b \\ 3a - 3z - 3y + 4z + 6y &= c \end{aligned}$$

Simplificando lo posible el sistema (C), resultará (D).

(D)

$$\begin{aligned} 2a + z + 2y &= b \\ 3a + z + 3y &= c \end{aligned}$$

Verificando la trasposición en el sistema (D), para lo cual pasaremos al segundo miembro de cada ecuación los términos conocidos, dejando las incógnitas en el primero, resultará (E).

(E)

$$\begin{aligned} z + 2y &= b - 2a \\ z + 3y &= c - 3a. \end{aligned}$$

Hemos obtenido ya un nuevo sistema preparado, con una ecuación menos y una incógnita menos. Despejando, en el sistema (E), la z de la primera ecuación, resulta:

$$z = b - 2a - 2y.$$

Substituyendo, en la segunda ecuación de (E), z por su valor hallado, se obtiene (F):

(F)

$$b - 2a - 2y + 3y = c - 3a.$$

Tenemos ya el sistema propuesto reducido a una sola ecuación con una sola incógnita, que es y. Despejando ésta, tendremos:

$$-2y + 3y = c - 3a - b + 2a.$$

Y verificando la simplificación, resulta:

$$y = c - a - b.$$

Hemos obtenido, pues, el resultado siguiente para cada incógnita:

1.º, $x = a - z - y$; 2.º, $z = b - 2a - 2y$; 3.º, $y = c - a - b$.

Obsérvese, ahora, que el valor de y es numérico y, por lo mismo, completamente conocido. Substituyendo, pues, en el despejo 2.º ($z = b - 2a - 2y$), la y por su valor hallado, tendremos el valor numérico de z, esto es:

$$z = b - 2a - 2(c - a - b).$$

O bien, $z = b - 2a - 2c + 2a + 2b.$

O lo que es lo mismo: $z = 3b - 2c.$

Substituyendo, en el despejo 1.º ($x = a - z - y$), las incógnitas z e y por sus valores numéricos hallados, tendremos el valor numérico de x, esto es:

$$x = a - \big((3b - 2c) - (c - a - b)\big).$$

Y verificando la resta indicada en el segundo miembro, resulta

$$x = a - 3b + 2c - c + a + b.$$

O bien, $x = 2a - 2b + c.$

Por el método de igualación

Sistema propuesto:

(A)

$$\begin{aligned} x + z + y &= a \\ 2x + 3z + 4y &= b \\ 3x + 4z + 6y &= c \end{aligned}$$

Despejando la incógnita x en todas las ecuaciones, tendremos, respectivamente, (B) y (C).

(B)

$$\begin{aligned} x &= a - z - y \\ 2x &= b - 3z - 4y \\ 3x &= c - 4z - 6y \end{aligned}$$

(C)

$$x = a - z - y \qquad x = \frac{b - 3z - 4y}{2} \qquad x = \frac{c - 4z - 6y}{3}$$

Igualando, en el sistema (C), el segundo miembro de la primera ecuación con el segundo miembro de la segunda, y el segundo miembro de la primera ecuación con el segundo miembro de la tercera, tendremos un nuevo sistema (D), con una ecuación menos y una incógnita menos.

(D)

$$a - z - y = \frac{b - 3z - 4y}{2}$$

$$a - z - y = \frac{c - 4z - 6y.}{3}$$

Preparando, ahora, el sistema (D), quitando los denominadores, resulta (E):

(E)

$$\begin{aligned} 2a - 2z - 2y &= b - 3z - 4y \\ 3a - 3z - 3y &= c - 4z - 6y \end{aligned}$$

Despejando en ambas ecuaciones de (E) la incógnita z, se obtendrá, sucesivamente, (F) y (G):

(F)

$$\begin{aligned} -2z + 3z &= b - 4y - 2a + 2y \\ -3z + 4z &= c - 6y - 3a + 3y \end{aligned}$$

(G)

$$\begin{aligned} z &= b - 2y - 2a \\ z &= c - 3y - 3a \end{aligned}$$

Igualando, ahora, en el sistema (G), el segundo miembro de la primera ecuación con el segundo miembro de la segunda, resulta una sola ecuación con una sola incógnita, esto es:

$$b - 2y - 2a = c - 3y - 3a.$$

Despejando, en esta ecuación, la incógnita y, se obtiene:

$$-2y + 3y = c - 6a - b + 2a.$$

O bien, $y = c - a - b.$

Hemos obtenido, pues, el resultado siguiente para cada incógnita:

1.ª, $x = a - z - y$; 2.º, $z = b - 2y - 2a$ (G); 3.º $y = c - a - b$.

Obsérvese, ahora, que el valor de y es numérico y, por lo mismo, completamente conocido. Substituyendo, pues, en el despejo 2.º ($z = b - 2y - 2a$), la y por su valor hallado, tendremos el valor numérico de z, esto es:

$$z = b - 2\ (c - a - b) - 2a.$$

O bien, $z = b - 2c + 2a + 2b - 2a.$

Luego, $z = 3b - 2c.$

Substituyendo en el despejo 1.º ($x = a - z - y$), las incógnitas z e y por sus valores numéricos hallados, tendremos el valor numérico de x, esto es:

$$x = a - \big((3b - 2c) - (c - a - b)\big)$$

Y verificando la resta indicada en el segundo miembro, resulta:

$$x = a - 3b + 2c - c + a + b.$$

O bien, $x = 2a - 2b + c.$

Por el método de sumas y restas, o de reducción

Sistema propuesto: (A)

$$\begin{aligned} x + z + y &= a \\ 2x + 3z + 4y &= b \\ 3x + 4z + 6y &= c \end{aligned}$$

Proponiéndonos, por ejemplo, eliminar la incógnita x, de conformidad con la regla dada (89), multiplicaremos todos los términos de la primera ecuación por el producto de $2 \times 3 = 6$, puesto que 2 y 3 son los coeficientes de la incógnita x en las ecuaciones segunda y tercera; luego multiplicaremos todos los términos de la segunda ecuación por el producto de $1 \times 3 = 3$, puesto que 1 y 3 son los coeficientes de la incógnita x en las ecuaciones primera y tercera, y seguidamente multiplicaremos todos los términos de la tercera ecuación por el producto de $1 \times 2 = 2$, pues 1 y 2 son los coeficientes de x en las ecuaciones primera y segunda. Según esto, resultará (B):

(B)

$$\begin{aligned} 6x + 6z + 6y &= 6a \\ 6x + 9z + 12y &= 3b \\ 6x + 8z + 12y &= 2c. \end{aligned}$$

La ecuación más sencilla, según se observa en (A), es la primera del sistema. Compararemos esta ecuación con las otras dos, restando ordenadamente cada una de ellas de la primera, ya que la incógnita x tiene signos iguales en las ecuaciones 2.ª y 1.ª y en la 3.ª y 1.ª

Estos resultados serán (C):

(C)

$$\begin{aligned} (6x + 6z + 6y) - (6x + 9z + 12y) &= 6a - 3b \\ (6x + 6z + 6y) - (6x + 8z + 12y) &= 6a - 2c. \end{aligned}$$

Verificando estas restas indicadas, se obtiene, sucesivamente, (D):

(D)

$$\begin{aligned} 6x + 6z + 6y - 6x - 9z - 12y &= 6a - 3b \\ 6x + 6z + 6y - 6x - 8z - 12y &= 6a - 2c \end{aligned}$$

Simplificando estas dos ecuaciones, resulta (E):

(E)

$$\begin{aligned} -3z - 6y &= 6a - 3b \\ -2z - 6y &= 6a - 2c. \end{aligned}$$

Tenemos ya en (E) un nuevo sistema con una ecuación menos y una incógnita menos, en cuyo sistema aparece, casualmente, la incógnita y con igual coeficiente en ambas ecuaciones, por lo que podríamos, desde luego, eliminarla, restando la segunda ecuación de la primera. Mas, para que pueda comprenderse mejor la aplicación del método, eliminaremos la z, multiplicando todos los términos de la primera ecuación por -2, y los de la segunda por -3, pues 2 y 3 son, respectivamente, los coeficientes de z en las ecuaciones segunda y primera. Los resultados serán (F):

(F)

$$6z + 12y = -12a + 6b$$
$$6z + 18y = -18a + 6c.$$

Restando, ordenadamente, la segunda ecuación de la primera, tendremos (G):

(G)

$$(6z + 12y) - (6z + 18y) = (-12a + 6b) - (-18a + 6c).$$

Verificando las restas indicadas en ambos miembros, y simplificando los resultados obtenidos, será (H):

(H)

$$6z + 12y - 6z - 18y = -12a + 6b + 18a - 6c$$
$$-6y = 6a + 6b - 6c.$$

Tenemos ya una sola ecuación con una sola incógnita, que es y.
Multiplicando ambos miembros por -1, resultará:

$$6y = -6a - 6b + 6c.$$

Y despejando la y, tendremos:

$$y = \frac{-6a - 6b + 6c}{6}.$$

Y simplificando el quebrado del segundo miembro, tenemos el valor numérico de y, esto es:

$$y = -a - b + c.$$

O lo que es lo mismo, $\quad y = c - a - b.$

Substituyendo, ahora, en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema (E) en la segunda, por ejemplo, la y por su valor numérico hallado, tendremos el valor numérico de z, esto es:

$$-2z - 6(c - a - b) = 6a - 2c.$$

Verificando las operaciones indicadas en el primer miembro,

$$-2z - 6c + 6a + 6b = 6a - 2c.$$

Despejando la z, resultará $-2z = 6a - 2c + 6c - 6a - 6b.$

O bien, $\quad -2z = 4c - 6b.$

Multiplicando por -1, resulta: $2z = -4c + 6b.$

Y por lo mismo, $\quad z = \dfrac{-4c + 6b}{2}.$

Simplificando el quebrado, $\quad z = -2c + 3b.$

O bien, $\quad z = 3b - 2c.$

Substituyendo, finalmente, en la primera ecuación del sistema (A) z e y por sus valores numéricos, hallaremos el valor numérico de x, esto es:

$$x + (3b - 2c) + (c - a - b) = a.$$

Verificando la suma del primer miembro resulta:

$$x + 3b - 2c + c - a - b = a.$$

Despejando la x, se obtiene $x = a - 3b + 2c - c + a + b.$

O bien, $\quad x = 2a - 2b + c.$

Observación importante.—Fíjese bien el lector como, en todos los métodos, las incógnitas han tenido iguales valores, esto es,

$$x = 2a - 2b + c$$
$$z = 3b - 2c$$
$$y = c - a - b.$$

Soluciones razonadas de algunos ejemplos

1. *Hállense dos números cuya suma sea* 127 *y su diferencia*, 63.

Solución por el método de *sumas* y *restas* o de *reducción* (89).
Sean: número mayor, x; número menor, z.
Tendremos, evidentemente, las dos siguientes ecuaciones:

$$x + z = 127 \quad \text{(A)}$$
$$x - z = 63 \quad \text{(B)}.$$

Las dos incógnitas aparecen con iguales coeficientes en ambas ecuaciones, pues tienen la unidad. Si eliminamos la x, como lleva signo igual en ambas ecuaciones, debemos restar, miembro a miembro, la segunda ecuación de la primera (89). Luego tendremos:

$$x + z - (x - z) = 127 - 63.$$

Verificando estas restas, $x + z - x + z = 64$.

O bien, $2z = 64$.

Luego $z = \frac{64}{2}$

y $z = 32$, número menor.

Substituyendo, en cualquiera de las ecuaciones (A) o (B), en la primera, por ejemplo, z por su valor numérico hallado, tendremos el valor numérico de x, esto es:

$$x + 32 = 127.$$

Despejando la x, $x = 127 - 32$

y $x = 95$, número mayor.

Si hubiésemos eliminado la z, como ésta tiene signos distintos, pues en (A) lo tiene positivo y en (B) negativo, hubiéramos sumado, miembro a miembro, ambas ecuaciones (89), así:

$$x + z + x - z = 127 + 63.$$

O bien, $2x = 190$.

Luego $x = \frac{190}{2}$

y $x = 95$, número mayor.

Substituyendo, en cualquiera de las dos ecuaciones (A) o (B), en la segunda por ejemplo, x por su valor numérico, hubiéramos obtenido el valor numérico de z, así:

$$95 - z = 63$$

y despejando z, $95 - 63 = z$.

O bien, $z = 32$.

Comprobación:

(A) $95 + 32 = 127$
(B) $95 - 32 = 63$
(A) $127 = 127$
(B) $63 = 63$.

2. *Un comerciante en tejidos compró 45 metros de yute superior y 39 metros de percal por 348 pesetas; otra vez, compró 25 metros del mismo yute y 10 metros del mismo percal por 170 pesetas. Hállese el precio de 1 metro de yute y el de 1 metro de percal.*

Solución por el método de *sumas* y *restas* o de *reducción* (**89**). Si representamos por x el valor del metro de yute, y por z el del metro de percal, tendremos las dos siguientes ecuaciones:

$$45x + 39z = 348 \quad (A)$$
$$25x + 10z = 170 \quad (B).$$

Como todos los términos de la primera ecuación son divisibles por 3 y los de la 2.ª por 5, simplificando ambas ecuaciones (**86**.—5.ª), se obtiene el sistema siguiente:

$$15x + 13z = 116 \quad (C)$$
$$5x + 2z = 34 \quad (D).$$

Eliminando la z, por ser la incógnita cuyos coeficientes son menores, multiplicaremos todos los términos de la primera ecuación (C) por 2 y los de la segunda (D) por 13, por ser 2 y 13, respectivamente, los coeficientes de z en (D) y (C), y obtendremos el siguiente resultado:

$$30x + 26z = 232$$
$$65x + 26z = 442.$$

Teniendo z igual coeficiente en estas dos últimas ecuaciones y signo igual en cada una de ellas, restaremos, miembro a miembro, la segunda ecuación de la primera (**89**), y resultará:

$$(30x + 26z) - (65x + 26z) = 232 - 442.$$

Verificando las restas indicadas en ambos miembros,

$$30x + 26z - 65x - 26z = -210.$$

Y reduciendo los términos semejantes del primer miembro, se obtendrá:

$$-35x = -210.$$

Multiplicando esta ecuación por -1, para cambiar el signo,

$$35x = 210.$$

$$\text{Luego } x = \frac{210}{35}$$

$$\text{y } x = 6 \text{ ptas., valor de 1 m. de yute.}$$

Substituyendo, ahora, en cualquiera de las ecuaciones (A), (B), (C) o (D), en (D), por ejemplo, por ser la más sencilla, x por su valor numérico, 6, hallaremos el valor numérico de z, así:

$$5 \times 6 + 2z = 34$$

$$\text{y despejando } z,\ 2z = 34 - 30$$

$$z = \frac{4}{2}$$

$$z = 2 \text{ ptas., valor de 1 m. de percal.}$$

Comprobación:

$$(A) \quad 45 \times 6 + 39 \times 2 = 348$$
$$(B) \quad 25 \times 6 + 10 \times 2 = 170$$
$$(A) \quad 348 = 348$$
$$(B) \quad 170 = 170.$$

3. *Juan y Pedro son dos comerciantes; el primero debe pagar una letra de 4350 pesetas, y el segundo ha de hacer efectivo el montante de una factura que importa 4000 pesetas. Si Pedro prestase a Juan la décima parte del efectivo que tiene, Juan reuniría el valor de la letra, y si Juan entre-*

gase a Pedro la octava parte de lo que reúne, Pedro tendría el valor de la factura que debe satisfacer. ¿Qué cantidad posee cada uno?

Solución por el método de *sumas* y *restas o de reducción* (89). Llamemos x al dinero que tiene Juan, y z, al dinero que reúne Pedro. Es evidente que cada uno, con lo que posee y lo que recibirá, podrá pagar su deuda. Tenemos, pues, las dos siguientes ecuaciones:

$$x + \frac{z}{10} = 4350 \quad (A)$$

$$z + \frac{x}{8} = 4000 \quad (B).$$

Ante todo, prepararemos el sistema quitando los denominadores (86. — 4.ª), y resultará:

$$10x + z = 43500 \quad (C)$$
$$8z + x = 32000 \quad (D).$$

Ambas incógnitas son igualmente sencillas; eliminaremos la x multiplicando todos los términos de la primera ecuación por 1, que es el coeficiente de x en la segunda ecuación, y los de la segunda ecuación, por 10, coeficiente de x en la ecuación primera (89), y resultará:

$$10\,x + z = 43500$$
$$80z + 10x = 320000.$$

La incógnita x tiene ya igual coeficiente en ambas ecuaciones, y como los signos que lleva son iguales, restaremos la segunda ecuación de la primera (89), y se obtendrá:

$$(10x + z) - (80z + 10x) = 43500 - 320000.$$

Verificando estas substracciones,

$$10x + z - 80z - 10x = 43500 - 320000$$

o bien, $-79z = -276500.$

Y cambiando el signo, $79z = 276500.$

Luego $z = \dfrac{276500}{79}$

y $z = 3500$ ptas., dinero que tiene Pedro.

Substituyendo, ahora, en cualquiera de las ecuaciones (A), (B), (C) o (D), en (C), por ejemplo, z por su valor numérico hallado, tendremos el valor numérico de x, esto es:

$$10x + 3500 = 43500.$$

Despejando la x, resultará $10 = 43500 - 3500$

o bien, $10x = 40000.$

Luego $x = \dfrac{40000}{10}$

y $x = 4000$ ptas., dinero que tiene Juan.

Comprobación:

$$(A) \quad 4000 + \frac{3500}{10} = 4350$$

$$(B) \quad 3500 + \frac{4000}{8} = 4000$$

$$(A) \quad 4350 = 4350$$
$$(B) \quad 4000 = 4000$$

4. *Enrique dice a Joaquín: «Si me das 100 bolas, tendré tantas como tú tienes ahora.» Y Joaquín le contesta: «Si tú me dieras las bolas que me pides, yo tendría dos veces más que no te quedarían.» ¿Cuántas bolas tiene cada uno?*

Solución por el método de *igualación* (88). Representemos por x el número de bolas de Enrique, y por z, el de las de Joaquín. Si éste diese 100 bolas a Enrique, éste tendría $x + 100$, número de bolas igual a z, que es las que tiene ahora Joaquín. Si Enrique diese a Joaquín 100 bolas, Joaquín tendría $z + 100$, y a Enrique le quedarían $x - 100$, siendo entonces las bolas de Enrique la mitad de las que Joaquín tendría, o bien, Joaquín tendría duplo número de bolas que Enrique. Tenemos, pues, las dos ecuaciones siguientes:

$$x + 100 = z \qquad (A)$$
$$z + 100 = 2\,(x - 100). \qquad (B)$$

Verificando la operación indicada en el segundo miembro de la ecuación segunda, resultará:

$$x + 100 = z \qquad (A)$$
$$z + 100 = 2x - 200. \qquad (C)$$

Eliminando la incógnita z, por ser la más sencilla en ambas ecuaciones, tendremos:

$$-z = -x - 100 \qquad (D)$$
$$z = 2x - 200 - 100. \qquad (E)$$

Multiplicando los dos miembros de la primera ecuación por -1, obtendremos:

$$z = x + 100 \qquad (F)$$
$$z = 2x - 200 - 100. \qquad (E)$$

Despejada ya la z en ambas ecuaciones, igualaremos el segundo miembro de la 1.ª igualdad con el segundo miembro de la igualdad 2.ª, y obtendremos una sola ecuación con una sola incógnita, esto es:

$$x + 100 = 2x - 200 - 100.$$

Y despejando la x, hallaremos su valor numérico, esto es:

$$100 + 200 + 100 = 2x - x$$
$$\text{o bien,} \quad 400 = x.$$

Enrique, tiene, pues, 400 bolas.

Substituyendo, ahora, en cualquiera de las ecuaciones (A), (B), (C), (E), o (F), en (A) por ejemplo, que es la más sencilla, x por su valor numérico, hallaremos el valor numérico de z, esto es:

$$(A) \quad 400 + 100 = z$$
$$\text{o bien,} \quad 500 = z.$$

Joaquín, tenía, por tanto, 500 bolas.

Comprobación:

$$(A) \quad 400 + 100 = 500$$
$$(B) \quad 500 + 100 = 2\,(400 - 100)$$
$$(A) \quad 500 = 500$$
$$(B) \quad 500 + 100 = 800 - 200$$
$$600 = 600.$$

5. *Repártanse* 800 *pesetas entre dos personas, de manera que la cuarta parte de lo que reciba la primera, disminuído en la sexta parte de lo que cobre la segunda, sea igual a* 75 *pesetas.*

Solución por el método de *igualación* (88).

