INDICE

DE MATERIAS Y TRATADOS.

LACROIX

ARITMETICA

1

m 12

comenzaremos [illegible] de determinar los visores sim
ples y compuestos de cierto numero para venir de
tardando os altozar [illegible] forma

INDICE

DE MATERIAS Y TRATADOS.

Explicacion de las cifras numéricas romanas.

Uno	I	j
Dos	II	ij
Tres	III	iij
Cuatro	IV	iv
Cinco	V	v
Seis	VI	vj
Siete	VII	vij
Ocho	VIII	viij
Nueve	IX	ix
Diez	X	x
Veinte	XX	xx
Treinta	XXX	xxx
Cuarenta	XL	xl
Cincuenta	L	l
Sesenta	LX	lx
Setenta	LXX	lxx
Ochenta	LXXX	lxxx
Noventa	XC	xc
Ciento	C	c
Docientos	CC	cc
Trecientos	CCC	ccc
Cuatrocientos	CCCC *ó* CD	cccc *ó* cd
Quinientos	D *ó* IↃ	d
Seicientos	DC *ó* IↃC	dc
Setecientos	DCC *ó* IↃCC	dcc
Ochocientos	DCCC *ó* IↃCCC	dccc
Novecientos	DCCCC *ó* CM *ó* CCIↃ	dcccc *ó* cm
Mil	M. *ó* CIↃ	m
Mil y ciento	MC *ó* CIↃC	mc

Mil y docientos....	MCC ó CIƆCC......	mcc.....
Mil y trecientos...	MCCC ó CIƆCCC....	mccc.....
Mil y cuatrocientos.	MCD ó CIƆCCCC...	mcccc....
Mil y quinientos. .	MD ó CIƆIƆ........	md......

Observacion. *Cualquier número encerrado dentro de un paréntesis en el discurso de la obra, da á conocer el párrafo en que se hallan sentados los fundamentos de la doctrina que se esté en la actualidad exponiendo; y puede ser útil para volver á leerlo cuando no se le tenga bien presente, á fin de renovar las ideas que en él se contengan.*

TRATADO ELEMENTAL

DE ARITMETICA.

DE LA NUMERACION.

1 Cuando fijamos exclusivamente nuestra atencion sobre cualquiera de los objetos que á cada momento se nos presentan en el universo, y nos proponemos dar á conocer que se halla enteramente solo, ó que lo consideramos nosotros con absoluta separacion de todos los demas que puedan reunírsele, ó que efectivamente se le hayan reunido; expresamos esta circunstancia anteponiendo la palabra *uno* ó *una* al nombre que en vista de sus respectivas propiedades ó por cualquiera otra razon se le haya impuesto. Mas apenas se le agrega algun otro objeto que por ser de la misma naturaleza tenga el mismo nombre, y que considerado como aquel primero con absoluta separacion de todos los demas, deba igualmente llamarse *uno* ó *una*, manifestamos con la palabra *dos*, antepuesta al nombre comun de entrambos, la particularidad de hallarse reunidos, y formando una sola combinacion. Si del mismo modo se agrega á los dos objetos anteriores algun otro de la misma naturaleza, designamos con la palabra *tres* la nueva combinacion; y generalmente si fueren agregándose uno á uno sin fin, otro y otros objetos á los que ya supongamos reunidos, irán asimismo resultando sin término otras distintas combinaciones, que habremos de designar con ciertas y determinadas pa-

labras antepuestas al nombre comun de los objetos reunidos ó combinados.

Damos el nombre general de *números* á estas varias combinaciones ó colecciones de objetos de una misma naturaleza; y para no confundirlas unas con otras, asignamos á cada una de ellas cierta y determinada denominacion que la sea peculiar. Al sistema que hemos adoptado para la nomenclatura de los números, ó para imponer con muy pocas palabras distintas á cada combinacion de objetos de una misma naturaleza el nombre que segun su respectiva magnitud la corresponda, lo llamamos *sistema de la numeracion verbal*; y al que seguimos para escribir con muy pocos caractéres exclusivamente destinados á este efecto, todos los números que puedan ocurrirnos, lo llamamos *sistema de la numeracion escrita*. Y puesto que en la Aritmética se trata solo de darnos á conocer las propiedades de los números, y los medios de obtener el resultado de cualquiera de las operaciones que sea necesario ó conveniente ejecutar con ellos, parece muy oportuno dar primeramente alguna idea de cómo se les nombra, y de cómo se les representa por escrito.

2 Pero aun antes de esto creemos de la mayor importancia hacer notar que los números nos sirven no solo para designar cuántos sean los objetos de una misma naturaleza, corpóreos ó incorpóreos que se hallan, ó que nosotros consideramos como reunidos en cualquiera combinacion, sino tambien para expresar cuántas veces se haya verificado la repeticion de algun hecho ó acontecimiento, y sobre todo para medir la magnitud de una cantidad cualquiera.

Con efecto, bien sabido es que cuando nos proponemos, por ejemplo, averiguar cuánta sea la longitud de un hilo, la comparamos con otra longitud que miramos como conocida, cual supondremos sea la que llamamos *vara*; y si la del hilo es exactamente igual á esotra, decimos que el hilo tiene *una* vara de largo; pero si fuere mayor, y comparando tambien con la vara el exceso que á esta lleva, viésemos que este exceso es exactamente igual á ella, diremos en tal caso que el hilo tiene de largo *dos* varas; y si aun despues de esta segunda comparacion notásemos algun exceso en la longitud que tratemos de medir, lo compararemos del mismo modo con la vara, y en caso de ser exactamente igual á ella, diremos que la longitud total es de *tres* varas; y en el supuesto de que sea todavía mucho mayor, continuaremos por el mismo órden comparando con la vara cada uno de los excesos que vayan sucesivamente resultando, hasta lograr, si es posible, que no aparezca exceso alguno, y ya entonces diremos que la longitud del hilo es de *cuatro* ó de *cinco* ó de *seis* ó de mayor número de varas.

Asimismo, cuando nos interesa determinar cuánta sea la capacidad ó cabida de una vasija, la comparamos con otra cuya capacidad miramos como conocida, cual supondremos ser, por ejemplo, la que llamamos *azumbre*. Para efectuar esta comparacion, llenamos de agua ó de cualquiera otro líquido la vasija cuya magnitud suponemos conocida; y si la cantidad de líquido con que esta se llena, es cabalmente la que se necesita para llenar la otra, decimos que la cabida de esta otra es de *una* azumbre. Mas si para llenarla enteramente fuere necesario agregar á la cantidad de líquido que ya suponemos en ella, otra tanta, diremos que la cabida de la vasija propuesta es de *dos* azumbres; y del mismo modo diríamos que era de *tres* ó de *cuatro* ó de *cinco* ó de mayor número de azumbres, segun fuesen *tres* ó *cuatro* ó *cinco* ó en mayor número las cantidades de líquido iguales á la primera, que se hayan necesitado para llenarla.

Generalmente, siempre que tratamos de medir la magnitud de alguna extension ó la del peso de algun cuerpo ó la de la duracion de las cosas, ó en suma, la de cualquiera de las que llamamos cantidades [1], la comparamos con otra de la misma naturaleza, cuya magnitud miramos como conocida, y que á nuestro arbitrio elegimos para que nos sirva de término de comparacion, ó como mas comunmente suele decirse, de medida ó unidad; y determinando por este medio cuántas veces deba esta repetirse para igualarse con la otra, ó lo que viene á ser lo mismo, la mútua relacion de entrambas, venimos en conocimiento de la verdadera magnitud de la cantidad que nos hayamos propuesto medir.

Sin detenernos por ahora á examinar cómo se determina y expresa la magnitud de las cantidades menores que la unidad, basta á nuestro parecer lo dicho hasta aqui para quedar íntima y plenamente convencidos de que no es posible averiguar cuánta sea la magnitud de cantidad alguna sin valernos para ello de los números; porque no es posible conseguirlo sin compararla con la que hayamos elegido por unidad, ni sin que á consecuencia de esta comparacion podamos expresar por medio de algun número á cuántas como la unidad, ó á cuántas

1 Por la voz *cantidad* entendemos *todo aquello cuya magnitud por su naturaleza es comparable con otra de su misma especie, de modo que por medio de esta comparacion se pueda determinar, y con el auxilio de algun número expresar la mútua relacion de entrambas*. Este uso de los números dió sin duda á Newton motivo para decir que el *número es la relacion de una cantidad cualquiera á otra de su misma especie que hayamos elegido por medida ó unidad.*

partes de esta equivalga la magnitud que nos hayamos propuesto medir y determinar. Por manera que los números que á primera vista y bajo cierto aspecto podrán parecer destinados solo á designar las varias combinaciones de objetos semejantes é independientes entre sí, ó para indicar, cuando mas, cuántas veces se haya repetido algun acontecimiento, nos son igualmente de un uso indispensable para expresar cuántas sean las partes iguales de cierto y determinado tamaño que existen reunidas y sin separacion alguna en un todo indiviso, y de consiguiente nos sirven para medir la magnitud de una cantidad cualquiera, dándonos á conocer la relacion que tenga con la que hayamos elegido por medida ó unidad.

3 Lo mismo que hacemos para venir en conocimiento de la magnitud de una cantidad cualquiera, solemos con frecuencia practicarlo aun con los números mismos; es decir, comparamos entre sí dos números cualesquiera, y con el auxilio de otro tercer número expresamos á cuántos como el menor de ellos equivale el mayor, ó lo que es lo mismo, damos á conocer la mútua relacion de entrambos. Decimos, por ejemplo, que el número *ocho* equivale á *dos* como el *cuatro*; y que el *doce* equivale á *tres* como el mismo *cuatro*, y que el *veinte* es, por decirlo asi, lo mismo que *cinco cuatros*; en cuyas comparaciones los números *ocho*, *doce* y *veinte* vienen á ser las magnitudes que nos proponíamos medir; el número *cuatro* la medida ó unidad [1]; y por medio de los números *dos*, *tres* y *cinco* damos á conocer la respectiva relacion

1 Muy en breve se verá que en el sistema adoptado en la numeracion verbal y en el de la escrita se consideran los números *diez*, *ciento*, *mil* y muchos otros como si cada uno de ellos fuese una sola unidad.

que con el *cuatro* tienen el *ocho*, el *doce* y el *veinte*.

4 De cualquier modo, y sea cual fuere el uso que hiciéramos de los números, nos es siempre permitido considerar á cualquiera de ellos como una coleccion de *unos* ó de *unidades*[1]; bien que con la notable diferencia de que si nos valemos de ellos para designar cuántos objetos se hallan reunidos en una combinacion, ó cuántas veces se ha repetido algun acontecimiento, prescindimos, cuando menos, de si son ó no entre sí iguales los unos ó unidades que concurren á su formacion; en vez de que no pueden menos de serlo ni de considerarse como tales, siempre que por medio de un número expresamos la magnitud de alguna cantidad ó la mútua relacion de otros dos números. Cuando decimos, por ejemplo, *cuatro* árboles, ó *seis* caballos, ó *siete* personas, ó *nueve* números, no damos en ninguna de tales expresiones ni aun el mas leve indicio de que sean entre sí iguales los objetos á que cada una de ellas se refiere: prescindimos en tales casos y en todos los demas semejantes de la magnitud respectiva de las unidades. Pues ahora: cuando decimos que tal ó cual ocurrencia ha acaecido *cinco* veces, ni aun posible parece que haya lugar la consideracion de si son ó no entre sí iguales las unidades de que en este caso se compone el número *cinco*. Mas cuando designamos una cierta y determinada cantidad de plata ó de oro con la expresion *seis onzas*, que pueden muy bien estar reunidas en un solo trozo de alguno de aquellos dos metales; y aun cuando decimos que el número *veinte* equivale á *cuatro cincos*, forzoso es que sean entre sí iguales las unidades que concurren á la respectiva

1 Nos es igualmente permitido considerar á todo número como una coleccion de dos, tres ó mas números menores.

formacion de los mencionados números *seis* y *cuatro*.

Merece tambien notarse que en virtud de la absoluta é ilimitada facultad que para medir la magnitud de una cantidad cualquiera, tenemos de elegir á nuestro arbitrio la medida ó unidad; podemos, y con frecuencia solemos designar la magnitud de una misma cantidad por medio de muy distintos y desiguales números referidos á distintas y desiguales unidades; asi como por el contrario, con un mismo número, bien que referido á distintas y desiguales unidades, podemos y solemos designar distintas y desiguales cantidades de una misma especie. La misma cantidad de plata, por ejemplo, que comparada con la unidad que llamamos *real*, se designa con el número *ciento*; si se la compara ó mide con la *peseta*, se la habrá de designar con el número *veinte y cinco*; y si se la comparase con el *peso duro*, se la designaria con el número *cinco*. En cuyas comparaciones es muy fácil echar de ver que equivaliendo la segunda unidad á *cuatro* como la primera, el primer número por la inversa equivale á cuatro como el segundo; y equivaliendo la tercera unidad á *cinco* como la segunda, el segundo número por la inversa equivale á *cinco* como el tercero.

Por el contrario la cantidad de plata que designamos con la expresion *ocho duros* equivale á *cinco* como la indicada por *ocho pesetas*; porque equivaliendo cada una de las primeras unidades á cinco de las segundas, ocho de aquellas deberán valer tanto como cinco veces ocho de estas [1]. Pasemos ya á tratar de la nomenclatura de los números.

1 Cuando hayamos visto que la Geometría, es decir, la principal, si acaso no es la única, de las *Matemáticas puras*, trata solo de darnos á conocer las propiedades de la extension, y los varios medios

5 Puesto que en todo caso nos es permitido considerar á cualquier número como una coleccion de unidades, y en vista de que si se agregan sucesivamente y una á una sin fin nuevas unidades á las anteriores, que ya suponemos reunidas, habrá de ir resultando de estas sucesivas agregaciones una série interminable de nuevas y muy distintas y desiguales colecciones: á fin de que no puedan confundirse las unas con las otras, ha sido indispensable, segun ya (§. 1) hemos insinuado, asignar á cada una de ellas cierta denominacion que la sea privativa y peculiar, y por cuyo medio se la distinga de otra cualquiera. Ahora bien: siendo, como ya se deja ver, interminable la série y la magnitud de los números, sería por cierto sumamente embarazoso, y aun absolutamente imposible, asignar exclusivamente por nombre á cada uno de ellos una sola palabra que no tuviese conexion alguna con los nombres impuestos á todos los demas; y de ahí es que para ponernos en disposicion de poder dar á cualquier número el nombre que segun su magnitud le corresponda, no solo ha parecido mas conveniente, sino que en realidad ha sido necesario adoptar cierto sistema, con arreglo al cual, con muy pocas palabras, asignadas de antemano por nombres á ciertos y determinados números, se formen tantas diferentes combinaciones, cuan-

de medirla en las diferentes formas de que es susceptible: cuando igualmente veamos que en las que se llaman *Matemáticas mistas* se aspira solo á determinar la magnitud de cantidades de otras distintas especies, conoceremos con cuánta razon se dice en general que el *objeto de las Matemáticas es medir la cantidad*. Y como no sea posible medir sin contar, nos convenceremos de lo necesario que en las Matemáticas es hacer uso de los números, y de lo mucho que nos interesa poseer un profundo conocimiento de sus propiedades, de que, como ya hemos insinuado (§. 1) y todo el mundo sabe, trata la Aritmética.

tas se necesiten para designar con una de estas cualquier otro número por grande que sea. En uso, pues, de la absoluta é ilimitada facultad que tenemos de considerar á todo número no solamente como una coleccion de unos ó unidades, sino tambien como la de dos, tres ó mas números menores, entre sí iguales ó desiguales, imponemos por nombres á muchísimos de ellos las respectivas combinacianes de los nombres anteriormente impuestos á otros números menores que reunidos los componen.

6 En nuestro idioma se halla primeramente designado con una sola palabra cada uno de los quince primeros números [1], cuyos nombres omitimos, dando por supuesto que nadie puede ignorarlos; y para nombrar los cuatro inmediatos siguientes combinamos nombres ya impuestos á otros dos números menores. Asi es que los llamamos *diez y seis, diez y siete, diez y ocho, diez y nueve* [2].

El número que á este inmediatamente se sigue, y es equivalente á *dos* dieces, se llama con una sola palabra *veinte*; y á su semejanza los que equivalen á tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve dieces, y que se pueden mirar como formados por la sucesiva agregacion de dieces como si el número *diez* fuese una sola unidad, se

1 Aunque á la voz *número* corresponda por lo comun la idea de combinacion, coleccion, reunion ó conjunto de muchas unidades, contamos sin embargo al *uno* entre los números, y le damos esta denominacion general no solo por analogía, y por ser la base y fundamento de todos los números, sino tambien porque ninguñ otro puede indicarnos la relacion que con la unidad tiene cualquiera otra cantidad igual á ella.

2 Con arreglo á este sistema, que con muy pocas excepciones se generaliza despues para con todos los demas números, parece que los cinco próximos siguientes al *diez* deberian llamarse *diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco*; mas aunque con frecuencia conviene mirarlos bajo este aspecto, el uso general y constantemente establecido se opone á tal innovacion en el lenguage.

designan respectivamente con sola una de estas palabras: *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, *noventa* [1]; y á los nueve números, que al *veinte* y á cada uno de estos otros se siguen, les imponemos por nombres las respectivas combinaciones del que ya hemos impuesto al número de dieces que les precede, y del de algun otro de los menores que el *diez*, segun lo hemos practicado con los cuatro anteriores al *veinte*. Asi llamamos, por ejemplo, á uno de ellos *veinte y cuatro*, á otro *cincuenta y siete*, á otro por último *noventa y nueve*.

Despues de esto designamos con la única palabra *ciento* al número equivalente á diez dieces; y á otros ocho números que consideramos como formados por medio de la sucesiva agregacion de cientos, como si cada *ciento* fuese una sola unidad, los llamamos respectivamente *docientos*, *trecientos*, *cuatrocientos*, *quinientos*, *seicientos*, *setecientos*, *ochocientos*, *novecientos*; y á los noventa y nueve números que asi al *ciento* como á cada uno de aquellos otros ocho se siguen, se les asignan por nombres combinaciones del ya impuesto al número de cientos que les precede, y del de algun otro de los menores que el *ciento*. De este modo llamamos, por ejemplo, á uno de ellos *trecientos cuarenta y seis*, á otro *quinientos y setenta*, y últimamente á otro *novecientos noventa y nueve*.

Al equivalente á diez cientos lo llamamos con una sola palabra *mil*; y á otros novecientos noventa y ocho números, que miramos como formados por la sucesiva agregacion de miles, como si cada mil fuese una sola

1 Para que en todas las partes de este sistema de numeracion se observase toda la regularidad apetecible, parece que á los números llamados *veinte*, *treinta*, *cuarenta* &c. deberian habérseles impuesto nombres que nos diesen á conocer con mas claridad la relacion que cada uno de ellos tenga con el *diez*.

unidad, los nombramos *dosmil, tresmil, cuatromil.... hasta* el *novecientos noventa y nuevemil.* Combinando despues cada uno de estos últimos nombres con los de los números que preceden al *mil*, formamos las correspondientes denominaciones de otros novecientos noventa y nueve que se siguen á cada uno de los indicados números de miles. Sirvan de ejemplo el número que llamamos *cuatromil setecientos treinta y seis*, el *cincuenta y ochomil y cuarenta*, y por último el *novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve.*

El que á este inmediatamente se sigue, y es equivalente á diez cientos de miles ó á mil miles, se llama con una sola palabra *millon* ó *cuento*; y dando por supuesto que se hayan reunido millones como si cada una fuese una sola unidad, nombramos á otros novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y ocho números que consideramos como formados por este medio, con las expresiones *dos millones, tres millones.... cuarenta y ocho millones.... setecientos treinta y cinco millones....* hasta *novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve millones.* Despues de lo cual, á otros novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve números que se siguen al millon y á cada uno de los demas números de millones, les damos por nombres combinaciones del que ya suponemos impuesto al número de millones que les precede, y del de algun otro de los menores que un millon. Baste para ejemplo el último de los números que asi se nombran, al cual llamamos, *novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve millones, novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve.*

Al inmediato siguiente, que equivale á un millon de millones, ó á un cuento de cuentos, se le llama con una sola palabra *billon* ó *bicuento*; y considerando á este número como si fuese una sola unidad, llamamos *dos billones, tres billones* &c., á los que podemos suponer formados por medio de la sucesiva agregacion de billones; el último de los cuales es el *novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve billones*. Combinando despues el nombre impuesto á cada uno de estos números de billones con el de algun otro de los que preceden á un billon, nombramos otros tantos que se siguen á cada número de billones. De este modo, sin necesidad de emplear ninguna otra nueva palabra, imponemos los correspondientes nombres á otros muchísimos números hasta llegar al que llamamos *novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve billones, novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve millones, novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve.*

El que á este inmediatamente se sigue, y equivale á un millon de billones, ó á un billon de millones, se llama con una sola palabra *trillon* ó *tricuento*. Haciendo uso de este nuevo nombre, imponemos los respectivos á otros novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y ocho números, que se consideran formados como por una sucesiva agregacion de trillones, cual si cada trillon fuese una sola unidad; y combinando sucesivamente los nombres de estos números de trillones con los de todos los que preceden á un trillon, tendremos los nombres que han de imponerse á los que se siguen á cada uno de los números de trillones ó tricuentos. Ejemplo de esto puede ser el último de los que asi se nombran, al cual llamamos *novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve trillones, novecientos noventa* *y nuevemil novecientos noventa y nueve billones, novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve millones, novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y nueve.*

Ya se deja ver que habremos de nombrar al número equivalente á un millon de trillones con una sola palabra *cuatrillon* ó *cuadrillon*, que guarde cierta analogía con las que antes hemos adoptado para designar al millon de millones y al de billones. En seguida emplearemos la nueva voz para denominar los novecientos noventa y nuevemil novecientos noventa y ocho números, que podemos considerar como resultados de la sucesiva agregacion de cuatrillones, cual si cada uno de estos fuese una sola unidad; y por último combinaremos cada uno de estos nombres con el de cada uno de los números que preceden á un cuatrillon. Asi tendremos los de todos los que preceden al millon de cuatrillones, al cual asignamos por nombre una sola palabra; y con arreglo al órden ya indicado podremos imponer á todos los números siguientes sus respectivos nombres.

Son pues muy pocos los números que nombramos con una sola palabra simple, y que de consiguiente se nos presentan por sus nombres como una sola coleccion de unidades, ó como un todo indiviso. Todos los demas se designan ó por palabras compuestas, como *cuatrocientos*, *ochocientos*, las cuales nos indican la relacion que cada uno de estos uúmeros tiene con otro que ya suponemos conocido; ó por medio de combinaciones de nombres ya impuestos á otros menores, que reunidos los componen; y en tal caso aparecen los números como compuestos de tantas partes desiguales como nombres empleamos para formar al que á cada uno corresponde. El número, por ejemplo, que llamamos *tresmil ochocientos cincuenta y nueve*, se nos presenta en esta expresion como formado por la reunion de otros cuatro menores. Pasemos ya á tratar del sistema adoptado para la numeracion escrita.

7 Si no tuviésemos otro medio de representar por escrito los números sino el de escribir por el método ordinario y en toda su extension las distintas palabras y diferentes combinaciones de ellas con que los denominamos; cuando nos propusiésemos averiguar las respectivas propiedadas de cada uno y sus mútuas relaciones, y sobre todo los varios resultados de las operaciones que con cualquier motivo fuere necesario ó conveniente efectuar con ellos, lejos de poder contar por este medio con algun auxilio para proceder con mayor seguridad y rapidez en nuestras investigaciones, encontraríamos por el contrario un grandísimo embarazo en la complicacion de tantos y tan inadecuados signos. A fin, pues, de superar esta dificultad, se ha adoptado otro medio mucho mas sencillo y expedito de escribir los números, empleando para ello ciertas cifras ó caractéres llamados *guarismos*, exclusivamente destinados á este objeto; y no siendo conveniente ni aun posible asignar á cada uno de los innumerables números un guarismo particular que peculiarmente lo represente; á semejanza de lo practicado para la numeracion verbal, despues de haber asignado á cada uno de los nueve primeros números[1] un guarismo de cierta y determinada figura, representamos todos los demas números por medio de combinaciones de dos, tres ó mas de aquellos mismos guarismos, colocados en cierto órden.

Para esto consideramos en primer lugar al número *diez*, que es el primero de los que no tienen asignado

1 Estos son conocidos bajo el nombre de *números digitos*.

guarismo alguno, como si fuese una sola unidad, que designamos con el nombre de *decena* ó de *unidad de segundo órden*, á fin de distinguirla de la unidad primitiva, la cual suele por la misma razon llamarse *unidad simple* ó *absoluta* ó *del primer órden*: y á consecuencia, á los números que hemos llamado *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, *noventa*, y que equivalen á dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve dieces, los consideramos como equivalentes que son á *dos*, *tres*, *cuatro* &c. decenas ó unidades de segundo órden.

Al número *ciento*, que equivale á diez dieces ó decenas, lo consideramos como otra nueva unidad, que designamos con el nombre de *centena* ó de *unidad de tercer órden*; y de consiguiente á los números que hemos llamado *docientos*, *trecientos*, *cuatrocientos*.... *novecientos* los consideramos como equivalentes que son á *dos*, *tres*, *cuatro*.... *nueve* centenas ó unidades de tercer órden.

Al número *mil*, que equivale á diez centenas, lo consideramos como otra nueva unidad, que designamos con el nombre de *millar* ó de *unidad de cuarto órden*; y á los números que llamamos *dosmil*, *tresmil*, *cuatromil*.... *nuevemil*, los consideramos como equivalentes que son á *dos*, *tres*, *cuatro*.... *nueve* millares ó unidades de cuarto órden.

Al número *diezmil* lo consideramos como otra nueva unidad, que llemamos *decena de millares* ó *unidad de quinto órden*; y á consecuencia los números llamados *veintemil*, *treintamil*, *cuarentamil*.... *noventamil*, se consideran como equivalentes que son á *dos*, *tres*, *cuatro*.... *nueve* decenas de millares ó unidades de quinto órden.

Al número *cienmil*, equivalente á diez decenas de millares, lo consideramos como otra nueva unidad que llamamos *centena de millares* ó *unidad de sexto órden*; y á los números llamados *docientosmil*, *trecientosmil*, *cuatrocientosmil*...... *novecientosmil*, los consideramos como equivalentes que son á *dos*, *tres*, *cuatro*...... *nueve* centenas de millares ó unidades de sexto órden.

Del mismo modo al *millon*, que equivale á diez centenas de millares, y á cada uno de los números que llamamos *diezmillones*, *cienmillones*, *milmillones*, *diezmilmillones*, *cienmilmillones*, los consideramos como otras tantas unidades de diferentes órdenes, que igualmente designamos con los respectivos nombres de *millon*, *decena*, *centena*, *millar*, *decena de millares*, y *centena de millares* de millones, cada una de las cuales equivale á diez unidades del órden inmediato inferior.

Asimismo al *billon* que equivale á diez centenas de millares de millones, y á cada uno de los números llamados *diezbillones*, *cienbillones*, *milbillones*, *diezmilbillones*, *cienmilbillones*, los consideramos como otras tantas diferentes unidades, que denominamos *billon*, *decena*, *centena*, *millar*, *decena de millares*, *centena de millares* de billones; en todas las cuales se observa constantemente la ley de que cada una de ellas equivalga á diez como la inmediata inferior.

La misma consideracion que con el *millon* y el *billon*, tiene lugar con el *trillon*, con el *cuatrillon*, y con todos los demas números semejantes[1].

1 En los varios y distintos nombres con que se distinguen tantas y tan desiguales unidades, se advierte inmediatamente que los de las seis primeras, *unidad*, *decena*, *centena*, *millar*, *decena de millares*, *centena de millares*, se repiten con poquísima diferencia para las seis segundas y para las seis terceras, y para cada seis de todas las siguientes; bien que con la diferencia de que refiriéndose, como se refieren, aquellas seis primeras á la unidad absoluta, las seis segundas se refieren al millon; las seis terceras al billon; las seis cuartas al trillon, y asi de

8 Ahora bien: los nueve guarismos que se han adoptado para representar por escrito los nueve números dígitos, son los siguientes:

Guarismos: 1	2	3	4	5	6	7	8	9
Números: *uno*;	*dos*;	*tres*;	*cuatro*;	*cinco*;	*seis*;	*siete*;	*ocho*;	*nueve*.

Y para representar por medio de combinaciones de dos, tres ó mas de estos mismos guarismos los números mayores que el *nueve*, se ha establecido de comun acuerdo la condicion general de que *las unidades del número dígito representado por cualquiera de los nueve guarismos que se halle combinado con otros, sean del órden indicado por el lugar que el guarismo ocupe en la combinacion, comenzando á contar por la derecha.*

Con arreglo á este convenio, el guarismo que en una combinacion ocupe el primer lugar, comenzando á contar por la derecha, representará el mismo número de unidades absolutas que si se hallase enteramente solo.

Cada una de las unidades del número dígito representado por cualquiera de los nueve guarismos que estando en combinacion con otros, ocupe el segundo lugar, comenzando á contar por la derecha, habrá de ser unidad de segundo órden ó *decena*, y equivaler á diez unidades absolutas.

Cada una de las unidades del número dígito representado por cualquiera de los nueve guarismos, que combinado con otros, ocupe el tercer lugar, comenzando á

las demas. Con todo, la semejanza que se nota en sus denominaciones ha dado motivo á que á todas se las considere como distribuidas en varios períodos; de modo que las seis primeras correspondan al primer período, que llamamos *período de las unidades absolutas*, ó simplemente *período de las unidades*; las seis segundas al período segundo ó al de los millones; las seis terceras al período de los billones; las seis cuartas al de los trillones; y asi de las demas.

contar por la derecha, habrá de ser unidad de tercer órden ó *centena*, y equivaler á cien unidades absolutas.

Cada una de las unidades del número dígito representado por cualquiera de los nueve guarismos, que estando combinado con otros, ocupe el cuarto lugar, comenzando á contar por la derecha, habrá de ser unidad de cuarto órden ó *millar*, y equivaldrá á mil unidades absolutas.

Cada una de las unidades del número dígito representado por cualquiera de los nueve guarismos, que estando combinado con otros, ocupe el quinto lugar comenzando á contar por la derecha, habrá de ser unidad de quinto órden ó *decena de millares*, y equivaldrá á diezmil unidades absolutas.

Cada una de las unidades del número dígito representado por cualquiera de los nueve guarismos, que combinado con otros, ocupe el sexto lugar, comenzando á contar por la derecha, habrá de ser unidad de sexto órden ó *centena de millares*, y equivaldrá á cienmil unidades absolutas.

Del mismo modo cada una de las unidades del número dígito representado por cualquiera de los nueve guarismos, que estando en combinacion con otros, ocupe alguno de los seis lugares siguientes al sexto, procediendo hácia la izquierda, habrá de ser respectivamente unidad del órden indicado por el lugar que ocupe del segundo período á que pertenece. Lo mismo deberá entenderse de cualesquiera otros guarismos que se hallen en combinacion.

9 A consecuencia de esto, á todo número que nos propongamos escribir por medio de una combinacion de algunos de los guarismos adoptados, y asignados á los

nueve números dígitos, lo habremos de considerar como formado por la reunion de otros números menores, tales, que cada uno de estos equivalga á un número dígito de unidades de alguno de los seis órdenes de alguno de los períodos en que ya las suponemos distribuidas; y entonces no restará otra cosa sino colocar cada uno de los guarismos asignados á los números dígitos de que se trate, en el lugar correspondiente al órden de sus unidades. Por este medio, para escribir cualquier número, por grande que sea, no será jamás necesario guarismo alguno de mayor valor que el 9; porque estando, como está anteriormente establecido, que en llegando á diez las unidades de cualquier órden, se sustituya en lugar de ellas una sola unidad del órden inmediato superior, para representar por escrito las de este nuevo órden que no pasen de nueve, volvemos á hacer uso de los mismos nueve guarismos sin necesidad de practicar de nuevo ninguna otra cosa, sin colocar en el lugar inmediato á la izquierda el guarismo que para ello deba emplearse [1].

Propongámonos ya representar por escrito por medio de combinaciones de los guarismos asignados á los nueve primeros números, algunos otros mucho mayores; y sea el primero de estos el que llamamos *ochocientos veinte y sietemil novecientos treinta y cinco.*

Este número se nos presenta como formado por la reunion de otros seis menores. El primero de estos es el llamado *ochocientosmil*, el cual equivale á *ocho* centenas

1 Para efectuar con prontitud y acierto la colocacion de cada guarismo en su correspondiente lugar, es necesario tener muy presente el órden con que se suceden unos á otros los varios períodos, y los seis diferentes órdenes de unidades de cada período, no solo procediendo de derecha á izquierda, sino tambien al contrario, porque tal es nuestro ordinario modo de escribir y de leer.

de millares, ó á *ocho* unidades de sexto órden, y de consiguiente se le habrá de representar por el guarismo 8 colocado en el sexto lugar de la combinacion, comenzando á contar por la derecha. El segundo, que es *veintemil*, equivale á *dos* decenas de millares, ó á *dos* unidades del quinto órden, y por tanto se le habrá de representar por el guarismo 2, colocado en el quinto lugar de la combinacion ó inmediatamente á la derecha del 8. El tercero, que es *sietemil*, equivale á *siete* millares, ó á *siete* unidades de cuarto órden, y asi se le deberá representar por el guarismo 7, colocado en el cuarto lugar de la combinacion ó inmediatamente á la derecha del 2. El cuarto, que es *novecientos*, equivale á *nueve* centenas ó á *nueve* unidades de tercer órden, y de consiguiente se le habrá de representar por el guarismo 9, colocado en el tercer lugar de la combinacion ó inmediatamente á la derecha del 7. El quinto, que es *treinta*, equivale á *tres* decenas ó á tres unidades de segundo órden, y por tanto se le deberá representar por el guarismo 3, colocado en el segundo lugar de la combinacion ó inmediatamente á la derecha del 9. El último finalmente es *cinco* unidades absolutas ó del primer órden, que se habrán de representar por el guarismo 5 colocado inmediatamente á la derecha del 3, para que ocupando aquel el primer lugar de la derecha, resulten colocados los otros cinco guarismos en los lugares que por su respectiva representacion en este caso les corresponden. Asi resultará bien representado el número propuesto por la combinacion de seis guarismos 827935.

Propongámonos asimismo representar por la correspondiente combinacion de guarismos el número que llamamos *ciento y once millones ciento y oncemil ciento y once*.

Para ello conviene observar que aunque á consecuencia de la irregularidad que ya (§. 6 *en la nota* 2.ª) hicimos notar en los nombres impuestos á los cinco números que inmediatamente se siguen al diez, se nos presente el propuesto en la expresion con que lo nombramos, como formado por la reunion de otros seis números menores; para representarlo por escrito debemos considerarlo como formado por la reunion de otros nueve, que son: *cienmillones, diezmillones, unmillon, cienmil, diezmil, un mil, ciento, diez y uno*, los cuales equivalen á *una* centena de millones, *una* decena de millones, *un* millon, *una* centena de millares, *una* decena de millares, *un* millar, *una* centena, *una* decena y *una* unidad absoluta, ó lo que viene á ser lo mismo, á *una* unidad del tercer órden, *otra* del segundo, y *otra* del primero del segundo período; y á las seis unidades de otros tantos diferentes órdenes del primer período. Pudiéndose, pues, representar cada una de estas nueve diferentes unidades por el guarismo 1, colocado en combinacion en el lugar correspondiente al órden de la unidad que deba representar, resultará bien escrito el número propuesto por medio de la combinacion 111111111.

En esta combinacion de guarismos y en todas las demas semejantes en que se halle repetido dos ó mas veces, y ocupando por consiguiente distintos lugares uno mismo, se pueden fácilmente notar los muchos y desiguales números que un mismo guarismo puesto en combinacion puede representar, y los muchos y diferentes valores que puede adquirir con solo hacerle ocupar otros distintos lugares. A lo cual es consiguiente que con los mismos guarismos que combinados en cierto órden, representan un cierto y determinado número, se pueden igualmente representar otros muchos distintos y desiguales, con solo que los guarismos muden de lugar en la combinacion.

10 A pesar de que los ejemplos precedentes nos den á conocer cómo podríamos representar por otras varias combinaciones de los nueve guarismos otros muchísimos números, no debemos por eso creer que los guarismos hasta ahora adoptados basten para conseguir completamente nuestro intento; pues con solo que nos propongamos representar por escrito al número *diez*, que es el primero que no tiene asignado ningun guarismo, nos convenceremos al momento de que no tenemos todavía todos los medios necesarios para lograrlo. Con efecto, para escribir el número *diez*, debemos considerarlo como *una* decena, ó como *una* unidad de segundo órden, y por consiguiente representarlo por el guarismo 1 colocado en segundo lugar, comenzando á contar por la derecha. Para esto es indispensable que el tal guarismo se halle á la izquierda de algun otro; y no pudiendo este ser ninguno de los nueve adoptados hasta ahora, sin que resultase representado algun otro número mayor que el *diez*, ha sido forzoso adoptar otro nuevo guarismo ó cifra insignificante, que no representando número alguno, sirva solo para ocupar en algunas combinaciones el lugar ó lugares que sea preciso designar, y en que no se pueda colocar ninguno de los nueve guarismos asignados á los números dígitos, sin que resulte representado otro número muy distinto del que nos hayamos propuesto escribir. Elegida que fue para esto la cifra *o*, conocida con el nombre de *cero*, ha parecido conveniente dar á los otros nueve guarismos la denominacion comun de *cifras significativas*; y para distinguirlas unas de otras, se ha atribuido á cada una el mismo nombre que al número representado por ella: lo cual conviene tener presente para no confundir cosas tan diversas,

Ahora no puede ya ofrecer dificultad alguna el representar por escrito al número *diez* ni á ningun otro, en cuyo nombre se eche menos la expresion de unidades de algunos órdenes inferiores. Se representará, pues, el *diez* por la combinacion 10 de dos cifras, en la cual ocupa el cero el lugar destinado á las unidades de primer órden. Por la misma razon el número *ciento*, equivalente á *una* centena ó á *una* sola unidad de tercer órden, habrá de representarse por solo el guarismo significativo 1 colocado en tercer lugar, poniendo á su derecha dos ceros que ocupen los dos primeros lugares de la combinacion, asignados á las unidades de los dos órdenes inferiores. El número *mil*, equivalente á *un* millar ó á una sola unidad de cuarto órden, se representa por el guarismo significativo 1 colocado en cuarto lugar, para lo cual es indispensable poner á su derecha tres ceros que ocupen los tres lugares asignados á las unidades de los tres órdenes inferiores; y asi de otros muchos números.

Si nos propusiéramos escribir en cifra el número *cuatro millones seismil y ochenta*, deberíamos considerarlo, segun nos lo presenta su nombre mismo, como formado por la reunion de solos tres números menores, que son *cuatro* millones ó *cuatro* unidades de primer órden del segundo período; *seis* millares ó *seis* unidades de cuarto órden del primer período; y *ocho* decenas ú *ocho* unidades de segundo órden de este mismo período. Para representar el primero de estos tres números deberá colocarse el guarismo significativo 4 el primer lugar del segundo período, el cual viene á ser en el séptimo lugar de toda la combinacion. Para representar el segundo, se habrá de colocar el guarismo significativo 6 en el cuarto lugar del primer período; y para el tercero se debe escribir el guarismo significativo 8 en el segundo lugar del mismo primer período. Ahora bien, siendo solos tres los guarismos significativos que entran en la combinacion, es absolutamente imposible que el primero de ellos ocupe el séptimo lugar, y que el segundo ocupe el cuarto, y que el último se halle en el segundo, como no se designen con ceros los cuatro lugares primero, tercero, quinto y sexto, en los cuales no puede colocarse cifra alguna significativa sin que resulte representado otro número muy distinto del propuesto. Estará, pues, bien representado por la combinacion de cifras 4006080.

Ultimamente, propongámonos escribir en cifra el número *ocho billones cincuentamil novecientos y seis*. Para ello lo miraremos, segun nos lo está indicando su nombre mismo, como formado por la reunion de los cuatro números menores *ocho* billones ú *ocho* unidades de primer órden del tercer período; *cinco* decenas de millares ó *cinco* unidades de quinto órden del primer período; *nueve* centenas ú *nueve* unidades de tercer órden; y *seis* unidades absolutas ó de primer órden del mismo primer período. Por de contado el guarismo significativo 8 destinado á representar los billones ó las unidades de primer órden del tercer período, debe tener á su derecha otros doce guarismos cualesquiera, para que asi resulte colocado, segun le corresponde, en el primer lugar del tercer período. Observando por otra parte que en el nombre del número que tratamos de escribir en cifra, no se hace mencion alguna de las unidades de los seis diferentes órdenes del sagundo período, es consiguiente que otros tantos ceros hayan de ocupar y designar aquellos seis lugares. Finalmente, como de las unidades de los seis órdenes del primer período están expresadas solo las de tres, y por tanto solo tres lugares, que son el quinto, el tercero y el primero, pueden estar ocupados por guarismos significativos, deberán otros tres ceros ocupar los lugares restantes, en que no es permitido colocar cifra alguna significativa sin que resulte representado otro número muy distinto del propuesto. Asi que, la correspondiente combinacion de cifras será 80000000050906.

Bastan los ejemplos precedentes para darnos á conocer la grande importancia de los ceros para representar por escrito los números; pues sin embargo de que ni solos ni combinados con otras cifras representan por sí número alguno, cuando se hallan en combinacion y á la derecha de cifras significativas, hacen que resultando estas colocadas en lugares muy diferentes de los que sin los ceros ocuparian, adquieran valores muy superiores á los que sin tal auxilio tuvieran. Sobre todo podemos ya echar de ver que haciendo el debido uso de los nueve guarismos significativos y del cero, no ocurrirá número alguno que no pueda representarse por una combinacion de cifras.

11 Si por el contrario, se nos presentase ya formada una combinacion de guarismos, y quisiéremos descifrarla ó traducirla al idioma vulgar, y determinar cuál sea el número representado por ella, examinaremos cuántas son las cifras de que se componga la combinacion y á qué períodos pertenezcan: qué lugar ocupe cada una de las significativas en su respectivo período, para conocer por este medio de qué órden sean las unidades del número dígito á que esté asignada: sostituiremos en vez de este número su respectivo equivalente de unidades absolutas; y reuniendo por último los nombres de los varios números que asi deben resultar, en el conjunto de ellos tendremos

el del verdadero número representado por la combinacion de guarismo propuesta.

Propongámonos, por ejemplo, la combinacion 830090, y tratemos de averiguar qué número representa. Desde luego notaremos que no pasando de seis las cifras combinadas, las unidades de los números dígitos indicados por las significativas, han de ser de las órdenes del primer período. Ahora bien, ocupando la cifra 8 el sexto lugar, deberá representar *ocho* unidades de sexto órden ú *ocho* centenas de millares, equivalentes á ochocientasmil unidades absolutas. La inmediata cifra 3, colocada en quinto lugar, representa *tres* unidades de quinto órden ó *tres* decenas de millares, que equivalen á *treintamil* unidades absolutas. Por último la cifra 9, que se halla en el segundo lugar de la combinacion, representa *nueve* unidades de segundo órden ó *nueve* decenas, que equivalen á *noventa* unidades absolutas. Reuniendo ahora los tres expresados números de unidades absolutas, resultará que *ochocientos treintamil y noventa* es el número representado por la propuesta combinacion de cifras.

Propongámonos igualmente determinar qué número está representado por la combinacion 905002080. Viendo que se compone de nueve cifras, inferiremos que las tres últimas 905 pertenecen al período de los millones; y puesto que la cifra significativa 9 se halla en el tercer lugar de este segundo período, representará *nueve* unidades de tercer órden del mismo período, ó *nueve* centenas de millones, que equivalen á *novecientos millones* de unidades absolutas. La cifra 5, colocada en el primer lugar del segundo período, representará *cinco* millones de unidades absolutas. El guarismo 2, que ocupa el cuarto lugar del primer período, representará *dos* unidades de cuarto órden ó *dos* millares que equivalen á *dosmil* unidades absolutas. Ultimamente el guarismo 8, colocado en segundo lugar, representará *ocho* unidades de segundo órden ú ocho decenas, que equivalen á *ochenta* unidades absolutas. Si reunimos, pues, los cuatro mencionados números de unidades absolutas, resultará que el número representado por la combinacion de cifras propuesta es *novecientos y cinco millones dosmil y ochenta.*

Propongámonos por último la siguiente combinacion de veinte y dos cifras, debajo de las cuales se han escrito los nombres de las unidades que cada una representa, segun el lugar en que se halla, á fin de que este ejemplo pueda servir de norma para todos los demas casos que puedan ocurrir en lo sucesivo.

	& &c. &c.	
6	Millares de trillones	Período 4º
0	Centenas de trillones	
0	Decenas de trillones	
5	*Trillones*	
7	Centenas de millares de billones	Período 3º
3	Decenas de millares de billones	
8	Millares de billones	
6	Centenas de billones	
2	Decenas de billones	
4	*Billones*	
8	Centenas de millares de millones	Período 2º
9	Decenas de millares de millones	
7	Millares de millones	
3	Centenas de millones	
2	Decenas de millones	
1	*Millones*	
5	Centenas de millares	Período 1º
8	Decenas de millares	
0	Millares	
3	Centenas	
4	Decenas	
6	*Unidades absolutas*	

Como de las veinte y dos cifras que entran en la combinacion propuesta pertenezcan al primer período las seis primeras comenzando á contar por la derecha; al segundo las seis segundas; al tercero las seis terceras, es consiguiente que las cuatro restantes 6005 pertenezcan al cuarto período, que es el de los *trillones*. Ocupando en este período el cuarto lugar la cifra significativa 6, representa *seis* unidades de cuarto órden, ó *seis* millares de trillones, que equivalen á *seismil trillones* de unidades absolutas; á los cuales se habrán de agregar los *cinco* trillones, representados por la cifra 5, colocada en el primer lugar de aquel período. Pasando despues á las seis cifras de cada uno de los tres períodos siguientes, nos será fácil sostituir al número dígito de las unidades que cada una represente, segun el lugar en que se halle colocada, el número equivalente de unidades absolutas; y reuniendo todos estos números, resultará que el representado por la combinacion de cifras propuestas es *seismil y cinco trillones, setecientos treinta y ochomil seiscientos veinte y cuatro billones, ochocientos noventa y sietemil trecientos veinte y un millones, quinientos ochentamil trecientos cuarenta y seis*.

En este ejemplo y en cuantos puedan en adelante ofrecérsenos, se podrá fácilmente observar que distribuyendo de seis en seis procediendo de la derecha á la izquierda, las cifras de una combinacion cualquiera, por muchas que sean, toda la dificultad de determinar qué número está representado por ella, queda reducida á saber cuál es el número representado por una combinacion de seis cifras cualesquiera, con tal que al mismo tiempo se tenga presente el nombre de la nueva unidad que se adopta en cada séptima cifra. Aun se puede con toda verdad afirmar que la dificultad de leer en una combinacion de cifras el número que representa, está reducida á saber ejecutarlo en una combinacion de solas tres de ellas; puesto que las tres unidades *millar, decena de millares* y *centena de millares* correspondientes á las tres segundas cifras de cada período, siguen enteramente el mismo órden que las tres primeras *unidad, decena* y *centena.*

Aunque rarísima vez ocurrirán números de tanta magnitud como la de algunos que hemos propuesto, convendrá sin embargo que los participantes se ejerciten mucho, asi en determinar qué números esten representados por combinaciones de muchas cifras, como en escribir de este modo números de extraordinaria magnitud para que por este medio se acostumbren á observar y seguir el órden de los períodos, y el de las diferentes unidades de cada período, tanto procediendo de izquierda á derecha como al contrario; de modo que con solo ver qué lugar ocupe una cifra en una combinacion cualquiera, y á qué período pertenezca, puedan pronta y fácilmente determinar de qué órden son las unidades que representa; como por el contrario, apenas oigan nombrar un número, por grande que sea, distingan al momento con cuántas y cuáles cifras se le deba escribir, qué lugar corresponda á cada una de las significativas, y cuáles habrán de estar ocupados por ceros[1].

1 Ademas de ser absolutamente arbitraria y convencional no solo la figura que se ha dado á cada uno de los guarismos, sino tambien la ley de que las unidades representadas por ellos sean del órden indicado por el lugar que ocupen contando de derecha á izquierda; asi como se han adoptado nueve cifras significativas, podrian adoptarse mas ó menos: pero siempre seria necesaria otra cifra insignificante ó el cero para ocupar los lugares que las demas dejasen vacíos en sus combinaciones. Si como hemos preferido nueve cifras significativas y el cero, hubiéramos adoptado once significativas y el cero, cada una de las cifras significativas colocada en un lugar cualqniera de una combinacion, valdria *doce* veces mas de lo que valiera si estuviese en el lugar inmediato á la derecha: y si, como era natural, se trataba de

12 Si al mismo tiempo que expresamos el nombre de algun número, designamos la especie de unidad á que se refiere, como cuando decimos *dos hombres* ó *tres varas* ó *cuatro libras* ó *cinco años*, se da á cualquiera de estas expresiones el nombre de *número concreto*; pero si al nombrar un número cualquiera no hacemos mencion alguna de la especie de sus unidades, como cuando decimos que el *veinte* equivale á dos como el *diez*, á cualquiera de estos números lo llamamos *número abstracto*. Y como la formacion de los números, y todas las propiedades que de ella resultan, respectivas á su composicion y descomposicion, sean absolutamente independientes de la especie de unidad á que se refieren, vamos á exponer las principales reglas que deben observarse para componerlos y descomponerlos sin atender á la naturaleza de sus unidades, ó considerándolos á todos como números abstractos.

De la adicion.

13 Puesto que á todo número se le puede considerar no solo como una combinacion de unidades de una misma especie, sino tambien como una coleccion de algunos otros números menores, referidos todos á una misma unidad; es consiguiente que ocurran con suma frecuencia innumerables casos en que convenga averiguar *cual sea el número equivalente al conjunto de otros varios de magnitud conocida*. Tal es el objeto de la opera-

acordar el sistema de la numeracion verbal con el que en tal caso se seguiria en la escrita, cada unidad de un órden cualquiera equivaldria á una *docena* de unidades del órden inmediato inferior; por manera que la *raiz de la escala de la numeracion*, que ahora es *diez*, seria entonces *doce*.

cion que llamamos *sumar* ó la *adicion*; la cual no viene á ser otra cosa que una abreviacion de lo que suponemos haberse practicado para la formacion y denominacion de los números: con la única diferencia de que en la una suponemos agregadas sucesivamente y una á una las unidades de que cada número se compone, cuando en la otra se trata de averiguar cuál de los números ya designados con sus respectivos nombres resulta de haberse reunido de una vez á una combinacion de unidades otra ú otras combinaciones. Bien se deja conocer que seria absolutamente imposible esta averiguacion, si de antemano no tuviésemos ya formada y muy presente la série de los nombres que se han impuesto á todos los números. Mal podríamos, por ejemplo, saber cuál es el número equivalente al conjunto del *siete* y del *cinco*, si por medio de la sucesiva agregacion de una unidad á otras no estuviésemos préviamente ciertos de que agregando al número *siete* cinco unidades, ó siete al número *cinco*, resulta el que llamamos *doce*. Lo mismo podemos decir de las varias reuniones de los números dígitos á cualquiera otro, cuyos resultados es necesario tener bien conocidos y muy presentes en la memoria.

Cuando es algo considerable la magnitud de los números que se hayan de reunir ó sumar, la misma descomposicion de partes en que nos presenta á cualquier número la combinacion de cifras con que se le escribe, nos proporciona igualmente descomponer el todo de la operacion que nos proponemos efectuar, en otras operaciones parciales mucho mas sencillas, en las cuales reunimos unas con otras las unidades de un mismo órden, contenidas en los números propuestos, con entera separacion de las de otros diferentes órdenes. Asi logramos ejecutar sin dificultad por partes lo que por lo menos nos hubiera sido muy dificil efectuar de una vez. Para sumar, por ejemplo, el número 5741 con el 3216, reuniremos primeramente la unidad absoluta del primero con las *seis* del segundo, y veremos que son 7 las unidades absolutas de los dos números: en seguida reuniremos á las *cuatro* decenas del primero la única decena que hay en el segundo, y vendrán á ser 5 las decenas de los dos: reuniremos asimismo á las *siete* centenas del primero las *dos* centenas del segundo, y resultarán 9 centenas las de los dos: reuniremos por último á los *cinco* millares del primero los *tres* del segundo, y serán 8 los millares de los dos. El conjunto de estas cuatro agregaciones parciales forma un total de ocho millares, 9 centenas, 5 decenas y 7 unidades absolutas, representado por la combinacion 8957, en la cual tenemos el número *ocho mil novecientos cincuenta y siete*, que equivale á los dos propuestos reunidos, y que se llama la *suma* de ellos, así como estos se llaman los *sumados*.

De este mismo método se puede hacer uso para hallar la suma de cualesquiera números por muchos y grandes que sean; pero es necesario tener presente que la suma parcial de las unidades de un mismo órden puede frecuentemente contener una ó mas decenas de las mismas unidades; y pues que segun el sistema adoptado para la numeracion escrita, cada decena de unidades da un órden cualquiera viene á ser una sola unidad del órden inmediato superior; es consiguiente que á la suma parcial de las unidades de este órden superior que se hallen en los números que nos hayamos propuesto sumar, se hayan de agregar otras tantas como decenas contenga la de las del órden inmediato inferior. Si, por ejemplo, nos proponemos sumar los dos números 649 y 758, vemos que las *nueve* unidades absolutas del primero, reunidas á las *ocho* del segundo, componen *diez y siete*. De estas escribimos solo las *siete* con la cifra 7 que á este número dígito está asignada; y como las otras *diez* forman *una decena* ó unidad de segundo órden, reservamos esta para agregarla á las del mismo órden que desde luego aparecen en los dos números propuestos. Diremos, pues, á continuacion: las *cuatro* decenas del primer número, unidas á las *cinco* del segundo, componen *nueve* decenas; y agregando á estas la que hemos reservado del resultado anterior, vendrán á ser exactamente *diez*; y pues que á diez decenas equivale una sola centena, habremos de escribir un cero en el lugar asignado á las decenas, y reservar aquella centena para agregarla á las que los números propuestos contengan. Por último diremos: las *seis* centenas del primer número, unidas á las *siete* del segundo, componen *trece* centenas, á las cuales agregada la que á este fin hemos reservado de la suma parcial anterior, vendrán á ser catorce centenas, ó lo que es equivalente, *cuatro* centenas y *un* millar, que representaremos por sus correspondientes guarismos colocados en sus lugares respectivos. Y no habiendo en los números propuestos unidades de órden superior al de las centenas, podremos ya dar por concluida la operacion y tener por cierto que la suma que buscábamos es el número 1407.

14 Para efectuar con el órden debido y abreviar todas las agregaciones parciales, y determinar con prontitud y seguridad el resultado final, se ha adoptado el medio de colocar las combinaciones de cifras con que esten representados los *sumandos*, de tal modo que se facilite la reunion de las unidades de un mismo órden, y se evi-

te la confusion que de otra suerte seria de temer, de las de unos órdenes con las de otros diferentes: para todo lo cual se ha establecido una regla general que el siguiente ejemplo dará suficientemente á conocer.

Propongámonos sumar los números 627, 2519, 9812, 73 y 8; y escribamos para ello estas combinaciones de cifras, unas debajo de otras, de modo que formen una coluna ó línea vertical[1] todas las que representen unidades de un mismo órden; y por debajo de todas tiremos una línea para separar de los sumandos el resultado de la operacion.

	627
	2519
Sumandos........................	9812
	73
	8
Suma............................	13039

Luego que hemos colocado las cifras de los sumandos en la disposicion que aquí se ve, reunimos primeramente todas las unidades absolutas; y siendo *veinte y nueve* la suma de ellas, y equivaliendo las *veinte* de estas á *dos* decenas, escribimos en primer lugar la cifra significativa 9, y reservamos aquellas *dos* decenas para agregarlas á las demas unidades de segundo órden que desde luego aparecen en los números propuestos. Con este aumento vienen las decenas á ser *trece*; y puesto que las *diez* de estas componen *una* centena, escribimos solo las *tres* restantes con la cifra 3 que les corresponde, y reser-

1 Línea vertical se llama la tirada de abajo arriba, ó al contrario, sin inclinarse á lado alguno, é imitando la posicion que toma un hilo, del cual esté suspendido cualquier peso.

vamos aquella centena para agregarla á las que á primera vista se nos presentan en los *sumandos*. Hecha efectivamente esta agregacion, resultan justamente *veinte* centenas equivalentes á *dos* millares; por manera que no debiendo ocupar el tercer lugar ninguna de las cifras significativas, será forzoso colocar en él un cero, y reservar los *dos* millares para agregarlos á los que se ven en los sumandos. Siendo *trece* por razon de este aumento la suma parcial de los millares, y equivaliendo los *diez* de estos á una decena de millares ó á *una* unidad de quinto órden, escribimos la cifra 3 en el cuarto lugar, y la 1 en el quinto. Asi tendremos la combinacion de cifras 13039, que como ya se sabe, represента al número *trecemil y treinta y nueve*, el cual es la *suma* de los cinco propuestos[1].

15 Y pudiéndose ejecutar lo mismo con otros cualesquiera, se ha erigido esta práctica en la siguiente

Regla general: *Siempre que nos propongamos determinar la suma de varios números, escribiremos unas debajo de otras las combinaciones de cifras que los representen, de modo que se hallen en una misma coluna todas las cifras que designen unidades de un mismo órden, y por debajo de todas ellas tiraremos una línea para es-*

1 Lo que acabamos de practicar en el ejemplo propuesto, nos da muy bien á conocer la razon por que toda adicion de varios números haya de efectuarse procediendo de la derecha hácia la izquierda, á no ser en algun caso particular, y no muy frecuente, en que ninguna de las sumas parciales de unidades de un mismo órden pase de *nueve*; en cuyo caso seria indiferente proceder de izquierda á derecha ó al contrario; pero como rarísima vez se verifica tal circunstancia, el sistema adoptado para la numeracion escrita nos constituye en la forzosa precision de ejecutarlo del modo que ya hemos indicado, porque de lo contrario, no podríamos oportunamente saber qué aumento deba tener la suma parcial de las unidades de cualquier órden por razon de las *decenas* que se deban reservar de la suma de las del órden inmediato inferior.

cribir con separacion el resultado. En seguida reuniremos todas las unidades absolutas; y si esta suma parcial no pasase de nueve, escribiremos en el primer lugar de la derecha la cifra que le corresponda; mas si pasando de nueve compusiese una, dos ó mas decenas justas, pondremos un cero en el dicho primer lugar; y si aquella suma contuviese no solo decenas, sino tambien algunas unidades, escribiremos la cifra que á estas solas corresponda, y reservaremos en estos dos últimos casos las decenas para agregarlas á las unidades de la coluna siguiente. Practicaremos sucesivamente la misma operacion en todas las demas colunas, y en llegando á la última, escribiremos la suma de sus unidades tal como resulte, despues de haberle agregado las decenas que se hayan reservado de la coluna anterior.

Hé aqui algunos otros ejemplos en los cuales se ven observadas todas las partes de esta regla, y que por tanto pueden servir de norma á los principiantes para proponerse otros muchos en que deben ejercitarse.

7862	38964	268397
46954	6789	4685
381	29458	27569
9270	879	846
64467	76090	301497

De la sustraccion.

16 Ya que por medio de la adicion sabemos componer un número reuniendo otros muchos, tratemos ahora de averiguar cómo quitaremos de cualquier número algun otro menor, de modo que sepamos con certeza qué

otro número queda despues de efectuada la *sustraccion*; ó lo que viene á ser lo mismo, cuál es una de dos partes en que nos propongamos descomponer un número cualquiera, sabiéndose de antemano cuál sea la otra. Con efecto, cuando, por ejemplo, quitamos el número *cuatro* del *nueve*, y vemos que despues de efectuada la sustraccion ha quedado el *cinco*, hemos conseguido descomponer el *nueve* en dos partes tales, que reunidas de nuevo lo vuelvan á componer, siendo una de ellas el número *cuatro*.

Mientras sea número dígito el que hayamos de quitar de algun otro, el medio mas seguro será seguir una marcha enteramente opuesta á la que hemos indicado (§. 13) para hallar la suma en caso semejante; es decir, que en la série ó escala que suponemos ya formada de los nombres asignados á todos los números, bajaremos desde el mayor de los propuestos tantos grados como unidades tenga el menor, y asi vendremos á parar al nombre correspondiente al número desconocido que busquemos. Bajando, por ejemplo, *cuatro* grados desde el nombre *nueve*, llegaremos al *cinco*, nombre asignado al número que reunido con el *cuatro* vuelve á componer el *nueve*, ó que nos manifiesta cuántas unidades tiene el *nueve* mas que el *cuatro*.

Bajo este último punto de vista decimos que el *cinco* es el *exceso* que el *nueve* lleva al *cuatro*; pero si solo nos propusiéramos indicar la desigualdad de los números *nueve* y *cuatro*, prescindiendo de cuál de los dos sea el mayor y cuál el menor, diríamos que *cinco* es la *diferencia* de ellos; y por último, si suponemos que de *nueve* se han quitado *cuatro*, diremos que el resíduo es *cinco*. Se ve, pues, que sin embargo de ser sinónimas las voces *resíduo*, *exceso* y *diferencia*, corresponde cada una de ellas á un particular modo de mirar la descomposicion de un número en dos partes. A esta operacion, bajo cualquier aspecto que se la mire, se la designa con el nombre de *sustraccion*; al mayor de los números propuestos se le llama *minuendo*, y al menor *sustraendo*.

17 Cuando son algo crecidos los números, se ejecuta por partes la sustraccion, quitando sucesivamente de las unidades que haya de cada órden en el *minuendo* las correspondientes del *sustraendo*; y para hacerlo con mas comodidad se coloca la combinacion de cifras que representa á este segundo, debajo de la del primero, en la misma disposicion que si tratásemos de sumar los dos números. Propongámonos, por ejemplo, quitar el número *dosmil trecientos cuarenta y cinco* del *nuevemil quinientos ochenta y siete*; y despues de haber colocado, segun aqui se ve, las combinaciones de cifras con que respectivamente se les representa por escrito,

Minuendo..........................	9587
Sustraendo..................	2345
Resíduo..........................	7242

diremos, comenzando por las unidades de primer órden; quitando *cinco* de *siete* quedan *dos*; quitando de *ocho* *cuatro* quedan *cuatro*; quitando *tres* de *cinco* quedan *dos*, y últimamente quitando *dos* de *nueve* quedan *siete*; y la combinacion de las cuatro cifras 7242, formada de los cuatro resíduos parciales, y que representa al número *sietemil docientos cuarenta y dos*, nos da á conocer el *resíduo* total que resulta de haber restado del número *nuevemil quinientos ochenta y siete* el *dosmil trecientos* *cuarenta y cinco*, ó el *exceso* que á este lleva aquel, ó la *diferencia* de entrambos.

La exactitud de este método es indudable, en vista de que quitando sucesivamente, como se ha hecho, de cada parte del minuendo la correspondiente del sustraendo, se ha de obtener forzosamente el mismo resultado final que si de una sola vez se restase de todo el minuendo todo el sustraendo.

18 Aunque el minuendo deba en todos casos ser mayor que el sustraendo, puede acontecer, y con frecuencia acontece, que uno ó mas números de unidades de ciertos órdenes inferiores sean menores en el minuendo que sus correspondientes en el sustraendo. Al hacer, pues, en tales casos uso del método expuesto, ocurre inevitablemente una dificultad que es necesario saber superar.

Propongámonos, por ejemplo, restar el número *trecientos noventa y siete* del *quinientos veinte y cuatro.*

Minuendo........................	524
Sustraendo......................	397
Resíduo..........................	127

Cuando á semejanza de lo que hemos practicado en el ejemplar anterior, vamos en este á quitar del número parcial de unidades absolutas del minuendo el correspondiente del sustraendo, y del de las decenas de aquel el de las de este, echamos de ver que ni de *cuatro* unidades absolutas es posible quitar *siete*, ni de *dos* decenas quitar *nueve*. Pero teniendo presente que al número *quinientos veinte y cuatro*, que nos presenta su respectiva combinacion de cifras como formado por la reunion de las tres partes *cinco* centenas, *dos* decenas y *cuatro* unidades absolutas, lo podemos nosotros considerar como formado por alguna otra reunion equivalente; á poco que reflexionemos, vendremos en conocimiento de que en este caso conviene que lo miremos como formado por la reunion de *cuatro* centenas, *once* decenas y *catorce* unidades absolutas; para que de este modo podamos quitar de las *catorce* unidades absolutas del minuendo las *siete* del sustraendo, y quedarán otras *siete* de resíduo; quitaremos igualmente de las *once* decenas del minuendo las *nueve* del sustraendo, y quedarán *dos* de resíduo; y por último, quitando de las *cuatro* centenas del minuendo las *tres* del sustraendo quedará sola *una* centena de resíduo. Combinando los tres resíduos parciales y representándolos por las cifras correspondientes, colocadas en los lugares asignados á los tres diferentes órdenes de unidades, resultará el resíduo total 127 que buscábamos.

No es dificil ver que lo que acabamos de ejecutar para efectuar la sustraccion que á primera vista parecia impracticable, se reduce á que de las *dos* decenas que desde luego se nos presentan en el minuendo, hemos separado mentalmente *una*; y habiéndola convertido en las *diez* unidades absolutas á que equivale, las hemos agregado á las *cuatro* unidades del mismo órden que aparecen en el minuendo. Asimismo, de las *cinco* centenas del minuendo hemos separado otra, y convirtiéndola en *diez* decenas á que equivale, las hemos agregado á la única decena que ya quedaba en él despues de haber separado la que redujimos y agregamos á las unidades de primer órden. De lo cual es fácil inferir que generalmente, siempre que algun número de unidades de cualquiera de los órdenes inferiores sea menor en el minuendo que su correspondiente en el sustraendo, habremos de separar mentalmente *una* de las unidades que el mismo minuendo tenga del órden inmediato superior; y reduciéndola á las *diez* unidades de órden inferior á que equivale, las uniremos con las que haya de este mismo órden en el minuendo; y asi vendrá á ser practicable la sustraccion que antes no lo parecia. Mas al continuar en tales casos la operacion, es necesario tener muy presente que el número de unidades del órden inmediato superior del minuendo tiene de menos la que de él hemos separado para reducirla á las *diez*, y agregarlas á las del inmediato inferior.

19 Si en los casos de que acabamos de hablar, hubiese en la combinacion de cifras con que se representa por escrito el minuendo, uno ó mas ceros inmediatamente á la izquierda de la significativa cuyo valor es menor que el de la correspondiente del sustraendo, nos será indispensable acudir á la primera cifra significativa que en el mismo minuendo se halle á la izquierda de los ceros para tomar del valor de ella la unidad que se ha de reducir á las equivalentes de órden inferior, á fin de que por este medio venga á ser practicable le sustraccion. Propongámonos, por ejemplo, restar el número *tresmil cuatrocientos noventa y cinco* del *siete mil y dos.*

Minuendo...........................	7002
Sustraendo.........................	3495
Resíduo............................	3507

No siendo posible quitar de las *dos* unidades absolutas del minuendo las *cinco* del sustraendo, y habiendo dos ceros á la izquierda de la cifra significativa 2; para tomar las *diez* unidades que se han de agregar á esotras dos, tendremos que recurrir al valor de la cifra 7, que por estar colocada en cuarto lugar representa *siete* millares. De estos separaremos mentalmente las *diez* unidades absolutas que hemos de agregar á las *dos* que desde luego vemos en el minuendo, y consideraremos á este número como formado por la reunion del *seismil novecientos noventa* y del *doce*. Quitaremos de estas *doce* las *cinco* del sustraendo, y escribiremos en su respectivo lugar el resíduo parcial 7. Ahora debemos considerar que en el minuendo ha quedado solo el número 6990, y que de consiguiente en lugar de las 700 decenas se han sustituido 699. Continuaremos, pues, la sustraccion suponiendo que los ceros han venido á ser *nueves*, y que la cifra significativa 7 se ha reducido á la 6, ó que su valor tiene una unidad menos. Por este medio veremos que el resíduo total es, segun está indicado, el número *tresmil quinientos y siete*.

Si nos propusiéramos restar el número *ochomil setecientos sesenta y cuatro* del *diezmil*, consideraríamos al minuendo como formado por la reunion del 9990 y del 10; y pudiéndose ya entonces ejecutar todas las sustracciones parciales, hallaríamos fácilmente el resíduo total 1236, segun aqui se ve.

Minuendo....................	10000
Sustraendo....................	8764
Resíduo....................	1236

20 Comprendiendo en una regla general todos los procedimientos relativos á los diferentes casos que pueden ocurrirnos en la sustraccion, estableceremos que

Para restar un número de otro, se escribirá la combinacion de cifras del sustraendo debajo de la del minuendo, de modo que las que en ambos números representan unidades de un mismo órden, se hallen colocadas en una *misma coluna, y por debajo se tirará una línea para separar de los dos números propuestos el resultado. Se restará despues, comenzando por la derecha,*[1] *el valor de cada cifra del sustraendo del que tenga la correspondiente del minuendo, y se escribirá debajo el resíduo parcial. Cuando el valor de alguna cifra del minuendo sea menor que la del sustraendo, se separará mentalmente una de las unidades del valor de la cifra inmediata, en caso que esta sea significativa, y agregando á aquel menor valor las diez unidades del mismo órden á que equivale la unidad tomada de entre las del órden inmediato superior, resultará un número, del cual se restará sin la menor dificultad el valor de la cifra del sustraendo. Pero si inmediatamente á la izquierda de la cifra de menor valor hubiese uno ó mas ceros en la combinacion con que esté escrito el minuendo, se habrá de tomar en tal caso aquella unidad del valor de la primera cifra significativa que se encuentre á la izquierda de los ceros: á estos se les reputará por nueves; y en ambos casos se habrá de tener presente que tiene de menos una unidad el valor de la cifra de donde se la haya tomado.*

21 En estos mismos casos en que para efectuar alguna sustraccion parcial es necesario agregar *diez* unidades á las que haya en el minuendo, suele tambien ejecutarse esta agregacion considerando á las diez unidades

1 Tan solo en el raro caso de que todas las cifras del minuendo tengan cada una mayor valor que su correspondiente del sustraendo, podrá ser indiferente que al ejecutar las sustracciones parciales se proceda de la izquierda á la derecha, ó al contrario; pero luego que el valor de alguna de las cifras del minuendo sea menor que el de su correspondiente del sustraendo, no podrá efectuarse aquella sustraccion parcial sin que se haya de corregir el resultado de la inmediata anterior á la izquierda: para evitar lo cual, es indispensable proceder de la derecha á la izquierda.

no como un suplemento tomado de alguna otra parte del minuendo, sino como si á este número se le diese de nuevo aquel aumento de valor. Bajo este supuesto no se mira como disminuido el valor de la inmediata cifra significativa del minuendo; pero en compensacion de aquel aumento que se le ha dado, habrá que añadir al valor de la cifra inmediata del sustraendo una sola unidad para que de este modo resulte el verdadero resíduo total. Esta última práctica, que algunos prefieren á la otra, está fundada en que *si á cualesquiera dos cantidades desiguales se les añaden ó quitan cantidades iguales, el resíduo, la diferencia ó exceso que la mayor lleva á la menor, se conserva exactamente el mismo que antes de aquella agregacion ó disminucion.* Ahora bien: con arreglo al sistema de la numeracion escrita, una unidad de cualquier órden equivale á diez del órden inmediato inferior: agregando, pues, diez unidades á las de cualquier órden del minuendo, y una sola unidad á las del órden inmediato superior del sustraendo, añadimos á los dos números desiguales propuestos otros dos entre sí equivalentes, y á consecuencia el valor del resíduo que buscamos, permanecerá sin la menor alteracion.

Añadiremos por conclusion algunos otros ejemplos en que los principiantes pueden ejercitarse.

Minuendo...	3016842	103034	49812003
Sustraendo.	2947568	69845	18924985
Resíduo.....	69274	33189	30887018

Pruebas de la adicion y de la sustraccion.

22 Por mas seguras que sean las reglas que se nos hayan prescrito para efectuar una operacion, y por mas

firme y decidido que sea nuestro propósito de observarlas con la mayor exactitud en la práctica, no podemos todavía tener certeza alguna de haber obtenido el verdadero resultado que nos hayamos propuesto determinar, cuando la experiencia no nos permite dudar de la facilidad con que nos distraemos de nuestro principal objeto por mas interesante que sea, y de lo expuestos que á consecuencia estamos á padecer muchas equivocaciones y aun á cometer no pocos ni leves errores. Esta consideracion, que es general con respecto á todas nuestras operaciones intelectuales, se puede con mayor razon y mas particularmente aplicar á todas aquellas en las cuales, asi como en la adicion y en la sustraccion, tenemos que valernos de ciertos resultados parciales que debe suministrarnos la memoria. De ahí es que para averiguar si en la ejecucion de ellas hemos cometido algun error, ó por lo menos padecido alguna equivocacion, recurrimos á otra operacion por cuyo medio tratamos de poner en claro si es ó no exacto el resultado que en ellas hemos hallado: por cuya razon se la llama la *prueba* de ellas.