Representemos por x la parte que recibirá la persona primera y, por z, lo que recibirá la segunda. La parte de la 1.ª más la de la 2.ª será, evidentemente, igual a 800 ptas. La cuarta parte del dinero de la primera, menos la sexta parte del de la segunda, será igual a 75 ptas. Luego tenemos las dos siguientes ecuaciones:

$$x + z = 800 \quad (A)$$
$$\frac{x}{4} - \frac{z}{6} = 75. \quad (B)$$

Prepararemos, ante todo, el sistema quitando los denominadores de (B), y resultará el sistema siguiente:

$$x + z = 800 \quad (A)$$
$$6x - 4z = 1800. \quad (C)$$

Acabemos de preparar el sistema simplificando la ecuación (C), dividiendo por 2 todos sus términos, y se obtendrá el nuevo sistema:

$$x + z = 800 \quad (A)$$
$$3x - 2z = 900. \quad (D)$$

Despejemos la x en ambas ecuaciones del sistema (A) (D), y resultará:

$$x = 800 - z \quad (E)$$
$$3x = 900 + 2z. \quad (F)$$

O bien: $x = 800 - z$ (E)

$$x = \frac{900 + 2z}{3}. \quad (G)$$

Igualando los segundos miembros del nuevo sistema (E) (G), resultará una sola ecuación con una sola incógnita, esto es:

$$800 - z = \frac{900 + 2z}{3}.$$

Despejando la z, resultará:

$$2400 - 3z = 900 + 2z$$
$$2400 - 900 = 2z + 3z$$
$$1500 = 5z$$
$$z = \frac{1500}{5}$$
$$z = 300.$$

La segunda persona recibirá, pues, 300 ptas.

Substituyendo, ahora, en cualquiera de las ecuaciones (A), (B), (C), (D), (E), (F) o (G), en (E), por ejemplo, por ser la más sencilla, z por su valor numérico hallado, tendremos el valor numérico de x, esto es:

$$(E) \quad x = 800 - 300.$$

Luego: $x = 500$.

La primera persona recibirá, pues, 500 ptas.

Comprobación:

$$(A) \quad 500 + 300 = 800$$
$$(B) \quad \frac{500}{4} - \frac{300}{6} = 75$$
$$(A) \quad 800 = 800$$
$$(B) \quad 75 = 75.$$

6. *Un número está formado por dos cifras cuyos valores absolutos suman* 10. *Invirtiendo el orden de sus cifras, resulta un número cinco veces mayor que el primero menos* 4. *¿Qué número es éste?*

Solución por el método de *substitución* (**87**).

Representemos las cifras de las decenas del número que se desea averiguar por x, y por z, la cifra de sus unidades.

Sabemos, en primer lugar, que $x + z$ suman 10.

El número verdadero será, reduciendo sus decenas a unidades, $10x + z$.
Y el número invertido, $10z + x$.
Pero el número invertido es 5 veces mayor que el verdadero menos 4. Luego resultan las dos siguientes ecuaciones:

$$x + z = 10 \qquad (A)$$
$$10z + x = 5(10x + z) - 4. \quad (B)$$

Verificando las operaciones indicadas en el segundo miembro de (B), resulta el sistema preparado:

$$x + z = 10 \qquad (A)$$
$$10z + x = 50x + 5z - 4. \quad (C)$$

Despejando la x de (A), en el sistema (A) (C), resulta:

$$x = 10 - z. \qquad (D)$$

Substituyendo, en (C), x por su valor hallado, obtendremos una sola ecuación con una sola incógnita, esto es:

$$10z + 10 - z = 50(10 - z) + 5z - 4.$$

Verificando la operación indicada, se obtiene:

$$10z + 10 - z = 500 - 50z + 5z - 4.$$

Despejando z, resulta:

$$10z - z + 50z - 5z = 500 - 4 - 10.$$

Y simplificando, $54z = 486$.

$$\text{Luego} \quad z = \frac{486}{54} = 9.$$

La cifra de las unidades del número pedido es, pues, 9.
Substituyendo, ahora, en (A) o en (D), en (D) por ejemplo, z por su valor hallado, tendremos el valor numérico de x, esto es:

$$(D) \quad x = 10 - 9$$
$$x = 1.$$

La cifra de las decenas es 1, y el número verdadero es, pues, 19.

Comprobación:

$$(A) \qquad 1 + 9 = 10$$
$$(B) \quad 10 \times 9 + 1 = 50 + 5 \times 9 - 4$$
$$(A) \qquad 10 = 10$$
$$(B) \qquad 91 = 91.$$

7. *El autor de este libro tiene dos hijas y un hijo. En* 1896, *las edades de Angelita, la hija mayor, y Catalina, la menor, componían* 32 *años; las de Catalina y José María, el hijo, sumaban* 20 *años, y si a los años de la hija mayor se añadían los del hijo, resultaban* 24. *¿Qué edad tenía cada hijo en* 1896?

Solución por el método de *substitución* (87).
Representemos los años de Angelita por x; los de Catalina, por z, y los de José María, por y.
Desde luego se observan las tres ecuaciones siguientes:

$$x + z = 32 \qquad (A)$$
$$z + y = 20 \qquad (B)$$
$$x + y = 24. \qquad (C)$$

Eliminando la x de (A), tendremos:

$$x = 32 - z. \ (D)$$

Substituyendo, en (C), x por su valor hallado, el sistema (A), (B), (C), queda reducido al siguiente, con una ecuación menos y una incógnita menos:

$$z + y = 20 \qquad (B)$$
$$32 - z + y = 24. \qquad (E)$$

Eliminando, ahora, en el sistema (B) (E) la incógnita z, de (B), por ser la más sencilla, resultará: $z = 20 - y$ (F).

Substituyendo, en la ecuación (E), z por su valor hallado, el sistema primero queda reducido a una sola ecuación con una sola incógnita, esto es:

$$32 - (20 - y) + y = 24.$$

Y despejando y, se obtendrá:

$$32 - 20 + y + y = 24$$
$$2y = 24 - 32 + 20$$
$$2\,y = \frac{12}{2}$$
$$y = 6.$$

José María tenía, pues, 6 años.

Substituyendo, ahora, en cualquiera de las ecuaciones (B) o (F), en la (F) por ejemplo, y por su valor numérico, hallaremos el valor numérico de z, esto es:

$$\text{(F)}\quad z = 20 - 6.$$
$$\text{Luego}\quad z = 14.$$

Catalina tenía, por tanto, 14 años.

Y substituyendo, finalmente, en cualquiera de las ecuaciones (A) o (C) una incógnita, z o y, por su valor hallado, tendremos el valor numérico de x.

Substituyéndolo en (A), tendremos:

$$x + 14 = 32.$$
$$\text{Luego}\quad x = 32 - 14$$
$$\text{o bien,}\quad x = 18.$$

Angelita tenía, pues, 18 años.

Comprobación:

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} & 18 + 14 = 32 \\ \text{(B)} & 14 + \ \ 6 = 20 \\ \text{(C)} & 18 + \ \ 6 = 24 \\ \text{(A)} & \qquad 32 = 32 \\ \text{(B)} & \qquad 20 = 20 \\ \text{(C)} & \qquad 24 = 24. \end{array}$$

8. *Tres estudiantes de ciencias naturales, Pedro, Juan y Antonio, han convenido adquirir una valiosa obra de consulta que se vende en 600 pesetas. A Pedro, para adquirirla por sí solo, le faltan los $^2/_3$ del dinero de Juan; a éste, para hacer lo propio, le faltan los $^3/_4$ del dinero de Pedro, y a Antonio le faltaría $^1/_3$ del dinero que tiene Juan. ¿Qué cantidad tiene cada uno?*

Solución por el método de *substitución* (**87**).

Llamemos x al dinero que tiene Pedro; z, al de Juan, e y, al de Antonio. Se ofrecen, pues, las tres ecuaciones siguientes:

$$x + \frac{2\,z}{3} = 600 \qquad \text{(A)}$$

$$z + \frac{3x}{4} = 600 \qquad \text{(B)}$$

$$y + \frac{z}{3} = 600. \qquad \text{(C)}$$

Ante todo, preparemos el sistema quitando los denominadores:

$$3x + 2z = 1800 \quad \text{(D)}$$
$$4z + 3x = 2400 \quad \text{(E)}$$
$$3y + \ z = 1800. \quad \text{(F)}$$

Eliminemos la incógnita z de (F) por ser la más sencilla, y resultará:

$$z = 1800 - 3y. \quad (G)$$

Substituyendo el valor de z en las ecuaciones (D) y (E) respectivamente, obtendremos el siguiente nuevo sistema, con una ecuación menos y una incógnita menos:

$$3x + 2\,(1800 - 3y) = 1800 \quad (H)$$
$$4\,(1800 - 3y) + 3x = 2400. \quad (I)$$

Preparemos el sistema (H) (I) verificando las operaciones indicadas en los primeros miembros de sus ecuaciones, y resultará:

$$3x + 3600 - 6y = 1800 \quad (J)$$
$$7200 - 12y + 3x = 2400. \quad (K)$$

Simplifiquemos el nuevo sistema (J) (K), dividiendo por 3 todos los términos de ambas ecuaciones, y obtendremos:

$$x + 1200 - 2y = 600 \quad (L)$$
$$2400 - 4y + x = 800. \quad (M)$$

Eliminando la x de (L), se tendrá:

$$x = 600 - 1200 + 2y. \quad (N)$$

Y substituyendo en la ecuación (M), x por su valor hallado, el sistema primitivo quedará reducido a una sola ecuación con una sola incógnita, esto es:

$$2400 - 4y + 600 - 1200 + 2y = 800. \quad (O)$$

Despejando la y de la ecuación (O), resultará:

$$-4y + 2y = 800 - 2400 - 600 + 1200$$
$$-2y = -1000$$
$$2y = 1000$$
$$y = \frac{1000}{2}$$
$$y = 500.$$

Antonio tenía, pues, 500 pesetas.

Substituyendo, ahora, en las ecuaciones (F) o (G), en la segunda, por ejemplo, y por su valor numérico hallado, tendremos el valor numérico de z, esto es:

$$(G) \quad z = 1800 - 3 \times 500$$
$$z = 300.$$

Juan tenía, por tanto, 300 pesetas.

Substituyendo, finalmente, en (D), (E), (J), (K), (L) o (M), en (D), por ejemplo, una incógnita, z o y, por su valor numérico hallado, y resolviendo la ecuación, tendremos el valor numérico de x, esto es:

$$(D) \quad 3x + 2 \times 300 = 1800$$
$$3x = 1800 - 600$$
$$x = \frac{1200}{3}$$
$$x = 400.$$

Pedro tenía, pues, 400 pesetas.

Comprobación:

$$(A) \quad 400 + \frac{2 \times 300}{3} = 600$$

$$(B) \quad 300 + \frac{3 \times 400}{4} = 600$$

$$(C) \quad 500 + \frac{300}{3} = 600$$

$$(A) \quad 600 = 600$$
$$(B) \quad 600 = 600$$
$$(C) \quad 600 = 600.$$

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

91. Definición. —Ya hemos dicho (**68** *bis*) que son de segundo grado aquellas ecuaciones en las cuales la incógnita aparece elevada a la segunda potencia. V. g.: $x^2 + 4x = 21$.

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita solamente, pueden tener tres clases de términos, a saber: términos en que entre la incógnita elevada a la segunda potencia, términos en que entre la incógnita elevada a la primera potencia y términos conocidos.

92. Su división. —Se dividen en *mixtas* o *completas* y *puras* o *incompletas.*

Son mixtas o completas, cuando constan de las tres clases de términos antes mencionados. V. g.: $x^2 - 5 + x + 4x = 462$.

Son puras o incompletas cuando les falta el término que tiene la incógnita elevada a la primera potencia.

Son puras las dos ecuaciones siguientes:

1.ª $5x^2 = 14$.

2.ª $8x^2 - x^2 + 25 = 120$.

93. Preparación de las ecuaciones de segundo grado.—Antes de resolver una de estas ecuaciones, debe *prepararse* quitando los denominadores, haciendo la trasposición y reduciendo los términos semejantes, tal como se practica con las de primer grado.

1.º Las completas, después de preparadas, se reducen a tres términos: *uno, con la incógnita elevada al cuadrado; otro, con la incógnita elevada a la primera potencia, y una cantidad conocida,* en esta forma:

$$a\,x^2 + b\,x - c = 0.$$

2.º Las incompletas, después de preparadas, se reducen a dos términos: *uno con la segunda potencia de la incógnita y otro conocido,* en esta forma u otra parecida:

$$a\,x^2 = b.$$

94. Resolución de las incompletas. — *Para resolver una ecuación incompleta de segundo grado, después de preparada, se divide el segundo miembro por el coeficiente de la incógnita y se extrae la raíz cuadrada del cociente.*

En efecto, en la ecuación incompleta $ax^2 = b$, tenemos que, dividiendo ambos miembros por a, resulta

$$x^2 = \frac{b}{a}.$$

Y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, se obtendrá:

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Fórmula cuya traducción es la regla dada anteriormente (**94**).

EJEMPLO: *Resuélvase la ecuación incompleta* $\frac{3x^2}{5} + \frac{x^2}{2} - 6 = 534 - \frac{x^2}{4}$.

Prepararemos la ecuación empezando por quitar los denominadores, y resultará;

$$24x^2 + 20x^2 - 240 = 21360 - 10x^2.$$

Simplificaremos esta ecuación partiendo por 2 todos sus términos, y se obtendrá;

$$12x^2 + 10x^2 - 120 = 10680 - 5x^2.$$

Haciendo la trasposición,

$$12x^2 + 10x^2 + 5x^2 = 10680 + 120.$$

Reduciendo los términos, se tendrá la ecuación debidamente preparada, y resultará:

$$27x^2 = 10800.$$

$$\text{Luego} \quad x^2 = \frac{10800}{27}$$

$$\text{o bien, } x^2 = 400$$

$$\text{y } x = \sqrt{400}$$

$$\text{luego } x = 20.$$

Conforme a la regla dada anteriormente (94).

95. Resolución de las ecuaciones completas. — En las ecuaciones completas de segundo grado, *la incógnita es igual a la mitad del coeficiente del segundo término cambiado el signo, más o menos la raíz cuadrada del cuadrado de dicha mitad, sumado con el tercer término cambiado el signo.*

En efecto, sea la ecuación $x^2 + ax - c = 0.$ (A)
Trasponiendo el término conocido, resultará:

$$x^2 + ax = c. \quad \text{(B)}$$

El primer miembro de esta ecuación lo constituyen los dos primeros términos del cuadrado de $x + \frac{a}{2}$, pues $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ (53. — *Ejemplo* 1.º)

Si a los dos miembros de la ecuación (B) añadimos $\frac{a^2}{4}$, resultará la siguiente:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + c. \quad \text{(C)}$$

Pero el primer miembro de esta nueva ecuación hemos dicho que es igual a $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$; luego, substituyendo el primer miembro de la ecuación (C) por su igual, tendremos:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + c. \quad \text{(D)}$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de esta última ecuación, resultará:

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + c} \quad \text{(E)}$$

y despejando la x de (E)

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + c}, \quad \text{(F)}$$

conforme a la regla dada (95).

96. Observaciones importantes. — 1.ª Por si se dudare del por qué se da a la cantidad radical el signo de ambigüedad $\pm$ y no el positivo, como lleva en la penúltima ecuación, téngase presente que todo número *positivo* tiene dos raíces iguales y de signos distintos (58). Así, la raíz cuadrada de 16, por ejemplo, es $+4$ y -4; pues $+4 \times +4 = +16$, y $-4 \times -4 = +16$ (22).

Los números *negativos* no tienen raíz cuadrada, porque, como hemos dicho, cualquier número, positivo o negativo, multiplicado por sí mismo, siempre da un resultado positivo. Si todo número positivo tiene dos raíces iguales y de signos distintos, claro está que la $\sqrt{\frac{a^2}{4}+c}$ satisfará las condiciones de la ecuación en *más* o en *menos*, debiendo añadirse en el primer caso, y restarse en el segundo.

2.ª Para aplicar la fórmula (F), traducida en la regla que hemos dado (**95**), no debe olvidarse que ante todo, se ha de preparar la ecuación reduciéndola a los tres términos que únicamente debe tener (**93**), procurando que al cuadrado de la incógnita no le afecte coeficiente ni denominador alguno. Si afectase a la incógnita un coeficiente, se le quita éste y se dividen por dicho coeficiente todos los demás términos de la ecuación. Si afectase a la incógnita un denominador, se quita éste multiplicando, como ya sabemos, por el mismo, todos los demás términos de la ecuación, de modo que, cuando ésta se halla preparada, su primer término siempre es x^2.

Si el cuadrado de la incógnita llevase signo negativo, se convierte en positivo, cambiando, al efecto, el signo a todos los demás términos de la ecuación, lo que equivale a multiplicarla por -1.

EJEMPLO: *Hállese el valor de la incógnita en la ecuación siguiente:*

$$\frac{2x^2}{4}+\frac{x}{2}-3=817.$$

Empezaremos por preparar la ecuación quitando los denominadores:

$$4x^2+4x-24=6536.$$

Partiendo todos los términos de la ecuación por 4, para que desaparezca el coeficiente 4 del cuadrado de la incógnita, resultará:

$$x^2+x-6=1634.$$

Pasando 1634 al primer miembro, obtendremos:

$$x^2+x-6-1634=0$$

$$\text{o bien,}\quad x^2+x-1640=0.$$

Preparada ya la ecuación (**93** — 1.º), aplicaremos la regla general (**95**), y resultará:

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1^2}{2^2}+1640}.$$

Verificando la suma indicada en la cantidad radical, se obtiene:

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{6561}{4}}.$$

La raíz cuadrada de $\frac{6561}{4}$ es $\frac{81}{2}=40+\frac{1}{2}$, y si de $40+\frac{1}{2}$ quitamos $\frac{1}{2}$, como la ecuación expresa, resultará:

$$x=40.$$

Soluciones razonadas de algunos ejemplos

1. *El área de una esfera es* 113'0976 *metros cuadrados. ¿Qué longitud tiene el radio de la misma?*

El área de la esfera es $S=4\,\pi\,r^2$ (*Apéndice.* — **55**).

Substituyendo, en la ecuación anterior, las letras que tienen valores numéricos conocidos por estos valores, resultará la siguiente ecuación incompleta de segundo grado:

$$3'1416\times4\times r^2=113'0976$$

$$\text{o bien,}\quad 12'5664\,r^2=113'0976.$$

Y despejando r^2, $$r^2 = \frac{113'0976}{12'5664}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros,

$$r = \sqrt{\frac{113'0976}{12'5664}}$$

$$\text{o bien } r = \sqrt{9}$$
$$\text{y} \quad r = 3.$$

La longitud del radio es 3 metros.

Comprobación:

$$3'1416 \times 4 \times 3^2 = 113'0976$$
$$113'0976 = 113'0976.$$

2. *Si de las dos quintas partes del cuadrado de un número se quitan 25 unidades, resulta 335. Hállese dicho número.*

Si representamos por x el número en cuestión, tendremos la siguiente ecuación incompleta de segundo grado:

$$\frac{2x^2}{5} - 25 = 335.$$

Quitando el denominador, $2x^2 - 125 = 1675$

Pasando 125 al 2.º miembro, $2x^2 = 1675 + 125$

$$2x^2 = 1800$$
$$x^2 = \frac{1800}{2}$$
$$x^2 = 900$$
$$x = \sqrt{900}$$
$$x = 30.$$

Comprobación:

$$\frac{2 \times 30^2}{5} - 25 = 335$$
$$335 = 335.$$

3. *Si el cuadrado de las pesetas que tiene Juan se aumentase en el duplo de su dinero, resultarían 80 pesetas. ¿Cuántas pesetas tiene?*

Llamemos x a las pesetas que tiene, y resultará la siguiente ecuación completa de segundo grado:

$$x^2 + 2x = 80.$$

Pasando 80 al primer miembro, resultará:

$$x^2 + 2x - 80 = 0.$$

Preparada ya la ecuación, apliquemos la regla general (**95**):

$$x = -1 \pm \sqrt{1^2 + 80}.$$

Verificando la suma indicada en la cantidad radical, tendremos:

$$x = -1 \pm \sqrt{81}$$
$$x = -1 + 9$$
$$x = 8.$$

Comprobación:

$$8^2 + 2 \times 8 = 80$$
$$64 + 16 = 80$$
$$80 = 80.$$

4. *Descompóngase el número 20 en dos partes, tales que su producto sea 96.*

Si llamamos x al número que forma la parte mayor, el de la parte menor será $20 - x$; luego la ecuación será:

$$x \times (20 - x) = 96$$
$$20x - x^2 = 96$$
$$\text{o bien,} \quad -x^2 + 20x = 96.$$

Cambiando los signos para darlo positivo a la incógnita,

$$x^2 - 20x = -96$$
$$\text{y también,} \quad x^2 - 20x + 96 = 0.$$

Preparada la ecuación, apliquemos la fórmula general (**95**).

$$x = 10 \pm \sqrt{10^2 - 96}$$
$$\text{Luego,} \quad x = 10 \pm \sqrt{4}$$
$$\text{O bien,} \quad x = 10 \pm 2$$
$$\text{y} \quad x = 10 + 2$$
$$x = 12.$$

La raíz cuadrada de 4 satisface al enunciado del problema en más, y por tanto, el número mayor será 12, siendo el menor $20 - 12 = 8$.

Comprobación:

$$12 \times (20 - 12) = 96$$
$$12 \times 8 = 96$$
$$96 = 96.$$

5. *El área de un campo de forma rectangular es 24 decámetros cuadrados, y se sabe que mide 20 metros más de largo que de ancho. Determínense las dos referidas dimensiones del campo mencionado.*

Si representamos por x el número de metros de ancho, los metros de largo serán $x + 20$, y como el área de un rectángulo se obtiene multiplicando lo largo por lo ancho, es evidente que la ecuación será:

$$x\,(x + 20) = 2400$$
$$x^2 + 20x = 2400.$$

Y pasando 2400 al primer miembro, la ecuación quedará preparada:

$$x^2 + 20x - 2400 = 0.$$

Aplicando la fórmula general,

$$x = -10 \pm \sqrt{10^2 + 2400}$$
$$x = -10 \pm \sqrt{2500}$$
$$x = -10 \pm 50$$
$$x = 40.$$

La raíz cuadrada de 2500, que es 50, satisface en más al enunciado del problema, y por tanto las dimensiones del campo son: ancho, 40 metros; largo, $40 + 20 = 60$ metros.

Comprobación:

$$40 \times (40 + 20) = 2400$$
$$40 \times 60 = 2400$$
$$2400 = 2400.$$

Coordinaciones, variaciones o arreglos

97. Definición y división. — Se da el nombre de coordinaciones, variaciones o arreglos *a los diferentes grupos que pueden formarse con un determinado número de objetos, tomados dos a dos, tres a tres, etc., de modo que cada objeto entre una sola vez en cada grupo; que todos los grupos tengan el mismo número de objetos, y que se distingan cada dos grupos, por lo menos, en un objeto, o en el orden en que los objetos estén colocados.*

Las coordinaciones se dividen en *monarias*, *binarias*, *ternarias*, *cuaternarias*, *etc.*, según que cada grupo tenga uno, dos, tres, cuatro, etcétera, objetos.

Base de la coordinación es el número de objetos de que se dispone para combinar.

Orden de la coordinación es el número de objetos de que consta cada grupo.

Llámase *número coordinativo* de base m y orden n el número de coordinaciones que se pueden formar con m objetos entrando n en cada grupo, y se indica así: V_m^n.

98. En las coordinaciones, hay dos problemas generales que resolver:

1.º *Formar las coordinaciones monarias, binarias, ternarias, cuaternarias, etc., de un determinado número de objetos.*

2.º *Calcular las coordinaciones que pueden formarse, conociendo el número de objetos y el orden de la coordinación.*

99. Investigación de la fórmula general para la resolución del problema primero.— Sean a, b, c, d, los signos representativos de cuatro objetos distintos. Estos cuatro objetos forman, evidentemente, todas las coordinaciones monarias posibles. Si al lado de a se colocan, sucesivamente, una a una, todas las demás letras; si al lado de b se colocan, igualmente, todas las demás letras, y si se hace lo propio con las letras c y d, tendremos:

1.º	*ab*,	*ac*,	*ad*
2.º	*ba*,	*bc*,	*bd*
3.º	*ca*,	*cb*,	*cd*
4.º	*da*,	*db*,	*dc*

Estos 12 grupos son todas las coordinaciones *binarias* que pueden obtenerse con las cuatro letras dadas, pues cualquier otro grupo que se formase sería repetición de uno de ellos. Como el mismo procedimiento es aplicable a *cualquier otro número* de objetos, resulta que: *Para formar las coordinaciones binarias de* m *objetos, basta colocar al lado de cada monaria, uno a uno, todos los otros restantes.*

Si al lado de la primera coordinación binaria, *ab*, se colocan, una a una, todas las letras restantes; si al lado de la segunda, *ac*, se colocan, igualmente, todas las demás letras, y si se hace lo propio con las demás coordinaciones binarias obtenidas, se tendrán los grupos siguientes:

1.º............	*abc*,	*abd*.	7.º............	*cab*,	*cad*.
2.º............	*acb*,	*acd*.	8.º............	*cba*,	*cbd*.
3.º............	*adb*,	*adc*.	9.º............	*cda*,	*cdb*.
4.º............	*bac*,	*bad*	10.º............	*dab*,	*dac*.
5.º............	*bca*,	*bcd*	11.º............	*dba*,	*dbc*.
6.º............	*bda*,	*bdc*.	12.º............	*dca*,	*dcb*.

Estos 24 grupos son todas las coordinaciones *ternarias* que pueden obtenerse con las cuatro letras dadas; porque como al lado de cada coordinación binaria obtenida antes se han colocado cada una de las demás letras que no entraban en ella, cualquier otro grupo de a tres letras que se formase sería repetición de uno de los 24 anteriores.

Como el mismo procedimiento es aplicable a *cualquier otro número* de objetos, resulta que:

Para formar las coordinaciones ternarias de m *objetos, se forman primero las binarias, y al lado de cada una de éstas se colocan, uno a uno, todos los otros objetos restantes.*

De igual manera, se demostraría que:

Para formar las coordinaciones cuaternarias de m *objetos, se forman primero las ternarias, y al lado de cada una de éstas se colocan, uno a uno, todos los otros objetos restantes.*

De todo lo cual, se deduce la siguiente

100. Regla general.—*Para formar las coordinaciones del orden* n *y de base* m, *se forman primero las del orden* n — 1, *y al lado de cada una de éstas se colocan, uno a uno, todos los otros objetos restantes.*

EJEMPLO: *¿Cuántos números de a tres guarismos distintos pueden formarse con las cifras* 2, 5, 7 y 9?

Según la regla precedente, las coordinaciones binarias de dichas cifras serán las siguientes:

1.º................	25, 27, 29.
2.º................	52, 57, 59.
3.º................	72, 75, 79.
4.º................	92, 95, 97.

Según la misma regla, las coordinaciones ternarias serán:

1.º..............	257, 259.	7.º..............	725, 729.
2.º..............	275, 279.	8.º..............	752, 759.
3.º..............	295, 297.	9.º..............	792, 795.
4.º..............	527, 529.	10.º..............	925, 927.
5.º..............	572, 579.	11.º..............	952, 957.
6.º..............	592, 597.	12.º..............	972, 975.

Los 24 grupos anteriores son los números pedidos.

101. Investigación de la fórmula general para la resolución del problema segundo. —Admitamos, para fijar las ideas, que los objetos son 4. Si se toman *uno a uno*, es evidente que resultan 4 cosas, a cada una de las cuales podemos llamar, aunque impropiamente, 1 *grupo;* luego resultarán 4 grupos.

En la formación de las coordinaciones binarias, como hemos visto, a cada objeto se le juntan los otros restantes; luego siendo los objetos 4, a cada uno se le juntarán los otros tres restantes, y por lo mismo, 1 objeto con los demás da 3 grupos binarios; de consiguiente, los 4 objetos darán 4×3, o bien, $4\ (4 - 1)$ coordinaciones binarias.

En la formación de las ternarias, a cada binaria se le agregan los objetos restantes, y siendo 4 los objetos, si se quitan 2 de la binaria, quedan 2 objetos para irlos agregando y obtener los grupos ternarios; luego cada coordinación binaria dará 2 ternarias. Si, en el caso presente, cada binaria da 2 ternarias, siendo las binarias $4\ (4 - 1)$, el número de ternarias será $4\ (4 - 1)\ 2$, o lo que es igual, $4\ (4 - 1)\ (4 - 2)$. Y así sucesivamente.

Generalizando, tendremos que, siendo m el número de objetos o base de la coordinación, la fórmula de las binarias es $m\ (m - 1)$; la de las ternarias, $m\ (m - 1)\ (m - 2)$; la de las cuaternarias, $m\ (m - 1)\ (m - 2)\ (m - 3)$; y en fin, las del orden n,

$$V^{n}_{m} = m\ (m - 1)\ (m - 2) \ldots\ldots \big(m - (n - 1)\big).$$

Cuya fórmula, traducida al lenguaje ordinario, nos ofrece la siguiente

102. Regla general. — *Para averiguar el número de coordinaciones que pueden obtenerse con un determinado número de objetos, tomándolos en un orden determinado, se forma un producto cuyos factores son el número de objetos y los restos sucesivos que se obtienen quitando, del número de objetos dado, la serie natural* 1, 2, 3, 4, *etc., de los números enteros, hasta quitar tantas unidades como objetos menos uno hayan de entrar en la coordinación.*

EJEMPLOS: 1.º *¿De cuántas maneras podrán sentarse 8 personas alrededor de una mesa?*

De conformidad con la regla anterior, tendremos:

$$Cn = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40{,}320 \text{ maneras.}$$

2.º *Un comerciante tiene azúcar de 8 clases distintas, y quiere hacer mezclas tomando partes iguales de cada clase, de manera que sólo entren 3 clases en cada mezcla. ¿Cuántas mezclas diferentes puede hacer?*

Conforme a la regla anterior, tendremos:

$$Cn = 8 \times 7 \times 6 = 336 \text{ muestras.}$$

103. ESCOLIO. — A fin de aplicar la regla general con facilidad, obsérvese que el número de factores es igual al orden de las coordinaciones; que el primer factor es el número de objetos, y que cada uno de los factores siguientes va disminuyendo en una unidad.

103 bis. La fórmula que nos da el número de coordinaciones de base m y orden n permite su transformación en otra más cómoda para intervenir en los cálculos algébricos. Vamos a hallarla.

Sabemos que

$$V_m^n \; m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(n-1)),$$

o bien, verificando la substracción indicada en el último factor,

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1).$$

Multiplicando y partiendo el segundo miembro de la igualdad anterior por $(m-n)! = (m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$, (*) tenemos

$$V_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(m-n)!}.$$

Pero, el numerador de este quebrado es $m!$; luego,

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!},$$

que es la fórmula buscada.

Permutaciones

104. Definición. — Se llaman así las *coordinaciones en que todos los objetos concurran a la formación de cada grupo.*

De esta definición, se deduce claramente que *las permutaciones son coordinaciones en las cuales la base es igual al orden de la coordinación.*

Llámase *número permutatorio* de base n el número de permutaciones que se pueden formar con n objetos, y se indica así: P_n.

105. Investigación de la fórmula general. — La fórmula general o del orden n, de las coordinaciones, hemos visto que era (**101**):

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-(n-1)).$$

en la que m representa el número de objetos o base, y n, el orden de la coordinación. Ahora, si $m = n$, la fórmula general será:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-(n-1)).$$

(*) Llámase *factorial* de un número al producto de la serie natural de los números enteros, desde 1 hasta dicho número. Su signo es !. Así, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$, y se lee: *factorial de 5.*

Como el último factor del segundo miembro de la igualdad anterior es siempre 1; el penúltimo factor, 2; el antepenúltimo, 3; el anterior a éste, 4, y así sucesivamente, si escribimos estos factores en orden inverso, la fórmula general será:

$$P_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ..... n = n! \text{ (103 bis, nota)}$$

que traducida al lenguaje ordinario, nos da la siguiente

106. Regla general. — *Para calcular el número de grupos que pueden obtenerse permutando un determinado número de objetos, se forma el producto de la serie natural de los números enteros, desde* 1 *hasta el número de objetos que entran en la permutación.*

EJEMPLO: *¿Cuántas palabras diferentes pueden formarse con las* 5 *vocales y* 7 *consonantes, entrando todas las letras en cada palabra?*

Cinco vocales y 7 consonantes son 12 letras; luego todo se reduce a calcular el número de permutaciones que, con estos 12 elementos, pueden obtenerse. Según la regla anterior, tendremos:

$$Pn12 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 = 479.001,600 \text{ palabras.}$$

107. ESCOLIOS. — Obsérvese que, según la fórmula general y regla anteriores, tendremos:

1.º *El número de grupos que pueden obtenerse permutando* 2 *objetos, es:*

$$P_2 = 1 \times 2.$$

2.º *El número de grupos que pueden obtenerse permutando* 3 *objetos, es:*

$$P_3 = 1 \times 2 \times 3.$$

3.º *El número de grupos que pueden obtenerse permutando* 4 *objetos, es:*

$$P_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4.$$

Y así sucesivamente.

Combinaciones

108. Definición y división. — Se llaman combinaciones *las coordinaciones que sólo se distinguen por uno o más de los objetos que entran en cada grupo.*

Igualmente que las coordinaciones, pueden ser *monarias*, *binarias*, *ternarias*, etc., según que en cada grupo entren uno, dos, tres, etc., objetos.

Llámase, también, *base* de la combinación el número de objetos de que se dispone para combinar, y *orden*, el número de objetos de que consta cada grupo.

Número combinatorio de base m y orden n es el número de combinaciones que se pueden formar con m objetos entrando n en cada grupo, y se indica así: C_m^n.

109. Tenemos, aquí, también, dos problemas generales que resolver:

1.º *Formar las combinaciones monarias, binarias, ternarias, etc., de un número cualquiera de objetos.*

2.º *Calcular las combinaciones que pueden formarse, conociendo el número de objetos y el orden de la combinación.*

110. Investigación de la regla general para la resolución del problema primero.— Propongámonos formar las combinaciones monarias, binarias, ternarias, etc., de un determinado número de objetos, 4, por ejemplo, que representaremos, respectivamente, por las letras a, b, c, d.

Las combinaciones monarias son, evidentemente, a, b, c y d.

Colocando al lado de a, una a una, las demás letras; al lado de b, una a una, las letras que siguen, y así sucesivamente, tendremos los grupos siguientes:

1.º	ab, ac, ad	2.º	bc, bd	3.º	cd.

Estos grupos son todas las combinaciones binarias que pueden obtenerse con las 4 letras dadas; pues se ve que cada letra forma un grupo con cada una de las otras, y cualquier otro grupo que se formase sería repetición de alguno de los anteriores, o constaría de las mismas letras que éste.

Y como el mismo procedimiento es aplicable a cualquier otro número de letras, tenemos que:

Para obtener las combinaciones binarias de un determinado número de objetos, después de haberlos ordenado, se colocan, uno a uno, al lado de cada monaria, cada uno de los restantes.

Colocando al lado de la primera combinación binaria obtenida, *ab*, cada una de las letras que siguen a *b*, que es la última de las que forman la primera combinación binaria, y haciendo lo mismo con cada uno de los demás grupos binarios, resultarán los grupos siguientes:

$$1.^{\circ}\left\{\begin{array}{l} abc \\ abd \end{array}\right. \qquad 2.^{\circ}\ acd \qquad 3.^{\circ}\ bcd$$

Estos grupos son todas las combinaciones ternarias que pueden obtenerse con las 4 letras dadas; pues se ve que cada combinación binaria forma un grupo con cada una de las letras restantes, y cualquiera otro grupo que se formase sería repetición de alguno de los anteriores, o constaría de las mismas letras que éste.

Y como el mismo procedimiento es aplicable a cualquier otro número de letras, tenemos que:

Para obtener las combinaciones ternarias de un determinado número de objetos, después de haberlos ordenado, se forman las combinaciones binarias de los mismos, y al lado de cada una de éstas, se colocan, uno a uno, cada uno de los objetos que siguen al último de la combinación binaria.

Siguiendo igual procedimiento, se vería que:

Para formar las combinaciones cuaternarias de un determinado número de objetos, después de haberlos ordenado, se forman primero sus combinaciones binarias; después las ternarias, y al lado de cada una de éstas, se colocan, uno a uno, cada uno de los objetos que siguen al último de la combinación ternaria.

De todo lo cual se deduce la siguiente

111. Regla general.— *Para formar las combinaciones del orden* n *de un determinado número de objetos ordenados, se forman antes las del orden* n − 1, *y al lado de cada una de éstas, se colocan, uno a uno, los objetos que siguen al último de la combinación del orden* n − 1.

EJEMPLO: *Con los números* 25, 36, 9, 40 *y* 81, *formar todos los ternos posibles.*

Las combinaciones binarias o *ambos*, de estos números son las siguientes:

$$1.^{\circ}\left\{\begin{array}{l} 25,\ 36. \\ 25,\ 9. \\ 25,\ 40. \\ 25,\ 81. \end{array}\right. \quad 2.^{\circ}\left\{\begin{array}{l} 36,\ 9. \\ 36,\ 40. \\ 36,\ 81. \end{array}\right. \quad 3.^{\circ}\left\{\begin{array}{l} 9,\ 40. \\ 9,\ 81. \end{array}\right. \quad 4.^{\circ}\ 40,\ 81.$$

Las combinaciones ternarias o *ternos*, serán:

$$1.^{\circ}\left\{\begin{array}{l} 25,\ 36.\ \ 9. \\ 25,\ 36,\ 40. \\ 25,\ 36,\ 81. \\ 25,\ \ 9,\ 40. \\ 25,\ \ 9,\ 81. \\ 25,\ 40,\ 81. \end{array}\right. \quad 2.^{\circ}\left\{\begin{array}{l} 36,\ \ 9,\ 40. \\ 36,\ \ 9,\ 81. \\ 36,\ 40,\ 81. \end{array}\right. \quad 3.^{\circ}\ 9,\ 40,\ 81.$$

112. Investigación de la fórmula general para la resolución del problema segundo. — De las definiciones que hemos dado y de lo que se ha podido observar en la formación de las coordinaciones y combinaciones de un mismo número de objetos, se desprende que el número de combinaciones monarias que se pueden formar con m objetos es igual a m. O bien,

$$C_m^1 = m.$$

Una combinación binaria cualquiera, *ab*, por ejemplo, da lugar a dos coordinaciones, *ab* y *ba*, esto es, tantas coordinaciones como permutaciones se pueden obtener con dos objetos, es decir, 1×2 (**107**.—*Escolio* 1.º). De consiguiente, *el número de combinaciones binarias de* m *objetos, multiplicado por el número de permutaciones de 2 objetos, da por producto el número de coordinaciones binarias de* m *objetos.* Siendo, pues, C_m^2 el número de combinaciones binarias de m objetos, tendremos:

$$C_m^2 \times P_2 = (m - 1)\ (\mathbf{101}).$$

De donde resulta, naturalmente:

$$C_m^2 = \frac{m\,(m-1)}{P_2}.$$

$$\text{O bien,}\quad C_m^2 = \frac{m\,(m-1)}{1 \times 2}\ (\mathbf{107}.\text{—}\textit{Escolio } 1.^{\circ}).$$

De la misma manera, una combinación ternaria, *abc*, por ejemplo, produce las coordinaciones ternarias *abc, acb, bac, bca, cab, cba*, es decir, tantas como permutaciones se pueden hacer con 3 objetos, esto es, $1 \times 2 \times 3$ (**107**.—*Escolio* 2.º). De consiguiente, *el número de combinaciones ternarias de* m *objetos, multiplicado por el número de permutaciones de 3 objetos, da por producto el número de coordinaciones ternarias de dichos* m *objetos*; por tanto, como se ve en el caso anterior, *partiendo estas coordinaciones ternarias por el número de permutaciones de 3 objetos, resultarán las combinaciones de 3 objetos.* Por lo que:

$$C_m^3 = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ (\mathbf{101})}{1 \times 2 \times 3\ \ (\mathbf{107}).\text{—}\textit{Escolio } 2.^{\circ})}.$$

Por tanto,

$$C_m^4 = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ (\mathbf{101})}{1 \times 2 \times 3 \times 4\ \ (\mathbf{107})\text{—}\textit{Escolio } 3.^{\circ})}.$$

Y generalizando,

$$C_m^n = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots\ldots(m-(n-1))}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots n}\ (\mathbf{101})$$

Cuya fórmula, traducida al lenguaje ordinario, nos da la siguiente

113. Regla general. — *Para calcular el número de combinaciones de un orden dado que puede obtenerse con un determinado número de objetos, se divide el número de las coordinaciones del mismo orden que puede formarse con dichos objetos, por el número de sus permutaciones.*

EJEMPLOS: 1.º *¿Cuántos ambos, ternos, cuaternos y quinternos pueden formarse con los 90 primeros números?*

Se formarán tantos ambos como combinaciones binarias puedan obtenerse. Haciendo, en la fórmula general (**112**) $m = 90$ y $n = 2$, tendremos para los ambos:

$$C_{90}^2 = \frac{90 \times 89}{1 \times 2} = 4{,}005 \text{ ambos.}$$

Se formarán tantos ternos como combinaciones ternarias puedan obtenerse. Haciendo, en dicha fórmula general, $m = 90$ y $n = 3$, tendremos para los ternos:

$$C_{90}^3 = \frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3} = 117{,}480 \text{ ternos.}$$

Los cuaternos son las combinaciones cuaternarias. Haciendo, en la fórmula general, $m = 90$ y $n = 4$, tendremos para cuaternos:

$$C_{90}^{4} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 2.555{,}190 \text{ cuaternos.}$$

Los quinternos son las combinaciones quinarias. Haciendo, en dicha fórmula general, $m = 90$ y $n = 5$, tendremos para los quinternos:

$$C_{90}^{5} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 43.949{,}268 \text{ quinternos.}$$

2.º *Con 16 soldados, ¿cuántas guardias diferentes de a 4 cada una pueden formarse, y en cuántas entrará un soldado cualquiera de guardia?*

Haciendo, en la fórmula general, $m = 16$ y $n = 4$, tendremos:

$$C_{16}^{4} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 1{,}820 \text{ guardias de a 4 soldados.}$$

Para hallar el número de veces que cada soldado entrará de guardia, debemos calcular las diferentes combinaciones de $(4 - 1) = 3$ soldados que pueden formarse con $(16 - 1) = 15$ soldados. Haciendo, en la fórmula general, $m = 15$ y $n = 3$, tendremos:

$$C_{15}^{3} = \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} = 455, \text{ veces que cada soldado entrará de guardia.}$$

113 bis. De igual modo que la fórmula general de las coordinaciones, la fórmula general de las combinaciones de un orden determinado, permite su transformación en una nueva fórmula más cómoda para intervenir en los cálculos algébricos. Vamos a hallarla.