De varias operaciones de que suele hacerse uso como de pruebas de la adicion, expondremos solo la que está reducida á sumar sucesivamente de nuevo y procediendo de izquierda á derecha, todas las unidades de cada una de las columnas en que estan distribuidas las cifras de los sumandos; y á restar cada una de estas sumas parciales de la parte correspondiente que en la suma total antes hallada haya resultado de la anterior operacion; en la segura inteligencia de que en llegando á hacerse la sustraccion de la suma de las unidades absolutas, no debe quedar resíduo alguno siempre que aquella primera operacion esté bien efectuada, porque en tal caso se resta de un número otro que le es igual. Manifestemos en el ejemplo del §. 14 el órden con que se ejecutan las adiciones y sustracciones parciales indicadas.

	627
	2519
Sumandos..................	9812
	73
	8
Suma..........................	13039
Resíduos.................	~~2120~~

Sumamos de nuevo las unidades de cada coluna comenzando por la izquierda; y siendo la primera suma parcial *once* millares, los restamos de los *trece* que hay en la suma total antes hallada: y pues que resultan *dos* de resíduo, debemos inferir que este proviene de las decenas reservadas de la suma parcial de las centenas. Segun esto habrán de ser *veinte* las centenas; y no siendo mas de *diez y nueve*, inferiremos por la misma razon que la centena que hay de diferencia, proviene de una decena reservada de la suma parcial de las decenas, la cual por consiguiente deberá ser *trece*; y no siendo en realidad mas de *once*, es de inferir que las *dos* decenas de diferencia fueron reservadas de la suma parcial de las unidades absolutas. Deberá, pues, ser *veinte y nueve* la suma de estas; y siéndolo con efecto, tenemos ya un gravísimo fundamento para asegurar que la verdadera suma total es 13039; pues habiendo sido las unidades absolutas las primeras que por el método ordinario se han sumado, no pudo su suma recibir aumento alguno por razon de decenas reservadas de la de otra coluna anterior.

Asi que, *si despues de haber efectuado una adicion,* *se suman de nuevo sucesivamente las unidades de cada una de las colunas de todos los sumandos, comenzando por la primera de la izquierda, y se quita cada una de estas sumas parciales, de las unidades del mismo órden que aparezcan en la total antes hallada, el resíduo de la última sustraccion deberá ser cero, si está bien efectuada la primera adicion.* [1]

23 Examinando con alguna atencion lo que se nos prescribe para averiguar por este medio si en una adicion que hayamos efectuado, hemos cometido algun error ó padecido alguna equivocacion, fácilmente se ve que todo está en sustancia reducido á ejecutar de nuevo la adicion procediendo en un órden inverso al de la primera, y á restar del primer resultado el segundo. Bien claro es que si en ninguna de las dos adiciones ni en la sustraccion se cometiere falta alguna, el resíduo debe ser nulo; pero de que resulte tal, no debemos inferir con entera certeza que la primera adicion está rectamente efectuada; porque en las tres operaciones pueden muy bien haberse cometido errores de tal modo que se hayan compensado los unos con los otros. Y aun en caso que no resulte cero por resíduo final, tendremos en esto bastante fundamento para asegurar que en alguna, por lo menos, de las tres operaciones se ha cometido algun error, pero sin poder decir con seguridad en cuál. En vista de estas reflexiones, que son aplicables á todas las operaciones que se nos indican como *pruebas* de otras, cuando en una adicion tengamos, como casi siempre hay motivo para tener, alguna

1 Si para auxiliar la memoria, escribiésemos los resíduos al pie de las colunas á que corresponden, segun se ve practicado en el ejemplo propuesto, convendrá ir tachándolos, á proporcion que se vaya haciendo uso de ellos, á fin de no confundirlos con el resultado de la operacion principal.

duda sobre la exactitud del resultado, nos parece preferible para salir de ella, el medio de efectuar de nuevo la adicion, comenzando, como antes, por la derecha, y sin variar mas que el órden con que se hayan hecho las reuniones de las unidades de cada coluna; de forma que si para hacerlas en la primera operacion se procedió, segun de ordinario se acostumbra, de arriba abajo, procedamos en la segunda, que debe servir de prueba, de abajo arriba, y por la inversa.

24 Pudiéndose en todo caso considerar el sustraendo y el resíduo como dos partes en que se ha descompuesto el minuendo (§. 16), ya se deja ver que *como esté rectamente efectuada una sustraccion, la suma del sustraendo y del resíduo debe ser exactamente igual al minuendo.* Asi para cerciorarnos de estar bien ejecutada la sustraccion siguiente,

Minuendo................	524
Sustraendo..............	297
Resíduo...................	227
Suma.......................	524

sumaremos el sustraendo y el resíduo, y viendo que la suma es igual al minuendo, tendremos cuanta seguridad es posible de que es exacto el resultado que primeramente se halló.

De la multiplicacion.

25 Llamamos *multiplicacion* á la operacion por cuyo medio logramos determinar con mayor brevedad y menor trabajo que efectuando la adicion ordinaria, el número equivalente al conjunto ó suma de otros varios entre sí iguales, ó como suele decirse, á uno de ellos to-

mado ó repetido tantas veces cuantos sean los números que se hayan de sumar ó reunir. En la adicion siguiente, por ejemplo,

Sumandos..............	16
	16
	16
	16
Suma....................	64

decimos que está tomado ó repetido *cuatro* veces el número *diez y seis*.

Tomar ó repetir *dos* veces un número, es lo que llamamos *duplicarlo*; tomarlo *tres* veces *triplicarlo*; *cuatro* veces, *cuadruplicarlo*; y en general, tomarlo ó repetirlo muchas veces, se llama *multiplicarlo*.

En toda multiplicacion, pues, se consideran tres números, que son: el que se ha de repetir, al cual damos el nombre de *multiplicando*; el que designa cuántas veces se haya de repetir, y que llamamos el *multiplicador*; y por último el resultado de la operacion, conocido bajo el nombre de *producto*. Considerando al *multiplicando* y al *multiplicador* como que ambos concurren á la formacion del *producto*, se les da el nombre comun de *factores* de este. En el ejemplo propuesto *diez y seis* es el *multiplicando*; *cuatro* el *multiplicador*; *sesenta y cuatro* el *producto*; y de consiguiente *diez y seis* y *cuatro* son *factores* de *sesenta y cuatro*.

26 Si no tuviésemos otro medio de hallar el *producto* que el de sumar tantos multiplicandos como indicase el multiplicador; luego que fuese algo considerable la magnitud de entrambos, nos seria forzoso emplear en la operacion demasiado tiempo y trabajo: por cuya ra-

zon se ha procurado abreviarla descomponiéndola en otras operaciones parciales mucho mas sencillas, cuyos resultados suponemos sabidos de antemano. Sin necesidad, por ejemplo, de ejecutar la adicion propuesta (§. 25), podemos tomar *cuatro* veces al número *diez y seis* tomando con separacion el mismo número de veces á las *seis* unidades absolutas y á la decena; es decir, á las partes de que se nos presenta compuesto el multiplicando por la combinacion de cifras con que se le representa por escrito, teniendo por último el cuidado de reunir los productos de estas multiplicaciones parciales. Mientras, pues, sea dígito el multiplicador, bastará tener sabidos los productos de los números dígitos multiplicados unos por otros.

Todos estos productos estan contenidos en la tabla siguiente, cuya formacion se atribuye á Pitágoras.

Tabla pitagórica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para formar esta tabla se escriben primeramente en un mismo renglon ó línea los primeros nueve números; y agregando á cada uno de estos otro igual á él, obtenemos los productos que resultarian de multiplicar á cada uno de ellos por *dos*, cuales se ven en la segunda línea. Si á cada uno de estos productos de la segunda línea se le agrega el número que le corresponde en la primera, resultarán los productos de la multiplicacion por *tres*, segun se hallan en la línea tercera; y añadiendo á cada uno de estos de la tercera su correspondiente de la primera, resultan los de la cuarta, y asi de los demas. Por este medio se obtienen, como se ve, todos los productos de los números dígitos multiplicados uno por otro.

Conviene observar que los varios productos de un número cualquiera por los números *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco* &c. se llaman *múltiplos* del multiplicando. Asi los números *seis*, *nueve*, *doce*, *quince* &c. se llaman *múltiplos* de *tres*.

Habiendo comprendido la formacion de esta tabla, es muy fácil entender el modo de hacer uso de ella. Si, por ejemplo, quisiéramos saber cuál sea el producto de *siete* por *cinco*, tendríamos presente que los productos de las multiplicaciones por *cinco* se hallan en la quinta línea horizontal[1], y que los del *siete* multiplicado por cada uno de los números dígitos, forman la séptima coluna ó línea vertical; y de ahí inferimos que el producto de la multiplicacion del *siete* por el *cinco* debe hallarse al mismo tiempo en la quinta línea horizontal y en la séptima vertical, y que de consiguiente es el *treinta y cinco*, por ser el único entre todos los comprendidos en la

1 *Línea horizontal* se llama la recta tirada de izquierda á derecha ó al contrario, sin que esté uno de sus extremos mas bajo que el otro.

tabla que reune las dos condiciones. Lo mismo se verifica en cualquier otro caso: *el producto de cualesquiera dos números dígitos se hallará siempre en la línea horizontal indicada por el multiplicador y en la coluna designada por el multiplicando.*

27 Examinando con atencion los productos contenidos en la misma tabla, se echa fácilmente de ver que por lo respectivo al resultado de la operacion, lo mismo es multiplicar *siete* por *cinco* que *cinco* por *siete*, y que *cuatro* multiplicado por *tres* da el mismo producto que *tres* multiplicado por *cuatro*. Y aunque se observe esto mismo en todos los productos de dos números dígitos; sin embargo, siendo, como es, tan limitado el número de ellos, no debe esto bastar para inferir que generalmente cuando sean los mismos los dos factores, aun cuando no lo sea el órden con que se les multiplique, ha de resultar necesariamente el mismo producto, pues podria muy bien suceder que no se verificase tal cosa en algunos de los productos mayores, cuyo número es ilimitado. Tan solo un razonamiento independiente de todo valor particular del multiplicando y del multiplicador podrá convencernos de que aquella proposicion no padece excepcion alguna: y justamente el que sigue tiene no sola la ventaja de ser generalmente aplicable á cuantos casos puedan ocurrir, sino tambien la de presentarnos una imágen sensible del modo de formar el producto de dos cualesquiera factores. Para hacerlo mas perceptible, apliquémoslo en primer lugar á los factores *cinco* y *tres*.

Si escribimos el guarismo con que representamos la unidad cinco veces seguidas en una misma línea horizontal, y ponemos debajo de esta otras dos semejantes, segun aqui se ve,

I	I	I	I	I
I	I	I	I	I
I	I	I	I	I

es evidente que la coleccion de todas estas unidades, la cual es justamente el producto de la multiplicacion de *cinco* por *tres*, será tantas veces *cinco* como líneas haya, es decir, *tres* veces *cinco*; y como de la mera disposicion de las *tres* líneas resultan *cinco* colunas de á *tres* unidades cada una, la coleccion total vendrá tambien á ser tantas veces *tres* unidades como colunas haya, es decir, *cinco* veces *tres* unidades. Y puesto que el número total de unidades, que es el producto, no depende en manera alguna de que nosotros contemos de un modo ó de otro las que efectivamente contenga, es muy claro que *tres* veces *cinco* y *cinco* veces *tres* producen un mismo resultado.

28 Ahora es ya muy fácil generalizar este razonamiento haciéndose cargo de que despues de haber puesto en una línea las unidades del multiplicando, las del producto deberán formar tantas líneas todas iguales cuantas sean las unidades del multiplicador: y como á consecuencia del órden en que se les supone colocadas, resultan dispuestas todas tambien en colunas, se ve sin la menor dificultad que serán tantas como unidades contenga el multiplicando; y en cada coluna debe haber tantas unidades cuantas contenga el multiplicador. Cuando se trate pues de determinar el número total de unidades del producto, podrá esto conseguirse contándolas por líneas ó por colunas. Si las contamos del primer modo, vemos que el producto contiene tantos multiplicandos como unidades el multiplicador; asi como contándolas del segundo mo-

do, se ve igualmente que el mismo producto contiene tantas veces al multiplicador, como el multiplicando á la unidad. Nos es por consiguiente permitido, cuando tratemos de hallar el producto de los números abstractos, ó que puedan considerarse como tales, elegir para multiplicando el que por cualquiera razon nos parezca mas conveniente [1]: pues, segun acabamos de demostrar, *el producto de dos números cualesquiera es el mismo, sea cual fuere el órden en que se les multiplique*; y de consiguiente *cualquiera de los dos factores indica cuántas veces está contenido en el producto el otro factor.*

29 Suponiendo ya bien sabidos de memoria todos los productos contenidos en la tabla pitagórica, se puede, con arreglo á lo indicado (§. 26) multiplicar por cualquiera de los nueve números dígitos otro cualquiera por grande que sea; pues si se multiplican sucesivamente, y procediendo de derecha á izquierda por el número dígito que suponemos multiplicador, los varios números de unidades de diferentes órdenes que entran en la composicion del multiplicando, y que estan designados por las cifras de la combinacion con que se le representa por escrito, todas las multiplicaciones parciales vendrán á ser de dos números dígitos, y no habrá que cuidar de otra cosa ademas, sino de ir al mismo tiempo reuniendo ó sumando los productos parciales, para obtener en el conjunto de todos ellos el producto total que se busque.

Propongámonos, por ejemplo, multiplicar el número *quinientos veinte y seis* por *siete*; y á fin de ejecutar con órden las operaciones parciales, colocaremos las cifras

1 Por lo comun elegimos para multiplicando al mayor de los dos números propuestos, ó mas bien al que esté representado por mas cifras significativas.

con que se les representa por escrito, en la disposicion que aqui se ve:

$$\left.\begin{array}{lr} \textit{Multiplicando.........} & 526 \\ \textit{Multiplicador.........} & 7 \end{array}\right\} \textit{Factores del producto.}$$

$$\begin{array}{lr} \textit{Producto..............} & 3682 \end{array}$$

Aunque el producto de las *seis* unidades absolutas del multiplicando tomadas *siete* veces, sea *cuarenta y dos*, se escriben solamente las 2; y reduciendo las otras *cuarenta* á las *cuatro* decenas ó unidades de segundo órden á que equivalen, reservamos estas para agregarlas á las que deben resultar de la multiplicacion parcial inmediata siguiente.

Las *dos* decenas del multiplicando repetidas *siete* veces, componen *catorce* decenas, y agregando á estas las *cuatro* que á este fin hemos reservado del producto parcial inmediato anterior, vendrán á ser *diez y ocho* decenas, de las cuales se escriben en el lugar asignado las 8 solamente; y sustituyendo en vez de las otras *diez* decenas *una* centena á que equivalen, la reservamos para agregarla á las centenas que debe producir la multiplicacion parcial inmediata.

Ultimamente, las *cinco* centenas del multiplicando tomadas siete veces, producen *treinta y cinco centenas*; y agregando á estas la centena que con este objeto hemos reservado del producto parcial anterior, vendrán á ser *treinta y seis* centenas. De ellas escribimos solas las 6 en el tercer lugar que les corresponde, ó inmediatamente á la izquierda de la cifra 8, que suponemos ya colocada en el segundo: y por lo tocante á las otras *treinta* centenas restantes, equivaliendo, como equivalen á *tres* millares, los habríamos reservado para agregarlos al producto parcial siguiente en caso que el multiplicando tuviese unidades de órden mas elevado que las centenas; mas no teniéndolas, escribimos la cifra significativa 3 á la izquierda de la 6, para representar con ella los *tres* millares ó *treinta* decenas; de manera que venimos á escribir el último producto parcial, tal como ha resultado, despues de agregarle las decenas que se han reservado del penúltimo.[1]

30 Cuando en la combinacion de cifras con que está representado por escrito el multiplicando hubiere uno ó mas ceros intermedios, no podrá haber en la que representa el producto, cifra alguna significativa que represente unidades del órden deesignado por cada uno de los ceros, á no ser que se hayan reservado del producto parcial anterior. Para dar clara idea de lo que esto quiere decir, propongámonos los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 1º		*Ejemplo* 2º	
Multiplicando.....	68023	*Multiplicando*..	9015047
Multiplicador...........	.4	*Multiplicador*...............	8
Producto........	272092	*Producto*........	72120376

En el primer ejemplo, despues de multiplicar por el *cuatro* las *dos* decenas del multiplicando, y de agregar al producto parcial la decena reservada del anterior, se escribe las cifra 9 en el segundo lugar, segun le corresponde. En seguida decimos: *el cero multiplicado*, si asi

1 Siendo indispensable que las decenas reservadas de cualquiera de los productos parciales se agreguen á las unidades de órden superior del producto parcial inmediato siguiente, se ve la necesidad de comenzar por las unidades absolutas del multiplicando las multiplicaciones parciales; y que tan solo en los rarísimos casos en que ninguno de los productos parciales sea mayor que *nueve*, podrá ser indiferente proceder en estas operaciones de la izquierda á la derecha ó al contrario.

puede decirse, *por cualquier número no puede dar producto alguno*; lo cual en este caso nos indica que asi como entre las cifras del multiplicando no hay ninguna significativa en el lugar asignado á las centenas, tampoco debe haberla en el mismo lugar del producto, y por consiguiente habrá de colocarse en él un cero, y continuar en seguida las otras tres multiplicaciones parciales.

En el ejemplo segundo, despues de haber multiplicado por el *ocho* las *cuatro* decenas del multiplicando, y de haber agregado al producto parcial las *cinco* decenas que se reservan del anterior; de la suma *treinta y siete* decenas, escribimos solo las 7 en el segundo lugar; y sostituyendo en lugar de las otras *treinta* decenas las *tres* centenas á que equivalen, las reservámos para agregarlas á las del producto parcial inmediato; mas como este deba ser cero, no colocaremos en el lugar tercero del producto ninguna otra significativa sino la que representa las *tres* centenas que se han reservado del producto parcial anterior. Continuando las multiplicaciones parciales, diremos: los *cinco* millares del multiplicando, tomados *ocho* veces, producen *cuarenta* millares; y no habiendo, por una parte, millar alguno reservado del producto parcial anterior, y equivaliendo por otra los *cuarenta* millares á *cuatro* decenas de millares, habremos de colocar un cero en el cuarto lugar del producto total, y reservar aquellas *cuatro* decenas de millares para agregarlas á las que resulten del producto parcial inmediato siguiente. Siendo *ocho* las decenas de millares de este producto; si se las agregan esotras *cuatro* reservadas al efecto, vendrán á ser *doce*, de las cuales escribiremos solamente las 2 en el quinto lugar; y reduciendo las otras *diez* á *una* centena de millares, la reservaremos para agregarla á las que resulten de la multiplicacion parcial que sigue. Por ocupar en el multiplicando un cero el lugar asignado á las centenas de millares, deberia colocarse otro cero en el mismo lugar del producto total, á no estar reservado para ocuparle la *una* centena de millares del producto parcial anterior. Ultimamente, los *nueve* millones del multiplicando, repetidos *ocho* veces, producen *setenta y dos* millones; y no habiendo ningun otro reservado, que se les debiese agregar, escribiremos esta última combinacion 72 de dos cifras inmediatamente á la izquierda de las otras seis para tener representado en la combinacion de las ocho cifras el producto total.

31 Si en la combinacion de las cifras con que se representa el multiplicando, ocupasen algunos ceros los primeros lugares comenzando á contar por la derecha, deberán igualmente ocupar otros tantos ceros los mismos lugares en la combinacion de cifras que haya de representar al producto. Asi que, si nos propusiéramos multiplicar por 9 al número 47800, el producto seria 430200; porque no habiendo cifra alguna significativa en los dos primeros lugares de la combinacion que representa al multiplicando, ni siendo posible que de producto alguno anterior se haya reservado unidad alguna, es indispensable que otros tantos ceros por lo menos ocupen los primeros lugares de la derecha en la combinacion de cifras que debe representar al producto.

32 Lo que hemos practicado y expuesto en los ejemplos precedentes, y que se puede igualmente practicar en todos los demas casos semejantes, puede reducirse á la siguiente

Regla: *Para multiplicar por un número dígito otro cualquiera, se coloca la cifra del multiplicador debajo de* *la primera de la derecha del multiplicando, y por debajo de ellos se tira una línea para separar de ellos el producto. Despues se multiplican sucesivamente por el multiplicador, comenzando por la derecha, todos los números de unidades de diferentes órdenes que aparezcan en la expresion del multiplicando; y si alguno de estos productos parciales no pasase de nueve, se le escribirá tal como resulte, en el lugar correspondiente al órden de sus unidades: mas de todos los que contengan decenas, se reservarán estas para agregarlas á las unidades del producto parcial siguiente. Continuando del mismo modo hasta las unidades del órden mas elevado que se nos presenten en la expresion del multiplicando, se escribirá en su debido lugar este último producto parcial, segun resulte, despues de haberle agregado tantas unidades como decenas se hayan reservado del producto parcial anterior. En caso que uno ó mas ceros ocupen lugares intermedios en la combinacion de cifras del multiplicando, deberán colocarse otros tantos ceros en los mismos lugares de la del producto total, á no ser que del producto parcial anterior se hayan reservado alguna ó algunas decenas: mas si los ceros ocuparen en el multiplicando los primeros lugares de la derecha, otros tantos ceros deberán colocarse en igual situacion en el producto total antes ó despues que se efectúen las multiplicaciones parciales.*

33 Pasemos ya á tratar de los casos en que no sea dígito el multiplicador: y como de los números que se representan por mas de una cifra, los que aparecen mas sencillos son el *diez*, el *ciento*, el *mil*, el *diezmil* &c. expongamos en primer lugar cómo se determina facilísimamente el producto de la multiplicacion de un

número cualquiera por otro de estos que se representan por la primera de todas las cifras significativas con uno, dos ó mas ceros á su derecha.

Ya por lo expuesto (§. 9) se puede muy bien haber venido en conocimiento de que con arreglo al sistema generalmente adoptado para la numeracion escrita, cualquiera de las nueve cifras significativas, combinada con otras cualesquiera, adquiere un nuevo valor diez veces, ó cien veces, ó mil veces &c. mayor [1] del que tenga en el lugar en que se halle anteriormente colocada; siempre que se la atrasa uno, ó dos ó tres &c. lugares á la izquierda de aquel que primeramente ocupe. Y como multiplicado que sea por *diez* un número cualquiera, todas las partes de que aparece formado el multiplicando, deben haberse hecho décuplas de las que primitivamente eran, fácilmente se echa de ver que con solo escribir un *cero* á la derecha de la combinacion de cifras con que esté representado el multiplicando, resultará representado el producto de su multiplicacion por *diez*; pues atrasándose por este medio todas las cifras del multiplicando un lugar hácia la izquierda, la que antes representaba unidades absolutas, representará ahora decenas; la que antes decenas, ahora centenas; la que antes centenas, ahora millares; y asi de las demas.

Por la misma razon, si se colocan dos ceros á la derecha de la combinacion de cifras con que esté representado el multiplicando, la nueva combinacion representará al producto de su multiplicacion por *ciento*:

1 A una magnitud que equivale á *diez* ó á *ciento* como otra, y que segun de ordinario se dice, es *diez* ó *cien* veces mayor que ella, se la llama *décupla* ó *céntupla* de aquella otra.

pues si con escribir un solo cero y hacer que por este medio todas las cifras retrocedan un lugar, se logra representar un número décuplo del multiplicando, escritos que sean dos ceros, deberá resultar otro número *diez* veces mayor que aquel décuplo, ó céntuplo del mismo multiplicando.

Aplicando el mismo razonamiento á cualquiera otro caso en que sea multiplicador alguno de los números que se escriben con la cifra 1 combinada con ceros á su derecha, se puede ver claramente que á consecuencia del sistema adoptado para la numeracion escrita, *siempre que se trate de multiplicar cualquier número por diez, ciento, mil &c., se determina el producto con solo escribir á la derecha de las cifras que representan al multiplicando, tantos ceros como la cifra significativa 1 tenga á su derecha en la combinacion que represente al multiplicador.*

34 Si el multiplicador estuviere representado por cualquiera otra cifra significativa combinada con ceros colocados á su derecha, se determinará el producto total efectuando primeramente la multiplicacion parcial por el valor de la cifra significativa como si estuviese enteramente sola, y escribiendo en seguida á la derecha de las cifras de este producto parcial tantos ceros como acompañen á la cifra significativa del multiplicador. Asi que, si nos propusiésemos, por ejemplo, multiplicar un número cualquiera por 300, lo multiplicaríamos desde luego por *tres*; y teniendo ya en este producto parcial un número equivalente á tres como el multiplicando; si en seguida escribimos dos ceros á la derecha de las cifras que representen este producto, resultará representado otro número céntuplo de él, y equivalente á

trecientos como el multiplicando; es decir, el verdadero producto total de la multiplicacion propuesta. Y pudiendo hacerse un razonamiento semejante en cuantos casos haya que multiplicar un número cualquiera por alguno de los que se representan con una sola cifra significativa combinada con ceros colocados á su derecha; se puede con fundamento establecer en general que *cuando el multiplicador esté representado por una cualquiera de las cifras significativas, combinada con ceros á su derecha, se habrá de efectuar primeramente la multiplicacion por el número dígito representado por la cifra significativa, y en seguida se escribirán á la derecha de las cifras de este producto parcial, tantos ceros como haya en la expresion del multiplicador: con lo cual resultará exactamente representado el verdadero producto total.*

35 Asi como en el caso de que solo el multiplicador es un número dígito, consideramos (§. 29) al multiplicando como formado por la reunion de tantas partes como nos indican las cifras significativas de la combinacion con que se le representa por escrito, y descomponemos por este medio la operacion total en otras parciales, en todas las cuales son números dígitos ambos factores; del mismo modo cuando no solo el multiplicando, sino tambien el multiplicador es alguno de los números que se representan por combinaciones de dos ó mas cifras significativas, lo consideramos igualmente como descompuesto en tantas partes como nos indican las cifras con que se le representa por escrito, y asi descomponemos la multiplicacion propuesta en varias otras parciales, de manera que en todas ellas sea un número dígito el multiplicador. Tenemos, pues, en las reglas hasta

aqui establecidas cuantos auxilios pueden sernos necesarios para determinar el producto de la multiplicacion de dos números representados por combinaciones de dos ó mas cifras significativas cualesquiera.

Si nos propusiéramos, por ejemplo, multiplicar el número 793 por el 345, deberemos tener presente que el mismo producto total resultaria de que se multiplicase de una vez, si fuese posible, el primero de los dos números propuestos por el segundo, que de multiplicar aquel sucesivamente por las *cinco* unidades absolutas, por las *cuatro* decenas y por las *tres* centenas, ó lo que es equivalente, por las 5, por las 40, y por las 300 unidades absolutas que entran en la formacion del multiplicador, y que son cabalmente las tres partes en que nos lo presenta descompuesto la combinacion de cifras con que se le escribe; con tal que en seguida se reunan los tres mencionados productos parciales[1], para obtener en la suma de ellos el producto total.

A fin de efectuar mas fácil y cómodamente toda la operacion, escribimos el multiplicador debajo del multiplicando en tal disposicion que las cifras que en ambos representen unidades de un mismo órden, queden colocadas en una misma coluna, segun aqui se ve:

1 Aunque todo producto que sea parte del total, pueda con justa razon llamarse *producto parcial*; con todo, bajo el nombre de *productos parciales* entendemos de ordinario los que resultan de las sucesivas multiplicaciones de todo el multiplicando por cada una de las partes del multiplicador.

Multiplicando.......	793	*Factores del producto total.*
Multiplicador.......	345	
	3965	*Productos parciales.*
	39720	
	237900	
Producto total.....	273585	

Luego que estan colocadas del modo aqui indicado las cifras con que se representan los dos números propuestos, multiplicamos todo el multiplicando, primeramente por las *cinco* unidades absolutas que desde luego aparecen en la expresion del multiplicador, é inmediatamente debajo de este escribimos el producto 3965 que resulta de esta primera multiplicacion parcial.

Multiplicamos luego despues todo el multiplicando por las *cuatro* decenas, ó por las *cuarenta* unidades absolutas que representa la segunda cifra del multiplicador; para lo cual multiplicamos por *cuatro* (§. 34) á todo el multiplicando, y colocamos un cero á la derecha de las cifras del producto, segun se ve practicado en el ejemplo; ó lo que es equivalente, al tiempo de escribir estas cifras, como es necesario, debajo de las que representan el producto parcial anterior, se colocan en tal disposicion, que la primera de la derecha quede situada en la coluna de las decenas: bien entendido que de todos modos, cuando se escriban unos debajo de otros los varios productos parciales para sumarlos despues, deben colocarse en una misma coluna las cifras que representen unidades de un mismo órden.

Finalmente multiplicamos todo el multiplicando por las *tres* centenas, ó por las *trecientas* unidades absolutas que representa la tercera cifra del multiplicador; y para ello multiplicamos (§. 34) por *tres* á todo el multiplicando, y á la derecha de las cifras con que escribimos este nuevo producto parcial, colocamos dos ceros, como lo hemos ejecutado en el ejemplo propuesto, ó lo que es lo mismo y mas de ordinario se practica, al tiempo de colocarlas debajo de los otros dos productos parciales, cuidamos de que la primera cifra de la derecha quede en la coluna de las centenas.

Escritos asi los tres productos parciales, los reunimos ó sumamos (§. 15) para tener en la suma de ellos el producto total.

36 Con respecto á lo que hemos practicado en el ejemplo propuesto, nos resta solo advertir que sin embargo de que en todas las multiplicaciones parciales se deba comenzar por las unidades absolutas ó por las del órden inferior que aparezcan en la expresion del multiplicando, y proceder de la derecha á la izquierda hasta las del órden mas elevado que en él haya (§. 32), no es igualmente necesario multiplicar todo el multiplicando primeramente por las unidades absolutas, en seguida por las decenas, y últimamente por las centenas del multiplicador, segun lo hemos ejecutado en el ejemplo. Pudimos igualmente multiplicar todo el multiplicando en primer lugar por las centenas, en segundo lugar por las decenas, y en tercero y último por las unidades absolutas del multiplicador. Es absolutamente indiferente el órden que se siga en la ejecucion de estas operaciones parciales: lo esencial es que se efectúen tantas como nos indiquen las partes en que consideremos descompuesto al multiplicador; que las cifras de los productos parciales se coloquen en los lugares correspondientes al órden de unidades que ca-

da una represente y en tal disposicion, que formen colunas las que representen unidades de un mismo órden; y finalmente que se sumen todos los productos parciales para tener en esta suma el producto total.

37 Cuando uno ó mas ceros ocupen los primeros lugares de la derecha en la combinacion de cifras con que esté representado el multiplicando, se pueden efectuar todas las multiplicaciones parciales prescindiendo de los ceros (§. 31), y comenzando cada una de ellas por la primera cifra significativa que se halle á su izquierda, con tal que á la derecha de las cifras de la suma de todos los productos parciales que de este modo hayamos hallado, se escriban tantos ceros como esten en los primeros lugares de la combinacion que represente al multiplicando. Asimismo, cuando en la que represente al multiplicador ocupen uno ó mas ceros los primeros lugares de la derecha, podremos igualmente (§. 34) efectuar las multiplicaciones parciales prescindiendo de ellos, y como si no existiesen, con tal que por último cuidemos de escribir á la derecha de la suma de los productos parciales que asi hayamos hallado, tantos ceros como en la expresion del multiplicador esten colocados en los primeros lugares de la derecha. A lo cual es consiguiente que *si en las combinaciones de cifras con que esten representados el multiplicando y el multiplicador, ocupasen uno ó mas ceros los primeros lugares de la derecha, se podrán efectuar todas las multiplicaciones parciales, y aun la adicion de sus productos, desentendiéndonos entre tanto de tales ceros: y con solo escribir últimamente á la derecha de las cifras de la suma tantos ceros como haya en los primeros lugares de los dos factores, obtendremos la verdadera expresion del producto total.*

38 En caso que haya uno ó mas ceros entre las cifras significativas del multiplicando, se habrá de hacer uso de lo que ya (§. 30) hemos expuesto; y cuando los haya entre las cifras significativas del multiplicador, podemos desentendernos enteramente de ellos, en vista de que no es posible que contribuyan á la formacion de producto efectivo alguno; pero es muy necesario que cuando pasemos á multiplicar todo el multiplicando por el número representado por la primera cifra significativa que se halle á la izquierda de aquellos ceros, escribamos en el lugar designado por ella la primera cifra del producto parcial que resulte de esta multiplicacion. En este último caso ocurre algunas veces que la mencionada primera cifra representa unidades del órden inmediatamente superior al de las que representa la última cifra del anterior producto parcial, y entonces se pueden escribir inmediatamente á la izquierda y á continuacion de las cifras de este las de aquel, de modo que de las cifras de entrambos se forme una sola combinacion que represente la suma de los dos indicados productos parciales, la cual suele alguna vez ser el producto total. Acontece tambien alguna otra vez que la primera cifra del producto parcial correspondiente á la que sigue á los ceros, representa unidades de un órden mas elevado que el inmediato superior al de las unidades representadas por la última cifra del producto parcial anterior: y en tal caso para formar con las de los dos productos una sola combinacion que represente la suma de ellos, y aun á veces el producto total, es necesario ocupar con alguno ó algunos ceros los lugares que deban designarse para pasar sin interrupcion del órden de unidades que representa la última cifra del primer producto al de las representadas por la primera cifra del segundo.

39 A consecuencia de cuanto hasta aqui hemos expuesto y practicado tocante á la multiplicacion, podemos mirar como regla general, que

Para multiplicar un número por otro, cuando ambos esten representados por combinaciones de muchas cifras, se escriba el multiplicador debajo del multiplicando con exacta correspondencia de las unidades de un mismo órden; y se tire una línea por debajo de ellos para separarlos de los resultados de la operacion. En seguida se multiplicará todo el multiplicando sucesivamente por las unidades absolutas, por las decenas, por las centenas &c. del multiplicador. Se irán escribiendo todos estos productos parciales unos debajo de otros, de modo que la primera cifra de cada uno quede colocada en la coluna de las unidades del mismo órden que las del multiplicador que hayan concurrido á su formacion, para que asi se hallen en una misma coluna todas las cifras que representen unidades de un mismo órden. Se sumarán por último todos los productos parciales, y la suma de estos será el producto total.

Si en la combinacion de cifras que represente al multiplicando, ó en la correspondiente al multiplicador, ó en las de entrambos estuviesen ocupados por ceros los primeros lugares de la derecha, en la combinacion de cifras que haya de representar al producto total deberán asimismo colocarse en los primeros lugares tantos ceros como se hallen en igual situacion en las expresiones de los dos factores.

Si entre las cifras significativas del multiplicando estuvieren interpuestos uno ó mas ceros, se deberán escribir otros tantos, y en los lugares que ellos designen, en cada uno de los productos parciales; á no ser que se ha-

yan reservado algunas decenas que deban representarse por una de las cifras significativas colocada en el lugar que á alguno de los ceros corresponda.

Finalmente si entre las cifras significativas del multiplicador hubiere algunos ceros, podrá prescindirse enteramente de ellos, con tal que el producto de la multiplicacion de todo el multiplicando por el valor de la cifra significativa colocada inmediatamente á la izquierda de los ceros se escriba de modo que su primera cifra resulte colocada en el lugar ó coluna correspondiente al órden de las unidades que represente.

Pondremos por conclusion algunos otros ejemplos para que sirvan de modelos, y que los principiantes puedan ejercitarse.

54368	73400	430020
259	6810	637
489312	734	3010203
271840	5872	1290087
108736	4404	2580174
14081312	499854000	273928473

4768	35746	1538
6007	800002	7000004
33376	28596871492	10766006152
28608		
28641376		

De la division ó particion.

40 Puesto que el producto de la multiplicacion de

dos números cualesquiera equivale á uno de estos tomado tantas veces como unidades contiene el otro (§. 28); siempre que nos ocurra el caso de conocer algun producto y uno de sus factores, y deseemos determinar el otro factor, lo podremos conseguir averiguando por medio de la sustraccion cuántas veces está contenido en el producto dado el factor que de él suponemos conocido. Si, por ejemplo, nos propusiéramos indagar cuántas veces está contenido el número *diez y seis* en el *sesenta y cuatro*, con solo quitar sucesivamente, cuantas veces fuese esto posible, de la coleccion de unidades designada por este las de aquel, veríamos que despues de haber efectuado cuatro sustracciones, no queda unidad alguna de las *sesenta y cuatro*, y de consiguiente concluiríamos que el *diez y seis* está contenido *cuatro* veces en el *sesenta y cuatro*, ó que el *sesenta y cuatro* equivale á *cuatro* veces *diez y seis*.

A este modo de descomponer un número con el fin de averiguar cuántas veces contiene á otro, se le ha dado el nombre de *division* ó *particion*, porque sirve para dividir ó repartir un número dado en partes iguales, y determinar la magnitud de cada una, sabiéndose de antemano cuántas sean; como tambien para investigar el número de estas partes cuando conozcamos anteriormente la magnitud de una de ellas.

Si proponiéndonos, por ejemplo, dividir ó repartir el número *sesenta y cuatro* en cuatro partes iguales, tratásemos de averiguar cuánto corresponde á cada una, deberíamos buscar el número que estuviese contenido *cuatro* veces en el *sesenta y cuatro*, y de consiguiente mirar á este como un producto cuyos factores sean el mismo *cuatro*, y el valor que deseamos conocer de una de las partes, el cual en este caso es *diez y seis.*

Del mismo modo si nos interesase saber cuántos números iguales á *diez y seis* se hayan de reunir para que la suma de ellos equivalga á *sesenta y cuatro*, deberíamos para ello averiguar cuántas veces está contenido el *diez y seis* en el *sesenta y cuatro*, y de consiguiente mirar á este último número como un producto cuyos factores sean el *diez y seis*, y el número de veces que es necesario repetirle para que resulte el *sesenta y cuatro;* el cual en el caso presente viene á ser *cuatro.*

Sea, pues, cual fuere el objeto particular que al ejecutar la division nos propongamos, ó sea cual fuere la cuestion que nos dé motivo á ejecutar lo que se llama *dividir un número por otro*, siempre nos será permitido suponer que se nos ha dado el producto de una multiplicacion y uno de sus factores, á fin de que hallemos el otro factor, ó lo que á esto es consiguiente, que tratamos de averiguar cuántas veces contiene un número á otro.

41 El número que nos propongamos dividir, y que en todo caso podemos mirar como un producto, se llama el *dividendo;* el factor que conocemos, se llama el *divisor;* y el factor desconocido que buscamos, y que debe ser el resultado de la division, se llama el *cuociente*, porque en todos casos se le puede considerar como que indica cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo. Y pues que el divisor y el cuociente son los dos factores del dividendo; es consiguiente que *multiplicando el divisor por el cuociente, se deba reproducir el dividendo.*

42 Si solo restando del dividendo el divisor cuantas veces fuese esto posible, hubiésemos siempre de determinar el cuociente; apenas fuera algo considerable la magnitud de este, tendríamos que emplear en la operacion

demasiado y muy fastidioso trabajo. Para ejecutarlo, pues, mas breve y cómodamente, nos valemos de un medio semejante al que hemos empleado con el mismo objeto en la multiplicacion.

Si en caso de ser cualquiera de los números dígitos el divisor, no llegase á *diez* el número de veces que esté contenido en el dividendo, podremos, sin mas auxilio que la misma tabla pitagórica que nos ha servido para la multiplicacion, determinar el cuociente, ya que en ella se hallan todos los productos cuyos factores son ambos números dígitos. Si nos propusiéramos, por ejemplo, determinar cuántas veces contiene *cincuenta y seis* á *ocho*, acudiríamos á la octava coluna de la tabla, y descenderíamos por ella hasta dar con el *cincuenta y seis*: y notando entonces el número *siete*, que se nos presenta en el primer lugar de la izquierda en aquella línea horizontal, tendremos en él el otro factor que buscamos del *cincuenta y seis*, ó cuántas veces contiene *cincuenta y seis* á *ocho*, ó el cuociente de la division de *cincuenta y seis* por *ocho*.

La misma tabla nos hace ver que hay muchos números que no son exactamente divisibles por ciertos otros, y tambien que los hay que no son exactamente divisibles por otro ninguno. Con efecto, cuando recorremos la séptima coluna y no encontramos en toda ella al *cuarenta*, aun cuando por otra parte vemos que se halla en otras dos colunas, podemos estar ciertos de que el número *cuarenta* no es exactamente divisible por el *siete*, bien que lo sea por algunos otros. Al mismo tiempo vemos que los dos números mas próximos al *cuarenta*, existentes en la coluna séptima, son el *treinta y cinco* y el *cuarenta y dos*, y de ahí inferiremos que el mayor multiplo del *sie-*

te, contenido en el cuarenta, es el *treinta y cinco*, cuyos factores son el *siete* y el *cinco*.

Del mismo modo vendremos en conocimiento de que el *treinta y siete* no es exactamente divisible por el *siete* ni por ningun otro número, al ver que ni se halla entre los de la séptima coluna ni entre los de alguna otra de toda la tabla.

Si nos propusiéramos, pues, dividir por *siete* cualquiera de los dos números *cuarenta* ó *treinta y siete*, nos contentaríamos con saber que siendo *treinta y cinco* el mayor múltiplo del *siete* que está contenido en cada uno de ellos, deberá ser *cinco* el mayor cuociente que habrá de resultar de la division de cualquiera de los dos números propuestos por *siete;* con sola la diferencia de que teniendo *cinco* unidades mas que el *treinta y cinco* el *cuarenta*, el residuo de esta division, ó las unidades que aun quedan en ella por dividir, son *cinco;* en vez de que teniendo el *treinta y siete* solas *dos* unidades mas que el *treinta y cinco*, el residuo de esta segunda division habrá de ser solamente *dos*.

43 Para dar ahora idea del modo de descomponer cualquiera division, en la cual el cuociente deba representarse por una combinacion de dos ó mas cifras, en otras divisiones parciales mucho mas sencillas, propongámonos en primer lugar dividir por ocho el número *cincuenta y unmil cuatrocientos noventa y seis*, que como ya se sabe, se representa por la combinacion de cifras 51496: y á poco que reflexionemos, echaremos de ver que nos hemos propuesto la siguiente cuestion: *hallar un número tal, que en multiplicando por ocho sus unidades, decenas, centenas &c., resulten en el producto las unidades, decenas, centenas &c. del dividendo propuesto* 51496.

Desde luego se ve que el número desconocido no puede tener unidades de órden mas elevado que las *decenas de millares*, porque de este órden son las mas elevadas que aparecen en el dividendo. Tambien se ve que el mismo número desconocido no puede contener ni una *decena de millares* siquiera, pues con sola una que contuviese, deberia haber ocho por lo menos en el producto; y en este no hay, como se ve, mas de *cinco*: lo cual manifiesta que estas dimanaron y se reservaron de la anterior multiplicacion de los millares del cuociente por el divisor.

Si pues el cuociente debe contener cierto número de *millares*, habrá este de ser tal que en multiplicándolo por el divisor *ocho*, produzca *cincuenta y uno*, ó por lo menos el múltiplo de *ocho* que mas se aproxime á *cincuenta y uno*: restriccion necesaria por razon de las decenas que pueden haberse reservado de la multiplicacion de las *centenas* del cuociente por el divisor, y que deben haberse agregado al producto de la multiplicacion de los *millares*.

La tabla pitagórica nos da á conocer que el número en que se verifica la expresada condicion, es el *seis*; y como *seis* millares multiplicados por *ocho* producen *cuarenta y ocho* millares, habiendo *cincuenta y uno* en el dividendo propuesto, es de inferir que los *tres* millares que este contiene de mas, provinieron y se reservaron de la multiplicacion de las *centenas* del cuociente por el divisor. Si del dividendo propuesto, ó sea producto total, restamos los *cuarenta y ocho* millares ó las *cuarenta y ocho mil* unidades absolutas, el residuo *tresmil cuatrocientos noventa y seis* deberá contener el producto de las centenas, de las decenas y de las unidades absolutas del cuociente, multiplicadas por el divisor.

Para continuar la operacion, consideraremos á los *tres* millares que resultaron sobrantes de la primera division parcial, como equivalentes que son á *treinta* centenas, y agregándoles las *cuatro* centenas que desde luego aparecen en el dividendo propuesto, resultará el número *treinta y cuatro* centenas, en el cual deberá hallarse el producto de la multiplicacion de las centenas del cuociente por el divisor. Será pues el número *treinta y cuatro* centenas el segundo dividendo parcial.

La misma tabla pitagórica nos da á conocer que el *cuatro* es el número que multiplicado por *ocho* produce el múltiplo mas próximo á *treinta y cuatro*; y de esto inferiremos que son *cuatro* las centenas del cuociente, y que las *dos* que el número *treinta y cuatro* tiene de mas que el múltiplo *treinta y dos*, proceden y se han reservado de la multiplicacion de las decenas del cuociente por el divisor. Si pues, despues de sustraer del *treinta y cuatro* el *treinta y dos*, consideramos al residuo *dos* como equivalente que es á veinte decenas, y agregamos á estas las nueve decenas que á primera vista se nos presentan en el dividendo propuesto, resultarán *veinte y nueve* decenas como número total de las que en él existen todavía, y en el cual debe hallarse el producto de la multiplicacion de las decenas del cuociente por el divisor. De este modo vendrá á ser el número *veinte y nueve* el tercer dividendo parcial.

En la ya mencionada tabla pitagórica echaremos de ver que el *tres* es el número que multiplicado por ocho produce á *veinte y cuatro*, que es el múltiplo mas próximo á *veinte y nueve*; de lo cual inferimos que son *tres* las decenas del cuociente; y que las *cinco* que el número veinte y nueve tiene de mas que el múltiplo *veinte y cua-*

tro, son otras tantas decenas reservadas de la multiplicacion de las unidades absolutas del cuociente por el divisor. Y si despues de restar del *veinte y nueve* el *veinte y cuatro*, consideramos al residuo *cinco* decenas como equivalente que es á *cincuenta* unidades absolutas, y á estas agregamos las *seis* que desde luego aparecen en el dividendo propuesto, resultará que el número *cincuenta y seis* es el de todas las unidades que aun quedan por dividir en el dividendo total, y de consiguiente vendrá á ser el mismo *cincuenta y seis* el cuarto y último dividendo parcial.

Reconociendo en seguida los múltiplos del *ocho* que forman la octava coluna de la tabla pitagórica, y viendo que uno de ellos es el *cincuenta y seis*, y que el otro factor de este número es el *siete*, inferimos que este último número es el de unidades absolutas del cuociente. Multiplicamos á continuacion este cuociente por el divisor, y restamos del último dividendo parcial el producto: y como por ser entre sí iguales, no resulte residuo alguno, ni quede ya sin dividir por el *ocho* parte alguna del dividendo propuesto, podremos asegurar con la mayor certeza que la division está concluida, y que el cuociente total que buscábamos es el número *seismil cuatrocientos treinta y siete*, representado por la combinacion 6437 de estas cuatro cifras significativas colocadas en el órden en que aqui aparecen.

44 A fin de precaver toda confusion en estas operaciones y que se ejecuten con el debido órden y con la mayor comodidad posible, se suele escribir el divisor á la derecha del dividendo, tirando por entre los dos una línea vertical, y á la derecha de esta y por debajo del divisor otra línea horizontal para colocar con la debida separacion

debajo de esta la combinacion de cifras que haya de representar el cuociente que buscamos.

Dividendo....	51496	8............ *Divisor*.
	48	6437.... *Cuociente*.
	34	
	32	
	29	
	24	
	56	
	56	
	00	

Luego que hemos colocado en la disposicion que aqui se ve el dividendo y divisor propuestos, separamos mentalmente del primero, comenzando por la izquierda[1], una parte adecuada para que pueda servirnos de pri-

1 Todo el arte de ejecutar la adicion, sustraccion y multiplicacion de números crecidos está, como hemos hecho ver, reducido á considerar los números que se nos propongan, como descompuestos en las partes que nos indican las cifras con que se les representa por escrito; á efectuar respectivamente las adiciones, sustracciones ó multiplicaciones de estas partes, y á formar del conjunto de los resultados parciales el resultado total que se desea. Pues igualmente en la division de un número crecido se considera el dividendo como descompuesto en ciertas partes; se divide cada una de estas por el divisor, y del conjunto de los cuocientes parciales se forma el cuociente total. Si se nos pide, por ejemplo, que dividamos por *dos* el número 846, consideraremos á este dividendo como descompuesto en las tres partes que nos indican las cifras con que está representado; y dividiendo por *dos* cada una de estas partes, resultarán por cuocientes parciales *cuatro* centenas, *dos* decenas y *tres* unidades absolutas; y del conjunto de estos tres cuocientes parciales se formará el cuociente total 423. En este caso hubiera sido indiferente comenzar por la izquierda ó por la derecha la division; pues en habiendo descompuesto el dividendo en las partes convenientes, lo único que importa es efectuar la division de todas estas partes, y reunir todos los cuocientes parciales para obtener el total. Pero es necesario haber elegido con

mer dividendo parcial: y viendo que en este caso la primera cifra 5, considerada con absoluta separacion de las demas que tiene á su derecha, representa un número que siendo menor que el divisor *ocho*, no contiene á este ni una vez siquiera, nos hallamos en la precision de tomar para primer dividendo parcial al número *cincuenta y uno*, designado por la combinacion de las dos primeras cifras del dividendo total, la cual representa todos los millares que en él se contienen.

Viendo que de todos los números que forman la octava coluna de la tabla pitagórica, el que mas se aproxima al *cincuenta y uno* es el *cuarenta y ocho*, cuyos factores son el *ocho* y el *seis*, deberemos inferir que el primer cuociente parcial es *seis* millares, pues que de este órden

estudio un ejemplo tan sencillo como el que acabamos de proponer, para que las mismas cifras con que está representado el dividendo, nos indiquen las partes en que debemos descomponerlo, y para que á consecuencia haya sido indiferente proceder de la izquierda á la derecha, ó al contrario. Luego que sean algo mas complicados los ejemplos, no será tan fácil ver la descomposicion que conviene hacer del dividendo, ni por esta razon será indiferente proceder de un modo ó de otro. Cuando nos hemos propuesto, por ejemplo, dividir el número 51496 por 8, no es fácil conozcamos á primera vista que para conseguir nuestro intento debemos considerar al dividendo como formado por la reunion de las cuatro partes siguientes: 1.ª *cuarenta y ocho* millares; 2.ª *treinta y dos* centenas; 3.ª *veinte y cuatro* decenas; 4.ª *cincuenta y seis* unidades absolutas: para que dividiendo sucesivamente estas cuatro partes por el divisor *ocho*, nos resulten los cuatro cuocientes parciales 6 *millares*, 4 *centenas*, 3 *decenas* y 7 unidades absolutas, de cuya reunion se forma el cuociente total 6437. Esta ignorancia en que al tiempo de emprender una division estamos de la descomposicion que convenga hacer del dividendo propuesto, es la que nos pone en la precision de comenzar por la izquierda la operacion, porque solo por este medio evitamos el inconveniente de tener que corregir una parte del resultado ya conocida y representada por la cifra correspondiente, por razon de la que se conozca despues: y muy frecuentemente seria necesario hacer esta alteracion, si en la division procediésemos de la derecha á la izquierda, y en las otras tres operaciones al contrario.

son las unidades del dividendo parcial que hemos empleado. Escribimos, pues, la cifra 6 en el lugar destinado al cuociente; multiplicamos el *seis* por el *ocho;* escribimos el producto 48 debajo del dividendo parcial 51; restamos aquel de este; y resultan de residuo 3 millares, los cuales en la primitiva multiplicacion, cuyo producto tenemos en el dividendo propuesto, fueron decenas reservadas de la multiplicacion parcial anterior.

Escribimos ahora á la derecha de la cifra 3 del residuo la 4 de las centenas del dividendo propuesto, y asi tenemos en el número *treinta y cuatro* centenas el segundo dividendo parcial. Y viendo que el mayor múltiplo del *ocho* contenido en el treinta y cuatro es el treinta y dos, y que este es el producto del *cuatro* multiplicado por *ocho*, podemos asegurar con certeza que el segundo cuociente parcial es *cuatro* centenas, y por tanto colocamos la cifra 4 á la derecha de la 6 con que ya hemos representado los millares. Multiplicamos en seguida el cuociente *cuatro* por el divisor *ocho*; escribimos el producto *treinta y dos* debajo del segundo dividendo parcial; restamos aquel de este, y resultan de residuo *dos* centenas.

Con solo escribir á la derecha de la cifra 2 que representa al residuo, la cifra 9 de las decenas del dividendo propuesto, trasformamos aquellas *dos* centenas en las *veinte* decenas á que equivalen, y agregamos á estas las *nueve* que desde luego aparecen en el dividendo total; por cuyo medio tenemos en el número *veinte y nueve* todas las decenas que aun quedan por dividir, y de consiguiente el tercer dividendo parcial.

Siendo *veinte y cuatro* el mayor múltiplo del *ocho*, contenido en el *veinte y nueve*; y siendo el mismo *veinte y cuatro* el producto de la multiplicacion del *ocho* por el *tres*, venimos en conocimiento de que el tercer cuociente parcial es *tres* decenas, que representamos con la correspondiente cifra 3, colocada á la derecha de la 4 con que antes hemos representado las centenas. Multiplicamos á continuacion el cuociente parcial *tres* por el divisor *ocho*; escribimos el producto *veinte y cuatro* debajo del tercer dividendo parcial *veinte y nueve*; restamos aquel de este, y resultarán de residuo *cinco* decenas.

Equivaliendo estas *cinco* decenas á *cincuenta* unidades absolutas, con solo escribir á la derecha de la cifra 5 que las representa, la 6 de las unidades simples del dividendo propuesto, tendremos en el número *cincuenta y seis* el cuarto y último dividendo parcial. Y como el *cincuenta y seis* es uno de los múltiplos del *ocho*, que lo contiene *siete* veces, será *siete* el cuarto y último cuociente parcial, y á consecuencia colocaremos la cifra 7 inmediatamente á la derecha de las 3 decenas. Multiplicamos las *siete* unidades por el divisor *ocho*; escribimos el producto *cincuenta y seis* debajo del cuarto dividendo parcial; restamos uno de otro; y siendo iguales entre sí, no resulta residuo alguno: y viendo que no queda ya sin dividir parte alguna del dividendo total propuesto, podemos estar ciertos de haber concluido la operacion, y de que el cuociente total que buscábamos es el número 6437[1].

45 Si en el discurso de la operacion nos ocurriese algun dividendo parcial menor que el divisor, y que por consiguiente no contenga á este ni una vez siquiera, el cuociente no podrá en tal caso tener unidad alguna del

1 Siempre que como en este caso no resulta residuo alguno al concluir la operacion, decimos que la *division es exacta*; que el *dividendo es múltiplo del divisor*, y que este es *divisor exacto*, *parte alicuota ó medida* del dividendo.

órden de las de aquel dividendo, y deberemos mirar como cosa cierta que todas las que en este hay, han sido decenas reservadas de la multiplicacion de las unidades de órdenes inferiores del cuociente por el divisor. Pondremos, pues, siempre que esto suceda, un cero en el cuociente, para que ocupe el lugar en que no debe colocarse cifra alguna significativa; se escribirá inmediatamente á la derecha del dividendo parcial la cifra que siga en el total; y resultando por este medio otro nuevo dividendo parcial, se continuará la division.

Propongámonos, por ejemplo, dividir por *nueve* al número *setecientos sesenta y cincomil seiscientos ochenta y cuatro*.

```
Dividendo...... 765684 | 9......... Divisor.
                72     | 85076. Cuociente.
                ------
                 45
                 45
                ----
                 068
                  63
                 ----
                   54
                   54
                  ----
                   00
```

Al ejecutar esta division nos ocurre que no habiendo resultado de la segunda sustraccion residuo alguno, aun despues de haber escrito, como siempre se acostumbra, á la derecha del residuo *cero* la cifra correspondiente del dividendo propuesto, tenemos para tercer dividendo parcial al número *seis*, que siendo menor que el divisor *nueve*, nos indica que en el cuociente no debe ocupar cifra alguna significativa el lugar asignado á las centenas; que de consiguiente se debe colocar en él un *cero*; y mirando ya entonces como residuo al 6 que ha servido de tercer dividendo parcial, colocamos á su derecha la cifra 8 de las decenas para tener en el número *sesenta y ocho* decenas el cuarto dividendo parcial. Este nos da de cuarto cuociente parcial *siete* decenas, que multiplicadas por el divisor *nueve*, producen *sesenta y tres*, las cuales restadas del dividendo parcial *sesenta y ocho*, dejan de residuo *cinco* decenas. Escribiendo por último á la derecha de la cifra 5 del residuo la 4 de las unidades absolutas del dividendo propuesto, tendremos en el número *cincuenta y cuatro* el quinto y último dividendo parcial; y dándonos este *seis* unidades por quinto y último cuociente parcial, escribimos la cifra 6 en el cuociente á la derecha de las demas: multiplicamos el *seis* por el *nueve*; restamos del dividendo el producto; y no resultando residuo alguno, venimos en conocimiento de que la operacion está concluida, y de que el cuociente total es *ochenta y cincomil y setenta y seis*, representado por la combinacion de cifras 85076.

Bien se puede ya haber observado en los dos ejemplos que hasta ahora nos hemos propuesto, que inmediatamente despues de haber obtenido el residuo de cada una de las divisiones parciales, hemos escrito á su derecha la cifra que en la expresion del dividendo total se halla mas próxima, para tener un nuevo dividendo parcial cuyas unidades sean del órden inmediato inferior á las del precedente; y si despues de haber escrito á la derecha de algun residuo la cifra inmediata siguiente del dividendo total resultase representado un número menor que el divisor, habrá necesariamente de colocarse un *cero* á la derecha de la cifra ó cifras que anteriormente se hayan escrito en la que haya de ser la expresion del cuociente total; para indicar que en la combinacion con que este se debe representar, ninguna de las cifras significativas puede ocupar el lugar asignado á las unidades del órden de que son las del dividendo parcial. En seguida, siempre que esto acontezca, deberemos escribir á la derecha del dividendo parcial anterior, la cifra inmediata siguiente del total, por cuyo medio obtendremos otro nuevo dividendo parcial, y con él practicaremos lo que con todos los demas.

46 Supongamos ya que el divisor sea alguno de los números que no puedan representarse por una sola cifra, y hagamos ver que para efectuar en tales casos la division, se ejecutan las mismas operaciones parciales y con el mismo órden que para dividir por un número dígito otro cualquiera. Propongámonos con este objeto dividir el número *tres millones cuatrocientos y seismil cuatrocientos veinte y ocho* por el *cincuenta y cuatro.*

```
Dividendo..... 3406428 | 54........ Divisor.
               324     |-------------------
               ------- | 63082.... Cuociente.
                166
                162
                ----
                 442
                 432
                 ----
                  108
                  108
                  ----
                  000
```

A semejanza de lo que hemos practicado en los ejemplos anteriores, separamos mentalmente, y comenzando por la izquierda, de la combinacion de cifras con que está representando el dividendo, las suficientes para que prescindiendo de todas las demas que se hallan á su derecha, y considerándolas como si estuviesen enteramente solas, representen un número que contenga siquiera una vez al divisor. No bastando para esto en el caso presente la combinacion de las dos primeras cifras que representa al número *treinta y cuatro*, porque este no contiene ni una sola vez al divisor *cincuenta y cuatro*, nos es forzoso separar la combinacion 340 de tres cifras, con que se representa el número *trecientos y cuarenta*: y aunque al tiempo de dividir este número, asi como todos los demas dividendos parciales por el divisor, prescindamos del órden de las unidades de que cada uno se compone, deberemos tener presente que aquellas *trecientas y cuarenta* son *decenas de millares*, para que asi sepamos que el primer cuociente parcial ha de ser un número de unidades de quinto órden, y que á la derecha de la cifra que lo represente se han de escribir otras cuatro, á fin de que aquella primera quede colocada en el quinto lugar, segun le corresponde.

No siendo fácil conocer á primera vista cuántas veces está contenido en el primer dividendo parcial *trecientos y cuarenta* el divisor *cincuenta y cuatro*, tenemos que valernos del arbitrio de indagar cuántas veces está contenida la mayor y principal parte del divisor en la correspondiente del dividendo parcial: por cuyo medio, si no siempre conseguimos saber con certeza y exactitud el verdadero cuociente parcial que buscamos, sabemos por lo menos que este no puede ser mayor. Quiere esto decir en el caso propuesto que pues las *cinco* decenas, parte principal del divisor, no estan contenidas mas de *seis* veces en las *treinta y cuatro* decenas del dividendo parcial, tampoco puede todo este contener á todo el divisor mas de *seis* veces.

Para representar, pues, este número como primer cuociente parcial, escribimos en el lugar ya acostumbrado la cifra 6, bien que con alguna duda de si el verdadero cuociente parcial deberá ser menor que el número representado por ella. Esta duda se desvanece enteramente, multiplicando, como lo hemos hecho, por el *seis* el divisor, y restando del dividendo parcial el producto; en la inteligencia de que si puede efectuarse esta sustraccion; y fuere menor que el divisor el residuo, el cuociente parcial no podrá ser otro sino el que ya hemos designado, pero si no fuere posible efectuar la sustraccion, por ser mayor que el dividendo parcial el producto, deberá ser menor de lo que creíamos, el cuociente parcial; y si pudiendo efectuarse la sustraccion, no fuere menor que el divisor el residuo, deberá el cuociente parcial ser mayor de lo que hayamos supuesto.

Asi que, hemos multiplicado por el cuociente parcial *seis* el divisor *cincuenta y cuatro*, y escrito el producto *trecientos veinte y cuatro* debajo del dividendo parcial *trecientos y cuarenta*, hemos restado aquel de este; y siendo el residuo *diez y seis* menor que el divisor, venimos en conocimiento de que el primer cuociente parcial debe no ser mayor ni menor que el *seis*.

En seguida hemos escrito á la derecha del residuo la cifra de los millares que inmediatamante se sigue en el dividendo propuesto, y en la combinacion 166 tenemos representado el segundo dividendo parcial. Viendo entonces que las *cinco* decenas del divisor no están contenidas mas de *tres* veces en las *diez y seis* decenas del segundo dividendo parcial, escribimos como segundo cuociente parcial á la derecha de la cifra 6 á la que representa al *tres*, bien que con la duda ordinaria. Para salir de esta duda, multiplicamos por *tres* todo el divisor; escribimos el producto debajo del segundo dividendo parcial; restamos aquel de este; y pues que ademas de ser posible la sustraccion, resulta de ella un residuo menor que el divisor, sabemos ya con toda certeza que el segundo cuociente parcial debe no ser mayor ni menor que *tres*.

A la derecha de la cifra 4 que representa al residuo, escribimos la de las centenas que inmediatamente se sigue en la combinacion que representa al dividendo total; y en 44 centenas tenemos el tercer dividendo parcial. Y como el número *cuarenta y cuatro* no contiene ni una vez siquiera al divisor, colocamos un *cero* á la derecha de las dos cifras anteriores del cuociente, para indicar que en la expresion de este ninguna cifra significativa debe ocupar el lugar asignado á las centenas, y para que las dos cifras anteriores del cuociente total resulten por último colocadas en los respectivos lugares que correspondan á los órdenes de unidades que deban representar. Siendo, pues, *cero* el tercer cuociente parcial, será igualmente *cero* el producto que deberia restarse del tercer dividendo parcial, y de consiguiente vendrá este mismo á ser en este caso el residuo de la tercera sustraccion.

A la derecha, pues, de la combinacion 44 que representa al residuo, escribimos la cifra 2 de las decenas que inmediatamente se sigue en la expresion del dividendo propuesto, y asi tenemos en el número *cuatrocientas cuarenta y dos* decenas el cuarto dividendo parcial. Comparando ahora con las *cinco* decenas del divisor las *cuarenta y cuatro* del dividendo parcial, vemos que en este segundo número está contenido *ocho* veces aquel primero. Asi que, colocamos en el cuociente la cifra significativa 8 á la derecha del *cero*; multiplicamos por *ocho* todo el divisor; escribimos el producto debajo del dividendo parcial; restamos aquel de este; y pues que el residuo *diez* es menor que el divisor, estamos ciertos de que el cuarto cuociente parcial es *ocho* decenas.

Ultimamente, á la derecha de las cifras del residuo escribimos la de las 8 unidades absolutas con que se termina la expresion del dividendo total, para tener en el número *ciento y ocho* el quinto y último dividendo parcial. Comparando entonces con las *cinco* decenas del divisor las *diez* decenas del dividendo, vemos que aquel número está contenido *dos* veces en este. Escribimos por tanto la cifra significativa 2 á la derecha de las cuatro anteriores, para representar el quinto y último cuociente parcial. Multiplicamos en seguida por el *dos* el divisor; escribimos el producto debajo del último dividendo parcial; restamos aquel de este; y como por ser entre sí iguales, se reduce á *cero* el residuo final, venimos en conocimiento de que el cuociente completo de la division propuesta es *sesenta y tresmil y ochenta y dos*, representado por la combinacion de cifras 63082.

47 Para abreviar la division, puede ser muy conducente no escribir debajo de cada dividendo parcial el producto de la multiplicacion de cada cuociente parcial por el divisor, con el fin de restar de cada dividendo el producto correspondiente y determinar el residuo; pues sin necesidad de escribir el producto que debe servir de sustraendo, se puede efectuar la sustraccion de cada una de sus partes de la correspondiente del que haya servido de dividendo, y que en la sustraccion viene á ser el *minuendo*. Para dar una clara idea de cómo pueda esto ejecutarse, propongámonos dividir el número *veinte y ocho millones quinientos cincuenta y cuatromil cuatrocientos y cincuenta* por el *nuevemil docientos ochenta y seis*.

Dividendo..... 28554350	9286..... *Divisor.*
69645	3075..... *Cuociente.*
46430	
00000	

Viendo que la combinacion de las cuatro primeras cifras del dividendo propuesto, considerada con separacion de las demas que estan á su derecha, no es suficiente para representar un número que contenga siquiera una sola vez al divisor; nos es forzoso tomar para primer dividendo parcial al que designa la combinacion 28554 de las cinco primeras cifras de la izquierda; debiéndonos servir de gobierno para determinar el órden de las unidades del primer cuociente parcial el saber que pues la última cifra 4 de esta combinacion representa millares en la expresion del dividendo total, el dividendo parcial y el cuociente que le corresponde, deben ser números de unidades del cuarto órden.

Para averiguar ahora cuántas veces está contenido todo el divisor en el primer dividendo parcial 28554, comparamos los *nueve* millares de aquel con los *veinte y ocho* de este; y pues que el número *nueve* no está contenido en el *veinte y ocho* mas de tres veces, escribimos en el lugar acostumbrado la cifra 3 á fin de que represente al primer cuociente parcial ó á la primera y principal parte del cuociente total. En seguida, con el objeto de efectuar á un mismo tiempo la multiplicacion y la sustraccion que deben siempre seguirse á la determinacion de cada cuociente parcial, sin necesidad de escribir para ello el producto debajo del dividendo parcial, decimos; 3 *veces* 6 *producen* 18; y como esta parte del producto no pueda restarse del número representado por la cifra 4 del dividendo parcial, nos valemos del arbitrio (§. 21) de agregar á aquellas *cuatro* unidades otras *veinte*, con cuyo auxilio se hace practicable la sustraccion, resultando 6 de primer resíduo parcial, bien que con la condicion de agregar al producto parcial siguiente ó á la segunda parte del sustraendo *dos* decenas para compensar las veinte unidades que hemos agregado al minuendo 9. Continuando la multiplicacion del cuociente por el divisor y la sustraccion correspondiente, decimos: 3 *veces* 8 *producen* 24, las cuales con la agregacion de aquellas *dos*, vendrán á ser 26, que restadas de 35, dejan de resíduo 9. Asimismo 3 *veces* 2 *producen* 6, las cuales con la reunion de las *tres* que se les deben agregar en compensacion de las *treinta* unidades de órden inmediatamente inferior que hemos agregado al minuendo, vienen á ser 9, que restadas de 15, dejan de resíduo 6. Por último, decimos: 3 *veces* 9 *producen* 27; y reuniendo á estas la decena que debemos agregarlas en compensacion de las *diez* unidades de órden inferior que hemos agregado al minuendo, vienen á ser 28, que restadas de otras tantas que hay en el dividendo parcial, no dejan resíduo alguno. De este modo hemos terminado la multiplicacion y la sustraccion que deben siempre seguir á la determinacion del cuociente parcial, y sabemos en este caso que el resultado de la sustraccion es 696.

Inmediatamente á la derecha de estas tres cifras con que está representado el resíduo, escribimos las 4 centenas del dividendo total, con lo cual obtenemos el segundo dividendo parcial 6964; y como por ser menor que el divisor este dividendo, no lo contenga ni una sola vez, escribimos un *cero* á la derecha de la primera cifra 3 del cuociente, asi para indicar que en la combinacion de cifras del cuociente total, ninguna significativa ocupa el lugar asignado á las centenas, como para que la cifra 3 resulte por último colocada en el que corresponde al órden de unidades que debe representar.

Siendo, pues, cero el segundo cuociente parcial, debe serlo igualmente el producto de la segunda multiplicacion, el cual deberia servir de sustraendo; y á consecuencia el resíduo deberá ser el mismo dividendo parcial; de modo que en realidad, en cuantos casos sea *cero* algun cuociente parcial, no hay para qué tratar de tal multiplicacion ni de tal sustraccion, sino considerar desde luego como otro nuevo resíduo al que haya servido de dividendo parcial, y escribir á su derecha la cifra siguiente del dividendo total, para tener otro nuevo dividendo parcial. Practicándolo asi en este caso, resulta para nuevo dividendo el número 69645 decenas. Comparando los 69 millares de este con los 9 del divisor, y viendo que este segundo número no está contenido mas de *siete* veces en el primero, hemos escrito en el cuociente á la derecha del *cero* la cifra 7.

Para efectuar ahora á un mismo tiempo la multiplicacion y la sustraccion sin necesidad de escribir el producto que debe servir de sustraendo, decimos: 7 *veces* 6 *producen* 42, que restadas de 45 que en lugar del 5 suponemos en el minuendo, dejan de resíduo 3. Del mismo modo, 7 *veces* 8 *producen* 56, que con las 4 que en compensacion deben agregárseles, componen 60: y restadas estas de las 64 que en lugar de las 4 suponemos en el dividendo parcial, que en la sustraccion sirve de minuendo, dan de resíduo 4. Asimismo, 7 *veces* 2 producen 14, las cuales con las 6 que en compensacion se les deben agregar, componen 20, que restadas de las 26 que se suponen en el lugar de las 6 del minuendo, dejan de resíduo otras 6. Por último, 7 *veces* 9 *producen* 63, las cuales con las 2 que en compensacion deben agregárseles, componen 65, que restadas de las 69 que realmente existen en el minuendo, dejan de resíduo 4; y asi el resíduo total vendrá á ser 4643.

A la derecha de esta última combinacion de cifras escribimos el *cero* con que se termina la del dividendo propuesto, y por este medio resulta el número 46430 para cuarto y último dividendo parcial. Comparamos con los 46 millares de este número los 9 del divisor; y pues que en el primero no está contenido mas de *cinco* veces el segundo, escribimos en el cuociente la cifra 5 á la derecha de las otras tres, para que represente al cuarto y último cuociente parcial.

Entonces hemos dicho: 5 *veces* 6 *producen* 30, las cuales restadas de otras 30, que suponemos en lugar del *cero* del minuendo, dejan cero de resíduo. Del mismo modo 5 *veces* 8 *producen* 40 que con las 3 que en compensacion deben agregárseles, componen 43, que restadas de otras tantas que suponemos en el lugar de las 3 del minuendo, dejan *cero* de resíduo. Continuando por el mismo órden, decimos: 5 *veces* 2 *producen* 10, que juntas á las 4 que en compensacion se les deben agregar, componen 14; y restadas estas de otras tantas que suponemos en el lugar de las 4 de minuendo, queda cero de resíduo. Finalmente, 5 *veces* 9 *producen* 45, que reunidas con otra que en compensacion se les debe agregar, componen 46, las cuales restadas de otras tantas que efectivamente hay en el minuendo, dejan igualmente *cero* de resíduo. Y puesto que es absolutamente nulo el resíduo final, podemos estar ciertos de que el verdadero cuociente que en la division propuesta buscábamos, es el número 3075.

48 Sobre lo hasta aqui expuesto es muy digno de advertirse que el comparar, segun en los ejemplos precedentes hemos practicado y debemos practicar en cuantos casos ocurran, la parte principal del divisor representada por su primera cifra de la izquierda, con la parte correspondiente del dividendo parcial, representada igualmente por su primera, ó á lo mas, por la combinacion de sus dos primeras cifras, no es siempre, como ya hemos indicado, un medio cierto y seguro de determinar los verdaderos cuocientes parciales; sino solo un arbitrio de que nos valemos para saber la magnitud que cada uno de los tales cuocientes no puede superar. Para que sobre esto no quede la menor duda, y á fin de hacer ver que solo multiplicando el divisor por el supuesto cuociente parcial, y restando del dividendo parcial el producto, podemos poner en claro si ha de padecer ó no alguna alteracion el que hayamos adoptado por cuociente, propongamos dividir el número 3286630 por el 4798.