Sabemos que

$$C_{m}^{n} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-(n-1))}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots. \times n},$$

o bien, verificando la substracción indicada en el numerador del quebrado, y teniendo en cuenta la nota del párrafo 103 bis,

$$C_{m}^{n} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-n+1)}{n\,!}.$$

Multiplicando los dos términos de este quebrado por $(m-n)\,!$, tendremos:

$$C_{m}^{n} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-n+1) \times (m-n)!}{n\,!\,(m-n)\,!}.$$

Pero, por ser $(m-n)\,! = (m-n)\,(m-n-1)\,(m-n-2)\ldots. \times 3 \times 2 \times 1$, el numerador del último quebrado es la factorial de m; luego,

$$C_{m}^{n} = \frac{m\,!}{n\,!\,(m-n)\,!},$$

que es la fórmula buscada.

Fórmula del binomio de Newton

114. Todo polinomio puede elevarse a una potencia siguiendo la ley general de la potenciación, esto es, tomándole tantas veces por factor como unidades tenga el exponente de la base de la potencia (**53**); pero este procedimiento se simplifica considerablemente por la fórmula del célebre matemático Newton, aplicable siempre con ventaja, ya que nos evita el trabajo, a menudo inmenso, de formar las potencias inferiores del polinomio. Deduzcamos esta fórmula.

Sabemos que (**53**. — *Ejemplos* 1.º y 2.º):

1.º $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$. 2.º $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$.

Y por lo mismo:

$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$

Observando la ley que siguen estos productos en su formación, se descubre que:

1.º *Las potencias de los binomios de la forma propuesta, son polinomios completos en* x *y* a *y homogéneos.*

2.º *El exponente de* x, *en el primer término, es igual a la potencia; esto es, tiene tantas unidades como factores binomios la potencia tiene; en el 2.º término, el exponente de* x *disminuye en* 1; *en el 3.º, en otra unidad, y así sucesivamente, hasta que en el último término desaparece esta letra.*

3.º *El exponente de* a *sigue una ley inversa a la de* x.

4.º *El coeficiente del primer término es la unidad, el coeficiente del 2.º es igual al exponente de la potencia, y en los otros términos, se ve que los equidistantes de los extremos tienen coeficientes iguales.*

La ley de los coeficientes no se descubre fácilmente, ya que éstos proceden de las reducciones que se han hecho de los términos semejantes en los productos. Para ver esta ley con claridad, multiplicaremos entre sí varios factores binomios cuyo segundo término sea desigual, tales como $(x + a)$, $(x + b)$, $(x + c)$. Ordenando el producto con respecto a x, tenemos:

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc.$$

Si los factores son cuatro, tales como $(x + a)$, $(x + b)$, $(x + c)$, $(x + d)$, se tendrá el producto siguiente: $x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd$.

Donde se ve que el *coeficiente del primer término es la unidad; el coeficiente del 2.º término, la suma de las combinaciones monarias de las segundas partes de los factores binomios; el del 3.º, la suma de las combinaciones binarias de estas segundas partes; el del 4.º, la suma de las combinaciones ternarias de dichas segundas partes, y el último término, el producto de las segundas partes de los factores binomios que han entrado en el producto dado.*

Demostremos, ahora, la generalidad de esta ley; esto es, que se cumple siempre cualquiera que sea el número de factores del producto.

Sea el producto de m factores: $(x + a)(x + b)(x + c) \ldots . (x + f)$.

Tendremos: $(x + a)(x + b)(x + c) \ldots . (x + f) = x^m + (a + b + c + \ldots . + f) x^{m-1} + (ab + ac + ad + \ldots .)x^{m-2} + (abc + abd + \ldots .)x^{m-3} + \ldots . + abc \times \ldots . \times f$.

Si en esta igualdad se admite que $a = b = c = d = \ldots . = f$, se tendrá que el primer miembro de la misma se convierte en $(x + a)(x + a) \ldots . (x + a)$; es decir, en el producto de m factores iguales a $(x + a)$, o sea en la potencia $m^{\text{ésima}}$ de $(x + a)$, que escribiremos así: $(x + a)^m$.

Veamos lo que sucederá en el segundo miembro de la igualdad.

El coeficiente del segundo término será $(a + a + \ldots . a)$; y como habrá m sumandos, puede escribirse así: ma.

El coeficiente del tercer término será $(a^2 + a^2 + \ldots . a^2)$, y como tendrá a^2 tantas veces por sumando como combinaciones binarias se pueden formar con los segundos términos de los m factores binomios del producto dado, lo escribiremos

así: $\dfrac{m(m-1)}{1 \times 2} a^2$ (112).

El coeficiente del cuarto término será $(a^3 + a^3 + \ldots . a^3)$, y como tendrá a^3 tantas veces por sumando como combinaciones ternarias se pueden formar con los segundos términos de los m factores binomios, lo escribiremos así:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} a^3 \text{ (112).}$$

En general, en el término $(n+1)$ del desarrollo, se tendrá que a^n estará repetido tantas veces como combinaciones n a n se pueden formar con los segundos términos de los m factores binomios; luego lo escribiremos así:

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1\times 2\times 3\times\ldots n}a^n \,. \quad \mathbf{(112)}$$

De todo lo cual se deduce que la fórmula general de este desarrollo es así:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\times 2}a^2x^{m-2} + \ldots +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1\times 2\times 3\times\ldots n}a^nx^{m-n} + \ldots + a^m.$$

Esta fórmula se llama *binomio de Newton*, y sirve para elevar un polinomio a cualquier potencia.

Teniendo en cuenta que **(112)** $C_m^1 = m$; $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{1\times 2}$; ....

$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1\times 2\times 3\times\ldots\times n}$, la fórmula del *binomio de Newton* puede escribirse así:

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 ax^{m-1} + C_m^2 a^2x^{m-2} + \ldots + C_m^{m-n} a^n x^{m-n} + \ldots + a^m.$$

114 a. Si en la fórmula del binomio de Newton cambiamos a por $-a$, $x+a$ se convierte en $x+(-a) = x-a$, y entonces obtendremos la fórmula que nos da una potencia cualquiera de una diferencia.

Téngase en cuenta, al cambiar a en $-a$, que las potencias de grado par de $-a$ son positivas, y las de grado impar son negativas. Así, pues, tenemos:

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\times 2}a^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}a^3x^{m-3} + \ldots$$

$$\pm\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1\times 2\times 3\times\ldots n}a^nx^{m-n} \mp \ldots \pm a^m.$$

Si los dos términos del binomio son negativos, todos los del desarrollo serán positivos o negativos, según sea la potencia de grado par o impar.

Pues, $(-x-a)^m = [-1\times(x+a)]^m = -1^m\times(x+a)^m$. Si $m = 2p$, $(-x-a)^m = -1^{2p}\times(x+a)^{2p} = (x+a)^{2p}$, por ser $-1^{2p} = +1$; todos los términos del desarrollo son, por tanto, positivos. Si $m = 2p+1$, $(-x-a)^m = -1^{2p+1}\times(x+a)^{2p+1} = -(x+a)^{2p+1}$, por ser $-1^{2p+1} = -1$; todos los términos del desarrollo son, en este caso, negativos.

115. Observaciones acerca de la construcción de la fórmula de Newton. — 1.ª El término que ocupa el lugar $n+1$ se llama *término general*, pues de él se deducen el 2.º, 3.º, 4.º, etc., menos el último, haciendo $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc. Téngase presente que el término general es:

$$\pm\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1\times 2\times 3\times\ldots n}a^nx^{m-n}.$$

2.ª El exponente de la primera parte del binomio, de x, como ya se ha dicho antes, es m en el primer término; en el 2.º, $m-1$; en el 3.º, $m-2$, etc., y así sucesivamente, hasta que en el último término es *cero*.

3.ª El exponente de la segunda parte del binomio, de a, como ya también se ha observado antes, en el primer término es *cero;* en el 2.º, 1; en el 3.º, 2, y así sucesivamente, hasta que en el último término tiene por exponente m.

4.ª El coeficiente de un término cualquiera se forma multiplicando el del término anterior por el exponente que en éste lleva la primera parte del binomio, y dividiendo el producto por el exponente de la segunda parte (también en el término anterior) aumentado en 1.

5.ª Como ya también se ha observado, los coeficientes de los términos de la fórmula del binomio equidistantes de los extremos son iguales.

6.ª Cuando los términos del binomio son positivos, todos los términos del desarrollo también son positivos; pero si uno de ellos es negativo, son negativos todos aquellos términos donde el término negativo tenga potencias impares.

7.ª Si los dos términos del binomio son negativos, son también negativos todos los del desarrollo si la potencia es de grado impar, y si fuese de grado par, todos serán positivos.

De la fórmula del binomio y de estas observaciones, se deduce la siguiente

116. Regla general. — *Para elevar un binomio a la potencia del grado* m, *se eleva la primera parte del binomio a la potencia de dicho grado, y se tiene el primer término de la potencia; se multiplica* m *por el producto de la segunda parte del binomio por la potencia* m — 1 *de la primera parte, y se tiene el segundo término de la potencia; se forma el coeficiente del tercer término como se ha dicho* (**115.** — *Observación* 4.ª), *y este coeficiente se multiplica por el producto de la segunda parte con un exponente una unidad mayor que el anterior y de la primera con un exponente una unidad menor* (**115.** — *Observación* 2.ª), *y se tendrá el tercer término de la potencia. Y se continúa así hasta haber formado* m + 1 *términos; advirtiendo que, después que se haya calculado la mitad de los coeficientes si el número de términos es par, o uno más de la mitad si es impar, los restantes serán, respectivamente, iguales a los anteriores.* (**115.** — *Observación* 5.ª)

117. Escolio. — *Para elevar un polinomio a una potencia, se le considera como un binomio, tomando por primer término de éste el primer término del polinomio, y por segundo término del binomio, los términos restantes del polinomio.*

Ejemplos: 1.º $(z + a)^5 = z^5 + 5az^4 + 10a^2z^3 + 10a^3z^2 + 5a^4z + a^5$.

2.º $(a - b)^6 = a^6 - 6ba^5 + 15b^2a^4 - 20b^3a^3 + 15b^4a^2 - 6b^5a + b^6$.

3.º $(a + b + c)^3$. Haciendo $b + c = s$, se tiene: (**117.** — *Escolio.*)

$$(a + b + c)^3 = (a + s)^3 = a^3 + 3a^2s + 3as^2 + s^3.$$

Pero $s = b + c$; $s^2 = b^2 + 2bc + c^2$; $s^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

Luego, escribiendo en vez de s, s^2 y s^3 sus valores respectivos, tendremos:

$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b^2 + 2bc + c^2) + (b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3)$.

O bien:

$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

Fin del Álgebra teórica

PARTE PRÁCTICA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS ALGEBRAICOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE ÁLGEBRA

I

1. Escribir tres monomios. — **2.** Idem cinco binomios. — **3.** Idem cuatro trinomios

4. Idem cinco polinomios.

5. Escribir dos binomios, de modo que cada término tenga coeficiente y exponente explícitos.

6. Escribir dos polinomios, de modo que cada término tenga coeficiente implícito.

7. Escribir dos polinomios, tales, que cada término tenga exponente implícito.

8. Escribir dos polinomios, de modo que cada término tenga coeficiente y exponente implícitos.

II

Simplifíquense las expresiones algebraicas:

9. $a^2 + 3a^2 + (-2a^2) + 8a^2 - 3a^2$.

10. $8ab^2 + 5ab^2 - ab^2 + 2ab^2 - 25ab^2$.

11. $5ab^2n - 2abx^3 + 30abx^2 - ab^2n + 3ab^2n - 40abx^3 + ab^2$.

12. $-2xn^3 + abn^2 + 3n^3x - 2an^2b + m^5a + 5xn^2 - xn^3 + 14abn^2 + 8xn^3 + n^2x$.

13. $20b^2c - 9ab^2c - 3b^2c + 20ab^2c + cb^2 - a^3b^2 - ab^2c + 2cb^2a + 10b^2c + n$.

14. $9x^2z - 5x^2z - x^2z + 2x^2z - \frac{1}{2}x^2z + 4x^2z$.

15. $-\frac{1}{3}ab + \frac{3}{5}an^2 + \frac{4}{8}ab - \frac{1}{7}an^2 + \frac{4}{5}r^3 + 3ab - an^2 + 5ab + x^2b^3c$.

III

16. Hállese el valor numérico de la expresión: $5a^2 + b^3a - 2a^3b + 2a^4b$, sabiendo que $a = 3$ y $b = 2$.

17. Hállese el valor numérico de la siguiente: $a^2x^2 - a$, entendiéndose que $a = 20$ y $x = 2$.

18. Valúese el polinomio $5a^2b^3c + 2c^2b - 2abc + 8a^3b^4c^2$, en el supuesto de que $a = 5$, $b = 2$ y $c = 3$.

19. Si $a = 5$ y $b = 3$, ¿cuál será el valor del binomio $\frac{1}{3}a^5 - \frac{3}{9}b^2$?

20. En el polinomio $a^2b + 3ab - an^2b + 5a^4b$, sepárese el factor común b.

21. Separar el factor común x del polinomio siguiente: $a^2 - 3ab^2x + 5nb^2cx^2 + a^5x^3b - a^2b^2x$.

IV

22. Súmense los dos polinomios siguientes: $(8a^4 + b^2) + (5a^3b + n)$.

23. Sumar las expresiones siguientes: $13am^2 - 9a^2m + a^3 + 7a^2m^2 + 5am^2 - a^3b$.

24. Sumar $3a^2b^2 - abc^2 + 2a^4$ con $5a^4 - 2abc^2 + a^2b^2$ y con $5abc^2 - 2a^2b^2 - 10a^4$.

25. Sumar $2a + 4bc - 2cd$ con $4a - 2bc + 9cd$ con $3bc - 6a - 3cd$.

26. Hágase la suma de los siguientes polinomios:

$$\begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \\ 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\ 3x^3 + 4x^2 \qquad\quad + 5 \\ 4x^3 - 3x^2 - 5x + 9 \end{array}$$

27. Sumar los polinomios siguientes:

$$\begin{array}{l} 8x^2 - \frac{1}{2}xz - 2xz^2 - \frac{3}{4} \\ -x^2 + \frac{3}{5}xz + 9n^2 + 3 \\ az + 2z^2 + 4n^2 + \frac{7}{8} \end{array}$$

V

28. De $4x^2m^3 - n^2z^4 + 6ra$, hemos de quitar $3x^2n^3 + 2n^2z^4 - 2ra$: ¿qué diferencia obtendremos?

29. Si del polinomio $5a^2 - 9ab + 7b^2$ quitamos el monomio $8ab$, ¿qué resultado obtendremos?

30. Verifíquese la resta siguiente: $(7az^2 - 4a^2z + 5a^3 + 4z^3) - (6z^3 - 4a^3 + 7az^2 - 4a^2z)$.

31. Del polinomio $(-6a^3 + 7a^2 - \frac{1}{2}a)$, quítese el polinomio $(5a^3 + \frac{1}{3}a^2 + 9a - 10)$.

32. Hállese la diferencia entre los siguientes polinomios: $(16x^4 + 6x^3n - 10x^2n^2 + n^5) - (10x^4 + 15x^3n - 9x^2n^2 + 11xn^3 - 8)$.

33. Se ha dividido uua circunferencia en tres arcos desiguales: el primero mide n grados y el segundo, b grados. Exprésese la medida del tercer arco.

VI

34. Hállese el producto de (a^2cn) por $(a^3c^2n^5)$.
35. Idem el de $(-\ ab^2cd^3)$ por $(cdxa^3)$.
36. Idem el de $(-\ 8ac^2n^3)$ por $(-\ 5a^2bx^4)$.
37. Idem el de $(7n^2cx^4rm)$ por $(-\ m^2a^3nxzd^2)$.
38. Idem el de $(-\ 4ab^3x^2) \times (-\ 12ar^2xc^5)$.
39. Idem el de $(a + b) \times n$.
40. Idem el de $(a + b + c - r^2 + m^4) \times x$.
41. Idem el de $(8a^2bcd^3 + r^2b) \times a$.
42. Idem el de $(5a^4b - r + 12a^2bc^5 - n) \times -a$.
43. Idem el de $(2a^2b - 4ab^2 + ab) \times ab^2$.
44. Idem el de $(-\ 4abc^2 - a^5 + cd^2)$ por a^2cd^4
45. Idem el de $(a + b) \times (a + b)$.
46. Idem el de $(a + b) \times (a - b)$.
47. Idem el de $(a - b) \times (a - b)$.
48. Idem el de $(a + b)^2 \times (a + b)$.
49. Idem el de $(a + b)^2 \times (a - b)$.
50. Idem el de $(x^4 - x^2b + b^2 \times (x^2 - 1)$.
51. Idem el de $(b^4 - 2b^3 + nr^2)\ (ab^2n + bn^2)$.
52. Idem el de $(-\ 4x^2z^3 + 6xz^4 - z^3)\ (5x^2z - 2xz^2)$.
53. Ordenar el polinomio $9a^4b^3 - 150a^2b^5 + 12a^6b + 2ab^6 - a^3b^4 - 3a^5b^2$, y multiplicarlo por $a^3b^2 - a^2b^3 + 25a^4b$.
54. Ordenar el polinomio $a^5b^3n^4 - 4a^6b^4n^3 + 3a^3bn^6 + 18a^8b^6n - 80a^4b^2n^5 + 7a^7b^5n^2$, y multiplicarlo por $-\ 3a^3b^2n^3 + 12a^4b^3n^2 - a^2bn^4$.
55. Hállese la diferencia entre a^2 y el producto de $(a + 1) \times (a + 1)$.
56. Idem la diferencia entre a^3 y el producto de $(a + 1) \times (a + 1) \times (a + 1)$.