Dividendo......	3286630	4798...... *Divisor.*
	40783	685...... *Cuociente.*
	23990	
	00000	

Ya que el número representado por la combinacion de las cuatro primeras cifras de la izquierda del dividendo propuesto, consideradas con separacion de las otras tres que se hallan á su derecha, es menor que el divisor, tomamos para primer dividendo parcial al que la combinacion 32866 representa. Comparamos en seguida la parte principal del divisor, representada por su primera cifra 4, con la parte correspondiente del dividendo parcial, representada por la combinacion 32 de sus primeras dos cifras; y viendo que el número *cuatro* está contenido *ocho* veces en el *treinta y dos*, supongamos por un momento que todo el divisor 4798 está contenido otras tantas veces en el dividendo parcial 32866, y á consecuencia escribamos la cifra 8 como si fuese la primera del cuociente total. Para salir de dudas, multiplicamos por el *ocho* todo el divisor, y tratamos de restar del dividendo parcial el producto; mas viendo que de ningun modo es posible en este caso la sustraccion, por ser mayor que el minuendo el sustraendo, inferiremos que el verdadero cuociente parcial es menor que el *ocho*. Tendremos, pues, que borrar aquella primera cifra, y escribir en su lugar la que representa al número *siete*.

Tratando ahora de efectuar la multiplicacion y la sustraccion, vemos igualmente que esta segunda es impracticable por ser mayor que el dividendo parcial el producto; y de ahí inferiremos que el verdadero cuociente parcial es aun menor que el *siete*. Escribimos, pues, en su lugar la cifra 6.

Ya en este caso pueden efectuarse sin la menor dificultad las dos operaciones mencionadas; y siendo, como siempre debe ser, menor que el divisor 4798 el resíduo 4078 de la sustraccion, no podemos dudar de que el verdadero cuociente parcial es el *seis*.

Para continuar la operacion principal, escribimos á la derecha de las cifras del resíduo la 3 que inmediatamente se sigue en el dividendo propuesto, á fin de tener representado en la combinacion 40783 el segundo dividendo parcial. Comparamos en seguida la parte principal 4 del divisor con la correspondiente 40 del dividendo; y aunque veamos que en el número *cuarenta* está contenido *diez* veces el *cuatro*, no por eso debemos creer que pueda ser *diez* el segundo cuociente parcial; porque ninguna combinacion de cifras puede representar á un número *décuplo* de otro, sin que por lo menos se componga de las mismas con que se escribe este otro, con un cero á la derecha de ellas (§. 33); ni tampoco es posible que represente á un número mayor que el *décuplo* de otro, sin que por la combinacion de todas las cifras, menos la primera de la derecha, esté representado un número que contenga siquiera una sola vez á aquel otro. Esto quiere decir en el caso presente, que el número 40783 no es exactamente décuplo de 4798, porque es menor que 47980; ni, mucho menos, es mayor que el décuplo del mismo 4798, pues que la combinacion 4078 representa un número menor que el representado por 4798.

Debiendo, en vista de esto, ser menor que el *diez* el segundo cuociente parcial, supondremos que lo sea el *nueve*; y como al tratar de efectuar, segun es indispensable, la multiplicacion y la sustraccion, vemos que esta segunda es impracticable, nos es forzoso borrar la cifra 9, y escribir en su lugar, bien que todavía con alguna duda, la que representa al número *ocho*.

Efectuadas en seguida y sin la menor dificultad la multiplicacion y sustraccion; y siendo menor que el divisor 4798 el resíduo 2399, sabemos ya con certeza que el verdadero cuociente parcial segundo no es mayor ni menor que *ocho*, y lo representamos con la cifra 8 colocada inmediatamente á la derecha de la 6, que anteriormente hemos escrito para representar el primer cuociente parcial, á fin de que la nueva cifra colocada en tal situacion nos indique las decenas ó unidades de segundo órden del cuociente total.

A la derecha de las cifras del resíduo que acabamos de hallar, escribimos el cero con que se terminan las del dividendo propuesto, y por este medio obtenemos el tercero y último dividendo parcial 23990. Comparamos ahora con los 23 millares de este dividendo los 4 millares del divisor; y puesto que aquel primer número no contiene á este segundo mas de *cinco* veces, damos por supuesto que es igualmente *cinco* el tercero y último cuociente parcial, y lo representamos con la cifra 5 escrita á la derecha de las otras dos, para que asi nos indique las unidades absolutas del cuociente total.

Efectuando en seguida la multiplicacion de todo el divisor por el *cinco*, y sustrayendo del tercer dividendo parcial el producto, vemos no solo que esta sustraccion es practicable, sino tambien que por ser iguales entre sí el minuendo y el sustraendo, no resulta resíduo alguno: y no quedando ya del dividendo propuesto parte alguna que debamos ulteriormente dividir, podemos con toda certeza inferir no solo que el verdadero cuociente parcial tercero es *cinco*, sino tambien que la division propuesta está enteramente concluida, y que el verdadero y exacto cuociente total es el número 685.

49 A pesar de que no tenemos medio alguno de hacer desaparecer enteramente, y con toda la generalidad apetecible, de la division la falta que en el último ejemplo acabamos de hacer notar, de vernos en la precision de haber de borrar cifras ya escritas para representar los cuocientes parciales, y sostituir en lugar de ellas otras de menor valor; con todo, los tenemos para evitar que ocurra con tanta frecuencia, como de otra suerte ocurriria, la necesidad de ejecutar tales correcciones. Uno de los arbitrios de que podemos valernos para conseguirlo, se reduce á no escribir como cuociente parcial el número de veces que la parte principal del divisor esté conteni-

da en su correspondiente del dividendo parcial, sin que préviamente sepamos cuántas unidades deban agregarse al producto de la multiplicacion del supuesto cuociente por la parte principal del divisor, por razon de haberse reservado á este efecto algunas decenas del producto parcial inmediato anterior, pues con este aumento podrá llegar á ser tal el sustraendo, que no pueda efectuarse la sustraccion, sin embargo de que á primera vista parezca practicable. Manifestemos, pues, en el mismo ejemplo últimamente propuesto, asi el modo de hacer uso de este arbitrio, como lo útil que puede sernos.

Dividendo....... 3286630	4798.... *Divisor.*
	685...... *Cuociente.*

Luego que designamos para primer dividendo parcial al número 32866, comparamos los 4 millares del divisor con los 32 del tal dividendo; y puesto que en el 32 está contenido *ocho* veces el 4, es seguramente de inferir que el divisor no puede estar contenido mas veces en aquel dividendo parcial, porque un número no puede estar contenido en otro mas veces que una parte del primero está contenida en la correspondiente del segundo. Ahora, para venir en conocimiento de si lo estará menos veces y de cuántas sean estas; sin escribir la cifra 8, y comenzando la multiplicacion por las 7 centenas del divisor, diremos: 8 *veces* 7 *producen* 56; y sabiéndose que las *cinco* decenas de este producto parcial deben reservarse para agregar otras tantas unidades á las del producto parcial siguiente, diremos á continuacion: 8 *veces* 4 *producen* 32, las cuales con la agregacion de aquellas *cinco*, componen 37. Y como este sustraendo es ya mayor que su respectivo minuendo 32, podemos estar ciertos de que no es *ocho* el primer cuociente parcial. Veamos, pues, si lo es *siete*.

Para ello diremos, *7 veces 7 producen 49*; y asi venimos á saber que de este producto parcial se han de reservar por lo menos las 4 decenas para agregar otras tantas unidades al producto parcial siguiente: y ya con este conocimiento diremos: *7 veces 4 producen 28*, que con la agregacion de aquellas *cuatro*, vienen á ser 32; por cuyo motivo, siendo el minuendo y el sustraendo entre sí iguales, podrá parecernos practicable la sustraccion, y que de consiguiente el verdadero cuociente parcial es el *siete*. Mas en estos casos cabalmente en que aparece esa igualdad, es cuando mas debemos rezelar que el cuociente parcial supuesto no sea el verdadero. Con efecto, reflexionando que asi como se han agregado al producto 28 las *cuatro* decenas del 49, debieron agregarse á este las *seis* decenas del inmediato anterior 63, vendremos en conocimiento de que aquellas 49 unidades con las *seis* agregadas ascenderán á 55; y siendo ya *cinco* las decenas que deberán reservarse para agregarlas á las 28, ascenderán con esta agregacion á 33, y no podrán ya restarse de las 32 que se nos presentan en el primer dividendo parcial: de lo cual inferiremos que el primer cuociente parcial es aun menor que el *siete*. Asi que, pasaremos á examinar si es igual á *seis*.

Multiplicamos con este objeto las 7 centenas del divisor por el cuociente parcial *seis*; y por este medio sabemos que del producto 42 debemos reservar *cuatro* decenas que en realidad son *cuatro* millares, para agregarlos á los 24 que resultan de la multiplicacion siguiente. Y viniendo á ser por este medio 28 los millares que se deben restar de los 32 que aparecen en el dividendo parcial, inferiremos no solo con mucha probabilidad, sino con no poca seguridad, que la sustraccion es practicable, y que no es mayor ni menor que *seis* el verdadero cuociente parcial, como claramente se ve despues de haber escrito la cifra 6 en su respectivo lugar, y de haber efectuado la multiplicacion y la sustraccion que en seguida deben ejecutarse constantemente.

Determinado que sea el residuo 4078 de la sustraccion, y despues de haber escrito á su derecha la cifra inmediata 3 del dividendo total, á fin de tener representado en la combinacion 40783 el segundo dividendo parcial; comparamos, como de ordinario, los 4 millares del divisor con los 40 que aparecen en el nuevo dividendo; y aunque el *cuatro* esté contenido *diez* veces en el *cuarenta*, bien podemos estar ciertos de que el cuociente parcial ha de ser menor que *diez;* pues de lo contrario, deberia el número 4078 contener una vez por lo menos al divisor. Tratemos, pues, de averiguar si es el *nueve* el segundo cuociente parcial.

Para esto, sin escribir la cifra 9 en su respectivo lugar, comenzamos la multiplicacion por las 7 centenas del divisor, diciendo: *9 veces 7 producen 63;* con lo cual sabemos que de este producto se han de reservar las *seis* decenas, que son otros tantos millares, para agregarlos á los 36 que resultan de la multiplicacion inmediata siguiente. Ahora bien: agregando á los 36 millares de este último producto parcial los *seis* que á este fin se suponen reservados del producto inmediato anterior, vendrán á ser 42; y no pudiéndose estos restar de los 40 que nos presenta el segundo dividendo parcial, inferiremos con la mayor certeza que el segundo cuociente parcial ha de ser forzosamente menor que el *nueve*. Veamos, pues, si acaso es igual al ocho.

Suponiéndolo como tal, mas sin escribir en el lugar correspondiente la cifra 8, ni menos los resultados de la multiplicacion, ni de la sustraccion que deben inmediatamente seguirse, comenzamos la primera de estas operaciones multiplicando por el 8 las 7 centenas del divisor, diciendo: *8 veces 7 producen 56;* por cuyo medio sabemos que de este producto se han de reservar las *cinco* decenas, que son otros tantos millares, para agregarlos al producto siguiente; y siendo este 32 millares, con aquella agregacion ascenderá á 37, que restados de los 40 que aparecen en el segundo dividendo parcial, dejan de residuo 3. Asi venimos en conocimiento de que la sustraccion es practicable, y de que el segundo cuociente parcial puede muy bien ser igual al *ocho;* como al cabo ponemos en claro que efectivamente lo es, por medio del residuo 2399 menor que el divisor, que resulta de la sustraccion.

A la derecha de las cifras del residuo escribimos el *cero* que inmediatamente se sigue, y con el cual concluye la combinacion con que está representado el dividendo propuesto; y de este modo tenemos en 23990 el tercero y último dividendo parcial. Comparamos en seguida con los 23 millares de este dividendo los 4 del divisor; y viendo que en aquel está contenido *cinco* veces este, sabemos por decontado que el tercero y último cuociente parcial no puede ser mayor que el *cinco*. Y como el 23 lleva nada menos que *tres* de exceso al quíntuplo de 4, podemos con harto fundamento resolvernos á mirar al número *cinco* como á verdadero cuociente parcial. Sin embargo, sin escribir todavía en su respectivo lugar este cuociente, multiplicamos por él las 7 centenas del divisor; y siendo 35 el producto, sabemos ya que de él se han de reservar las *tres* decenas, equivalentes á otros tantos millares que deben agregarse á los 20 que resultan de la multiplicacion parcial siguiente. Hecha que sea esta agrecion, vienen á ser iguales entre sí el minuendo y sustraendo; y apareciendo por consiguiente practicable la sustracion, escribimos la cifra 5 á la derecha de las otras dos; multiplicamos por *cinco* todo el divisor, restamos del tercer dividendo parcial el producto; y no resultando residuo alguno, ni quedando del dividendo propuesto parte alguna sin dividir, podemos tener certeza de que el tercer cuociente parcial es *cinco*, y de que el total es el número 685.

5º Siempre que sea 9 la segunda cifra de la izquierda del divisor, podrá ser un medio bastante seguro de evitar muchas de las correcciones que de otra suerte serian necesarias, el suponer colocada en lugar de la primera cifra de la izquierda del divisor la asignada al número dígito inmediatamente mayor, y comparar á este con la parte correspondiente de cada dividendo parcial. Para dar á conocer el modo de hacer uso de este arbitrio, propongámonos dividir el número 2979968 por el 3968.

Dividendo.....	2979968	3968..... *Divisor.*
	20236	751..... *Cuociente.*
	3968	
	0000	

De la combinacion de cifras con que está representado el dividendo propuesto, tomamos para primer dividendo parcial al número que representa la combinacion de las cinco primeras cifras de la izquierda con separacion de las otras dos, en vista de que con menos cifras no es posible en este caso representar un número que contenga, por lo menos, una vez al divisor; y asi miramos al 29799 como primer dividendo parcial. Al comparar ahora con los 29 millares de este los que aparecen en el divisor, suponemos que estos sean 4 en vez de los 3 que realmente son; porque no siendo esta comparacion otra cosa que un mero arbitrio de que nos valemos para aproximarnos al verdadero valor del cociente, no debemos en esta investigacion desentendernos de que el divisor 3968 es un número mucho mas próximo al 4000 que al 3000. Y puesto que en el 29 está contenido 7 veces el 4, damos por supuesto que el mismo 7 es el primer cociente parcial. Con efecto practicada la multiplicacion de todo el divisor por el supuesto cociente, y restando del dividendo parcial el producto, resulta de residuo el número 2023; que es, como debe, menor que el divisor.

A la derecha de las cifras del residuo escribimos la que inmediatamente se sigue en las del dividendo propuesto, y asi tenemos á 20236 para segundo dividendo parcial. Bajo el mismo supuesto de que los millares del divisor sean 4, comparamos con este número los 20 que se nos presentan en el segundo dividendo parcial: y pues que el 20 contiene *cinco* veces al 4, miramos al *cinco* como segundo cociente parcial; escribimos la cifra 5 á la derecha del 7; efectuamos la multiplicacion y la sustraccion; y resulta de residuo 396.

A la derecha de estas cifras escribimos la que inmediatamente se sigue, y con que se termina la expresion del dividendo propuesto, por cuyo medio viene á ser el número 3968 el tercero y último dividendo parcial: y siendo exactamente igual al divisor, vemos, sin necesidad de comprobacion alguna, que el tercero y último cuociente parcial es el *uno*, y que el total es 751.

51 De la misma falsa suposicion nos podríamos valer siempre que fuese 8, y aun generalmente siempre que sea mayor que el *cinco* el número representado por la segunda cifra de la izquierda del divisor. Mas en cuantos casos juzguemos conveniente hacer uso de tal arbitrio, habremos de examinar con muy particular atencion cada uno de los residuos; pues debiendo todos ser menores que el divisor, en caso que resulte alguno que no lo sea, será forzoso borrar la cifra que últimamente se haya escrito en el cuociente, y poner en lugar de ella la asignada al número dígito inmediatamente mayor. Sírvanos de ejemplo de esto la division que con este objeto nos propondremos efectuar del número 438914 por el 586.

Dividendo.....	438914	586..... *Divisor.*
	2871	749..... *Cuociente.*
	5274	
	0000	

En ella el primer dividendo parcial debe ser 4389, porque el número 438 representado por la combinacion de las tres primeras cifras de la izquierda del dividendo propuesto, no contiene ni siquiera una sola vez al divisor. Suponiendo ahora, únicamente para la comparacion de las 43 centenas del dividendo con las del divisor, que estas sean *seis* por la razon de ser 8 la cifra inmediata á la primera; y sabiendo que en el 43 está contenido *siete* veces el 6, damos por supuesto que el primer cuociente parcial sea el mismo *siete*, y á consecuencia escribimos en su respectivo lugar la cifra 7: multiplicamos en seguida por *siete* todo el divisor; restamos del dividendo parcial el producto; y de esta sustraccion resulta el residuo 287, menor, como debe ser, que el divisor.

A la derecha de las tres cifras del residuo escribimos la siguiente 1 del dividendo propuesto, y en el número 2871 tenemos el segundo dividendo parcial. Comparamos entonces con las 28 centenas de este las 6 que suponemos en el divisor, y ya que sabemos que el 6 no está contenido mas de *cuatro* veces en el 28, miramos al *cuatro* como segundo cuociente parcial, y por tanto colocamos la cifra 4 á la derecha del 7. Multiplicamos en seguida por *cuatro* todo el divisor; restamos del segundo dividendo parcial el producto; y el residuo que resulta de esta sustraccion es 527, menor, como debe ser, que el divisor 586.

Ultimamente, á la derecha de las cifras del segundo residuo escribimos la última de las que forman la combinacion con que está representado el dividendo propuesto; y asi tenemos en 5274 el tercero y último dividendo parcial. Ahora bien: si para comparar con las 52 centenas de este dividendo las del divisor, suponemos, como en las otras dos comparaciones anteriores, que son 6 las centenas del divisor, habremos de decir en consecuencia que son *ocho* las veces que este número está contenido en aquel; miraremos al *ocho* como tercero y último cuociente parcial; escribiremos la cifra 8 á la derecha de las otras dos; multiplicaremos por *ocho* todo el divisor; restaremos del dividendo parcial el producto, y nos resultará de residuo el número 586 enteramente igual al divisor. Viéndole tal, debemos inferir que el verdadero cuociente parcial ha de ser mayor que el *ocho*, y por consiguiente tendremos que borrar aquella cifra, y escribir en su lugar la que representa al número *nueve*. Practicando todo esto, y efectuando en seguida la multiplicacion y la sustraccion acostumbradas, vemos que el residuo final es nulo, y de ahí venimos en conocimiento de que el verdadero cuociente parcial es 9, y de que el total es 749[1].

52 Resumiendo lo mas esencial de cuanto hasta aqui hemos expuesto concerniente á esta cuarta operacion fundamental aritmética, podemos reducirlo todo á la siguiente

Regla general: *Para dividir un número por otro, se escribirá el divisor á la derecha del dividendo, separando uno de otro con una línea vertical, y tirando á la derecha de esta y por debajo de las cifras del divisor otra línea horizontal para colocar el cuociente debajo de ella y con entera separacion del dividendo y del divisor. En seguida se separarán mentalmente del dividendo, y procediendo de izquierda á derecha las cifras que sean necesarias para representar un número que contenga por lo menos una vez al divisor; para lo cual suelen bastar tantas como hay en la expresion de este, pero con frecuencia se requiere una mas.*

Esta combinacion de cifras que consideramos como separadas de todas las demas, nos representan el primer dividendo parcial; y á fin de poner en claro cuántas veces contiene este al divisor, determinamos cuántas veces está contenida la parte principal del divisor en su correspondiente del dividendo parcial; miramos de ordinario como cuociente parcial á aquel número de veces, y escri-

1 Podria sernos muy útil para eximirnos en muchísimos casos de la precision de corregir cuocientes parciales falsamente supuestos, que la tabla pitagórica no se limitase á presentarnos los productos de cada dos números dígitos, sino que igualmente comprendiese los de cada dos de los *diez y nueve* primeros números, y que tuviésemos muy presentes estos productos y sus factores.

bimos la cifra que le está asignada, en el lugar destinado al cuociente.

Multipicamos por el tal cuociente al divisor, y tratamos de restar del dividendo parcial el producto de aquella multiplicacion, debiendo tener presente que solo en el caso de poder efectuarse la sustraccion, y de ser menor que el divisor el resíduo, el cuociente supuesto será el verdadero; mas si fuere impracticable la sustraccion, el verdadero cuociente deberá ser menor que el supuesto; y siempre que el resíduo no sea menor que el divisor, el verdadero cuociente habrá de ser mayor que el supuesto.

Escribimos á la derecha de las cifras del resíduo la que inmediatamente se siga en la combinacion del dividendo propuesto, y asi tenemos un nuevo dividendo parcial, que nos habrá de dar un nuevo cuociente parcial, que deberá escribirse á la derecha del primero. Determinado que sea este segundo cuociente parcial, se practicarán las mismas operaciones que con el primero, hasta obtener un nuevo resíduo menor que el divisor.

Asi se continúa escribiendo á la derecha de las cifras de cada resíduo la que inmediatamente se siga en la expresion del dividendo propuesto, y se efectúan del mismo modo y con el mismo órden las operaciones subsiguientes, hasta que no quede en el dividendo cifra alguna que pueda escribirse á la derecha de las del resíduo que por último haya resultado.

Si despues de haber escrito á la derecha de las cifras de cualquiera de los residuos la que inmediatamente se siga en la expresion del dividendo propuesto, y de tener por este medio un nuevo dividendo parcial, se advirtiere que este es menor que el divisor, se escribirá como cuociente parcial un cero á la derecha de las cifras con que *esten representados los anteriores: y mirando entonces como resíduo al mismo dividendo parcial, se escribirá á la derecha de sus cifras la que inmediatamente se siga en el dividendo propuesto, para obtener otro nuevo dividendo parcial.*

53 Cuando estan determinadas por ceros á su derecha las combinaciones de cifras que representan al dividendo y al divisor, se podrán suprimir enteramente todos los ceros de la una, con tal que se supriman otros tantos de la otra: en la segura inteligencia de que el cuociente no padecerá por eso alteracion alguna; porque muy fácil es ver que tantas veces como *ocho* unidades, por ejemplo, estan contenidas en *cincuenta y seis* unidades, lo estan *ocho* decenas en *cincuenta y seis* decenas; *ocho* centenas en *cincuenta y seis* centenas; *ocho* millares en *cincuenta y seis* millares; y generalmente *ocho* unidades de cualquier órden en *cincuenta y seis* unidades del mismo órden. A lo cual es consiguiente que resulte el mismo cuociente de la division de 56000 por 8000, que la de 5600 por 800, de la de 560 por 80, ó finalmente de la de 56 por 8. Igual número de veces está contenido 600 en 24000, que 60 en 2400, ó que el 6 en el 240.

De esto y de lo expuesto (§§. 33 y 34) se infiere fácilmente que en la misma suposicion de estar terminada por ceros á la derecha la combinacion de cifras que represente al dividendo, se efectúa la division por *diez, ciento, mil* &c., y se determina el respectivo cuociente con solo suprimir uno, dos, tres &c. de los tales ceros: asi como tambien se puede efectuar con la mayor facilidad y prontitud la division por cualquiera de los números multiplos del diez, ó del ciento, ó del mil &c. suprimiendo de los ceros del dividendo tantos como se supriman del divisor, y dividendo en seguida uno por otro los dos números restantes.

Propongámonos por último algunos otros ejemplos en que los principiantes puedan ejercitarse[1].

27835115	6895
25511	4037
48265	
00000	

1594833024	192056
583850	8304
768224	
000000	

3486800ØØ	368ØØ
1748	9475
2760	
1840	
0000	

54 La multiplicacion y la division, como que por esta se descompone lo que se supone compuesto por aquella, se sirven mútuamente de pruebas, lo mismo que la adicion y la sustraccion; pues segun la idea que (§. 40) hemos dado de la division, y de la que (§. 25) dimos de la multiplicacion, *siempre que un producto se divida por uno de sus factores, el cuociente ha de ser el otro factor*; asi como *siempre que se multiplique el divisor por el cuociente, el producto debe ser igual al dividendo.*

Esto debe entenderse en el supuesto de que el cuociente sea exacto, ó lo que es lo mismo, cuando de la division no haya resultado resíduo alguno final; pues siempre que no sea exacta la division, ó en otros términos, siempre que de ella resulte resíduo final, al producto del divisor por el cuociente, que en tal caso podemos

1 Poco mas adelante expondremos lo que aun nos resta practicar para completar el cuociente en los casos, que con mucha frecuencia ocurren, en los cuales resulta de la division algun resíduo final.

mirar como incompleto, deberemos agregar aquel residuo, para que la suma sea igual al dividendo propuesto.

Comparacion de los resultados de varias multiplicaciones y divisiones.

55 Pues que en toda multiplicacion equivale el producto á la suma de tantos números iguales al multiplicando, como unidades contiene el multiplicador, bien se deja conocer que en dos multiplicaciones en que haya el mismo multiplicando, si uno de los dos multiplicadores fuese multiplo del otro, el producto correspondiente al mayor multiplicador será *equimultiplo* del otro. Con efecto, si fuere *ocho*, por ejemplo, uno de los multiplicadores, siendo el otro *cuatro*; asi como el *ocho* es doble del *cuatro*, el producto correspondiente al *ocho* habrá de ser doble del que corresponde al *cuatro*; porque equivaliendo el primero á la suma de *ocho* cantidades entre sí iguales, no equivale el segundo mas que á la suma de *cuatro* de ellas.

Del mismo modo, si en dos multiplicaciones hay el mismo multiplicador, siendo uno de los multiplicandos multiplo del otro, el producto correspondiente al mayor de estos, deberá ser equimultiplo del otro. Supongamos, por ejemplo, que uno de los multiplicandos sea triple del otro, y que sea *cinco* el multiplicador comun de entrambos. Por de contado cada uno de los productos equivaldrá á la suma de *cinco* números iguales á su respectivo multiplicando: y equivaliendo el mayor de estos á *tres* como el menor, la suma de *cinco* números iguales al primero deberá equivaler á *tres* veces *cinco*, ó lo que es lo mismo, á *quince* como el segundo, y de consiguiente será triple de este.

En general: *siempre que en dos multiplicaciones sea comun alguno de los factores, y que uno de los factores restantes sea multiplo del otro, el producto correspondiente al mayor de estos deberá ser equimultiplo del otro.* De lo cual se infiere que si uno de los factores propuestos para efectuar una multiplicacion fuere doble, y el otro triple respectivamente de los propuestos para otra, el producto de los dos primeros habrá de ser sextuplo del de los dos segundos: si uno de los factores fuere triple, y el otro cuádruplo, el producto será doce veces mayor; si el uno fuere cuádruplo, y el otro quintuplo, el producto deberá ser veinte veces mayor; y generalmente, *cuando los dos factores de cualquier producto sean ambos multiplos de los de otro, determinaremos el número de veces que el primer producto contiene al segundo, multiplicando entre sí los números de veces que los dos factores multiplos contienen á los otros.* Porque si por solo ser doble uno cualquiera de los factores, deberia ser doble el producto; y si por solo ser triple uno cualquiera de los factores, deberia el producto ser triple; cuando se combinen estas das circunstancias, deberá el producto ser doble del triple, ó triple del doble, ó lo que es equivalente, sextuplo ó seis veces mayor.

Y pudiendo hacerse el mismo razonamiento en todos los casos indicados y en los demas semejantes que ocurran, nos será fácil deducir que cuando los dos factores propuestos para una multiplicacion sean ambos respectivamente dobles de los propuéstos para otra, el producto de la primera será cuádruplo del de la segunda: cuando ambos sean triples respectivamente de los otros, el producto habrá de ser nueve veces mayor: cuando ambos sean cuádruplos, el producto deberá ser diez y seis veces mayor: y asi de los demas.

56 Si al mismo tiempo que uno de los dos factores propuestos para una multiplicacion, es multiplo de alguno de los propuestos para otra, el factor restante de esta fuere multiplo del restante de la primera, los dos productos deberán ser exactamente iguales entre sí; porque cuantas veces mayor debiera uno de ellos ser por una razon, otras tantas veces mayor debiera ser por otra, y el aumento que por un lado recibe, se compensa cabalmente con la diminucion que por otro padece. Si efectuada, por ejemplo, la multiplicacion de *doce* por *diez* nos propusiéremos multiplicar *veinte y cuatro* por *cinco*, podemos tener sabido que este segundo producto ha de ser enteramente igual al primero. Lo mismo diremos si despues de haber multiplicado *nueve* por *ciento* nos propusiésemos multiplicar *treinta y seis* por *veinte y cinco*; y en todos los demas casos semejantes. Esta observacion nos proporciona la facultad de poner, siempre que nos acomode, en lugar de los factores dados para una multiplicacion, otros muy distintos que nos den el mismo producto.

57 Si despues de efectuada una multiplicacion, nos proponemos multiplicar de nuevo el producto por otro cualquier número, deberá ser este segundo producto el mismo que si desde luego se hubiese multiplicado el primitivo multiplicando por el producto de los dos multiplicadores. Si, por ejemplo, despues de multiplicar el número *diez y siete* por tres, hubiésemos de multiplicar al producto *cincuenta y uno* por *cinco*, el nuevo producto *docientos cincuenta y cinco* deberá ser el mismo que el de la multiplicacion del *diez y siete* por el producto *quince* de los dos multiplicadores *tres* y *cinco*. Porque comparando los dos factores 17 y 15 propuestos para esta ter-

cera multiplicacion, con los dos 17 y 3 propuestos para la primera, vemos que el 17 es factor comun de entrambas, y que el 15 es quintuplo de 3; por cuya razon el último producto deberá ser asimismo quintuplo del primero, como lo es el segundo.

Lo mismo se verificaria si hubiésemos multiplicado el 17 primeramente por *cinco*, y despues á su producto 85 por *tres*: debe igualmente resultar 255 por producto final; porque debiendo este ser triple del producto primero, habrá forzosamente de ser igual al de la multiplicacion del 17 por 15, el cual es asimismo triple del de 17 multiplicado por 5.

Y puesto que (§. 27) el mismo producto resulta de la multiplicacion del 17 por 3, que de la del 3 por 17; el mismo de la del 17 por 5, que de la del 5 por 17, el mismo de la del 5 por 3, que de la del 3 por 5; el mismo de la del 17 por 15, que de la del 15 por 17; el mismo de la del 51 por 5, que de la del 5 por 51; y el mismo de 85 por 3, que de la del 3 por 85; podemos inferir con toda certeza que cualquiera de las seis expresiones siguientes

17 *por* 3 *por* 5
17 *por* 5 *por* 3
3 *por* 17 *por* 5
3 *por* 5 *por* 17
5 *por* 17 *por* 3
5 *por* 3 *por* 17

representa al solo idéntico producto 255.

Una observacion semejante podríamos hacer sobre el producto 1785 que resultaria, si despues de haber efectuado la segunda multiplicacion del 51 por 5, multiplicásemos de nuevo por 7 el segundo producto 255. En cuyo caso debemos tener por cierto que de la tercera multiplicacion habrá de resultar el mismo producto que si desde luego hubiésemos multiplicado el primitivo multiplicando 17 por el producto 105 de los tres multiplicadores 3, 5 y 7; el mismo que si hubiésemos multiplicado el producto 51 por el producto 35 de los dos multiplicadores 5 y 7, y el mismo que resultaria de la multiplicacion del producto 85 por el producto 21 de los dos multiplicadores 3 y 7.

Con efecto, segun ya hemos hecho ver, el mismo producto 255 debe resultar de la única multiplicacion del 17 por 15, que de la final de las dos sucesivas del 17 por 3, y del producto 51 por 5. Por otra parte sabemos que el producto de la tercera multiplicacion ha de ser septuplo del 255 de la segunda: y como por ser 105 septuplo del 15 deba el producto de la multiplicacion del 17 por 105 serlo igualmente del de la multiplicacion del mismo 17 por 15, se ve sin dificultad que de la única multiplicacion del primitivo multiplicando 17 por el producto 105 de los tres multiplicadores 3, 5 y 7, debe resultar el mismo producto que de la última de las tres multiplicaciones sucesivas del 17 por 3, del 51, por 5, y del 255 por 7. Por manera que las varias combinaciones formadas de los cuatro factores 3, 5, 7 y 17, sin otra diferencia que la del órden de su colocacion, representan todas el solo é idéntico producto 1785.

Y pudiéndose aplicar el mismo razonamiento á todos los casos en que hayan de efectuarse cuantas multiplicaciones sucesivas sean necesarias, podemos tener por cierto que *no padece alteracion alguna el producto final de varias multiplicaciones sucesivas, por mas que varíe el órden con que estas se efectúen*; *y que el producto final es el* *mismo que resultaria de la única multiplicacion del primitivo multiplicando por el producto de todos los multiplicadores.*

58 Si en dos divisiones fuese uno mismo el divisor, siendo uno de los dividendos multiplo del otro, el cuociente que corresponda al dividendo mayor, habrá de ser equimultiplo del otro. Porque si por suposicion uno de los dos dividendos fuere doble del otro, y por consiguiente equivaliere á dos como este, deberá contener al divisor comun un doble número de veces. Si uno de los dividendos fuere triple del otro, equivaldrá á tres como este otro, y contendrá al divisor comun un triple número de veces: y asi de los demas.

59 Si habiendo en dos divisiones un mismo dividendo, fuere uno de los divisores multiplo del otro, el cuociente que corresponda al divisor menor, habrá de ser equimultiplo del otro. Porque en la suposicion de que uno de los divisores sea doble del otro, y que el dividendo comun contenga una sola vez al divisor mayor, deberá contener dos veces al menor. En caso que el mismo dividendo contenga al divisor mayor dos veces, habrá de contener al menor cuatro veces. Si uno de los divisores fuere triple del otro, el dividendo comun que contenga al divisor mayor cualquier número de veces, deberá contener al divisor menor un triple número de veces. Lo mismo puede decirse en las demas suposiciones.

60 Si el dividendo y el divisor propuestos para efectuar una division fueren equimultiplos de los propuestos para otra, los dos cuocientes deberán ser exactamente iguales entre sí; pues si por ser uno de los dividendos multiplo del otro, deberia ser el respectivo cuociente equimultiplo del otro; por ser el divisor tambien

equimúltiplo del otro divisor, deberia ser el cuociente el mismo número de veces menor. Por manera que el aumento que por una parte deberia recibir el cuociente, se neutraliza con la disminucion que por otra deberia padecer, y por tanto se conserva sin la menor alteracion. Asi se ve que de la division de 48 por 12, de la de 24 por 6, y de la de 8 por dos resulta el mismo cuociente 4.

61 Si despues de efectuada una division, tuviésemos que dividir el cuociente que resulte de ella, por otro divisor, el cuociente de esta segunda division deberá ser el mismo que si desde luego hubiésemos dividido el primitivo dividendo por el producto de los dos divisores. Si, por ejemplo, habiendo dividido el número 525 por 3, tuviésemos que dividir de nuevo el cuociente 175 por 5, deberá ser este segundo cuociente el mismo 35 que si desde luego se hubiese dividido el primitivo dividendo 525 por el producto 15 de los dos divisores 3 y 5. Con efecto, siendo el dividendo en esta tercera division el mismo que en la primera, al mismo tiempo que el tercer divisor 15 es quíntuplo del primero 3, el primer cuociente deberá ser quíntuplo del tercero, asi como lo es igualmente del segundo.

Del mismo modo, si despues de haber dividido 525 por 5, tuviésemos que dividir el cuociente 105 por 3, este segundo cuociente 35 deberá ser igual al que habria resultado de la única division del primitivo dividendo 525 por el producto 15 de los dos divisores 5 y 3. Porque habiendo en esta tercera division el mismo dividendo que en la primera, y siendo el tercer divisor triple del primero, el primer cuociente deberá por la inversa ser triple del tercero, como necesariamente lo es del segundo.

Si aun despues de haber obtenido el segundo cuociente 35, lo dividiésemos de nuevo por 7, el último cuociente 5 deberá ser el mismo que si de una sola vez hubiésemos dividido el primitivo dividendo 525 por el producto 105 de los tres divisores, 3 5 y 7: pues asi como ya sabemos que el cuociente final de las dos primeras divisiones sucesivas es el mismo 35 que habria resultado de la única en que el primitivo dividendo 525 se dividiese por el producto 15 de los dos divisores 3 y 5; podremos igualmente estar ciertos de que dividiendo el cuociente 35 por 7 debe resultar el mismo cuociente final que si de una vez dividiésemos el primitivo dividendo 525 por el producto 105 de los tres divisores 3, 5 y 7; puesto que siendo el divisor 105 séptuplo del 15, el cuociente 35 que corresponda á este divisor, deberá ser igualmente séptuplo del que corresponda al divisor 105, el cual por consiguiente habrá de ser 5. En general, sean cuantas fueren estas divisiones sucesivas, y efectúense con el órden que mas nos acomode, el cuociente final ha de ser cabalmente el mismo que deba resultar de la única division del primitivo dividendo por el producto de todos los divisores.

62 Siempre que despues de efectuada una multiplicacion, tengamos que dividir el producto por otro número cualquiera, el resultado final de estas dos operaciones habrá de ser el mismo que si habiendo primeramente dividido cualquiera de los dos factores por el divisor, se hubiese multiplicado despues el cuociente de esta division por el otro factor. Si, por ejemplo, despues de haber multiplicado 48 por 36, tuviésemos que dividir el producto 1728 por 12, el resultado final vendrá á ser el mismo que habríamos obtenido dividiendo en primer lugar por 12 cualquiera de los dos factores 48 ó 36, y

multiplicando en seguida por el otro el cuociente que de la division haya resultado. Con efecto, el producto de la multiplicacion de 48 por 36 equivale á la suma de treinta y seis números iguales al 48, y de consiguiente, cuando dividimos por 12 aquel producto, el cuociente, que por este órden es el resultado final de las dos operaciones, deberá equivaler á *tres* números iguales al mismo 48. Ahora bien: si primeramente hubiésemos dividido el 36 por 12, habria resultado el cuociente 3; y si en seguida hubiésemos multiplicado por este cuociente al otro factor, el producto deberia equivaler á la suma de *tres* números iguales al 48.

Del mismo modo podemos decir que el producto de la multiplicacion de 36 por 48 equivale á la suma de *cuarenta y ocho* números iguales al 36; y de consiguiente dividiendo por 12, el cuociente equivaldrá á la suma de *cuatro* números iguales al mismo 36. Pues ahora: si en primer lugar hubiésemos dividido por 12 al factor 48, habria resultado 4 por cuociente; y si en seguida hubiésemos multiplicado por este cuociente al otro factor, el producto habria equivalido á la suma de *cuatro* números iguales al 36.

Y pudiéndose aplicar el mismo razonamiento á todos los demas casos semejantes, podemos establecer por principio general, que *cuando á una multiplicacion se haya de seguir la division del producto por otro número cualquiera, el resultado final de estas dos operaciones debe ser el mismo que si dividiendo primeramente uno solo de los dos factores, multiplicásemos en seguida por este cuociente al otro factor*. En suma, por mas que se invierta el órden de estas dos operaciones, el resultado final no padece por eso alteracion alguna.

Indicios que las combinaciones de cifras con que se representan por escrito los números, ofrecen de ser estos divisibles por algunos otros.

63 *Cuando un cero ó alguna de las cifras significativas asignadas á números pares*[1], cuales son, 2, 4, 6 y 8, *ocupare el primer lugar de la derecha de la combinacion con que esté representado cualquier número, debe ser exactamente divisible por dos el número representado por toda la combinacion.* Porque sea cual fuere el número propuesto, cuando lleguemos á dividir por *dos* sus decenas, el residuo, si lo hay, jamas podrá ser mayor que *una* decena; y de consiguiente en caso que de la division de las decenas no resulte residuo alguno, el último dividendo parcial será *cero* ó *dos* ó *cuatro* ó *seis* ú *ocho*; y en caso que haya resultado residuo de la penúltima division parcial, el último dividendo será uno de los números *diez, doce, catorce, diez y seis, diez y ocho*; y todos estos números son exactamente divisibles por *dos*.

64 *Si el cero ó la cifra significativa 5 ocupa el primer lugar de la derecha de la combinacion con que esté representado el número, deberá este ser exactamente divisible por cinco.* Con efecto, sea el que fuere el número propuesto, en habiendo llegado á dividir por *cinco* sus decenas, el residuo, en caso que de esta penúltima division parcial resulte alguno, deberá ser *una*, ó *dos*, ó *tres* ó *cuatro* decenas; de modo que siendo, como se supone, *cero* ó cinco la cifra de las unidades absolutas, vendrá

1 Todo número exactamente divisible por *dos* se llama *número par*; y por el contrario se llama *impar* cualquiera número que no sea exactamente divisible por *dos*, aunque lo sea por cualquier otro divisor.

el último dividendo parcial á ser *cero* ó *cinco* ó *diez* ó *quince* ó *veinte* ó *veinte y cinco*, ó *treinta* ó *treinta y cinco* ó *cuarenta* ó *cuarenta y cinco*, que todos son exactamente divisibles por *cinco*.

65 *Si la combinacion de las dos primeras cifras de la derecha representare un número exactamente divisible por cuatro, lo será igualmente el número propuesto, sea cual fuere la combinacion total con que se le represente*. Porque en habiendo dividido por *cuatro* sus centenas, el residuo en caso que de esta division parcial resulte alguno, habrá de ser *una* ó *dos* ó *tres* centenas que respectivamente equivalen á *ciento*, *doscientas*, *trescientas* unidades absolutas: y siendo cada uno de estos tres números exactamente divisible por *cuatro*, deberá serlo igualmente el que resulta de la agregacion de cualquiera de ellos con el representado por la combinacion de las dos primeras cifras de la derecha, el cual es, por su posicion, exactamente divisible por *cuatro*. Asi vendremos en conocimiento de que el número 937524 es exactamente divisible por *cuatro*, con solo atender á que lo es el 24.

66 Por muchas que sean las cifras que entren en la combinacion con que se represente por escrito un número, *basta observar que el representado por la combinacion de las tres primeras de la derecha, es exactamente divisible por ocho, para poder afirmar con certeza que todo el número propuesto lo es igualmente*. Porque equivaliendo todo número de millares á otro de unidades absolutas exactamente divisible por ocho, lo deberá ser asimismo el que resulte de la agregacion del residuo de la division parcial de los millares con el número representado por la combinacion de las tres primeras cifras de la derecha, al cual suponemos exactamente divisible por *ocho*. Asi po-

dremos asegurar que el número 213957456 es exactamente divisible por *ocho*, con solo observar que lo es el 456.

67 A todo número que como á *diez*, *ciento*, *mil* &c. se le representa por la primera cifra significativa 1 con *ceros* á su derecha se le puede considerar como formado por la reunion de 9 y 1, ó de 99 y 1, ó de 999 y 1 &c.: y siendo exactamente divisibles por *tres* y por nueve los números *nueve*, *noventa y nueve*, *novecientos noventa y nueve* &c. es consiguiente que si dividimos por *tres* ó por nueve á cualquiera de los números que como *diez*, *ciento*, *mil* &c. se representan por la primera cifra significativa con ceros á su derecha, deba en todos resultar *uno* por residuo de la division.

A consecuencia, equivaliendo cada uno de los números que se representan por la cifra 2 con ceros á su derecha, á *dos* dieces ó á *dos* cientos ó á *dos* mil &c.; y debiendo resultar *uno* de residuo de la division de cada diez, ciento, mil &c. por tres ó por nueve, habrán de resultar *dos* de residuo de la division por 3 ó por 9 de cualquiera de los números representados por la cifra 2 con ceros á su derecha.

Y aunque de la division por tres de cualquier número representado por una de las cifras 3 ó 6 con ceros á su derecha, ni de la division por tres ó por nueve de cualquiera de los representados por 9, no deba resultar residuo alguno, podemos establecer generalmente que *cuando dividamos por tres ó por nueve cualquiera de los números representados por una sola cifra significativa con ceros á su derecha, deberá resultar por residuo de la division el número de unidades absolutas que representaria la cifra significativa si estuviese enteramente sola.*

Ahora bien: á todo númeró lo podemos considerar como formado por la reunion de las *unidades absolutas*, de los *dieces*, *cientos*, *miles* &c. que denotan las cifras significativas con que le representamos por escrito; y como las unidades absolutas que representaria cada una de estas cifras si estuviera enteramente sola, serian el residuo que resultaria de la division por *tres* ó por nueve de los varios números que en los lugares que ocupan en la combinacion representan; es claro que si la suma de estos residuos fuere exactamente divisible por *tres* ó por *nueve*, será igualmente exacta la division de todo el número propuesto, siéndolo, como se supone la de todas sus partes. De consiguiente, *si mirando á las cifras con que esté designado cualquier número, como si no formasen combinacion, y que asi representasen todas unidades absolutas, fuere exactamente divisible por tres ó por nueve la suma de estas unidades, lo será igualmente el número representado por la combinacion de todas ellas.*

Asi conoceremos que son exactamente divisibles por tres los números 4251 y 15342; porque si mirando las cifras con que estan representados, como si todas representasen unidades absolutas, sumamos estas unidades, las del primero suman *doce*, y las del segundo *quince*, los cuales dos números son exactamente divisibles por *tres*.

Vendremos igualmente en conocimiento de que son exactamente divisibles por *nueve*, y de consiguiente por *tres* los números 621, 8280 y 934218, con solo notar que las unidades absolutas que representarian las respectivas cifras de cada uno si no estuviesen en combinacion, componen sumas exactamente divisibles por *nueve*. Ya se deja ver que todo número exactamente divisible por *nueve*, lo es de consiguiente por *tres*; bien que no todo número exactamente divisible por *tres*, lo sea tambien por *nueve*. Esto nos ofrece ocasion de hacer notar que en siendo un número exactamente divisible por otro, lo debe ser de consiguiente por cualquiera de los divisores exactos de este otro, pero no al contrario.

68 Si considerando á las cifras con que se halla escrito un *número como si no estuviesen en combinacion, ó como si todas representasen unidades absolutas, la suma de las unidades de la primera, de la tercera, de la quinta, de la séptima &c. comenzando á contar por la derecha, fuere igual á la suma de las unidades de la segunda, de la cuarta, de la sexta, de la octava &c.; ó si la diferencia de estas dos sumas fuere once, ó un multiplo cualquiera de once, todo el número propuesto será exactamente divisible por once.* Porque como es fácil observar, á cada *diez* unidades les falta una para ser exactamente divisibles por *once*; á cada *cien* unidades les sobra una para lo mismo; á cada mil unidades les falta una; á cada *diezmil* les sobra otra; á cada *cienmil* les falta una, á cada *millon* de unidades les falta otra. Por manera que la suma de las unidades de la primera, tercera, quinta, séptima &c. cifras, comenzando á contar por la derecha, viene á ser lo que sobra para que sea exactamente divisible por *once* una parte del número propuesto; y la suma de las unidades de la segunda, cuarta, sexta, octava &c. cifras viene á ser lo que falta para que la parte restante lo sea. Si pues, fueren iguales estas dos sumas, ó si fuere *once* ó un multiplo cualquiera de *once* la diferencia de ellas, será exactamente divisible por *once* el número propuesto. Asi conoceremos que los números 4587, 61248 y 9283615 son exactamente divisibles por *once*, con solo observar que la suma de las unidades de las cifras 7,

y 5 del primero es igual á la de las cifras 8 y 4 restantes; que la suma de las unidades de las cifras 8, 2 y 6 del segundo lleva *once* de exceso á la de las cifras 4 y 1 restantes del mismo; y que la suma de las unidades de las cifras 5, 6, 8 y 9 del tercero lleva *veinte y dos* ó dos veces *once* de exceso á la suma de las unidades de las cifras 1, 3 y 2 restantes del mismo tercero.

Por último, si en un número cualquiera concurren á un mismo tiempo indicios de ser exactamente divisible por *dos* y por *tres*, ó por *tres* y por *cuatro*, ó por *tres* y por *cinco* &c. será exactamente divisible por *seis* en el primer caso; por *doce* en el segundo; por *quince* en el tercero &c. Y generalmente siempre que algun número sea exactamente divisible por otros varios, tales que ninguno de estos sea multiplo de los demas, ni tengan factor alguno comun, será exactamente divisible por el producto de los divisores. Asi con solo advertir que en el número 18576 concurren los indicios de ser exactamente divisible por *cuatro* y por *nueve*, inferiremos que es exactamente divisible por 36, producto de los dos divisores. Igualmente, viendo que en el número 37862415 concurren los indicios de ser exactamente divisible por *cinco* y por *nueve*, podemos tener certeza de que es asimismo exactamente divisible por el producto 45 de los dos divisores[1].

69 Todo número que no es exactamente divisible sino por otro que le sea enteramente igual ó por el *uno* ó la *unidad*, cuales son los números *dos*, *tres*, *cinco*, *siete*,

1 Con respecto á otros varios números pudieran hacerse observaciones análogas á las que acabamos de exponer, relativas á los números 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11; pero la indagacion de estas propiedades nos distraeria demasiado de nuestro principal asunto, y asi creemos mas conveniente omitirlas por ahora.

once &c. se llama número *primo* ó *primero*. Todo el que sea exactamente divisible por algun otro distinto, como el *seis*, el *ocho*, el *doce*, el *quince* &c. se llama *número compuesto*.

Modo de determinar los divisores exactos, simples y compuestos de un número.

70 Para dar alguna idea del modo de efectuar la investigacion de los divisores exactos de cualquier número, propongámonos hallar los del 8640.

En primer lugar vemos por lo dicho (§. 63) que es exactamente divisible por 2, y que ejecutada la division, resulta por cuociente 4320.

Vemos igualmente que este cuociente lo es tambien, y que dividiéndolo por 2, el nuevo cuociente es 2160.

Siendo asimismo exactamente divisible por 2 el segundo cuociente, efectuamos la division, y tenemos por tercer cuociente 1080.

Aun este cuociente es exactamente divisible por 2, y esta division nos da por cuociente á 540.

Dividimos del mismo modo por 2 al 540, y el cuociente es 270. Dividimos por último al 270 por 2, y nos resulta por cuociente 135.

Son pues seis las divisiones que hemos ejecutado, y en las cuales ha sido divisor exacto el 2: á lo que es consiguiente que el número propuesto 8640 sea el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 2 por 2 por 2 por 2 por 2 por 135.

No siendo exactamente divisible por 2 el 135, é indicándonos la suma de las unidades de los números dígitos representados por las cifras con que está escrito, que es exatamente divisible por 3, efectuamos esta division, y resulta por cuociente 45.

Por la misma razon conocemos que el 45 es exactamente divisible por 3, siendo el cuociente de esta division 15.

Ultimamente el 15 es exactamente divisible por 3, y de esta division resulta por cuociente 5, número *primo* ó simple, y que de consigniente no es exactamente divisible por otro alguno.

Sabiendo ya que el número 135 es el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 3 por el 3 por 3 por 5, nos es fácil inferir que el propuesto 8640 es el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 2 por 2 por 2 por 2 por 2 por 3 por 3 por 3 por 5.

Ya que conocemos los divisores simples, podemos determinar sin la menor dificultad los compuestos de dos simples, multiplicando cada uno de estos por cada uno de los demas que le siguen, y asi resultarán por divisores compuestos de dos simples el 4, el 6, el 9, el 10, y el 15.

Multiplicando ahora cada uno de estos divisores por cada uno de los demas divisores simples, resultarán los compuestos de tres de estos, cuales son el 8, el 12, el 18, el 20, el 27, el 30 y el 45.

Multiplicando estos por cada uno de los demas divisores simples, resultarán los compuestos de cuatro, cuales son el 16, el 24, el 36, el 40, el 54, el 60, el 90 y el 135.

Multiplicando estos por cada uno de los demas divisores simples, resultarán los compuestos de cinco simples, cuales son el 32, el 48, el 72, el 80, el 108, el 120, el 180 y el 270.

Multiplicando cada uno de estos por cada uno de los demas divisores simples, resultarán los compuestos de seis, cuales son el 64, el 96, el 144, el 160, el 216, el 240 y el 540.

Multiplicando estos por cada uno de los otros divisores simples, resultarán los compuestos de siete, cuales son el 192, el 288, el 320, el 432, el 480, el 720 y el 1080.

Multiplicando cada uno de estos por cada uno de los demas divisores simples, resultarán los compuestos de ocho, cuales son el 576, el 864, el 960, el 1440 y el 2160.

Multiplicando por último cada uno de estos por cada uno de los demas divisores simples, resultarán los compuestos de nueve, cuales son 2728, el 2880 y el 4320. Con lo cual habremos finalizado la investigacion de los divisores simples y compuestos del número 8640, puesto que este es el producto final de las multiplicaciones sucesivas de los diez divisores simples que ya hemos indicado.

71 Hallando primeramente los divisores simples de dos, tres ó mas números propuestos, y multiplicando cualquiera de estos dos ó tres ó mas números por los divisores simples que sean peculiares á los demas, resultará el *mínimo multiplo comun* de ellos, ó lo que es lo mismo, el menor de los números exactamente divisibles por todos los propuestos. Asi, sabiendo que el 48 es el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 2 por 2 por 2 por 3; que el 64 es el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 2 por 2 por 2 por 2 por 2, y que 90 es el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 3 por 3 por 5; si multiplica-

mos al 48 por 2, por 2, por 3 por 3 por 5, es decir por los factores de los números 64 y 90 que no lo son del 48, resultará por producto final el 2880, *mínimo multiplo comun* de los tres números 48, 64 y 90.

Modo de determinar el máximo divisor comun de dos números.

72 Tales pueden ser dos números, que sin embargo de tener cada uno de ellos muchos divisores exactos, ninguno de estos sea comun á entrambos. Tales son el 32 y el 45; pues á pesar de que el primero se puede dividir exactamente por el 2, por el 4, por el 8 y por el 16; y de que el segundo sea exactamente divisible por el 3, por el 5, por el 9 y por el 15, ninguno de los divisores exactos del primero lo es del segundo, asi como ninguno de los del segundo lo es del primero. En tal caso decimos que los dos números propuestos son *primos entre sí*.

Pero tambien pueden ser tales los dos números, que tengamos uno ó mas divisores exactos comunes. Asi sucede á los números 48 y 72; de los cuales el primero tiene por divisores exactos al 2, al 3, al 4, al 6, al 8, al 12, al 16 y al 24; y el segundo es exactamente divisible por el 2, por el 3, por el 4, por el 6, por el 8, por el 9, por el 12, por el 18, por el 24 y por el 36. Esta circunstancia de que alguno de los divisores exactos del uno lo es justamente del otro, la expresamos diciendo que los dos números propuestos son *compuestos entre sí*.

Asi los llamamos aun cuando el menor de ellos sea número *simple* ó *primo*, con tal que sea divisor exacto del mayor, como sucede á los números 17 y 85, de los cuales siendo *primo ó simple* el primero, es al mismo tiempo divisor exacto del segundo.

Siempre que dos números tengan varios divisores exactos comunes, al mayor de estos le damos el nombre de *mayor divisor ó mayor medida comun* de los tales números. Asi siendo, como ya hemos indicado, divisores exactos comunes de 48 y de 72 el 2, el 3, el 4, el 6, el 8, el 12 y el 24, llamamos á este último *mayor divisor ó medida comun* del 48 y del 72. El mismo nombre damos al menor de dos números, siempre que sea divisor exacto del mayor, puesto que el mayor divisor exacto de un número cualquiera es otro número enteramente igual á él.

73 Si pues nos ocurriere haber de buscar el máximo comun divisor de dos números, dividiremos el mayor por el menor para ver si este es divisor exacto de aquel, en cuyo caso será al mismo tiempo el mayor divisor comun de los dos. Asi se verifica en los números 36 y 144, de los cuales el primero, por ser divisor exacto del segundo, es el máximo divisor comun de entrambos. Lo mismo podemos decir con respecto á los números 43 y 215.

Pero si no siendo el número menor de los propuestos divisor exacto del mayor, lo fuere del menor el residuo que resulte de la division del mayor por el menor, el mismo residuo será el máximo divisor comun de los números propuestos. Con efecto, si nos propusiéramos hallar el máximo divisor comun de 348 y 1131, dividiríamos este por aquel, y resultaria 3 por cuociente y 87 de residuo; de modo que el 1131 es igual á la suma de tres veces 348 y 87 (§. 54). Ahora bien, dividiendo 348 por 87, y viendo que este es divisor exacto de aquel, podemos estar ciertos de que lo es asimismo del

1131, y de que es al mismo tiempo el mayor divisor comun de los dos números propuestos 348 y 1131. Porque siendo, como puede fácilmente verse, divisor exacto de 348 el 87, deberá serlo igualmente de tres veces 348, y de consiguiente de las dos partes tres veces 348 y 87, cuya suma es igual á 1131. Por tanto debe ser 87 divisor exacto de 1131, y el máximo divisor comun de 348 y 1131; porque siendo divisor exacto de este y de una de sus partes, que es tres veces 348, ningun otro número mayor que 87 puede ser divisor exacto de la otra parte, que es el mismo 87. El mismo razonamiento puede hacerse en cualquiera otro caso semejante.

Cuando el menor de dos números propuesto no sea divisor exacto del mayor, ni el residuo que resulte de la division del mayor por el menor lo sea del menor; si el residuo que resulte de la nueva division de aquel primer residuo fuere divisor exacto de este, lo será igualmente de los dos números propuestos, y su máximo divisor comun. Propongámonos, por ejemplo, determinar el máximo divisor comun de los dos números 3760 y 9024: y dividiendo el mayor por el menor para ver si este es divisor exacto del otro, hallaremos que el cuociente de esta division es 2, y que resulta por residuo final 1504. Dividiendo á continuacion el número menor 3760 por el residuo 1504 para ver si este es divisor exacto del número menor, nos resultará por cuociente 2 y por residuo 752. Dividiendo asimismo aquel residuo por este, y viendo que el 1504 es exactamente doble del 752, y que este de consiguiente es divisor exacto de aquel, podemos inferir con toda seguridad que el mismo 752 es el máximo divisor comun de los dos números propuestos 3760 y 9024; pues siéndolo de 1504 y de 3760, debe por consiguiente serlo de aquellos otros dos números propuestos.

Del mismo modo se puede hacer ver que si el residuo de la segunda division no fuere divisor exacto del de la primera: y si dividiendo el residuo de la segunda por el de la tercera, viésemos que de esta cuarta division no resulta residuo alguno final, en tal caso el residuo de la tercera, que ha servido de divisor en la cuarta, será el máximo divisor de los dos números propuestos. Propongámonos, por ejemplo, hallar el máximo divisor comun de 936 y 1728. Dividiendo en primer lugar el mayor por el menor, con el fin de averiguar si este es divisor exacto de aquel, vemos que 1728 equivale á la suma del 936 y del 792, que es el residuo que resulta de esta primera division. Dividiendo 936 por 792, conocemos que el primero de estos equivale á la suma del segundo y del 144, residuo de esta segunda division. Dividiendo en seguida el residuo de la primera division 792 por el de la segunda 144, echamos de ver que el primero equivale á la suma de cinco veces el segundo y del 72, que es el residuo final de esta tercera division. Dividiendo por último el residuo de la segunda division 144 por el de la tercera 72, venimos en conocimiento de que este es divisor exacto de aquel, y de ahí podemos inferir con entera seguridad que el último divisor 72 es el máximo divisor comun de los dos números propuestos 936 y 1728. Buena prueba de ello es, que los cuocientes de las divisiones de estos dos números por 72 son como en todo igual caso deben ser, dos números *entre sí primos*. Con efecto, si dividimos al 936 por 72 resulta por cuociente exacto el 13; y de la division del 1728 por el mismo 72 resulta por cuociente exacto 24; cuyos cuocientes son, como se ve, números *entre sí primos.*

Si no siendo exacta la cuarta division, dividiéremos el residuo final de la tercera por el de la cuarta, y fuere este divisor exacto de aquel, el mismo residuo final de la cuarta que ha servido de divisor en la quinta, será el máximo divisor comun de los dos números propuestos.

Asimismo, si el residuo final de la cuarta division no fuere divisor exacto del de la tercera, dividiremos aquel por el de la quinta; y siempre que este sea divisor exacto de aquel, será al mismo tiempo el *máximo divisor comun* de los dos números propuestos.

74 Generalmente, siempre que nos propongamos hallar el máximo divisor comun de dos números cualesquiera, *se dividirá el mayor por el menor; y si este fuere divisor exacto de aquel, será al mismo tiempo el máximo divisor comun de los dos; pero si de esta primera division resultase algun residuo final, se dividirá por este residuo el menor de los números propuestos, y si fuere exacta esta segunda division, el residuo de la primera, que en la segunda ha servido de divisor, será el máximo divisor ó medida comun que buscamos; mas si de la segunda division resultase tambien residuo final, se dividirá por este el residuo de la primera; y si fuere exacta esta tercera division, el residuo de la segunda, que ha servido de divisor en la tercera, será el máximo divisor comun de los dos números propuestos; pero si aun en la tercera division resultase residuo final, se dividirá por este el de la segunda; y del mismo modo se continuará dividiendo por el residuo final de la última division que se haya efectuado, el de la precedente, hasta que en alguna de ellas resulte un cuociente exacto: en cuyo caso el residuo que en esta*

última division haya servido de divisor, será el mayor divisor ó medida comun de los dos números propuestos.

En la práctica es conveniente colocar los números que concurran á estas diferentes divisiones sucesivas, en la disposicion que puede verse en los ejemplos siguientes. Propongámonos en primer lugar determinar el máximo divisor comun de los dos números 2736 y 5364.

Divisiones....	5364	2736	2628	108	36
Cuocientes...............		1	1	24	3
Residuos.......	2628	108	36	000	

donde se ven los cuatro cuocientes 1, 1, 24 y 3 separados de los tres residuos 2628, 108 y 36.

Propongámonos en segundo determinar el máximo divisor comun de 1863 y 3752.

Divisiones.	4752	1863	1026	837	189	81	27
Cuocientes..........		2	1	1	4	2	3
Residuos...	1026	837	189	81	27	00	

será pues el residuo final 27 de la quinta division, que ha servido de divisor en la sexta, el máximo divisor comun de los dos números propuestos. Con efecto, dividiendo por 27 al 1863, resulta por cuociente exacto 69; y dividiendo por el mismo 27 al 4752, resulta por cuociente exacto 176. Los cuales cuocientes son, como deben ser, números *primos entre sí*, ó que no tienen factor alguno comun; pues siendo el 69 el producto del número primo 23 multiplicado por 3; y 176 el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 2 por 2 por 2 por 11, ninguno de los factores ó divisores primos ó simples del primero lo es del segundo, ni al contrario.

Propongámonos por último hallar el máximo divisor comun de los dos números 6745 y 3298.

Divisiones.	6745	3298	149	20	9	2	1
Cuocientes..		2	22	7	2	4	2
Residuos...	149	20	9	2	1	0	

Asi venimos en conocimiento de que el mayor divisor comun de 3298 y 6745 es solamente 1; lo cual quiere decir que, propiamente hablando, los dos números propuestos no tienen divisor alguno que les sea comun, pues todos los números, sean los que fueren, son exactamente divisibles por 1.

Fácil es convencerse de que la regla prescrita en el párrafo anterior debe necesariamente conducirnos al mismo resultado, siempre que los números propuestos no tengan algun divisor comun; porque debiendo los residuos de las divisiones ser constantemente menores que los respectivos divisores, van siendo aquellos mas y mas pequeños en cada division; y bien se ve que estas habrán de continuar mientras haya un divisor mayor que la unidad.

No parece fuera de propósito advertir que el máximo divisor comun de dos números cualesquiera es el producto de todos los divisores ó factores simples comunes de los dos números. Por manera que sabiendo que el 48 es el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 2 por 2 por 2 por 3; y que el 72 es el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 2 por 2 por 3 por 3, vemos sin dificultad que el producto 24 del 2 por 2 por 2 por 3, es decir, de los cuatro factores ó divisores exactos simples, que son comunes del 48 y del 72, es el mayor divisor comun de los dos.

De las fracciones ó quebrados.

75 Siempre que la cantidad que miramos como conocida, y de que usamos para medir la magnitud de todas las demas de su especie, es mayor que aquella cuya magnitud nos hayamos propuesto determinar, suponemos dividida en cierto número de partes iguales á la que nos sirve de medida y hemos adoptado por unidad, y averiguamos á cuántas de estas partes iguales equivale la otra que nos hemos propuesto medir. Cuando, por ejemplo, comparamos con la longitud que llamamos *vara*, otra menor que ella; si despues de haber dividido la vara en dos partes iguales, que designamos con los nombres de *medias* varas y *mitades* de vara, hallamos que la cantidad menor es exactamente igual á una de aquellas dos partes iguales, damos á conocer su magnitud diciendo que equivale á *media* vara, ó á la *mitad* de una vara. Y si habiendo dividido una vara en tres partes iguales, que llamamos *tercias* ó terceras partes de vara, fuere la cantidad que nos proponemos medir igual á una ó á dos de aquellas tres partes, diremos que respectivamente equivale á una *tercia* ó á dos *tercias* partes de vara. Del mismo modo, si dividida que fuese la vara en cuatro partes iguales que llamamos *cuartas*, fuere la otra longitud igual á una ó á dos ó á tres de las cuatro partes, diremos entonces que equivale á una cuarta, ó á dos cuartas, ó á tres cuartas partes de vara. Lo mismo debe entenderse cuando el número de partes iguales en que suponemos dividida la

unidad, sea otro cualquiera, sin otra diferencia que la del nombre de ellas; pues cuando son cinco, se llaman *quintas*; cuando seis, *sextas*; cuando siete, *séptimas*; cuando ocho, *octavas* ú *ochavas*; cuando nueve, *novenas*; cuando diez, *décimas*; cuando once, *onzavas*; cuando doce, *dozavas*; y asi sucesivamente, formando los diferentes nombres de las partes en que se considera dividida la unidad, cuando se trata de medir una cantidad menor que ella, con solo agregar al número total de partes en que se la suponga dividida, la terminacion comun *avo* ó *ava*.

A cualquiera número de las partes iguales en que suponemos dividida la unidad, cuando tratamos de expresar la magnitud de cualquiera otra cantidad menor que ella, le damos el nombre de *fraccion* ó de *número quebrado*, para distinguirlo de otro cualquiera número de unidades, al cual llamamos *número entero*.

76 En la expresion de todo quebrado hacemos uso de dos números: del de las partes iguales en que consideramos dividida la unidad, y del número de estas que contiene el quebrado. Y como del nombre de aquel primer número nos servimos para imponer el correspondiente á aquellas partes iguales, le damos el nombre de *denominador* del quebrado; y como del segundo número nos valemos para indicar á cuántas de las mismas partes iguales de la unidad equivale el quebrado, le llamamos *numerador*; y á los dos les damos el nombre comun de *términos* del quebrado. Asi cuando expresamos la magnitud de una cantidad menor que la unidad, diciendo que es igual á *diez y siete veinticuatravas* ó *veinticuatravos*, el *denominador* de esta fraccion ó quebrado es 24, y el *numerador* 17; y los números 17 y 24 son los dos términos del quebrado.

77 Para representar por escrito cualquier quebrado

nos valemos del arbitrio de escribir, por medio de los diez guarismos adoptados para representar por escrito los números enteros, los dos de que nos valemos para expresar el valor de todo quebrado; colocando su *numerador* sobre su *denominador* con una línea horizontal entre los dos. Asi para representar por escrito al quebrado, que llamamos *siete octavas* ú *octavos* de la unidad, escribimos $\frac{7}{8}$; para representar al *diez y nueve veintisietavas* ó *veintisietavos*, $\frac{19}{27}$ y asi de los demas.

78 El uso de los quebrados nos proporciona un medio fácil de expresar el cuociente de toda division, en la cual sea el dividendo menor que el divisor; pues si consideramos á este como dividido en tantas partes iguales como unidades contenga, y al dividendo como compuesto de tantas de estas partes iguales cuantas unidades entren en su formacion; el cuociente deberá ser un quebrado cuyo numerador sea el dividendo, y el denominador el divisor; porque si cuando, por ejemplo, nos proponemos dividir una sola unidad por doce, tenemos que dividirla en doce partes iguales, que llamamos *dozavas*, y el cuociente deberá ser una de estas: cuando el dividendo sea siete unidades y el divisor el mismo doce, el cuociente habrá de ser *siete dozavas* ó *dozavos*; en atencion á que siendo comun á las dos divisiones el mismo divisor, y siendo siete veces mayor ó séptuplo del primer dividendo el segundo, el segundo cuociente deberá ser séptuplo ó siete veces mayor que el primero (§. 58), y lo habremos de representar bajo esta forma $\frac{7}{12}$, colocando al dividendo por numerador, y al divisor por denominador.

Del mismo medio nos valemos para completar el cuociente de toda division, de la cual resulte algun residuo final; debiendo tener presente que si en los ejemplos que nos hemos propuesto para dar á conocer el método de efectuar la division, hemos siempre obtenido un cuociente exacto; ha sido porque con estudio hemos elegido dividendos que contuviesen á sus respectivos divisores un cierto número de veces exactamente y sin que resultase residuo alguno final. Mas esta circunstancia no siempre se verificará en las innumerables ocasiones que en lo sucesivo se nos ofrecerán de hacer uso de la division. Basta para convencerse de esta verdad, haber observado en la tabla pitagórica, que sin embargo de contener todos los productos de cada dos cualesquiera números dígitos, no estan comprendidos entre estos productos todos los números que hay desde el *uno* hasta el *ochenta y uno*; es decir, desde el menor producto hasta el mayor que en ella se halla. Segun esto, pues, lo que generalmente hablando, sabemos hasta ahora hallar con el auxilio de las reglas que hemos prescrito para efectuar la division, no es siempre el cuociente cabal, sino solo el que deba darnos el mayor múltiplo que el dividendo contenga del divisor.

Si, por ejemplo, tuviésemos que dividir por 8 el 239, procediendo con arreglo á lo prescrito (§. 42),

Dividendo.......	239	8....... *Divisor.*
	79	29.... *Cuociente.*
Residuo final...	7	

y como aqui se ve practicado, echaremos de ver que el segundo y último dividendo parcial 79 no es exactamente múltiplo del 8, y que hallándose entre los dos múltiplos mas próximos 72 y 80, debe contener al 8 mas de nueve veces que lo contiene el primero, y menos de diez veces que lo contiene el segundo; por manera que el número de unidades absolutas del cuociente debe ser mayor que 9, y menor que 10; y de consiguiente el cuociente total debe ser mayor que 29 y menor que 30. Escribiendo, pues, 9 en el lugar correspondiente á las unidades absolutas del cuociente; multiplicando en seguida por el divisor 8 aquellas 9 unidades; y restando del último dividendo parcial 79 el producto 72 de la multiplicacion, nos resultará por resíduo final 7, el cual será necesariamente el exceso que el dividendo propuesto 239 lleva al producto 232 de los factores 8 y 29. Con efecto, reflexionando sobre todo el progreso de la operacion, es fácil ver que asi las decenas como las unidades absolutas del cuociente hallado 29 se han multiplicado por el divisor; que los productos parciales se han restado de los correspondientes dividendos parciales; y de consiguiente el resíduo final debe ser, como es, el mismo que si de una vez se hubiese restado del dividendo propuesto 239 el producto 232 de 29 multiplicado por 8. El resíduo final 7, que como se ve, es menor que el divisor, nos está manifestando que el 29 no es el cuociente cabal de la division del 239 por 8, sino solo el que hubiéramos obtenido dividiendo por el mismo 8 al mayor multiplo que de este número está contenido en 239, el cual es 232. En este caso, y siempre que en cualquiera division resulte algun resíduo final, será necesario, segun hemos ya dicho (§. 54), agregar este resíduo al producto del divisor multiplicado por el cuociente, para que de nuevo resulte el dividendo.

Si, pues, quisiéramos dividir efectivamente en 8 porciones iguales una cantidad compuesta de 239 unidades, no lo podríamos conseguir enteramente sin hacer entrar en cada una de las porciones cierto número de partes iguales de la unidad á que se refiera el dividendo. Con efecto, como despues de haber restado de las 239 unidades las 8 veces 29, queden todavía 7 que dividir en las 8 porciones iguales, tendremos que dividir en ocho partes iguales cada una de las siete unidades; y tomando de cada unidad dividida una octava parte, habremos de agregar las *siete octavas* partes de la unidad á las 29 unidades enteras que ya habia en el cuociente, para completarlo: con lo cual el cuociente cabal de la division de 239 por 8 vendrá á ser 29 unidades enteras y $\frac{7}{8}$ de otra unidad.

79 Es, pues, visto que en todos los casos en que resulte algun resíduo al fin de la division, el cuociente completo constará de un número de unidades enteras y de un quebrado cuyo denominador sea el divisor, que nos indicará en cuántas partes se ha de dividir ó se ha de considerar dividida la unidad; y cuyo numerador sea el mismo resíduo, el cual nos dirá á cuántas de estas partes equivale el quebrado.

En general, desde el momento en que nos hemos propuesto comparar con la unidad cantidades menores que ella, nos ha sido forzoso suponerla dividida en cierto número de partes iguales de tal tamaño, que una de ellas esté exactamente contenida en la cantidad que intentemos medir, y que pueda servirnos de medida de ella. De modo que para formarnos una idea de la magnitud que tratemos de determinar, debemos tener presente cuántas veces está contenida en la unidad entera la parte que nos sirve de medida, y cuántas veces está contenida esta misma parte en la cantidad que nos hayamos propuesto medir.

80 De la idea que hemos dado del numerador y denominador de cualquiera fraccion ó quebrado, se deduce fácilmente que *si se aumenta el numerador, permaneciendo el mismo denominador, se aumenta el valor*

del quebrado; porque indicándonos el denomidador en cuántas partes iguales se debe dividir ó se considera dividida la unidad, de su magnitud depende la de cada una de las partes, la cual no puede variar mientras no varíe el denominador; é indicándonos el numerador cuántas de aquellas partes contiene el quebrado, es bien claro que un numerador mayor representará un quebrado y una cantidad mayor. En vista de lo cual la fraccion representada por $\frac{8}{9}$ es mayor que $\frac{5}{9}$; $\frac{18}{23}$ es mayor que $\frac{12}{23}$.

Del mismo modo se demuestra que *si conservando el mismo denominador que un quebrado tenga, se multiplica por dos ó tres ó por cualquier otro número entero el numerador, resulta multiplicado por el mismo número el quebrado*; porque conservándose la misma magnitud de las partes de la unidad, doble número de ellas viene á ser una cantidad doble; triple número de ellas, una cantidad triple; y asi de los demas. Por esta razon el quebrado $\frac{8}{23}$ es doble de $\frac{4}{23}$, ó el producto del $\frac{4}{23}$, multiplicado por 2; $\frac{12}{23}$ es triple de $\frac{4}{23}$, ó el producto de la multiplicacion del $\frac{4}{23}$ por 3; $\frac{16}{23}$ es cuádruplo de $\frac{4}{23}$, ó el producto de la multiplicacion de este por 4; $\frac{20}{23}$ es quíntuplo de $\frac{4}{23}$, ó el producto de la multiplicacion del quebrado $\frac{4}{23}$ por 5.

Tambien se infiere que *si conservando el mismo denominador se diminuyese el numerador, se disminuirá el quebrado*; *y que cuantas veces menor sea el nuevo numerador, otras tantas veces menor será el segundo quebrado*; porque conservándose la misma magnitud de las partes iguales de la unidad, un número menor de ellas debe representar una cantidad menor; y un número de estas partes, que sea mitad ó tercera ó cuarta parte de otro número de las mismas, habrá de representar una cantidad que sea respectivamente mitad, tercera ó cuarta parte de la que el otro representa. Asi es que el quebrado $\frac{7}{25}$ es la mitad de $\frac{14}{25}$, ó el cuociente de la division de $\frac{14}{25}$, por 2; $\frac{8}{29}$ es tercera parte de $\frac{24}{29}$, ó el cuociente de la division de $\frac{24}{29}$ por 3.

81 Se infiere asimismo que *si conservándose el mismo numerador que un quebrado tenga, se aumenta su denominador, se disminuye el valor del quebrado*; porque siempre que aumenta el denominador, se considera dividida la unidad en mayor número de partes iguales que antes, y de consiguiente cada una de estas nuevas partes debe forzosamente ser menor que cada una de las anteriores; y como por no haber variado el numerador, contiene uno de los dos quebrados tantas partes de las unas, como el otro de las otras, el que tenga mayor denominador y cuyas partes son por consiguiente menores, habrá de ser menor que el otro cuyas partes son mayores por tener, como se supone, menor denominador. Por esta razon el quebrado $\frac{7}{12}$ es menor que $\frac{7}{8}$; $\frac{23}{48}$ es menor que $\frac{23}{36}$.

Si se multiplica por cualquier número entero el denominador de cualquiera quebrado, dejando intacto su numerador, resulta el cuociente de la division del quebrado por el mismo número entero, por el cual se haya multiplicado su denominador. Con efecto, un denominador doble indica que la unidad se considera dividida en doble número de partes; este no puede ser doble, sin que cada una de las nuevas partes sea mitad de cada una de las anteriores; y como dejando en la segunda fraccion el mismo numerador que en la primera, se da á entender que se han de tomar tantas partes de las unas como de las otras, es fácil ver que el conjunto de las que contiene la segunda fraccion, representa una cantidad mitad de la que representa la primera, ó el cuociente de la division de la primera fraccion por *dos*. Asimismo el denominador de un quebrado no puede ser triple del que era, sin que cada una de las nuevas partes iguales de la unidad sea tercia parte de cada una de las anteriores; y de consiguiente igual número de las segundas que de las primeras representa una cantidad tercia parte de la que representaba el de estas. El mismo razonamiento puede hacerse en todos los demas casos semejantes. Por donde vendremos en conocimiento de que el quebrado $\frac{3}{8}$ es la mitad de $\frac{3}{4}$, ó el cuociente de la division de $\frac{3}{4}$ por 2; $\frac{4}{15}$ es la tercia parte de $\frac{4}{5}$, ó el cuociente de la division de $\frac{4}{5}$ por 3.

Si conservando el mismo numerador, que un quebrado tenga, se disminuye su denominador, aumenta el valor del quebrado; y dividiendo por cualquier número entero el denominador, resulta el producto de la multiplicacion del quebrado por el número que haya servido de divisor del denominador; porque un denominador menor que el anterior, nos indica que la unidad se ha de dividir en menor número de partes iguales; siendo menor este número, cada una de las nuevas partes ha de ser forzosamente mayor que cada una de las anteriores; y de consiguiente cualquier número de las nuevas partes deberá necesariamente representar una cantidad mayor que igual número de las primeras. Cuando el nuevo denominador es mitad del anterior, ó se ha dividido este por 2, cada una de las nuevas partes habrá de ser doble de cada una de las anteriores, y de consiguiente el nuevo quebrado deberá ser doble del anterior, ó el producto de la multiplicacion de este por dos: cuando el segundo denominador sea tercia parte del primero, ó se haya dividido este por tres, cada una de las nuevas partes iguales de la unidad debe ser triple de cada una de las primeras, y de consiguiente el segundo quebrado será triple del primero, ó el producto de la multiplicacion de este por tres; y asi de los demas. De aqui es que $\frac{3}{4}$ es doble de $\frac{3}{8}$, ó el producto de la multiplicacion de $\frac{3}{8}$ por dos; $\frac{4}{5}$ es cuádruplo de $\frac{4}{20}$, ó el producto de la multiplicacion de $\frac{4}{20}$ por 4.

De estos mismos principios se deduce que *la mera supresion del denominador de cualquier quebrado equivale á multiplicar el quebrado por su mismo denominador*; porque la supresion de este hace que el numerador represente tantas unidades enteras como partes de una unidad representaba antes. Ahora bien, la unidad es tantas veces mayor que cada una de sus partes iguales, cuantas indica el denominador de estas, y de consiguiente cualquiera número de unidades enteras es tantas veces mayor que igual número de partes iguales de una unidad, cuantas indica su denominacion. Asi es que 3 es cuatro veces mayor que $\frac{3}{4}$, y por tanto si de la fraccion $\frac{3}{4}$ suprimimos el denominador, dejando solo el numerador, equivale esto á haberla multiplicado por 4; si suprimiendo de la fraccion $\frac{7}{8}$ el denominador, dejamos solo el numerador 7, la habremos multiplicado por 8, porque siendo cada unidad ocho veces mayor que cada una de sus octavas partes, 7 unidades han de componer necesariamente una cantidad ocho veces mayor que 7 octavas partes de una unidad.

82 Resumiendo cuanto hemos demostrado en los dos párrafos anteriores, podemos establecer generalmente que *mientras permanezca intacto uno de los términos de cualquier quebrado,*

si se multiplica *si se divide.....*	*el numerador*	*se multiplica* *se divide......*	*el quebrado;*
si se multiplica *si se divide.....*	*el denominador*	*se divide......* *se multiplica*	*el quebrado.*

83 Se ve, pues, que la multiplicacion de solo el denominador produce en el quebrado el efecto de la division; asi como la division de solo el denominador produce en el quebrado el efecto de la multiplicacion. En suma, cualquiera de estas dos operaciones ejecutada en solo el denominador, produce en el quebrado el efecto de la operacion contraria; en vez que si se las ejecuta en solo el numerador, producen el mismo que en este, en el quebrado. De lo cual es muy fácil inferir que *si se multiplican ó se dividen á un mismo tiempo y por un mismo número los dos términos de cualquier quebrado, el valor de este no padecerá por eso la menor alteracion*; porque si la multiplicacion del numerador hace al quebrado un cierto número de veces mayor de lo que era, la multiplicacion del denominador lo hace menor el mismo número de veces; y si la primera multiplicacion produce el efecto de multiplicar el quebrado, la segunda produce el efecto de dividirlo por el mismo número. Si la division del numerador hace al quebrado un cierto número de veces menor de lo que era, la division del denominador lo hace mayor el mismo número de veces; y si la primera division produce el efecto de dividir el quebrado por un cierto número, la segunda produce el efecto de multiplicarlo por el mismo número. En una palabra, asi en uno como en otro caso, con la segunda operacion se deshace lo que en el quebrado habia hecho la primera, y de consiguiente no padece alteracion alguna su valor. Por esta

razon el quebrado $\frac{2}{5}$ es igual al $\frac{6}{15}$; $\frac{20}{84}$ es igual á $\frac{5}{21}$.

Multiplicar, pues, *ó dividir por un mismo número los dos términos de cualquier quebrado, no ès multiplicar ni dividir el quebrado, sino solo mudar su expresion.*

84. Esto hace ver que, sin embargo de que mientras una cantidad representada por un número entero, se refiera á una misma unidad, no admite mas de una sola expresion; cualquiera cantidad representada por una fraccion, es susceptible de una infinidad de distintas expresiones; sin dejar por eso de estar comparada con la misma unidad. Por ejemplo, todos los quebrados siguientes

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \text{\&c.}$$

cuyo denominador es doble de su respectivo numerador, y cuyo numerador es por consiguiente mitad de su respectivo denominador, no son mas que distintas expresiones de la mitad de la unidad. Los quebrados

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \text{\&c.}$$

cuyo denominador es triple de su respectivo numerador, ó cuyo numerador es la tercia parte de su respectivo denominador, no son otra cosa que distintas expresiones de una tercia parte de la unidad; y asi de los demas.

Entre todas estas distintas expresiones ó diferentes formas de un mismo quebrado, es muy notable la primera, por cuanto es la mas sencilla de todas; y es muy conveniente saber hallarla cuando se conoce cualquiera de las otras. Lo cual se consigue dividiendo por un mismo número los dos términos de la fraccion propuesta; cuya operacion no altera, segun hemos demostrado, su valor. Con efecto, si dividimos por 7 los dos términos de la fraccion $\frac{7}{14}$, la trasformaremos en la $\frac{1}{2}$, que es la expresion mas sencilla de la misma cantidad; y ejecutando la misma operacion en los dos términos de la fraccion $\frac{7}{21}$, quedará trasformada en $\frac{1}{3}$, que es la expresion mas sencilla del mismo valor.

85 Lo que acabamos de ejecutar en las fracciones $\frac{7}{14}$ y $\frac{7}{21}$ es lo que se llama *reducir un quebrado á sus mínimos términos* ó á su *mas sencilla expresion.* Tan solo aquellos quebrados cuyos términos sean ambos exactamente divisibles por un mismo número, y de consiguiente sean compuestos entre sí, son, como bien se deja conocer, susceptibles de esta transformacion; cualquiera otro será la expresion mas sencilla de cuantas pueden representar la misma cantidad, y de consiguiente será *irreducible.* Asi las fracciones $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{15}{16}$, cuyos términos no son exactamente divisibles por un mismo número, ó no tienen divisor alguno comun, ó como se dice, son dos números primos entre sí, son *irreducibles;* y por tanto no es posible expresar de un modo mas sencillo las cantidades representadas por ellas.

Cuando tratemos, pues, de simplificar la expresion de algun quebrado, deberemos examinar si sus términos son ambos exactamente divisibles por 2, ó por 3, ó por 4, ó por 5 &c., y ejecutar en ambos cuantas divisiones de estas podamos. Pero es necesario tener entendido que valiéndonos solo de este medio, no siempre lograremos hallar la mas sencilla expresion del quebrado propuesto, y aun á veces tendremos por irreducible un quebrado que no lo sea. Por lo cual será en muchas ocasiones necesario buscar, con arreglo al método prescrito (§. 74, el *máximo divisor* comun de los dos términos del quebrado; y hallado que sea, los dividiremos por él, y los cuocientes de estas dos divisiones serán los nuevos términos del quebrado reducido á su mas simple expresion. Propongámonos, por ejemplo, reducir á sus mínimos términos el quebrado $\frac{2805}{3366}$. Buscaremos en primer lugar el máximo divisor comun de 2805 y 3366, el cual es 561; en seguida dividiremos por este aquellos otros dos números; y siendo los cuocientes 5 y 6, deberá ser $\frac{5}{6}$ la expresion mas sencilla de la cantidad representada por el quebrado propuesto.

Para hacer ver que haciendo uso de los indicios establecidos (§§. 63 y sig.) para conocer que un número es exactamente divisible por el 2, por el 3, por el 4, por el 5, y por algunos otros, habríamos adelantado muy poco en la indagacion de los divisores comunes de los dos números 2805 y 3366, convendrá tener presente que segun los preceptos alli prescritos, es divisor exacto del 2805 el *tres*, porque la suma de las unidades de los números dígitos representados por las cifras con que está escrito, es 15, número exactamente divisible por 3. Tambien debe serlo por *cinco* en vista de que la primera cifra de la derecha es 5. Asimismo lo será por once, pues que la suma de las unidades de los números dígitos representados por la primera y tercera cifras, comenzando á contar por la derecha, lleva *once* de exceso á la suma precedente de las otras dos. Por lo que respecta al número 3366, echaremos de ver que es exactamente divisible por dos, por ser *par* el número de unidades absolutas. Tambien lo es por *tres* y por *nueve* ya que lo es la suma 18 de las unidades de los números dígitos representados por las cifras con que está escrito el número propuesto. Asimismo será exactamente divisible por *once*, en atencion á que la suma de las unidades representadas por las cifras primera y tercera es enteramente igual á la de las otras dos.

Son, pues, el 3 y el 11 los únicos divisores simples comunes que por este medio conocemos de los números propuestos; de modo que dividiéndolos por 3 se transformará el quebrado $\frac{2805}{3366}$ en el $\frac{935}{1122}$; y si ahora dividimos por 11 los dos términos de este nuevo quebrado, resultará reducido al $\frac{85}{102}$, el cual no es aun la expresion mas sencilla del quebrado propuesto, porque sus dos términos son ambos exactamente divisibles por 17, y efectuando esta division, quedará reducido, como antes, á $\frac{5}{6}$ que es la expresion mas sencilla que puede darse del mismo quebrado, como lo hace ver la circunstancia de ser números entre sí primos los dos términos 5 y 6.

86 Con arreglo á lo que hemos establecido (§. 80) se puede multiplicar una fraccion por un número entero de dos modos, á saber: ó *multiplicando su numerador por el entero sin tocar á su denominador; ó dividiendo el denominador por el entero*, como convendrá ejecutarlo, siempre que sea exacta la division, *sin llegar al numerador;* y que se la puede asimismo dividir de otros dos modos por un número entero, á saber, ó *dividiendo por el entero al numerador*, sin tocar al *denominador*, como será conveniente hacerlo siempre que sea exacta esta division, ó *multiplicando el denominador por el entero, sin llegar al numerador*. De que se sigue que con solo el auxilio de la multiplicacion, segun se efectúe con el numerador ó el donominador, se pueden ejecutar respectivamente la multiplicacion y la division de los quebrados por los numeros enteros; y con sola la division, segun se efectúe con el númerador ó con el denominador, se pueden ejecutar respectivamente la division y la multiplicacion de cualquier quebrado por un número entero. Asi $\frac{7}{32}$ multiplicados por 4 producen $\frac{28}{32}$ ó $\frac{7}{8}$, $\frac{12}{17}$ divididos por 3, dan por cuociente $\frac{4}{17}$ ó $\frac{12}{51}$; $\frac{4}{9}$ multiplicados por 2 producen $\frac{8}{9}$; $\frac{5}{7}$ divididos por 6, dan por cuociente $\frac{5}{42}$.

87 La nocion que hemos dado (§. 75) de las fracciones, nos pone en estado de generalizar la idea que dimos (§. 26) de la multiplicacion. Como alli suponíamos que el multiplicador era un número entero, hemos dicho que indicaba cuántas veces se debia repartir el multiplicando; pero cuando sea fraccionario el multiplicador, la palabra *multiplicar* no querrá siempre decir, como en los enteros, aumentar: y si queremos comprender bajo una sola expresion todos los casos, será forzoso decir que *multiplicar un número por otro es hallar un tercer número que tenga con el primero la misma relacion que el segundo tiene con la unidad.* Con efecto, cuando multiplicamos un número cualquiera por *dos*, ó por *tres*, ó por *cuatro* &c., el producto es dos ó tres ó cuatro &c. veces el multiplicando, asi como el multiplicador es dos, ó tres, ó cuatro veces la unidad; y cuando multiplicamos cualquier número por $\frac{1}{3}$ ó por $\frac{2}{3}$ el producto habrá de ser respectivamente una ó dos tercias partes del multiplicando, asi como el multiplicador es una ó dos tercias partes de la unidad.[1]

Asimismo multiplicar por $\frac{4}{5}$ á cualquier número es tomar de este una porcion que sea cuatro quintas partes, ó cuatro veces una quinta parte del mismo multiplicando; y en general, *multiplicar un número cualquiera por un quebrado no viene á ser otra cosa que tomar del multipli-*

1 Si sabiendo que una vara de lienzo cuesta 12 reales, se nos pregunta cuánto costarán siete varas, habremos de multiplicar por 7 los 12 reales, precio de cada vara, para hallar el valor de las siete, que será 84 reales; y si se nos pregunta cuánto costarán $\frac{2}{3}$ de vara, tomaremos de los 12 reales dos terceras partes, y asi vendremos en conocimiento de que el valor de las dos tercias de vara es 8 reales. Si cuando ejecutamos esta segunda operacion, decimos que *multiplicamos á 12 por $\frac{2}{3}$*, es solo porque la segunda cuestion es enteramente semejante á la primera, á la cual se contesta por medio de la multiplicacion.

cando la parte ó partes que indique el quebrado multiplicador. Segun esto la sola operacion de multiplicar por un quebrado se compone de dos operaciones, á saber: de una division y una multiplicacion, en las cuales el divisor y el multiplicador son números enteros. Con efecto, para multiplicar á cualquier número por $\frac{4}{5}$, ó tomar de él cuatro quintas partes, lo dividiremos por *cinco* para que en el cuociente nos resulte una quinta parte del mismo número, y en seguida multiplicaremos por *cuatro* esta quinta, con lo cual obtendremos las cuatro quintas: y en general, *para multiplicar á cualquier número por un quebrado, habremos de dividir al multiplicando por el denominador del quebrado multiplicador, y multiplicar despues el cuociente por el numerador del mismo quebrado;* ó lo que equivale á lo mismo, *debemos multiplicar primeramente al número propuesto por el numerador del quebrado multiplicador, y dividir en seguida el producto por el denominador del mismo quebrado.* El órden con que se ejecuten estas dos operaciones es indiferente para el resultado final de ellas (§. 62); pues asi como una sola octava parte de siete unidades equivale (§. 75) á siete octavas partes de una unidad, cuatro quintas partes, por ejemplo, de un número cualquiera equivaldrán á una sola quinta parte de otro número cuádruplo de aquel; dos terceras partes de cualquiera cantidad equivalen á una sola tercera parte de otra cantidad doble de la primera; y asi de los demas.

Cuando sea menor que la unidad el multiplicador, el producto habrá de ser menor que el multiplicando, asi como debe ser igual ó mayor que este el producto, segun sea respectivamente igual ó mayor que la unidad el multiplicador.

88 Si, por ejemplo, el multiplicando fuere un nú-

mero entero exactamente divisible por *cinco*, serán tambien un número entero las $\frac{4}{5}$ partes del multiplicando, ó lo que es lo mismo, el producto de la multiplicacion de tal número por $\frac{4}{5}$. Asi se ve en 35, cuya quinta parte es 7; y multiplicando por 4 esta quinta parte, serán 28 unidades las cuatro quintas partes del 35, ó el producto del 35 multiplicado por $\frac{4}{5}$. Pero aun cuando sea número entero el multiplicando, si al mismo tiempo no es exactamente divisible por *cinco*, no podrá ser un número entero el producto de su multiplicacion por $\frac{4}{5}$, ni el de su multiplicacion por cualquiera otro quebrado cuyo denominador sea *cinco*. Si, por ejemplo, fuere 32 el número propuesto, su quinta parte será $6\frac{2}{5}$; y multiplicando por *cuatro* este cuociente, resultarán $24\frac{8}{5}$ por las cuatro quintas partes del 32. Reflexiones semejantes á las que acabamos de hacer, suponiendo que fuese multiplicador el quebrado $\frac{4}{5}$, se pueden generalmente hacer en cualquiera otra caso, sea cual fuere el quebrado multiplicador.

El resultado $24\frac{8}{5}$ que hemos hallado para las cuatro quintas partes del 32, nos presenta una fraccion cuyo numerador es mayor que el denominador. No es dificil descifrar qué signifique aquella fraccion; pues en ella vemos representadas ocho partes, cinco de las cuales equivalen á una unidad; y de consiguiente el quebrado $\frac{8}{5}$ equivale á una unidad y tres quintas partes mas de otra, ó á $1\frac{3}{5}$ Agregando, pues, esta cantidad á las 24 unidades, vendrán á ser $25\frac{3}{5}$ las cuatro quintas partes del 32, ó el producto del 32 multiplicado por $\frac{4}{5}$.

A toda expresion fraccionaria cuyo numerador sea mayor que su respectivo denominador, se la da el nombre de *quebrado impropio*, asi como á todas aquellas cuyo numerador es igual á su denominador, como $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{15}{15}$ &c.

las cuales son equivalentes todas á una unidad.

89 Hemos visto que la expresion $\frac{8}{5}$ equivale á una unidad entera y tres quintas partes mas de otra unidad; y no es dificil ver que el mismo razonamiento que nos ha conducido á esta conclusion, nos demuestra igualmente que todo quebrado impropio contiene una ó mas unidades enteras, porque indicando el denominador de cualquier quebrado á cuántas partes iguales equivale una unidad, el quebrado que tenga el numerador mayor que su denominador representará tantas unidades enteras como veces contenga el numerador al denominador. De consiguiente para extraer de cualquier quebrado impropio las unidades enteras que contenga, *se debe dividir el numerador por el denominador, y el número entero que resulte por cuociente, será el de unidades enteras contenidas en la fraccion propuesta; y si en la division resultase algun residuo final, habrá este de ser numerador de un quebrado que debe acompañar al entero, y que tendrá el mismo denominador que la fraccion propuesta tenia.*

Con efecto, la expresion $\frac{307}{53}$ por ejemplo, representa 307 partes iguales, 53 de las cuales equivalen á una unidad; contiene, pues, la cantidad representada por aquella expresion fraccionaria tantas unidades enteras como veces contiene 307 al 53. Efectuando la division del uno por el otro para averiguar este número de veces, resultan 5 por cuociente, y 42 por residuo final. El 5 nos indica que son *cinco* las unidades enteras que la fraccion propuesta contiene; y los 42 son otros tantos *cincuentaitresavos*, ó *cincuentaitresavas* partes de la unidad; de modo que en lugar de la expresion $\frac{307}{53}$ podemos sustituir la equivalente $5\frac{42}{53}$.

90 Si con arreglo á lo prescrito (§. 80) multipli-

cásemos la fraccion $\frac{4}{5}$ por el número entero 35, nos resultaria por producto el quebrado impropio $\frac{140}{5}$. Dividiendo, pues, por *cinco* el numerador 140, veríamos que aquel quebrado impropio equivale á 28 unidades enteras, es decir, al mismo producto que (§. 88) nos resultó de la multiplicacion del 35 por $\frac{4}{5}$. Si multiplicamos el mismo quebrado $\frac{4}{5}$ por 32, el producto será $\frac{128}{5}$; y esta expresion, dividiendo el numerador por el denominador, se transformará en 25 $\frac{3}{5}$, que es el mismo producto que (§. 88) hemos hallado multiplicando el entero 32 por el quebrado $\frac{4}{5}$. Esta identidad de resultados procede, como es fácil ver, de que asi en aquella multiplicacion como en estotra, se ejecutan las mismas operaciones con las mismas cantidades; y á consecuencia se puede establecer por principio general que *el mismo producto debe resultar multiplicando un número entero por un quebrado, que el quebrado por el entero.*

Toda expresion, en la cual, como en 5 $\frac{42}{53}$ y en 25 $\frac{3}{5}$, se nos presenta un número de unidades enteras, acompañado de una fraccion ó quebrado, se llama *número mixto* de entero y quebrado.

91 En muchas ocasiones suele ser conveniente y en algunas necesario sustituir en lugar de un número mixto la expresion fraccionaria primitiva de donde ha dimanado; y esto se llama *reducir á quebrado impropio un entero y quebrado*, *ó un número mixto*. Para conseguirlo, *se multiplicará el número entero por el denominador del quebrado que lo acompañe*; *al producto de esta multiplicacion se le agregará el numerador del mismo quebrado; y á esta suma se la pondrá por denominador el mismo que el quebrado tenia.* Con efecto, para ejecutar la indicada reduccion en el número mixto 5 $\frac{42}{53}$ deberemos en

primer lugar reducir las *cinco* unidades enteras al número de *cincuentaitresavos* ó *cincuentaitresavas* partes á que equivalen; y pues que cada unidad se supone dividida en *cincuenta y tres* partes iguales, las *cinco* unidades equivaldrán á *cinco* veces cincuenta y tres. Multiplicaremos, pues, el 53 por 5, y el producto 265 será el número de *cincuentaitresavos* á que equivalen las cinco unidades enteras; agregando en seguida á aquellos 265 los 42 que el quebrado contiene, resultarán 307 *cincuentaitresavos* ó $\frac{307}{53}$ por la expresion fraccionaria equivalente al número mixto propuesto $5\frac{42}{53}$.

La primera parte de esta operacion ha sido, como se ha visto, reducir las *cinco* unidades enteras á la expresion fraccionaria $\frac{265}{53}$ á que equivalen, es decir, á un quebrado impropio cuyo denominador es 53. Puede, pues, qualquier número entero transformarse en un quebrado impropio cuyo denominador esté dado; y como muchas veces convenga ejecutar esta transformacion, será bueno establecer generalmente que *para reducir cualquier número entero á quebrado impropio de una denominacion dada, se habrá de multiplicar por el denominador dado el propuesto número entero, para que el producto nos sirva de numerador*. Asi para reducir 7 unidades enteras á octavos de unidad, ó á un quebrado impropio cuyo denominador sea 8, multiplicaremos al 7 por el 8, y el producto 56 deberá ser el numerador de la expresion fraccionaria que se busca; con lo cual el número entero 7 quedará transformado en el quebrado impropio $\frac{56}{8}$. No debe confundirse esta transformacion con la que se llama *poner un número entero en forma de quebrado*, la cual no es mas que poner al número entero la unidad por denominador: de modo que 7 puesto en forma de quebrado, es $\frac{7}{1}$.

92 Pasando ya á tratar de la multiplicacion de un quebrado por otro, supongámonos, por ejemplo, que hayamos de multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$. Conforme á lo expuesto (§. 87) se reduce esta operacion á tomar cuatro quintas partes, ó lo que es lo mismo, cuatro veces una quinta parte del multiplicando; para lo cual multiplicaremos por 5 (§. 81) el denominador 3 del quebrado multiplicando, y en seguida multiplicaremos el resultado $\frac{2}{15}$ por 4; lo cual nos dará $\frac{8}{15}$ por producto de la multiplicacion de $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$.

Y como pueda aplicarse á cualquier otro ejemplo el razonamiento que acabamos de hacer, tenemos derecho para concluir generalmente que *para multiplicar un quebrado por otro, se deben multiplicar uno por otro los dos numeradores y los dos denominadores*, para obtener en los dos productos el numerador y el denominador del producto que nos proponíamos determinar.

Si en lugar de habernos propuesto multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, nos hubiésemos propuesto multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, el resultado de esta operacion seria dos terceras partes del quebrado $\frac{4}{5}$. Ahora bien, multiplicando por 3 el denominador 5 de este quebrado, resultará $\frac{4}{15}$ por una tercera parte del mismo; y multiplicando por 2 el numerador de esta tercera parte, tendremos á $\frac{8}{15}$ por las dos terceras partes de $\frac{4}{5}$, ó por el producto de la multiplicacion de $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$; el cual es, como se ve, el mismo que el de la multiplicacion de $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$. Y no siendo peculiar á los dos quebrados propuestos esta propiedad, podremos generalmente decir que *el producto de dos quebrados cualesquiera no padece variacion alguna, por invertirse el órden con que se multipliquen los factores*. Asi que, lo mismo viene á ser tomar cuatro quintas partes de $\frac{2}{3}$, que tomar dos terceras partes de $\frac{4}{5}$.

93 Pudiendo ocurrir que tengamos que multiplicar un número mixto por un entero, ó por un quebrado, ó por otro número mixto, convendrá saber que el medio mas sencillo de obtener el producto, es reducir á quebrados los números mixtos (§. 91), y despues efectuar la multiplicacion del quebrado que resulte, por el entero, ó de los quebrados entre sí. Si, por ejemplo, nos proponemos multiplicar $6\frac{5}{7}$ por 8, reduciremos el número mixto al quebrado impropio $\frac{47}{7}$, y multiplicando este quebrado por 8 resultará el producto $\frac{376}{7}$, equivalente (§. 89) á $53\frac{5}{7}$. Si hubiésemos de multiplicar $4\frac{2}{3}$ por $\frac{7}{8}$, reduciremos el número mixto al quebrado impropio $\frac{14}{3}$; y multiplicando este quebrado por $\frac{7}{8}$, tendremos por producto á $\frac{98}{24}$, equivalentes (§. 89) á $4\frac{2}{24}$. Por último, para determinar el producto de $9\frac{3}{4}$ multiplicados por $5\frac{8}{9}$, reduciremos los dos números mixtos á los dos respectivos quebrados impropios $\frac{39}{4}$, $\frac{53}{9}$; y multiplicando uno por otro (§. 92), obtendremos por producto al quebrado impropio $\frac{2067}{36}$, equivalente (§. 89) á $57\frac{15}{36}$.

94 Si en vez de dos fracciones tuviéramos que multiplicar sucesivamente tres, unas por otras, como por ejemplo, $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{6}$ por $\frac{7}{9}$, obtendríamos el producto final de todas ellas, multiplicando primeramente $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{6}$ con arreglo á lo prescrito (§. 92); y multiplicando en seguida este producto por $\frac{7}{9}$; con lo cual resultará $\frac{105}{216}$ ó $\frac{35}{72}$ por el producto final buscado. Y como el mismo método nos pueda conducir al resultado final, sea cual fuere el número de las fracciones propuestas, para que se las multiplique unas por otras, podemos establecer por regla general que *para multiplicar sucesivamente unas por*

otras cuantas fracciones se quiera, el numerador del producto debe ser el producto de todos los numeradores; y el denominador del producto debe ser el producto de todos los denominadores, sin perjuicio de reducir á sus mínimos términos el quebrado que resulte, cuando los dos términos primitivos tengan algun divisor exacto comun.

Conviene observar que multiplicar $\frac{3}{4}$ primeramente por $\frac{5}{6}$, y despues el producto por $\frac{7}{9}$, es lo mismo que tomar tres cuartas partes de cinco sextas de siete novenas, ó cinco sextas partes de tres cuartas de siete novenas, ó siete novenas partes de cinco sextas de tres cuartas &c. y que á cualquiera de estas expresiones y de todas las semejantes se la llama *quebrado de quebrado*. Se ve pues, que *el quebrado de quebrado es una fraccion referida á otra que se mira como unidad.* De modo que $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ vienen á ser dos terceras partes de cuatro quintas de la unidad primitiva, en cuya expresion hace $\frac{4}{5}$ con respecto á $\frac{2}{3}$ las veces de unidad; y cuando por medio de la multiplicacion se transforma la expresion $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ en su equivalente $\frac{8}{15}$, quiere esto decir, que las dos tercias partes de la cantidad representada por $\frac{4}{5}$ de la unidad, equivalen á ocho *quinzavas* partes de la misma unidad. Si despues tomamos del resultado $\frac{8}{15}$ las siete *novenas* partes, multiplicando el quebrado $\frac{8}{15}$ por $\frac{7}{9}$, el resultado $\frac{56}{135}$ nos manifestará que las siete *novenas* partes de dos *tercias* de cuatro *quintas* de la unidad equivale á cincuenta y seis *cientotreintaicincavas* partes de la misma unidad, ó solo al quebrado $\frac{56}{135}$, expresion mucho mas sencilla, y referida inmediatamente á la unidad misma.

95 Asi como en la multiplicacion, cuando el multiplicador es un quebrado, no se puede con propiedad

decir que expresa cuántas veces se ha de repetir el multiplicando; en la division asimismo, cuando el dividendo es menor que el divisor, no se puede con verdad decir que aquel contiene á este; se hace sin embargo uso de este modo de hablar, bien que solo por analogía y por extension.

Para generalizar la idea de la division, es necesario mirar al dividendo como un número que debe tener con el cuociente la misma relacion que el divisor con la unidad. Siendo el divisor y el cuociente los dos factores del dividendo (§. 40), la consideracion que acabamos de hacer, debe tener lugar en todos los casos en que hagamos uso de la division: porque si el divisor fuere, por ejemplo, *cinco*, el dividendo habrá de ser *quíntuplo* del cuociente, y este por consiguiente una quinta parte de aquel; pero si el divisor fuere $\frac{1}{2}$, el dividendo deberá equivaler á una mitad del cuociente, ó lo que es lo mismo, el cuociente deberá ser doble del dividendo.

Estas ideas nos ponen en estado de poder ejecutar una division en la cual sea un quebrado el divisor. Si esto es, por ejemplo, $\frac{4}{5}$, el dividendo, sea cual fuere, deberá equivaler á cuatro quintas partes del cuociente, y teniendo cuatro cuartas partes toda cantidad, cada cuarta parte del dividendo equivaldrá á una quinta parte del cuociente; ó lo que es lo mismo, si dividimos por cuatro el dividendo, ó tomamos de este una cuarta parte, tendremos en ella una quinta parte del cuociente; y repitiendo hasta cinco veces, ó multiplicando por 5 esta quinta parte, debe resultarnos el cuociente íntegro.

Fácil es ver que cuanto hemos practicado para determinar el cuociente que buscábamos, está reducido á haber dividido por 4 el dividendo, y haber multiplicado por cinco el cuociente de esta division: lo cual equivale á haber multiplicado al dividendo propuesto por el quebrado $\frac{5}{4}$, que no se diferencia del divisor $\frac{4}{5}$ sino en que los términos de este estan invertidos en aquel.

Como el razonamiento que nos ha dirigido en este caso, sea fácilmente aplicado á cualquiera caso semejante, podemos con suficiente fundamento tener por demostrado que en general *para dividir un número cualquiera por un quebrado, se deberá multiplicar el dividendo por el divisor, despues de haber invertido los términos de este.*

Esto mismo se podrá demostrar de este otro modo. Si se suprime el denominador del quebrado divisor, y queda solo su numerador, equivale esta mera supresion á multiplicar el quebrado por el denominador suprimido (§. 81). Para que resulte, pues, el cuociente que buscamos, sin la menor alteracion, habrá que multiplicar tambien el dividendo por el mismo denominador del quebrado divisor; y dividiendo entonces este producto por el numerador de este mismo, resultará el cuociente que nos hayamos propuesto determinar; pues que habiendo multiplicado al dividendo y al divisor por un mismo número, no debe padecer la menor alteracion el cuociente (§. 60). Si, por ejemplo, nos proponemos dividir el número entero 9 por el quebrado $\frac{3}{4}$, sostituiremos en lugar de este divisor el entero 3, cuatro veces mayor que el dado (§. 81); multiplicaremos igualmente por 4 al dividendo 9, y dividiremos por 3 al producto 36; ó lo que es lo mismo, multiplicaremos al dividendo 9 por el divisor con sus términos invertidos $\frac{4}{3}$, lo cual equivale á multiplicar el mismo 9 por el 4, y á dividir el producto 36 por 3; por cuyo medio obtendremos el cuociente $\frac{36}{3}$, equivalente á 12 unidades enteras. Del mismo modo, para dividir el número entero 13 por el quebrado $\frac{5}{7}$, multiplicaremos al 13 por $\frac{7}{5}$ y el producto $\frac{91}{5}$, equivalente (§. 89) á $18\frac{1}{5}$, será el cuociente que buscábamos.

Bien se deja ver que si el numerador del quebrado divisor fuere menor que su respectivo denominador, y de consiguiente fuere menor que una unidad la cantidad representada por el mismo quebrado, el cuociente habrá de ser mayor que el dividendo, porque cuanto menor es el divisor, tanto mayor es el cuociente (§. 59), y siendo divisor la misma unidad, nadie podrá dudar de que el cuociente debe ser igual al dividendo.

96 Si asi el dividendo como el divisor fueren quebrados, se multiplicará el quebrado dividendo por el divisor despues de haber invertido los términos de este, ó lo que es lo mismo, se multiplicará primeramente el numerador del quebrado dividendo por el denominador del divisor y el producto habrá de ser el numerador del cuociente; despues se multiplicará el denominador del mismo dividendo por el numerador del divisor, y el producto será el denominador del cuociente.

Propongámonos, por ejemplo, dividir $\frac{7}{8}$ por $\frac{2}{3}$, y, ó multiplicando el quebrado $\frac{7}{8}$ por $\frac{3}{2}$, ó multiplicando el numerador 7 del dividendo por el denominador 3 del divisor, y el denominador 8 del primero por el numerador 2 del segundo, obtendremos por cuociente $\frac{21}{16}$ equivalente á $1\frac{5}{16}$.

Si el dividendo ó el divisor ó entrambos fueren números mixtos, se les reducirá á quebrados impropios (§. 91) y despues se aplicará á las dos fracciones que resulten, cualquiera de las dos reglas que acabamos de prescribir; y cuando el dividendo ó el divisor sea número entero, se podrá poner á este en forma de quebrado, dándole la unidad por denominador (§. 91).

97 Es muy importante observar que el cuociente de cualquiera division puede y suele representarse por una expresion fraccionaria, cuyo numerador es el dividendo, y cuyo denominador es el divisor. Asi que, la expresion $\frac{36}{3}$, que se lee treinta y seis tercias partes ó tercios, ó 36 *dividido* por 3, representa el cuociente de la division del 36 por el 3, y por tanto es equivalente á 12 unidades; porque siendo cada tres tercias partes de una unidad lo mismo que una unidad entera, 36 tercias partes vendrán á ser lo mismo que 12 unidades.

Podemos, pues, mirar á todo quebrado propio ó impropio como una expresion del cuociente de una division indicada, en la cual el numerador representa al dividendo, y el denominador al divisor. Mirando bajo este aspecto á los quebrados, se pueden deducir las principales propiedades de ellos, establecidas (§§. 80 y sig.), de los principios demostrados (§§. 58 y sig.), con solo sustituir á las voces *dividendo*, *divisor* y *cuociente* las equivalentes *numerador*, *denominador* y *quebrado*. Pasemos ya á tratar de la adicion y sustraccion de los quebrados.[1]

1 Podrá acaso parecer muy extraño que hayamos tratado del modo de efectuar la multiplicacion y division de los quebrados antes de hablar del de sumarlos y restarlos; pero nos ha parecido mas conveniente adoptar este órden, porque las reglas de la multiplicacion y de la division de las fracciones se deducen inmediatamente de los principios que hemos expuesto al comenzar este tratado; en vez de que la adicion y la sustraccion de ellas exigen cierta otra operacion preliminar. No es por otra parte de maravillar que sea mas fácil multiplicar y dividir los quebrados que sumarlos y restarlos, cuando, como sabemos, los quebrados provienen de la division, y esta operacion tiene una relacion muy íntima con la multiplicacion. En otras muchas ocasiones se nos ofrecerán motivos de convencernos de que son tanto mas fáciles de ejecutar las operaciones, cuanto mas se aproximan al origen de donde preceden las cantidades con que las hayamos de ejecutar.

98 Siempre que los quebrados que hayamos de sumar ó restar tengan un mismo denominador, será muy fácil ejecutar con ellos cualquiera de estas dos operaciones; pues conteniendo en tal caso todos ellos partes de una misma denominacion, y por consiguiente de igual magnitud, se sumarán ó restarán sus numeradores como si fuesen números de unidades enteras, sin otra diferencia que la de haber de indicar la denominacion y magnitud de las partes de que se componga el resultado, poniéndole por denominador el mismo que los quebrados tengan.

Asi $\frac{3}{7}$ sumados con $\frac{2}{7}$ compondrán $\frac{5}{7}$; $\frac{5}{8}$ sumados con $\frac{7}{8}$ compondrá $\frac{12}{8}$; $\frac{8}{9}$ menos $\frac{5}{9}$ vienen á ser $\frac{3}{9}$; por manera que en estos casos se miran los numeradores como si fuesen números de unidades de una misma especie, y á la suma ó residuo de los numeradores se le pone el mismo denominador para indicar que el resultado es un número de partes iguales de la misma especie y magnitud que la de los quebrados propuestos.

De esto podemos deducir generalmente que *para sumar ó restar quebrados que ya tienen un mismo denominador, se deben respectivamente sumar ó restar los numeradores, poniendo al resultado el mismo denominador comun.*

99 Cuando los quebrados propuestos tengan distintos denominadores, sus numeradores son números de partes desiguales, y de consiguiente no se les puede sumar ni restar como si expresasen unidades enteras, y entre sí iguales. Por esta razon es indispensable transformar los quebrados propuestos en otros equivalentes que tengan un mismo denominador, y cuyos numeradores sean números de partes de igual magnitud.

Sean, por ejemplo, las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$. Si se multiplican por el denominador 5 de la segunda los dos términos de la primera, se transformará esta en su equivalente $\frac{15}{20}$; y si ademas se multiplican por el denominador 4 de la primera los dos términos de la segunda, se transformará esta en su equivalente $\frac{8}{20}$. Tendremos, pues, en lugar de las fracciones propuestas $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ otras dos respectivamente equivalentes $\frac{15}{20}$ y $\frac{8}{20}$, á las cuales, por contener partes de igual magnitud, se puede ya aplicar fácilmente la regla anterior. Por manera que la suma de $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ será $\frac{23}{20}$; y el residuo que queda despues de restar de $\frac{3}{4}$ el quebrado $\frac{2}{5}$ es $\frac{7}{20}$.

Esta preparacion, indispensable para comparar las cantidades representadas por dos fracciones que tengan distintos y desiguales denominadores, no viene á ser en sustancia otra cosa, que hallar para expresarlas una parte tan pequeña en la unidad, que esté contenida un número cabal de veces en ambas cantidades y pueda servir de medida comun de ellas. La parte que tenga esta cualidad, tendrá en todos casos un denominador exactamente divisible por los de las fracciones propuestas; ó lo que es lo mismo, múltiplo comun de ellos. Asi en el ejemplo anterior hemos visto que una *vigésima* ó *veintava* parte de la unidad está contenida quince veces en la fraccion $\frac{3}{4}$, y ocho veces en la $\frac{2}{5}$; y de consiguiente puede servir de medida comun de las cantidades representadas por las dos fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$.

Como lo que hemos practicado con estas dos fracciones, pueda igualmente efectuarse con otras dos cualesquiera que tengan distintos y desiguales denominadores, podemos establecer generalmente que para transformar dos de estos quebrados en otros dos equivalentes que tengan un mismo denominador, ó como mas comunmente suele decirse, *para reducir á un comun denominador dos* *quebrados cualesquiera, se han de multiplicar los dos términos de cada quebrado por el denominador del otro.*

100 Igualmente *se reducen tres ó mas quebrados á un comun denominador multiplicando los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de todos los demas.* Asi tendrán todos por denominador al producto de todos los denominadores primitivos multiplicados sucesivamente unos por otros, y todos los quebrados conservarán el mismo valor respectivo que antes tenian, por haberse multiplicado los dos términos de cada uno por un mismo número (§. 83).

Sean, por ejemplo, las cuatro fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{9}$ las que nos propongamos reducir á un comun denominador. Para ello multiplicaremos los dos términos de la primera por el producto 315 de los denominadores 5, 7 y 9 de las otras tres; los de la segunda por el producto 126 de los denominadores 2, 5 y 9; los de la tercera por el producto 90 de los denominadores 2, 5 y 9; y los de la cuarta por el producto 70 de los denominadores 2, 5 y 7. Asi tendremos las cuatro fracciones $\frac{315}{630}$, $\frac{252}{630}$, $\frac{270}{630}$ y $\frac{560}{630}$, respectivamente iguales (§. 83) á las propuestas, y todas con el mismo denominador 630, que es el producto final de las multiplicaciones sucesivas de los cuatro denominadores primitivos 2, 5, 7 y 9.

La regla que acabamos de prescribir es general y sin excepcion alguna; mas cuando el denominador de alguna de las fracciones propuestas sea múltiplo de todos los demas denominadores, el tal denominador múltiplo podrá ser el comun de todas las fracciones con solo multiplicar los dos términos de cada una por el número de veces que el denominador múltiplo contenga al de la fraccion que tratemos de transformar. Si, por ejemplo, las fracciones propuestas fueren $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{12}$, se podrán todas cuatro transformar en otras tantas que tengan el mismo denominador 12, multiplicando los dos términos de la primera por 4, porque otras tantas son las veces que el 12 contiene al denominador 3; los dos términos de la segunda por 3, porque tres son las veces que el doce contiene al denominador 4; los dos términos de la tercera por 2, porque el 12 contiene dos veces al denominador 6. De este modo, en lugar de las cuatro fracciones propuestas, tendremos $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{7}{12}$, las cuales tienen todas un mismo denominador, sin dejar de ser iguales á aquellas otras por haber multiplicado por un mismo número los dos términos de las tres primeras.

Igualmente, aun cuando los denominadores de las fracciones propuestas no sean *entre sí primos*, se puede hallar á veces un denominador comun de todas, mucho mas sencillo que el que haciendo uso de la regla general resultaria. Propongámonos, por ejemplo, reducir á un comun denominador las cinco fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$.

Como para que todas adquieran un mismo denominador, conservando sin embargo el mismo valor, se trate solo de hallar una parte que esté exactamente contenida en cada una de las que forman las fracciones propuestas; y como para esto sea necesario que el denominador de la tal parte sea múltiplo comun de todos los denominadores, fácil es ver que el 24 es el menor de cuantos números tienen esta condicion; porque siendo el 8 múltiplo del 4 y del 2, y no siéndolo del 3 ni por consiguiente del 6, el producto 24 del 3 por el 8 deberá ser el *mínimo múltiplo comun* de los cinco denominadores 2, 3, 6, 4, 8. Se pueden, pues, convertir las cinco fracciones propuestas en *veinticuatravos*.

Para efectuar esta transformacion, averiguaremos cuántas veces está contenido en el 24 cada uno de los cinco denominadores; y el respectivo cuociente debe ser el número por el cual se han de multiplicar los dos términos de cada fraccion para que todas, sin mudar de valor, tengan un mismo denominador 24. Asi veremos que los dos términos de la primera se deben multiplicar por 12; los de la segunda por 8; los de la tercera por 4; los de la cuarta por 6, y los de la quinta por 3; de lo cual resultan las nuevas expresiones $\frac{12}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{18}{24}$ y $\frac{21}{24}$, respectivamente iguales á las primeras, y todas con un mismo denominador 24, mucho menor que el que por la regla general habríamos hallado, el cual hubiera sido 1152[1].

101 La reduccion de los quebrados á un comun denominador es una preparacion necesaria no solo para sumarlos y restarlos, sino tambien para conocer en las mas de las ocasiones cuál de dos ó mas quebrados es el mayor; pues siempre deberá serlo el que despues de reducidos tenga el mayor numerador.

Tambien podria hacerse uso de la misma transformacion para dividir un quebrado por otro; pues, como no es dificil ver, la regla prescrita para esto (§. 96) puede muy bien expresarse de este modo: *redúzcanse los dos quebrados, dividendo y divisor, á un comun denominador; y no haciendo caso alguno de este, divídase el nuevo numerador del dividendo por el nuevo numerador del divisor.* La supresion del comun denominador equivale á mul-

1 En habiendo adquirido un poco de expedicion en el cálculo, y mayormente teniendo á la vista lo que hemos expuesto (§. 71) del modo de hallar el *mínimo múltiplo comun* de varios números, será muy fácil hacer uso de esta observacion.

tiplicar (§. 81) dividendo y divisor por un mismo número, y por esto no padece alteracion alguna el cuociente. A consecuencia de lo cual, si los quebrados dividendo y divisor tuviesen desde luego un mismo denominador, se dividirá el numerador del dividendo por el del divisor sin hacer caso alguno del comun denominador.

Aun para la multiplicacion de los quebrados puede ser útil el saber reducirlos á un comun denominador. Con efecto, si en lugar de solo el quebrado multiplicando sustituimos el que despues de esta transformacion le sea equivalente, será muy fácil tomar de este las partes que indique el quebrado multiplicador, y hallar el mismo resultado que por la regla prescrita (§. 92). Si, por ejemplo, hubiésemos de multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, y sustituimos en lugar de $\frac{2}{3}$ su equivalente $\frac{10}{15}$, nos será sumamente fácil tomar de este último quebrado una quinta parte, que será $\frac{2}{15}$, y multiplicando por *cuatro* esta quinta parte, nos resultará $\frac{8}{15}$ por producto de la multiplicacion de $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, como antes (§. 92) lo hemos hallado.

102 Para sumar números mixtos, deberemos sumar en primer lugar los quebrados, reduciéndolos préviamente á un comun denominador en caso que sean desiguales sus primitivos denominadores; y si la suma de los quebrados fuere un quebrado impropio, se extraerán de él las unidades que contenga, para agregarlas á las de los números enteros propuestos; mas si fuese quebrado propio la suma de los propuestos, ó si despues de extraidas del impropio las unidades que contenga, resultase todavía un quebrado propio, se le colocará á la derecha de la suma de los enteros. Propongámonos, por ejemplo, sumar los números mixtos $16\frac{1}{2}$, $28\frac{2}{3}$, $32\frac{4}{5}$. Transformaremos en primer lugar los tres quebrados propuestos en $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$ y $\frac{24}{30}$;

sumaremos los nuevos numeradores, y resultará por suma $\frac{50}{30}$, quebrado impropio equivalente á una unidad entera y $\frac{20}{30}$ de otra. Sumaremos ahora los tres números enteros agregándoles la unidad que ha resultado de los quebrados, y el número mixto $77\frac{20}{30}$ será la suma que buscábamos.

En la sustraccion de números mixtos suele ocurrir en muchas ocasiones la dificultad de que en el minuendo no haya quebrado, ó que habiéndolo, sea menor que el del sustraendo. Para efectuar la sustraccion en el primer caso, *se separa mentalmente del minuendo una unidad, la cual se transforma en un quebrado, cuyos términos sean ambos iguales al denominador del quebrado del sustraendo, y de la unidad asi transformada se resta este quebrado.*

En el segundo caso, *despues de estar reducidos á un comun denominador los dos quebrados, se separa mentalmente del número entero del minuendo una unidad; se transforma esta unidad en un quebrado cuyos dos términos sean ambos iguales al comun denominador de los quebrados propuestos; se agrega la unidad transformada al quebrado del minuendo, y de esta suma se resta el del sustraendo*; ó lo que viene á ser lo mismo, *se resta de la unidad* transformada el quebrado del sustraendo, y con el residuo se suma el del minuendo, *debiendo tener presente en ambos casos, al tiempo de restar los números enteros, que el del minuendo tiene de menos la unidad que mentalmente hemos separado de él.*

Para ejemplos propongámonos restar del número entero 24 el mixto $16\frac{5}{9}$. Para ello separaremos mentalmente del 24 una unidad; le transformaremos en el quebrado impropio $\frac{9}{9}$ equivalente á ella; y restando de este quebrado el $\frac{5}{9}$ del sustraendo, tendremos por residuo parcial á $\frac{4}{9}$. Pasando ahora á los enteros, restaremos del 23 á que se ha reducido el minuendo, el 16 del sustraendo: resultará por residuo 7; y asi vendrá á ser $7\frac{4}{9}$ el residuo total que nos propusimos determinar.

Tratemos en segundo lugar de restar $8\frac{2}{3}$ de $14\frac{5}{8}$; y para efectuarlo transformaremos los quebrados propuestos en $\frac{16}{24}$ y $\frac{15}{24}$; y siendo este último quebrado del minuendo, menor que el del sustraendo, separaremos mentalmente una unidad de las 14 del minuendo; la transformaremos en el quebrado impropio $\frac{24}{24}$ equivalente á ella; sumaremos este quebrado con el del minuendo, y de su suma $\frac{39}{24}$ restaremos el quebrado $\frac{16}{24}$ del sustraendo; y el residuo $\frac{23}{24}$ será el quebrado que debe hacer parte del residuo total. Por último, si de las 13 unidades á que han quedado reducidas las del minuendo, se quitan las 8 del sustraendo, resultarán de residuo 5; y el total será $5\frac{23}{24}$.

Cuando siendo número mixto el minuendo, no hubiese quebrado alguno en el sustraendo, deberá subsistir en el residuo el mismo quebrado del minuendo. Si siendo números mixtos el minuendo y el sustraendo, fueren entre sí iguales los dos quebrados, no deberá aparecer quebrado alguno en el residuo. Finalmente, si teniendo ya un mismo denominador los dos quebrados, tuviere el del minuendo mayor numerador que el del sustraendo, al número entero del residuo deberá acompañar otro quebrado cuyo numerador sea la diferencia de aquellos dos numeradores; y cuyo denominador sea el comun. Asi que, si nos proponemos restar $7\frac{4}{9}$ de $12\frac{8}{9}$, el residuo será $5\frac{4}{9}$.

103 Ya que podemos suponer sabido cómo se reducen á un comun denominador varios quebrados, creemos oportuno dar á conocer cómo se puede ejecutar la multiplicacion de un número mixto por un entero, ó por un

quebrado ó por otro número mixto, sin necesidad de reducir los números mixtos á quebrados impropios. Considerando en el ejemplo propuesto (§. 93) que para multiplicar $3\frac{5}{7}$ por $4\frac{8}{9}$, se debe repetir *cuatro* veces el multiplicando, y ademas tomar de él *ocho novenas* partes; podemos primeramente multiplicar las *tres* unidades del multiplicando por las *cuatro* del multiplicador, y será el primer producto parcial 12 unidades. Multiplicaremos asimismo por *cuatro* el quebrado $\frac{5}{7}$ del multiplicando, y nos resultará por producto $\frac{20}{7}$, equivalente á $2\frac{6}{7}$. Para tomar ahora las ocho novenas partes del multiplicando, multiplicaremos las 3 unidades por $\frac{8}{9}$, y obtendremos por tercer producto parcial á $\frac{24}{9}$, equivalente á $2\frac{6}{9}$. Por último multiplicaremos el quebrado $\frac{5}{7}$ por el $\frac{8}{9}$, y el $\frac{40}{63}$ será el cuarto y último producto parcial. No restará, pues, otra cosa sino sumar los cuatro productos parciales 12, $2\frac{6}{7}$, $2\frac{6}{9}$ y $\frac{40}{63}$, para tener en la suma el producto total. Con este objeto reduciremos los tres quebrados á un comun denominador, el cual podrá ser el mismo 63, que es múltiplo de los otros dos denominadores: de modo que multiplicando por 9 los dos términos del quebrado $\frac{6}{7}$, y por 7 los dos del $\frac{6}{9}$, nos resultarán los tres quebrados $\frac{54}{63}$, $\frac{42}{63}$ y $\frac{40}{63}$ con un mismo denominador, equivalentes á los tres primeros, y cuya suma es el quebrado impropio $\frac{136}{63}$, equivalente á $2\frac{10}{63}$. Agregando ahora á las 16 unidades que resultan de la suma de los tres primeros productos parciales las otras dos unidades y las $\frac{10}{63}$ de otra unidad que han resultado de la adicion de los tres quebrados, obtendremos el número mixto $18\frac{10}{63}$ por producto total de la multiplicacion de $3\frac{5}{7}$ por $4\frac{8}{9}$. Y pudiéndose practicar lo mismo en la multiplicacion de cualesquiera otros dos números mixtos, podemos establecer en general que *para de-*

terminar el producto de la multiplicacion de un número mixto por otro, sin trasformarlos previamente en quebrados impropios, podemos multiplicar los dos números enteros uno por otro; multiplicar despues por el entero del multiplicador el quebrado del multiplicando; en seguida multiplicar el entero del multiplicando por el quebrado del multiplicador; y por último multiplicar un quebrado por otro: con lo cual se tendrán todos los productos parciales; y sumando estos productos, resultará el producto total. Propongámonos, por ejemplo, multiplicar $637\frac{3}{3}$ por $58\frac{7}{9}$.

Multiplicando......	$637\frac{3}{4}$
Multiplicador......	$58\frac{7}{9}$
Productos parciales	5096
	3185
	$43\frac{2}{4}$
	$495\frac{4}{9}$
	$\frac{21}{36}$
Producto total.............	$37485\frac{19}{36}$

De las fracciones ó quebrados decimales.

104 Aunque las reglas anteriores sean suficientes para efectuar con cualesquiera fracciones las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética en cuantos casos puedan ocurrirnos, no es dificil echar de ver que estas operaciones se habrian simplificado muchísimo con solo haber sujetado á una ley constante las diversas divisiones y subdivisiones de la unidad, de que hacemos uso para medir la magnitud de cantidades menores que ella; pues por este medio se habria por lo menos conseguido redu-

cir pronta y cómodamente todas las fracciones á una misma denominacion. Ahora bien, no solo se han sujetado todas aquellas divisiones y subdivisiones á una misma ley, sino que al elegir esta, se ha preferido como era justo, la que sirve de base á nuestro actual sistema de numeracion escrita; y de este modo se ha logrado dar al cálculo de las fracciones el mayor grado de sencillez á que se puede aspirar.

Con efecto, el principio fundamental de nuestra numeracion escrita se reduce á que cada unidad de cualquier órden sea la décima parte de la unidad del órden inmediato superior; de manera que cada *centena*, por ejemplo, es la décima parte de un millar; cada *decena* es la décima parte de una centena; cada *unidad absoluta* es la décima parte de una decena. Con arreglo, pues, á este mismo sistema consideramos dividida en diez partes iguales la *unidad* absoluta para que asi resulten las que llamamos *décimas* de la unidad. Del mismo modo imaginamos dividida en diez partes iguales cada *décima*, y estas, que son décimas de una décima, se llaman *centésimas*, porque lo son de la unidad. Consideramos igualmente dividida cada *centésima* en diez partes iguales, que serán *milésimas* de la unidad, y asi sucesivamente; sin que pueda fijarse límite, mas allá del cual no sea permitido extender estas subdivisiones, por cuyo medio podemos medir todas las cantidades menores que la unidad primitiva, por queñas que sean.

Equivale, por consiguiente, cada unidad absoluta á diez *décimas;* cada décima á diez *centésimas;* cada centésima á diez *milésimas* &c.: de lo cual se infiere que cada unidad absoluta no solo equivale á diez *décimas*, sino tambien á cien *centésimas*, á mil *milésimas* &c.: cada décima no solo equivale á diez *centésimas*, sino tambien á cien *milésimas*, á mil *diezmilésimas* &c.; y asi de las demas. Será, pues, tan fácil convertir cualquier número de partes de una cualquiera de estas denominaciones en el número equivalente de otras cualesquiera partes menores, como convertir los *millares*, las *centenas* y *decenas* &c. en *unidades* absolutas.

Fácil es ver, por ejemplo, que 2 *décimas*, 3 *centésimas* y 4 *milésimas* equivalen á 234 *milésimas* por la misma razon que 2 *centenas*, 3 *decenas* y 4 unidades absolutas equivalen á 234 *unidades*; debiendo ser lo mismo en cualquier otro caso, porque la subordinacion de las partes de que tratamos, es enteramente la misma que la de las unidades de diferentes órdenes que se han adoptado para medir las cantidades mayores que la unidad absoluta.

Por ser cada una de las partes ya mencionadas la *décima* de la inmediatamente mayor ó de la unidad absoluta, se ha dado con mucha propiedad á los varios números que pueden presentársenos de ellas, el nombre de *fracciones decimales;* de las cuales no habria para que tratar con separacion de las demas fracciones, si á consecuencia de haberlas sujetado á la ley de la numeracion escrita de los enteros, no se hubiesen establecido reglas peculiares para calcularlas con mas sencillez, prontitud y facilidad.

105 En vista de la mútua relacion que entre sí tienen las partes decimales, se podrán representar por escrito estas fracciones como si fuesen números enteros; porque habiéndonos convenido en que las unidades del número dígito representado por cualquiera de las nueve cifras significativas, sean la décima parte de las que representaria si estuviese colocada en el lugar inmediato á la iz-

quierda, se infiere naturalmente que con solo colocar inmediatamente á la derecha de la que represente las *unidades* absolutas una cifra cualquiera, deberá esta representar *décimas* de la unidad. Del mismo modo, cualquiera cifra colocada á la derecha de la que representa las *décimas*, deberá representar décimas partes de estas, ó *centésimas* de la unidad: otra cualquiera colocada á la derecha de las centésimas, representará décimas de estas, ó *milésimas* de la unidad, y asi sucesivamente; pero á fin de que en las varias y distintas combinaciones que pueden ocurrirnos de cifras con que esten representadas por escrito unidades enteras y partes decimales, no se confundan las unas con las otras, es indispensable marcar con alguna señal la cifra que representa las unidades absolutas, y con este objeto se suele poner una coma á la derecha de ella; y cuando el número propuesto no contenga ni una sola unidad entera, sino solo alguna fraccion decimal, se habrá de colocar un *cero* en el lugar asignado á las unidades absolutas, asi como tambien deberán ocuparse con *ceros* los lugares correspondientes á aquellas partes decimales que atendido el órden con que se suceden sus denominaciones, se echen menos en la expresion verbal del número propuesto.

Asi para representar *treinta y cuatro* unidades enteras y *docientas setenta y ocho* milésimas de otra unidad, escribiremos 34,278.

Para representar *diez y nueve centésimas*......... 0,19
ocho milésimas........................ 0,008
tresmil y cuatro diezmilésimas. 0,3004
seis cienmilésimas.................. 0,00006

Si cotejamos estas últimas cuatro expresiones con sus equivalentes $\frac{19}{100}$, $\frac{8}{1000}$, $\frac{3004}{10000}$, $\frac{6}{100000}$, con las cuales habríamos representado las mismas cantidades, con arreglo al método ordinario de escribir cualquier quebrado, echaremos fácilmente de ver que *para representar bajo la forma ó apariencia de número entero una fraccion decimal cualquiera que esté ó que supongamos estar de antemano escrita como todas las demas fracciones, se colocará el número á continuacion de la coma, de modo que haya á la derecha de esta tantas cifras como ceros haya en la expresion escrita del denominador; para lo cual se colocarán los ceros necesarios entre la coma y la primera cifra significativa de la izquierda del numerador, siempre que en la expresion escrita de este no haya tantas cifras como ceros en la del denominador.*

Por el contrario *para transformar la expresion de cualquiera fraccion decimal escrita como un número entero en otra ordinaria equivalente, se pondrá por numerador la combinacion de cifras que se halle á la derecha de la coma, omitiendo todos los ceros que haya á la izquierda de la primera cifra significativa de la izquierda, y poniendo por denominador la cifra asignada á la unidad con tantos ceros como cifras haya, sin excepcion ninguna, á la derecha de la coma.* Asi las fracciones decimales 0,54; 0,036; 0,00609 son equivalentes á $\frac{54}{100}$; $\frac{36}{1000}$; $\frac{609}{100000}$. A fin de dar á conocer las diferentes denominaciones de las partes decimales representadas por cualquiera de las cifras, segun el lugar en que esté colocada con respecto á la que representa unidades absolutas; y para que pueda mas bien observarse la correspondencia de esta denominaciones con las de las unidades de diferentes órdenes, pondremos aqui una gran combinacion de cifras, que se puede muy bien mirar como la continuacion de la que propusimos (§. 11), y en la cual se halla debajo de cada cifra la correspondiente denominacion de las unidades ó partes decimales que representa.

&c.	&c. &c.
3	diezbillonésimas
8	*billonésimas*
7	cienmilmillonésimas
9	diezmilmillonésimas
0	milmillonésimas
4	cienmillonésimas
2	diezmillonésimas
3	*millonésimas*
8	cienmilésimas
7	diezmilésimas
5	milésimas
9	centésimas
4	décimas
6'	*unidades*
4	decenas
3	centenas
0	millares
8	decenas de millares
5	centenas de millares
1	*millones*
2	decenas de millones
&c.	&c. &c.

106 El valor de las combinaciones de cifras que representen números enteros y fracciones decimales, se dará á conocer expresando primeramente el de las cifras que haya á la izquierda de la coma, las cuales representan en todo caso un número entero, y en seguida se expresará el de las que se hallen á la derecha, como si tambien representasen un número entero, sin mas diferencia que la de añadir al fin la denominacion de la parte decimal correspondiente al lugar ocupado por la cifra mas distante de la coma.

Asi la expresion 26,736 se lee 26 *unidades enteras* y 736 *milésimas* de otra unidad; 0,0637 significa 637 *diezmilésimas* de una unidad; 0,00086 representa 86 *cienmilésimas* de la misma unidad.

Tambien pueden leerse cualesquiera combinaciones de cifras que representen unidades enteras y fracciones decimales, como si representasen solo números enteros, sin otra diferencia que la de añadir al fin la denominacion correspondiente á la cifra que á la derecha se halle mas distante de la coma. Asi 8,75 se podrá leer 875 *centésimas;* 26,7 viene á ser 267 *décimas;* 26,736 equivale á 26736 *milésimas.* Esto no es otra cosa que trasformar un número mixto en quebrado impropio.

107 Como el valor de cualquiera de las cifras de una combinacion con que está representada una fraccion decimal dependa solo del lugar que ocupe con respecto á la coma, es consiguiente que no varíe el valor de toda la combinacion por poner á la derecha de ella cuantos ceros queramos, ni tampoco por suprimir uno, dos ó mas ceros de los que ya tenga á su derecha. Asi es que 0,5 equivale á 0,50; 0,784 es lo mismo que 0,78400; porque si bien es verdad que el número 50 es décuplo del 5, en cambio cada una de las *cincuenta* partes es la décima de cada una de las *cinco;* y si el número 78400 es *céntuplo* del 784, cada una de las *setenta y ochomil y cuatrocientas* partes es la *centésima* de cada una de las *setecientas ochenta y cuatro.* Esta trasformacion es la misma que se ejecuta con cualquiera fraccion ordinaria, cuando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número.

Por medio de esta sencilla trasformacion se reducen á una comun dominacion las fracciones decimales. Sean, por ejemplo, las cuatro fracciones 0,8; 0,75; 0,236; 0,1497; y para que todas resulten expresadas en números de partes de una misma magnitud y denominacion, bastará colocar tres ceros á la derecha de la primera, dos á la derecha de la segunda, y uno á la derecha de la tercera, con lo cual las nuevas expresiones 0,8000; 0,7500; 0,2360, y 0,1497, conservando todas el mismo valor que sus correspondientes anteriores tenian, han adquirido una misma denominacion. Aqui puede notarse de paso que, contra lo que se advierte en las combinaciones de cifras que representan números enteros, no es siempre la mayor fraccion decimal la que está representada por mas cifras.

108 Puesto que en las combinaciones de cifras con que se representan las fracciones decimales, se verifica, lo mismo que en las que representan números enteros, que procediendo de derecha á izquierda, cada diez partes de una denominacion cualquiera equivalen á una sola de la denominacion inmediata (§. 7), es claro que la misma regla que nos ha servido para sumar los números enteros (§. 15), podrá tambien aplicarse á la adicion de las fracciones decimales, y á la de números mixtos de enteros y decimales.

Si nos proponemos, por ejemplo, sumar las fracciones decimales 0,56; 0,003, 0,958; 0,7469, las colocaremos unas debajo de otras, como aqui se ve, de modo que se hallen en una misma coluna las cifras que en todas las fracciones representen partes de una misma denominacion,

	0,56
Sumandos........................	0,003
	0,958
	0,7469
Suma............................	2,2679

y observando exactamente lo prescrito (§. 15) hallaremos que la suma total es 2,2679.

Si hubiésemos de sumar los números 19,35; 0,3,;

84,5; 110,02, tres de los cuales son mixtos, los colocaremos en esta disposicion:

Sumandos............	19,35
	0,3
	84,5
	110,02
Suma....................	214,17

y por la misma regla hallaremos que la suma de los cuatro números propuestos es 214,17.

Podemos, pues, establecer por regla general, que *la adicion de las fracciones decimales, y números mixtos de enteros y decimales se efectúa del mismo modo que la de los números puramente enteros, sin otra deferencia que la de colocar en una misma coluna todas las comas de los sumandos, y la de la suma de todos ellos.*

109 La sustraccion de las fracciones decimales y de los números mixtos de enteros y decimales se efectúa igualmente por la misma regla que la de los números enteros (§. 20); bien que á fin de evitar todo motivo de equivocacion, será conveniente reducir antes á una misma denominacion las dos fracciones de minuendo y sustraendo; y cuando en el minuendo no haya fraccion alguna, colocar á la derecha de la coma tantos ceros como cifras decimales haya en el sustraendo (§. 107). Propongámonos, por ejemplo, restar 0,3697 de 0,62; y colocando estos números del modo siguiente:

Minuendo..........	0,6200
Sustraendo.........	0,3697
Resíduo...............	0,2503

hallaremos por la regla prescrita (§. 20) que el resíduo es 0,2503.

Propongámonos asimismo restar 7,364 de 9,1457, y colocando estos números segun aqui se ve,

Minuendo............	9,1457
Sustraendo.........	7,3640
Resíduo.............	1,7817

hallaremos que el resíduo ó diferencia es 1,7817.

Propongámonos por último restar 16,048 de 23, y colocaremos estos números en esta disposicion:

Minuendo............	23,000
Sustraendo..........	16,048
Resíduo	6,952

En general, *la única diferencia que se advierte entre la sustraccion de los números enteros y la de las cantidades decimales, consiste en reducir á una misma denominacion las fracciones, y en colocar la coma del resíduo en la misma coluna en que se hallan las del minuendo y sustraendo.*

Las pruebas de la adicion y de la sustraccion de las cantidades decimales se ejecutan absolutamente del mismo modo que las de los números enteros (§§. 22 y 24).

110 Como el oficio de la coma, que generalmente se halla en todas las combinaciones de cifras que representan cantidades decimales, sea separar las que pertenecen á unidades enteras, de las que se refieren á partes de la unidad, se deja fácilmente ver que con solo mudar el lugar de la coma, variará el valor local de cada una de las cifras, y de consiguiente la combinacion de todas ellas representará un número muy distinto del que antes re-

presentaba. Con efecto, si adelantamos hácia la derecha la coma, vendrán á ser cifras de enteros algunas de las que antes eran de partes decimales, y de consiguiente habrá de resultar aumentando el valor de toda la combinacion; y si atrasamos la coma hácia la izquierda, vendrán á ser cifras de la fraccion algunas de las que antes eran de enteros, y de consiguiente deberá ser menor de lo que antes era el número representado por todas ellas.

En el primer caso el número representado viene á ser diez ó ciento ó mil &c. veces mayor de lo que antes era, segun que hayamos adelantado la coma uno dos ó tres &c. lugares hácia la derecha, porque á cada paso, por decirlo asi, que hácia la derecha se adelanta la coma, todas las cifras dan con respecto á ella otro paso hácia la izquierda, y adquieren por consiguiente un valor diez veces mayor que el que antes tenian.

Si, por ejemplo, en vez de 134,28 escribiésemos 1342,8 haciendo pasar á la derecha del 2 la coma que antes estaba á su izquierda, la cifra 8, que antes representaba *centésimas*, representaria ya *décimas*; la cifra 2, que antes representaba *décimas*, representaria ahora *unidades* absolutas; la que antes *unidades* absolutas, ahora *decenas*; la que antes *decenas*, ahora *centenas*, y por último la que antes *centenas*, ahora *millares*. Asi que todas las partes del primer número se han hecho diez veces mayores de lo que antes eran, y de consiguiente *el adelantar la coma un lugar hácia la derecha equivale á multiplicar por diez el número representado por la combinacion propuesta.*

Del mismo modo se probará que adelantando la coma otro lugar hácia la derecha, el número 13428, que entonces resulta, es diez veces mayor ó décuplo de 1342,8;

y por consiguiente cien veces mayor ó *céntuplo* del primitivo 134,28. *Con solo pues adelantar la coma dos lugares hácia la derecha, se multiplica por ciento cualquiera cantidad decimal.*

Por un razonamiento semejante se puede demostrar que *el adelantar la coma tres lugares hácia la derecha equivale á multiplicar por mil*; y asi sucesivamente.