VII

57. Hállese el cociente de dividir $56a^8b^6$ por $9a^3b^2$.
58. Idem el de $-\ 24a^7b^5n^2x$ por $-\ 4a^4b^3x$.
59. Idem el de $48n^9b^7c^3$ por $-\ 6n^5b^3c^3$.
60. Idem el de $-\ 72m^3b^2c$ por $12m^2c$.
61. Idem el de $225a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ por $3ab$.
62. Idem el de $84x^4z - 2x^3z^2 + 4x^2z^3$ por $4x^2z$.
63. Partiendo por $5c^2d$ el binomio $20c^3d + 30c$[illegible]b^2n^3, ¿qué resultado se obtendrá?
64. Determínese el cociente de dividir el polinomio $12a^5bx - 36a^4b^2x + 2a^3b^3x$ por el monomio $2a^2bx$.
65. Divídase por el monomio $-\ 5ab$ el polinomio $5a^3b^3 - 40n^2a^2b^2 + 25n^4ab$.
66. Hállese el cociente de $a^2 + 2ab + b^2$ por $a + b$.
67. Idem el cociente de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ por $a + b$.
68. Idem el cociente de $a^2 - 2ab + b^2$ por $a - b$.
69. Idem el cociente de $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ por $a - b$.
70. Averigüese el resultado de dividir el polinomio $n^3 - 3cn^2 + 3c^2n - c^3$ por el polinomio $n^2 - 2cn + c^2$.
71. Determinar el cociente de $20x^6 - 13x^5z + 4x^4z^2 - x^3z^3 - 110x^2z^4 + 9xz^5 - 36z^6$ por $4x^2 - xz + 6x^2$.
72. Hágase la división siguiente: $300a^{10}b^2 - 63a^9b^3 + 210a^8b^4 - 13a^7b^5 - 3760a^6b^6 - 99a^5b^7 + 152a^4b^8 - 2a^3b^9$ por $25a^4b + a^3b^2 - a^2b^3$.
73. Ordenar el polinomio $-\ 6ab^5 + 2a^2b^4 + 8a^6 - 10a^3b^3 - 4a^4b^2$ y dividirlo por $-\ 4b^3 + 2a^3$.
74. Averigüese el cociente de $x^4 + 1$ por $x + 1$.
75. Ordenar el polinomio $10a^4 + 18a^3 + 18 - 16a - 12a^2$ y dividirlo por $-\ 8a + 2 + 2a^2$.
76. Ordenar el polinomio $4b^5 + 40a^2b^3 - 40a^3b^2 - 20ab^4 - 4a^5 + 20a^4b$ y dividirlo por $-\ 2a^3 + 6a^2b - 6ab^2 + 2b^3$.
77. Ordénese el polinomio $17a^9b^6n^6 - 3a^5b^2n^{10} - 87a^{10}b^7n^5 + 275a^7b^4n^8 + 30a^{11}b^8n^4 - 959a^8b^5n^7 + 71a^6b^3n^9 + 216a^{12}b^9n^3$ y divídase por $a^5b^3n^4 + 3a^3bn^6 + 4a^6b^4n^3 + 18a^8b^6n - 80a^4b^2n^5 + 7a^7b^5n^2$.

VIII

78. Elévense a la segunda potencia los dos monomios siguientes:

1.º $3a^2bcn^3$; 2.º $-\ 5ab^3x^4n^2r$.

79. Elévense a la tercera potencia los dos monomios siguientes:

1.º $-\ 2ab^2nx^2m^3$; 2.º ax^2n^4c.

80. Hállese el cuadrado del binomio $2a^4bn + ax^2m$.
81. Idem el cubo de $-4zx^2m + xz^2b$.
82. Determinar la segunda potencia del polinomio $a + b^2 - c^3$.
83. Idem el cubo del polinomio $x^2 - ab^3 + c$.
84. Extraer la raíz cuadrada de los monomios $25a^8$ y $-64x^4n$.
85. Idem la raíz cuadrada de $81a^2cb^2n^5$ y $-36x^3nr^2b^7$.
86. Idem la cúbica de $125a^{12}$ y $-343x^{12}$.
87. Idem la cúbica de $-8a^9bn^{12}c^3$ y $729a^{15}n^m x^6r^5z^n$.
88. Extraer la raíz cuarta de $16a^{12}b^5$; la sexta de $729a^{24}b^n$, y la sexta de $64a^5bx^{27}n^6m^n$.
89. Extraer la raíz cuadrada del polinomio: $a^2 + 2ab + b^2$.
90. Idem la cuadrada del siguiente: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
91. Idem la cuadrada del siguiente: $9a^4 + 6a^3 - 5a^2 + 4a + 4$.
92. Idem la cuadrada del siguiente: $4a^4x^4 - 16a^3x^3b + 24a^2x^2b^2 - 16axb^3 + 4b^4$.
93. Extráigase la raíz cúbica del siguiente polinomio: $x^3 + 3x^2n + 3xn^2 + n^3$.
94. Idem la cúbica del siguiente: $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
95. Idem la cúbica del siguiente: $3xz^2 + x^3 + z^3 + 3x^2z$.
96. Idem la cúbica del siguiente: $8a^6 - 36ba^5 + 66b^2a^4 - 27a^3b^3 + 33b^4a^2 - 9b^5a + b^6$.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Hállese el valor de la incógnita en cada una de las ecuaciones siguientes:

1. $x + 40 = 120$.
2. $160 + x = 472$.
3. $x + 8 + 12 = 2500$.
4. $15 + x + 9 - 3 = 850$.
5. $x + 12 - 6 = 35 + 2$.
6. $18 - x = 6 + 2$.
7. $2x + x + 5x = 126$.
8. $9x = 27$.
9. $20x - 2x + 5 = 59 - 3$.
10. $-2x + 5x + x = 120 + x - 3$.
11. $13\frac{3}{4} - \frac{x}{2} = 2x - 8\frac{3}{4}$.
12. $2x + 7 + \frac{3}{2}x = 6x - 23$.
13. $\frac{x}{3} - \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} - \frac{x}{6} + \frac{1}{6}$.
14. $4(x - 3) - 7(x - 4) = 6 - x$.
15. $5x + 9 + \frac{x}{3} = 8x - 7$.
16. $\frac{3x}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{3x}{4} - \frac{7x}{8} + 15 = 0$.
17. $4 - \frac{x + 3}{6} = 2 + \frac{9 - 2x}{3}$.

Problemas que dan lugar a ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. Preguntaron a un caballero qué edad tenía, y contestó: «La mitad, el tercio y la cuarta parte de mis años, suman los años que tengo más 3.» ¿Qué edad tenía?

2. Antonio y Joaquín tienen 570 ptas., y el segundo tiene 330 ptas. más que el primero. ¿Qué cantidad tiene cada uno?

3. En un parque de artillería, hay un montón de bombas y otro de granadas que dan, en junto, 413 proyectiles. Si el número de bombas excede al de granadas en 87, ¿cuántos proyectiles hay de cada clase?

4. Descompóngase el número 426 en dos partes, tales que, el duplo de la menor exceda en 187 unidades a la mitad de la mayor.

5. Descomponer el número 750 en dos partes, de modo que el quinto de la mayor exceda a la mitad de la menor en 59.

6. Hallar un número que, disminuyéndole en 25, dé 111 menos el número que se busca.

7. Determinar un número tal, que la suma de su mitad, quinto y sexto sea igual a su mitad y tercio sumados con 115.

8. Si del duplo de la edad que tiene Enrique quitamos el cuádruplo de la que tenía 6 años atrás, resultará su edad actual. ¿Cuál es su edad?

9. Si del tercio y la mitad de los huevos que hay en un cesto quitamos la cuarta parte de los mismos, sobran 21. ¿Cuántos huevos hay?

10. La mitad, el tercio y la cuarta parte de la longitud de una pieza de tela suman la mencionada longitud más 2 metros. ¿Cuántos metros mide dicha pieza?

11. Un jugador triplicó su caudal, y prestó 9 ptas. a un amigo; triplicó lo que le quedaba, y prestó a su amigo 9 ptas. más; volvió a triplicar el sobrante, prestó de nuevo otras 9 ptas. y se halló sin dinero. ¿Con cuántas pesetas empezó a jugar?

12. Cierto individuo, al fallecer, distribuyó su fortuna del modo siguiente: la mitad, a su esposa; el tercio, a su hijo único; la décima parte, a un sobrino, y 2,000 ptas. a los pobres. ¿Cuánto poseía?

13. Distribúyanse 2,000 ptas. entre tres personas, de modo que la primera tenga tantas monedas de a 5 ptas. como la segunda de a 2 ptas. y de a 1 pta. la tercera. ¿Cuántas monedas cada una recibirá?

14. Un padre tiene 49 años y su hijo, 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el triplo de la edad del hijo?

15. Un militar retirado que yo conozco entretiene sus ocios dedicándose, con acierto, a la cría de canarios. Terminada la de este año, ha distribuido sus 250 pájaros en tres grandes jaulas: en la primera, hay 30 menos que en la segunda, y en ésta, 10 menos que en la tercera. ¿Cuántos canarios hay en cada jaula?

16. En una reunión de 200 personas, compuesta de hombres, mujeres y niños, hay 3 veces tantos hombres como niños y 4 veces tantas mujeres como niños. ¿Cuántas personas hay de cada clase?

17. Un dependiente de comercio gasta en alimentarse la tercera parte de lo que gana mensualmente; en vestir, la décima parte; en gastos menores, la quinceava parte, y deposita 150 ptas. en la Caja de Ahorros. ¿Cuánto gana cada mes?

18. La guarnición de una fortaleza, compuesta de artillería e infantería, es de 500 hombres; cada artillero cobra 30 rs. al mes, y 20 rs. cada soldado de infantería. La guarnición gasta, diariamente, 400 rs.: ¿cuántos soldados hay de cada arma?

19. El dueño de una ebanistería ha contratado a un obrero en las siguientes condiciones: cada día que trabajará, ganará 40 rs., y cada día que dejará de acudir al taller, perderá 4 rs. Al cabo de 30 días, ajustaron cuentas, y el obrero cobró 38 duros. ¿Cuántos días había trabajado?

20. Enseñaba un padre a su hijo las letras del alfabeto, y con el fin de estimularle, le dijo así: Por cada una de las 27 letras que aciertes, te daré 5 céntimos; mas tú me darás 10 céntimos cada vez que te equivoques. Leidas las letras, el padre dió al hijo 30 céntimos: ¿cuántas veces el niño se equivocó?

21. Quiere uno distribuir las bolas que tiene entre cierto número de niños, y observa que, si da a cada uno 5 bolas, le sobran 5, y para dar a cada niño 6 bolas, le faltan 2. ¿Cuántos son los niños?

22. Un caritativo caballero quiso distribuir el dinero que llevaba entre varios pobres, y observó que, para dar a cada uno 4 céntimos de peseta, le faltaban 40 céntimos, y que, si daba 3 céntimos a cada pobre, le sobraban 20 céntimos. Averigüese cuántos eran los pobres.

23. Cierto individuo pagó 848 rs. en 52 monedas entre duros y ptas. ¿Cuántas monedas había de cada clase?

24. Juan tiene 40 años; su hermano Enrique, 30, y el hijo de éste ha cumplido 4 años. ¿Dentro de cuántos años, reunidas las edades de los dos últimos, darán la edad del primero?

25. Dos personas poseen el mismo capital: la 1.ª lo coloca al 6 % anual, y la 2.ª, al 5 %. La renta de la 2.ª es menor que la de la 1.ª en 300 ptas.: ¿qué capital poseen?

26. Un tratante en pájaros tiene loros y cotorras, y entre unos y otras son 70. El precio de cada loro es 60 ptas., y 50 ptas. el de cada cotorra, siendo 3,900 ptas. el valor de todos. ¿Cuántos pájaros tiene de cada clase?

27. Cierto sujeto compró un reloj y una leontina, pagando por ambas cosas igual cantidad. Si el reloj le hubiese costado 100 ptas. más y la leontina 200 ptas. menos, el valor de la leontina hubiera sido la mitad de lo que pagó por el reloj: ¿cuánto éste le costó?

28. Una persona ha prestado la mitad de su capital al 4 %; la tercera parte, al 5 %, y el resto, al 6 %. Anualmente, cobra 1,400 ptas. de intereses: ¿cuál es su capital?

29. Una mujer tiene huevos en un cesto, y se propone venderlos a 7 céntimos cada uno: por un accidente casual, se le rompen 10 huevos, y ve que, para no perder nada, ha de vender los huevos que le han quedado a 8 céntimos cada uno. ¿Cuántos llevaba?

30. Un mercader compró cierto número de metros de tela a 20 ptas. cada 9 metros, y luego los vendió a 30 pesetas cada 10 metros, ganando 280 pesetas. ¿Cuántos metros compró?

31. Un filántropo caballero reparte cierto número de panes entre cinco familias necesitadas: a la primera le da la mitad de los panes menos 8; a la segunda, la mitad de los que le quedan menos 8; a la tercera, la mitad de los que le quedan menos 8, y lo mismo a la cuarta, dando por último a la quinta 20 panes que le quedan. ¿Cuántos panes repartió?

32. Un acomodado labrador empleó $369\ ^9/_{10}$ ptas. en la compra de gallinas: pagó la mitad de ellas a $3\ ^1/_2$ ptas. por cabeza; la quinta parte de las mismas, a 4 ptas. idem, y el resto, a $5\ ^1/_5$ ptas. idem. ¿Cuántas gallinas compró?

33. El dueño de un comercio compró bastones de cuatro clases: los de la primera clase, que eran la décima parte de todos, a 5 ptas. uno; los de la segunda clase, que era la quinta parte, a $2\ ^1/_2$ ptas. idem; los de la tercera clase, que eran la tercera parte, a $3\ ^2/_5$ ptas. idem, y el resto, a $4\ ^1/_8$ ptas. idem. Importó la compra $1,093\ ^3/_4$ ptas.: ¿cuántos bastones compró?

34. Cierto buhonero recibió un número de sortijas, de cuya venta creía sacar 100 pesetas. Después de haber vendido 8 sortijas, un ladrón le robó la cuarta parte de las que le quedaban, con lo que sólo pudo sacar de la venta 85 ptas. ¿Cuántas sortijas tenía y a qué precio vendió cada una?

35. Se han puesto dentro de una caja 3,150 monedas de oro, plata y cobre: el número de monedas de cobre es tres veces mayor que el de las de plata, y el número de las de oro es la quinta parte del de las de plata. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

36. Compró un tabernero 500 litros de vino a 30 céntimos de peseta el litro, y los vendió, sin perder ni ganar nada, a 25 céntimos de peseta idem. ¿Cuántos litros de agua mezcló?

37. El tabernero que en el anterior problema se menciona, tiene vino de Jerez de a 30 y de a 22 ptas. el decalitro. ¿Cuántos decalitros de la segunda clase deberá mezclar con 60 decalitros de la clase primera, deseando vender la mezcla a 25 ptas. el decalitro?

38. Tiene un platero dos lingotes de plata, el primero a la ley de 900 milésimas, y el segundo a la ley de 700 milésimas: deseando cortar un pedazo de cada uno, fundirlos y resultar un lingote que pese 400 gramos y cuya ley sea 850 milésimas, ¿cuántos gramos deberá cortar de cada lingote?

39. Divídase el número 400 en dos partes, tales, que su diferencia sea 60.

40. Dividir el número 100 en dos partes, tales, que la mayor sea igual al triplo de la menor más 20.

41. Juan tiene un número de bolas tal, que, dando 30 a Luis, le quedan tres veces más que si le diese 100. ¿Cuántas bolas tiene?

42. Un jugador tenía 20 ptas., y otro, 100; ganaron ambos igual suma, y entonces el segundo tuvo tres veces más dinero que el primero. ¿Cuánto ganó cada uno?

43. Preguntaron a un pastor cuántas ovejas tenía en su rebaño, y respondió: «Si de las ovejas que tengo quitáis su mitad, a las que quedan añadís 25 y volvéis a quitar las tres cuartas partes, me quedo sin oveja alguna.» Hállese el número de ovejas que tenía.

44. Una señora necesitada quiere desprenderse de una sortija, unos pendientes y una pulsera, deseando que la venta de estos tres objetos le produzca 400 ptas. El valor de la sortija es tres veces mayor que el de los pendientes, y el de la pulsera, cuatro veces mayor que el de la sortija. ¿Por cuánto debe vender cada objeto?

45. ¿Dónde guardas las 48 ptas. que ayer cobraste?, dijo Antonio a Serafín, y éste le respondió: No cobré tantas; mas, si hubiese recibido cinco veces más que las que cobré, las pesetas que tendría pasarían de 48 en tanto como me falta ahora para tener este número. ¿Cuántas pesetas tenía Serafín?

46. Una campesina dice haber vendido la mitad menos 2 de los huevos que tenía en una cesta, y que ahora le falta vender las tres quintas partes de los mismos, menos 4 huevos. ¿Cuántos huevos llevaba en la cesta?

47. Preguntaron a un matemático qué hora era, y contestó: «Queda de día el tercio de las horas que han pasado.» ¿Qué hora era?

48. Tenía un niño cierto número de naranjas, y las distribuyó entre tres amigos del siguiente modo: dió al primero la mitad de las naranjas más la mitad de una; al segundo, la mitad de las que le quedaban más la mitad de una; al tercero, la mitad de las que le quedaban más la mitad de una, y resultó que había dado todas sus naranjas sin partir ninguna. ¿Cuántas naranjas tenía?

49. Se sabe que, si del doble de la edad que tiene hoy una señorita, se quita el duplo de la que tenía 10 años atrás, se tiene su edad actual. ¿Cuántos años tiene?

50. Tenemos dos toneles llenos de vino y de igual capacidad. Si sacamos 20 litros del primero y 90 del segundo, queda en el primero doble cantidad de líquido que en el segundo. Determínese la capacidad de estos toneles.

51. Pregunta un joven a su papá cuántos años tiene, y éste le contesta: «Doce años atrás, tu edad era $^1/_4$ de la mía; pero ahora es la $^1/_2$.» ¿Qué edad tiene cada uno?

52. Mezclando 32 decalitros de vino de Málaga de a 20 ptas. el Dl. con vino de idem de a 14 ptas. íd., ¿cuántos Dl. de la segunda clase deberán tomarse queriendo vender la mezcla a 18 ptas.?

53. Treinta años atrás, la edad de Pedro era un tercio de la de Juan; mas hoy los años del primero son los $^2/_3$ de los del segundo. ¿Qué edad tiene cada uno?

54. Compré cierto número de kilogramos de cacao a 5 ptas. uno, y luego los vendí a 6 ptas. ídem, ganando 40 ptas. ¿Cuántos kilogramos compré?

55. El dueño de una tienda de mercería compró cierto número de corbatas a 20 pesetas la docena, y las vendió del modo siguiente: la mitad, a 2 ptas. cada una; la mitad de las que le quedaban, a 2'50 ptas. ídem, y el resto, a 1'50 ptas. ídem. Ganó 48 pesetas: ¿cuántas corbatas había comprado?

56. Un tendero compró una partida de litros de alcohol a 3 ptas. el litro, y duplo número a 4 ptas. ídem; los mezcló y vendió como sigue: la cuarta parte, a 2'50 ptas. el litro; la quinta parte, a 3'50 ptas. ídem, y el resto, a 4'50 ptas. ídem. Ganó 16 pesetas: ¿cuántos litros compró?

57. Una fuente tiene cuatro caños: el primero da 2,400 litros cada 5 horas; el segundo, 800 litros cada 4 horas; el tercero, 2,000 litros cada 8 horas, y el cuarto, 500 litros cada 2 horas. Manando juntos los cuatro caños, ¿qué tiempo necesitarán para dar 40,000 litros de agua?

58. Dos amigos tienen igual número de pesetas; el primero gasta 12 ptas., y el segundo, 57 ptas., y entonces el primero se halla con el cuádruplo de las pesetas que han quedado al segundo. ¿Cuántas pesetas tenía cada uno antes de empezar a gastar?

59. Una mujer vendió, en 2 días, 1,200 manzanas, por las que cobró 80 ptas., 40 cada día; mas el segundo día vendió las manzanas por la mitad del precio del día primero. Averígüese cuántas manzanas vendió cada día y a qué precio las vendió?

60. A un cocinero que venía de hacer su compra, le preguntaron cuántas naranjas llevaba en su cesto; aquél, hábil calculador, respondió: «La docena me costó 90 céntimos, y si yo tuviese 4 naranjas más por el dinero que he gastado, la docena me habría costado 10 céntimos menos.» ¿Cuántas naranjas llevaba? (*)

61. Juan dice a Pedro: Si me prestas $^1/_2$ y $^1/_5$ del dinero que tienes, podré comprar un reloj que vale 48 ptas., y le contesta Pedro: Si tú me prestas $^1/_4$ y $^1/_{10}$ de tu dinero, también podré comprar yo el mismo reloj. ¿Cuánto tenía cada uno?

62. Un comerciante ha cobrado 215 pesetas en monedas de a 5 pesetas y de a 2 pesetas, habiendo recibido el citado importe en 55 piezas. ¿Cuántas piezas hay de cada clase?

63. En un almacén, hay 200 fardos de esparto de dos diferentes clases, cuyo peso total es 10,800 kgs. Los fardos de la primera clase pesan cada uno 60 kg., y 45 kgs. cada fardo de la segunda clase: determínese cuántos fardos hay de cada clase.

64. Un tratante en caza y volatería ha comprado un número tal de perdices y conejos que suman, en junto, 72 cabezas y 208 patas. Averígüese cuántos animales de cada clase ha comprado.

65. La diferencia de los cuadrados de dos números es 448, y 56, la suma de estos números. ¿Qué números son los de referencia?

66. La diferencia de los cuadrados de dos números es 384; la diferencia de dichos números es 4. ¿Qué números son éstos?

67. Se tiene una mesa de forma cuadrada. Si se prolongasen los lados opuestos, dos en 8 decímetros y los otros dos en 3 decímetros, el área del rectángulo que resultaría excedería a la del cuadrado en 222 decímetros cuadrados. Calcúlese, según esto, la longitud del lado de dicha mesa.