De estas observaciones, que pueden fácilmente repetirse en cuantos ejemplos se quiera, se infiere sin dificultad que *la mera supresion de la coma de una cantidad decimal equivale á multiplicar toda esta cantiaad por el denominador de la fraccion.* Si, por ejemplo, en vez de 28,375 escribimos 28375, suprimiendo enteramente la coma, tendremos representado en esta última expresion un número mil veces mayor que el anterior, ó lo que es lo mismo, habremos determinado el producto de la multiplicacion de 28,375 por *mil*; y asi de los demas.

En el segundo caso, es decir, cuando se atrasa la coma hácia la izquierda, se hace el número propuesto diez ó ciento ó mil &c. veces menor de lo que era, segun que la coma se atrase uno ó dos ó tres &c. lugares hácia la izquierda; porque á cada paso que la coma dé hácia la izquierda, todas las cifras dan otro hácia la derecha con respecto á la coma, y de consiguiente el valor de cada una viene á ser la décima parte del que anteriormente era.

Si en vez de 134,28 escribimos 13,428, poniendo á la izquierda del 4 la coma que antes estaba á su derecha, la cifra 8 que antes representaba *centésimas*, representara ahora *milésimas*; la que antes representaba *décimas*, representa ahora *centésimas*; la que antes *unidades* absolutas, ahora *décimas* de la unidad; la que antes *de-*

cenas, ahora *unidades* absolutas; y por último la que antes *centenas*, ahora *decenas*. Es pues visto que cada una de las partes del número propuesto ha venido á ser diez veces menor, ó la décima parte de lo que era, y de consiguiente el haber atrasado la coma un lugar hácia la izquierda, equivale á haber dividido por *diez* al número 134,28 ó á haber tomado de él la *décima* parte. Del mismo modo se demostrará que el atrasar la coma dos lugares hácia la izquierda, equivale á dividir el número primitivo por *ciento*, ó á tomar de él la *centésima* parte; y asi sucesivamente.

111 A consecuencia de estas consideraciones se echará fácilmente de ver la gran ventaja que las fracciones decimales llevan á las ordinarias; porque ya no puede ocultarse que todas las multiplicaciones y divisiones que en el cálculo de las fracciones ordinarias se deben ejecutar por los denominadores de estas, en el de las otras, se efectúan con solo poner ó suprimir algunos ceros, ó con solo adelantar ó atrasar la coma. En aplicando estas modificaciones á la teoría general de las fracciones, se deduce inmediatamente sin la menor dificultad la de las decimales, y el modo de efectuar la multiplicacion y division de estas cantidades; pero sin necesidad de hacer este cotejo de unas fracciones con otras podemos descubrir directamente las reglas para ejecutar con las decimales aquellas operaciones, valiéndonos para ello de la reflexiones siguientes.

Supongamos primeramente que solo el multiplicando contenga fraccion decimal; y puesto que la supresion de la coma lo hará tantas veces mayor como unidades tenga el denominador (§. 110), si ejecutamos la multiplicacion prescindiendo enteramente de la coma, el producto será tambien las mismas veces mayor que el verdadero (§. 55); y por consiguiente para obtener este, bastará tomar del que hemos hallado, la parte indicada por el mismo denominador: lo cual se consigue separando á su derecha para decimales tantas cifras como *decimales* haya en la expresion del multiplicando.

Si, por ejemplo, hubiésemos del multiplicar por 9 el número mixto 34,137, multiplicaremos por el mismo 9 al número entero 34137, suprimiendo enteramente la coma ó no haciendo caso de ella en la operacion; y resultará por producto 307233: pero como la supresion de la coma del multiplicando lo haya hecho mil veces mayor de lo que era, es consiguiente que el producto hallado sea tambien mil veces mayor de lo que debiera, y por tanto será necesario hacerlo otras tantas veces menor, ó dividirlo por *mil*, ó tomar de él la *milésima* parte; y esto es cabalmente lo que se ejecuta separando de sus cifras con una coma las tres de la derecha, y escribiendo 307,233.

En general, *para multiplicar por un número entero otro mixto que contenga fraccion decimal, se efectuará la operacion como si ambos fueran números enteros y prescindiendo enteramente de la coma; y de las cifras del producto se separarán á su derecha para decimales tantas como de estas haya en la expresion del multiplicando.* Si cuando solo el multiplicador contenga fraccion decimal, suprimimos enteramente la coma, ó no hacemos caso de ella, el multiplicador, y de consiguiente el producto, vienen á ser tantas veces mayores como unidades tenga el denominador de la fraccion. Será pues necesario para obtener el verdadero producto, tomar, como en el caso anterior, del producto hallado, la parte que el mismo denominador indique, ó lo que es equivalente, separar de las cifras de la derecha del producto, tantas como decimales haya en la expresion del multiplicador.

Podremos pues establecer por regla general que *cuando solo uno de los factores contenga fraccion decimal, se ejecuta la multiplicacion como si ambos fuesen números enteros; y despues de hallado el producto de estos, se separarán de sus cifras á la derecha con una coma, tantas como decimales haya en la expresion del factor que contenga la fraccion.*

112 De lo expuesto podemos fácilmente inferir cómo habremos de ejecutar la multiplicacion cuando el multiplicando y el multiplicador tengan ambos fracciones decimales; pues efectuando la operacion como si ambos factores fuesen números enteros, el producto, aun despues de haberlo dividido por el denominador de la fraccion del multiplicando, será tantas veces mayor que el verdadero, cuantas unidades contenga el denominador de la fraccion del multiplicador, Habrá pues que dividirlo de nuevo por este denominador, ó lo que es lo mismo, atrasar hácia la izquierda la coma tantos lugares como cifras decimales haya en la expresion del multiplicador; y de este modo vendrá el verdadero producto á tener tantas cifras decimales como se junten entre los dos factores.

Si, por ejemplo, nos proponemos multiplicar el número mixto 172,84 por 36,003, y ejecutamos la operacion como si solo el multiplicador fuese número entero, el producto será 6222758,52; pero como en esta multiplicacion hemos supuesto al multiplicador *mil* veces mayor de lo que es en realidad, el producto será otras tantas veces mayor de lo que debiera, y de consiguiente será necesario dividirlo por *mil*, ó atrasar la coma tres lugares hácia la izquierda, y asi tendremos el verdadero producto 6222,75852 que, como se ve, tiene tantas cifras decimales, como se juntan entre los dos factores propuestos.

Lo mismo pudo haberse hallado por medio de esta otra reflexion. Si prescindiendo de las comas, y suponiendo que los dos factores sean los números puramente enteros 17284 y 36003, ejecutamos la multiplicacion de estos, el producto será 622275852 unidades. Si ahora nos hacemos cargo de que por haber suprimido las comas de los dos factores, hemos multiplicado por *ciento* al multiplicando y por *mil* al multiplicador, vendremos en conocimiento de que el producto que hemos hallado es (§. 55) *cienmil* veces mayor de lo que debiera haber sido, si no hubiesen padecido la alteracion expuesta los dos factores. Para deducir, pues, del producto hallado el verdadero, tomaremos de aquel la *cienmilésima* parte ó lo dividiremos por *cienmil*; y como esto se ejecute con solo separar con la coma para decimales cinco cifras de hácia la derecha; ejecutándolo asi, nos resultará 6222,75852 verdadero producto que se buscaba, y que segun se ve, tiene tantas cifras decimales como hay en los dos factores.

Pudiéramos igualmente haber demostrado la exactitud de este procedimiento, transformando solo el multiplicador 36,003 en el número entero 36003, es decir, haciéndolo *mil* veces mayor. En tal caso, para que por esto no padeciese alteracion alguna el producto, seria necesario que al multiplicando lo hiciésemos *mil* veces menor de lo que sea (§. 56), ó que en vez de 172,84 sustituyamos 0,17284. Por este medio se reduciria la cuestion á multiplicar la fraccion decimal 0,17284 por el número entero 36003, en cuyo resultado debe haber tantas cifras decimales como contiene la expresion del nuevo multiplicando.

Generalizando estos razonamientos, se concluirá que *para multiplicar uno por otro dos números que contengan fracciones decimales, se efectuará la operacion* (§. 39) *sin hacer caso alguno de las comas; y en el producto se separarán para decimales tantas cifras como haya en las fracciones del multiplicando y del multiplicador.*

Algunas veces acontece que en la expresion del producto no hay cifras bastantes para hacer de ellas la separacion prescrita en esta regla; y en tal caso es preciso suplir con ceros colocados á la izquierda de las cifras del producto hallado, las que falten para completar el número que deba contener de decimales, y ademas poner otro cero en el lugar correspondiente á las unidades absolutas, para indicar que en el verdadero producto no las hay. Si, por ejemplo, hemos de multiplicar 4,023 por 0,002, no haciendo caso de las comas, ó mirando como enteros los dos factores propuestos, resultarán 8046 unidades por producto; y no habiendo en la expresion de este mas de cuatro cifras, es imposible separar de ellas las seis decimales que debe contener el verdadero. Se colocarán, pues, á la izquierda de aquellas cuatro cifras dos ceros para completar el número de seis decimales, y otro cero ademas para indicar que el verdadero producto no contiene ninguna unidad entera. Asi vendremos en conocimiento de que el verdadero producto es 0,008046.

113 De los principios ya establecidos es muy fácil deducir las reglas para dividir las cantidades decimales. Si nos propusiéremos dividir un número entero por otro que contenga fraccion decimal, nos bastará tener presen-

te que el suprimir la coma del divisor, equivale á multiplicarlo por el denominador de la fraccion decimal; y que escribiendo á la derecha del dividendo tantos ceros como haya en la expresion del mismo denominador, habremos multiplicado los dos números propuestos por un mismo número, y de consiguiente el cuociente que hallemos dividiendo (§. 60) uno por otro los dos productos, deberá ser el mismo que si la operacion se hubiese ejecutado inmediatamente con los números propuestos.

Tratemos, por ejemplo, de dividir el número entero 32468 por el número mixto 8,564. Para ello sustituyamos en lugar de este último número el entero 8564 suprimiendo la coma, lo cual equivale á haber multiplicado por mil al propuesto divisor. Sustituyamos, pues, en lugar del propuesto dividendo al 32468000, que es mil veces mayor, y efectuando la operacion con este nuevo dividendo, y con el nuevo divisor nos resultará el mismo cuociente que nos proponíamos determinar.

Y si nos hubiéramos propuesto dividir 451,59 por 13, deberíamos tener presente que sustituir el número entero 45159 en lugar del número mixto propuesto para dividendo, equivale á multiplicar á este por *ciento*; multiplicaremos, pues, por *ciento* al divisor propuesto 13; y la division del número entero 45159 por el otro entero 1300 nos dará el mismo cuociente que debiera darnos la de los números propuestos.

Podemos, pues, establecer por regla general que *para dividir un número que contenga fraccion decimal por otro entero, ó al contrario, se puede suprimir enteramente la coma del que tenga la fraccion, con tal que á la derecha de las cifras del otro se coloquen tantos ceros como decimales haya en aquel; y efectuando despues la division*

(§. 60) *con estos nuevos números, el resultado será exactamente el mismo que si la operacion se hubiese ejecutado inmediatamente con los dos números propuestos.*

114 Para ejecutar la division en el caso que asi el dividendo como el divisor tengan fracciones decimales, nos podemos valer del medio de reducir á una misma denominacion las dos fracciones (§. 107), y suprimiendo despues las comas, efectuar la division de un número entero por otro; en la segura inteligencia de que el cuociente que resulte, debe ser el verdadero; porque toda la transformacion que han padecido dividendo y divisor, está reducida á que se les ha multiplicado por un mismo número, y por eso no padece variacion alguna el cuociente.

Propongámonos, por ejemplo, dividir 315,432 por 23,5. En primer lugar, no pudiendo ya dudar de que el divisor 23,5 equivale á 23,500, nos es lícito sustituir esta expresion en lugar de la otra, y asi habremos conseguido que el dividendo y el divisor tengan igual número de cifras decimales, y que de consiguiente esten reducidas las dos fracciones á una misma denominacion. Si despues de esto suprimimos las comas de ambos, equivaldrá esto á hacerlos mil veces mayores de lo que eran, ó á multiplicarlos por mil (§. 110), y el cuociente no debe por eso mudar de valor (§. 60). Queda, pues, reducida en este ejemplo la operacion á dividir el número entero 315432 por el otro entero 23500.

De lo cual podemos deducir generalmente que *para dividir uno por otro dos números que contengan fracciones decimales, se reducirán á una misma denominacion las dos fracciones* (§. 107); *se suprimirán despues las* *comas; y por último se dividirán uno por otro los números enteros que asi resulten* (§. 52).

115 No es dificil echar de ver que cuando solo el dividendo contiene fraccion decimal, no es absolutamente necesaria la supresion de la coma, ni por consiguiente la transformacion de los números propuestos en dos enteros equimúltiplos de ellos. Si, por ejemplo, tuviéramos que dividir por el número entero 8 el mixto 547,36, podríamos sin necesidad de transformar este dividendo en número entero, ni de hacer mayor de lo que en realidad es el divisor, dividir por 8 las 547 unidades enteras del dividendo, y despues de haber obtenido el cuociente 68 unidades, observamos que aun restan 3 unidades de residuo: y pues que estas tres unidades equivalen á 300 *centésimas*, agregaremos á estas las 36 que desde luego habia en el dividendo; y dividiendo por último estas 336 *centésimas* por el mismo divisor 8, el cuociente 42 centésimas será la fraccion decimal que debe acompañar á las 68 unidades enteras, para que asi resulte el cuociente completo 68,42.

Una vez que en siendo número entero el divisor, no es necesario hacer en los números propuestos transformacion alguna; cuando dividendo y divisor contengan ambos fracciones decimales, nos bastará transformar inmediatamente en número entero el divisor solo, suprimiendo su coma, lo cual equivale á multiplicarlo por el denominador de la fraccion decimal que antes contenia (§. 110): en seguida multiplicaremos el dividendo por el mismo número que al divisor; y ejecutando con los dos nuevos números la division, obtendremos el verdadero cuociente (§. 60). Háyase, por ejemplo, de dividir al número mixto 560,84424 por el 6,54, y transformaremos este divisor en 654 unidades enteras, con solo suprimir la coma, lo cual equivale á haberlo multiplicado por *ciento*: adelantemos, pues, dos lugares hácia la derecha la coma del dividendo, lo que equivale á multiplicarlo igualmente por *ciento*; y dividiendo el número 56084,424 por 654, conseguiremos el verdadero cuociente 85,756 sin necesidad de haber reducido á una misma denominacion las fracciones contenidas en los dos números propuestos ni de transformarlos ambos en números enteros. Para hallar el indicado cuociente dividiremos primeramente por el divisor 654 las 56084 unidades enteras del dividendo, y despues de haber hallado las 85 unidades del cuociente, pondremos á su derecha la coma, y escribiremos á la derecha de las tres cifras del residuo 494 la inmediata cifra decimal 4, con lo cual las 494 unidades del residuo se transforman en 4940 décimas á que equivalen, y el primer dividendo parcial decimal vendrá á ser 4944 décimas, que divididas por 654 darán por cuociente parcial 7 décimas, resultando de residuo 366. Del mismo modo á la derecha de estas 366 escribimos las 2 centésimas del dividendo total, por cuyo medio se reducen aquellas á las 3660 centésimas á que equivalen, y el dividendo parcial 3662 centésimas nos dará por cuociente 5 centésimas, y resultará de residuo 392. Ultimamente escribiremos á la derecha de estas tres cifras las 4 milésimas del dividendo total, y asi reducimos las 392 centésimas del residuo á las 3920 milésimas á que equivalen, y el dividendo parcial 3924 nos dará por último cuociente parcial las 6 milésimas con que termina el total.

116 Aun cuando nos propongamos dividir uno por otro dos números enteros, siempre que el dividendo no sea múltiplo del divisor, podemos expresar el cuociente en

partes decimales con cuanta aproximacion sea apetecible, en caso que no sea con toda exactitud. Sea, por ejemplo, 8749 el número que haya de dividirse por 32.

Dividendo.. 8749 | 32............ *Divisor.*
234 | 273,40625
109
130
..200
..80
160
000

Despues de haber hallado por el método ordinario las 273 unidades enteras del cuociente, ponemos una coma á la derecha de ellas para separarlas de las partes decimales que las siguen; é inmediatamente escribimos un cero á la derecha de las cifras del residuo 13: con lo cual hemos transformado las trece unidades en 130 *décimas* á que equivalen; y divididas estas por el divisor 32, dan al cuociente 4 *décimas* que colocamos, segun corresponde, en el lugar inmediato á la derecha de la coma. Al residuo 2 que resulta de esta division, le escribimos otro 0 á la derecha, por cuyo medio transformaremos las dos *décimas* en veinte *centésimas;* y siendo el dividendo parcial 20 centésimas menor que el divisor, colocamos en el cuociente un cero en el lugar de las centésimas, para indicar que no contiene partes de esta denominacion. Reduciremos, pues, las 20 centésimas á 200 *milésimas*, escribiendo otro cero á la derecha de las cifras del 20. Dividiendo por 32 el 200, resultan 6 por cuociente, y 8 de residuo. Escribimos á la derecha del residuo 8 un nuevo cero, con el cual se transforman las 8 milésimas en 80 *diezmilésimas*, las cuales dan por cuociente 2 *diezmilésimas*, y de residuo 16 *diezmilésimas*. Por último, á la derecha de estas dos cifras escribimos otro cero, con lo cual hemos transformado aquel residuo en el último dividendo parcial 160 *cienmilésimas* á que equivale; y resultando de esta última division parcial el cuociente 5, sin resultar residuo alguno final, deberemos inferir que la division propuesta está enteramente concluida, y que el cuociente cabal es 273,40625.

Si hubiese resultado de la última division parcial algun residuo, se le habria convertido, escribiendo un cero á la derecha de las cifras con que se representase por escrito, en partes que fuesen décimas de la última que esté ya determinada en el cuociente, y del mismo modo se habria continuado la operacion hasta hallar un cuociente exacto, ó que el residuo fuese un número de partes tan pequeñas, que se las pudiese mirar como despreciables[1].

Representando toda fraccion al cuociente de una division indicada, en la cual el dividendo es el numerador, y el divisor el denominador (§. 97), podemos fácilmente hacer servir lo que hemos practicado en el párrafo precedente, para transformar en decimal cualquiera otra ordinaria. Propongámonos, por ejemplo, la fraccion $\frac{7}{8}$;

1 La reduccion que acabamos de ejecutar es solo un caso particular de esta otra mas general: *valuar el cuociente de una division cualquiera en partes de una denominacion determinada*. Para lo cual se convertirá el dividendo en el número equivalente de partes de la misma denominacion, multiplicándolo por el denominador dado; en seguida se dividirá el producto por el divisor, y resultará el cuociente que se desea. Asi para valuar en *quinzavos* el cuociente de la division de 7 por 3, multiplicaremos por el denominador 15 el dividendo 7; y el producto 105 se dividirá por 3; y el cuociente 35 será el número de *quinzavos* á que equivale $\frac{7}{3}$, es decir, $\frac{35}{15}$.

Numerador ó dividendo.... 7 | 8..*Denominador ó divisor.*

0,875

Convertido en décimas....... 70

1.er residuo en centésimas.. 60

2.° residuo en milésimas... 40

y efectuada la division indicada, llegaremos á conocer que la fraccion $\frac{7}{8}$ de la unidad equivale á 0,875 milésimas; en cuya expresion el cero colocado inmediatamente á la izquierda de la coma y en el lugar correspondiente á las *unidades absolutas*, indica que la fraccion propuesta no contiene unidad entera alguna.

Si hubiésemos de convertir en fraccion decimal la ordinaria $\frac{4}{797}$, seria necesario para hallar la primera cifra significativa del cuociente, escribir tres ceros á la derecha del 4, lo cual equivale á multiplicar por *mil* ó á reducir á *milésimas* el numerador dividendo. Habrá, pues, que ocupar con ceros los lugares asignados á las unidades, á las décimas, y á las centésimas, puesto que no hay cifra alguna significativa que los ocupe.

Numerador ó dividendo.... 4 | 799 *denominador ó divisor.*

0,005018.... [1]

*Convertido en milésimas...*4000

1.er residuo en cienmilésimas 1500

2.° en millonésimas.......... 7030

654

117 Por mas que prolongásemos esta última divi-

1 Cualquiera fraccion ordinaria puede representarse en partes de una nueva denominacion, que sean menores que las primitivas. Con efecto, *multiplicando el numerador por el nuevo denominador, y partiendo este producto por el denominador primitivo, el cuociente será*

sion, jamas obtendríamos un cuociente exacto, como en la primera: porque la fraccion $\frac{4}{797}$ no puede expresarse con el auxilio de las decimales con exactitud como $\frac{7}{8}$. Lo cual depende de que no siendo exactamente divisible el numerador 4 por el denominador 797, tampoco podrá serlo despues de multiplicarlo, sin que al mismo tiempo lo sea de *diez* ó *ciento* ó *mil* &c. por los cuales se multiplica sucesivamente el mismo numerador; pues ningun número puede ser divisor exacto de un producto, sin que lo sea de alguno de sus factores. Ahora bien, los números 10, 100, 1000 &c. compuestos todos del 10, cuyos factores son 2 y 5, no son exactamente divisibles sino por otros números formados de los mismos factores: 8 es uno de estos, puesto que resulta de la sucesiva multiplicacion del *dos por dos por dos*.

118 Las fracciones ordinarias, cuyo valor no puede expresarse exactamente por medio de decimales, ofrecen en su expresion aproximada un carácter que puede servir para determinarlas de nuevo; cual es la vuelta periódica de

el nuevo numerador correspondiente al nuevo denominador. Si quisiéremos, por ejemplo, convertir la fraccion $\frac{3}{4}$ en un número equivalente de *veinticuatravos*, multiplicaremos por 24 el numerador 3, y dividiendo por el denominador 4 el producto 72, el cuociente 18 será el número de *veinticuatravos* equivalente á la fraccion $\frac{3}{4}$; es decir, que $\frac{3}{4}$ es igual á $\frac{18}{24}$. Y si hubiéremos de convertir la misma fraccion en *diecisietavas*, multiplicaremos por 17 el numerador 3, y dividiendo por el denominador el producto 51, nos resultará que $\frac{3}{4}$ viene á ser $\frac{51}{4}$ de una *diecisietava*, ó $\frac{12}{17}$ y $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{17}$ que equivale á $\frac{3}{68}$. Esta operacion y la de la nota precedente estan fundadas en el mismo principio que la correspondiente en el sistema decimal.

las mismas cifras. Si, por ejemplo, transformamos en decimales la fraccion ordinaria $\frac{12}{37}$, nos resultará 0,324324324... en donde las tres cifras 3, 2 y 4 aparecerán sin cesar con el mismo órden, sin que por mas que se continúe, se pueda encontrar fin á la operacion. Con efecto, como en toda division parcial haya de ser el residuo uno de los números enteros menores que el divisor, es indispensable que despues de haber efectuado mas divisiones parciales que números haya de estos, vuelvan á aparecer de nuevo los mismos residuos, y que de consiguiente se nos presenten los mismos dividendos parciales con el mismo órden. En el ejemplo propuesto han bastado tres divisiones parciales para hacernos volver las mismas cifras; pero serian necesarias seis para conseguir la misma vuelta en la fraccion $\frac{6}{7}$, porque en esta resultan por restos los seis números menores que el 7, y nos dan por equivalente al decimal 0,714285714285....... La fraccion ordinaria $\frac{1}{3}$ nos conduce solamente á 0,3333.....

119 Las fracciones ordinarias, cuyos denominadores estan representados por una ó muchas cifras *nueves*, no tienen en su período otra cifra significativa que la 1:

$\frac{1}{9}$ da 0,1111................

$\frac{1}{99}$ da 0,010101..........

$\frac{1}{999}$ da 0,001001001....

y asi de las demas, porque efectuándose constantemente la division de uno de los dividendos 10, 100, 1000 &c. resulta por residuo la unidad.

Haciendo uso de esta observacion, nos es muy fácil pasar de una fraccion decimal periódica dada á la ordinaria de donde haya dimanado. Vemos, por ejemplo, que 0,3333.. es tres veces 0,111....; y siendo esta última expresion equivalente á $\frac{1}{9}$, es consiguiente decidir que la propuesta equivale á $\frac{3}{9}$, ó lo que es lo mismo á $\frac{1}{3}$.

Siempre que el período de la fraccion decimal se componga de ~~las~~ Dos cifras, se le habrá de comparar con la expresion de la ordinaria $\frac{1}{99}$; asi como cuando el período conste de tres cifras se le deberá comparar con la expresion de $\frac{1}{999}$; y asi de las demas. Si nos proponemos, por ejemplo, la fraccion decimal interminable 0,324324..... nos seria fácil echar de ver que se formaria esta fraccion, multiplicando por 324 la 0,001001.... en que se transforma la ordinaria $\frac{1}{999}$; y que de consiguiente la propuesta equivale á $\frac{324}{999}$, la cual, dividiendo sus dos términos por 27, queda reducida á $\frac{12}{37}$.

En general *la fraccion ordinaria de donde procede una fraccion decimal periódica, se determina escribiendo por numerador el número representado por las cifras que forman el período, y por denominador el representado por tantas cifras 9 cuantas sean las del mismo período.*

120 En caso que la primera cifra del período no sea la que se halle inmediatamente á la derecha de la coma, se podrá por un momento trasportar la coma inmediatamente á la izquierda de la primera cifra del período, de modo que se consideren como unidades enteras las representadas por las cifras que subsistan á la izquierda de la coma. En seguida trasformaremos la fraccion decimal periódica en la ordinaria equivalente, y la dividiremos por 10, 100, 1000 &c. segun hubiesen subsistido, una, dos, tres &c. cifras á la izquierda de la coma. Por último, con estas cifras representaremos el numerador de otra fraccion ordinaria, cuyo denominador habrá de ser 10, 100, 1000 &c., segun sea el número de cifras que haya permanecido á la izquierda de la coma: y agregando esta fraccion á la primera, la suma de las dos será la expresion equi-

valente á la decimal interminable propuesta.

Sea esta, por ejemplo, 0,324141...... Escribámosla primeramente en esta forma: 32,4141....., en la cual se ve que la parte decimal interminable corresponde á la fraccion ordinaria $\frac{41}{99}$, y de consiguiente 32,4141......... equivaldrá á $32\frac{41}{99}$; y por tanto la propuesta 0,324141.... vendrá á ser equivalente á la suma de las dos $\frac{32}{100}$ y $\frac{41}{9900}$, que reducidas al comun denominador 9900 dan por resultado la fraccion $\frac{3209}{9900}$, la cual trasformada en decimal interminable, produciria la que nos hemos propuesto.

121 Para formarnos una idea exacta de la verdadera relacion que existe entre una fraccion decimal periódica interminable y la ordinaria de donde procede, puede bastarnos el considerar la fraccion 0,9999......... Con arreglo á lo prescrito, corresponde esta fraccion á la ordinaria $\frac{9}{9}$ equivalente á la *unidad;* y sin embargo, sea cual fuere el número de cifras que de aquella expresion tomemos, jamas equivaldrán á una unidad. Porque al valor de la primera cifra le falta $\frac{1}{10}$ para una *unidad;* al de las dos primeras le falta $\frac{1}{100}$; al de las tres primeras le falta $\frac{1}{1000}$; y asi de las demas: de modo que tomando mas y mas cifras, podremos aproximarnos mas y mas á la unidad, sin llegar jamas á conseguir un valor exactamente igual á la unidad. Esto es lo que nos proponemos dar á entender diciendo que la *unidad* es el *limite* de la fraccion decimal interminable 0,9999......, es decir, que cuantas mas cifras 9 se escriban á continuacion unas de otras, tanto mas se aproximará á la unidad el valor de todas ellas, pero sin poder jamas igualarse á ella con exactitud.

De las fracciones continuas.

122 Cuando por resultado de algun cálculo se nos

presenta un quebrado ó fraccion con términos muy crecidos, y que por carecer estos de todo divisor comun, es irreducible por el método ordinario á menor expresion, nos valemos del arbitrio de obtener su valor con cierta aproximacion, y expresado por medio de términos menores y mas sencillos, y que á consecuencia nos den una idea mas clara del verdadero y exacto valor de la fraccion propuesta.

Sea esta, por ejemplo, $\frac{1103}{887}$, la cual desde luego vemos que equivale al conjunto de 1 unidad entera y del quebrado $\frac{216}{887}$. Para formarnos ahora una idea mas clara de la magnitud de esta fraccion, dividiremos sus dos términos por 216, que es el menor de ellos, y esta division nos hará ver que equivale al cuociente de la unidad dividida por el número mixto $4\frac{23}{216}$: y hallándose comprendido este último número entre los dos enteros 4 y 5, es por consiguiente manifiesto que la fraccion $\frac{216}{887}$ es menor que $\frac{1}{4}$, y mayor que $\frac{1}{5}$. Podemos pues estar ciertos de que una de las expresiones cuyo valor se aproxima al de la primitiva fraccion $\frac{1103}{887}$ es la de $1\frac{1}{4}$ ó la de $\frac{5}{4}$, con la advertencia de que este valor es algo mayor que el verdadero, el cual equivale al conjunto de la unidad entera, y de un quebrado, que teniendo por numerador á la misma unidad, tiene por denominador al número mixto 4 y $\frac{23}{216}$; lo que se expresa por escrito del siguiente modo: $1\frac{1}{4\frac{23}{216}}$

A fin de formarnos en seguida una idea exacta de la expresion $\dfrac{1}{4\frac{23}{216}}$, deberemos considerarla como que nos representa el cuociente que debe resultar de dividir la unidad por el número mixto $4\frac{23}{216}$ (§. 95).

Si dividimos ahora por 23 á los dos términos de la fraccion $\frac{23}{216}$, nos resultará por equivalente á esta la expresion $\frac{1}{9\frac{9}{23}}$; y si en ella omitimos el quebrado $\frac{9}{23}$ que en el denominador acompaña al entero 9, quedará reducida á solo $\frac{1}{9}$ la fraccion $\frac{23}{216}$, y por consiguiente tendremos en $1\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ otra expresion aproximada de la primitiva fracion $\frac{1103}{887}$; debiendo tener entendido que el valor representado por la expresion $1\frac{1}{4\frac{1}{9}}$, ha de ser algo menor que el verdadero y exacto de la primitiva, porque siendo 9 menor que el verdadero cuociente de la division del 216 por 23, la fraccion $\frac{1}{9}$ habrá de ser mayor que la que deberia acompañar al número entero 4: y por tanto, siendo el divisor adoptado $4\frac{1}{9}$ mayor que el exacto $4\frac{23}{216}$, el cuociente representado por la expresion $\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ habrá forzosamente de ser menor que el verdadero.

Reduciendo á quebrado impropio el número mixto $4\frac{1}{9}$ (§. 91), y dividiendo por el quebrado $\frac{37}{9}$ la unidad (§. 95), tendremos á $\frac{9}{37}$ por expresion del cuociente, y será 1 y $\frac{9}{37}$, ó lo que es equivalente, $\frac{46}{37}$ otro valor mas aproximado del verdadero de la primitiva fraccion $\frac{1103}{887}$.

Siendo la última expresion exacta del verdadero valor de la fraccion primitiva $1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{9}{23}}}$

si dividimos por 9 los dos términos del quebrado $\frac{9}{23}$, nos resultará la siguiente $1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}}$;

omitiendo en esta última el quebrado $\frac{5}{9}$, se nos convertirá en $1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2}}}$

cuyo valor es algo mayor que el verdadero de la primitiva fraccion propuesta; porque siendo mayor el valor de $\frac{1}{2}$ que el de la expresion $\frac{1}{2\frac{5}{9}}$, el número mixto $9\frac{1}{2}$ será mayor de lo que debiera; por consiguiente el valor de la expresion $\frac{1}{9\frac{1}{2}}$ será menor de lo justo; asimismo lo será $4\frac{1}{9\frac{1}{2}}$; y de consiguiente las expresiones $\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2}}}$ y $1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2}}}$ serán mayores de lo que deberian ser.

Transformando en fraccion impropia al número mixto $9\frac{1}{2}$, tendremos al quebrado equivalente $\frac{19}{2}$. De consiguiente la expresion $\frac{1}{9\frac{1}{2}}$ equivaldrá á $\frac{2}{19}$; y la de $4\frac{1}{9\frac{1}{2}}$ á $4\frac{2}{19}$, que transformado en su equivalente quebrado impropio, viene á ser $\frac{78}{19}$, y por tanto $\frac{1}{4\frac{2}{19}}$ será $\frac{19}{78}$; y finalmente tendremos á $1\frac{19}{78}$ ó á $\frac{97}{78}$ como cuarto valor aproximado de la fraccion $\frac{1103}{887}$.

Volviendo de nuevo á la expresion exacta $1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}}$ si dividimos por 5 los dos términos de la fraccion $\frac{5}{9}$ nos resultará $1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1\frac{4}{5}}}}}$; la cual, omitiendo el quebrado $\frac{4}{5}$, se nos convertirá en $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}$; cuyo valor es algo menor que el verdadero, como es fácil verlo por el método de que ya hemos hecho uso en la expresion anterior.

Con efecto, á $\frac{1}{3}$ se reduce la expresion $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}$: la siguiente $\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3}}$ equivale á $\frac{3}{28}$: la inmediata superior se convierte en $\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{28}}$, que es igual á $\frac{28}{115}$; de forma que la quinta expresion del valor examinado viene á ser $1\,\frac{28}{115}$ ó $\frac{143}{115}$.

Dividiendo últimamente por 4 los dos términos de la fraccion $\frac{4}{5}$ que se nos presenta en la expresion hallada $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{4}}}}}$ nos resultará por cuociente $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}$; y suprimiendo de esta expresion el quebrado $\frac{1}{4}$, y reputando como equivalente á $\frac{4}{5}$ el quebrado restante $\frac{1}{5}$, y sustituyendo este último quebrado en lugar del otro, tendremos la nueva expresion aproximada $1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$, cuyo valor es algo mayor que el verdadero.

Reduciendo, como en los casos anteriores, la expresion $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$ al quebrado simple que ella representa, encontraremos la nueva expresion mas próxima $1\,\frac{47}{193}$ ó $\frac{240}{193}$. del valor de la primitiva fraccion propuesta $\frac{1105}{887}$.

Restableciendo en el último denominador la fraccion $\frac{1}{4}$, que de él hemos suprimido; nos resultará la expresion $1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{1}{1\cfrac{1}{4}}}}}}$, la cual, reducida como las anteriores, vuelve á producir la primitiva fraccion propuesta $\frac{1103}{887}$.

Con cualquiera otro quebrado se puede efectuar una operacion semejante, y deducir de él una série de valores aproximados, alternativamente mayores y menores que el valor verdadero, en caso que se trate de un quebrado propio; ó alternativamente menores y mayores, si como en el ejemplo anterior, fuere el numerador mayor que el denominador.

Las varias expresiones que hemos determinado, equivalentes á una fraccion propuesta, de cuyo valor intentamos tomar mas sencilla y mas clara idea, son conocidas bajo el nombre de *fracciones continuas*, las cuales pueden definirse generalmente, diciendo que son *unas fracciones cuyo denominador es la suma de un entero y un quebrado cuyo denominador es otra suma de un entero y otro quebrado cuyo denominador es otro número mixto*; y asi sucesivamente. De las importantes propiedades de esta especie de fracciones trataremos en el *complemento del álgebra*.

Aplicaciones usuales de la Aritmética.

123 En lo que hasta aqui hemos expuesto, se hallan las reglas verdaderamente fundamentales de la Aritmética de los números abstractos; y para hacer de ellas los muchos usos para que pueden servirnos en la sociedad, lo único que podemos echar menos es el conocimiento de las diversas unidades que por un convenio general empleamos para medir las cantidades de diferentes especies; y compararlas entre sí, bajo cualquiera forma que se nos pre-

senten. Para dar, pues, alguna idea de esta materia, presentaremos las siguientes tablas de las medidas de que mas ordinario y general uso se hace en Castilla.

Medidas del dinero.

			Maravedí.
Real.			34
Peso.		15	510
Doblon.	4	60	2040

Medidas del tiempo.

			Segundo.
Minuto.			60
Hora.		60	3600
Dia.	24	1440	86400

Medidas de longitud[1].

				Punto.
Línea.				12
Pulgada.			12	144
Pie.		12	144	1728
Vara.	3	36	432	5184

1 En nuestros cuerpos militares facultativos se hace uso de la antigua medida francesa, llamada *toesa*, equivalente á seis pies, llamados *de rey*; equivaliendo cada pie á doce pulgadas, y cada pulgada á doce líneas; pero con la notable diferencia de que los 6 *pies de rey* equivalen muy próximamente á 7 de los de la vara castellana.

Medidas de capacidad ó de líquidos.

	Azumbre.	*Cuartillo.*	*Copa.*
Cuartillo.			4
Azumbre.		4	16
Cántaro ó arroba.	8	32	128

Medidas de áridos.

	Fanega.	*Celemin.*	*Cuartillo.*	*Ochavo.*	*Ochavillo.*
Ochavo.					4
Cuartillo.				4	16
Celemin.			4	16	64
Fanega.		12	48	192	768
Cahiz.	12	144	576	2304	9216

Medidas del peso.

	Arroba.	*Libra.*	*Onza.*	*Adarme.*	*Grano.*
Adarme.					36
Onza.				16	576
Libra.			16	256	9216
Arroba.		25	400	6400	230400
Quintal.	4	100	1600	25600	921600

Para que no haya la menor duda sobre la inteligencia de estas tablas, descifraremes la última.

La línea horizontal inferior nos está indicando que cada quintal equivale á 4 arrobas, ó á 100 libras, ó á 1600 onzas, ó á 25600 adarmes, ó 921600 granos.

La línea inmediata superior nos dice que cada arroba equivale á 25 libras, ó á 400 onzas, ó á 6400 adarmes, ó á 230400 granos.

En la línea tercera se nos dá á entender que cada libra equivale á 16 onzas, ó á 256 adarmes, ó á 9216 granos.

En la siguiente se nos hace conocer que cada onza equivale á 16 adarmes, ó á 576 granos.

Finalmente en la quinta línea horizontal vemos que cada adarme equivale á 36 granos.

124 Todas las cuestiones en que se trate de averiguar cuál sea el número equivalente á la reunion de otros muchos referidos á una misma unidad, se resuelven valiéndonos de la adicion.

Asi cuando se hayan hecho tres compras, habiendo empleado en la primera de ellas 5374 reales; en la segunda 1951 reales; y en la tercera 862 reales, y se quiera saber cuál es el número total de reales que se ha empleado en ellas, habremos de sumar (§. 15.) los tres números 5374, 1951 y 862; y la suma de ellos 8187 será el de reales que se deseaba conocer.

Igualmente, si habiéndose vendido cuatro partidas de trigo, la primera de 485 fanegas; la segunda de 769 fanegas; la tercera de 1294 fanegas; y la cuarta de 238 fanegas, nos importase saber cuántas son todas las fanegas vendidas, lo consiguiremos sumando los cuatro números 485, 769, 1294 y 238; cuya suma 2786 es el número total de fanegas que nos habíamos propuesto determinar.

125 Por el contrario, todas las cuestiones en que se trate de averiguar el resíduo que resulta despues de haber

quitado de un número otro menor referido á la misma unidad; ó la diferencia que se advierte entre dos números desiguales; ó el exceso que el número mayor lleva al menor, se resuelven por la sustraccion.

Si, por ejemplo, de la cantidad representada por 28574 reales hemos tomado 19687 reales, restando este número de aquel otro, vendremos en conocimiento de que aun resultan de resíduo 8887 reales. Del mismo modo pondríamos en claro que entre los números 3746 varas y 1982 varas, existe la diferencia de 1764 varas que el primero tiene de mas que el segundo, y al contrario.

126 Con el auxilio de la multiplicacion averiguamos el valor total de un número conocido de cosas, suponiendo que esté igualmente dado, y que sea uno mismo el precio de todas ellas; pues en tales casos se trata solo de repetir el número que nos dé á conocer este precio, tantas veces como cosas sean; ès decir de multiplicar el precio de cada una por el número de ellas. Si, por ejemplo, nos propusiéremos averiguar cuál sea el valor total de 28 arrobas á 54 reales cada una, nos bartará repetir 28 veces los 54 reales, precio de cada arroba, ó lo que viene á ser lo mismo, multiplicar el 54 por 28 para obtener en el producto 1512 el número de reales á que asciende el valor de todas.

Si, como nos hemos propuesto determinar el valor de 28 arrobas á 54 reales cada una, hubiéramos querido averiguar el de 28 varas ú otras cosas cualesquiera al mismo precio de 54 realés cada una, el valor de todas ellas seria igualmente 1512 reales, ó 28 veces 54 reales. Se ve, pues, que en todas las cuestiones de esta clase el multiplicando es el precio de cada una de las cosas compradas ó vendidas, y que las unidades del producto deben siempre ser de la misma especie que las del multiplicando. Y como el número de las cosas compradas ó vendidas solo nos indique en estas cuestiones cuántas veces se haya de repetir el precio de cada una, es claro que el mismo número de cosas compradas ó vendidas es el multiplicador; y no dependiendo de la especie de las unidades de este la de las del producto, lo podemos siempre mirar como un número abstracto. Esta misma consideracion podrá servirnos para determinar en cualquiera multiplicacion de números concretos, cuál de ellos sea el multiplicando, y cuál el multiplicador; sin embargo de que para la magnitud del producto sea por lo comun indiferente aquella determinacion.

Si siendo el precio de cada quintal $348\frac{1}{2}$, ó 348,5 reales, se nos preguntase cuánto costarian 87 quintales y 14 libras, ó lo que es lo mismo $87\frac{14}{100}$, ó últimamente 87,14 quintales; deberíamos repetir 87 veces el precio de cada quintal, y tomar ademas de este mismo precio $\frac{14}{100}$, y por último sumar los resultados de las dos operaciones. Pues cabalmente es esto lo que ejecutamos multiplicando los 348,5 reales por el multiplicador 87,14; de modo que el producto 30368,290 ó 30368,29 es el número total de reales que se deseaba conocer.

Podria esta segunda cuestion mirarse bajo este otro punto de vista. Si el precio 348,5 que se ha supuesto á cada quintal, fuera el de cada centésima de quintal, es decir, de cada una de las partes de ínfimo órden del multiplicador, es evidente que repitiendo al multiplicando 8714 veces, que vienen á ser tantas como centésimas contiene el multiplicador, el producto 3036829 deberia ser el valor total que se buscaba; mas siendo falsa aquella suposicion, pues que en ella se ha hecho cien veces mayor de lo que debiera ser el multiplicador, el producto habrá igualmente resultado cien veces mayor que el verdadero (§. 55); y por tanto para reducirlo á su justo valor se habrá de tomar la centésima parte, ó separar de sus cifras dos para decimales.

Finalmente, siendo 348,5 el precio de cada quintal ó de cien libras, el precio de cada libra ó centésima de quintal deberá ser la centésima de aquel otro, y representarse de consiguiente por 3,485 reales. Multiplicando ahora este precio de cada centésima de quintal por el número de ellas, que es 8714, el producto habrá de ser el valor total que se pedia.

Este modo de mirar la cuestion propuesta podrá acaso parecer preferible por la facilidad que hay de convertir unas en otras las diferentes divisiones y subdivisiones decimales de una misma unidad, con solo mudar el lugar de la coma (§. 110); y sobre todo, porque cuanto acabamos de ejecutar, no viene á ser otra cosa que hacer al multiplicando tantas veces menor, cuantas veces mayor hayamos hecho al multiplicador, por cuya alteracion de los dos factores no padece variacion alguna el producto final (§. 56).

Asi como suponiendo conocido el precio de una arroba, de una fanega, de una vara, y en general de una unidad de cualquiera especie, podemos proponernos determinar el valor total de un cierto número tambien conocido de aquellas mismas unidades; nos puede ocurrir tener que averiguar el valor de una ó muchas partes designadas de la misma unidad. Si, por ejemplo, se nos preguntase *¿cuánto habrá de ser el valor de tres cuartas de una vara, siendo 20 reales el precio de una vara entera?* siendo esta cuestion, como se ve, de la misma naturaleza que las anteriores, se habrá de resolver, como ellas, por medio de la multiplicacion, sin otra diferencia que la de ser un quebrado el multiplicador; á lo cual es consiguiente que del multiplicando se hayan de tomar tantas partes como el multiplicador contenga de la unidad (§. 87). Asi que, en el ejemplo propuesto, siendo 20 reales el multiplicando, y $\frac{3}{4}$ el multiplicador, el resultado de la multiplicacion habrá de ser tres cuartas partes de 20 reales; y esto se conseguirá dividiendo por 4, ó tomando una cuarta parte de 20 reales, y triplicándola ó multiplicándola por 3; ó multiplicando por 3 el número 20, y dividiendo por 4 el producto; ó tomando del 20 la mitad, que equivale á dos cuartas partes; tomando la mitad de aquella mitad, y sumando estas dos mitades; ó finalmente tomando una cuarta parte del 20, y restando la del mismo 20.

Si nos propusiéremos averiguar el valor de *dos tercias y media* de vara á $8\frac{3}{4}$ reales la vara, sustituiríamos primeramente en lugar de la *media tercia* de vara el quebrado equivalente $\frac{1}{6}$ de vara, y reduciendo á un comun denominador los dos quebrados $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$, la suma de estos vendrá á ser $\frac{5}{6}$. Habrá, pues, que tomar cinco *sextas* partes del multiplicando $8\frac{3}{4}$ reales, ó del quebrado impropio equivalente $\frac{35}{4}$ de real; y multiplicando este quebrado por el multiplicador $\frac{5}{6}$, el producto $\frac{175}{24}$, equivalente á $7\frac{7}{24}$ reales, será el que buscábamos. Tambien pudimos hallar este mismo resultado, tomando en primer lugar la mitad del multiplicando; la cual es el valor de tres *sextas* de vara; tomando en seguida la tercia parte del mismo multiplicando, la cual es el valor de las dos sextas partes restantes del multiplicador; y sumando por último los dos resultados.

127 Para reducir doblones á pesos, pesos á reales, reales á maravedis; quintales á arrobas, arrobas á libras, libras á onzas, onzas á adarmes; y en general para transformar cualquier número de unidades superiores en otro equivalente de unidades menores ó inferiores, deberemos servirnos de la multiplicacion; pues cuando se nos dice, por ejemplo, que reduzcamos á maravedis 8 reales, se supone sabido que cada real equivale á 34 maravedis, y solo nos resta multiplicar este número por 8 para obtener en el producto 272 el número de maravedis equivalente á *ocho* reales.

128 Por lo que respecta á la division, hacemos uso de ella siempre que tratamos de averiguar cuánto toca á cada una de varias personas, cuyo número esté dado, y entre las cuales se haya de repartir un número conocido de unidades de cualquiera especie; ó lo que es lo mismo, siempre que nos propongamos distribuir cualquier número conocido en cierto número conocido de partes iguales: en cuyos casos el número conocido que se trate de distribuir ó repartir es el dividendo; el número de partes iguales en que nos propongamos distribuirlo, es el divisor; y el número que de la division resulta, es el cuociente que corresponde á cada una de las unidades del divisor.

Deberemos tambien servirnos de la division para resolver todas las cuestiones semejantes á esta; *sabiéndose el valor total de un número conocido de cosas que se han comprado ó vendido, ó se intenten comprar ó vender á un mismo precio; y conociendo tambien el número de todas ellas; determinar el precio de cada una*; pues para hallar este precio, habremos de efectuar en todos casos una division, en la cual será el dividendo el número que exprese el valor total de las cosas que se hayan comprado ó vendido, ó se intenten comprar ó vender; debiendo ser el número de estas el divisor. Es muy fácil demostrar esta proposicion con solo hacer observar que el valor total conocido es necesariamente el producto del precio de cada una de las cosas, multiplicado por el número de ellas; y ya se sabe que si se divide el producto de cualquier multiplicacion por uno de sus factores, cual lo es en el caso presente el número de cosas compradas ó vendidas, ó que se tratan de comprar ó vender, ha de resultar por cuociente el otro factor, que en el mismo caso es el precio de cada una de ellas.

Si suponiendo que 19,13 varas hayan costado 315,4537 reales, tratamos de averiguar el precio de cada vara, habremos de dividir este segundo número por el primero; y para ello suprimiremos la coma del divisor, y adelantaremos dos lugares hácia la derecha la del dividendo, con lo cual habremos multiplicado al dividendo y al divisor por el mismo número *ciento*, y por eso no resultará alteracion alguna en el cuociente que buscamos. Dividiendo, pues, el número 31545,37 por el 1913, el resultado 16,49 será el número de reales, y precio que se buscaba de cada vara.

En todos los casos semejantes al propuesto, el cuociente deberá ser un número de unidades de la misma especie que las del dividendo; y sea cual fuere la denominacion de las unidades del divisor, habremos de considerar á este como un número abstracto que solo nos indica en cuántas partes iguales se ha de distribuir el dividendo.

En vez de habérsenos dado el número de unidades compradas ó vendidas, ó que se intenten comprar ó vender, y el total valor de ellas, á fin de determinar el precio de cada una, podria muy bien habérsenos dado el valor de una ó mas partes de una unidad, para determinar por este medio el precio de una unidad entera. Si, por ejemplo, sabemos que tres cuartas y media, ó lo que es equivalente, siete octavas partes de una vara han costado 21 reales, y nos proponemos averiguar el precio de una vara: siendo esta cuestion, como lo es, de la misma naturaleza que la anterior, se habrá de resolver, como ella, por medio de una division en la cual los 21 reales serán el dividendo, $\frac{7}{8}$ el divisor; y efectuada la division con arreglo á lo prescrito (§. 95), es decir, multiplicando el dividendo por el denominador 8, y dividiendo el producto 168 por el numerador 7, el cociente 24 reales habrá de ser el precio que buscábamos de una vara. Porque suprimiendo, segun hemos practicado, el denominador 8 del quebrado divisor, y multiplicando al mismo tiempo el dividendo por el mismo 8, hemos multiplicado el dividendo y divisor por un mismo número, y en lugar de la cuestion propuesta hemos sustituido la siguiente que se infiere de ella: *costando siete varas 168 reales, ¿cuál es el precio de una vara?* para cuya solucion dividiremos 168 por 7, y el resultado 24 será el número de reales que deseábamos conocer.

Si inmediatamente hubiésemos dividido por 7 los 21 reales que por suposicion costaron las siete octavas partes de una vara, el cuociente 3 reales seria el valor de media cuarta ó de una octava parte de la vara; y multiplicando por 8 este valor de la octava parte de vara, tendríamos en el producto 24 reales el precio de la vara entera.

Acontece no pocas veces que el valor de las cosas compradas ó vendidas está expresado por un número menor que el de estas, como cuando, por ejemplo, se nos dice que ocho libras han costado cuatro reales. En tales casos el dividendo es igualmente el valor total de las cosas compradas ó vendidas, y el divisor el número de ellas. La única diferencia que aqui se advierte, es que el cuociente es el quebrado propio, cuyo numerador es el dividendo, y cuyo denominador es el divisor. Asi que en el ejemplo propuesto el precio de cada libra se representará por $\frac{4}{8}$ de real, ó reduciendo este quebrado á su mas sencilla expresion, por $\frac{1}{2}$ real.

129 Hé aqui otra cuestion general á que tambien se aplica la division, y en la cual son números de unidades de una misma especie el dividendo y el divisor, siéndolo de diversa el cuociente; y hablando con mas propiedad, el cuociente es un número abstracto que solo expresa cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo; *conociendo el valor total de muchas cosas que se han comprado ó vendido, ó se intenten comprar ó vender, y ademas el precio de cada una, determinar el número de ellas.* En tales casos el valor total que se haya de emplear ó se intente emplear, habrá de ser el dividendo; el precio de cada una de las cosas el divisor; y el cuociente deberá ser el número de ellas por la misma razon que hemos alegado en la cuestion del §. anterior.

Si sabiéndose, por ejemplo, que cada fanega de trigo cuesta 80 reales, se quiere averiguar cuántas fanegas se pueden comprar con 52640 reales, se habrá de dividir este segundo número por el primero, y el cuociente 658 será el número de fanegas que se deseaba conocer, puesto que deben ser cabalmente tantas como veces esté contenido en 52640 reales 80 reales. En realidad el cuociente 658 es un número abstracto que solo expresa cuántas veces está contenido en el dividendo el divisor, y si decimos que es de fanegas, es porque siendo condicion de la cuestion propuesta que el precio de cada fanega sea 80 reales, deberán ser tantas las fanegas que se puedan comprar con los 52640 reales, cuantas sean las veces que en este segundo número esté contenido el primero.

Aunque el número con que se exprese la cantidad de dinero empleada ó que se intente emplear, sea menor que el que designa el precio de cada una de las cosas que se compran ó venden, no dejará por eso de ser aquel el dividendo, y este el divisor; y no habrá en este caso mas diferencia sino que el cuociente será un quebrado cuyo numerador será el dividendo, y cuyo denominador será el divisor; y expresará, no cuántas unidades, sino cuantas partes de una unidad se han comprado ó vendido, ó se pueden vender ó comprar.

Si estando, por ejemplo, cada vara á 24 reales, se nos pregunta cuánto se podrá comprar con 16 reales, el quebrado $\frac{16}{24}$, que reducido á su mas sencilla expresion, equivale á $\frac{2}{3}$, nos indicará que con los 16 reales se pueden comprar dos tercias partes de una vara, cuyo precio sea 24 reales.

Esta cuestion no es mas que un caso particular de esta otra mas general: *¿qué parte es un número dado de otro mayor tambien dado?* para cuya solucion se dividirá el número menor por el mayor; y el cuociente, que será un quebrado propio, reducido, si es posible, á su mas sencilla expresion, indicará qué parte ó partes sea un número de otro.

130 La reduccion de maravedis á reales, la de reales á pesos, la de pesos á doblones, la de adarmes á onzas, la de onzas á libras, la de libras á arrobas, la de arrobas á quintales; y en general *la reduccion de cualquier número*

de unidades menores ó inferiores á otro equivalente de unidades mayores ó superiores, se efectúa por medio de la division: y no es dificil echar de ver que esta cuestion es uno de los casos comprendidos en la anterior. Con efecto, cuando nos proponemos averiguar á cuántos pesos equivalen 2295 reales, toda la dificultad está reducida á determinar por medio de la division cuántas veces estan contenidos en los 2295 reales, los 15 á que equivale un peso. Dividiendo, pues, por 15 el número 2295, el cuociente 153 deberá ser el número de pesos que deseábamos conocer.

Despues de las varias aplicaciones que hasta aqui hemos indicado de las operaciones de la Aritmética, nos parece inútil extendernos mas sobre este punto, estando como estamos bien convencidos de que en habiendo comprendido el objeto de cada una de las reglas, no puede ser dificil aplicarlas á la solucion de otras innumerables cuestiones.

De los números complejos ó denominados.

131 A consecuencia de la absoluta facultad que tenemos de comparar las cantidades cuya magnitud nos propongamos medir, con otra cualquiera de la misma especie cuya magnitud miremos como conocida, hemos adoptado de comun acuerdo para la medicion de cantidades de una misma especie, distintas unidades, unas mayores que otras, fijando al mismo tiempo la relacion de magnitud que estas entre sí tienen. Para medir, por ejemplo, las distancias, nos sirven de *medida* no solo la *vara* sino tambien el *pie*, la *pulgada*, la *línea* y otras muchas, teniendo presente que cada *vara* equivale á tres *pies*; cada *pie* á doce *pul-*

gadas; cada *pulgada* á doce *líneas*; y asi de las demas.

Bajo este supuesto, á cualquiera cantidad cuya magnitud expresemos por medio de un solo número referido á una sola unidad, podemos igualmente y solemos expresarla por medio de un conjunto de dos, tres, ó mas números referidos á distintas y desiguales unidades. La longitud, por ejemplo, designada por el solo número entero 30 pulgadas, puede igualmente expresarse y se expresa por el conjunto de los dos números 2 pies y 6 pulgadas; el peso que designamos con el solo número 180 *libras*, se designa igualmente por el conjunto de los tres números 1 *quintal*, 3 *arrobas*, y 5 *libras*.

A estos conjuntos de dos, tres ó mas números concretos referidos á distintas y desiguales unidades, por cuyo medio expresamos la magnitud de una cierta y determinada cantidad, damos el nombre de *números complejos ó denominados*, por el cual los distinguimos de los que expresan la relacion de una cantidad á una sola unidad y que se llaman *números incomplejos*.

132 Todo número complejo puede transformarse en otro incompleto equivalente, referido á cualquiera de las unidades de la misma naturaleza. Por ejemplo, el número complejo 5 *quintales*, 3 *arrobas* y 12 *libras* puede transformarse en el incomplejo 587 *libras*; pues que equivaliendo cada quintal á 100 libras, y cada arroba á 25, los 5 *quintales* equivaldrán á 500 *libras* y las 3 *arrobas* á 75; y de consiguiente el conjunto de los tres números concretos de que se compone el complejo propuesto, equivaldrá al incomplejo 587 referido á la libra, que en este caso es la unidad menor de las tres de que se hace mencion en la expresion del número complejo. El mismo resultado hubiéramos obtenido, sustituyendo en lugar de los

5 *quintales* y 3 *arrobas*, 23 *arrobas*, y en vez de estas su equivalente 575 *libras*, y agregando por último las 12 libras que desde luego se presentan en el número complejo, nos resultarán 587 libras que hallamos al principio.

Ahora, puesto que las 3 arrobas equivalen á 75 libras; si á estas agregamos las 12 que aparecen en el número complejo propuesto, resultarán 87 libras, y como cada quintal equivale á 100 libras, las 87 vendrán á ser $\frac{87}{100}$, ú 0,87 de quintal. Asi se ve que el número complejo equivale al incomplejo mixto $5\frac{87}{100}$ ó 5,87 quintales. Aun mas: reduciendo el número mixto de entero y quebrado á quebrado impropio (§. 91), resultará el número complejo transformado en el quebrado impropio $\frac{587}{100}$ de quintal.

Por el mismo estilo el número complejo 9 *doblones*, 3 *pesos*, 14 *reales* y 28 *maravedis*, se transforma en el imcomplejo 20394 maravedis, sustituyendo en lugar de los 9 doblones 18360 maravedis á que equivalen; en lugar de los 3 pesos 1530 maravedis; en lugar de los 14 reales su equivalente 476 maravedis; y agregando á los tres números de maravedis el cuarto, que aparece en la expresion del número complejo propuesto, la suma de todos cuatro á que equivale este número, vendrá á ser 20394 maravedis.

Si solo en lugar de los 3 pesos y de los 14 reales hubiésemos sustituido los dos números respectivamente equivalentes de maravedis 1530 y 476; y á estos dos hubiésemos agregado los 28 que aparecen en el número complejo propuesto, habria resultado que el conjunto de los tres últimos números parciales del complejo equivalia á 2034 maravedis; y como cada doblon equivale á 2040 maravedis, y de consiguiente cada maravedí es un *dosmil y cuarenta-*

vo de doblon, los 2034 maravedis serán $\frac{2034}{2040}$ de doblon. Por tanto el número complejo propuesto podrá transformarse en el mixto incomplejo $9\frac{2034}{2040}$ doblones; y convirtiendo este número mixto en su equivalente quebrado impropio, vendrá á ser $\frac{20394}{2040}$ de doblon. En donde puede fácilmente notarse que el numerador es el número de maravedis á que equivale todo el número complejo propuesto; y el denominador el número de maravedis á que equivale un doblon.

Para reducir, pues, cualquier número complejo á quebrado impropio de la unidad mayor, *se transformarán los números parciales de que se compone, en sus equivalentes referidos á la unidad menor; y la suma de todos ellos habrá de ser el numerador; debiendo ser el denominador el número de unidades menores á que equivale una de las mayores.*

Con el auxilio de estas transformaciones se pueden sin gran dificultad convertir los números complejos en incomplejos; y á consecuencia, para las operaciones aritméticas que nos propongamos ejecutar con ellos, bastarán las reglas prescritas hasta ahora para con los números abstractos. Pero sin necesidad de practicar con los números complejos ninguna reduccion, podemos ejecutar con ellos las cuatro operaciones aritméticas, observando las siguientes reglas.

Adicion de los números complejos.

113 La adicion de los números complejos ó denominados se efectúa por el mismo órden que la de los incomplejos y la de los abstractos; pues asi como en estas se comienza á sumar por las unidades de inferior órden, y se reservan las decenas que contiene la suma de las unidades

de cada órden, para agregarlas á las unidades del órden inmediato superior; la adicion de los números complejos se comienza por los números que se refieren á la unidad menor; y se continúa por los que se refieren á la unidad inmediatamente mayor, hasta haber sumado en su respectivo lugar los diferentes números que aparecen en los complejos propuestos: con la advertencia de que si alguna suma parcial es tal, que contenga una ó mas unidades de las inmediatamente mayores, se reservan estas para agregarlas á las que de esta misma especie aparezcan en los números propuestos. Es, pues, muy conveniente colocar los números complejos que nos propongamos sumar, en tal disposicion que los números que en todos ellos se refieran á una misma unidad, se hallen en una misma coluna, y que se coloquen de modo que formen la primera coluna de la izquierda los números que se refieran á la unidad mayor; colocando igualmente á la derecha en sus respectivas colunas los demas números, segun la magnitud de la unidad á que se refieren. Colocados que sean en este órden los números propuestos, se ejecutará separadamente la adicion de los números que se hallen en cada coluna, comenzando por los de la derecha, procediendo sucesivamente á todas las demas hácia la izquierda, y teniendo cuidado de reservar las unidades inmediatamente mayores que contenga cada suma parcial, para agregarlas á las que aparezcan de la misma magnitud en los números complejos propuestos.

Propongámonos, por ejemplo, sumar los siguientes números complejos.

Doblones.	*Pesos.*	*Reales.*	*Maravedis.*
984	3	12	28
38	1	6	16
1413	2	14	30
319	0	10	22
2756	0	14	28

Estan escritos, como se ve, los números propuestos, de modo que se hallan en la primera coluna todos los que se refieren al doblon como unidad; en la segunda los que se refieren al peso; en la tercera los que se refieren al real; y en la última los que se refieren al maravedí; y con el cuidado de que las cifras que representan unidades absolutas, decenas, centenas &c. en cada uno de estos números esten colocadas unas debajo de otras con arreglo á lo prescrito (§. 15). Comenzando en seguida la adicion por la derecha, hemos sumado todos los maravedís, y en la suma han resultado 96: y como cada 34 maravedís equivalen á un real, dividiendo los 96 por 34, hemos visto que la primera suma parcial equivale á 2 reales y 28 maravedís. Hemos escrito solo estos 28 en la coluna de los maravedís, y hemos reservado los 2 reales para agregarlos á los que aparecen en la coluna inmediata. El resultado de la adicion de los números de esta segunda coluna es 42 reales, los cuales con la agregacion de los dos que con este objeto se han reservado de la suma parcial anterior, vienen á ser 42 reales. Teniendo ahora presente que cada 15 reales equivalen á un peso, hemos dividido los 44 por 15, y asi hemos visto que la segunda suma parcial equivale á 2 pesos y 14 reales. Hemos escrito solo estos 14 en la segunda coluna, y reservado los 2 pesos para agregarlos á los que desde luego existen en la tercera. La suma de estos es 6 pesos, que con la agregacion de los dos que se reservaron de la suma de los reales, vendrán á ser 8 pesos: y equivaliendo cada 4 pesos á un doblon, los 8 equivaldrán á dos doblones, los cuales se han reservado para agregarlos á los doblones que aparecen en la última coluna, escribiendo un cero en la anterior para indicar que no hay peso alguno que agregar á los doblones. Hemos sumado por último los que aparecen en la última coluna, agregándoles los dos que se han reservado para ello de la suma de los pesos; y asi ha resultado que la suma total es el número complejo 2756 doblones 14 reales y 28 maravedis.

Si á los números que se refieren á la unidad menor acompañasen quebrados, serán estos los primeros que deban sumarse, practicando para ello cuanto hemos prescrito (§. 98).

134 Lo que hemos practicado en el ejemplo anterior, aunque solo sea un caso particular, puede darnos á conocer que toda adicion de números complejos puede ejecutarse con arreglo á los mismos principios, y que todo se reduce á sumar separadamente números que se refieren á distintas y desiguales unidades, comenzando por los que se refieren á la unidad menor, y transportando á la coluna siguiente las unidades inmediatamente mayores que esten contenidas en la suma parcial que se acabe de determinar. De modo que si los números propuestos hubiesen sido de varas, pies y pulgadas, habríamos sumado primeramente las pulgadas; y si esta primera suma parcial hubiese sido menor que 12, se la habria escrito en la misma coluna de las pulgadas; mas siendo igual ó mayor

que 12, se habrán reservado de ella tantos pies, cuantas veces contenga al 12 la suma; y asi sucesivamente.

Para ejercicio de nuestros lectores propondremos algunos otros ejemplos, limitándonos á colocar los diferentes números segun el órden que deben guardar, y á indicar los resultados, omitiendo los razonamientos que deben dirigir la operacion, porque lo dicho hasta aqui basta para que cada uno pueda hacerlos por sí solo.

Quintales.	*Arrobas.*	*Libras.*	*Onzas.*	*Adarmes.*
238	3	18	13	15
726	2	22	8	12
58	0	9	10	0
9	3	0	6	14
1033	2	1	7	9

Toesas.	*Pies.*	*Pulgadas.*	*Líneas.*	*Puntos.*
34	5	6	7	8
16	3	2	5	6
127	4	10	11	9
368	0	11	8	0
1249	2	9	0	10
1796	5	4	9	9

Sustraccion de los números complejos.

135 Para efectuar la sustraccion de los números complejos ó denominados, se les coloca en la misma disposicion que para sumarlos; y comenzando por los nú-

meros que se refieren á la unidad menor, se ejecutan sucesivamente tantas sustracciones parciales como especies distintas de unidades aparezcan en los números complejos propuestos; y asi como en la sustraccion de los números incomplejos y en la de los abstractos, cuando el número de unidades de alguno de los órdenes inferiores es mayor en el sustraendo que su correspondiente en el minuendo, tomamos mentalmente una de las unidades del órden inmediatamente superior, y transformando esta en el número equivalente de las del inferior, y agregándole el del minuendo, se nos facilita la sustraccion que á primera vista pareceria impracticable; aqui del mismo modo, siempre que alguno de los números de las unidades menores sea mayor en el sustraendo que en el minuendo, se toma mentalmente una de las unidades inmediatamente mayores; se sustituye en lugar de ella el número equivalente de las inmediatamente menores; á este se le agrega el que de las mismas unidades aparezca en el minuendo; y por este medio es fácil ejecutar aquella sustraccion parcial. Mas en tales casos al pasar á ejecutar la inmediata siguiente, habrá de tenerse presente que el número del minuendo tiene ya de menos una unidad.

Con arreglo á esto tratemos de restar un número complejo de otro, proponiéndonos, por ejemplo, quitar ó rebajar de 35 doblones 2 pesos 7 reales y 14 maravedís, 18 doblones 3 pesos 11 reales y 30 maravedís.

Escribiremos primeramente el sustraendo debajo del minuendo, cuidando de que formen colunas los números que se refieren á una misma unidad, y de que se observe la correspondencia acostumbrada de unidades, decenas &c.

	Doblones.	*Pesos.*	*Reales.*	*Maravedís.*
Minuendo.....	35........	2..............	7..........	14
Sustraendo...	18........	3..............	11..........	30
Resíduo........	16........	2..............	10..........	18

Al comenzar despues, como se debe, la sustraccion por la derecha, se advierte desde luego que de 14 maravedís no pueden quitarse 30. Acudimos, pues, al arbitrio indicado de separar mentalmente de los próximos 7 reales uno que se transforma en 34 maravedís á que equivale; y agregando á estos los 14 que aparecen en el minuendo, resultan 48 maravedís, de cuyo número pueden ya restarse los 30 del sustraendo, resultando de resíduo 18, el cual se escribe en la misma coluna. Pasando ahora á la coluna inmediata, es necesario tener presente que los 7 reales que aparecen en el minuendo, se han reducido á 6; y no pudiendo quitarse de 6 reales 11, acudimos al mismo arbitrio de separar mentalmente uno de los 2 pesos que aparecen en el minuendo; y sustituyendo en su lugar los 15 reales á que equivale, y agregando á estos los 6 que existen en el minuendo, resultan 21; y quitando de este número los 11 que se hallan en el sustraendo, obtenemos por resíduo 10 reales, que escribimos en la misma coluna. En seguida, como de un peso que ha quedado en el minuendo, no se pueden restar los 3 del sustraendo, separamos mentalmente uno de los doblones del minuendo, y poniendo en su lugar los 4 pesos á que equivale, y agregándoles aquel otro peso, resultarán 5, de los cuales restados los 3, quedarán de resíduo 2. Por último, pasando á efectuar la sustraccion parcial de los doblones, tendremos presente que se han reducido á 34 los del minuendo; y restando de estos los 18 del sustraendo, quedan de residuo 16. Asi hemos determinado por residuo total al número complejo 16 doblones 2 pesos 10 reales y 18 maravedis.

Si á los números que se refieren á la unidad menor, los acompañasen quebrados, se comenzará por estos la sustraccion, observando lo prescrito (§. 98).

136 Lo que hemos practicado en el ejemplo anterior, nos hace ver que en cualquiera otra sustraccion de números de esta especie *se han de efectuar tantas sustracciones parciales, como sean las distintas unidades que entren en la composicion de los números complejos propuestos, comenzando por los números que se refieren á la unidad menor, y continuando sucesivamente por los que se refieran á la unidad inmediatamente mayor: y en caso que en alguna de las primeras sustracciones parciales ocurriese un sustraendo mayor que su respectivo minuendo, separamos mentalmente una de las unidades inmediatamente mayores; en lugar de ella sustituimos el número equivalente de unidades menores; y agregando á este el que de las mismas unidades aparece en el número complejo propuesto, venimos á conseguir por este medio un minuendo, del cual puede ya restarse el respectivo sustraendo; no debiendo olvidar en la sustraccion parcial inmediata, que del minuendo se ha separado una unidad.*

Para ejercicio de nuestros lectores, y mayor inteligencia, pondremos aqui otros ejemplos, omitiendo los razonamientos necesarios para ejecutar con acierto esta operacion.

	Quintales.	*Arrob.*	*Libr.*	*Onz.*	*Adarm.*	*Gran.*
Minuendo.......	283.....	2......	19....	4.......	5........	32
Sustraendo......	109.....	3......	7....	3.......	9........	35
Residuo..........	173.....	3......	12....	0.....	11........	33

	Doblones.	*Pesos.*	*Reales.*	*Maravedis.*
Minuendo........	58.......	1....	12.......	28
Sustraendo......	36.......	2....	14.......	17
Residuo..........	21.......	2....	13.......	11

137 Aunque las reglas antecedentes sean generalmente aplicables á cuantos casos puedan ofrecérsenos, si nos propusiéramos sin embargo restar de 87 varas, 9 líneas y 10 puntos, 49 varas 2 pies 8 pulgadas y 9 líneas, no se nos ocurriria acaso desde luego cómo habríamos de efectuar esta sustraccion. Para hacerlo, pues, perceptible, escribamos en la disposicion que aqui se ve, los dos números propuestos.

	Varas.	*Pies.*	*Pulgadas.*	*Lín.*	*Puntos.*
Minuendo.......	87.....	0..........	0..........	9......	10
Sustraendo.....	49.....	2..........	8..........	9......	0
Residuo.........	37.....	0..........	4..........	0......	10

Luego que efectuadas las dos primeras sustracciones parciales, pasamos á efectuar la tercera, y observamos que en el minuendo no aparecen pulgadas, acudimos á separar mentalmente uno de los pies que se encuentren en el minuendo para transformarlo en las 12 pulgadas á que equivale; y advirtiendo que en el minuendo no aparecen pies, nos vemos en la precision de acudir á separar mentalmente una de las varas, y sustituir en lugar de los 3 pies á que equivale, 2 pies y 12 pulgadas, por cuyo medio pueden ya efectuarse las dos sustracciones parciales que á primera vista parecian impracticables; pero habrá que tener presente que de las 87 varas del minuendo se ha separado ya una.

Del mismo modo procederemos, sea cual fuere la unidad mayor de los números propuestos, para hacer la sustraccion; pues bien se ve que cuando en el minuendo no aparezcan alguna ó algunas de las unidades menores, deberemos recurrir á la primera cifra significativa de unidades inmediatamente mayores que se encuentre á la izquierda, para separar mentalmente del número representado por ella una unidad que convertida en los equivalentes números de unidades menores, haga posibles las sustracciones parciales que á primera vista no lo parezcan. En vista de estas observaciones no podrá ya ofrecer dificultad alguna el ejemplo siguiente, en el cual las 16 toesas del minuendo habrán de considerarse como equivalentes á 15 toesas 5 pies 11 pulgadas 11 líneas y 12 puntos.

	Toesas.	*Pies.*	*Pulgadas.*	*Lín.*	*Puntos.*
Minuendo......	16.........	0..........	0..........	0......	0
Sustraendo......	4.........	3.........	6.........	8......	5
Residuo.........	11.........	2..........	5..........	3......	7

Multiplicacion de los números complejos.

138 Parece inútil advertir que sustituyendo en lugar de los números complejos que se nos han propuesto para efectuar con ellos la multiplicacion, los equivalentes números incomplejos, no serán necesarias para ejecutar esta operacion, otras reglas que las prescritas para los números abstractos. Sin embargo, conviene saber que sin necesidad de transformar en otros equivalentes los números propuestos, se les puede multiplicar inmediatamente observando el método que nos proponemos dar á conocer en varios ejemplos.

Propongámonos en primer lugar la siguiente cuestion, en la cual solo el multiplicando es número complejo.

¿Cuánto importan 16 varas á razon de 25 reales y 32 maravedis cada vara?

Es bien claro que para averiguar el total importe de las 16 varas, se ha de tomar 16 veces todo el precio de cada vara, y que de consiguiente se han de multiplicar por el número abstracto 16 los dos concretos 25 reales y 32 maravedis de que se compone el multiplicando; y que por último se han de sumar los productos parciales para obtener en la suma el total. Escríbase, pues, el multiplicador debajo del multiplicando en la disposicion que aqui se ve:

Multiplicando......	25 rs....	32 mrs.
Multiplicador......	16	
Producto parcial de 25 rs. por 16..	150 rs. 25	
Producto de 32 mrs. por 16........	15 rs....	2 mrs.
Suma ó producto total....................	415 rs....	2 mrs.

Los 25 reales se han multiplicado por 16 conforme á las reglas ordinarias de la multiplicacion, debiendo ser el producto de esta un número de reales, cual lo es el multiplicando. Se han multiplicado en seguida por 16 los 32 maravedis, y el resultado ha sido 512 maravedis, que divididos por 34 maravedis á que equivale un real, vienen á ser 15 reales 2 maravedis. Agregando por último este producto parcial á las partidas que componen el primero, vemos que el producto total es 415 reales y 2 maravedis.

Es del todo indiferente el órden con que se ejecuten las multiplicaciones parciales. Podemos muy bien multiplicar por 16 primeramente los 32 maravedis y despues los 25 reales. Lo esencial es que se multipliquen por 16 todos los números que entran en la composicion del multiplicando, y que se sumen todos los productos parciales, haciendo para ello las transformaciones que sean necesarias.

Si á pesar de la solidez del razonamiento que nos ha conducido en cuanto hemos practicado para resolver la cuestion propuesta, quedase la menor duda sobre la exactitud del resultado final, podremos tratar de determinarle sustituyendo en lugar del número complejo 25 reales y

32 maravedis el incomplejo equivalente 882 maravedis: y multiplicando ahora por el multiplicador 16 los 882 maravedis, á que equivale el multiplicando propuesto, el producto vendrá á ser 14112 maravedis, que divididos por 34 para reducirlos en cuanto sea posible á reales, nos dan por equivalente el número complejo 415 reales y 2 maravedis, que es enteramente el mismo que por el otro método hemos hallado.

Si habiéndose comprado ó vendido 8 arrobas á 12 pesos 13 reales y $25\frac{1}{2}$ maravedis cada arroba se tratase de determinar su total coste, podríamos efectuar la multiplicacion del modo siguiente:

Multiplicando.............	12 *ps*....	13 *rs*....	$25\frac{1}{2}$ *mrs*.
Multiplicador.............	8		
8 *veces* 12 *ps. componen*...............................	96 *ps*.		
8 *veces* 13 *rs. componen* 104 *rs. equival. á*	6 *ps*....	14 *rs*.	
8 *veces* $25\frac{1}{2}$ *mrs. componen* 204 *mrs. equivalentes á*..		6 *rs*.	
Producto total........................	103 *ps*....	5 *rs*.	

Reduciendo el número complejo 12 pesos 13 reales y $25\frac{1}{2}$ maravedis al incomplejo equivalente $6587\frac{1}{2}$ maravedis, y multiplicando por 8 este último número, hallaríamos por producto el número incomplejo 52700 maravedis, que reducidos, en cuanto sea posible, á reales y pesos, darian por resultado 1550 reales equivalentes á los 103 pesos y 5 reales que antes hemos encontrado.

139 Propongámonos otro ejemplo, en que solo el multiplicador sea número complejo, suponiendo que se hayan comprado 7 varas 1 pie y 6 pulgadas á 48 reales la vara, y se nos pregunte cuánto importan las medidas compradas.

Valor de cada vara, multiplicando..........	48 *rs.*
Núm. de varas, multiplicador................	7.^{v}... 1^{p}... 6^{p}
Valor de las 7 varas...........................	336^{r}
Valor de 1 pie, tercia parte del de 1 vara.	16
Valor de 6 pulgadas, mitad del de 1 pie.	8
Producto total....................	360^{r}

Pues que el precio de la vara es 48 reales, para hallar el valor de las 7 varas, se deberán tomar 7 veces los 48 reales, ó lo que es lo mismo, se deberán multiplicar los 48 reales por 7, y el producto 336 reales habrá de ser el valor de las 7 varas. Ahora, teniendo presente que 1 pie es la tercia parte de 1 vara, echaremos de ver que el valor de 1 pie deberá igualmente ser la tercia parte del de una vara, ó de 48 reales, y de consiguiente será 16 reales. Y como 6 pulgadas equivalen á la mitad de un pie, el valor de las 6 pulgadas habrá de ser la mitad del de un pie, y por tanto será 8 reales. Sumando por último los tres productos parciales, es claro que la suma de ellos viene á ser el total coste de las 7 varas 1 pie y 6 pulgadas á razon de 48 reales la vara; puesto que contiene los valores de todas las partes que entran en la composicion del multiplicador.

Es pues fácil ver que cuando sea un número complejo el multiplicador, el espíritu del método indicado está reducido á *multiplicar el multiplicando*, en suposicion de que sea, como suele, el valor de una de las unidades mayores del multiplicador, *por el número de estas unidades que en él haya: y para hallar el respectivo valor de los diferentes números de unidades menores, se examinará si* *cada uno de estos es la mitad ó la tercera ó cuarta parte, y en general si es una parte alicuota de la unidad mayor ó de algun otro número de unidades menores, cuyo valor esté ya determinado; y en tal caso se tomará de este valor la misma parte alicuota: pero si alguno de los números de unidades menores no fuere parte alicuota de ninguno de los anteriores ni de la unidad mayor, lo habremos de descomponer en dos ó tres ó mas números menores que tengan la tal condicion, y se tomará por el método indicado el valor de todos ellos.*

140 Para aclarar mas esto, propongámonos determinar *¿cuánto costarán 9 cahices 8 fanegas 7 celemines y 3 cuartillos de trigo; costando cada cahiz 840 reales?*

Valor de un cahiz: multiplicando.	840 *rs.*
Multiplicador....	9 *cah.* 8 *fan.* 7 *cel.* 3 *cuart.*
Valor de los 9 cahices.................	7560 *rs.*
Id. de 6 fan. mitad del de un cahiz.	420
Id. de 2 fan. tercia parte del de 6.	140
Id. de 6 cel. cuart. part. del de 2 f.	35
Id. de 1 cel. sext. part. del de 6.	$5\frac{5}{6}$
Id. de 2 cuart. mit. del de 1 cel.	$2\frac{11}{12}$
Id. de 1 cuartillo, mit. del de 2.	$1\frac{11}{24}$
Producto total....	$8165\frac{5}{24}$ *rs.*

En este ejemplo se puede fácilmente echar de ver que despues de haber multiplicado por 9 el valor de un cahiz, y de haber obtenido por este medio el valor de los 9 cahices; y advirtiendo que el número 8 fanegas no es mitad, ni tercera ni cuarta ni quinta &c. parte, y en una palabra no es parte alicuota de 12 fanegas á que equivale cada cahiz; hemos descompuesto aquel número en los dos menores 6 y 2; y siendo 6 mitad del 12, y 2 la tercera parte del 6, hemos averiguado sin dificultad primeramente el valor de las seis fanegas, tomando la mitad del de un cahiz; y en seguida el de las 2 fanegas que faltaban para completar las ocho, tomando la tercera parte del valor de las 6.

No será fuera del caso advertir que con el mismo objeto de averiguar el valor de las 8 fanegas, se pudo considerar este número como descompuesto en los dos menores y entre sí iguales 4 y 4; y viendo que el 4 es la tercera parte del 12, se podia haber obtenido el valor de las 4 fanegas tomando la tercera parte del de un cahiz; y con solo repetir otra vez esta tercera parte, tendríamos en las dos partidas juntas el valor de las 8 fanegas.

Pudimos asimismo descomponer este número en 6 y en 1 y 1; y tomando la mitad del valor de un cahiz para obtener el de las 6 fanegas; tomando en seguida la sexta parte de este valor, y repitiendo otra vez esta sexta parte, hubiéramos tenido en el conjunto de estas tres partidas el mismo valor de las 8 fanegas.

De estas varias descomposiciones de un número que no sea parte alicuota de otro cuyo valor esté anteriormente conocido, en otros menores que lo sean, puede cada uno elegir la que mas le acomode.

Al determinar el valor de los 7 celemines, notamos que este número no es parte alicuota de ninguno de aquellos cuyo valor hemos anteriormente hallado, y por tanto lo descomponemos en 6 y 1; y siendo 6 celemines una cuarta parte de los 24 á que equivalen las dos fanegas, tomamos la cuarta parte del valor de estas para deducir el de los 6 celemines; y en seguida tomamos del de estos la sexta para hallar el de 1 celemin que faltaba para completar los 7.

Por último, tomando la mitad del valor de un celemin, tendremos el de 2 cuartillos; y tomando la mitad de este, habrá de resultar el del único cuartillo restante.

Despues de esto no habrá que hacer otra cosa sino sumar todas las partidas, que son otros tantos productos parciales, para tener en la suma el valor total de los 9 cahices, 8 fanegas, 7 celemines y 3 cuartillos.

Para efectuar la adicion, comenzamos por los quebrados, reduciéndolos á un comun denominador, y observando para esto que el denominador del último es múltiplo de los otros dos (§. 100).

Parece inútil advertir que estos quebrados que son de real, pudieron haberse valuado en maravedis multiplicando 34, á que equivale un real, por el numerador de cada quebrado, y dividiendo cada producto por el respectivo denominador.

142 Como en los ejemplos propuestos (§. 138) y en cuantos sea complejo solo el multiplicando, se puede efectuar la multiplicacion sustituyendo en lugar de este el número equivalente de las unidades menores, sin que por esta sustitucion padezca el producto otra alteracion que la de salir expresado en la misma especie de unidades en que lo esté el multiplicando, no será extraño que se crea que cuando el multiplicador sea complejo, podremos sustituir en su lugar el número equivalente de sus menores unidades, reduciendo por este medio la operacion á multiplicar los números incomplejos equivalentes á los dos complejos propuestos. A fin de hacer bien perceptible la diferencia que hay de unos á otros casos, comparemos el ejemplo 1.º del §. 138 con el del §. 139.

Cuando en el primero nos hemos propuesto hallar cuánto importan 16 varas á 25 reales y 30 maravedis cada vara, hemos tenido presente que para resolver esta cuestion era necesario tomar 16 veces el valor de cada vara, expresado en la especie de unidades que se quisiese. Asi es que pudimos sustituir en lugar de los 25 reales y 30 maravedis, no solo el número incomplejo equivalente 880 maravedis, sino tambien el complejo 1 peso, 10 reales y 30 maravedis, ó un peso duro, 5 reales y 30 maravedis, ú otra cualquiera expresion equivalente al precio dado; y tomando 16 veces, ó multiplicando por el número abstracto 16 el precio de cada vara, expresado de un modo ó de otro, obtendríamos siempre el mismo verdadero producto, valor de las 16 varas, sin otra diferencia que la de resultar expresado en la misma especie de unidades en que lo esté el multiplicando.

Mas cuando nos hemos propuesto determinar el total importe de 7 varas, 1 pie y 6 pulgadas, compradas á razon de 48 reales cada vara, no hemos podido dejar de ver que para lograr nuestro intento debíamos primeramente tomar 7 veces ó multiplicar por el número abstracto 7 el precio de cada vara, y en seguida agregar á este producto parcial la misma parte del precio de una vara, que 1 pie y 6 pulgadas sean de la vara. Viendo, pues, que 1 pie equivale á una tercia parte de la vara hemos tomado del precio de esta la tercia parte, y nos han resultado 16 reales para valor de 1 pie. Ultimamente, observando que 6 pulgadas es la mitad de 1 pie, hemos tomado la mitad de los 16 reales, y nos han resultado 8 reales para valor de las 6 pulgadas. Asi en la suma de los tres números de reales 336, 16 y 8, que son otros tantos productos parciales correspondientes á las tres partes de que se compone el multiplicador complejo, hemos obtenido el importe total de las 7 varas, 1 pie y 6 pulgadas compradas á razon de 48 reales la vara.

No nos parece fuera del caso advertir que si hubiésemos echado de ver que 1 pie y 6 pulgadas equivalen á la mitad de una vara, podríamos haber determinado el valor de aquellas dos cantidades con solo tomar la mitad de los 48 reales, valor de cada vara.

Ahora bien, si con el objeto de efectuar con mayor facilidad la multiplicacion, hubiésemos sustituido en vez del multiplicador complejo el incomplejo equivalente 270 pulgadas, como en tal caso habríamos tomado 270 veces el precio de una vara, el producto vendria á ser el valor de 270 varas, y de consiguiente mucho mayor que el de $7\frac{1}{2}$ varas que nos habíamos propuesto hallar.

Con todo, no hay inconveniente alguno en efectuar de este modo la multiplicacion, con tal que despues de averiguar el error que en ella se comete, lo corrijamos por medio de otra operacion oportuna, y asi rectifiquemos el resultado. Tratemos, pues, de averiguar el error que en el producto resulta por haber sustituido en lugar del multiplicador complejo dado, equivalente á $7\frac{1}{2}$ varas, el número 270.

Teniendo presente que una sola vara equivale á 36 pulgadas, se ve sin dificultad que cualquier número de varas equivaldrá á otro número de pulgadas 36 veces mayor que el de las varas. Siendo, pues, el número 270 el de pulgadas equivalente á $7\frac{1}{2}$ varas, es bien claro que aquel primer número habrá de ser 36 veces mayor que este segundo. De consiguiente hemos sustituido al verdadero multiplicador que nos propusimos, otro 36 veces mayor; pues, aunque 270 pulgadas equivalgan á $7\frac{1}{2}$ varas, el número abstracto 270 es 36 veces mayor que el $7\frac{1}{2}$; y en toda multiplicacion el multiplicador debe considerarse como número abstracto. Por tanto el producto ha de resultar 36 veces mayor que el verdadero; luego en haciéndolo 36 veces menor, ó lo que es lo mismo, en dividiéndolos por 36, el cuociente de esta division será el que nos propusimos determinar.

En efecto, multiplicando 48 reales por 270, el producto es 12960 reales, y dividiendo este número por 36, el cuociente 360 reales es el verdadero producto que ya (§. 139) hemos hallado por valor de las 7 varas, 1 pie y 6 pulgadas á 48 reales la vara.

A consecuencia de estas consideraciones, que pueden fácilmente aplicarse á cualquiera otro caso semejante que pueda ocurrir, podremos establecer generalmente que *cuando en lugar de cualquier multiplicando complejo sustituimos el número equivalente de las unidades menores, no resulta por eso error alguno en el producto, ni padece esta otra alteracion que la de salir expresado en unidades de la misma especie que las del multiplicando que hayamos sustituido por equivalente al propuesto. Mas cuando en vez de un multiplicador complejo sustituimos el número equivalente de sus unidades menores, debe resultar un producto tantas veces mayor que el verdadero, cuantas sean las unidades menores que equivalgan á una de las mayores, cuyo valor exprese el multiplicando; y de consiguiente es indispensable dividir por aquel número de unidades menores el producto primeramente hallado, para obtener en el cuociente de esta division el verdadero producto que buscamos.*

Es, pues, muy esencial distinguir cuál de los números propuestos para efectuar una multiplicacion, es el multiplicando, y cuál el multiplicador; y este discernimiento no puede ofrecer dificultad alguna á quien tenga presente que el primero es el que se ha de repetir un cierto número de veces, y el segundo el que nos indica cuántas sean las veces que aquel otro se ha de repetir.

142 Tratemos ya de multiplicar un número complejo por otro; proponiéndonos averiguar el valor de 8 quintales 3 arrobas 6 libras y 12 onzas á razon de 7 doblones 2 pesos 9 reales y 24 maravedis cada quintal, sin necesidad de sustituir en lugar de estos dos números complejos los equivalentes quebrados impropios de la mayor unidad, ni otra ninguna expresion del mismo valor.

Multiplicando...	*7 dob.*	*2 pes.*	*9 rs.*	*24 mrs.*
Multiplicador....	*8 quin.*	*3 arr.*	*6 lib.*	*12 onz.*
Valor de los 8 quint....	56 *dob.*			
	4			
	1......	0 *pes.*	12 *rs.*	
	0......	0......	5......	22 *mrs.*
Id. de 2 arrobas.........	3......	3......	4......	29
Id. de 1 arroba..........	1......	3......	9......	$31\frac{1}{2}$
Id. de 5 libras..........	0......	1......	7......	$33\frac{1}{2}$
Id. de 1 libra...........	0......	0......	4......	$20\frac{5}{10}$
Id. de 8 onzas..........	0......	0......	2......	$10\frac{5}{20}$
Id. de 4 onzas..........	0......	0......	1......	$5\frac{5}{40}$
Producto total............	67 *dob.*	2 *pes.*	3 *rs.*	$15\frac{21}{40}$ *mrs.*

En primer lugar, para determinar el valor de los 8 quintales, hemos multiplicado por 8 los cuatro números concretos é incomplejos que componen el precio de cada quintal; siendo indiferente comenzar, como lo hemos hecho, por la izquierda, y concluir por la derecha; ó al contrario. Hallados los cuatro productos parciales, y colocados en sus respectivas colunas los incomplejos de que se forman, pasamos á determinar el valor de las 3 arrobas. No siendo este número parte alicuota de las 4 que equivalen á un quintal, lo hemos descompuesto en 2 y 1; y para hallar el valor de las 2, hemos tomado la mitad del de un quintal, ó del multiplicando, diciendo: la mitad de 7 doblones son 3 doblones; y sobra 1 doblon que equivale á 4 pesos, los cuales agregados á los 2 pesos que desde luego aparecen en el precio del quintal, forman 6 pesos, cuya mitad es 3. No habiendo reresultado residuo alguno al tomar la mitad de los 6 pesos, hemos pasado inmediatamente á los reales; y hemos dicho: la mitad de 9 reales son 4 reales; y como aun resta 1 real sin haber tomado de él la mitad, sustituimos en su lugar los 34 maravedis á que equivale; los cuales, agregados á 24 que hay desde luego en el precio de un quintal, dan por suma 58 maravedis, cuya mitad son 29 maravedis: y el conjunto de las cuatro mitades 3 doblones 3 pesos 4 reales y 29 maravedis viene á ser el valor de las 2 arrobas.

Del mismo modo hemos determinado el valor de la arroba que falta para completar las 3 que hay en el multiplicador, tomando la mitad de todas las partes que componen el valor que acabamos de hallar, de las dos arrobas, comenzando por la izquierda; en donde se halla el número de las mayores unidades.

Pasando luego á determinar el valor de las 6 libras; y viendo que este número no es parte alicuota de las 25 á que equivale una arroba, nos hemos valido del arbitrio de descomponer el número 6 en los dos 5 y 1; y para hallar el valor de 5 libras, hemos tomado la quinta parte del valor ya determinado de una arroba, diciendo: la quinta parte de un doblon no equivale á doblon alguno, y por tanto colocamos un cero en el primer lugar, destinado á los doblones. En esta atencion hemos sustituido en lugar de aquel doblon los 4 pesos á que equivale; y agregados estos á los 3 existentes en la expresion del valor de la arroba, dan por suma 7 pesos, cuya quinta parte es 1 peso, resultando por residuo 2 pesos.

Hemos igualmente sustituido en lugar de estos 2 pesos su equivalente 30 reales: los cuales reunidos á los 9 reales que hay en el valor de 1 arroba, nos dan por suma 39 reales; cuya quinta parte son 7 reales, quedando por residuo 4 reales. Hemos sustituido en lugar de estos los 136 maravedis á que equivalen: hemos agregado á estos 136 los $31\frac{1}{2}$ existentes en la expresion del valor de una arroba; y de la suma $167\frac{1}{2}$ maravedis hemos tomado la quinta parte que es $33\frac{1}{2}$. De consiguiente el número complejo 0 doblones 1 peso 7 reales y $33\frac{1}{2}$ maravedis será el valor de las 5 libras.

En seguida, para determinar el valor de la libra que falta para completar las 6 que contiene el multiplicador, hemos tomado la quinta parte del hallado de las 5 libras.

Por último, pasando á determinar el valor de las 12 onzas, y viendo que este número no es parte alicuota de 16 onzas á que equivale una libra, hemos descompuesto el número 12 en los dos 8 y 4; y para hallar el valor de las 8 hemos tomado la mitad del de una libra, y para el de las 4 restantes hemos tomado la mitad del de las 8.

Y estando ya determinados los respectivos valores de todas las partes que entran en la composicion del multiplicador, los hemos sumado para tener en la suma 67 doblones 2 pesos 3 reales 15 maravedis y $\frac{21}{40}$ de maravedí, valor total de los 8 quintales 3 arrobas 6 libras 7 12 onzas á razon de 7 doblones 2 pesos 9 reales y 24 maravedis cada quintal.

143 Para efectuar la misma multiplicacion púdimos haber sustituido en lugar del multiplicando complejo propuesto su equivalente número incomplejo 15630 maravedis; y en lugar del multiplicador complejo dado su equivalente número incomplejo 14108 onzas: y habiendo multiplicado los 15630 maravedis por el número abstracto 14108, nos habria resultado el producto 220508040 maravedis. Mas teniendo presente lo que (§. 141) hemos expuesto, echaríamos de ver que sin embargo de equivaler á los 8 quintales 3 arrobas 6 libras y 12 onzas las 14108 onzas, es indudable que el número abstracto 14108 de que nos hemos valido para que sirva de multiplicador, es 1600 veces mayor que el número abstracto 8 $\frac{1308}{1600}$, que es el verdadero multiplicador que se nos ha dado. De consiguiente el producto hallado habrá de ser 1600 veces mayor que el verdadero. Habria, pues, que dividirlo por 1600, para obtener en el cuociente de esta division 137817 $\frac{21}{40}$ maravedis el verdadero producto que buscábamos. Reduciendo ahora este último número á reales; los reales á pesos; y los pesos á doblones, hallaremos que los 137817$\frac{21}{40}$ maravedis equivalen á los 67 doblones 2 pesos 3 reales 15$\frac{21}{40}$ maravedis que ya por otro método hemos encontrado.

144 Al efectuar por el método de las partes alicuotas la multiplicacion de dos números complejos, ocur-

re en ciertos casos la dificultad de no tener conocido de antemano, como en él se requiere, valor alguno, del cual se pueda fácilmente tomar la parte alicuota que se necesita para determinar el valor que se desea. Para dar á conocer esta dificultad, y al mismo tiempo un medio de superarla, nos propondremos averiguar cuánto importan 58 varas 2 pies 6 pulgadas y 3 líneas á 2 doblones 3 pesos 10 reales y 18 maravedis la vara.

Multiplicando....	2 *dobl.* 3 *pes.* 10 *rs.* 18 *mrs.*
Multiplicador....	58 *var.* 2 *pies* 6 *pulg.* 3 *lín.*
Valor de las 58 varas.	116 *dob.*
	43.......2 *pes.*
	9.......2.......10 *rs.*
	0.......2....... 0....24. *mrs.*
Id. de los 2 pies..........	0.......3.......13....17.$\frac{1}{3}$
	0.......3.......13....17.$\frac{1}{3}$
Id. de las 6 pulgadas...	0.......1.......14.... 8.$\frac{2}{3}$
Id. de 1 pulgada.........	~~0~~.......~~0~~....... ~~4~~....29$\frac{7}{9}$
Id. de 3 líneas.............	0.......0....... 1.... 7.$\frac{4}{9}$
Producto ó valor total..	172 *dob.* 0 *pes.* 8 *rs.* 6.$\frac{7}{9}$ *mrs.*

Despues de haber multiplicado por 58 todas las partes de que consta el valor de una vara, para tener el de 58 varas, hemos tomado la tercia parte del mismo valor para determinar el de un pie, y hemos repetido este para tener el del otro pie que falta para completar el de los dos pies que aparecen en el multiplicador. Del valor de un pie hemos tomado la mitad para obtener el de las 6 pulgadas, que son la mitad de un pie. Ahora, tratando por último de hallar el valor de las 3 líneas, aunque desde luego viésemos que este número de líneas equivale á una *vigésimacuarta* parte de 6 pulgadas; siéndonos mucho mas manifiesta que el mismo número de líneas equivale á una *cuarta* parte de una pulgada, y que esta es la *sexta* parte de 6: siéndonos ademas mucho mas fácil tomar sucesivamente estas dos partes alicuotas de sus respectivos números; nos hemos valido del arbitrio de determinar provisionalmente el valor de una pulgada, tomando la sexta parte del de la 6; y en seguida hemos hallado el valor de las tres líneas, tomando la cuarta parte del que acabamos de hallar de una pulgada. Luego que hemos efectuado esta última operacion, hemos tachado todas las partidas de que se compone el valor de la pulgada, á fin de no sumarlo con los demas; para lo cual hubiera sido conveniente escribirlo aparte.

Al valor que hemos hallado de una pulgada, solo con el objeto de deducir de él el de las 3 líneas, y á cualquiera otro que en casos semejantes tengamos á bien hallar, á fin de tomar mas cómoda y fácilmente la parte alicuota que necesitemos, los podremos designar con el nombre de *productos auxiliares*.

145 Se ve, pues, que el método que hemos adoptado para efectuar la multiplicacion de los números complejos, es generalmente aplicable á cuantos casos puedan ocurrirnos, y que en suma está reducido á *multiplicar por el número de las unidades mayores que haya en el multiplicador, todos los diferentes números concretos de que conste el multiplicando;* y en seguida á *descomponer, cuando sea necesario, los demas números de unidades que haya en el multiplicador, de modo que cada uno de los productos parciales que busquemos, sea la mitad ó la tercera ó cuarta ó quinta &c. parte de algunos de los valores ya conocidos*; *y si despues de hecha la descomposicion*

que nos haya parecido conveniente, nos fuere dificil tomar la parte alicuota que necesitemos, nos valdremos de los productos auxiliares, que cuidaremos de escribir con entera separacion de los demas, á fin de no comprenderlos en la adicion que por último ejecutamos para hallar el total que busquemos.

Por conclusion advertimos que si alguna vez decimos que multiplicamos por 7 varas, por dos pies, por 6 pulgadas, ó por 8 quintales, por 3 arrobas, por 20 libras y por 12 onzas, se debe tener entendido que solo por la brevedad nos expresamos de un modo tan impropio; pues, como ya hemos dicho, en toda multiplicacion debemos considerar al multiplicador como si fuese un número abstracto. Por manera que si la unidad mayor del multiplicador fuere, por ejemplo, la vara cuyo valor expresa el multiplicando, el número de varas que en el multiplicador aparezca, nos dirá solo el número de veces que habremos de repetir ó multiplicar todo el multiplicando. En el mismo caso el número de pies que exista en el multiplicador deberá considerarse como un quebrado abstracto de vara: el número de pulgadas, que tambien viene á ser un quebrado de vara, habrá de mirarse como quebrado abstracto de un pie: y asi de los demas.

De la division de los números complejos.

146 Puesto que si habiendo efectuado cualquiera multiplicacion, dividimos el producto por uno de los factores, el cuociente deberá ser el otro factor (§. 54); siendo igualmente innegable que cuando sean concretos los dos factores, las unidades del producto han de ser de la misma naturaleza que las del multiplicando; y pu-

diendo nosotros considerar á todo dividendo como producto de una multiplicacion anterior, y á todo divisor como uno de sus factores, debiendo ser el cuociente el otro factor, es consiguiente que cuando sean el dividendo y el divisor números concretos, incomplejos ó complejos, podrán ofrecérsenos dos clases de cuestiones que nos den motivo á efectuar una division. En unas de ellas podrán ser las unidades del divisor de naturaleza distinta de las del dividendo, y podrá aquel considerarse como un número abstracto, como que representa al multiplicador, mientras el producto está representado por el dividendo; y en estas las unidades del cuociente habrán de ser de la misma naturaleza que las del mismo dividendo. En las otras las unidades del dividendo y divisor son de una misma naturaleza, y las del cuociente lo son de distinta; ó mas bien podrá considerarse como un número abstracto; á cuyas unidades puede la cuestion imponer el nombre que al caso venga.

Tanto en unas como en otras pueden ocurrir tres casos; porque puede ser el dividendo un número complejo y el divisor incomplejo, ó al contrario, y pueden ambos tambien ser complejos. Propongámonos en primer lugar una cuestion de la primera clase, en la cual sea complejo el dividendo, é incomplejo el divisor; tratando de averiguar *á cómo cuesta cada una de 16 varas*, sabiendo que todas ellas han costado 74 *pesos* 12 *reales y* 9 *maravedis.*

147 En la division que es necesario efectuar para resolver esta cuestion, es claro que el último número complejo es el dividendo, y que el incomplejo, ó mas bien el abstracto 16 es el divisor; de modo que solo tratamos de repartir en 16 partes iguales el dividendo propuesto, para averiguar cuánto corresponde á cada una.

Esto podremos conseguirlo de dos modos: ó sustituyendo en lugar del dividendo dado el número equivalente de sus menores unidades, ó sin necesidad de efectuar previamente ninguna sustitucion. Con efecto, poniendo en vez del número complejo 74 pesos 12 reales y 9 maravedis, su equivalente incomplejo 38157 maravedis, se reducirá la operacion á una division ordinaria, en la cual resulta por cuociente el número mixto incomplejo $2384\frac{13}{16}$ maravedis, que nos expresará el precio de cada una de las 16 varas; pudiéndose sustituir en su lugar, si se juzga conveniente, el equivalente número complejo 4 pesos 10 reales y $4\frac{13}{16}$ maravedis, ó 1 doblon 10 reales y $4\frac{13}{16}$ maravedis.

148 Pero, como ya hemos dicho, sin necesidad de hacer ninguna sustitucion en lugar del dividendo dado, se puede efectuar su division por el número abstracto 16 del modo siguiente:

Dividendo........	74*ps.* 12 *rs.* 9 *mrs.*	16.... *Divisor.*
1.r *residuo ......*	10 *ps.*	4*ps.* *rs.* $4\frac{13}{16}$ *mrs.*
A razon de......	15 *rs.*	
Valor del 1.r *res.*	150 *rs.*	
Agregándole.....	12 *rs.*	
2.º *Dividendo..*	162 *rs.*	
2.º *Residuo......*	2 *rs.*	
A razon de.......	34 *mrs.*	
Valor del 2.º *res.*	68 *mrs.*	
Agregándole.....	9 *mrs.*	
3.º *Dividendo...*	77 *mrs.*	
Residuo final....	13 *mrs.*	

En primer lugar hemos dividido por 16 los 74 pesos, y hemos colocado el cuociente 4 pesos en su respectivo lugar: hemos multiplicado los 4 pesos por 16, y restado del dividendo 74 el producto 64; de lo cual nos han quedado de residuo 10 pesos. Estos los hemos reducido á reales multiplicando por ellos á 15 reales, y á los 150 reales que resultan, les hemos agregado los 12 que desde luego habia en el dividendo propuesto, y asi ha venido á ser el segundo dividendo parcial el número concreto 162 reales. Dividido este por el divisor 16, nos han resultado 10 reales por cuociente, y multiplicando este por 16, y restando del segundo dividendo parcial el producto 160, nos han quedado de residuo 2 reales, que reducidos á maravedis, equivalen á 68, y agregando á estos los 9 que desde el principio existen en el dividendo propuesto, vendrán á componer 77 maravedis: y esta suma ha venido á ser el tercer dividendo parcial, que nos ha dado por cuociente 4 maravedis, quedando de residuo 13 maravedis: y como las subdivisiones de las monedas no pasan del maravedí, hemos completado el cuociente agregando á las tres partes halladas, es decir, á los 4 pesos 10 reales y 4 maravedis, el quebrado $\frac{13}{10}$ de maravedí, cuyo numerador es aquel residuo; y cuyo denominador es el divisor. De este modo el cuociente total ó el valor que buscábamos de una vara, vendrá á ser el número complejo 4 pesos 10 reales 4 maravedis y $\frac{13}{16}$ de maravedí.

Lo que acabamos de practicar en esta division es exactamente lo que hemos ejecutado cuando en la multiplicacion de los números complejos hemos tomado partes alicuotas de valores conocidos que eran tambien números complejos. No podia menos de ser asi, puesto que tomar la mitad, la tercera, la cuarta, la quinta &c. parte de cualquiera número, equivale respectivamente á dividirlo por los abstractos 2, 3, 4, 5 &c.

149 Como el método de que hemos hecho uso se pueda igualmente aplicar con igual éxito á todas las divisiones semejantes, cualquiera que sea la naturaleza de las distintas unidades del dividendo, podremos establecer por regla general *que para dividir un número complejo por otro incomplejo de diferente naturaleza, ó mas bien por un número abstracto, se podrán dividir sucesivamente por el divisor abstracto todas las partes de que se compone el dividendo complejo, comenzando por el número de las mayores unidades. Dividiendo, pues, este número por el divisor dado, el cuociente habrá de ser la parte primera y mayor del total que busquemos. Al residuo de esta primera division parcial lo convertiremos en su equivalente número de unidades inmediatamente inferiores, y agregándole el de las mismas unidades que desde luego aparecen en el dividendo propuesto, tendremos el segundo dividendo parcial; el cual dividido igualmente por el divisor que nos hayan dado, nos dará por cuociente la segunda parte del total. Con el residuo de esta segunda division se efectuará lo mismo que con el de la primera; y asi se continuará practicando hasta que lleguemos á dividir por el divisor el número de las menores unidades en que se acostumbre dividir la mayor del dividendo; en cuyo caso, si en esta última division quedase algun residuo, vendrá este á ser en el cuociente numerador de un quebrado, cuyo denominador será el divisor.*

150 Si, para segundo ejemplo tuviésemos que distribuir ó dividir en 48 partes iguales 756 varas 2 pies 9 pulgadas 8 $\frac{1}{4}$ líneas, y nos propusiésemos determinar

cuántas corresponden á cada parte, procederíamos segun aqui se ve:

Dividendo...756 *v.* 2 *p.* 9 *pulg.* $8\frac{3}{4}$*l.*	48....*Divisor.*
276	15 *v.* 2 *p.* 3 *p.* $8\frac{83}{192}$*l.*
1.r *resíduo*...... 36	
2.º *divid.parc.*110 *pies.*	
2.º *resíduo*...... 14	
3.º *divid.parc.*177 *pulg.*	
3.º *resíduo*....... 33 *pulg.*	
4.º *divid.parc.*$404\frac{3}{4}$ *lín.*	
Resíduo final.. $20\frac{3}{4}$ *lín.*	

Despues de haber dividido por 48 las 756 varas, y hallado su respectivo cuociente 15 varas, hemos puesto en lugar de las 36 varas que han resultado sobrantes de aquella primera division parcial, sus equivalentes 108 pies, los cuales con la agregacion de los 2 que se nos presentan en el dividendo propuesto, nos han dado 110 pies para segundo dividendo parcial. Este nos ha dado 2 pies para segundo cuociente parcial, y de esta segunda division nos han quedado 14 pies de resíduo. Hemos sustituido en lugar de los 14 pies las equivalentes 168 pulgadas, que con la agregacion de las 9 pulgadas, que desde luego hay en el dividendo, nos dan para tercer dividendo parcial 177 pulgadas; el cual nos da por cuociente 3 pulgadas, quedando de resíduo 33. Sustituimos, pues, en lugar de las 33 pulgadas su equivalente 396 líneas, y habiéndoles agregado las $8\frac{2}{4}$ que se hallan en el primitivo dividendo, hemos tenido $404\frac{3}{4}$ líneas para último dividendo parcial. Este nos ha dado primeramente 8 líneas por cuociente, al cual hemos agregado el quebrado $\frac{83}{192}$ de línea para completarlo.

El mismo resultado habríamos hallado si en lugar del dividendo complejo dado hubiéramos sustituido su equivalente incomplejo $326996\frac{3}{4}$ lineas; y dividiendo este número por 48, el cuociente $6812\frac{83}{192}$ hubiera sido el número de lineas que correspondian á cada una de aquellas 48 partes; en cuyo lugar se puede sustituir el equivalente número complejo 15 varas 2 pies 3 pulgadas y $8\frac{83}{192}$ líneas.

151 Supongamos que 6 quintales 3 arrobas y 18 libras hayan costado 1486 reales, y que se nos pregunte á cómo sale cada quintal. Con esto tendremos un ejemplo de una division en la cual siendo incomplejo el dividendo, el divisor es complejo y de diferente naturaleza.

Si despues de haber sustituido en lugar del divisor complejo el equivalente incomplejo 693 libras, dividimos los 1486 reales por 693, el cuociente nos dará los reales que cuesta cada libra. Pero habiéndosenos pedido el valor de un quintal, y equivaliendo este á 100 libras, deberemos multiplicar por 100 el cuociente que resulte, ó lo que es lo mismo, habremos de multiplicar por 100 el dividendo antes de ejecutar la division. Con efecto, multiplicando por 100 el dividendo 1486 reales, y dividiendo los 148600 por el divisor 693, obtendremos para valor de un quintal el mismo resultado $214\frac{298}{693}$ que multiplicando por 100 el cuociente $2\frac{100}{693}$ reales, valor de una libra.

Es, pues, visto que en todas las cuestiones en que esté dado un cierto número de cosas y el valor de todas ellas para determinar el de cada una; ó lo que es lo mismo, en que se trate de dividir en cierto número de partes iguales una cantidad cualquiera, se puede sustituir en lugar del dividendo complejo el número equivalente de sus unidades menores, sin que por razon de esta sustitucion resulte en el cuociente otra alteracion que la de salir expresado en la misma especie de unidades en que lo esté el dividendo. Pero en el caso que hayamos sustituido en lugar de un divisor complejo su equivalente incomplejo; y que se nos haya pedido el valor de una de las mayores unidades del divisor, deberemos multiplicar el cuociente por el número de unidades menores equivalente á una de las mayores, ó si queremos, habremos de multiplicar por el mismo número el dividendo, antes de efectuar la division.

152 Pasando ya á dividir un número complejo por otro de diferente naturaleza, supongamos que 13 *varas* 2 *pies* y 8 *pulgadas* hayan costado 18 *doblones* 2 *pesos* 6 *reales* y 20 *maravedís*, y que se nos pregunte *¿á cómo sale cada vara?*

Para poder contestar á esta cuestion podemos sustituir en lugar del dividendo su equivalente número incomplejo 37964 maravedís; y en lugar del divisor el equivalente incomplejo 500 pulgadas: y dividiendo aquel primer número por este segundo, nos resultará en el cuociente $75\frac{464}{500}$ maravedís el valor de cada pulgada. Mas como cada vara equivale á 36 pulgadas, habremos de multiplicar por 36 el valor de una pulgada para obtener en el producto $2733\frac{204}{500}$ maravedís el valor de cada una vara, el cual viene á ser el número complejo 1 doblon 1 peso 5 reales $13\frac{204}{500}$ maravedís.

El mismo precio de cada vara, $2733\frac{51}{125}$ maravedís habríamos obtenido si en lugar del número 37964 maravedís á que equivale el di idendo propuesto, hubiéramos sustituido el 1366704 maravedís, 36 veces mayor.

Diciendo, como de ordinario solemos en casos semejantes decir que hemos dividido 18 doblones 2 pesos 6 reales y 30 marevedís por 13 varas 2 pies y 8 pulgadas, no hablamos con propiedad; y para formarse una verdadera idea del significado de esta expresion, es necesario mirar al divisor como si fuese el número abstracto mixto del entero 13 y del quebrado $\frac{32}{36}$ á que equivalen los 2 pies y 8 pulgadas con referencia á una vara.

Generalmente en tales casos al número de las unidades de la misma especie que aquella cuyo valor ha de expresar el cuociente, lo debemos considerar como un número entero abstracto; y al conjunto de los demas números de unidades menores que entran en la formacion del complejo, lo debemos considerar como un quebrado abstracto referido á la misma unidad á que se refiera aquel otro entero. De este modo el cuociente en todas las cuestiones de esta clase resultará expresado en un número de unidades de la misma especie que las del dividendo.

153 Solo nos resta hablar de aquella clase de cuestiones en que el dividendo y el divisor representan ambos cantidades de una misma naturaleza, cual es la siguiente:

Costando cada quintal 2 doblones 3 pesos y 2 reales, ¿cuántos quintales se podrán comprar con 47 doblones 1 peso 9 reales y 24 maravedís?

Bien se ve que deben ser tantos quintales, cuantas sean las veces que los 47 doblones 1 peso 9 reales y 24 maravedís contengan á 2 doblones 3 pesos y 2 reales; y de consiguiente la solucion de la cuestion propuesta habrá de resultar de una division en la cual el dividendo y el divisor representan cantidades de una misma naturaleza, y el cuociente debe ser un número abstracto que nos exprese cuántas veces contiene al divisor el dividendo; y tanto como sea este número de veces, tanto deberá ser el de quintales que nos proponemos determinar.

En este caso y en todos los demas semejantes no es fácil arbitrar medio mas á propósito para efectuar la division, que el de sustituir en lugar de los dos números dados otros dos equivalentes referidos á una misma unidad. Sustituiremos, pues, en lugar de los 47 doblones 1 peso 9 reales y 24 maravedís el número incomplejo equivalente 96720 maravedís; y en lugar de los 2 doblones 3 pesos y 2 reales el incomplejo equivalente 5678 maravedís; y dividiendo aquel por este, el cuociente $17\frac{194}{5678}$ que de esta division resulta, nos determinará cuántas veces contiene el primer número de maravedís al segundo, y de consiguiente cuántos sean los quintales que se pueden comprar con la cantidad expresada por el dividendo, al precio indicado por el divisor.

Nótese que por haber sustituido en lugar del dividendo complejo un equivalente número de maravedís, hemos sustituido igualmente en lugar del divisor otro número de las mismas unidades, sin embargo de que en este, segun nos lo han dado, no aparezca número alguno de maravedís: porque siempre que se trate como en esta cuestion de averiguar cuántas veces contiene un número á otro, deben ser ambos abstractos, ó referirse á una misma unidad si son concretos. Por manera que aun cuando sea incomplejo alguno de los números dados para ejecutar una division, se deberá sustituir en su lugar el número equivalente de unidades de la misma especie que el otro que suponemos complejo.

Nótese asimismo que sin embargo de que el cuociente de esta division debe ser un número abstracto que solo exprese cuántas veces contenga el dividendo al divisor, nosotros lo concretamos á la especie de unidades que la cuestion nos indica. Lo mismo podrá observarse en todas las divisiones en que el dividendo y el divisor sean números de unidades de una misma especie. El cuociente en todas ellas habrá de ser un número abstracto, que el calculador concreta á la especie de unidades que se le indica en la cuestion.

La práctica reiterada de estas operaciones, y especialmente el conocimiento del objeto que en cada una de ellas nos proponemos, nos pueden sugerir en muchos casos medios particulares muy oportunos para abreviar los cálculos; mas como hasta ahora solo hemos tratado de dar á conocer las reglas y principios generales, nos contentaremos con recomendar la reduccion de los quebrados á sus mínimos términos en cuantos casos sustituyamos en lugar de los números complejos ó denominados las equivalentes fracciones de la unidad mayor.

De algunos medios de que puede hacerse uso para abreviar y facilitar los cálculos aritméticos.

154 Siempre que hayamos de multiplicar uno por otro dos números representados por grandes combinaciones de cifras significativas, podrá ser conveniente determinar de antemano los respectivos productos del multiplicando por cada uno de los números dígitos representados por las diferentes cifras del multiplicador. Si nos proponemos, por ejemplo, multiplicar 2937487541 por 67431456, y observáremos que en la combinacion de cifras del multiplicador entran las significativas 1, 3, 4, 5, 6 y 7; multiplicando sucesivamente por estos números dígitos al multiplicando, formaremos la tabla siguiente:

1	2937487541
3	8812462623
4	11749950164
5	14687437705
6	17624925246
7	20562412787

de la cual copiaremos los respectivos productos del multiplicando por los números 6, 5, 4, 1, 3, 4, 7 y 6, representados por las cifras significativas que forman la combinacion con que está representado el multiplicador, y los colocaremos en los sitios correspondientes, conforme aqui se ve. Despues de lo cual no tendremos otra cosa que hacer sino efectuar una simple adicion de todos los productos parciales.

```
        17624925246
       14687437705
      11749950164
      2937487541
     8812462623
    11749950164
   20562412787
  17624925246
 ___________________
  198079061871489696
```

Efectuando de éste modo la multiplicacion, jamas excederá de nueve el número de productos que debamos formar, y todo lo restante de la operacion quedará reducido á colocarlos en los lugares que les correspondan; unos debajo de otros, y á sumarlos todos.

155 Tambien podríamos reducir la division á meras sustracciones, siempre que queramos tomarnos el trabajo de formar préviamente los productos del divisor por

los nueve números dígitos. Con efecto, si nos propusiésemos dividir el número 4539947812346 por 73809, é inmediatamente formásemos la siguiente tabla:

1	73809
2	147618
3	221427
4	295236
5	369045
6	442854
7	516663
8	590472
9	664281

podríamos ejecutar la operacion del modo siguiente:

```
Dividendo.... 4539947812346 |73809.... Divisor.
              442854         61509406
              ------
              111407
               73809
               ------
               375988
               369045
               ------
                694312
                664281
                ------
                 300313
                 295236
                 ------
                 ~~0~~507746
                   442854
                   ------
Resíduo final.........  64892
```

Como el número representado por las cinco primeras cifras del dividendo propuesto, es menor que el divisor, buscaríamos entre los múltiplos que la tabla contiene del divisor, el que fuere igual, ó menor mas próximo al número representado por las seis cifras de la izquierda del dividendo, y veríamos que el que buscábamos es 442854, el cual corresponde al 6. Colocaríamos, pues, esta cifra como primera del cuociente; restaríamos del dividendo parcial aquel múltiplo; y á la derecha del residuo escribiríamos la cifra inmediata del dividendo. Buscaríamos en la tabla el múltiplo que fuese igual al nuevo dividendo parcial, ó que siendo menor que él, mas se le aproximase, y asi veríamos que 1 era la segunda cifra del cuociente. Asi continuaríamos la operacion hasta concluirla, sin hacer en realidad otra cosa que sustracciones.

156 No es mucho á la verdad el tiempo ni el trabajo que se ahorra haciendo uso de los medios indicados en los dos párrafos anteriores; y si bien examinamos la cosa, veremos que la principal y acaso la única ventaja que podrán proporcionarnos, está reducida á que por tales medios ejecutamos con mayor comodidad las operaciones; á que en igualdad de circunstancias estamos menos expuestos á padecer equivocaciones y cometer errores, y á que asi podemos tener mayor seguridad de la exactitud del resultado. Es ciertamente apreciable esta ventaja; pero tratándose de abreviar y de ejecutar con mayor comodidad las multiplicaciones y las divisiones, no son de omitir las aplicaciones que á este objeto pueden hacerse de los principios establecidos en los párrafos 55 y siguientes.

En primer lugar, por lo que respecta á la multiplicacion, como en los mas de los cálculos haya que ejecutar muchas multiplicaciones; si despues de haber efectuado alguna de ellas, y tratando ya de ejecutar otra observamos que uno de los factores es el mismo que en la anterior, y que el otro factor es doble, ó triple, ó cuádruplo &c.; ó la mitad, la tercia, ó la cuarta &c. parte del factor restante de la primera, con solo doblar, ó triplicar ó cuadruplicar &c., ó tomar la mitad, la tercia, la cuarta &c. parte del primer producto, obtendremos el que necesitamos. Si, por ejemplo, habiendo multiplicado 576 por 48, y hallado por el método ordinario el producto 27648, se nos ofreciese multiplicar el mismo 576 por 96; observando que este nuevo multiplicador es doble del primero, veremos que para determinar el nuevo producto, nos bastará doblar ó multiplicar por 2 el anterior, y que de consiguiente es 55296. Si tuviésemos que multiplicar el mismo 576 por 12, que es la cuarta parte de 48, tomaríamos la cuarta del primer producto 27648, y conseguiríamos mas pronta y cómodamente el que buscamos, 6912.

157 Si los nuevos factores fueren ambos respectivamente dobles de los anteriores, el nuevo producto habrá de ser cuádruplo del anterior; y si ambos fueren triples, deberemos multiplicar por 9 el primer producto para obtener el que de nuevo buscamos. Si ambos factores fueren respectivamente mitades de los anteriores, el nuevo producto habrá de ser la cuarta parte del conocido; y si ambos fueren respectivamente tercias partes de los anteriores, el nuevo producto deberá ser la novena parte del anterior.

Si uno de los nuevos factores fuese doble, y el otro triple, cada uno de su correspondiente, habremos de multiplicar por 6 el producto antes hallado: si el uno fuere doble, y el otro cuádruplo, se habrá de multiplicar por 8 el producto: y si el uno fuere triple y el otro cuádruplo, se le multiplicará por 12.

Si uno de los factores fuere mitad, y el otro tercia parte, el nuevo producto será sexta parte del anterior: si uno fuere la mitad, y el otro la cuarta parte, el producto habrá de ser la octava parte; y si el uno fuere la tercia y el otro la cuarta parte, el producto vendrá á ser la duodécima ó dozava.

Si uno de los factores fuere doble, y el otro tercera parte, cada uno del suyo, el nuevo producto habrá de ser dos tercias partes del conocido: si el uno fuere triple, y el otro la cuarta parte, el producto deberá equivaler á las tres cuartas partes del anterior. Si el uno fuese triple, y el otro mitad, habrá que agregar al producto hallado su mitad; y si el uno fuese cuádruplo, y el otro tercia parte, se deberá agregar al producto conocido su tercera parte. Asi de los demas casos.

Por último, si uno de los factores fuese doble, y el otro mitad, cada uno de su correspondiente; ó si fuese triple el uno, y tercera parte el otro; el uno cuádruplo, y el otro cuarta parte &c.; para determinar el producto, no tendremos que hacer operacion alguna, puesto que debe ser el que ya conocemos. A lo cual es consiguiente que en vez de dos números cualesquiera que se nos hayan dado para ejecutar una multiplicacion, podamos sustituir otros dos muy distintos que nos produzcan el resultado que apetecemos.

158 Como las multiplicaciones de todos los números por 10, 100, 1000 &c. se puedan ya suponer efectuadas (§. 33), podemos igualmente hallar el producto de cualquier número por 5 ó por $2\frac{1}{2}$ ó por 25 ó por 500 ó por 250 ó por 125 &c.; y en suma por cual-

quier otro número que sea parte alicuota de 10, ó de 100, ó de 1000 &c. Si nos ocurriese, por ejemplo, multiplicar 384 por 25, tendríamos presente que con solo colocar dos ceros á la derecha de las cifras del multiplicando, tenemos representado el producto de la multiplicacion por 100; y como 25 sea la cuarta parte de 100, en tomando la cuarta parte del número 38400, tendremos á 9600 por verdadero producto de la multiplicacion de 384 por 25. Igualmente si del número 38400 tomásemos la octava parte, nos resultaria 4800, producto de 384 por $12\frac{1}{2}$, octava parte de 100. Si del número 384000 tomásemos la octava parte 48000, tendríamos en ella el producto de la multiplicacion de 384 por 125, octava parte de 1000.

159 Siendo el *cuatro* doble del *dos;* el *ocho* doble del *cuatro*, y cuádruplo del *dos;* el *seis* doble del *tres*, y triple del *dos;* el *nueve* triple del *tres*; y debiendo ocurrir con frecuencia combinaciones de las cifras que representan á estos números, entre las que designan al multiplicador, es fácil ver que hallados por el método ordinario ciertos productos parciales, podremos inferir de ellos otros varios por la relacion que tengan entre sí los respectivos multiplicadores. Si, por ejemplo, tuviésemos que multiplicar un número cualquiera por 842 ó por 248, que como se ve, estan representados por la combinacion de las cifras 2, 4 y 8, bastará con doblar primeramente el multiplicando; doblar en seguida este doble: y doblar en seguida este segundo doble; y sumar por último las tres partes colocadas con arreglo á la situacion que en el multiplicador ocupe la cifra correspondiente. Lo mismo podríamos decir y ejecutar en caso que el multiplicador fuere 963 ó 396, ó 2468 ú 8462 &c.

160 A veces suele ser conveniente considerar como descompuesto en dos ó mas partes á uno de los factores que se nos hayan propuesto para efectuar una multiplicacion; pudiendo hacer la descomposicion ó en partes cuya suma sea igual al número dado, ó en partes que multiplicadas entre sí, lo produzcan. Si nos ocurriese, por ejemplo, multiplicar un número cualquiera por 15, podremos considerar á este como equivalente á la suma del 10 y del 5, ó al producto del 3 por 5. Considerándolo como equivalente á la suma del 10 y del 5; y sabiendo, como sabemos, que para determinar el producto de la multiplicacion de un número cualquiera por 10, basta escribir un cero á la derecha de las cifras con que esté representado el multiplicando, y que el producto de la multiplicacion por 5 es la mitad del de la multiplicacion del mismo número por 10; será sumamente facil multiplicar por 15, y de consiguiente reducir á reales cualquier número dado de pesos; pues con solo escribir un cero á la derecha del multiplicando, tomar la mitad del número que asi resulta representado, y sumar por último las dos partidas, en la suma tendremos el producto que buscamos, sin haber siquiera escrito el multiplicador.

Si considerásemos al 15 como equivalente que es al producto de la multiplicacion del 3 por el 5, ó del 5 por el 3, tendríamos que multiplicar por 3 al número dado, y en seguida por 5 al producto que resultase; ó primeramente multiplicaríamos por 5 el número dado, y despues por 3 el producto; y en ambos casos el segundo producto seria el que buscábamos.

161 Considerando á 75 como equivalente que es á la suma de 50 y 25, de los cuales 50 es mitad de 100, y 25 mitad de 50; se ve que escribiendo dos ceros á la

derecha de las cifras con que esté representado un número cualquiera; tomando la mitad del número que asi resulta; tomando en seguida la mitad de aquella mitad; y sumando estas dos últimas mitades, en la suma de ellas tendremos el producto de la multiplicacion del número propuesto por 75 Si juntamente con las dos mitades sumásemos el número que nos ha resultado despues de haber escrito los dos ceros á la derecha de las cifras que representan el número dado, en la suma de las tres partidas tendríamos el producto de la multiplicacion del mismo número por 175.

162 Ya hemos dicho (§. 158) cómo hallaremos el producto de la multiplicacion de cualquier número por 115 considerando á este como octava parte que es de 1000: pero en caso que lo consideremos como equivalente á la suma de los dos 100 y 25, veremos que con solo escribir dos ceros á la derecha de las cifras con que esté representado un número cualquiera; con tomar la cuarta parte del nuevo número que asi resulta, y sumar las dos partidas, tendremos el producto de la multiplicacion por 125. Del mismo modo podemos hallar el producto de la multiplicacion de cualquier número por 1125, con solo escribir tres ceros á la derecha de las cifras que representan el multiplicando; tomar en seguida la octava parte del número nuevamente representado, y sumar las dos partidas.

163 Si tratamos de multiplicar un número cualquiera por 34, y tenemos presente que este equivale á la suma de los tres menores 10, 20 y 4; y que 2 es doble de 1, y 4 es doble de 2, podremos efectuar la multiplicacion propuesta con solo escribir debajo del multiplicando, cualquiera que sea, su doble; escribir en seguida de-

bajo el doble de este doble, adelantando un lugar hácia la derecha las cifras de este cuádruplo del multiplicando, y sumar por último las tres partidas. Si nos propusiéramos, por ejemplo, multiplicar el número 19 por 34 como para hallar el número de maravedis equivalente á 19 reales, podríamos efectuar la multiplicacion ó transformacion del siguiente modo:

Multiplicando.........	19
Su doble..................	38
Su cuádruplo...........	76
Suma.....................	646

es decir: escribiríamos primeramente, como se ve, el 19; debajo su doble con exacta correspondencia de unidades, decenas &c.; y últimamente el 76, doble del 38, y por consiguiente cuádruplo del 19, adelantando las cifras un lugar hácia la derecha, para que el 19 venga á ser 190, ó el producto de la multiplicacion del 19 por 10, y que el 38 venga á ser 380, ó el producto de la multiplicacion del 19 por 20. Sumando por último las tres partidas, la suma 646 será el producto que buscábamos, ó el número de maravedis equivalente á 19 reales.

Del mismo modo podemos hallar el producto de la multiplicacion del 19, ó de cualquiera otro número por 31, ó por 32, ó por 36, ó por 38. Para ello escribiremos:

En el 1º caso.	*En el 2º*	*En el 3º*	*En el 4º*
19	19	19	19
38	38	38	38
19	38	114	152
589	608	684	722

donde puede notarse que para hallar en el tercer caso la tercera partida, se ha triplicado la segunda, porque el 6 es triple de 2, asi como se ha cuadruplicado en el cuarto caso la segunda, por ser el 8 cuádruplo del mismo 2.

164 Con solo escribir debajo de cualquier multiplicando al mismo número ó su doble, ó su triple, ó su cuádruplo &c. adelantando un lugar hácia la derecha las cifras de esta segunda partida, y sumando las dos, tendremos en la suma los respectivos productos de las multiplicaciones por 11, por 12, por 13 hasta por 19. Mas si en vez de adelantar hácia la derecha las cifras de la segunda partida, las atrasásemos un lugar hácia la izquierda, en la suma de las dos tendríamos los respectivos productos de las multiplicaciones por 11, por 21, por 31, hasta por 91.

Lo mismo podemos decir de los productos de las multiplicaciones por 101, por 102, por 103 hasta 109, y de las que pueden efectuarse por 101, por 201, por 301 hasta 901, sin otra diferencia que la de adelantar en las primeras, y atrasar en las segundas dos lugares las cifras de la segunda partida. En suma, cuando en la combinacion de cifras que represente al multiplicador solo haya dos significativas, de las cuales sea una el 1, tendrá lugar el mismo modo de abreviar la multiplicacion, teniendo cuidado de adelantar, ó de atrasar las cifras de la segunda partida tantos lugares como esté adelantada ó atrasada con respecto al 1 la otra cifra significativa que le acompañe en la combinacion con que esté representado el multiplicador.

165 Cuando este sea uno de los números próximamente menores que 10, 100, 1000, 10000 &c. lo podremos considerar como resultado de una sustraccion cuyo minuendo haya sido uno de estos números; y á consecuencia nos será fácil determinar por medio de una sustraccion el producto que buscamos. Si, por ejemplo, tenemos que multiplicar un número cualquiera por 999, ó por 998, ó por 997 &c. que estan, como se ve, muy próximos á 1000; con solo escribir tres ceros á la derecha de las cifras con que esté representado el multiplicando, y quitar del número asi representado el mismo multiplicando ó su doble ó su triple &c.; en los residuos tendremos los respectivos productos de las multiplicaciones por 999, por 998, por 997 &c. Con efecto, escribiendo tres ceros á la derecha de las cifras que representan al multiplicando, formamos una nueva combinacion de cifras que representa al producto de la multiplicacion por 1000, ó lo que es lo mismo, á la suma ó conjunto de mil multiplicandos; con que si de estos mil se quitan uno ó dos ó tres &c. multiplicandos, los residuos habrán de contener 999 ó 998 ó 997 &c. multiplicandos, es decir, deberán ser los respectivos productos de las multiplicaciones por estos números.

Por el mismo medio se podrá determinar el producto, siempre que el multiplicador le falte para llegar á 10, ó á 100, ó á 1000 &c. un número que sea parte alicuota de alguno de estos. Si advertimos, por ejemplo, que á $7\frac{1}{2}$ le falta para ser igual á 10 la cuarta parte del mismo 10; que á 75 le falta para ser igual á 100 la cuarta parte de 100; que á $87\frac{1}{2}$ le falta para llegar á 100 la octava parte del mismo 100; que á 875 le falta para igualarse con 1000 la octava parte de este último número, podremos fácilmente hallar por medio de la sustraccion los productos de la multiplicacion de cualquier número por $7\frac{1}{2}$, por 75, por $87\frac{1}{2}$, por 875 &c. Con efecto, poniendo un cero á la derecha de las cifras del multiplicando; tomando la cuarta parte del nuevo número; y restando de este su cuarta parte, el residuo será el producto de la multiplicacion por $7\frac{1}{2}$. Si á la derecha de las cifras del multiplicando se escriben dos ceros, y del nuevo número se toma la cuarta parte, y por último se resta de él su cuarta parte, el residuo vendrá á ser el producto de la multiplicacion por 75: y si en vez de la cuarta parte, se tomase y sustrajese la octava, el residuo seria el producto de la multiplicacion por $87\frac{1}{2}$. Por último, poniendo tres ceros á la derecha de las cifras de cualquier número, y restando del nuevamente representado su octava parte, tendremos en el residuo el producto de la multiplicacion por 875.

166 Los principios establecidos (§. 58) pueden sernos muy útiles para abreviar en muchos casos la division. Si despues de haber efectuado por el método ordinario una, tuviésemos que ejecutar otra en que siendo el mismo divisor, el dividendo sea doble ó triple ó cuádruplo &c. ó mitad ó tercia ó cuarta &c. parte del anterior, con solo doblar, ó triplicar, ó cuadruplicar &c., ó con tomar la mitad, la tercia, la cuarta &c. parte del cuociente conocido, tendremos el que busquemos.

Si por el contrario, siendo el mismo dividendo, fuere doble, ó triple, ó cuádruplo &c. del anterior el nuevo divisor, el nuevo cuociente habrá de ser la mitad, ó la tercia ó cuarta &c. parte del ya conocido: mas si el segundo divisor fuere la mitad, la tercia, cuarta &c. parte del primero, el segundo cuociente deberá ser doble, triple, cuádruplo &c. del primero. Asi si despues de haber determinado el cuociente 36 de la division del 1728 por 48, tuviésemos que dividir de nuevo el mismo 1728 por 96; en advirtiendo que en ambas divisiones es uno mismo el dividendo, y que el segundo divisor es doble del primero; inferiremos que el segundo cuociente debe ser 18, mitad del primero. Por el contrario, si con el mismo dividendo fuese el nuevo divisor 24 mitad del 48, el nuevo cuociente habrá de ser 72, doble del 36; y si el nuevo divisor fuere 16, tercia parte del 48, triplicando el cuociente 36 resultaria el nuevo cuociente 108; y asi de los demas.

167 Si tanto el dividendo como el divisor de la segunda division fueren ambos dobles, ó triples, ó cuádruplos &c., ó mitades, ó tercias, ó cuartas &c. partes del dividendo y divisor de la division primera, el segundo cuociente deberá ser enteramente igual al primero. A lo cual es consiguiente que en lugar de los dos números que se nos hayan dado para ejecutar una division, podamos sustituir otros muy distintos que nos den el mismo cuociente, con tal que si sustituimos un divisor doble del que se nos haya dado, sustituyamos igualmente un dividendo doble del dado; si sustituyésemos un divisor que sea la mitad ó la tercia parte del dado, habremos de sustituir asimismo un dividendo que sea la mitad ó la tercia parte del propuesto. De aqui es que cuando tratamos de reducir cualquier número de cuartos á reales, debiendo ser el divisor $8\frac{1}{2}$, sustituimos en su lugar 17, y doblamos el dividendo; ó 34, y cuadruplicamos el di-

videndo; ú 85, y multiplicamos por 10 al dividendo, escribiendo un cero á la derecha de las cifras con que esté representado. Si, por ejemplo, queremos reducir á reales 1324 cuartos, dividimos su doble 2648 por 17, ó su cuádruplo 5296 por 34, ó su décuplo 13240 por 85; y en todas estas tres divisiones nos resultan por cuociente 155 reales y un quebrado del real, que aunque expresado con muy diferentes términos, representa la misma porcion de un real. El quebrado de la primera division es $\frac{13}{17}$, el de la segunda $\frac{26}{34}$ y el de la tercera $\frac{65}{85}$, y es muy fácil ver que estos dos últimos no se diferencian del primero sino en que los dos términos del segundo son ambos dobles, y los del tercero son ambos quíntuplos de los del primero. Sin embargo, como el numerador del segundo quebrado nos manifiesta desde luego el número de maravedis á que equivale cualquiera de los otros, se suele preferir en la reduccion de cuartos á reales el método de cuadruplicar el número dado de cuartos, y dividir por 34 el número cuádruplo.

168 Si el dividendo fuere doble, y el divisor la mitad ó la tercera, cuarta, quinta &c. parte del anterior, el cuociente deberá ser cuádruplo del primero en el primer caso; séxtuplo en el segundo: óctuplo en el tercero; décuplo en el cuarto &c.; y asi de los demas. De modo que con solo multiplicar por 4, ó por 6, ó por 8, ó por 10 &c. el cuociente ya hallado, tendremos el que buscamos.

169 Si siendo el dividendo mitad del anterior, fuere el divisor doble ó triple ó cuádruplo ó quíntuplo &c. de su correspondiente, el nuevo cuociente habrá de ser la cuarta parte del anterior en el primer caso; la sexta parte en el segundo; la octava en el tercero; la déci-

ma parte en el cuarto; y asi de los demas.

En suma, teniendo presente que cuantas veces mayor ó menor sea el segundo dividendo con respecto al primero, tantas veces cabalmente debe tambien ser el segundo cuociente mayor ó menor que el primero; y que cuantas veces mayor que el primer divisor sea el segundo, tantas veces menor que el primer cuociente debe ser el segundo, y al contrario: luego que en dos divisiones hayamos comparado los dividendos entre sí, y los divisores entre sí; conociendo por medio de esta doble comparacion qué múltiplo ó qué parte alicuota sea cada uno de su correspondiente; nos será fácil inferir qué múltiplo ó qué parte del anterior cuociente habrá de ser el que busquemos, y podremos de consiguiente abreviar en muchos casos la segunda division.

170 Siendo tan fáciles de ejecutar las divisiones de cualesquiera números por *diez*, por *ciento*, por *mil* &c., que se pueden mirar como ya determinados los respectivos cuocientes de ellas, siempre que el divisor sea múltiplo ó parte alicuota del *diez*, ó del *ciento*, ó del *mil* &c., se hallará con mucha prontitud y facilidad el cuociente. Si, por ejemplo, tuviésemos que dividir por 25 al número 34862, como si nos propusiésemos convertir este número de libras en su equivalente número de arrobas, deberíamos tener presente que el divisor 25 es la cuarta parte de 100, y que si este segundo número fuera el divisor, el cuociente habria de ser 348,62; de lo cual inferiremos que el cuociente que buscamos, ha de ser 1394 48 cuádruplo de aquel. Si hubiésemos de dividir 7385641 por 125; sabiendo, como sabemos, que este divisor es la octava parte de 1000, y que si la division se ejecutára por 1000, el cuociente seria 7385,641; deberemos

inferir que el cuociente que buscamos, es 59085,128, óctuplo de aquel.

171 En muchas ocasiones podrá sernos útil considerar al divisor como descompuesto en dos ó mas factores que multiplicados entre sí lo produzcan; en cuyo caso para determinar el verdadero cuociente de la division propuesta, podremos ejecutar (§. 61) tantas divisiones cuantos sean los factores en que hayamos descompuesto al divisor. Si tuviéremos por conveniente hacer uso de esta consideracion, podremos dividir el dividendo por cualquiera de los factores; dividiremos en seguida aquel primer cuociente por otro cualquier factor; dividiremos inmediatamente el segundo cuociente por otro factor, y continuando de este modo hasta emplear como divisor al último factor, en el cuociente que resulte en esta última division, tendremos el que nos propusimos hallar. Es verdad que asi en lugar de una division tendremos que ejecutar dos ó mas; pero estas podrán á veces ser tan fáciles y efectuarse con tanta comodidad, que sean preferibles á la única que nos hayamos propuesto ejecutar. Cuando tengamos, por ejemplo, que reducir un número dado de reales al equivalente de pesos, podremos considerar al 15, que debe ser el divisor, como descompuesto en sus dos factores simples 3 y 5; y tomando en primer lugar la tercera parte del número dado, y en seguida la quinta parte de aquella tercera, tendremos el resultado que buscábamos. Podríamos igualmente tomar primeramente la quinta parte del número propuesto, y despues tomar de esta la tercera parte. El órden con que deben sucederse estas divisiones es indiferente; pues siendo 15 quíntuplo de 3, y triple de 5, el cuociente de la division por 15 será, no solo quinta

parte del de la division por 3, sino tambien tercera parte del de la division por 5. En todos los demas casos podrá hacerse una reflexion semejante.

Por la inversa, en varias cuestiones en que hayamos de dividir un número por otro; é inmediatamente despues dividir el primer cuociente por otro cualquier divisor, y en seguida el segundo cuociente por otro, y asi sucesivamente; podremos por medio de una sola division determinar el último cuociente á que aspirábamos, poniendo en ella por divisor al producto de todos los divisores, que observando el primer método hubiéramos empleado.

172 Con mucha frecuencia ocurre tener que multiplicar un número por otro, habiendo de dividir inmediatamente por otro el producto; y como se halle el mismo resultado final determinado primeramente el producto y dividiéndolo en seguida por el otro número dado para divisor, que dividiendo por este cualquiera de los factores del producto, y multiplicando despues por el cuociente al otro factor; está por consiguiente á nuestro arbitrio el hacer variar, en caso que por algun motivo lo juzguemos á propósito, el órden de las operaciones, sin que por esta variacion se pueda advertir novedad alguna en el resultado que nos hayamos propuesto determinar. Si, por ejemplo, tenemos que multiplicar 36 por 24, y dividir en seguida por 12 al producto, podremos obtener el mismo resultado dividiendo primeramente por el 12 al 36, y multiplicando despues al factor 24 por el cuociente 3; ó dividiendo en primer lugar al 24 por el 12, y multiplicando por el cuociente 2 al otro factor 36.

Por otra parte, si como debemos, tenemos presente que multiplicar un número por otro, y dividir por otro el producto, equivale á multiplicar á cualquiera de los factores por una fraccion cuyo numerador sea el otro factor, siendo el denominador el divisor propuesto; podremos estar ciertos de que siempre que nos sea posible transformar la fraccion en otra equivalente expresada en términos mas sencillos, nos será mucho mas fácil determinar el resultado final de las operaciones propuestas. Con efecto, si nos propusiésemos multiplicar un número cualquiera por 12, y dividir en seguida por 24 al producto; luego que formásemos la fraccion $\frac{12}{24}$, veriamos que esta equivale á $\frac{1}{2}$, y de ahí inferiríamos que con solo tomar la mitad del número propuesto, tendríamos el resultado: y si por el contrario tuviésemos que multiplicar por 24 al primer número, y dividir inmediatamente despues por 12 al producto, la fraccion $\frac{24}{12}$, equivalente á 2 enteros, nos indicaria que con solo doblar el número propuesto habríamos conseguido el resultado que apetecíamos.

Si nos ocurriese multiplicar un número cualquiera por 42, para dividir despues por 48 al producto; la fraccion $\frac{42}{48}$ equivalente á la $\frac{7}{8}$, nos manifestaria que multiplicando por esta última fraccion al número propuesto, ó lo que viene á ser lo mismo, en tomando de él sus siete octavas partes, tendríamos el resultado. Ahora bien, como cualquier cantidad equivalga á sus ocho octavas partes iguales; siempre que tratemos de tomar siete de ellas, podremos considerar al numerador como compuesto por la reunion de las tres partes menores 4 y 2 y 1 que juntas entre sí lo componen. Y puesto que $\frac{4}{8}$ equivale á $\frac{1}{2}$, y $\frac{2}{8}$ es la mitad de $\frac{4}{8}$; y $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{2}{8}$, podremos en primer lugar tomar la mitad del número propuesto; tomar en seguida la mitad de aquella primera mitad; tomar últimamente la mitad de la segunda;

y sumando las tres partidas, tendremos el resultado final.

En caso que á las tres partidas ya dichas hubiésemos tambien agregado el número propuesto, la suma total de las cuatro cantidades equivaldria al producto de la multiplicacion de tal número por la fraccion $\frac{15}{8}$, ó por cualquiera de las que son equivalentes á esta última, cuales son $\frac{30}{16}$, $\frac{45}{24}$, $\frac{60}{32}$ &c.; y de consiguiente habríamos obtenido el resultado final de la multiplicacion por uno cualquiera de los numeradores, y de la siguiente division por su respectivo denominador.