Ecuaciones de primer grado con dos o más incógnitas

Hállense los valores de las incógnitas en cada uno de los siguientes sistemas de dos ecuaciones, empleando los métodos de *sumas y restas, igualación y substitución.*

1. $\begin{cases} 11z - 10x = 14 \\ 5z + 7x = 41 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 5y = 31 \\ 4x - y = 26 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 10x + 9y = 290 \\ 12x - 11y = 130 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - 5z = -7 \\ 6x - 11z = -9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x+5)(z+7) = (x+1)(z-9) + 112. \\ 2x + 10 = 3z + 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{z} = -4 \\ \dfrac{2}{z} + \dfrac{3}{x} = 7 \end{cases}$

(*) Este problema pertenece a la excelente colección *Ejercicios de Algebra*, por Antonio Terry y Rivas, que recomendamos eficazmente a nuestros comprofesores.

7. $\begin{cases} \dfrac{7x}{4} + \dfrac{5z}{8} = 20 \\ \dfrac{3x}{5} + \dfrac{7z}{4} = 2x - 7 \end{cases}$

Hállense los valores de las incógnitas en cada uno de los siguientes sistemas de tres ecuaciones, empleando los métodos de *sumas y restas, igualación y substitución.*

8. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x + z = 19 \\ y + z = 23 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

10. Determínense los valores de las incógnitas en el siguiente sistema de cuatro ecuaciones, empleando el método de *substitución.*

$$\begin{aligned} x + y + z + n &= 14 \\ z &= 2x \\ n + x &= y + z \\ 2z &= 2y + x \end{aligned}$$

Problemas que dan lugar a ecuaciones de primer grado con dos o más incógnitas

1. El dueño de una cochería ha comprado 50 quintales m. de heno de primera clase y 35 quintales m. de segunda, por 305 ptas., y cede a un su amigo, al mismo precio que compró, 10 quintales m. de la primera clase y 8 de la segunda por 64 ptas. Hállese el precio a que pagó el quintal m. de heno de cada clase.

2. Luis y Carlos tienen tantas bolas que, el quinto de las del primero más el tercio de las del segundo suman las bolas de éste, y el duplo de las del segundo con la mitad de las del primero, dan las de éste más seis. ¿Cuántas bolas tiene cada uno?

3. Preguntó José María a sus hermanas Angelita y Catalina qué edad tenían, y la primera respondió: «Si al cuarto y tercio de los años de Catalina, añades el tercio de los míos, tendrás su edad; y si a la mitad, tercio y cuarto de su edad añades el quinto de la mía, sabrás los años que yo tengo más 1.» ¿Qué edad tiene cada una?

4. Hallar una fracción común de tal naturaleza que, si se añade 1 a cada uno de sus dos términos, se convierte en $^4/_5$, y que, si se quitan 3 de cada uno de sus dos términos, se convierte en $^2/_3$.

5. Hállense dos números cuya diferencia multiplicada por 5 sea 30, y cuya suma más 4 sea 14.

6. Dos números son tales, que los $^2/_3$ del segundo más el primero suman el segundo, y la $^1/_2$ del segundo más $^1/_4$ del primero dan el primero más 6. ¿Cuáles son estos números?

7. Hállense dos números cuya suma sea s, y d, la diferencia de los mismos.

8. Repartióse cierta cantidad en partes iguales entre varias personas; si hubiese habido 8 personas más, cada una hubiera recibido 2 ptas. menos que las que le tocaron y si hubiese habido dos personas menos, cada una hubiera cobrado 1 pta. más. ¿Cuántas eran las personas y cuánto recibió cada una?

9. La suma de dos números es 48, y el cociente de los mismos, 3 unidades. ¿Qué números son éstos?

10. Las edades de dos personas son, actualmente, entre sí, como 3 es a 2, y 5 años atrás, eran como 11 es a 7. ¿Qué edad tiene cada una?

11. Hombres, mujeres y niños, en número de 40, han solemnizado la fiesta de Navidad con un modesto banquete que ha importado 66 ptas.: cada hombre ha gastado 4 pesetas; cada mujer, 3, y cada niño, 1. Se sabe que el número de niños era triplo que el de hombres y mujeres juntos: ¿cuántos había de cada clase?

12. Tiene Solita cierto número de monedas en cada mano, y dice a su amigo Román: «Si quito una moneda de la mano izquierda y la pongo en la derecha, tengo en ésta doble número que en la izquierda; pero si quito tres monedas de la mano derecha y las pongo en la izquierda, entonces tengo en ésta doble número que en la derecha. ¿Cuántas monedas tengo en cada mano?»

13. El dueño de una taberna tiene vino en dos toneles: si sacase 5 litros del primero y los echase en el segundo, habría en éste los litros que antes había en el primero, y si sacase 10 litros del segundo y los echase en el primero, entonces quedaría en el tonel segundo la sexta parte del vino contenido en el primero. ¿Cuántos litros de vino hay en cada tonel?

14. Tres jornaleros han cobrado el trabajo de una semana: el primero y el segundo han recibido, en junto, 32 pesetas; el segundo y el tercero, en junto también, 43 pesetas, y la suma de lo cobrado por el primero y el tercero es 39 ptas. ¿Cuánto ha recibido cada uno?

15. Un lingote aleación de oro y plata cuyo peso es 3,000 gramos, sumergido en el agua pesa 2,798 gramos. ¿Cuántos gramos de oro y cuántos de plata contiene? (*)

16. Compró un niño estampas y bolas por valor de 55 céntimos, pagando por cada 4 estampas 5 céntimos, y 10 céntimos por cada 6 bolas. Dos días después vendió, a razón de cómo había comprado, los $^3/_5$ de las estampas y la tercera parte de las bolas por 25 céntimos. ¿Cuántas estampas y bolas compró?

17. Un librero invirtió 1,280 ptas. en libretas y cartapacios, pagando las libretas a 6 pesetas la docena, y los cartapacios a 4 ptas. el centenar. Para complacer a un compañero, cedióle, a iguales precios, $^1/_5$ de sus libretas y los $^3/_4$ de los cartapacios por 300 pesetas. Determínese cuántas libretas y cartapacios compró el librero.

18. Un tabernero tiene vino de tres clases, cuyos precios son 7, 4 y 3 ptas. el decalitro, respectivamente. Se propone obtener 200 decalitros de mezcla para venderlos a 4'50 ptas. uno, y desea entren en la mezcla tantos decalitros de la tercera clase como de la primera y segunda juntas. ¿Qué cantidad de vino deberá tomar de cada clase?

19. Tenemos tres bolsas, cada una de las cuales contiene cierta cantidad de dinero: si se tomasen 2 pesetas de la segunda y se pusiesen en la primera, habría en la primera doble cantidad de la que entonces contendría la segunda; si se sacasen 7 pesetas de la tercera y se pusiesen en la segunda, habría en ésta 9 veces lo que contendría la tercera, y si sacásemos 4 pesetas de la tercera y las pusiésemos en la primera, quedaría en la tercera la cuarta parte del dinero que contendría la primera. ¿Cuánto hay en cada bolsa?

20. Al autor de este libro, en 1893, un Profesor amigo le preguntó qué edad tenía, y aquél contestó: «El año en que nací lo representa un número de cuatro guarismos, cuyos valores absolutos suman 21; la cifra de sus centenas es igual a la de de sus unidades sumada con la de los millares; el duplo de las cifras de las unidades es igual a la suma de las decenas, centenas y millares, y la cifra de las decenas vale tanto como la suma de la $^1/_2$ de la de las centenas con la de los millares.» Averígüese en qué año nació el autor de este libro y cuántos años tenía en 1893.

Ecuaciones puras y mixtas de segundo grado

Después de haber preparado cada una de las siguientes ecuaciones, hállese el valor de su incógnita:

1. $x^2 - 8 = 892.$

2. $3x^2 - 20 = 412.$

3. $x^2 + 14 = 2x^2 - 67.$

4. $\frac{3x^2}{5} + 8 - 3 = x^2 - 995.$

5. $\frac{4x^2}{5} + x^2 - 5 = \frac{x^2}{5} + 10 + x^2.$

6. $2\,(x^2 + 7) = x^2 + 114.$

7. $4\,(x^2 - 3) + 16 = 5\,(x^2 - 2) - 50.$

8. $3\,(x^2 + x^2) - 100 = -\,2x^2 + 3100.$

9. $x^2 - 10x = 264.$

10. $x^2 + 4x = 96.$

11. $x^2 - 20x = -\,91.$

12. $2x^2 + 3x + 1 = 3.$

13. $6x^2 - 3x + 4 = 20x + 82.$

14. $x^2 + \frac{x}{5} - 30 = 100x - 2520.$

15. $3x^2 - \frac{5x}{10} + 8 = \frac{x}{2} + \frac{3x}{6} + 29858.$

16. $x^2 - 3x = 2\,(6 + x) + 2.$

17. $x\,(x - 1) = 120 + x.$

18. $x\,(x - 15) = 2\,(x - 15).$

19. $x\,(2x - 80) = x^2 + 24000.$

20. $2x^2 + \frac{6}{5} = x\left(x + \frac{31}{5}\right).$

(*) La densidad del oro es 19'25, y la de la plata, 10'47; esto es, 19'25 gramos de oro, sumergidos en el agua, pierden de peso 1 gramo, y 10'47 gramos de plata, en iguales condiciones, pierden también de peso 1 gramo.

Problemas que dan lugar a ecuaciones puras o mixtas de segundo grado

1. Determínese la longitud del radio de un cilindro cuyo volumen es 4'7500992 metros cúbicos y 4'20 m. su altura.

2. Si de las tres novenas partes del cuadrado de un número se quitan 800 unidades, resultan 1,900. ¿Qué número es éste?

3. ¿Cuál es el número que, multiplicado por sus $^3/_5$, da de producto 6,615?

4. Enrique tiene tanto dinero como los $^2/_3$ del que posee Luis, y si las pesetas de éste se multiplican por las del primero, se obtienen 3,174 pesetas. ¿Cuántas pesetas tiene cada uno?

5. Aumentando un número en 4 unidades y, multiplicándole por el mismo número disminuído de 4 unidades, se obtiene 609. ¿Qué número es el de referencia?

6. Calcúlense las dimensiones de la base y altura de un campo de forma rectangular cuya área es 10,800 metros cuadrados, sabiendo, además, que la altura es los $^3/_4$ de la base.

7. ¿Cuál es el número cuyo cuadrado disminuído en 924, es igual a 20 veces dicho número?

8. Si del triplo del cuadrado de las pesetas que tiene Andrés más el duplo de dichas pesetas, se quitan 240 pesetas, resultan 1,000 pesetas cabales. ¿Cuántas pesetas tiene Andrés?

9. Si al duplo del cuadrado de la edad que tiene un niño, más el triplo de esta edad, se añaden 48 años, resultan 200 años. ¿Cuántos años tiene el niño?

10. Descomponer el número 40 en dos partes, tales, cuyo producto sea 256.

11. Las tres cuartas partes del cuadrado del valor de un libro, más el duplo de este valor, más 1 peseta, equivalen a 6 veces el valor del libro más los $^2/_3$ de este valor. ¿Qué precio tiene el libro?

12. Hállese un número tal, que su cuadrado disminuído en 5 unidades, sea igual a 4 veces dicho número.

13. Calcúlese el número cuyo cuadrado, sumado con el duplo y el cuádruplo de dicho número, den de suma 135.

14. El duplo del cuadrado de un número, sumado con su tercio y duplo, es 485. ¿Qué número es éste?

15. Hállense dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 1,056.

16. Hállense dos números enteros consecutivos, tales, que la suma de sus cuadrados sea 313.

17. Hallar dos números enteros que se diferencien en 4 unidades, y que el producto del uno por el otro sea 1,932.

18. El producto de dos números es 63, y 16, la suma de los mismos. ¿Qué números son?

19. Siendo 5 la diferencia de dos números, y 300 el producto de los mismos, ¿qué números son éstos?

20. ¿Cuál es el número que excede a su raíz cuadrada en 132 unidades?

21. La diferencia de dos números es 14, y 436, la suma de sus cuadrados. ¿Qué números son éstos?

22. El área de un triángulo es 2,480 metros cuadrados, y se sabe que su altura mide 18 metros menos que la base. ¿Cuánto mide la base y cuánto la altura?

23. Determínense las dimensiones de un rectángulo cuya área es 2,520 metros cuadrados, sabiendo que la base tiene de longitud 18 metros más que la altura.

24. El área de un rectángulo es 1,000 metros cuad., y su perímetro mide 140 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones?

FIN DEL ÁLGEBRA PRÁCTICA

APÉNDICE

MEDICIÓN DE SUPERFICIES Y VOLÚMENES

CONOCIMIENTO Y MEDIDA
DE LAS SUPERFICIES Y CUERPOS GEOMÉTRICOS

DEFINICIONES

1. **Línea recta.** — *Línea recta* es una serie continuada de puntos que llevan todos una misma dirección. Puede considerarse representada por un hilo bien tirante, y determina la distancia más corta entre dos puntos.

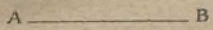


Fig. 1.

A B (fig. n.º 1) es una línea recta.

2. **Línea quebrada.** — Es la formada por dos o más rectas que llevan distintas direcciones.

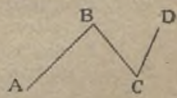


Fig. 2.

A B C D (fig. 2) es una línea quebrada.

3. **Línea curva.** — Es aquélla que no es recta ni quebrada.

Fig. 3.

C D (*fig.* 3) es una línea curva.

4. **Ángulo.** — Es la abertura de dos líneas que se unen en un punto llamado *vértice*. Dichas líneas se llaman lados.

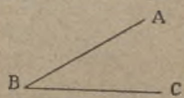


Fig. 4.

A B C (fig. 4) es un ángulo.

5. **Línea perpendicular.** — Cuando una recta cae sobre otra sin inclinarse a ningún lado, se dice que la recta primera es *perpendicular* a la segunda. El ángulo o ángulos que resultan se llaman *rectos*. Todos los ángulos rectos son iguales.

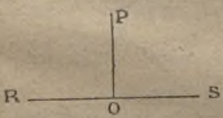


Fig. 5.

La recta *P O* (fig. 5) es perpendicular a la *R S*, y los ángulos *R O P* y *P O S* son rectos.

6. **Línea oblicua.** — Cuando una recta cae sobre otra formando dos ángulos desiguales, se dice que la recta primera es oblicua a la segunda. El ángulo menor que el recto se llama *agudo*, y el mayor, *obtuso*.

La recta *Y O* (fig. 6), es oblicua a la *A B*. El ángulo *Y O B* es agudo, y el *A O Y*, obtuso.

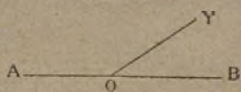


Fig. 6.

7. Un ángulo cuya abertura sea la *noventava* parte del ángulo recto, se dice que mide 1 *grado*. El ángulo recto mide, pues, 90º; el agudo, menos de 90º, y el obtuso, más de 90º.

8. **Plano.** — Se llama *plano* la superficie con la cual coincide, en toda su extensión, la arista de una regla bien construida.

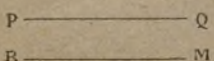


Fig. 7.

9. **Rectas paralelas.** — Dos o más rectas trazadas sobre un mismo plano se llaman *paralelas* cuando, aunque se prolonguen indefinidamente, no pueden encontrarse.

Las rectas *P Q* y *R M* (fig. 7) son paralelas.

10. Polígono. — *Polígono* es toda figura plana limitada por líneas rectas. Estas rectas se llaman *lados* del polígono, y el conjunto de lados, o contorno, *perímetro. Diagonal* de un polígono, es la recta que une los vértices de dos ángulos que no son consecutivos.

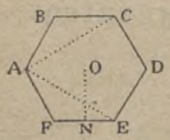


Fig. 8.

A B C D E F (fig. 8) es un polígono; *E F*, un lado del mismo, y *A E* y *A C*, dos diagonales.

11. Polígono regular. — Un polígono se llama *regular* cuando tiene todos sus lados y ángulos iguales. En el caso contrario, se llama *irregular*.

Apotema de un polígono regular es la perpendicular bajada desde el centro del polígono a uno de sus lados.

O N (fig. 8) es una apotema.

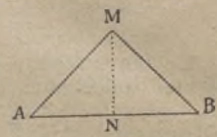


Fig. 9.

12. Triángulo. — *Triángulo* es el polígono que tiene tres lados.

A M B (fig. 9) es un triángulo.

Base de un triángulo es el lado sobre el cual se considera que la figura descansa, y *altura*, la perpendicular bajada a la base, o a su prolongación, desde el vértice opuesto. Cualquier lado de un triángulo puede tomarse por base. En la fig. 9, *A B* es la base del triángulo, y *M N*, la altura.

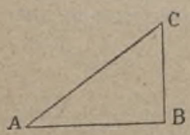


Fig. 10.

13. *Triángulo equilátero* es el que tiene sus tres lados iguales. *Triángulo isósceles* es el que sólo tiene dos lados iguales. *Triángulo escaleno* es el que tiene sus tres lados desiguales.

14. *Triángulo rectángulo* es el que tiene un ángulo recto.

A B C (fig. 10) es un triángulo rectángulo.

El lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*, y los lados que forman dicho ángulo, *catetos*.

A C (fig. 10) es la hipotenusa; *A B* y *B C*, los dos catetos.

15. Cuadriláteros. — Se llama *cuadrilátero* el polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros se dividen en *paralelogramos*, *trapecios* y *trapezoides*.

Paralelogramos son los cuadriláteros que tienen cada lado paralelo a su opuesto. Pueden ser *rectángulos* y *oblicuángulos*.

Los paralelogramos rectángulos son dos: el *cuadrilongo* y el *cuadrado*.

Los paralelogramos oblicuángulos son también dos: el *rombo* y el *romboide*.

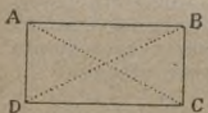


Fig. 11.

Cualquier lado de un paralelogramo puede tomarse por base. Su altura es la perpendicular bajada a la base desde un punto del lado opuesto.

16. Cuadrilongo. — Es el paralelogramo que tiene los ángulos rectos y sus lados iguales dos a dos.

A B C D (fig. 11) es un cuadrilongo; *D C* es la base, y *A D* su altura.

Las diagonales *A C* y *D B* de un cuadrilongo son iguales, y se cortan por mitad. El cuadrilongo también se llama *rectángulo*.

17. Cuadrado. — Es el paralelogramo que tiene sus ángulos rectos y sus cuatro lados iguales.

Fig. 12.

P T R Q (fig. 12) es un cuadrado.

Las diagonales *T Q* y *P R* del cuadrado, se cortan en un ángulo recto por mitad.

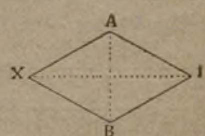


Fig. 13.

18. Rombo. — Es el paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales y sus ángulos iguales dos a dos.

A I B X (fig. 13) es un rombo.

Las diagonales, *X I* y *A B*, de un rombo se cortan en ángulo recto por mitad.

19. Romboide. — Es el paralelogramo que tiene los lados y los ángulos iguales dos a dos.

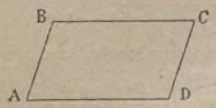


Fig. 14.

$B\ A\ D\ C$ (fig. 14) es un romboide.

20. Trapecio. — Es el cuadrilátero que tiene dos lados paralelos, los cuales son sus bases. Altura del trapecio es la perpendicular bajada a una base desde un punto cualquiera de la otra.

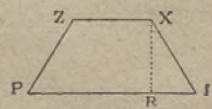


Fig. 15.

Paralela media de un trapecio es la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos, y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las bases del trapecio.

$Z\ X\ P\ I$ (fig. 15) es un trapecio; $Z\ X$ y $P\ I$ son sus bases, y $X\ R$, la altura.

Trapezoide es el cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo a su opuesto.

21. Circunferencia y círculo. — *Circunferencia* es una curva cerrada y plana, cuyos puntos equidistan todos de otro interior, llamado *centro.*

Círculo es la superficie plana limitada por la circunferencia.

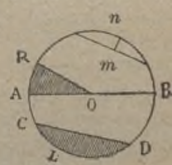


Fig. 16.

$A\ R\ B\ D\ L\ C$ (fig. 16) es una circunferencia.

Radio es la recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia. $R\ O$ (fig. 16) es un radio.

Diámetro es la recta que, pasando por el centro, tiene sus extremos en la circunferencia. $A\ B$ (fig. 16) es un diámetro.