Pudimos asimismo determinar el producto de la multiplicacion de un número cualquiera por la fraccion $\frac{7}{8}$ con solo tomar del mutiplicando una octava parte, y en seguida restarla de él; y lo mismo diremos de todos los demas casos, en que sirva de multiplicador una fraccion, á cuyo valor, para ser equivalente al de una unidad entera, solo le falte una de las partes iguales que indique el denominador. Asi para multiplicar por $\frac{3}{4}$, ó lo que es equivalente para multiplicar por 3, y dividir por 4, como es necesario cuando nos proponemos transformar un cierto número de pesos sencillos en su equivalente de duros, bastará tomar la cuarta parte del multiplicando y restarla de él, para obtener en el resíduo que se halle el resultado que se deseaba. Por el contrario, siendo un quebrado impropio el multiplicador, y llevando de exceso á la unidad entera una sola parte de las que indique el denominador, no habrá mas sino sumar la misma parte del multiplicando y sumarla con él. De este modo convertiremos cualquier número de pesos duros en su equivalente de sencillos, puesto que cada 3 duros equivalen á 4 sencillos, ó lo que es lo mismo, cada peso duro equivale á $\frac{4}{3}$ ó $1\frac{1}{3}$ sencillos.

173 Siempre que se nos progonga como precio de una arroba á un número incomplejo de reales, y tratemos de hallar el valor total de un número complejo de arrobas y libras, podremos sustituir en lugar del número dado de libras su cuádruplo, el cual nos expresará á cuántas centésimas de arroba equivalen, y como tales las escribiremos á la derecha del número de las arrobas. Colocado asi el número mixto de entero y fraccion decimal, se efectúa con él la multiplicacion propuesta por el precio que se nos ha dado de cada arroba; y habiendo separado en el producto las dos cifras de la derecha como decimales, en el número mixto que resulta tendremos con exactitud el verdadero producto que buscamos. A consecuencia suelen muchos tomar la tercera parte del número representado por la combinacion de las dos cifras decimales, para tener conocimiento del número de maravedís que en el producto debe acompañar á los reales: mas suponiéndose en esta práctica que un real equivale á $33\frac{1}{3}$ maravedís, el resultado no puede menos de ser defectuoso, pero de modo que la diferencia sea muy poco considerable.

Progongámonos, por ejemplo, hallar el valor de 134 arrobas y 18 libras, á razon de 8 reales cada arroba. Haciendo la prescrita sustitucion de las 72 centésimas de arroba en vez de las 18 libras tendremos el número mixto 134,72 arrobas, que multiplicadas por 8 reales, nos dan de producto 1077,76 reales. Si, despues de esto, que es exactísimo, nos contentamos con tomar la tercera parte de las 76 centésimas de real, para designar cuántos maravedís vale aquella fraccion decimal, nos resultarán $25\frac{1}{3}$ maravedís en vez de 25,84 que deben ser.

Tratemos igualmente de hallar el valor de 59 arrobas y 2 libras á razon de 79 reales la arroba; y sustituyendo en lugar del número complejo 59 arrobas y 2 libras el incomplejo equivalente 59,08 arrobas, multiplicaremos por este los 79 reales, y el producto exacto vendrá á ser 4667,32 reales. Y si de las 32 centésimas de real tomamos la tercera parte para que nos indique á cuántos maravedís equivalen, nos resultarán $10\frac{2}{3}$ maravedís, debiendo en realidad ser 10,88 maravedís.

174 Siempre que en una multiplicacion de fracciones decimales ó de números mixtos nos propusiéremos determinar el producto, no con entera exactitud, sino contentándonos con cierto y determinado grado de aproximacion, podemos conseguir nuestro intento del modo que vamos á explicar en los siguientes ejemplos.

Supongamos que tratemos de hallar el producto de la multiplicacion de 45,6259573 por 28,63549, no exacto, sino de modo que en él no haya de error una *milésima* de unidad.

Bueno será observar primeramente que para el intento es inútil que en los productos parciales haya cifras que representen partes decimales de mas elevada denominacion que las *cienmilésimas*, puesto que ni las sumas de las colunas en que se hallen las decimales ulteriores, ni las unidades que de ellas se reserven, pueden influir sobre las *milésimas*.

Observaremos en segundo lugar que para obtener un producto compuesto de *cienmilésimas*, comenzando á multiplicar por la primera cifra de la izquierda del multiplicador, la cual en el caso propuesto representa *decenas*, basta comenzar la multiplicacion por la cifra 7 de las *millonésimas* del multiplicando: y como segun el sistema de la numeracion escrita, la cifra que se halle en el multiplicador, colocada en el lugar inmediato á la derecha de las *decenas*, expresa unidades menores diez veces que las mismas decenas; pudiéndose decir lo mismo de todos los demas con respecto á la que tengan mas inmediata á su izquierda; es consiguiente que la multiplicacion deba comenzar con la de 7 *millonésimas* del multiplicando por las 2 *decenas* del multiplicador, cuyo producto es un número de *cienmilésimas*. Se habrá de continuar el segundo producto parcial dándole principio con la multiplicacion de las 5 *cienmilésimas* del multiplicando por las 8 *unidades absolutas* del multiplicador; el cual segundo producto habrá forzosamente de ser un número de *cienmilésimas*. Para formar el tercer producto parcial habremos de comenzar con la multiplicacion de las 9 *diezmilésimas* del multiplicando por las 6 *décimas* del multiplicador; con lo cual nos resultará otro número de *cienmilésimas*. El cuarto producto parcial se comenzará con la multiplicacion de las 5 *milésimas* del multiplicando por las 3 *centésimas* del multiplicador, y nos dará por producto otro número de *cienmilésimas*. El mismo órden habremos de observar en la formacion de los demas productos parciales hasta su conclusion; en cuyo caso los sumaremos para tener en la suma de ellos el producto total que buscábamos.

A fin de evitar las equivocaciones que estamos expuestos á padecer al tiempo de comenzar cada una de las multiplicaciones parciales, escribimos debajo del multiplicando las cifras del multiplicador en órden inverso al que deben tener para representarlo, y de modo que la que en él representa *decenas* venga á quedar colocada debajo de la que representa *millonésimas* en el multiplicando, como aqui puede verse.

```
   45,6259573
    9 453682
   ------------
   91251914
   36500760
    2737554
     136875
      22810
       1824
        405
   ------------
 1306,52142
```

De este modo cada cifra del multiplicador se halla colocada debajo de la del multiplicando por donde debe comenzar la respectiva multiplicacion parcial, y asi se omiten cuantas en el mismo multiplicando existan á la derecha de ella.

Se comienzan á escribir todos los productos parciales en una misma coluna, porque las primeras unidades de la derecha de todos ellos son *cienmilésimas.*

Ejecutando la adicion de los productos parciales, y separando de la suma cinco cifras para decimales, pues que las *cienmilésimas* son las de denominador mas elevado, nos resultará como producto aproximado el número mixto 1306,52142; del cual suprimiendo las dos últimas cifras 42, nos quedará 1306,521 como producto conforme hasta en las *milésimas* con el que hubiéramos obtenido por medio de una multiplicacion ordinaria de los dos números propuestos, el cual es 1306,5216440045 77.

Si ocurriere que en la combinacion de cifras con que esté representado alguno de los dos factores, no hubiese las suficientes para establecer enrre las de los dos la correspondencia que al caso convenga, nos valdremos del medio de suplir con ceros tantas cifras como falten en el factor para el fin propuesto. Propongámonos, por ejemplo, obtener el producto de los números 54,236 y 532,27 de modo que no le falte una centésima. Para ello escogemos como á multiplicador al segundo, y escribimos sus cifras en el órden inverso al que tienen. En esta suposicion y teniendo presente que el primer multiplicador parcial habrá de ser 5 centenas, es indispensable que las primeras unidades del multiplicando sean *millonésimas* para que á consecuencia de la multiplicacion se reduzcan á *diezmilésimas*, como es necesario ya que queremos tener alguna confianza en las centésimas.

```
 54236000
    72235
---------
271180000
 16270800
  1084720
   108472
    37961
---------
28868,1953
```

Si omitiendo ahora las 53 *diezmilésimas* que aparecen en el resultado, aumentamos en compensacion una *centésima* á las 19 que las preceden, tendremos como á producto que se nos ha pedido al número mixto 28868,20.

Siempre que de alguna cantidad decimal ó mixta se omiten por algun motivo una ó mas cifras de las que entran en la expresion, y de todos los casos en que el valor de las cifras omitidas sea mayor que la mitad de una de las unidades del número representado por la última cifra que se conserve, se aumenta generalmente el valor de esta en una unidad; porque es bien claro, por ejemplo, que 34,546 está mas inmediato á 34,55 que á 34,54.

La práctica de la division de las cantidades decimales ó mixtas admite abreviaciones análogas á las que hemos manifestado en la multiplicacion; pero requiriendo aquellas mayor número de precauciones particulares para que podamos contar con el resultado con alguna confianza, hemos creido mas conveniente abstenernos de su explicacion.

De las razones y proporciones.

175 Ya que hemos expuesto hasta aqui los métodos necesarios para efectuar con los números enteros, fraccionarios y complejos las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética; es decir, la adicion, la sustraccion, la multiplicacion y la division, y atendiendo á que despues de haberlas bien comprendido, se pueden mirar como resueltas todas las cuestiones que se nos puedan proponer relativas á los números, luego que á consecuencia de un atento exámen y consideracion de sus propuestas, hayamos determinado con plena seguridad cuál ó cuáles de las cuatro explicadas operaciones nos deban dirigir al objeto que nos proponemos, podríamos en verdad dar aqui fin á nuestro tratado, dejando lo demas que pudiera echarse menos en él, para el Algebra, adonde en todo rigor pertenece. Con todo, vamos á resolver algunas cuestiones, en las cuales nuestros lectores, al mismo tiempo que se ejerciten en cuanto hasta aqui han aprendido, se preparen

para el analisis algebráica y adquieran algun conocimiento de la importante teoría de las razones y proporciones, de que tratan por lo comun todos los libros de Aritmética.

176 Supongamos en primer lugar que habiéndose sabido con entera certeza que 13 varas de un cierto lienzo han costado todas 130 reales, se nos pregunte *¿cuántos reales costarán al mismo precio* 18 *varas del mismo lienzo?*

Por decontado nos será muy fácil determinar el verdadero precio de cada vara de lienzo, hallando el cuociente 10 reales que resulta de la division del valor total 130 reales por las 13 varas que se suponen compradas primeramente, y ya que sabemos este precio, si lo multiplicamos ahora por 18, que es el número de varas de la segunda compra, nos resultará por producto 180 reales, verdadero valor total que se nos preguntaba.

Propongámonos en seguida esta otra cuestion: *un correo que camina constantemente con igual velocidad, ha corrido en* 3 *horas* 5 *leguas*; y se desea saber *¿cuántas leguas andará en* 11 *horas, continuando su carrera con la misma velocidad?*

Discurriendo como en el ejemplo anterior, nos es fácil ver que este correo anduvo en cada una de las 3 primeras horas la tercera parte de 5 leguas, ó lo que viene á ser lo mismo, $\frac{5}{3}$ de legua; y de consiguiente en las segundas 11 horas le corresponde andar once veces $\frac{5}{3}$ de legua ó $\frac{55}{3}$ de legua, equivalentes á 18 leguas y $\frac{1}{3}$ de otra.

Y si suponemos que se nos haya preguntado *¿cuántas horas necesitará el mismo correo para andar* 22 *leguas?*

Haciéndonos cargo de que pues para andar 5 leguas empleó 3 horas para andar una legua ó la quinta parte de 5 leguas, debia necesitar la quinta parte de 3 horas ó $\frac{3}{5}$ de una hora; y por tanto multiplicando estos $\frac{3}{5}$ de hora por 22, en el producto $\frac{66}{5}$ de hora, equivalentes á $13\frac{1}{5}$ horas, ó á 13 horas y 12 minutos, tendremos el tiempo indispensable para que el correo ande las 22 leguas.

177 Examinando atentamente las condiciones de las propuestas de las tres cuestiones anteriores, hemos podido determinar con certeza y exactitud el número desconocido que nos proponíamos buscar en cada una de ellas; mas sin embargo, no creemos fuera del caso hacer notar que en todas las cuestiones semejantes á las tres propuestas los números conocidos y los desconocidos tienen entre sí cierta dependencia mútua que no juzgamos inútil observar. Volvamos con este objeto á la primera cuestion, en la cual dándosenos por supuesto que 13 varas de cierto lienzo habian costado 130 reales, se trataba de averiguar cuál deba ser al mismo precio el valor total de 18 varas del mismo lienzo? En este caso y en cuantos se le asemejen, no puede quedar la menor duda sobre que en siendo el segundo número de varas doble del primero, el valor de aquellas habrá forzosamense de ser doble del de estas; que si el segundo número fuere triple del primero, el segundo valor lo seria asimismo de su correspondiente; y si el segundo número de varas fuera la mitad ó las dos terceras partes del primero, el segundo valor no seria mas de la mitad, ó dos terceras partes del valor primero; y asi sucesivamente.

De estas nociones, en que sin la menor dificultad convendrán cuantos entiendan la propiedad de las voces, se deduce que en cualquier caso en que se nos presenten dos pedazos desiguales de un mismo lienzo, el valor del mayor contendrá al del menor tantas veces como la longitud de aquel contenga á la de este: lo cual expresamos diciendo que *los valores de los dos pedazos son proporcionales á sus longitudes*, ó que *son entre sí como las longitudes*, ó que *tienen la misma razon que las longitudes.* Este ejemplo va á servirnos para fijar el sentido de varias expresiones que ocurren con mucha frecuencia.

178 La *razon* de las longitudes es el número entero, fraccionario ó mixto que nos da á conocer cuantas veces contiene una longitud á otra, ó á cuántas y cuáles partes de una longitud equivale la otra. De modo que si uno de los pedazos de lienzo tuviere 4 varas de largo, y el otro 8, la razon de esta segunda longitud á la primera seria 2, porque el 8 contiene al 4 dos veces. En la primera cuestion propuesta (§. 176) se hace mencion de dos pedazos de lienzo, el primero de 13 varas de longitud, y el segundo de 18, será, pues, la razon de la segunda longitud á la primera el quebrado impropio $\frac{18}{13}$ ó el número mixto $1\frac{5}{13}$. En general *la razon de dos números es el cuociente de la division del uno por el otro.*

Puesto que en la misma primera cuestion los valores de los dos pedazos de lienzo deben tener entre sí la misma razon que sus respectivas longitudes, es necesario que 180 reales, valor del segundo pedazo, divididos por los 130 reales, valor del primero, den por cuociente $\frac{18}{13}$ que nos dan las longitudes 13 y 18, como cabalmente se verifica. En tal caso los cuatro números 13, 18, 130, 180, escritos en el órden que aqui se les ve, son por consiguiente tales, que el segundo contiene al primero tantas veces como el cuarto contiene al tercero: y hé aqui cuatro números que se llaman *proporcionales*, y de los que se dice que forman una *proporcion.* Los números 13, 18, 130, 180 se llaman los *términos* de la proporcion, y de esta decimos que *es la combinacion de dos razones iguales.*

Aplicando las mismas consideraciones á la segunda cuestion, vendremos en conocimiento de que pues el correo andaba 5 leguas en 3 horas, andaria, á consecuencia de la constancia de velocidad, doble camino en doble tiempo, camino triple en triple tiempo &c.; y de consiguiente las 11 horas deben contener á las 3 horas tantas veces como la longitud del camino andado en las 11 horas á la longitud del camino andado en las 3 horas; es decir, como $18\frac{1}{3}$ ó como $\frac{55}{3}$ de legua contienen á 5 leguas. Con efecto, los cuatro números 5, $\frac{55}{3}$, 3, 11 forman una proporcion; y si dividimos por el primer término 5 al segundo $\frac{55}{3}$, nos resultarán por cuociente $\frac{55}{15}$ que equivalen á $\frac{11}{3}$ ó á la razon segunda. De un modo semejante podremos reconocer fácilmente todos los casos en que haya proporcion entre cuatro números.

179 Para indicar que cuatro números, como por ejemplo, 13, 18, 130, 180, estan en proporcion, se les escribe de este modo, 13 : 18 :: 130 : 180, y al verlos en esta disposicion, se lee: 13 *es á* 18 *como* 130 *es á* 180; lo cual quiere decir que 13 es la misma parte de 18, que 130 es de 180; ó que 13 está contenido en 18 tantas veces como 130 en 180; ó en fin que la razon de 18 á 13 es la misma que la de 180 á 130.

El primer término de cualquiera razon se llama su *antecedente* y el segundo su *consecuente*: y pues que toda proporcion se compone de dos razones iguales, deberá haber en toda proporcion dos antecedentes y otros dos consecuentes. En la proporcion, por ejemplo, 13 : 18 ::

130 : 180, los dos antecedentes son el 13 y el 130; y los dos consecuentes el 18 y el 180.

Para expresar el valor de cualquiera razon, y determinar, como se dice, su *exponente*, bastará dividir cualquiera de sus dos términos por el otro, ó lo que es equivalente, formar un quebrado cuyos términos sean los mismos de la razon; y reduciendo en seguida el quebrado á su mas sencilla expresion, en esta tendremos la del valor de la razon propuesta. Y en atencion á que es indiferente tomar para dividendo ó numerador al antecedente, y para divisor ó denominador al consecuente, ó al contrario; por nuestra parte nos proponemos tomar constantemente al consecuente de cada razon por numerador de la fraccion que exprese su valor, y al antecedente por su denominador.

180 Para averiguar si los cuatro números 13, 18, 130, 180 estan en proporcion, podrá ser muy conveniente examinar si las dos fracciones $\frac{18}{13}$ y $\frac{180}{130}$ son como deben ser entre sí iguales: lo cual en este caso se advierte facilísimamente con solo reducir la segunda $\frac{180}{130}$ á su mas sencilla expresion $\frac{18}{13}$.

Tambien podemos hacer generalmente la misma verificacion, teniendo presente que pues son entre sí iguales las dos fracciones $\frac{18}{13}$ y $\frac{180}{130}$, y que como tales forman una proporcion; es consiguiente que cuando se las reduzca á tener un denominador comun, hayan de ser iguales sus numeradores, y por tanto el 18 multiplicado por el 130 debe dar el mismo producto que el 180 multiplicado por el 13. Asi es en realidad: y como el razonamiento que acabamos de hacer sea independiente del valor particular de los cuatro números propuestos, podremos establecer como principio general, que *cuando cuatro números cualesquiera se hallen formando una proporcion, el producto* *del primero y del cuarto, ó de los dos extremos, es igual al del segundo y del tercero, ó de los dos términos medios.*

Al mismo tiempo nos es sumamente fácil convencernos de que cuando los cuatro números de que se trate no formen una proporcion, tampoco se advertirá en ellos la propiedad que acabamos de demostrar: porque si como se supone, el quebrado que expresa la primera razon no es equivalente al que expresa la segunda, tampoco podrán ser iguales sus numeradores ni aun despues de haberlos reducido á que tengan un denominador comun.

181 La primera consecuencia que naturalmente se deduce de lo que acabamos de establecer, es que podemos alterar el órden de los términos de una proporcion sin que esta deje de subsistir, con tal que en el nuevo órden que les demos, se conserve el producto de los extremos igual al de los medios. De la proporcion 13 : 18 :: 130 : 180 que hemos puesto por ejemplo, se pueden fácilmente deducir estas otras:

13 : 130 :: 18 : 180
180 : 130 :: 18 : 13
180 : 18 :: 130 : 13
18 : 13 :: 180 : 130
18 : 180 :: 13 : 130
130 : 13 :: 180 : 18
130 : 180 :: 13 : 18

porque en estas diferentes situaciones de los cuatro términos de la primitiva proporcion se verifica constantemente que el producto de los extremos sea igual al de los medios. La primera de las nuevas permutaciones, en la cual solamente los medios han cambiado de lugar, y de consiguiente los dos primitivos antecedentes vienen á formar la primera razon, y los dos consecuentes la segunda, es una de las que se ejecutan con mas frecuencia.

No será fuera de propósito observar que la misma primera permutacion pudo muy bien ser la primitiva proporcion, deducida inmediatamente de la cuestion propuesta (§. 176); porque es bien claro que el precio de cada vara de lienzo debe resultar igualmente de dividir por 13 el valor de las 13 varas, que de dividir por 18 el de las 18 varas: á lo cual es consiguiente que el número que exprese el valor de las 13 varas deba contener al 13 tantas veces como contiene á 18 el número que exprese el valor de las 18 varas. Podemos, pues, mirar como demostrado por el analisis de la propuesta de la cuestion que 13 : 130 : : 18 : 180.

Lo mismo podríamos decir de la segunda cuestion y de todas las demas de la misma especie, y deducir por este medio las varias proporciones que se pueden formar con unos mismos números; en la inteligencia de que si hemos preferido mirar la cuestion segun la hemos presentado (§. 176), es porque asi se comparan entre sí cantidades de una misma especie, en vez de que del otro modo se comparan los valores que son sumas de dinero, con las varas que son medidas de longitud; y esta comparacion no puede verificarse sin considerar como abstractos los números con que se expresan aquellas cantidades de especies tan diversas.

182 Segun la idea que hemos dado (§. 178) de la razon, podemos mirar al antecedente y consecuente como si fuesen dividendo y divisor; y puesto que si se multiplican ó se dividen por un mismo número el dividendo y el divisor, no padece por eso alteracion alguna el cuociente, tampoco debe padecerla ninguna razon porque se mul-

tipliquen ó se dividan por un mismo número el antecedente y el consecuente: y lo mismo deduciremos si consideramos á los dos términos de cualquiera razon como términos que son de un quebrado.

De ahí es que si se multiplican ó dividen por un mismo número los dos términos de cualquiera de las dos razones que forman una proporcion, se conservarán tambien en proporcion los resultados, aun cuando los términos de una razon se multipliquen ó dividan por un número distinto del que se emplee para multiplicar ó dividir los dos términos de la otra; y aun cuando se multipliquen por un mismo número los dos términos de cualquiera de las dos razones, y se dividan por otro mismo número los dos términos de la otra.

183 Lo mismo podemos decir en caso que multipliquemos ó dividamos por un mismo número los dos antecedentes ó los dos consecuentes de las dos razones: pues siempre podemos suponer (§. 181) que los dos antecedentes son los términos de la primera razon, y los dos consecuentes los de la segunda. Si, por ejemplo, en la proporcion 55 : 21 :: 165 : 63; dividimos por 5 los dos antecedentes, resultará estotra 11 : 21 :: 33 : 63; y haciendo que en esta cambien de lugar los dos medios, tendremos estotra 11 : 33 :: 21 : 63, que hubiera desde luego resultado si despues de haber cambiado de lugar los medios de la primitiva, hubiésemos dividido por 5 los dos términos de la primera razon de la proporcion nueva.

184 Puesto que en toda proporcion el producto de los extremos es igual al de los medios, no podrá haber el menor inconveniente en tomar uno por otro; y como si dividiésemos el producto de los extremos por uno de estos, el cuociente seria necesariamente el otro, debemos

inferir que *si dividimos por un extremo el producto de los medios, el cuociente será igualmente el otro extremo*; y por la misma razon *si dividimos por un medio el producto de los extremos, el cuociente deberá ser el otro medio.*

Se puede por consiguiente hallar cualquier término desconocido de una proporcion siempre que estén conocidos los otros tres; porque el desconocido no puede menos de ser uno de los extremos ó uno de los medios. Por de contado, por la primera de estas dos reglas podemos resolver sin la menor dificultad las tres cuestiones propuestas (§. 176). Con efecto, habiendo echado de ver en la primera que los valores de las dos piezas de lienzo han de estar en proporcion con los números de varas que cada pieza tenga, podemos formar la que sigue

$$13^{v} : 18^{v} :: 130^{r} : x^{r},$$

representando con la letra x ú otra cualquiera de las últimas del abecedario, el valor que buscamos de las 18 varas; y como este valor sea uno de los extremos de la proporcion, se ve fácilmente que multiplicando entre sí los dos medios 18 y 130, tendremos el producto 2340; el cual, dividido por el extremo conocido 13, nos dará por cuociente 180 que justamente es el otro extremo que deseábamos conocer.

Esta regla que nos prescribe un medio cierto y seguro de determinar uno de los cuatro términos de una proporcion siempre que supongamos conocidos los otros tres, es generalmente conocida bajo los nombres de *regla de tres* ó *de proporcion*: y aunque los autores de la mayor parte de los libros de Aritmética la hayan dividido en varias especies, nosotros miramos todo ese aparato como enteramente inútil á quien haya comprendido bien la naturaleza de la proporcion, y haya entendido con toda claridad la propuesta de la cuestion que le ocurra resolver. Procuremos aclarar esto con el auxilio de algunos ejemplos.

185 Supongamos en primer lugar que habiendo hecho un jornalero 217,5 varas de obra en 9 dias, se nos pregunte *¿cuántos dias necesitará el mismo jornalero para hacer 423,9 varas de la misma obra en igualdad de todas las demas circunstancias?*

En esta cuestion el número desconocido, ó como se suele decir, la cantidad *incógnita*, es un número de dias que debe contener á los 9 dias empleados en hacer las 217,5 varas de obra tantas veces como las 423,9 varas contienen á las mismas 217,5 varas. Tendremos, pues, la siguiente proporcion

$$217{,}5^{\mathrm{v}} : 423{,}9^{\mathrm{v}} :: 9^{\mathrm{d}} : x^{\mathrm{d}};$$

de la cual, multiplicando por 10 los términos de la primera razon, se deduce estotra.

$$2175^{\mathrm{v}} : 4239^{\mathrm{v}} :: 9^{\mathrm{d}} : x^{\mathrm{d}};$$

y practicando en esta la regla prescrita (§. 184), obtendremos por resultado 17,54 dias.

186 Como la principal dificultad de todas las cuestiones de esta especie consista en ordenar los términos conocidos del modo conveniente, para establecer la proporcion, procuraremos dar una regla segura para formarla en todos los casos.

De los cuatro términos que deben entrar en toda proporcion, dos son números de una misma especie; pero los dos restantes, aun cuando sean de una misma especie, suelen no serlo de la misma que los primeros. Asi en el ejemplo anterior, dos de los cuatro términos son números de varas al mismo tiempo que los dos restantes son números de dias. Es, pues, necesario distinguir en primer lugar los dos términos de cada especie, y examinar si el término desconocido debe ser mayor ó menor que el correspondiente de su especie. Hecho esto, habremos de estar bien seguros de que el cuociente del término mayor de la segunda especie, dividido por el menor de la misma, es igual al cuociente del mayor término de la primera especie, dividido por el mas pequeño de esta; y de este modo nos resultará la proporcion:

El término mas pequeño de la primera especie

es

al mayor de la misma

como

el término menor de la segunda especie

es

al mayor de esta otra.[1]

En el ejemplo anterior tendremos inmediatamente, observando esta regla, la siguiente proporcion:

$$217{,}5^{v} : 423{,}9^{v} :: 9^{d} : x^{d};$$

en atencion á que el término desconocido debe ser mayor que 9, por ser necesarios tantos mas dias cuantas mas varas de obra haya que ejecutar.

187 Si nos hubiésemos propuesto averiguar cuántos dias necesitarán 27 trabajadores para ejecutar una obra enteramente igual á otra que en 18 dias y en igualdad

1 El conocimiento del asunto de que trata la cuestion propuesta, es el único que puede indicar al calculador no solo si el número desconocido ha de ser mayor ó menor que el conocido de la misma especie, sino tambien si para determinarlo deberá ó no formar una proporcion y cuál.

de todas las demas circunstancias hayan concluido 15 trabajadores; habríamos desde luego visto que cuantos mas trabajadores se empleen en la misma obra, tantos menos dias serán necesarios para concluirla, y que de consiguiente para que se verifique la proporcion en este caso, es indispensable hacer alguna inversion en el órden de los términos; porque si el número de trabajadores que se han de emplear en la segunda obra fuera triple, por ejemplo, del de los que se emplearon en la primera, bastaria á aquellos, para concluirla, la tercera parte del tiempo que consumieron estos, y al contrario. Por tanto el número de dias que se gasten en la segunda obra debe ser al de los que se gastaron en la primera, como el número de trabajadores que se emplearon en esta, es al de los que hayan de emplearse en la otra.

Por esta inversion que desde luego se advierte al comparar entre sí los dos números de trabajadores y los dos de dias empleados en las dos obras, se dice que la razon de los dos primeros es *inversa* de la de los dos segundos. Con efecto, si colocásemos los términos de las dos razones con el mismo órden con que estan expresados en la propuesta, y suponemos que la razon de los primeros sea $\frac{3}{1}$, la de los segundos será $\frac{1}{3}$ que es la fraccion inversa de la primera. Generalmente se invierte una razon invirtiendo el quebrado con que esté expresada; pues asi se hace pasar el antecedente al lugar del consecuente y al contrario: la razon $\frac{3}{2}$ ó la de 2 : 3 es la inversa de la $\frac{2}{3}$ ó de la de 3 : 2.

La regla del párrafo anterior simplifica mucho estas consideraciones; porque mirando á los dos números de trabajadores como que son las cantidades de la primera especie, y á los dos números de dias como los de la segunda, y cuidando de colocarlos segun el órden de su magnitud, tendremos la siguiente proporcion

$$15^t : 27^t :: x^d : 18^d;$$

de la cual se deduce que x es igual á 10.

188 Añadamos ademas algunos otros ejemplos que puedan proporcionar mayor ejercicio á nuestros lectores y contribuir á suministrarles mayor claridad en las ideas que puedan haber adquirido sobre la materia.

1º *En una casa de comercio ha puesto uno 3575 pesos á ganancias al 5 por 100 al año*; y se quiere saber *¿á cuánto ascienden los totales réditos ó intereses anuales de su capital*, ó lo que es lo mismo, *la ganancia anual de la cantidad prestada?*

En la expresion *5 por 100 de intereses*, que suele generalmente representarse de este modo (5 p $\frac{0}{0}$) está fijado el número 5 como interes, rédito ó ganancia anual del cierto y determinado capital 100, y en ella se nos dice que cada 100 pesos reditúan 5 pesos al cabo de un año. Considerando, pues, á los dos capitales conocidos 100 y 3575 como cantidades de una especie, y á los dos réditos 5 y x como cantidades de otra, tendremos la siguiente proporcion

$$100 : 3575 :: 5 : x;$$

de la cual, tomando la quinta parte de los dos antecedentes, se deduce estotra

$$20 : 3575 :: 5 : x;$$

y tomando la misma parte de los dos términos de la primera razon, quedará reducida la segunda proporcion á esta otra

$$4 : 715 :: 1 : x;$$

de la cual se deduce por último que la x equivale á $\frac{715}{4}$ de peso ó á 178 pesos 11 reales y $8\frac{1}{2}$ maravedis.

Tambien se ha podido resolver la proporcion propuesta observando que 5 es $\frac{1}{20}$ de 100, y que por consiguiente se pueden determinar los réditos de cualquiera cantidad á razon de aquel *tanto por ciento*, con solo tomar del capital la vigésima parte, y teniendo presente para ello que la vigésima ó veintava parte es la mitad de la décima, ó la décima de la mitad, y que para tomar la décima parte de cualquier cantidad basta separar con una coma la cifra de las unidades absolutas para que asi represente *décimas*.

No será fuera del caso advertir que lo mismo que en el lenguage ordinario se quiere decir con las expresiones 5 *ó* 4 *ó* 3 por 100, en las escrituras de imposiciones ó redenciones ó subrogaciones de censos suele expresarse respectivamente con estas otras: *veinte mil al millar*; *veinte y cinco mil al millar*; *treinta y tres mil y un tercio al millar*; de las cuales la primera significa que cada 20 reditúan 1, como se verifica siempre que se presta á razon de 5 por 100; la segunda que cada 25 reditúan 1, como sucede siempre que se presta al 4 por 100; y por último la tercera, que cada $33\frac{1}{3}$ reditúan 1, y de consiguiente cada 100 deben redituar 3. Del mismo modo han de entenderse otras expresiones semejantes.

2º *Un comerciante se ha obligado á pagar á otro 800 pesos al fin de un año; y ocho meses antes de cumplirse el plazo, el tenedor del vale ó pagaré* lo presenta á un banquero para *que le anticipe el pago*: y se nos pregunta *¿cuánto deberá entregarle este banquero?*

No habiendo de volver á la caja del banquero hasta despues de ocho meses la cantidad que entregue, es justo que con los 800 pesos que entonces cobre, no solo se reintegre de lo que efectivamente haya desembolsado, sino que tambien perciba los réditos que correspondan á la cantidad anticipada, por el tiempo que haya estado fuera de la caja.

Supongamos que los réditos por un año ó por doce meses esten arreglados al 6 por 100, y de esto se inferirá que por el espacio de 8 meses se reducirán á $\frac{8}{12}$ ó $\frac{2}{3}$ de 6 por 100; es decir, que una suma prestada por espacio de 8 meses á razon de 6 por 100 al año, debe redituar á razon de 4 por 100. Por manera que el banquero habrá de percibir 104 por cada 100 que haya anticipado; ó lo que viene á ser lo mismo, por cada 104 que al cabo de 8 meses perciba, no deberá entregar de contado mas que 100; y como los 800 pesos son la cantidad total que habrá de percibir al fin de aquel plazo, tendremos esta proporcion

$$104 : 800 :: 100 : x;$$

de donde deduciremos que x es igual á 769 pesos 3 reales $15\frac{9}{13}$ maravedis; y de consiguiente que el banquero no debe anticipar mas cantidad que esta para adquirir el derecho de percibir á su plazo los 800 pesos.

Esta operacion, conocida bajo el nombre del *descuento* ó *del rebatir* suelen algunos practicarla de otro modo; pero el que hemos expuesto es el mas rigoroso, suponiendo que la cantidad se haya anticipado á *interes simple*. Cuando por muchos que sean los años que una cantidad esté prestada, en ninguno reditúa mas intereses que los que corresponden en el primero al capital primitivo, se dice que el empréstito es á *interes simple*; pero si se la ha prestado con la condicion de que los réditos del primer año y siguientes se hayan de agregar á la primitiva cantidad prestada, para calcular desde el segundo año en adelante los réditos no solo del capital primitivo, sino tambien de la suma de los intereses devengados y no satisfechos; entonces se dice que se ha prestado á *interes de interes*, ó á *interes compuesto.*

3º Propongámonos averiguar *¿á cuánto equivale en metálico en 15 de julio un vale Real de 600 pesos de la creacion de 1º de enero, suponiendo que en aquella época pierdan 68 por 100?*

Siendo de 8 reales de plata [1] ó de á 15 reales y 2 maravedis de vellon los pesos de los vales, los 600 pesos del vale vienen á ser 9035 reales y 10 maravedis de vellon; y agregando á estos los 195 reales que en la mencionada época le corresponden por razon de intereses, los cuales en los de á 600 pesos son tantos reales como dias

1 La moneda imaginaria llamada *real de plata de á 16 cuartos* es de un uso muy frecuente en el comercio, especialmente para los cambios con las plazas extrangeras; por cuya razon y para distinguirla del real de plata *efectivo*, se llama *real de plata de cambio.* A este real se le considera dividido en 34 partes iguales, que se llaman *maravedis de plata.* De 8 reales de plata de cambio se compone el que se llama *peso de cambio*; de 11 reales y 1 maravedí de plata, ó de 375 maravedis de plata, el que se la llama *ducado de cambio*; de 32 reales de plata el que se llama *doblon de cambio*, y de 40 reales de plata el que se llama *doblon de oro de cambio.* Equivale, pues, el real de plata de cambio á 64 maravedis de vellon ó á 1 real y 30 maravedis de vellon; el peso de cambio á 15 reales y 2 maravedis de vellon; el ducado de cambio á 20 reales y $25\frac{15}{17}$ maravedis de vellon; el doblon de cambio á 60 reales y 8 maravedis de vellon; y el doblon de oro de cambio á 75 reales y 10 maravedis de vellon. Para todas estas reducciones sirve de dato que 17 reales de plata de cambio equivalen á 32 reales de vellon, á lo cual es consiguiente que 17 maravedis de plata equivalgan á 32 maravedis de vellon.

hayan pasado desde la época de su creacion, tendremos que el valor nominal del vale propuesto es 9230 reales y 10 maravedis de vellon[1]. Ahora bien, cuando la pérdida de los vales es 68 por 100, quiere esto decir que cada 100 reales de un vale no equivale en metálico á mas de 32 reales; tendremos, pues, esta proporcion:

$$100 : 9230 \text{ r.}^{\text{s}}\ 10 \text{ m.}^{\text{s}} :: 32 : x;$$

ó tomando la décima parte de los términos de la primera razon,

$$10 : 923 \text{ r.}^{\text{s}}\ 1 \text{ m.}^{\text{s}} :: 32 : x;$$

de la cual se deduce por la regla prescrita (§. 184) que el valor efectivo del vale está reducido á 2953 reales y 23,6 maravedis de vellon.

4º Las monedas, pesas y medidas de unos paises se reducen á las de otros por medio de la *regla de tres*; pero para ello es necesario saber de antemano la mutua relacion de magnitud que tienen entre sí; ó lo que es lo mismo, qué número de las unas equivale á otro número conocido de las otras[2].

Si tratásemos, por ejemplo, de reducir 2749 reales de plata de á 16 cuartos ó de cambio á reales de vellon; sabiendo, como sabemos, que 17 reales de plata equivalen á 32 reales de vellon[3], formaremos la proporcion siguiente:

1 Hay impresas tablas que nos presentan calculado el valor nominal de cualquier valor en cada uno de los dias.

2 Al fin de este tomo se hallarán muchas noticias relativas á este asunto.

3 Es una verdad que 17 reales de plata equivalen á 32 de vellon; pero no lo es que la razon de un real de plata á otro de vellon sea la de 17 á 32, sino la inversa.

$$17^{rs.\ pta.} : 2749^{rs.\ pta.} :: 32^{rs.\ vn.} : x^{rs.\ vn.}$$

de la cual, multiplicando el númerô 2749 por 32, y dividiendo por 17 al producto, el cuociente $5174\frac{10}{17}$ nos manifestará que los 2749 reales de plâta equivalen á 5174 reales y 20 maravedis de vellon. El mismo resultado habríamos hallado con solo doblar el número propuesto, y restando de este doble un *diezisietavo* del mismo, por la razon de que el quebrado $\frac{32}{17}$ multiplicador del número dado equivale á *dos* enteros menos $\frac{2}{17}$ de otro entero; y ya se sabe que $\frac{2}{17}$ vienen á ser $\frac{1}{17}$ de 2 enteros.

Si por el contrario, quisiésemos reducir 1920 reales de vellon á reales de plata de á 16 cuartos, formaríamos esta proporcion

$$32^{rs.\ vn.} : 1920^{rs.\ vn.} :: 17^{rs.\ pta.} : x^{rs.\ pta.}$$

Multiplicaremos, pues, por 17 al número propuesto 1920, y diviremos por 32 al producto: lo cual se reduce á multiplicar por la fraccion $\frac{17}{32}$ al número dado. Para lo cual podemos considerar al quebrado multiplicador como equivalente que es á la suma de los otros dos $\frac{16}{32}$ y $\frac{11}{32}$; y como $\frac{16}{32}$ sea lo mismo que $\frac{1}{2}$, tomaremos primeramente la mitad del número propuesto, y por este medio lo habremos multiplicado por $\frac{16}{32}$. Para determinar ahora el $\frac{1}{32}$ que falta agregar á los $\frac{16}{32}$ para obtener el verdadero producto, tomaremos como auxiliar la cuarta parte de la mitad que antes hemos tomado; y equivaliendo esta cuarta parte á $\frac{4}{16}$, volveremos á tomar de ella la cuarta parte, que vendrá á ser el $\frac{1}{16}$ que faltaba, y que agregado á la mitad antes tomada, nos dará el número 1020 reales de plata que buscábamos.

Por el mismo método podemos reducir nuestras monedas á las francesas, á las inglesas, á las holandesas &c. suponiendo, por ejemplo, para la primera reduccion, que con arreglo al precio corriente del cambio, 32 de nuestros reales de plata equivalgan á 15 francos; que para la segunda, 8 reales de plata equivalgan á 40 dineros ó peniques esterlines; y que para la tercera, 375 maravedis de plata equivalgan á 94 dineros *grueso-banco* &c[1].

Regla de tres compuesta.

189 A veces para determinar un solo número, que segun la propuesta de la cuestion depende de otros muchos conocidos, tendríamos que formar dos, tres ó mas proporciones si no se hubiese descubierto el medio de reducirlas todas á una sola que nos dé igualmente á conocer el número que buscamos. A la regla que nos prescribe el método de ejecutar esta reduccion, se la conoce bajo el nombre de *regla de tres compuesta.* Algunos ejemplos manifestarán el modo de hacer uso de ella.

Supongamos en primer lugar que sabiéndose que un viagero ha andado 80 leguas en 9 dias caminando 7 horas en cada dia, se nos pregunte *¿cuántas leguas andará el mismo viagero en 17 dias, caminando 10 horas al dia y en igualdad de todas las demas circunstancias?*

Para resolver esta cuestion, es necesario no perder de vista que el número de leguas corridas en cada uno de los

1 La relacion ó correspondencia que en el comercio tienen nuestras monedas con las extrangeras, ó lo que es lo mismo, la estimacion que en los mercados extrangeros se da á nuestras monedas, y en los nuestros á las extrangeras, está sujeta á las mismas variaciones que el precio de cualquiera mercancía. Por eso, siempre que sea necesario hacer alguna de estas reducciones, es indispensable saber el actual precio corriente del cambio de una plaza con otra.

casos depende del número de dias que el viagero haya empleado ó emplee, y del número de horas que haya gastado ó gaste en andar en cada dia; suponiendo iguales en ambos casos todas las demas circunstancias que puedan influir en que se ande mas ó menos camino.

Prescindamos primeramente del número de horas empleadas en cada dia, ó lo que es lo mismo, hagamos la suposicion de que el viagero emplee tantas horas al dia en un caso como en otro; por cuyo medio quedará la cuestion reducida á estotra: *habiendo caminado un viagero 80 leguas en 9 dias, ¿cuántas andará en 17 dias, y en igualdad de todas las demas circunstancias?*

Formando con arreglo á esta propuesta la siguiente proporcion

$$9^d : 17^d :: 80^l : x^l;$$

hallaremos que su cuarto término está representado por la fraccion impropia $\frac{1360}{9}$ de leguas; y este seria el camino corrido en los 17 dias andando 7 horas por dia.

Ahora, para llevar en cuenta la diferencia que en el segundo caso se advierte en el número de horas, diremos, *si empleando 7 horas por dia, ha andado en cierto número de dias*, sea cual fuere, $\frac{1360}{9}$ *de legua*; *caminando 10 horas al dia, ¿cuántas leguas andará en igual número de dias?*

Formaremos, pues esta proporcion

$$7^h : 10^h :: \frac{1360^l}{9} : x^l;$$

cuyo cuarto término $215\frac{55}{63}$ nos determinará el número de leguas que buscábamos.

Por consiguiente hemos resuelto la cuestion, valiénnos para ello de dos proporciones; pero si hubiésemos desde luego advertido que 9 dias de camino á razon de 7 horas por dia componen 63 horas de marcha, y que 17 dias de camino á 10 horas por dia vienen á ser 170 horas, hubiéramos visto que la cuestion estaba reducida á determinar el cuarto término de esta sola proporcion

$$62^h : 170^h :: 80^l : x^l;$$

por medio de la cual se halla inmediatamente el cuarto término $215\frac{55}{63}$ que buscamos de las leguas que el viagero debe haber andado en 170 horas con proporcion á las que habia caminado en 63 horas.

Si cotejamos la última proporcion con las otras dos de que anteriormente hemos hecho uso para resolver la misma cuestion, echaremos fácilmente de ver que de las dos primeras se deduce la tercera con solo multiplicar ordenadamente los términos de la una por los de la otra, y simplificando la segunda razon que resulte. Ahora bien, siempre que de dos ó mas razones ó proporciones se deduce otra nueva, multiplicando ordenadamente unos por otros los términos de las primitivas, la razon ó proporcion que nuevamente resulta, se llama *compuesta* de aquellas otras, y de aqui ha nacido la denominacion que se ha dado al segundo modo que hemos expuesto de resolver la cuestion[1].

190 En segundo lugar: *si 9 jornaleros, trabajando 8 horas al dia, han necesitado 24 dias para abrir un foso de 65 varas de largo, 13 de ancho y 5 de hon-*

1 Siendo cualquiera proporcion una combinacion de dos razones iguales, es muy fácil inferir que si se multiplican ó se dividen ordenadamente los términos de dos ó mas proporciones unos por otros, los cuatro productos, ó los cuatro cuocientes estarán tambien en proporcion; porque en el primer caso se multiplican; y en el segundo se dividen las dos razones iguales de una proporcion por las dos razones iguales de otra, por cuya razon los resultados en ambos casos deberán ser otras dos razones iguales.

do; 71 jornaleros que en igualdad de todas las demas circunstancias trabajan 11 horas al dia, ¿cuántos dias necesitarán para abrir otro foso de 327 varas de largo, 18 de ancho y 7 de hondo?

Esta cuestion, tan complicada en la apariencia, se resuelve como la anterior, por medio de varias proporciones sencillas, ó por medio de una sola compuesta de todas ellas. Con efecto, si en los casos mencionados en la propuesta de la cuestion no se advirtiese otra diferencia sino la de ser distintos los números de trabajadores, y por consiguiente los de los dias, siendo iguales las obras que debian ejecutarse, y todas las demas circunstancias, quedaria reducida la cuestion á esta: *si 9 hombres han empleado 24 dias en hacer una obra, ¿cuántos dias necesitarán 71 hombres para hacer otra obra enteramente igual?* La cual resolveremos formando (§. 187) la siguiente proporcion

$$9^{hom.} : 71^{hom.} :: x^{d} : 24^{d};$$

y en vez de determinar el número de dias desconocido que buscamos, nos contentaremos con representar su valor, indicando la multiplicacion que debe hacerse de los dos extremos 9 y 24; y en seguida la division del producto por el medio 71. Representaremos, pues, al número de dias que en tales circunstancias sea necesario, por esta expresion fraccionaria

$$\frac{24 \text{ por } 9}{71}.$$

Este seria ciertamente el número de dias que los segundos trabajadores deberian emplear si solo trabajasen 8 horas en cada dia como los primeros; pero suponiendo, como se supone, que aquellos han de emplear 11 horas por dia, deberán ser á proporcion menos los dias que necesiten para ejecutar la misma obra. Formaremos, pues, esta segunda proporcion

$$8^h : 11^h :: x^d : \left(\frac{24 \text{ por } 9}{71}\right)^d;$$

de la cual se deduce que por razon de haber variado el número de horas de trabajo diario, el número de dias será el representado por esta nueva expresion fraccionaria

$$\frac{24 \text{ por } 9 \text{ por } 8}{71 \text{ por } 11};$$

que nos dará el número de dias necesarios para que los 71 jornaleros trabajando 11 horas por dia, ejecutasen en igualdad de todas las demas circunstancias una obra enteramente igual á la que habian hecho 9 jornaleros trabajando 8 horas en cada dia.

Pero siendo, como se supone, desiguales las longitudes de los dos fosos, serán necesarios tantos mas dias para abrir el segundo que para el primero, cuanto mayor sea la longitud de aquel que la de este. Formaremos, pues, esta tercera proporcion

$$65^v : 327^v :: \left(\frac{24 \text{ por } 9 \text{ por } 8}{71 \text{ por } 11}\right) : x^d;$$

de la cual se infiere que el número de dias necesarios para la segunda obra por razon de su mayor longitud vendrá á estar representado por esta otra expresion

$$\frac{24 \text{ por } 9 \text{ por } 8 \text{ por } 327}{71 \text{ por } 11 \text{ por } 65}$$

Llevando tambien en cuenta las anchuras, que son desiguales en los dos fosos, y teniendo presente que por ser mayor que la del primero la del segundo, debe aumentar por esta razon el número de dias, formaremos esta cuarta proporcion

$$13 : 18 :: \left(\frac{24 \textit{ por } 9 \textit{ por } 8 \textit{ por } 327}{71 \textit{ por } 11 \textit{ por } 65}\right)^{d} : x^{d}$$

cuyo cuarto término estará representado por la siguiente expresion

$$\frac{24 \textit{ por } 9 \textit{ por } 8 \textit{ por } 327 \textit{ por } 18}{71 \textit{ por } 11 \textit{ por } 65 \textit{ por } 13}$$

que nos debe manifestar el número de dias que serian necesarios para ejecutar la segunda obra con las circunstancias mencionadas en las cuatro proporciones que hasta ahora hemos formado.

Por último, viendo que han de ser desiguales las profundidades de los dos fosos, y no perdiendo de vista que por ser mayor que la del primero la del segundo, se deben necesitar por esta razon mas dias para la segunda obra que para la primera, formaremos esta quinta y última proporcion

$$5^{v} : 7^{v} :: \left(\frac{24 \textit{ por } 9 \textit{ por } 8 \textit{ por } 327 \textit{ por } 18}{71 \textit{ por } 11 \textit{ por } 65 \textit{ por } 13}\right)^{d} : x^{d};$$

y de consiguiente el número de dias necesarios para abrir el segundo foso con todas las circunstancias que abraza la propuesta de la cuestion, estará representado por la expresion siguiente

$$\frac{24 \textit{ por } 9 \textit{ por } 8 \textit{ por } 327 \textit{ por } 18 \textit{ por } 7}{71 \textit{ por } 11 \textit{ por } 65 \textit{ por } 13 \textit{ por } 5}.$$

Efectuando ya las multiplicaciones que estan indicadas en el numerador ó dividendo, y las del denominador ó divisor, el resultado de las primeras será 71197056 y el de las segundas 3299725. Dividiendo, pues, el primero por el segundo como la última expresion nos lo ordena, resultará que el número que buscábamos es el de 21 dias y $\frac{1902831}{3299725}$ de otro dia; en lo que se nos viene á decir que los 71 hombres, despues de haber trabajado por espacio de 21 dias á razon de 11 horas por dia, para abrir el foso de 327 varas de largo y 18 de ancho y 7 de profundo, tendrán todavía que emplear otras 6 horas, y 20,6 minutos de trabajo, por ser la cantidad á que con cortísima diferencia equivale la fraccion $\frac{1902831}{3299721}$ de dia, ó por mejor decir, de 11 horas.

191 El número que acabamos de hallar de los dias que es necesario emplear para abrir el segundo foso, es, segun hemos demostrado, igual á los 24 dias que se gastaron en abrir el primero, multiplicados por la expresion fraccionaria

$$\frac{9 \textit{ por } 8 \textit{ por } 327 \textit{ por } 18 \textit{ por } 7}{71 \textit{ por } 11 \textit{ por } 65 \textit{ por } 13 \textit{ por } 5}.$$

Ahora bien, esta expresion que sirve de multiplicador de los 24 dias para que en el producto nos resulte el número que buscamos, está compuesta ó es el producto de las cinco fracciones $\frac{9}{71}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{327}{65}$, $\frac{18}{13}$ y $\frac{7}{5}$; y si tenemos presentes las denominaciones que en la propuesta de la cuestion se dieron á los términos de cada una de ellas, veremos que la primera $\frac{9}{71}$, inversa de $\frac{71}{9}$, es la razon inversa de la que entre sí tendrian los dos números de trabajadores, si se les comparase en el mismo órden con que se hizo mencion de ellos en la propuesta. La segunda $\frac{8}{11}$ es otra razon inversa de la que entre sí tendrian los dos números de horas de trabajo diario, si en la comparacion siguiésemos el mismo órden con que se nos propusieron estas dos cantidades. Las tres fracciones restantes $\frac{327}{65}$, $\frac{18}{13}$ y $\frac{7}{5}$ son las respectivas razones *directas* de las dos longitudes, de las dos anchuras, y de las dos honduras de los fosos; pues en la formacion de estas tres fracciones, vemos observado en la colocacion de sus términos el mismo órden con que se nos presentaron en la propuesta las cantidades representadas por ellos. Hablo constantemente en la suposicion de que cuando veo representada en una fraccion una razon, miro al denominador como antecedente, y al numerador como consecuente. De lo cual se sigue que la razon del número de dias conocido al desconocido es igual á la que resulta de la multiplicacion de las razones que entre sí tienen los varios términos relativos á cada una de las demas circunstancias de la cuestion; bien que estas razones que podrian llamarse *factores*, y que se llaman *componentes* de aquella otra, serán *directas* ó *inversas*, segun que deberia cada una serlo si con ella y con la razon de los números de dias se hubiese de formar una proporcion sencilla. Cuando decimos que estas razones han de ser *directas* ó *inversas*, no queremos decir otra cosa sino que sus términos se han de colocar en el mismo órden ó en el contrario del que tienen en la propuesta.

Si, pues, con los dos términos de cada una de las razones que entran en la cuestion, hubiéramos formado una fraccion, cuyo numerador fuese el consecuente, y cuyo denominador fuese el antecedente; multiplicando unas por otras todas las fracciones que resultasen, el producto de todas ellas representaria el valor ó exponente de la razon del número conocido al desconocido; y de consiguiente esta última razon seria *compuesta* de todas las otras.

De paso advertiremos que una razon compuesta de otras dos, que sean entre sí iguales, toma el nombre de *duplicada* de cualquiera de ellas; asi como la compuesta de tres razones iguales se llama *triplicada* de cualquiera de las componentes; la compuesta de cuatro razones entre sí iguales, *cuadriplicada* de cada una de estas; y asi de las demas.

Por conclusion añadiremos que si hubiéramos puesto en forma de razon la expresion fraccionaria

$$\frac{9 \text{ por } 8 \text{ por } 327 \text{ por } 18 \text{ por } 7}{71 \text{ por } 11 \text{ por } 65 \text{ por } 13 \text{ por } 5},$$

con los dos términos de ella, con el número de dias conocido 24, y con el que tratamos de conocer, podríamos haber formado desde luego esta sola proporcion compuesta de las cinco de que antes hemos hecho uso con el mismo objeto.

$$71 \text{ por } 11 \text{ por } 65 \text{ por } 13 \text{ por } 5 : \ldots\ldots\ldots$$
$$9 \text{ por } 8 \text{ por } 327 \text{ por } 18 \text{ por } 7 :: 24^d : x^d;$$

la cual, efectuando las cinco multiplicaciones que estan indicadas en cada uno de los términos de la primera razon, se transformará en estotra mucho mas sencilla:

$$3299725 : 2966544 :: 24^d : x^d;$$

y de esta obtendremos facilísimamente el mismo resultado final 21 dia 6 horas y 20,6 minutos que ya sabíamos.

192 Lo mismo podrá ejecutarse en todos los demas ca-

sos semejantes; y si en vista de lo que hemos practicado, para resolver las cuestiones que nos hemos propuesto, hubiésemos de establecer una regla general para el efecto, deberia en nuestro concepto estar concebida en estos términos:

Regla general: *siempre que del exámen de la propuesta de una cuestion resulte que para hallar el número desconocido, tenemos que formar dos ó mas proporciones, y queramos reducirlas á una sola que produzca el mismo efecto final, habrá de ser el tercer término de esta última el número conocido que sea de la misma especie que el desconocido: y debiendo ser este el cuarto, tendremos de este modo la segunda razon de la proporcion que intentamos formar. Para componer de todos los restantes números dados la razon primera que nos falta, con cada dos de ellos, que sean de una misma especie, formaremos una razon sencilla, considerando para esto á cada una de las varias razones que deben asi resultar, como si sola ella hubiese de ser la primera de la proporcion, y colocando sus dos términos con el mismo órden de magnitud que en tal caso deberian guardar el número desconocido y el conocido de la misma especie. Formadas que sean todas las razones sencillas que con los números dados no esten indicadas, multiplicaremos unos por otros todos los antecedentes y miraremos al producto como al verdadero antecedente: multiplicaremos en seguida todos los consecuentes de ellas, para contar que su producto como con el consecuente de la primera razon que se echaba de menos. Y estando ya entonces conocidos los tres primeros términos de la proporcion cuyo cuarto término buscamos, lo podremos fácilmente determinar por el método prescrito* (§. 184).

193 Para dar alguna idea de los medios de que nos podemos valer para determinar con la mayor exactitud y

brevedad que sean posibles, el resultado de la reduccion de nuestras pesas y medidas; y sobre todo de nuestras monedas á las extrangeras, asi como el de la conversion de las extrangeras mismas unas en otras, propongámonos, por ejemplo, esta cuestion:

A un comerciante de Madrid le está debiendo otro de París 18000 francos; y teniendo el primero sus corresponsales en Amsterdam y en Lóndres, da órden á su deudor para que libre la cantidad equivalente á la expresada suma á favor del de Amsterdam; á este le da órden para que libre la equivalente á la que perciba á favor del de Lóndres; y por último da á este órden de que le libre sobre Madrid el equivalente de lo que llegue á percibir.

A la sazon 3 francos franceses equivalian á 57 dineros holandeses; 35 sueldos holandeses, ó lo que es lo mismo, 420 dineros holandeses equivalian á una libra esterlina, ó á 240 peniques ó dineros ingleses; y 36 de estos peniques equivalian á 8 de nuestros reales de plata de cambio. En tales circunstancias se pregunta *¿cuántos reales de vellon percibirá el comerciante de Madrid por equivalente á los 18000 francos que le debia el de París?*

Examinando atentamente la propuesta de la cuestion, se ve fácilmente que se la puede resolver por medio de las cuatro proporciones sencillas que siguen. La primera, en la cual dándose por supuesto que 3 francos franceses equivalen á 57 dineros *grueso-banco* holandeses, se aspira á determinar á cuántos de estos últimos equivaldrán los 18000 francos.

$$3^{f} : 57^{d} :: 18000^{f} : x^{d};$$

de la cual se deduce que el comerciante de París habrá de librar á favor del de Amsterdam 342000 dineros *grueso-banco*, ó lo que es lo mismo, 8550 florines holandeses[1].

La segunda, en la que suponiéndose que $10\frac{1}{2}$ florines holandeses ó 240 dineros *grueso-banco*[2] equivalen á una libra esterlina ó á 240 peniques ó dineros ingleses[3], se trata de averiguar á cuántos de estos equivalen los 342000 dineros *grueso-banco* que hemos hallado en el cuarto término de la primera.

$$420^{d} : 240^{p} :: 342000^{d} : x^{p};$$

de la cual se infiere que el corresponsal de Amsterdam ha de librar á favor del de Lóndres $195428\frac{4}{7}$ peniques ó dineros esterlines, equivalentes á 814 libras esterlinas 5 chelines y $8\frac{4}{7}$ peniques.

Despues de esto y en la suposicion de que 36 peniques ingleses equivalgan á 8 de nuestros reales de plata de cambio; para determinar á cuántos de estos equivalen los $195428\frac{4}{7}$ peniques que nos han resultado en el cuarto término de la proporcion segunda, formaremos esta tercera.

$$36^{p} : 8^{rs.\ pta.} :: 195428\tfrac{4}{7}^{p} : x^{rs.\ pta.}$$

y en ella veremos que el corresponsal de Lóndres tendrá que librar á favor del acreedor en Madrid 43428 reales y $19\frac{3}{7}$ maravedís de plata de cambio.

Ultimamente, con el objeto de poner en claro á cuán-

1 A consecuencia de lo que hemos expuesto (§. 181) no debe causarnos extrañeza que los términos primeros de una proporcion no sean de una misma especie.

2 Cada florin holandés equivale á 40 dineros *grueso-banco*.

3 Cada libra esterlina equivale á 20 chelines ó sueldos, y cada chelin á 12 peniques ó dineros. De consiguiente la libra esterlina equivale á 240 peniques.

tos reales de vellon corresponden los 43428 reales y $19\frac{5}{7}$ maravedís de plata; sabiendo como sabemos que 17 reales de plata equivalen á 32 reales de vellon, formaremos esta cuarta proporcion

$$17^{rs.\ pta.} : 32^{rs.\ vn.} :: 43428^{rs.}\ 19\tfrac{5}{7}{}^{mrs.\ pta.} : x^{rs.\ vn.}$$

cuyo cuarto término nos da á conocer que el comerciante de Madrid deberá percibir 81747 reales y 30,5 maravedís de vellon por valor de los 18000 francos que le debia el de París.

194 Si en las cuatro proporciones de que acabamos de hacer uso para resolver la cuestion, observásemos que el cuarto término de la primera viene á ser tercero de la segunda; que el cuarto de la segunda viene á ser tercero de la tercera; y que por último, el cuarto de esta viene á ser tercero de la cuarta, echaremos fácilmente de ver que si las multiplicamos ordenadamente todas cuatro, y suprimimos los factores comunes de los dos terminos de la segunda razon compuesta, nos resultará la siguiente proporcion, por cuyo medio podemos determinar mas prontamente el resultado final.

$$\begin{array}{l} 3 \text{ por } 420 \text{ por } 36 \text{ por } 17 : \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 57 \text{ por } 240 \text{ por } 8 \text{ por } 32 :: 18000 : x^{rs.\ vn.} \end{array}$$

Ahora bien, las cuatro razones sencillas de que en este caso se compone la primera de esta última proporcion, suelen escribirse con el mismo órden con que se las ha propuesto en la cuestion y segun aqui se ve:

1.ª $3^{fr.} : 57^{d}$
2.ª $420^{d} : 240^{p}$
3.ª $36^{p} : 8^{rs.\ pta.}$
4.ª $17^{rs.\ pta.} : 32^{rs.\ vn.} :: 1800^{fr.} : x^{rs.\ vn.}$

Dividiendo por 3 los dos términos de la primera razon componente; por 60 los de la segunda, y por 4 los de la tercera, la proporcion compuesta quedará transformada en esta otra:

1.ª 1 : 19
2.ª 7 : 4
3.ª 9 : 2
4.ª 17 : 32 :: 18000 : $x^{rs.\,vn.}$

Dividiendo por 9 el antecedente de la tercera razon componente y al término tercero de la proporcion, resultará reducida esta á la siguiente:

1.ª 1 : 19
2.ª 7 : 4
3.ª 1 : 2
4.ª 17: 32 :: 2000 : $x^{rs.\,vn.}$

Multiplicando unos por otros todos los antecedentes y en seguida todos los consecuentes reducidos de las cuatro razones componentes, se convertirá la proporcion en esta que ya está expresada en los términos mas sencillos que son posibles:

$$119 : 4864 :: 2000 : x^{rs.\,vn.}$$

y de ella se deduce con la mayor prontitud y facilidad el mismo resultado final que antes.

A este último método de resolver las cuestiones de esta clase, que podria fácilmente aplicarse á la solucion de todas las que se resuelven por medio de la regla de tres compuesta, se le ha dado el nombre de *regla conjunta*. Lo que con arreglo á ella se practica despues de colocados en la disposicion que en el ejemplo anterior los números dados, está fundado en que dividiendo ó multiplicando por una misma cantidad los dos términos de cualquiera razon, no padece la razon alteracion alguna; en que tampoco la padece el cuarto término de una proporcion multiplicando ó dividiendo por una misma cantidad los dos antecedentes de ella; y por último, en que lo mismo es dividir ó multiplicar un número por otro que dividir ó multiplicar por este cualquiera de los factores de aquel.

195 Si al tiempo que el comerciante de Madrid comunicó sus órdenes á su deudor y á sus corresponsales, hubieran equivalido 15 francos á 32 reales de plata, y hubiese querido saber cuántos reales de vellon corresponden á los 18000 francos, habria ordenado del siguiente modo los términos:

$$\begin{array}{l} 15^{fr.} : 32^{rs.\ pta.} \\ 17^{rs.\ pta.} : 32^{rs.\ vn.} :: 18000^{fr.} : x^{rs.\ vn.}; \end{array}$$

y dividiendo por 15 al antecedente de la primera razon componente, y al tercer término de la proporcion, quedará esta reducida á la que sigue:

$$\begin{array}{l} 1 : 32 \\ 17 : 32 :: 2000 : x^{rs.\ vn.}; \end{array}$$

y no siendo esta susceptible de otra alguna reduccion, habria multiplicado unos por otros los antecedentes y los consecuentes de las dos razones componentes, y de esto habria resultado estotra proporcion:

$$17 : 1024 :: 2000 : x^{rs.\ vn.};$$

de la cual se deduciria que los 18000 francos, reducidos á reales de vellon con arreglo al precio supuesto del cambio, equivalian á 72282 reales y 12 maravedís de vellon; siendo asi que conducidos por Amsterdam y Lóndres, han equivalido á 81747 reales y 30,5 maravedis, resultando de este modo 9465 reales y 18,5 maravedis de beneficio, que vienen á ser mas de 13 por 100.

Sin embargo de que con dificultad llegarán á reunirse todas las circunstancias que hemos supuesto en este ejemplo, no por eso deja de ser á propósito para hacer conocer las ventajas que los comerciantes pueden sacar y efectivamente sacan de este género de negociaciones, conocidas bajo el nombre de *arbitrage*.

Regla de compañía.

196 El objeto de esta regla es darnos á conocer el modo de distribuir una cantidad en partes que tengan entre sí las mismas razones que ciertos números conocidos; y si se la ha dado el nombre de *regla de compañía*, es porque de ordinario se la aplica á la solucion de cuestiones semejantes á esta:

Tres comerciantes se han asociado para cierta negociacion, y para ella ha contribuido el primero con 25000 pesos, el segundo con 18000, y el tercero con 42000. Concluida que fue la negociacion, y habiendo esta producido de utilidad ó beneficio comun 12725 pesos, tratan de repartirse esta ganancia á proporcion de lo que cada uno aprontó para la negociacion; y se pregunta: *¿cuánto corresponde á cada uno de los tres?*

Para resolver esta cuestion basta considerar que segun la naturaleza del contrato la porcion que de la ganancia pertenece á cada uno de los socios, debe estar contenida en la ganancia total tantas veces como la cantidad con que contribuyó para la negociacion esté contenida en el fondo total con que se haya negociado, ó lo que es lo mismo, en la suma de las cantidades ó capitales con que contribuyeron todos. Por manera, que si uno de los socios hubiese aprontado la mitad, la tercera ó cuarta parte del fondo total, tendria respectivamente derecho á percibir la mitad, la tercera ó la cuarta parte de la ganancia total. Es, pues, claro que en primer lugar habremos de sumar todas las cantidades con que los socios hayan contribuido para la negociacion, á fin de saber á cuánto asciende el fondo total que se ha empleado en ella; y á consecuencia, para determinar la parte de ganancia que corresponde á cada socio, haremos una proporcion que en términos generales puede expresarse de esta manera:

El fondo total es á la porcion que en él tenga cualquiera de los socios, como la ganancia total es á la porcion que de ella le corresponde.

En la cuestion propuesta el fondo total asciende á 85000 pesos; y de consiguiente, para distribuir entre los socios la ganancia total con proporcion al capital particular de cada uno, diremos:

85000 : 25000 : : 12725 : *ganancia corresp. al* 1.º
85000 : 18000 : : 12725 : *ganancia corresp. al* 2.º
85000 : 42000 : : 12725 : *ganancia corresp. al* 3.º

Dividiendo por 1000 los dos términos de cada primera razon de las tres proporciones, quedarán reducidas á estotras:

85 : 25 : : 12725 : *ganancia corresp. al* 1.º
85 : 18 : : 12725 : *ganancia corresp. al* 2.º
85 : 42 : : 12725 : *ganancia corresp. al* 3.º

Y tomando la quinta parte de los dos antecedentes de ambas razones, las tendremos por último transformadas en las siguientes:

$17 : 25 :: 2545$: *gan. del* 1º *que es*	3742^p	$9^r\ 24^m$
$17 : 18 :: 2545$: *gan. del* 2º..........	2694	10 20
$17 : 42 :: 2545$: *gan. del* 3º..........	6287	9 24
Suma de las gan. parc..........................	12725^p	$0^r\ 0^m$

197 Tambien pudimos haber mirado la cuestion bajo este otro aspecto. Siendo la cantidad con que el primer socio contribuyó para la negociacion $\frac{25}{85}$ ó $\frac{5}{17}$ del fondo total, la porcion de ganancia que con arreglo al contrato le corresponde, deberá igualmente ser $\frac{5}{17}$ de la total. Por la misma razon el segundo socio que anticipó $\frac{18}{85}$ del fondo total, tendrá derecho á percibir $\frac{18}{85}$ de toda la ganancia; y por último al tercer socio que ha aprestado $\frac{42}{85}$ del fondo total, le habrán de corresponder $\frac{42}{85}$ de la ganancia total.

Ultimamente, podríamos haber considerado el fondo total 85000 pesos compuesto de 85 partes iguales, á las cuales se diese el nombre de *acciones*, de á 1000 pesos cada una; y despues de haber determinado la porcion de ganancia que corresponde á cada *accion*, habríamos multiplicado aquella misma porcion por el número de acciones que cada socio tuviese en la compañía. Como en el ejemplo propuesto cada accion sea $\frac{1}{85}$ del fondo total, la ganancia que le pertenece se hallará dividiendo por 85 la total, cuya division dará por cuociente 149 pesos 10 reales y 20 maravedis. Siendo, pues, 25 acciones de á 1000 pesos las que el primer socio puso en la compañía, habrán de corresponderle las ganancias de ellas ó el producto de 25 veces 149 pesos 10 reales y 20 maravedis, que asciende á 3742 pesos 9 reales y 24 maravedis. Al segundo socio por haber puesto 18 acciones, le deberán corresponder 18 veces 149 pesos 10 reales y 20 maravedis, que suman 2694 pesos 10 reales y 20 maravedis. Al tercero, que puso 42 acciones, le pertenece el importe de 42 veces la ganancia correspondiente á cada accion, que vienen á ser 6287 pesos 9 reales y 24 maravedis.

A todas las cuestiones semejantes á la que acabamos de resolver, y en la que para el repartimiento de la ganancia se prescinde absolutamente del tiempo en que estuvieron empleados en la compañía los capitales, se las llama comunmente de *compañía simple* ó *sin tiempo*; á distincion de aquellas en las cuales, por haber estado unos capitales en la compañía mas tiempo que otros, es necesario, cuando se trata de distribuir entre los socios la ganancia, multiplicar el capital de cada uno por el tiempo en que haya estado en la compañía, á fin de que los productos hagan en las proporciones las veces de los capitales. Las cuestiones de esta segunda clase se llaman de *compañía con tiempo* ó *compuesta*; porque efectivamente cada una de las primeras razones de las proporciones que para resolverlas deben formarse, han de tener por antecedente á la suma de los productos de los capitales multiplicados cada uno por su respectivo tiempo, y por consiguiente al producto de cada capital multiplicado por el tiempo en que haya permanecido en la compañía.

No será fuera del caso advertir que en el lenguage de comercio se llama generalmente *capital* á todo el conjunto de fondos de la compañía; y *dividendo* á toda la ganancia que debe distribuirse entre todos los socios.

198 Con la última cuestion tiene mucha analogía la siguiente. *Se trata de repartir un cierto caudal valuado*

en 67250 pesos entre tres herederos, de manera que la porcion del segundo sea $\frac{2}{5}$ de la del primero, y la del tercero sea $\frac{7}{8}$ de la del segundo.

Considerando á la porcion del primer heredero como término de comparacion de las otras dos, ó como la *unidad* á que las de los otros dos se refieren, podremos representarlas todas tres por estos tres símbolos 1, $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{8}$ de $\frac{2}{5}$. Y puesto que $\frac{7}{8}$ de $\frac{2}{5}$ equivalen á $\frac{14}{40}$ ó $\frac{7}{20}$ de la unidad, las porciones de los tres herederos tendrán entre sí las mismas razones que los tres números 1, $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{20}$, ó reduciéndolos á fracciones equivalentes con un denominador comun, las mismas que las tres fracciones $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{20}$ y $\frac{7}{20}$. Y como por tener estos quebrados un mismo denominador, tienen entre sí las mismas razones que sus numeradores, es consiguiente que las porciones de los tres herederos tengan entre sí las mismas razones que los números 20, 8 y 7.

Si, pues, miramos á estos tres números como á otras tantas partes del *capital* de una compañía, podremos igualmente mirar como una ganancia ó *dividendo* á la herencia que se ha de distribuir con proporcion á aquellos tres números. De consiguiente imitando cuanto hemos practicado en la solucion anterior, sumaremos los números 20, 8 y 7, y consideraremos la suma 35 como si fuese el capital de una compañía; y con ella y con el número 20, que pertenece al primer heredero, formaremos esta proporcion:

$$35 : 20 :: 67250 : x^{p};$$

de la cual, teniendo presente que 20 equivale á $\frac{4}{7}$ de 35, podremos deducir fácilmente el resultado que apetecemos, con solo tomar $\frac{4}{7}$ de la herencia 67250 pesos, por cuyo medio ponemos en claro que al primer heredero le pertenecen 38428 pesos 8 reales y 19 $\frac{3}{7}$ maravedis.

Asimismo, para determinar la porcion del segundo, á quien del número supuesto 35 le corresponden 8, formaremos la siguiente proporcion:

$$35 : 8 :: 67250 : x^p ;$$

la cual nos hace ver sin dificultad que la porcion correspondiente al segundo es 15371 pesos 6 reales y 14 $\frac{4}{7}$ maravedis.