Cuerda es la recta que, sin pasar por el centro, tiene sus extremos en la circunferencia. $C\ D$ (fig. 16) es una cuerda.

Sagita es la recta que va desde el punto medio de la cuerda al punto medio de su arco; $m\ n$ es una sagita.

Arco es una porción cualquiera de la circunferencia. $A\ R$ (fig. 16) es un arco; RB otro arco; $B\ D$, otro; etc.

Un arco que comprenda media circunferencia se llama *semicircunferencia;* el arco cuarta parte de la circunferencia se denomina *cuadrante.*

La circunferencia se considera dividida en 360 partes iguales, o grados; luego una semicircunferencia mide 180°, y un cuadrante, 90°.

22. Sector. — Es el espacio comprendido entre dos radios y el arco correspondiente.

$A\ O\ R$ (fig. 16) es un sector.

Fig. 17.

23. Segmento. — Es el espacio comprendido entre una cuerda y su arco.

$C\ L\ D$ (fig. 16) es un segmento.

24. Corona circular. — *Corona circular*, o *anillo*, es el espacio comprendido entre dos circunferencias concéntricas.

La fig. 17 representa una corona circular. La diferencia entre los radios $O\ R$ y $O\ I$ es la anchura de la corona.

Medida de las superficies planas

25. Área de una figura, es el número de unidades cuadradas que contiene. Puede expresarse en metros cuadrados, decímetros cuadrados, varas cuadradas, canas cuadradas, etc.

26. *El área de un triángulo se obtiene multiplicando la base por la mitad de su altura.*

Llamando S al área, b a la base y a a la altura, la fórmula que representa el área del triangulo es: $S = \frac{b\,a}{2}$ (*); y también: $a = \frac{2 \times S}{b}$, y $b = \frac{2 \times S}{a}$.

(*) $b\ a$ significa el producto de $b \times a$.

En todo triángulo rectángulo, *el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Si $a\,b$ es la hipotenusa, $a\,c$ un cateto, y $b\,c$ el otro cateto, tendremos:

Fórmulas: $a\,b^2 = a\,c^2 + b\,c^2$; $a\,b = \sqrt{a\,c^2 + b\,c^2}$; $a\,c = \sqrt{a\,b^2 - b\,c^2}$.

27. *El área de cualquier paralelogramo* (cuadrilongo, cuadrado, rombo y romboide) *se halla multiplicando la base por la altura.*

Sean: area $= S$; base $= b$; altura $= a$. *Fórmulas:* $S = b\,a$; por lo que:

$$a = \frac{S}{b} \text{ y } b = \frac{S}{a}.$$

El área del cuadrado se obtiene, según la regla anterior, multiplicando el lado por sí mismo; es, pues, su área, la segunda potencia del lado. Sean: área $= S$; lado $= l$. *Fórmulas:* $S = l^2$, por lo que, $l = \sqrt{S}$.

28. *El área de un trapecio se halla multiplicando la semisuma de sus bases por la altura.*

Sean: área $= S$; bases $= b$ y b'; altura $= a$. *Fórmulas:* $S = \frac{(b + b')\,a}{2}$ (1); por lo que, $a = \frac{2 \times S}{b + b'}$.

Sea: $p_m =$ paralela media; por tanto (**20**), $\frac{b + b'}{2} = p_m$. Substituyendo este valor en la fórmula (1) tenemos $S = p_m \times a$; luego, *el área de un trapecio se halla también multiplicando la paralela media por la altura.*

29. *La longitud de una circunferencia se obtiene multiplicando su diámetro por 3'1416.*

Dividiendo la longitud de una circunferencia cualquiera por la longitud de su diámetro, el cociente siempre es el mismo: 3'1416, con menor error que una diezmilésima. Este cociente se representa por la letra griega π, que se lee *pi.* Si llamamos, pues, C a la longitud de la circunferencia y r al radio de la misma, tendremos que $\frac{C}{2r} = \pi$. *Fórmulas:* $C = 2\,\pi r$; por lo que $r = \frac{C}{2\pi}$.

30. *El área de un polígono regular, se obtiene multiplicando el perímetro por la mitad de su apotema.*

Sean: área $= S$; perímetro $= p$; apotema $= a$. *Fórmulas:* $S = \frac{p\,a}{2}$; por lo que: $p = \frac{2 \times S}{a}$; y $a = \frac{2 \times S}{p}$.

31. *El área de un círculo se obtiene multiplicando la longitud de su circunferencia por la mitad del radio.*

Sean: área $= S$; circunferencia $= 2\,\pi\,r$; radio $= r$. Tendremos:
$S = \frac{2\,\pi r \times r}{2} = \pi r^2$. *Fórmulas:* $S = \pi\,r^2$; por lo que: $r^2 = \frac{S}{\pi}$, y también,

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

32. *El área de una corona circular se halla restando el área del círculo menor del área del círculo mayor, o bien multiplicando la diferencia de los cuadrados de los radios por π.*

Sean: área de la corona $= S$; radio de la circunferencia mayor $= r$; radio de la menor $= r'$.

Tendremos: $S = \pi\,r^2 - \pi\,r'^2 = (r^2 - r'^2)\,\pi$. *Fórmula:* $S = (r^2 - r'^2)\,\pi$.

33. *Para obtener el área de un polígono irregular, se descompone en triángulos, o en triángulos y trapecios, y la suma de las áreas de las figuras parciales da el área total.*

34. *El área de un sector se halla multiplicando el área del círculo correspondiente por el número de grados del arco del sector, y dividiendo el producto por* 360.

Sean: área del círculo a que el sector corresponde $= S$; área del sector $= S'$; número de grados del arco $= g$. Si a 360 grados corresponde de área S, a 1 grado corresponderá $\frac{S}{360}$, y a g grados, $\frac{S \times g}{360}$. De donde se deducen las siguientes *fórmulas:* $S' = \frac{S \times g}{360}$; $g = \frac{360 \times S'}{S}$; $S = \frac{360 \times S'}{g}$.

35. *El área del segmento menor que un semicírculo, se halla restando de la del sector, la del triángulo rectilíneo formado por los dos radios y la cuerda. Si es mayor que un semicírculo, añadiendo al área del sector la de dicho triángulo.*

Poliedros y cuerpos redondos

DEFINICIONES

36. Los poliedros pueden ser *regulares* e *irregulares*. Son regulares: el *tetraedro*, el *octaedro*, el *icosaedro*, el *exaedro* o *cubo* y el *dodecaedro*.

Son irregulares, los *prismas* y las *pirámides*.

Los principales cuerpos redondos son: el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*.

Fig.18.

37. Tetraedro. —El *tetraedro* es un poliedro cuyas cuatro caras son triángulos equiláteros e iguales entre sí.

La fig. 18 representa un tetraedro.

Fig.19.

38. Octaedro e icosaedro.— El *octaedro* y el *icosaedro* son poliedros cuyas caras son triángulos equiláteros e iguales. El octaedro tiene ocho caras, y el icosaedro, veinte.

La fig. 19 representa un octaedro, y la 20, un icosaedro.

Fig.20.

39. Exaedro o cubo.— El *exaedro*, o *cubo*, es un poliedro cuyas seis caras son cuadrados iguales.

La fig. 21 representa un exaedro.

Fig.21.

40. Dodecaedro. — El *dodecaedro* es un poliedro cuyas doce caras son pentágonos regulares e iguales.

La fig. 22 representa un dodecaedro.

Fig.22.

41. Prisma.— Llamamos *prisma* a un poliedro irregular que tiene por base dos polígonos iguales y paralelos, y cuyas caras laterales son paralelogramos.

El prisma es *recto* cuando sus aristas son perpendiculares a las bases, y *oblicuo*, en el caso contrario.

Un prisma es *regular*, cuando es recto y sus bases son polígonos regulares; en el caso contrario se llama *irregular*.

Paralelepípedo es un prisma cuyas bases son dos paralelogramos.

Altura de un prisma, es la perpendicular bajada desde la base superior a la inferior, o a su prolongación. La fig. 23 es un prisma.

Fig.23.

42. Pirámide. — Se llama *pirámide* un poliedro irregular que tiene por base un polígono cualquiera, y por caras laterales, triángulos que terminan todos en un punto común, llamado *vértice*, o *cúspide*, de la pirámide.

Altura de una pirámide es la perpendicular bajada desde la cúspide a la base o a su prolongación.

La pirámide es *regular* cuando el polígono de su base es regular y su altura cae en el centro del polígono; en el caso contrario es *irregular*. La fig. 24 es una pirámide; *A* es su cúspide, y *A n*, su altura.

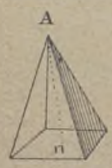


Fig. 24.

43. Tronco de pirámide de bases paralelas. — Si a una pirámide se le da un corte paralelo a la base, la porción que queda se llama *tronco de pirámide* o *pirámide truncada, de bases paralelas*.

La *altura* de un tronco de pirámide de bases paralelas, es la distancia entre ambas bases. La fig. 25 representa un tronco de pirámide de bases paralelas, *A B C D* es su base inferior, y *a b c d*, la superior; *o m* es la altura.

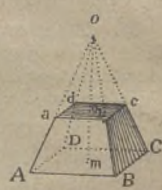


Fig. 25.

44. Cilindro. — Se llama *cilindro* un cuerpo redondo engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

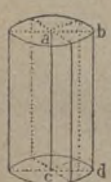


Fig. 26.

La fig. 26 es un cilindro, en el que se ven diferentes posiciones del rectángulo que le engendra; una de estas posiciones es *a b d c*. El lado *b d* forma la superficie lateral; el lado *a c* se llama *eje;* los lados *a b* y *c d* engendran la superficie circular de las dos bases.

El cilindro se llama *recto* cuando el eje es perpendicular a las dos bases; en el caso contrario, es *oblicuo*. En el cilindro recto, sus bases son dos círculos iguales y paralelos.

Altura del cilindro recto es la longitud de su eje, o del lado generador; en el oblicuo, la altura es la perpendicular bajada a la base, o a su prolongación, desde el punto más distante de ella.

45. Cono. — Se llama *cono* un cuerpo redondo engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El cateto alrededor del cual gira el triángulo rectángulo se llama *eje* del cono; el otro cateto origina el círculo de la base, y la hipotenusa, la superficie lateral; por lo que se llama *generatriz*.

El *cono* es recto cuando el eje cae perpendicular a la base; en el caso contrario, es *oblicuo*.

El cono puede considerarse como una pirámide de un número infinito de triángulos laterales.

Altura del cono es la perpendicular bajada desde la cúspide a la base, o a su prolongación. La altura del cono recto es la longitud de su eje. La fig. 27 es un cono recto, cuya altura es *R o*.

Fig. 27.

46. Cono truncado de bases paralelas. — Si al cono recto se le da un corte paralelo a la base, la porción comprendida entre el corte y la base se llama *cono truncado*, o *tronco de cono*, de bases paralelas. El círculo superior y el inferior son sus bases. Su *altura* es la distancia entre ambas bases.

Fig. 28.

La fig. 28 es un tronco de cono de bases paralelas, cuya altura es *n o*.

47. Esfera. — La *esfera* es un cuerpo redondo engendrado por la revolución completa de un semicírculo que gira alrededor de su diámetro.

Centro de la esfera es un punto interior equidistante de todos los puntos de la superficie esférica.

Eje es el diámetro sobre el cual la esfera gira; sus extremos se llaman polos.

Radio de la esfera es la distancia desde el centro a la superficie.

Todo plano que corte a la esfera tiene un círculo por sección. Si dicho plano pasa por el centro, divide a la esfera en dos partes iguales, y la sección es un *círculo máximo;* si el plano no pasa por el centro, las partes en que la esfera se divide son desiguales, y el círculo se llama *mínimo*. La fig. 29 es una esfera.

Fig. 29.

Áreas de los poliedros y cuerpos redondos

48. *El área total de un cubo se halla multiplicando por 6 el cuadrado de su lado o arista.*

Sean: área total $= S$; lado $= l$. *Fórmulas:* $S = 6\ l^2$; luego $l = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

49. *El área lateral de un prisma recto, se obtiene multiplicando el perímetro de su base por su altura. La total, añadiendo a la lateral el área de los polígonos de las dos bases.*

Sean: área lateral $= S$; perímetro $= p$; altura $= a$. *Fórmulas:* $S = p\ a$; y por lo mismo: $a = \dfrac{S}{p}$; $p = \dfrac{S}{a}$.

Si llamamos a' a la apotema de la base y S' al área total, será $S' = S + p\ a'$.

50. *El área lateral de una pirámide regular, se obtiene multiplicando el perímetro de su base por la mitad de la altura de uno de sus triángulos laterales. La total, añadiendo a la lateral el área del polígono de la base.*

Sean: área lateral $= S$; altura de un triángulo $= a$; perímetro de la base $= p$. *Fórmulas:* $S = \dfrac{p\ a}{2}$; luego $p = \dfrac{2 \times S}{a}$, y $a = \dfrac{2 \times S}{p}$.

Si llamamos a' a la apotema de la base y S' al área total, será: $S' = S + \dfrac{p\ a'}{2}$.

51. *El área lateral de un cilindro recto, se obtiene multiplicando la circunferencia de la base por su altura. La total, añadiendo a la lateral el área de las dos bases.*

Sean: área lateral $= S$; altura $= a$. *Fórmulas:* $S = 2\ \pi\ r\ a$; y también $a = \dfrac{S}{2\ \pi\ r}$, y $r = \dfrac{S}{2\ \pi\ a}$

Si llamamos S' al área total, será: $S = S + 2\ \pi\ r^2$.

52. *El área lateral de un cono recto, se obtiene multiplicando la circunferencia de su base por la mitad de la generatriz. La total, añadiendo a la lateral el área del círculo que forma la base.*

Sean: área lateral $= S$; generatriz $= g$. *Fórmulas:* $S = \dfrac{2\ \pi\ r\ g}{2} = \pi\ r\ g$; y también $g = \dfrac{S}{\pi\ r}$, $r = \dfrac{S}{g\ \pi}$.

Si llamamos S' al área total, será: $S' = S + \pi\ r^2$.

53. *El área lateral de un tronco de pirámide de bases paralelas, se halla multiplicando la semisuma de los perímetros de las dos bases por la altura de uno de los trapecios laterales. La total, añadiendo a la lateral el área de las dos bases.*

Sean: área lateral $= S$; p y p' los perímeros de las bases superior e inferior, respectivamente; altura de un trapecio $= a$. *Fórmulas:* $S = \frac{(p + p')\,a}{2}$; luego $a = \frac{2 \times S}{p + p'}$, y $p + p' = \frac{2\,S}{a}$; luego: $p = \frac{2\,S}{a} - p'$, y $p' = \frac{2\,S}{a} - p$.

54. *El área lateral de un tronco de cono de bases paralelas, se halla multiplicando la semisuma de las circunferencias de las dos bases por la generatriz. La total, añadiendo a la lateral el área de los círculos que forman las dos bases.*

Sean: área lateral $= S$; r y r' los radios de la bases superior e inferior, respectivamente; generatriz $= g$. *Fórmulas:* $S = \frac{(2\,\pi\,r + 2\,\pi\,r')\,g}{2} = \pi\,g\,(r + r')$ (1); $g = \frac{S}{\pi\,(r + r')}$; $r = \frac{S - g\,\pi\,r'}{g\,\pi}$, y $r' = \frac{S - g\,\pi\,r}{g\,\pi}$.

Véase el origen de estas dos últimas fórmulas: Dividiendo los dos miembros de la fórmula (1) por $\pi\,g$, tenemos: $r + r' = \frac{S}{\pi\,g}$; de donde resulta $r = \frac{S}{\pi\,g} - r'$ y $r' = \frac{S}{\pi\,g} - r$.

Verificando las substracciones indicadas en los segundos miembros de las dos últimas igualdades, tenemos: $r = \frac{S - \pi\,g\,r'}{\pi\,g}$ y $r' = \frac{S - \pi\,g\,r}{\pi\,g}$.

Si llamamos S' al área total: será $S' = S + \pi\,r^2 + \pi\,r'^2$.

55. *El área de una esfera se halla multiplicando la circunferencia de un círculo máximo por su diámetro; o lo que es lo mismo, multiplicando cuatro veces el cuadrado del radio por π.*

Sean: área de la esfera $= S$, y r, su radio. *Fórmulas:* $S = 2\,\pi\,r \times 2\,r = 4\,\pi\,r^2$; luego: $r^2 = \frac{S}{4\,\pi}$, y $r = \sqrt{\frac{S}{4\,\pi}}$.

56. *El área de un tetraedro se obtiene hallando la de uno de sus triángulos y multiplicándola por 4; la de un octaedro, hallando la de uno de sus triángulos y multiplicando por 8; la de un icosaedro, haciendo lo propio y multiplicando por 20; la de un dodecaedro, hallando el área de uno de sus pentágonos y multiplicando por 12.*

Volúmenes de los poliedros y cuerpos redondos

57. *El volumen de un exaedro o cubo, es el resultado de elevar su lado o arista a la tercera potencia.*

Sean: volumen $= V$; arista $= a$. *Fórmulas:* $V = a^3$; luego, $a = \sqrt[3]{V}$.

58. *El volumen de un prisma cualquiera, se obtiene multiplicando el área de su base por su altura.*

Sean: volumen $= V$; área de su base $= B$; altura $= a$. *Fórmulas:* $V = B\,a$; luego: $a = \dfrac{V}{B}$, y $B = \dfrac{V}{a}$.

59. *El volumen de cualquier pirámide, se halla multiplicando el área de su base por el tercio de su altura.* $\frac{1}{3} Bh$

Sean: volumen $= V$; área de su base $= B$; altura $= a$. *Fórmulas:* $V = \dfrac{B\,a}{3}$; luego: $a = \dfrac{3 \times V}{B}$, *y* $B = \dfrac{3 \times V}{a}$.

60. *El volumen de cualquier cilindro, se obtiene multiplicando el área de su base por su altura.*

Sean: volumen $= V$; altura $= a$. *Fórmulas:* $V = \pi\, r^2\, a$; luego $a = \dfrac{V}{\pi\, r^2}$; $r^2 = \dfrac{V}{\pi a}$, y $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi\, a}}$.

61. *El volumen de cualquier cono, se obtiene multiplicando el área de su base por el tercio de su altura.*

Sean: volumen $= V$; altura $= a$. *Fórmulas:* $V = \dfrac{\pi\, r^2\, a}{3}$; luego $a = \dfrac{3 \times V}{\pi\, r^2}$ $r^2 = \dfrac{3 \times V}{\pi\, a}$, y $r = \sqrt{\dfrac{3 \times V}{\pi\, a}}$.

62. *El volumen de un tronco de pirámide de bases paralelas, es la suma de los volúmenes de tres pirámides cuya altura es, en todas, la del tronco, y cuyas bases son: la 1.ª, la base superior del tronco; la 2.ª, la base inferior del mismo, y la 3.ª, una media proporcional entre dichas dos bases.*

Sean: volumen del tronco $= V$; área de la base superior $= B$; área de la base inferior $= B'$; altura $= a$. El área de la base de la 3.ª pirámide será, pues, $\sqrt{B\,B'}$. (*Aritmética.* — **350.** — *Escolio 1.º*)

$$\textit{Fórmula: } V = \frac{B\,a}{3} + \frac{B'\,a}{3} + \frac{\sqrt{B\,B'} \times a}{3} = \frac{B\,a + B'\,a + \sqrt{B \times B'} \times a}{3}$$

$$= \frac{(B + B' + \sqrt{B \times B'})\,a}{3}.$$

63. *El volumen de un tronco de cono de bases paralelas, es la suma de los volúmenes de tres conos, cuya altura es, en todos, la del tronco, y cuyas bases son: la 1.ª, la base superior del tronco; la 2.ª, la base inferior del mismo, y la 3.ª, una media proporcional entre dichas dos bases; cuya fórmula, después de simplificada, se convierte en la siguiente:*

$$V = \frac{\pi\, a}{3}\,(r^2 + r'^2 + r r').$$

La cual nos dice que el volumen de un tronco de cono de bases paralelas, es un producto de tres factores: 1.º, π; *2.º, el tercio de la altura; 3.º, el cuadrado del radio mayor, más el cuadrado del radio menor, más el producto del radio mayor por el menor.*

64. *El volumen de una esfera se halla multiplicando su superficie* ($4\,\pi\, r^2$) *por el tercio del radio.*

Sean: volumen $= V$; radio $= r$. *Fórmulas:* $V = \frac{4\pi r^2 \times r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$; luego: $r^3 = \frac{3 \times V}{4\pi}$, y $r = \sqrt[3]{\frac{3 \times V}{4\pi}}$.

65. Volúmenes de los poliedros regulares. — *El tetraedro es una pirámide triangular regular. El octaedro está formado por dos pirámides cuadrangulares, regulares e iguales, unidas por sus bases; luego su volumen será el duplo del volumen de una de estas pirámides. El icosaedro se puede considerar formado por 20 pirámides triangulares, regulares e iguales, unidas por sus cúspides en el centro del sólido; luego se obtendrá el volumen del sólido multiplicando por 20 el volumen de una de estas pirámides.*

El dodecaedro se considera formado por 12 pirámides pentagonales, regulares e iguales, unidas por sus cúspides en el centro del sólido; luego su volumen se obtendrá multiplicando por 12 el volumen de una de estas pirámides.

Aforo de pipas y toneles

Para determinar la capacidad de una pipa, tonel, etc., de mayor anchura por el centro que por los témpanos, se ve, primeramente, la distancia, *en decímetros*, desde la boca A, hasta el punto más distante de la misma, B (fig. 30), cuya operación puede practicarse sirviéndose de una regla o bastón a propósito, y el cubo de dicha longitud se multiplica por 0'625. El producto que se obtenga expresará, en litros, la capacidad buscada.

Fig. 30.

Si representamos por V la capacidad de la pipa, y por D, la distancia entre A y B, la *fórmula de aforo* será:

$$V = D^3 \times 0{'}625.$$

Si la forma de las pipas se separase mucho de la ordinaria, habría, en el cálculo, un error por exceso o por defecto. Sería por exceso, si la forma se aproximase a la cilíndrica, y por defecto, si el diámetro de la boca (diámetro mayor o de la barriga) fuese mayor que el que ordinariamente tienen estos envases. En ambos casos, los errores pueden corregirse fácilmente, rebajando, en el primer caso, el 1 por ciento de la capacidad obtenida, y añadiéndolo en el segundo.

EJEMPLO: *¿Cuántos litros contiene una pipa de forma ordinaria llena de vino, siendo 12 decímetros 8 centímetros la distancia comprendida entre la boca de la misma y el vértice del ángulo inferior del témpano?* (Distancia de A a B, fig. 30.)

SOLUCIÓN: Aplicando la *fórmula de aforo*, tendremos:

$$V = 12{'}8^3 \times 0{'}625$$

y por tanto, $V = 1311$ litros.

PROBLEMAS ARITMÉTICO-GEOMÉTRICOS

1. ¿Cuántos grados mide el arco quinta parte de la circunferencia? ¿Y los arcos tercera, sexta, novena y dozava parte de la misma?

2. ¿Cuántos metros de longitud corresponden a 1 grado de meridiano terrestre? ¿Y a un arco de meridiano de 45 grados? ¿Y a un arco de 60 grados?

3. Determínese el área de un triángulo cuya base mide 28 metros, siendo la longitud de su altura 9'45 metros.

4. Se ha comprado un terreno de forma triangular a razón de 273'50 pesetas el área. La longitud de uno de los lados del polígono que afecta el terreno mencionado es 245 metros, midiendo 380 m. la distancia entre dicho lado y el vértice del ángulo opuesto. ¿Cuánto ha entregado el comprador?

5. El área de un triángulo es 720 m.², siendo 48 metros la longitud de la base. ¿Qué altura tiene?

6. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden, respectivamente, 0'60 y 0'95 metros. Determínese la longitud de la hipotenusa.

7. La hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo miden, respectivamente, 23'30 y 12 metros. ¿Qué longitud tiene el otro cateto?

8. La diagonal de un cuadrado tiene 0'40 metros de longitud. Hállese la longitud del lado.

9. La base de un rectángulo mide 5 metros, y su diagonal, 6 metros. ¿Cuánto mide su altura?

10. La base y el lado contiguo de un triángulo isósceles tienen, respectivamente, de longitud, 0'42 m. y 0'80 m. Determínese el área.

11. Se ha vendido un solar de forma cuadrada, a razón de 0'25 ptas. el decímetro cuadrado. El lado de dicho cuadrado mide 20'35 metros. ¿Cuánto ha entregado el comprador?

12. El área de un terreno cuya figura es un cuadrado es 20 decám. cuad., 70 m.² y 25 dm.² ¿Qué longitud tiene el lado?

13. La diagonal de un cuadrado tiene 8 metros de longitud. ¿Cuál es su área?

14. Hay que enladrillar un salón de forma rectangular que mide 20'40 m. de largo por 14'75 m. de ancho, empleando ladrillos de 0'30 m. de largo por 0'20 m. de ancho. ¿Cuántos ladrillos se necesitarán?

15. El área y la base de un romboide son, respectivamente, 3,200 m.² y 80 metros. ¿Qué altura tiene?

16. Hay que enladrillar, con ladrillos cuadrados de 1 decímetro de lado, un salón de forma rombal cuyas diagonales son, respectivamente, 7'20 y 4'50 metros. ¿Cuántos ladrillos se necesitarán?

17. Determínese el área de un triángulo equilátero, cuyo lado mide 60 cm.

18. Los lados paralelos de un trapecio miden, respectivamente, 0'20 m. y 0'84 m. Determínese el área de dicha figura, siendo 0'52 m. la distancia entre dichos lados.

19. El área de un triángulo equilátero es 173'20 cms.² Siendo 17'32 cm. su altura, ¿cuánto mide el lado?

20. Siendo 0'58 m. la longitud del radio, determínese cuánto mide la circunferencia correspondiente.

21. El radio de la rueda de un coche mide 0'80 m. Averígüese la distancia recorrida por el vehículo después de haber dado la rueda 1,250 revoluciones.

22. Siendo 6'40 m. la longitud de una circunferencia, hállese cuánto mide su diámetro.

23. Cada vez que la rueda de un carruaje da una vuelta completa, el vehículo recorre 5'126 metros. ¿Qué longitud tiene el radio de la rueda mencionada?

24. Determínese la cantidad de paño empleado en la confección de un tapete cuyo perímetro es un octógono regular, siendo 0'38 m. la longitud del lado, y 0'92 m. la distancia entre dos lados paralelos.

25. El área de un dodecágono regular es 1'80 ms.², midiendo el lado 0'40 m. ¿Qué longitud tiene su apotema?

26. Un tablero de forma pentagonal regular tiene 1'02 m.² de área. ¿Cuánto medirá el lado, si su apotema tiene 0'60 m. de longitud?

27. Determínese el área de un círculo cuyo radio mide 1'25 m.

28. La pista de un circo ecuestre tiene de diámetro 20 m., 30 cm. ¿Cuál es su área?

29. Se sabe que el área de un círculo es 28 m.², 27 dm.² y 44 cm.² ¿Cuánto mide su radio?

30. La superficie de una mesa de forma circular mide 4'523904 m.² Hállese su diámetro.

31. Los radios de dos circunferencias concéntricas son, respectivamente, 0'40 m. y 0'65 m. ¿Qué área tiene la corona circular correspondiente?

32. La pista de un velódromo circular tiene 12 metros de anchura, y el límite exterior de la misma dista 42 metros del centro del velódromo. Hállese el área de la pista mencionada.

33. Un terreno que afecta la forma de un polígono irregular, se ha descompuesto en 4 triángulos, 2 trapecios y 1 cuadrilongo. Determínese su área, teniendo los polígonos componentes las siguientes dimensiones: primer triángulo, 8 m. de base y 10 m. de altura; 2.º triángulo, 6 m. de base y 10 m. de altura; tercer triángulo, 16 m. de base y 7 m. de altura; 4.º triángulo, 14 m. de base y 5 m. de altura; primer trapecio: base menor, 20 m.; base mayor, 32 m., y altura, 10 m.; 2.º trapecio, base menor, 9 m.; base mayor, 16'40 m., y altura, 8 m.; cuadrilongo, 25'50 m. de base y 5 de altura.

34. El radio de un sector es 0'80 m., y su arco mide 52º. ¿Qué área tiene?

35. Determínese el área de un sector de 120º, cuyo radio tiene 1'20 m. de longitud.

36. Un sector de 80 grados tiene 1'0053 metros cuadrados de área. Averígüense el área y el radio del círculo correspondiente.

37. Siendo 2'984547 m.² el área de un sector cuyo radio mide 3 metros, ¿cuántos grados tiene su arco?

38. En un círculo cuyo diámetro mide 1'30 metros, hay un segmento cuyo arco tiene 88 grados. ¿Qué área tendrá dicho segmento, siendo la longitud de la cuerda 0'903 metros, y 0'183 m. la de la sagita?

39. El lado de un cubo mide 1'48 m. ¿Qué área tiene dicho cuerpo?

40. El área de un cubo o exaedro es 37 m.² Hállese la longitud de la arista.

41. Hállese el área de un icosaedro cuyo lado mide 0'40 m., siendo 0'35 m. la altura de sus triángulos.

42. Determínese el área de un dodecaedro cuyas caras tienen 0'60 metros de lado, midiendo su apotema 0'38 m.

43. Determínese el área total de un prisma pentagonal regular, cuyas dimensiones son las siguientes: altura de sus aristas, 1'40 m.; lado de la base, 0'25 m.; apotema, 0'172 m.

44. ¿Qué cantidad de terciopelo se necesitará para cubrir una columna prismática octogonal regular, siendo 2'40 m. la altura de sus caras y 0'40 m. la longitud del lado de la base?

45. El área lateral de una columna prismática exagonal regular es 8'64 m.², siendo 0'30 m. el lado del polígono de la base. Hállese la altura.

46. Para cubrir de hojalata las caras laterales de un depósito de madera que afecta la forma de un paralelepípedo cuadrangular regular, se han necesitado 5'3760 m.² de hojalata. Siendo 2'24 m. la altura de dicho depósito, ¿cuál es la longitud del lado de la base?

47. ¿Cuántos metros de papel de 0'60 m. de ancho se necesitan para empapelar las paredes de una sala cuadrada, de 8'40 m. de lado, por 5'25 m. de altura?

48. Si el salón que se menciona en el problema anterior tuviese una puerta de 3 metros de altura por 1'25 m. de ancho, y una ventana de 1'80 m. de altura por 0'90 m. de ancho, ¿cuántos metros del citado papel se necesitarían?

49. Hállese el área total de una pirámide cuadrangular regular, siendo 0'90 m. la altura de sus triángulos y 0'27 m. la longitud del lado de la base.

50. Se quiere cubrir con azulejos cuadrados, de color, de 0'08 m. de lado, el tejadillo de una torre-mirador. Dicho tejadillo afecta la forma piramidal, y su base es un exágono regular cuyo lado mide 0'70 m. Siendo 2'40 m. la altura de las caras, ¿cuántos azulejos se necesitarán?

51. El área lateral de una pirámide pentagonal regular es 1'7850 m.², y la altura de sus caras, 1'70 m. ¿Qué longitud tiene el lado de la base?

52. Se sabe que el área lateral de una pirámide octogonal regular es 6 m.², y 0'60 m. el lado de la base. Hállese la altura de sus caras.

53. La altura de un cilindro es 2'35 m., y el radio del círculo de su base, 0'46 m. Determínese el área lateral.

54. ¿Qué área total tendrá un cilindro de 0'90 m. de lado, siendo 0'33 m. su radio?

55. Para construir una chimenea cilíndrica de 8 m. de altura y 0'65 m. de diámetro, quieren emplearse planchas metálicas rectangulares de 0'80 m. de largo por 0'32 m. de ancho. ¿Cuántas planchas se necesitarán?

56. En un salón, hay 2 columnas cilíndricas de 8'25 m. de altura y 0'38 m. de diámetro, las cuales han de cubrirse de terciopelo granate. ¿Qué cantidad de terciopelo se necesitará?

57. ¿Qué longitud tiene el radio de un cilindro cuya altura es 2'40 m., siendo el área lateral del mismo 4'523904 m.²?

58. El área lateral y el radio de una columna cilíndrica son, respectivamente, 7'539840 m.² y 0'20 m. ¿Qué altura tiene?

59. La generatriz y el radio de la base de un cono son 1'50 m. y 0'32 m., respectivamente. Hállese el área lateral.

60. ¿Qué cantidad de hojalata se necesitará para construir una vasija de forma cónica con la tapadera correspondiente, siendo 0'75 m. la longitud del lado y 0'30 m. la del diámetro de la base?

61. ¿Qué longitud ha de tener el lado o generatriz de un cono, para que su superficie lateral sea 11'309760 m.^{2} y 0'90 m. el radio de la base?

62. Determinar la longitud que ha de tener el radio de la base de un cono, siendo 3'769920 m.^{2} su área lateral y 3 m. la longitud de la generatriz.

63. Hallar el área lateral de un tronco de pirámide octogonal regular de bases paralelas, cuyas dimensiones son las siguientes: lado de la base superior, 0'28 m.; ídem de la inferior, 0'42 m.; altura de los trapecios, 0'38 m.

64. Las caras y bases de una peana que afecta la forma de un tronco de pirámide exagonal regular, han de cubrirse de cierta tela. El lado superior de las caras mide 0'15 m.; el lado inferior, 0'36 m., y la altura de cada cara es 0'60 m., siendo 0'13 m. y 0'312 m. las apotemas de ambas bases, superior e inferior, respectivamente. ¿Qué cantidad de tela se necesitará?

65. Para que el área lateral de un tronco de pirámide pentagonal regular de bases paralelas sea 13'76 m.^{2}, siendo 0'86 m. y 1'90 m., respectivamente, los lados superior e inferior de las caras laterales, ¿qué altura deben éstas tener?

66. ¿Cuál será el área lateral de un tronco de cono de bases paralelas, siendo 0'85 metros la longitud del lado, y 0'24 m. y 0'66 m., respectivamente, los radios de las bases?

67. ¿Qué cantidad de zinc se necesitará para construir una vasija con tapadera que tenga la forma de un tronco de cono, siendo 0'58 m. la longitud del lado, y 0'44 metros y 0'70 m. los radios de las bases superior e inferior, respectivamente?

68. ¿Qué longitud debe tener el lado de un tronco de cono cuya área lateral es 3'675672 m.^{2}, para que los diámetros de sus bases sean 0'60 m. en la superior y 0'96 m. en la inferior?

69. Determínese el área de una esfera cuyo radio mide 0'38 m.

70. Puesta una esfera entre dos planos paralelos, la distancia entre ambos planos es 0'96 m. Hállese el área de dicha esfera.

71. Para que el área de una esfera sea 50'2656 m.^{2}, ¿qué longitud ha de tener su radio?

72. Considerando el globo terrestre como una esfera cuyo diámetro es 12,736 Km., ¿cuántos Km.^{2} mide toda la tierra?

73. Hay que cubrir con láminas de oro de 0'20 m. de largo por 0'12 m. de ancho, una semiesfera de 0'40 m. de diámetro que sirve de peana a una Virgen. ¿Cuántas de dichas láminas se necesitarán?

74. Determínese el área de un tetraedro cuya arista mide 0'25 m., siendo 0'22 m. la altura de sus caras.

75. ¿Qué volumen tiene un cubo cuyo lado o arista mide 2'40 m.?

76. El volumen de un cubo es 140 m.^{3}, 608 dm.^{3} ¿Cuál es su altura?

77. ¿Qué profundidad debe tener un depósito de forma cúbica, capaz de contener 1,000 litros de agua?

¿Y para contener 3,000 litros de igual líquido?

78. ¿Cuál será el volumen de un prisma exagonal regular cuya altura es 0'54 m., siendo 0'14 m. la longitud del lado de la base y 0'12 m. la de su apotema?

79. Una columna prismática pentagonal regular cuyo volumen es 6'277500 m.^{3}, tiene 0'37 m. de apotema. ¿Cuál es su altura, midiendo 0'54 m. el lado de la base?

80. Hállese el área de la base de un paralelepípedo rectangular de 2'40 m. de altura, siendo su volumen 0'174720 m.^{3}

Y si un lado de la base de dicho prisma mide 0'26 m., ¿qué longitud tendrá el lado contiguo?

81. Se ha abierto una zanja de 15'20 m. de largo, 4 m. de ancho y 2 m. de profundidad. ¿Cuántos m.^{3} de tierra se han sacado?

82. Se ha levantado una pila de ladrillos, de forma prismática, con ladrillos, prismáticos también, de 0'30 m. de largo, 0'16 m. de ancho y 0'06 m. de espesor. La base de dicha pila es un rectángulo de 4'20 m. de largo por 1'35 m. de ancho. ¿Cuántos ladrillos contiene, siendo la altura 2'60 m.?

83. ¿Qué cantidad de agua cabe en un depósito cuyo interior tiene la forma de un paralelepípedo rectangular, cuyas dimensiones son: largo, 4 m.; ancho, 1'80 m.; profundidad, 2 m.?

84. ¿Qué profundidad debe darse a un aljibe rectangular de 6 m. de largo por 3 m. de ancho, debiendo contener 45,000 litros de agua?

85. Hállese el volumen de una pirámide exagonal regular de 6 m. de altura, siendo 0'40 m. la longitud del lado de la base y 0'36 m. la de su apotema.

86. ¿Qué cantidad de mármol contiene una pirámide cuadrangular de 4 m. de altura, siendo 0'80 m. la longitud del lado de la base?

87. ¿Qué altura debe tener una pirámide cuya base es un triángulo equilátero de 0'80 m. de lado y 0'70 m. de altura, siendo el volumen de la misma 861 dm.^{3}?

88. Determínese el volumen de un cilindro de 2'48 m. de altura, siendo 0'80 m. el diámetro de su base.

89. ¿Qué altura debe tener un cilindro de 0'40 m. de radio, para que su volumen sea 955 dm.^{3}, 46 cm.^{3}, 400 mm.^{3}?

90. Averiguar el diámetro que debe tener un cilindro recto de 3'10 m. de altura, para que su volumen sea 0'363168960 m.^{3}

91. En un pozo circular de 1'80 m. de diámetro, el agua se eleva 5'40 m. del fondo. ¿Qué cantidad de agua contiene?

92. ¿Cuántos metros cúb. de arena se necesitarán, para rellenar un pozo circular de 2'12 m. de diámetro y 9 m. de profundidad?

93. Hallar el volumen del hierro que contiene un tubo de este metal de 12 m. de longitud, cuyo diámetro interior es 0'30 m., midiendo 0'04 m. su espesor.

94. Determínese el volumen de un cono recto cuya altura es 4'45 m., siendo 1'60 metros la longitud del diámetro de su base.

95. Para que un depósito de forma cónica pueda contener 22 litros, 6 dl., 1 cl., 9 ml. de agua, ¿qué profundidad debe tener, siendo el diámetro de su boca circular 0'12 m.?

96. Siendo 9 m. la altura de un cono, ¿qué radio debe tener su base para que el volumen sea 1'046360720 m.^{3}?

97. Las dimensiones de un tronco de pirámide exagonal regular de bases paralelas, son las siguientes: altura, 6 m.; lado de la base menor, 0'52 m.; apotema de la misma, 0'45 m.; lado de la base mayor, 0'82 m.; apotema de la misma, 0'71 m. Hállese su volumen.

98. Un tronco de cono de bases paralelas tiene las dimensiones siguientes: diámetro de la base menor, 0'80 m.; diámetro de la mayor, 1'40 m.; altura del tronco, 2'49 metros. ¿Cuál es su volumen?

99. ¿Qué volumen tiene una esfera de 0'40 m. de radio?

100. Puesta una esfera entre dos planos paralelos, la distancia entre ambos planos es 1'40 m. Hállese su volumen.

101. El diámetro interior de una esfera de latón, hueca, que tiene de espesor 0'06 metros, mide 0'40 m. ¿Qué volumen de latón contiene dicha esfera?

102. Para que el volumen de una esfera sea 113 dm.^{3}, 97 cm.^{3}, 600 mm.^{3}, ¿qué longitud debe tener el radio de la misma?

103. Determínese el volumen de un octaedro cuya arista tiene de longitud 0'18 m., siendo 0'32 m. la distancia entre dos vértices opuestos.

104. Colocado un icosaedro entre dos planos paralelos que se apoyen, respectivamente, en dos caras paralelas de dicho sólido, la distancia entre ambos planos es 0'48 metros. Hállese el volumen del sólido mencionado, siendo, respectivamente, 0'28 y 0'25 m. el lado y altura de sus caras.

105. La distancia entre cada dos caras paralelas de un dodecaedro es 0'24 m., y el lado y la apotema miden, respectivamente, 0'10 m. y 0'06 m. ¿Cuál es su volumen?

FIN

ÍNDICE

ARITMÉTICA

PARTE TEÓRICA

PARTE PRÁCTICA — EJERCICIOS Y PROBLEMAS

NOCIONES DE ÁLGEBRA

PARTE TEÓRICA

PARTE PRÁCTICA — EJERCICIOS Y PROBLEMAS

APÉNDICE

MEDICIÓN DE SUPERFICIES Y VOLÚMENES

Maribel

I Love You