Por último, siendo 7 el número correspondiente al tercer heredero; despues de haber formado la proporcion

$$35 : 7 :: 76250 : x^p ;$$

se deja ver prontamente que siendo 7 quinta parte de 35, la porcion perteneciente al tercero deberá ser la quinta parte de toda la herencia 67250 pesos, y de consiguiente 13450 pesos.

De este modo resultará ejecutada la distribucion de los 67250 pesos entre los tres herederos, en términos que al primero toquen 38427 pesos 8 reales y 19$\frac{3}{7}$ maravedis; al segundo 15371 pesos 6 reales y 14$\frac{4}{7}$ maravedis; y al tercero 13450 pesos: en las cuales porciones se observan exactamente las condiciones prescritas en la propuesta, como es fácil cerciorarse de ello comparando las unas con las otras.

199 Por conclusion, supongamos dos fuentes, una de las cuales corriendo sola, llena de agua en el espacio de dos horas y media un cierto estanque; siendo asi que la otra necesita, para llenarlo por sí sola, todo el tiempo de tres horas y tres cuartos, y se nos pregunta *¿ cuánto tiempo bastará para que corriendo las dos juntas lo llenen?*

En contestacion buscaremos en primer lugar qué parte del estanque se llena por la primera fuente en un tiempo dado, como el de una hora; y veremos que si consideramos como *unidad* á la capacidad del estanque, con solo dividir la misma *unidad* por $2\frac{1}{2}$ ó por la fraccion equivalente $\frac{5}{2}$ horas, nos resultará por cociente $\frac{2}{5}$ del estanque, que es la parte que deseábamos conocer. Para saber asimismo qué porcion del mismo estanque se llena por la segunda fuente en el discurso de una hora, dividiremos la capacidad del estanque representada en la *unidad* por el número mixto $3\frac{3}{4}$ ó por el equivalente $\frac{15}{4}$ de hora, para obtener por cuociente á $\frac{4}{15}$ que es la parte del estanque que debe llenarse por sola la segunda fuente en el tiempo de una hora.

Sabiendo ya, pues, que corriendo las dos fuentes juntas, han de ocupar en el agua que en el estanque viertan en el espacio de una hora, la suma de las dos porciones designadas por las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{15}$ equivalentes á $\frac{10}{15}$ de la capacidad del estanque, se ve con suficiente claridad que dividiendo la *unidad*, con que hemos representado toda la capacidad por la fraccion $\frac{10}{15}$, resulta por cuociente la fraccion impropia $\frac{15}{10}$ equivalente á hora y media que necesitarán las dos fuentes para llenar el estanque corriendo ambas á un mismo tiempo.

Los escritores de aritmética han multiplicado y variado de innumerables modos otras cuestiones semejantes á las propuestas, y han asentado como reglas los medios particulares de que se han valido para resolverlas; pero bien examinada la cosa, no pueden menos de parecernos enteramente inútiles todos estos preceptos; porque á quien sepa analizar la propuesta de una cuestion, y deducir las consecuencias que resultan de ella, con dificultad se le ofrecerá alguna de este género que no pueda resolverla por medio de las reglas y principios que hasta aqui hemos establecido, y mayormente cuando sepa hacer uso de los ventajosos auxilios que para todo ello suministra el Algebra.

Regla de aligacion.

200 No omitiremos, sin embargo, la regla llamada de *aligacion*, cuyo objeto es hallar el precio medio de muchas cosas de una misma especie compradas ó vendidas á diferentes precios. El ejemplo que sigue la dará suficientemente á conocer.

Un mercader ha comprado varias especies de vino á distintos precios; á saber:

130 *botellas á* 10 *reales cada una;*
75............ *á* 15;
231............ *á* 12;
27............ *á* 20;

ha mezclado todo el vino, y se propone averiguar cuál debe ser el precio medio de cada una de las botellas, para que resulte el mismo total coste de ellas.

Para esto es fácil ver que basta determinar cúantos reales le ha costado toda la cantidad que ha comprado de vino de las cuatro distintas especies, y dividir en seguida por el número total de botellas la suma de reales á que ascienda el coste de todas; en la segura inteligencia de que el cuociente habrá de ser el precio medio que se busca.

Con arreglo, pues, á esto, dirá:

130	*botellas*	*á*	10 *rs. importan*	1300 *rs.*
75	....	*á*	15	1125
231	....	*á*	12	2772
27	....	*á*	20	540
Las 463	*botellas*	*han costado*	....	5737 *rs.*

Dividiendo ahora la suma 5737 reales por las 463 botellas, el cuociente 12 reales y 13,3 maravedis será el precio medio de cada una.

201 De esta misma regla se hace uso para elegir un medio entre diferentes resultados que nos haya dado á nuestro parecer la experiencia ó la observacion del valor de alguna cantidad. Si tratamos, por ejemplo, de determinar la distancia que hay de un punto á otro, y nos proponemos medirla; como sea algo considerable, veremos que por mas cuidado y esmero que pongamos en la medicion, habrá siempre alguna incertidumbre en el resultado final de ella, á causa de las inexactitudes y errores que inevitablemente se cometen, aunque no sea mas que en el modo de colocar á continuacion unas de otras las medidas que se empleen.

Supongamos que á fin de comprobar la operacion se la haya repetido varias veces, y que el resultado de cada una de dos mediciones haya sido 3794,48 varas; que el de cada una de otras tres haya sido 3795,27 varas; y por último, que otra medicion haya dado 3793,115 varas.

Por de contado, no siendo iguales como deberian serlo todos estos números, es evidente que hay error en algunos, y quizá en todos ellos; pero como se ignore en cuál ó en cuáles se halle el error, no nos queda otro recurso que procurar disminuirlo, repartiéndolo entre todos los resultados particulares; á cuyo efecto los sumaremos á todos, y por el número de ellos dividiremos inmediatamente la suma.

Con efecto, si en todas las seis mediciones hubiésemos acertado á encontrar el verdadero valor de la distancia que nos proponíamos determinar, la suma de los seis resultados seria evidentemente séxtupla de ella: y lo mismo se verificaria, si pecando unos resultados por defecto, y otros por exceso, diese una feliz casualidad que la suma de todos los defectos fuese enteramente igual á la de todos los excesos, y exactamente se compensasen los unos con los otros.

Son en verdad demasiado singulares tales casos para prometernos que ocurran con alguna frecuencia; pero tambien es innegable que las mas de las veces la suma de los errores cometidos en un sentido, destruirá, cuando menos, una parte de los cometidos en sentido contrario; y como la parte restante se distribuya igualmente por medio de la division entre todos los resultados, cuanto mayor sea el número de estos, tanto mas se disminuirá el error del cuociente.

Diremos pues:

2 *veces* 3794,48 *varas producen.*	7588,96
3 *veces* 3795,27	11385,81
1 *vez* 3793,115..........................	3793,115
Luego los seis resultados componen..	11767,885 *varas.*

Dividiendo ahora por 6 las 22767,885 varas, el cuociente nos indicará que el valor medio de la distancia que nos proponíamos determinar, es 3794,6475 varas.

Aunque no podemos tener certeza alguna de que el último resultado es el verdadero, ni aun siquiera si es mas aproximado á la verdad que alguno ó algunos de los que nos haya inmediatamente dado la medicion; hay sin embargo mayor probabilidad de que lo sea, y esto nos lo hace justamente preferible. La demostracion de ello pertenece á la teoría de las probabilidades, de que han tratado los mas célebres geómetras de nuestro siglo [1].

De los números equidiferentes, ó sea de la llamada proporcion aritmética.

202 A semejanza de las proporciones, en las cuales segun hemos ya visto, el primer término contiene ó está contenido en el segundo tantas veces como el tercero contiene ó está contenido en el cuarto, pueden formarse y se forman otras combinaciones de á cuatro números, en los cuales el primero lleva al segundo el mismo exceso que el tercero al cuarto, ó en que el segundo lleve al primero el mismo exceso que el cuarto al tercero. Tales son los siguientes: 9,5,11,7; y 3,8,10,15. Para indicar que los cuatro números que entran en cada una de estas combinaciones tienen la particularidad de que acabamos de hacer mencion, se les escribe de este modo:

1 Con el auxilio del Algebra se resuelven fácilmente las cuestiones llamadas de *aligacion simple* y de *aligacion compuesta*, teniendo para ello presentes estos dos principios que en ellas se dan comunmente por supuestos: 1.° *La suma de todas las medidas de los ingredientes es igual al número de medidas de la mezcla.* 2.° *El total coste de este último número de medidas, valuadas al precio medio, es igual á la suma de los valores de las que se hayan tomado de los ingredientes.*

9 : 5 : 11.7;
3. 8 : 10.15.

En estas combinaciones de números que pueden propiamente llamarse *equidiferentes*, se observa constantemente una propiedad notable, análoga á la de la proporcion, á saber: que en todas ellas *la suma de los dos términos extremos es igual á la de los dos medios*. Con efecto, en la primera combinacion que hemos propuesto, los dos términos extremos 9 y 7 suman 16, lo mismo que los dos medios 5 y 11; y en la segunda los dos términos extremos 3 y 15 suman 18, lo mismo que los dos medios 8 y 10.

Para demostrar generalmente que debe siempre verificarse esta propiedad en cuantas combinaciones de á cuatro números *equidiferentes* puedan ocurrirnos, bastará tener presente que en todas aquellas en que como en la primera de las dos propuestas, los términos primero y tercero sean respectivamente mayores que el segundo y el cuarto, el primero ha de ser forzosamente igual al conjunto del segundo y del exceso ó diferencia; y el tercero debe por la misma razon ser igual al conjunto del cuarto y del mismo exceso ó diferencia; y de consiguiente la suma de los dos términos primero y cuarto ó de los dos extremos es igualmente á la del cuarto, del segundo y del exceso ó diferencia; y la suma de los términos segundo y tercero ó de los medios equivale á la del segundo, del cuarto y del mismo exceso ó diferencia. Si, pues, las dos sumas se componen, como se ve, de las mismas partes, habrán de ser necesariamente iguales entre sí.

Por lo que respecta á las otras combinaciones de números *equidiferentes*, en las cuales, como en la segunda que hemos propuesto, los términos segundo y cuarto sean respectivamente mayores que el primero y el tercero, el segundo viene á ser el conjunto del primero y de la diferencia; asi como el cuarto lo es del tercero y de la misma diferencia. De consiguiente la suma de los términos extremos equivale á la del primero, del tercero y de la diferencia; mientras la suma de los términos medios equivale á la del tercero, del primero y de la misma diferencia. Componiéndose, pues, de unas mismas partes las dos sumas, deberán forzosamente ser iguales entre sí. No nos detendremos mas en la exposicion de esta teoría de los números *equidiferentes*, porque á nuestro parecer no puede por ahora sernos de utilidad alguna [1].

Sobre la aplicacion de la Aritmética á las operaciones del banco y del comercio.

Si hubiésemos de juzgar por el considerable número de reglas ó fórmulas que se encuentran en los tratados de Aritmética destinados á los banqueros y comerciantes, po-

1 Es necesario confesar que tuvieron mucha razon los antiguos para haber separado de las operaciones de la aritmética la teoría de las proporciones. Euclides la expone, como es bien sabido, en sus *elementos de geometría*; y sin duda porque hizo aplicacion de las proporciones á las líneas, se las dió generalmente el nombre de *proporciones geométricas*; distinguiendo de ellas bajo el nombre de *proporciones aritméticas* á las combinaciones de números equidiferentes, de las cuales no se trató hasta mucho despues. Estas denominaciones son ciertamente viciosas; porque la palabra *proporcion* tiene ya en nuestra lengua una significacion bien determinada que de ningun modo conviene á las combinaciones de números equidiferentes; y por otra parte, la proporcion que comunmente se llama *geométrica*, es tan aritmética como la que exclusivamente goza de esta denominacion.

Lagrange en las lecciones que ha dado en la escuela normal, ha rectificado en esta parte el lenguage, y yo he creido deber seguir su ejemplo.

dríamos acaso pensar que para estos destinos habia una aritmética particular; mientras toda la dificultad que puede experimentarse en la aplicacion de las reglas ordinarias consiste solo en la poca inteligencia que se tiene de los términos técnicos introducidos por el uso, no pocas veces sin necesidad. Mas siempre que esten bien explicados todos esos términos, cualquier calculador instruido podrá sin dificultad resolver las varias cuestiones aritméticas que se le quieran proponer.

Las operaciones mas usuales del banco son el *descuento* y el *cambio*. Ya con respecto al primero hemos explicado en el ejemplo 2º del §. 182 el legítimo modo de ejecutarlo, sin embargo de que los primeros que lo han practicado han tenido por mas sencillo rebajar todo el importe del *descuento* de toda la suma del vale cuya cantidad se anticipase. Calculado con arreglo á este principio el interes de la anticipacion de los 800 pesos del ejemplo citado, á razon de 4 por 100, ascendia á 32 pesos; y de consiguiente el tenedor del vale no habria recibido con la estipulada anticipacion mas de 768 pesos, en vez de los 769 pesos 3 reales y $15\frac{9}{13}$ maravedis que por nuestro método le pertenecen.

En general, toda suma, de la cual no se pueda disponer hasta despues de pasado un cierto y determinado tiempo, tiene antes de cumplirse este, un valor real menor que el nominal, á causa del interes que debe producir desde el actual momento hasta el del cumplimiento del plazo del efectivo pago. De esto nace que para hacer comparacion de sumas pagaderas á diferentes épocas, es indispensable llevar en cuenta el interes que, como comunmente se cree, producen á quien los maneja. Lo que hemos expuesto en la solucion del segundo ejemplo del

§. 182 es á nuestro parecer suficiente para el objeto, con tal que no pase de un año el intervalo de tiempo y que no se acumule con el capital el interes: de lo contrario será forzoso acudir á las fórmulas relativas al *interes compuesto*, dadas al fin de mis *elementos de Algebra*.

El cambio sirve para evitar la necesidad de haber de transportar de una parte á otra el numerario, compensando unas con otras las deudas recíprocamente contraidas por comerciantes de distintas plazas, y conduce á un cálculo cuyo objeto es constantemente determinar cuánto vale en una de ellas una suma pagadera en otra, ya sirviéndonos de la comparacion inmediata de esta suma valuada en monedas de la plaza del deudor con la suma equivalente valuada en monedas de la del acreedor, ó haciendo uso de distintas comparaciones de varias sumas equivalentes valuadas en diferentes plazas que se comunican entre sí. Los §§. 187, 188 y 189 nos presentan ejemplos generales, cuyas fórmulas particulares no se diferencian entre sí sino en supresion de diversos factores comunes á los dos términos de las razones que comparamos. Las sumas equivalentes de que se componen estas razones, se asientan por lo comun en los *diarios públicos*, porque varían con arreglo á las circunstancias; bien que estas alteraciones no hacen mudar en nada el espíritu del método llamado *regla conjunta*.

Por lo que respecta á las operaciones de comercio, el §. 190 nos pone á la vista cuanto puede sernos necesario para distribuir las utilidades ó pérdidas que resulten de una asociacion cualquiera. Y como los *derechos de comision*; las *extensiones*, *los abonos* &c. se valúan por el *tanto* p% á manera del interes, se calculan del mismo modo que este. Las *tasas*, los *impuestos* guardan sus relaciones con los valores de las mercancías, ó con la unidad de peso ó de volúmen; y con el auxilio de las proporciones y de las fracciones pueden deducirse para cualesquiera cantidades.

Finalmente, la *teneduría de libros* está reducida á un modo de disponer los estados de los valores suministrados, y de los valores recibidos por el comerciante, con tal órden que á cada momento se puedan comparar los unos con los otros, á fin de conocer la diferencia que hay entre ellos, y establecer asi con seguridad la *balanza* entre lo que el comerciante tiene y lo que debe.

APENDICE

Sobre las medidas francesas, y su correspondencia con las españolas.

Ya que el autor de este tratado tuvo por conveniente insertar en él una breve exposicion del sistema de medidas últimamente adoptado en Francia, y agregarle tablas que indicasen la mútua correspondencia de las nuevas y las antiguas; nosotros hemos creido oportuno dar en este lugar una ligera idea, no solo de estas y de aquellas, sino tambien de las rectificaciones que se han mandado hacer en las españolas; y ademas introducir en las tablas del original la mútua correspondencia de las medidas francesas, y las nuestras. El continuo comercio en que estamos con los franceses, y el frecuente uso que hacemos de todos sus escritos, nos ponen á cada momento en la precision de efectuar este cotejo; y de consiguiente exigen á nuestro parecer que habiendo de tratar de esta materia, suministremos medios seguros de ejecutar pronta y fácilmente cualquiera de estas reducciones que pueda necesitarse. Asi contribuiremos, por lo menos, á precaver muchos graves errores y aun daños que por falta de estos conocimientos pueden ocasionar las obras francesas de ciencias y artes, y con especialidad sus traducciones, cuando en ellas, como suele acontecer, no se observa lo que sobre este particular está sabiamente prevenido por una Real órden[1].

1 »Estas medidas (las españolas) deberán usarse en los escri»tos de ciencias y artes; y los censores no los aprueben sin que »esten reducidas las medidas y pesas extrangeras; exceptuándose el ca-

Todas las medidas necesarias para los diferentes usos á que de ordinario se las destina pueden reducirse á las seis clases siguientes: 1.ª *Medidas de longitudes*, intervalos ó distancias, llamadas propiamente *medidas lineales*: 2.ª *Medidas de áreas ó superficies*, llamadas tambien *agrarias* cuando se las aplica á la medicion de los campos: 3.ª *Medidas de los volúmenes ó capacidades* segun el uso que de ellas se hace: 4.ª *Las pesas* ó las medidas del peso de los cuerpos: 5.ª *Las monedas* ó las medidas del dinero: 6.ª *Medidas* del tiempo ó de la duracion de las cosas.

Sean cuales fueren las condiciones que deban reunirse en un sistema de medidas para que llegue á tener toda la perfeccion á que se puede aspirar, son indudables las ventajas que resultarian de que uno mismo viniese á ser, si posible fuese, comun á todas las naciones; y no puede menos de causar la mayor admiracion el que no lo sea ni aun á las varias provincias de una misma nacion.

Bien convencido nuestro sabio Gobierno de los graves inconvenientes que ocasiona la diversidad de pesas y medidas, ha decretado[1] que se lleve á efecto la igualacion de ellas en todo el reino; y para que la utilidad real de esta uniformidad se logre con la menor incomodidad posible de los pueblos, ha resuelto que se tomen por normas las pesas y medidas que mas generalmente se usan en España, prefiriendo el evitar la confusion que de alterarlas resultaria, al darles cierto órden y enlace sistemático que se podria desear.

»so en que se trate de simple relacion ó proporcion." *Real orden de 26 de Enero de 1801.*

1 Real órden ya citada.

Estas normas son el patron de la vara que se conserva en el archivo de la ciudad de Búrgos; el patron de la media fanega que se conserva en el archivo de la ciudad de Avila; los patrones de las medidas de líquidos que se custodian en el archivo de la ciudad de Toledo; y el marco de pesas que existe en el archivo del Consejo.

En esta atencion las únicas pesas y medidas que en lo sucesivo se deberán usar generalmente en todo el reino, y se llamarán *pesas y medidas españolas*, son las siguientes:

El pie será la raiz de todas las medidas de intervalo ó de longitud, y se dividirá segun se acostumbra, en 16 dedos, y cada dedo en mitades, cuartas, octavas y dieciseisavas partes. Tambien se dividirá el pie en 12 pulgadas, y cada pulgada en 12 líneas.

La vara se compondrá de tres pies, y se dividirá, segun se acostumbra, en mitades, cuartas, medias cuartas ú ochavas, y medias ochavas ó dieciseisavas partes; como tambien en tercias, medias tercias ó sexmas, y medias sexmas ó dozavas partes.

Para que la legua corresponda próximamente á lo que en toda España se ha llamado y se llama *legua*, que es el camino que regularmente se anda en una hora, será de 20∂ pies; y esta extension se le atribuirá en todos los casos en que se trate de ella, sea en caminos reales, en los tribunales y fuera de ellos[1].

El estadal lineal para medir las tierras será de 4 varas ó de 12 pies de largo.

1 Veinte de estas leguas equivalen á un grado terrestre, bien que no generalmente ni con rigurosa exactitud, porque es muy varia la longitud de los grados.

La aranzada de tierra equivaldrá á un cuadro de 20 estadales por lado, ó lo que es lo mismo, tendrá de superficie 400 estadales cuadrados.

La fanega de tierra equivaldrá á un cuadrado que tendrá por lado 24 estadales lineales: de consiguiente su área contendrá 576 estadales cuadrados; y se la dividirá en 12 celemines, y cada celemin en 4 cuartillos.

Para medir todo género de granos, la sal y demas cosas secas, se usará el cahiz de 12 fanegas, y la fanega de 12 celemines. La fanega se dividirá en dos medias fanegas y en cuatro cuartillos; y el celemin se dividirá en mitades sucesivas, segun se acostumbra, con los nombres de *medio celemin*, *cuartillo*, *medio cuartillo*, *ochavo*, *medio ochavo* y *ochavillo*[1].

Para medir todo género de líquido, á excepcion del aceite, se usará la cántara y sus divisiones por mitades sucesivas, que son media cántara, cuartilla, azumbre, media azumbre, cuartillo, medio cuartillo y copa. El moyo será de 16 cántaras[2].

Las medidas para el aceite estarán, como hasta ahora, arregladas al peso, y se usará de la arroba y sus divisiones, que son media arroba, cuarto, medio cuarto de arroba, libra, media libra, cuarteron ó panilla, y media panilla[3].

Para las cosas que se compran y venden al peso, se

1 La media fanega equivale á un volúmen de 2220 pulgadas cúbicas, y caben en ella 60,25 libras de agua destilada. Teniendo, pues, el pie cúbico 1728 pulgadas cúbicas, es consiguiente que el pie cúbico español de agua pese 46,8973 libras españolas.

2 La cántara equivale á un volúmen de 1289,6 pulgadas cúbicas, y es capaz de contener 35 libras de agua.

3 La arroba *mensural* de aceite equivale á un volúmen de 1004 pulgadas cúbicas, y es capaz de contener 27,25 libras de agua.

Estas relaciones, cuyo conocimiento debemos á la generosidad usará la libra de 16 onzas, la que se dividirá, segun se acostumbra, en mitades sucesivas con los nombres de media libra, cuarteron y medio cuarteron. La onza se dividirá en dos medias onzas, en cuatro cuartas, en ocho ochavas ó dracmas, y en diez y seis adarmes; y para los usos en que se necesite mayor division, se dividirá el adarme en 3 tomines, y cada tomin en 12 granos. La arroba de peso ó *ponderal* se compondrá de 25 libras, y el quintal será de cuatro arrobas.

Los médicos y boticarios continuarán usando de la libra medicinal de 12 onzas iguales á las del marco español para evitar los daños que de alterarla podrian resultar á la salud pública. La dracma ú ochava de la onza medicinal se divide en 3 escrúpulos; y cada escrúpulo en 24 granos.

Ademas de todas estas medidas de que hace mencion la citada Real órden, se deben tambien considerar como españolas las siguientes:

De longitud.

El *estado* ó *braza* equivalente á 2 varas.
El *codo* equivalente á media vara.
El *palmo* equivalente á una cuarta ó 9 pulgadas.
El *paso* geométrico equivalente á 5 pies.
El *cordel* equivalente á 5 pasos.
La *milla* ó *mígero* equivalente á 1000 pasos.

del Señor Peñalver, se suponen observadas cuando el termómetro de Reaumur indicaba de 10 á 12 grados, y el barómetro 30.5 pulgadas españolas.

Agrarias.

La *yugada* equivalente á 50 fanegas.

La *caballería* equivalente á 60 fanegas.

De volúmen ó capacidad.

El *frangote* ó *fardo* equivalente á $37\frac{1}{2}$ palmos cúbicos.

La *tonelada* comun es el volúmen que ocupan 20 quintales de agua, y de consiguiente equivale á 42,646378 pies cúbicos.

La tonelada legal para las naves que van á América equivale á 70,18945 pies cúbicos.

El *lastre* equivalente á 2 toneladas comunes.

Pesas.

El *marco* equivalente á 8 onzas.

El *arrelde* equivalente á 4 libras.

ANTIGUAS MEDIDAS FRANCESAS.

Lineales ó de longitud.

El pie llamado *de Rey* era la raiz de todas las medidas de esta clase, y equivalia á 1,16582 pies españoles, puesto que del cotejo hecho por el Señor Ciscar resulta que 6,00434 pies de Rey equivalian á 7 pies españoles[1].

1 Véase la *Memoria elemental sobre los nuevos pesos y medidas &c.* por D. Gabriel Ciscar.

La *toesa* equivalia á 6 pies de Rey y á 6,99494 pies españoles.

La *ana* de Paris equivalia á 3 pies 7 pulgadas y 10 $\frac{5}{6}$ líneas de pie de Rey y á 1,42175 varas.

La pértiga ó estadal (*perche royal*) equivalia á 22 pies de Rey y á 25,648 pies españoles.

La legua de 20 en grado equivalia á 2850½ toesas y á 0,99695 de la nueva legua española.

Agrarias.

El *arpent royal* ó de *aguas* y *bosques* equivalia á 100 pértigas cuadradas de á 22 pies, y de consiguiente á 456,82 estadales cuadrados de á 12 pies españoles. Pero aunque generalmente el *arpent* equivalia al mismo número de pértigas, estas en muchas partes eran de á 18 pies de Rey.

De volúmenes y capacidades.

La *cuerda* de leña equivalia á un volúmen de 112 pies cúbicos; y siendo cada pie cúbico frances igual á 1,58452 pies cúbicos españoles, la *cuerda* venia á ser un volúmen de 177,4665 pies cúbicos españoles.

La *soliva* para las maderas equivalia á 3 pies cúbicos franceses, y de consiguiente á 4,7536 pies cúbicos españoles.

El *boisseau* para los granos equivalia á 2,74079 celemines españoles.

El *septier* de avena equivalia á 24 *boisseaux*, y de consiguiente á 5,48158 fanegas; pero el de los demas granos equivalia á 12 *boisseaux* y á 2,74079 fanegas;

y el de sal venia á ser igual á 16 *boisseaux* y á 3,65439 fanegas.

La *pinta* para los líquidos equivalia á 1,888 cuartillos. La pinta de aceite equivalia á 1,8948 libras españolas.

El moyo (*muid*) equivalia á 288 pintas, y á 16,99335 cántaras, ó 1,06208 moyos españoles.

Pesas.

Cada quintal, libra, marco, onza, ochava (*gros*), escrúpulo (*denier*) y grano de las pesas francesas equivalia respectivamente á 1,063928 pesas españolas de la misma denominacion.

Monedas efectivas.

		Lib.	*Rs.*	*Mrs.*
De oro....	El *luis* doble equiv. á	48 y á	187..	4,013
De plata.	El *escudo* doble á......	6 y á	21..	21,043
	El *escudo* sencillo á...	3 y á	10..	27,521
	Pieza de 24 sueldos á.............		4..	20,792
De cobre..	Pieza de un sueldo á.......................			5,644
	Pieza de ½ sueldo ó de 2 *liards* á......			2,822

De este cotejo de las antiguas monedas francesas hecho con las españolas del mismo metal, se deduce que cada libra tornesa de las monedas de oro equivalia á 3,8983 reales de vellon; y la de las monedas de plata á 3,631 reales de vellon, y las de las de cobre á 3,32 reales de vellon; y de estas diferentes relaciones la que mas importaba tener presente para comparar con ella el *precio corriente* del cambio es la segunda; porque en las negociaciones con el extrangero se atiende de ordinario al precio de la plata.

Nuevo sistema de medidas francesas.

El Gobierno frances, bien convencido de lo monstruoso del antiguo sistema de pesas y medidas, se atrevió á emprender la reforma de sus muchos y graves defectos, y para ello determinó que la basa fundamental del nuevo sistema fuese la unidad lineal, y eligió para esta la extension de la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador al polo del norte, tomada en el meridiano que pasa por Paris. A esta unidad principal le han dado los franceses el nombre griego *metro*, que quiere decir medida; y su longitud equivale á 43 pulgadas y 8 décimas de una línea del pie español.

Con arreglo al sistema generalmente adoptado en la numeracion se ha dividido al metro en 10 partes iguales, que se llaman *decímetros*; á cada decímetro se le ha dividido en otras 10 partes iguales, denominadas *centímetros*; y á cada centímetro se le considera dividido en 10 partes iguales, llamadas *milímetros* [1].

Con arreglo al mismo sistema á cada decena de metros se le ha dado el nombre de *decámetro*; á cada centena de metros se le ha llamado *hectómetro*; cada millar de metros se denomina *kilómetro*; cada decena de millar de metros *miriámetro*. Por manera que las voces *deca*, *hecto*, *kilo* y *miria*, equivalentes á 10, 100, 1000 y 10000, antepuestas al nombre de la unidad principal de cada clase, nos indican respectivamente las decenas, centenas &c. de esta unidad; y por el contrario, las voces *deci*, *centi*, *mili* &c. antepuestas del mismo modo, indican décimas,

1 El péndulo que oscila segundos en Paris es de 993 milímetros y 827 milésimas de otro milímetro.

centésimas, milésimas partes de la misma unidad principal. Por este medio cualquier número complejo, como, por ejemplo, 4 *miriámetros*, 5 *kilómetros*, 6 *hectómetros*, 7 *decámetros*, 8 *metros*, 9 *decímetros* &c. queda reducido á un solo número incomplejo que se representa por la combinacion 45678,9 &c. de aquellas mismas cifras.

Para unidad de las medidas superficiales ó agrarias se ha elegido un cuadrado que tiene por lado un *decámetro* ó una decena de metros; y asi es equivalente á 100 metros cuadrados. A esta unidad principal de las superficies se le ha dado el nombre de *área*; y de ella solo se usan dos múltiplos que son la *hectárea* equivalente á 100 áreas, ó á un *hectómetro* cuadrado, ó á 10000 metros cuadrados; y la *miriárea*, equivalente á 10000 áreas, ó á un *kilómetro* cuadrado, ó á un millon *de metros* cuadrados.

Es, pues, el *mètro* cuadrado una centésima parte de la área; el *decímetro* cuadrado otra centésima del *metro* cuadrado, y una diezmilésima de la área, como pueden comprender sin la menor dificultad los que tengan algunas nociones de geometría.

Para unidad de las medidas de volúmenes y capacidades se ha elegido un cubo [1] que tiene por lado un *decímetro*, y á esta unidad se le ha dado el nombre de *litro*. Es, pues, el litro una milésima parte del metro cúbico, y de consiguiente este es lo mismo que un *kilólitro*. Al metro cúbico ó kilólitro aplicado á la medicion de la leña se le da tambien el nombre de *estéreo*.

Para medir el peso de los cuerpos se ha tomado por unidad principal á que se refieren todas las demas de su

[1] Los geómetras llaman *cubo* á todo cuerpo que tiene la figura de un dado.

clase, la llamada *grama*, la cual equivale al peso de la cantidad de agua pura contenida en un *centímetro* cúbico.

Una *kilógrama*, que es la pesa de que mas uso se hace hoy dia en Francia, equivale al peso de la cantidad de agua pura contenida en un *decímetro* cúbico, y de consiguiente es la milésima parte del peso del agua pura contenida en un metro cúbico.

La kilógrama equivale á 2 libras 2 onzas 12 adarmes y 14,7 granos del marco español.

La nueva unidad monetaria se llama *franco*, moneda de plata, que pesa 5 gramas; pero la mitad de una de estas es de cobre. El franco se divide en diez partes iguales llamadas *décimas*, y cada décima en otras diez partes iguales llamadas *céntimas*. Cada franco equivale á 1,0125 libras tornesas.

Cotejadas las nuevas monedas francesas con las españolas del mismo metal resulta que cada franco de las de oro equivale á 3,8958 reales de vellon; cada franco de las de plata equivale á 3,6745 reales de vellon; cada franco de las de cobre equivale 3,673 reales de vellon; y de consiguiente cada *céntima* ó *centésima* parte de un franco equivale á 1,249 maravedis; por manera que á este respecto se puede suponer sin error sensible que el franco equivale á 125 maravedis de vellon.

Explicacion de las tablas.

Para la mútua reduccion de las medidas de cada clase estan destinadas dos tablas, y cada una de estas se compone de once colunas. La primera coluna de todas las tablas marcada en su cabeza con la letra N, contiene solamente los números desde 1 hasta 10, los cuales se refieren á la primera de las unidades que se enuncian á la cabeza de cada una de las demas colunas. Los números contenidos en estas otras son mixtos de enteros y fracciones decimales, referidos á la unidad últimamente enunciada á la cabeza de la coluna en que se hallen.

Asi, por ejemplo, en la primera línea de la segunda coluna de la primera tabla se nos viene á decir que un miriámetro equivale á una legua y ocho décimas de otra. Las leguas de que aqui se trata son de las de 20 en grado; y asi puede la segunda coluna de las cuatro primeras tablas servir para la reduccion de las nuevas medidas á leguas españolas y francesas, y al contrario.

Las cuatro últimas colunas de las dos primeras tablas, las seis últimas colunas de las tablas tercera y cuarta, las cuatro últimas colunas de las tablas quinta y sexta, las seis últimas colunas de las tablas séptima y octava, y las cinco últimas colunas de las tablas nona y décima son relativas á medidas españolas; y todas estas estan arregladas á lo prevenido en la última Real órden.

El *arpent*, de que se hace mencion en las tablas tercera y cuarta, es el llamado *real* ó de *aguas* y *bosques*. Todas las demas antiguas medidas francesas son las legales, y de que se hacia uso en Paris.

Por último advertimos que, aunque en estas tablas no está hecha la reduccion de las antiguas medidas francesas á las españolas, las tablas primeras de cada clase contienen datos para ejecutarla fácilmente, en atencion á que en ellas estan comparadas, asi las españolas como las antiguas francesas, con un mismo número de las nuevas. Asi, en observando, por ejemplo, en la tabla tercera que 2,63245 toesas cuadradas equivalen al mismo número de metros cuadrados que 14,31151 varas cuadradas, será fácil por medio de una proporcion, ó lo que en este caso es lo mismo, partiendo el segundo número por el primero, hallar que cada toesa cuadrada equivalia á 5,43657 varas cuadradas. Si quisiéremos reducir á pies cuadrados el quebrado decimal que acompaña á las 5 varas cuadradas, lo multiplicaremos por 9 pies cuadrados que tiene cada vara cuadrada, y el producto 3,92913 será el número de pies cuadrados á que equivale aquel quebrado de vara cuadrada. Si igualmente queremos reducir á pulgadas cuadradas el quebrado decimal que acompaña á los 3 pies cuadrados, lo multiplicaremos por 144 pulgadas cuadradas que tiene cada pie cuadrado. Por un método semejante reduciremos el quebrado decimal que acompañe á cualquier número de nuestras medidas, á otras menores ó subalternas.

TABLA I.

Para reducir las nuevas medidas lineales francesas á las antiguas y á las españolas.

N.	Miriámetros en leguas.	Metros en toesas.	Metros en anas.	Metros en pies f.	Decímetros en pulg. f.	Centímetros en líneas f.	Metros en varas.	Metros en pies e.	Decímetros en pulg. e.	Centímetros en líneas e.
1	1,8	0,51307	0,84144	3,07844	3,6941	4,433	1,19631	3,58892	4,3067	5,168
2	3,6	1,02615	1,68287	6,15689	7,3883	8,866	2,39261	7,17784	8,6134	10,336
3	5,4	1,53922	2,52431	9,23533	11,0824	13,299	3,58892	10,76676	12,9201	15,504
4	7,2	2,05230	3,36574	12,31378	14,7765	17,732	4,78523	14,35568	17,2268	20,672
5	9,0	2,56537	4,20718	15,39222	18,4707	22,165	5,98154	17,94461	21,5335	25,840
6	10,8	3,07844	5,04861	18,47066	22,1648	26,598	7,17784	21,53353	25,8402	31,008
7	12,6	3,59152	5,89005	21,54911	25,8589	31,031	8,37415	25,12245	30,1469	36,176
8	14,4	4,10459	6,73148	24,62755	29,5531	35,464	9,57046	28,71137	34,4536	41,344
9	16,2	4,61767	7,57292	27,70600	33,2472	39,897	10,76676	32,30029	38,7603	46,512
10	18,0	5,13074	8,41435	30,78444	36,9413	44,330	11,96307	35,88921	43,0671	51,680

TABLA II.

Para reducir á las nuevas medidas lineales francesas las antiguas y las españolas.

N.	Leguas en miriámetr.	Toesas en metros.	Anas en metros.	Pies f. en metros.	Pulgadas f. en decimet.	Lineas f. en centim.	Varas en metros.	Pies e. en metros.	Pulgadas e. en decimet.	Lineas e. en centimet.
1	0,5556	1,94904	1,18845	0,32484	0,27070	0,2256	0,83591	0,27864	0,2322	0,193
2	1,1111	3,89807	2,37689	0,64968	0,54140	0,4512	1,67181	0,55727	0,4644	0,387
3	1,6667	5,84711	3,56534	0,97452	0,81210	0,6768	2,50772	0,83591	0,6966	0,580
4	2,2222	7,79615	4,75378	1,29936	1,08280	0,9024	3,34362	1,11454	0,9288	0,774
5	2,7778	9,74519	5,94223	1,62420	1,35350	1,1280	4,17953	1,39318	1,1610	0,967
6	3,3333	11,69422	7,13068	1,94904	1,62419	1,3536	5,01543	1,67181	1,3932	1,161
7	3,8889	13,64326	8,31913	2,27386	1,89489	1,5792	5,85134	1,95045	1,6254	1,354
8	4,4444	15,59230	9,50757	2,59872	2,16559	1,8048	6,68724	2,22908	1,8576	1,548
9	5,0000	17,54133	10,69601	2,93456	2,43629	2,0304	7,52315	2,50772	2,0898	1,741
10	6,5555	19,49037	11,88446	3,24840	2,70699	22,560	8,35906	2,78635	2,3220	1,935

TABLA III.

Para reducir las nuevas medidas agrarias francesas á las antiguas y á las españolas.

N.	Miriáreas en leguas cuad.	Hectáreas en arpents.	Metr. cuad. en toes. c.	Decim. c. en pies c.	Hectáreas en fan. e.	Areas en estadales.	Metros c. en varas e.	Decimet. c. en pies e.	Decimet. c. en pulg. e.	Centim. c. en lin. e.
1	0,0324	2,92494	0,26324	0,09477	1,55290	8,94469	1,43115	0,12880	18,5477	26,7087
2	0,0648	5,84989	0,52649	0,18954	3,10580	17,88938	2,86230	0,25161	37,0954	53,4174
3	0,0972	8,77483	0,78973	0,28430	4,65869	26,83408	4,29345	0,38641	55,6431	80,1261
4	0,1296	11,69977	1,05298	0,37907	6,21159	35,77877	5,72460	0,51521	74,1909	106,8348
5	0,1620	14,62471	1,31622	0,47384	7,76449	44,72346	7,15575	0,64402	92,7386	133,5435
6	0,1944	17,54966	1,57947	0,56861	9,31739	53,66815	8,58690	0,77282	111,2863	160,2522
7	0,2268	20,47460	1,84271	0,66338	10,87029	62,61284	10,01805	0,90162	119,8340	186,9609
8	0,2792	23,39954	2,10596	0,75814	12,42318	71,55753	11,44920	1,03043	148,3817	213,6697
9	0,2916	26,32449	2,36920	0,85291	13,97608	80,50222	12,88036	1,15923	166,9294	240,3784
10	0,3240	29,24943	2,63245	0,94768	15,52898	89,44691	14,31151	1,28804	185,4771	267,0871

TABLA IV.

Para reducir á las nuevas medidas agrarias francesas las antiguas y las españolas.

N.	Leg. cuad. en miriar.	Arpents en hectar.	Toesas c. en metr. c.	Pies cuad. en decim. c.	Fanegas e. en hectar.	Estadales en áreas.	Vara cuad. en metr. c.	Pies cuad. en decim. c.	Pulg. cuad. en decim. c.	Lín. cuad. en centím.
1	30,8642	0,341887	3,79874	10,5521	0,643957	0,111798	0,698738	7,76376	0,05392	0,03744
2	61,7284	0,683774	7,59749	21,1042	1,287915	0,223596	1,397477	15,52752	0,10783	0,07488
3	92,5926	1,025661	11,39623	31,6563	1,931872	0,335394	2,096215	23,29128	0,16175	0,11232
4	123,4568	1,367548	15,19498	42,2084	2,575829	0,447192	2,794954	31,05504	0,21586	0,14976
5	154,3210	1,709435	18,99372	52,7605	3,219787	0,558990	3,493692	38,81880	0,26958	0,18720
6	185,1852	2,051322	22,79247	63,3126	3,863344	0,670788	4,192430	46,58256	0,32350	0,22464
7	216.0494	2,393209	26,59121	73,8647	4,507701	0,782586	4,891169	54,34632	0,37741	0,26208
8	246,9136	2,735096	30,38996	84,4168	5,151659	0,894384	5,589907	62,11008	0,43133	0,29952
9	277,7778	3,076983	34,18870	94,9689	5,795616	1,006182	6,288646	69,87384	0,48525	0,33696
10	308,6420	3,418870	37,98745	205,5210	6,439574	1,117981	6,987384	77,63760	0,53917	0,37440

TABLA V.

Para reducir las nuevas medidas cúbicas francesas á las antiguas y á las españolas.

N.	Metros cúb. en solivas.	Metros cúb. en cuerdas.	Metros cúb. en toes. cúb.	Metros cúb. en pies cúb.	Decim. cúb. en pulg. cúb.	Centim. cúb. en lin. cúb.	Metros cúb. en var. cúb-	Metros. cúb. en pies cúb.	Decim. cúb. en pulg. cúb.	Centim. cúb. en lin. cúb.
1	9,7246	0,26048	0,135064	29,1738	50,4124	87,1727	1,71209	46,2266	79,8795	138,032
2	19,4432	0,52096	0,270128	58,3477	100,8249	174,2254	3,42419	92,4532	159,7591	276,094
3	29,1739	0,78144	0,405193	87,5216	151,2373	261,3381	5,13629	138,6798	239,6386	414,096
4	38,8985	1,04192	0,540257	116,6955	201,6498	348,4508	6,84838	184,9063	319,5181	552,127
5	48,6231	1,30241	0,675321	145,8694	252,0622	435,5635	8,66048	231,1329	399,3977	690,159
6	58,3477	1,56289	0,810385	175,0432	302,4746	522,6762	10,27257	277,3595	479,2772	828,191
7	68,0723	1,82337	0,945449	204,2171	352,8871	609,7889	11,98467	323,5681	559,1568	966,223
8	77,7970	2,08385	1,080514	233,3910	403,2995	696,9016	13,69677	369,8127	639,0363	1104,255
9	87,5216	2,34433	1,215578	262,5648	453,7120	784,0143	15,40886	416,0393	718,9158	1242,287
10	97,2462	2,60481	0,350641	291,7389	504.1244	871,1270	17,12096	462,2658	798,7954	1380,318

TABLA VI.

Para reducir á las nuevas medidas cúbicas francesas las antiguas y las españolas.

N.	Solivas en metros cúb.	Cuerdas en metros cúb.	Toesas cúb. en met. cúb.	Pies cúb. en metros cúb.	Pulg. cúb. en decim. c.	Lineas cúb. en cent. c.	Varas cúb. en metr. c.	Pies cúb. en metr. c.	Pulg. cúb. en decim. c.	Lin. cúb. en centim. c.
1	0,10283	3,8391	7,40389	0,034277	0,019836	0,01148	0,584079	0,021633	0,012519	0,007245
2	0,20566	7,6781	14,80778	0,068554	0,039673	0,02296	1,168159	0,043265	0,025038	0,014489
3	0,30850	11,5172	22,21167	0,102832	0,059509	0,03444	1,752238	0,064898	0,037556	0,021734
4	0,41133	15,3562	29,61556	0,137109	0,079346	0,04592	2,336318	0,086530	0,050075	0,028979
5	0,51416	19,1953	37,01945	0,171386	0,099182	0,05740	2,920397	0,108163	0,062594	0,036223
6	0,61699	23,0343	34,42334	0,205664	0,119018	0,06888	3,504477	0,129795	0,075113	0,043468
7	0,71982	26,8734	51,82723	0,239941	0,138855	0,08036	4,088556	0,151428	0,087632	0,050713
8	0,82265	30,7124	59,23112	0,274218	0,158691	0,09184	4,672636	0,173061	0,100150	0,057958
9	0,72549	34,5515	66,63501	0,308495	0,178528	0,10332	5,256715	0,194693	0,112669	0,065202
10	1,02832	38,3905	74,03890	0,342773	0,198364	0,11480	5,840795	0,216326	0,125188	0,072447

TABLA VII.

Para reducir las nuevas medidas de capacidad francesas á las antiguas y á las españolas.

N.	Hectólitros en moyos f.	Litros en pintas.	Hectólitros en septiers.	Litros en boiseaux.	Hectólitros en cánt. vin.	Litros en cllos. de vin.	Hectólit. en arrob. aceit.	Litr. en lib. de aceit.	Hectólitros en fanegas.	Litros en celemin.
1	0,3728	1,0737	0,6406	0,07687	6,19653	1,98289	7,95885	1,98971	1,79909	0,21589
2	0,7457	2,1475	1,2812	0,15375	12,39307	3,96578	15,91770	3,97942	3,59818	0,45178
3	1,1185	3,2212	1,9219	0,23062	18,58960	5,94867	23,87654	5,96914	5,39726	0,64767
4	1,4913	4,2950	2,5625	0,30750	24,78613	7,93156	31,83539	7,95885	7,19635	0,86356
5	1,8642	5,3687	3,2031	0,38437	30,98266	9,91445	39,79424	9,94856	8,99544	1,07945
6	2,2370	6,4424	3,8437	0,46124	37,17920	11,89734	47,75309	11,93827	10,79453	1,29534
7	2,6098	7,5162	4,4843	0,53812	43,37573	13,58023	55,71194	13,92798	12,59362	1,51123
8	2,9826	8,5899	5,1250	0,61499	49,57226	15,86312	63,67078	15,91770	14,39270	1,72712
9	3,3555	9,6637	5,7656	0,69187	55,76880	17,84601	71,62963	17,90741	16,19179	1,94301
10	3,7283	10,7374	6,4062	0,76874	61,96533	19,82890	79,58848	19,89712	17,99088	2,15890

TABLA VIII.

Para reducir á las nuevas medidas de capacidad francesas las antiguas y las españolas.

N.	Moyos en hectólitros.	Pintas en litros.	Septiers en hectólitros.	Boisseaux en litros.	Cánt. de vin. en hectólitr.	Cllos. de vin. en litros.	Arrob. aceit. en hectólitr.	Lib. de aceit. en hectólitr.	Fanegas en hectólitros.	Celemines en litros.
1	2,6822	0,9313	1,5610	13,008	0,16138	0,50431	0,12565	0,50258	0,55584	4,63196
2	5,3644	1,8626	3,1220	26,017	0,32276	1,00863	0,25129	1,00517	1,11167	9,26392
3	8,0466	2,7940	4,6830	39,025	0,48414	1,51294	0,37694	1,50775	1,66751	13,89588
4	10,7288	3,7253	6,2440	52,033	0,64552	2,01726	0,50259	2,01034	2,22335	18,52784
5	13,4110	4,6566	7,8050	65,042	0,80690	2,52157	0,62823	2,51292	2,77919	23,15980
6	16,0932	5,5879	9,3660	78,050	0,96828	3,02589	0,75388	3,01551	3,33502	27,79176
7	17,7754	6,5192	10,9270	91,058	1,12966	3,53020	0,87952	3,51809	1,89086	32,42372
8	21,4576	7,4506	12,4880	104,066	1,29104	4,03451	1,00517	4,02068	4,44670	37,05568
9	24,1398	8,3819	14,0490	117,075	1,45243	4,53883	1,13082	4,52326	5,00253	41,68764
10	26,8220	9,3132	15,6100	130,083	1,61381	5,04314	1,25646	5,02585	5,55837	46,31960

TABLA IX.

Para reducir las nuevas pesas francesas á las antiguas y á las españolas.

N.	Miriagram. en quint. f.	Kilogramas. en libras f.	Hectogram. en onzas f.	Decagramas en ochav. f.	Gramas en granos f.	Miriagram. en arrob. e.	Kilogramas en libras e.	Hectogram. en onzas e.	Decagramas en adarm. e.	Gramas en granos e.
1	0,20429	2,04268	3,2686	2,6149	18,827	0,86939	2,17341	3,47756	5,56409	20,031
2	0,40858	4,08545	6,5372	5,2298	37,654	1,73878	4,34695	6,95512	11,12819	40,061
3	0,61286	6,12863	9,8058	7,8446	56,487	2,60817	6,52042	10,43267	16,90228	60,092
4	0,81715	8,17150	13,0744	10,4595	75,309	3,47756	8,69390	13,91023	22,25637	80,123
5	1,02144	10,21438	16,3430	13,0744	94,136	4,34695	10,86737	17,38779	27,82046	100,154
6	1,22573	12,25726	19,6116	15,6893	112,963	5,21634	13,04084	20,86535	33,38456	120,184
7	1,43001	14,30013	22,8802	18,3042	131,790	6,08513	15,21432	24,34291	38,94865	140,215
8	1,63430	16,34301	26,1488	20,9190	150,617	6,95512	17,38779	27,82046	44,51274	190,243
9	1,83859	12,38588	29,4174	23,5339	169,444	7,82451	19,56127	31,29802	50,07684	180,277
10	2,04288	20,42876	32,6860	26,1488	188,271	8,69390	21,73474	34,77558	55,64093	200,307

TABLA X.

Para reducir á las nuevas pesas francesas las antiguas y las españolas.

N.	Quintales f. en miriagr.	Libr. fr, en kilogr.	Onzas. fr. en hectogr.	Ochavas. f. en decagr.	Granos fr. en gramas.	Arrobas e. en miriagr.	Libras esp. en kilogr.	Onzas esp. en hectogr.	Adarm. esp. en decagr.	Granos. esp. en gramas.
1	4,8951	0,48951	0,3824	0,3059	0,0531	1,15023	0,46009	0,28756	0,1797	0,0499
2	9,7901	0,97901	0,6119	0,7648	0,1062	2,30046	0,92018	0,57512	0,3594	0,0998
3	14,6852	1,46852	0,9178	1,1472	0,1593	3,45070	1,38028	0,86267	0,5392	0,1498
4	19,5802	1,95802	1,2238	1,5296	0,2124	4,60093	1,84037	1,15023	0,7189	0,1997
5	24,4753	2,44753	1,5297	1,9120	0,2655	5,75116	2,30046	1,43779	0,8986	0,2496
6	29,3704	2,93704	1,8356	2,2944	0,3186	6,90139	2,76055	1,72535	1,0783	0,2995
7	34,2654	3,42654	2,1456	2,6768	0,3717	8,05163	3,22065	2,01291	1,2581	0,3495
8	39,1605	3,91605	2,4475	3,0592	0,4248	9,20186	3,68074	2,30046	1,4378	0,3994
9	44,0555	4,40555	2,7535	3,4416	0,4779	10,35209	4,14084	2,58802	1,6175	0,4493
10	48,9506	4,89506	3,0594	3,8240	0,5310	11,50232	4,60093	2,87558	1,7972	0,4992

Comparacion de algunas otras medidas extrangeras con las españolas[1].

MEDIDAS DE INGLATERRA.

De longitud.

El pie ingles (*foot*) equivale á 1,0938951 pies españoles. La *yarda* ó vara equivale á tres pies ingleses.

La *ana* para los tejidos ordinarios (*the english ell*) equivale á 1,3674 varas españolas. La ana para los lienzos superfinos (*the flemish ell*) equivale á 0,82042 de la vara española.

La milla equivale á 0,28885 de la legua española.

El estadal (*pole*) equivale á 18,0488 pies españoles, ó lo que es lo mismo, á 1,504 estadales españoles.

Agrarias.

El *rood* equivale á 40 estadales ingleses cuadrados, y de consiguiente á 90,48 estadales cuadrados españoles.

El *acre* legal equivale á 4 *roods*, y de consiguien-

1 Si lo mucho que puede importar el tener conocimiento de las relaciones de las medidas extrangeras pudo servir de justa excusa al autor para agregarlas á su tratado de Aritmética, con mayor razon, segun creemos, se nos deberá disimular á nosotros el que no hayamos omitido ninguna de las cosas útiles que contiene la obra original, por impertinentes que puedan parecer; mayormente cuando para dar estas noticias con toda la exactitud apetecible hemos acudido á personas que pueden haberlas adquirido por sus propias observaciones, y que por su inteligencia en la materia merecen la mayor confianza.

te á 361,92 estadales cuadrados españoles.

El *acre* no es generalmente de la misma extension; porque el estadal ingles varía desde $16\frac{1}{2}$ á 18 pies ingleses.

De capacidad.

El *gallon* de cerveza equivale á 9,1626 cuartillos españoles; y el de vino y otros líquidos á 7,50589 cuartillos.

La pipa ó bota de vino contiene 126 *gallons*, y se divide en dos *hogsheads*.

El *gallon* de aceite equivale á 7,53289 libras españolas.

El *bushel* para los granos equivale á 7,7052 celemines, y se divide en 4 *pecks*.

La cuartera (*cuarter*) contiene 8 *bushels*, y de consiguiente equivale á 5,1368 fanegas.

Pesas.

La libra llamada de *troy* tiene 12 onzas, y la de *avoir du pois* 16 onzas; pero las onzas de la primera son mayores que las de la segunda. La primera equivale á 0,81111, y la segunda á 0,98556 de la libra española. La libra de *avoir du pois* es para las mercancías, y la de *troy* es para los metales preciosos y joyas.

El quintal (*hundred*) tiene 112 libras inglesas, y equivale á 110,3824 libras españolas.

La (*) que se halla en algunas de las relaciones de las monedas indica que estan tomadas del original, sin otra alteracion que la de haber reducido los *francos* á reales de vellon, suponiendo que cada franco equivale á 125 maravedis.

Monedas efectivas.

		Rs. vn.	*Mrs.*
De oro......	La guinea (*guiney*) vale 21 chelines, y corresp. á	103......	10,152
	La moneda de 7 chelines.	34......	14,717
De plata.	La corona (*crown*) vale 5 chelines, y corresp. á	22......	15,893
	El chelin (*shilling*)........	4......	16,776
De cobre...	El penique (*penny*)......................		12,731
	El *farthing*................................		3,182

Del cotejo de las monedas de oro inglesas hecho con las nuestras del mismo metal se deduce que la libra esterlina, moneda imaginaria equivalente á 20 chelines, corresponde á 98 reales y 12,9 maravedis de vellon; pero del cotejo de las monedas de plata resulta que la libra esterlina equivale á 89 reales y 29,52 maravedis de vellon; y á este respecto nuestro peso de plata equivale á 40,216 peniques ó dineros.

MEDIDAS DE HOLANDA.

De longitud.

El pie de Amsterdam equivale á 1,01588 pies españoles; y el del Rhin ó de Leiden á 1,11887 pies españoles.

El *roeden* ó estadal del Rhin equivale á 13,426 pies españoles, ó á 1,1189 estadales españoles.

Agrarias.

El *arpent* del Rhin es de 120 *roedens* cuadrados, y equivale á 150,228 estadales españoles cuadrados.

El *morgent* del Rhin es de 5 *arpents*, y equivale á 751,14 estadales cuadrados, ó á 1,304 fanegas españolas.

De capacidad.

El *mingle* equivale á 2,395 cuartillos españoles.

El *stekan* contiene 16 *mingles*, y equivale á 1,1975 cántaras.

El *anker* contiene 2 *stekans*, y equivale á 2,395 cántaras.

La *pipa* ó *bota de aceite* contiene 20 *stekans*, y equivale á 30,7715 arrobas.

El *scheppel* para los granos equivale á 5,8284 celemines.

El *sack* contiene 3 *scheppels*, y equivale á 1,4571 fanegas.

Pesas.

La libra de marco equivale á 1,069547 libras españolas.

La libra de Amberes para la seda, cochinilla y otras mercancías de alto precio es 0,9525 de la libra de marco.

El *schippond* para las mercancías contiene 280 libras de marco, y corresponde á 299½ libras españolas.

El *lastre* contiene 4000 libras holandesas, que equivalen á 42 quintales 3 arrobas 3,188 libras españolas.

Monedas efectivas.

		Rs. vn.	Mrs.
De oro.....	El *ruider* equivale á 14 florines, y corresponde á	123...	22,541
	Ducado equivale á 5 florines y 5 sueldos...........	46...	28,652

De plata.	*Ducaton* equivale á 3 florines y 3 sueldos..........	24...	29,33
	El *rixdal* equivale á 2 florines y 10 sueldos.........	19...	24,9
	El *florin* equivale á 40 dineros de grueso..........	7...	30,36
	Escalin equivale á 6 sueldos..............................	2...	12,508

De esta relacion de las monedas de plata se deduce que nuestro ducado de cambio equivale á 105,21 dineros de *grueso*.

MEDIDAS DE ALEMANIA.

De longitud.

	Pies español.
El pie de Viena equivale á..........................	1,13466
El *klafter* de Viena equivale á......................	6,80796
El de Bohemia á..	6,38360
El de Silesia á..	6,23269
El de Moravia á..	7,19601
La ana (*elln*) de Viena para los tejidos á......	2,825
La de Bohemia á...	2,161
La de Silesia á..	2,105
La de Moravia á...	2,877
La del Austria superior á...............................	2,910
La del Tirol á..	2,944

De capacidad.

	Cuartill. español.
El *maas* de Viena equivale á........................	2,80748
La *pinta* de Bohemia á.................................	3,79010

El *cuart* de Silesia á..	1,39251
El *maas* de Moravia á..	2,12246
El del Tirol á..	1,60869

	Fanegas.
El *metzen* de Viena para granos á..................	1,107
El *strich* de Bohemia á...................................	1,6848
El *scheffel* de Silesia á..................................	1,3748
El *metzen* de Moravia á...................................	1,2711
El *hornstarr* del Tirol á..................................	0,5504

Pesas.

	Libras españolas.
La libra de Viena equivale á..........................	1,2204
El *centner* ó quintal de Viena á..................	122,0425
Cien libras de Bohemia á................................	112,09237
Cien libras de Silesia á..................................	115,46929
Cien libras de Moravia á................................	122,03274
Cien libras del Tirol á....................................	134,51036

Monedas efectivas.

		Rs. vn.	Mrs.
De oro.....	*Soberano* equivale á $13\frac{1}{3}$ florines, y á.....................	143....	14,76
	Ducado imperial de $4\frac{1}{2}$ florines equivale á..............	48....	13,906
De plata.	*Reichsthaler* equivale á 2 florines, y á....................	18....	27,132
	Florin equivale á 60 *kreutzers*, y á........................	9....	13,566
	Zehner equivale á 10 *kreutzers*, y á.........................	1....	19,261

De esta relacion de las monedas de plata se deduce que nuestro ducado de cambio equivale á 2,20887 florines.

MEDIDAS DE PORTUGAL.

De longitud.

El *craveiro* ó palmo equivale á 0,784495 del pie español.

El *covado* ó codo equivale á 2,3535 pies españoles.

La vara portuguesa equivale á 1,30749 varas españolas.

De capacidad.

El *pote* equivale á 16,59829 cuartillos españoles.

El *almude* equivale á 1,03739 cántaras.

La *alqueira* para los granos equivale á 2,91594 celemines.

La fanega equivale á 11,66378 celemines españoles.

Pesas.

La libra portuguesa equivale á 0,99769 de la libra española.

La arroba equivale á 1,27704 arrobas españolas.

Monedas efectivas.

		Rs. vn.	*Mrs.*
De oro.....	*Dobraon de cruz* equivale á 240 *reis*, y á............	662....	28,552
	Moneda de retrato equivale a 12800 *reis*, y a......	353....	17,494

Jorge Palco 359

		Rs. vn.	Mrs.
De oro	*Lisbonina* equivale á 6400 *reis*, y á.....................	176....	25,747
	Cuartiño equivale á 1200 *reis*, y á.....................	33....	4,825
	Cruzado nuevo equivale á 480 *reis*, y á.............	13....	8,726
	Cruzado viejo equivale á 480 *reis*, y á.............	11....	1,505
De plata	*Cruzado* nuevo equivale á 400 *reis*, y á.............	10....	30,628
	Teston equivale á 100 *reis*, y á..............................	2....	9,214
	Vintem equivale á 20 *reis*, y á..............................	0....	15,442

De la relacion de las monedas de oro se deduce que nuestro doblon de cambio equivale á 2225,37 *reis*; pero de las de plata se infiere que nuestro doblon de cambio equivale á 2652,36 *reis*. La relacion media es de 2436,86 *reis*.

MEDIDAS DE ROMA.

De longitud.

El palmo de los arquitectos se divide en 12 onzas, y equivale á 0,8018 pies españoles.

El *palmo di ara* equivale á 5,3856 pulgadas españolas.

El pie equivale á 1,069 pies españoles.

De capacidad.

El *bocale* corresponde á 2,81 cuartillos españoles.

El *barile* equivale á 2,81 cántaras.

El *staro* equivale á 4,8076 celemines.

La *cuarta* equivale á 1,2019 fanegas.

Pesas.

La libra se compone de 12 onzas, y equivale á 0,7372 de la libra española.

Monedas efectivas.

		Rs. vn.	Mrs.
De oro	*Doppia* equivale á 313 *bayocos*, y á	67	6,152
	Sechino equivale á 107 *bayocos*, y á	22	24,673
De plata	*Scudo* ó *piastra* equivale á 100 *bayocos*, y á	19	26,326
	Testono ó *carlino* equivale á 30 *bayocos*, y á	5	31,696
	Papeto equivale á 20 *bayocos*, y á	3	32,465
	Paulo ó *julio* equivale á 10 *bayocos*, y á	1	33,232
	Groso equivale á 5 *bayocos*, y á	0	33,616

La moneda imaginaria, llamada *scudo di oro stampato*, equivale muy próximamente á 30 reales de vellon.

MEDIDAS DE DINAMARCA.

De longitud.

El pie dinamarques es el del Rhin ó de Leiden, y de consiguiente equivale á 1,1263956 pies españoles.

La ana (*alen*) equivale á 2,25279 pies españoles.

El *faon* equivale á 6,75837 pies españoles.

Agrarias.

El *album* equivale á 40 *faons* cuadrados, y á 12,687 estadales cuadrados españoles.

El *tonder* contiene 96 *albums*, y equivale á............ 1217,952 estadales cuadrados, ó á 2,1145 fanegas.

De capacidad.

El *pott* equivale á 1,91585 cuartillos españoles.

El *tonder* para cerveza equivale á 8,14238 arrobas.

El *fierdingkar* para granos equivale á 0,9386 de nuestro celemin.

El *tonder* equivale á 2,5029 fanegas.

Pesas.

La libra (*pund*) equivale á 1,02549 libras españolas.

El *schippund* equivale á 3,2816 quintales.

El lastre (*last*) equivale á 53,326 quintales.

Monedas efectivas (*).

		Rs. vn.	*Mrs.*
De plata.	El *reichsthaler* equivale á...	20.......	31,25
	El *marco lubs* equivale á......	6.......	33,5
	El *marco* dinamarques equivale á..............................	3......	16,75

MEDIDAS DE SUECIA.

El pie equivale á 1,0664 pies españoles.

La libra equivale á 0,92425 de la libra española.

Monedas efectivas de plata (*)

	Rs. vn.	*Mrs.*
Species daler de 48 chelines equivale á..	21......	9,75

Pieza de 10 *oers* equivale á........ 2....... 19,5

MEDIDAS DE RUSIA.

El pie equivale á 1,27 pies españoles.

La libra equivale á 0,89138 de la libra española.

Monedas efectivas.		Rs. vn.	Mrs.
De oro.....	El imperial de 10 rublos equivale á....................	163.	33,804
	El ducado de 2 $\frac{1}{4}$ rublos á	36.	30,556
De plata.	El *rublo* equivale á 100 *kopecks* y á....................	14.	30,856
	Pieza de 20 kopecks........	2.	23,371

MONEDAS EFECTIVAS DE ALGUNOS OTROS PAISES.

Argel.		Rs. vn.	Mrs.
De oro.....	Zequin..............................	38.....	26,847
	Mahabu..............................	25.....	10,111
De plata.	Piastra..............................	11.....	22,371
	Demimbucho ó media peseta	1.....	8,333

Brema.		Rs. vn.	Mrs.
	Ducado de oro de 2 thalers y 66 grosos	46.....	6,430
De plata.	*Alberto* sencillo de 1¼ thalers..............................	21.....	15,398
	Schware de 12 grosos........	2.....	13,044

Génova.			
De oro.....	Pieza de 96 *lire*	310.....	26,555
	Pieza de 12 *lire*................	38.....	28,819

De plata.	Pieza de 8 *lire*	24...	10,296
	Pieza de 1 *lira*	3...	1,287
	Hamburgo.		
De oro.	Ducado doble de 15 marcos y 8 sueldos	92...	12,86
	Ducado sencillo de 7 marcos y 12 sueldos	46...	6,43
De plata.	Escudo de 3 marcos y 12 sueldos	11...	8,5
	El *marco* corriente equivale á 16 sueldos y á	5...	18,464
	Lubeck.		
	Ducado de oro de 7 *marcos y 12 escalines*	46...	2,42
De plata.	Escudo de 3 marcos y 12 escalines	21...	15,398
	Escudo corriente de 3 marcos.	16...	22,334
	El *marco* equivale á 16 escalines y á	5...	18,778
	Milan.	*R.s vn.*	*Mrs.*
De plata.	Escudo	16...	20,435
	Lira	4...	5,108
	Nápoles.		
	Moneda de oro de 2 ducados.	34...	21,074
De plata.	Escudo de 12 carlini	19..	14,947
	Ducado de 10 carlini	16...	16,789
	Carlino ó 10 granos	1...	21,043
	Parma.		
De oro.	*Sechino* de 45 *lire*	42...	27,661
	Doppia de 90 *lire*	85...	21,312

De plata.	*Ducato* de 21 *lire*.............	18...	5,832
	Pieza de 3 *lire*....................	2...	20,261

Prusia.

De oro.....	*Federico* sencillo de 5 escudos..................................	81...	31,482
	Federico doble de 10 escudos.....	163...	28,964
De plata.	Escudo de 24 *gros*............	13...	20,851
	Pieza de 2 *gros*..................	1...	4,570

Ragusa (*).

De plata.	Vislina ó Ragusina................	13...	6,75

Sajonia.

De plata.	*Thaler* ó *rixdaler* ó escudo..	19...	11,094
	Florin ó medio escudo 16 *grosos*..............................	9...	22,547

Las monedas de oro del mismo nombre que las de Prusia tienen la misma relacion con las nuestras.

Suiza (*).

		Rs. vn.	Ms.
De plata.	Escudo de Basilea de 30 *batzen*.............................	16...	11
	Florin *id.* de 15 *batzen*........	8...	5,5
	Franco de Berna de 10 *batzen*.....................................	5...	20
	Escudo de Zuric de 2 florines..	17...	19,5
	Florin *id.* de 4 *chelines*........	8...	26,75

Turquía.

De oro.....	*Zequin funldulf* de 7 *piastras* ó 280 *paras*...........	36...	11,29
	Id. de 5 piastras....................	25...	32,35
De plata.	Juspara de 2½ *piastras*.........	12...	11,9
	Piastra de 40 *paras*.............	4...	31,96

Venecia.

De oro.....	*Orsella* de 88 *lire*................	186...	4,996
	Ducato de 14 *lire*	29...	20,876
	Doppia de 10 *lire*............	21...	5,197
	Zechino de 22 *lire*............	46...	18,234
De plata.	*Scudo della croce da 12 lire é 8 soldi*..................	23...	31,525
	Giustina ó ducatone da 11 lire..........................	21...	7,676
	Tallaro da 12 lire..............	19...	10,069
	Ducato da 8 lire..............	15...	14,855
	Orsella da 3 lire é 18 soldi.........	7...	17,866

Asia é Indias orientales (*).

		Rs. vn.	Mrs.
De plata.	*Itagana ó tigogin* de 60 *mas* del Japon................	58.....	30,5
	Nansiogin de $7\frac{1}{2}$ *mas id.*....	8.....	8
	Kodama id........................	6.....	14,75
De plata.	*Larin* en Arabia..................	3.....	20,5
	Rupia de Arcate................	8.....	33
	Id. de Bombay, Madrás y Persia..........................	9.....	2,75
De plata.	Id. de Pondichery..............	9.....	5,25
	Id. de Haidernac, *su mínimo valor*.....	8.....	24,25
	Id. de Bengala, *su máximo*...	9.....	15,25

Estados-Unidos de América (*).

		Rs. vn.	Ms.
De plata.	El *dolar*	20	16,25
	La *libra esterlina* de la Carolina meridional y la Georgia	88	8
	La *libra esterlina* de Neuhamshire, Massachusets, Rode Island, Conneticut y Virginia	70	3,75
	La *libra* de Pensilvania, New-Jersey, Delaware y Maryland	54	14
	La *libra* de New-York y Carolina septentrional	50	27,5

Cambios con Madrid en las principales plazas de Europa.

Amsterdam	90 *dineros de grueso* (mas ó menos) por 1 ducado de plata
Génova	23 *liras* por 1 doblon de oro ó por 40 reales de plata
Hamburgo	88 *dineros de grueso* por 1 ducado de plata.
Lisboa	2400 *reis* por 1 doblon de cambio.
Lóndres	38 *dineros ó peniques* por un peso de cambio.
París	14,89 *francos* por 1 doblon de cambio.
Liorna	128 pesos nuestros de cambio (mas ó menos) por 100 *pezzas*.

Para la inteligencia de las tablas que, con el fin de darnos á conocer los precios corrientes de los cambios, se hallan con frecuencia en los periódicos nacionales y extrangeros, es necesario tener presente en primer lugar que entre las diferentes monedas efectivas é imaginarias de cada dos plazas, cuyo cambio esté indicado, estan determinadas por el uso constante del comercio las que en todos casos deben emplearse para ejecutar el cambio. Asi, por ejemplo, para todos los cambios que puedan ofrecerse entre Madrid y Lóndres está ya constantemente establecido que se haya de hacer uso de nuestros pesos ó reales de plata, y de los *peniques* ó *dineros esterlines* ingleses; y de consiguiente para cambiar cualesquiera otras monedas españolas con otras cualesquiera inglesas se reducirán préviamente las primeras á pesos ó reales de plata, y las segundas á *peniques* ó *dineros* con arreglo á la relacion que unas monedas tengan con otras.

Pero aun hay mas; para expresar con la mayor sencillez que es posible el precio corriente del cambio, que, como ya se sabe, es muy variable, se ha puesto fijo é invariable el número de monedas de una de las dos plazas; y de este modo la variacion recae únicamente sobre el número de monedas de la otra. Cuando, por ejemplo, se dice que el cambio de Madrid sobre Lóndres es 38, quiere esto decir que 8 reales de plata ó un peso de cambio valen en la actualidad 38 *peniques*; porque no solo está generalmente establecido que los reales de plata y los *peniques* sean las monedas de que debe hacerse uso para todos los cambios de estas dos plazas, sino tambien que siempre han de ser 8 los reales de plata que se han de emplear para expresar esta relacion. Por el contrario, cuando se diga que el cambio de Madrid sobre Liorna es 128, quiere esto decir que 100 *pezzas* de Liorna valen á la sazon 128 pesos de plata españoles, porque está constantemente establecido no solo que sean monedas de estas dos clases las que se deben emplear para todos los cambios que ocurran entre estas dos plazas, sino tambien que siempre ha de ser 100 el número de *pezzas*. En el primer caso se dice que Madrid da lo *cierto* ó constante por lo *incierto* ó variable, y en el segundo es al contrario: en el primer caso hace Madrid las veces de vendedor; y en el segundo de comprador. Los cambios de las seis primeras plazas mencionadas en nuestra tabla se hallan en el primer caso, y el de la séptima en el segundo.

Dimensiones de la tierra que han servido para la determinacion del nuevo sistema de medidas francesas [1].

El radio del ecuador es de 1144,101 leguas españolas.
El semieje de la tierra es de 1140,676 leguas españolas.
La distancia del polo al ecuador, medida en el meridiano que pasa por París, es de 1794,461 leguas españolas.
Si los grados del meridiano fuesen todos entre sí iguales, cada uno de los 90 grados que se cuentan desde el ecuador al polo seria de 19,938 leguas españolas; y cada uno de los 60 minutos que se consideran en un grado tendria 6645,193 pies españoles.

1 Cuando el autor llama exactas estas dimensiones no habla con exactitud, puesto que no conociéndose aun la verdadera figura de la tierra, para determinar las tales dimensiones fue necesario calcularlas sobre una hipótesi que la observacion podrá muy bien falsificar. Podrán sin embargo mirarse como las mas aproximadas que se conocen á la verdad.

Jorge Jalces.

83
98
21

Cuad.

19/8

155

(355)