# RENATI DES CARTES PRINCIPIA MATHESEOS UNIVERSALIS,

*SEU*

*INTRODUCTIO*

AD

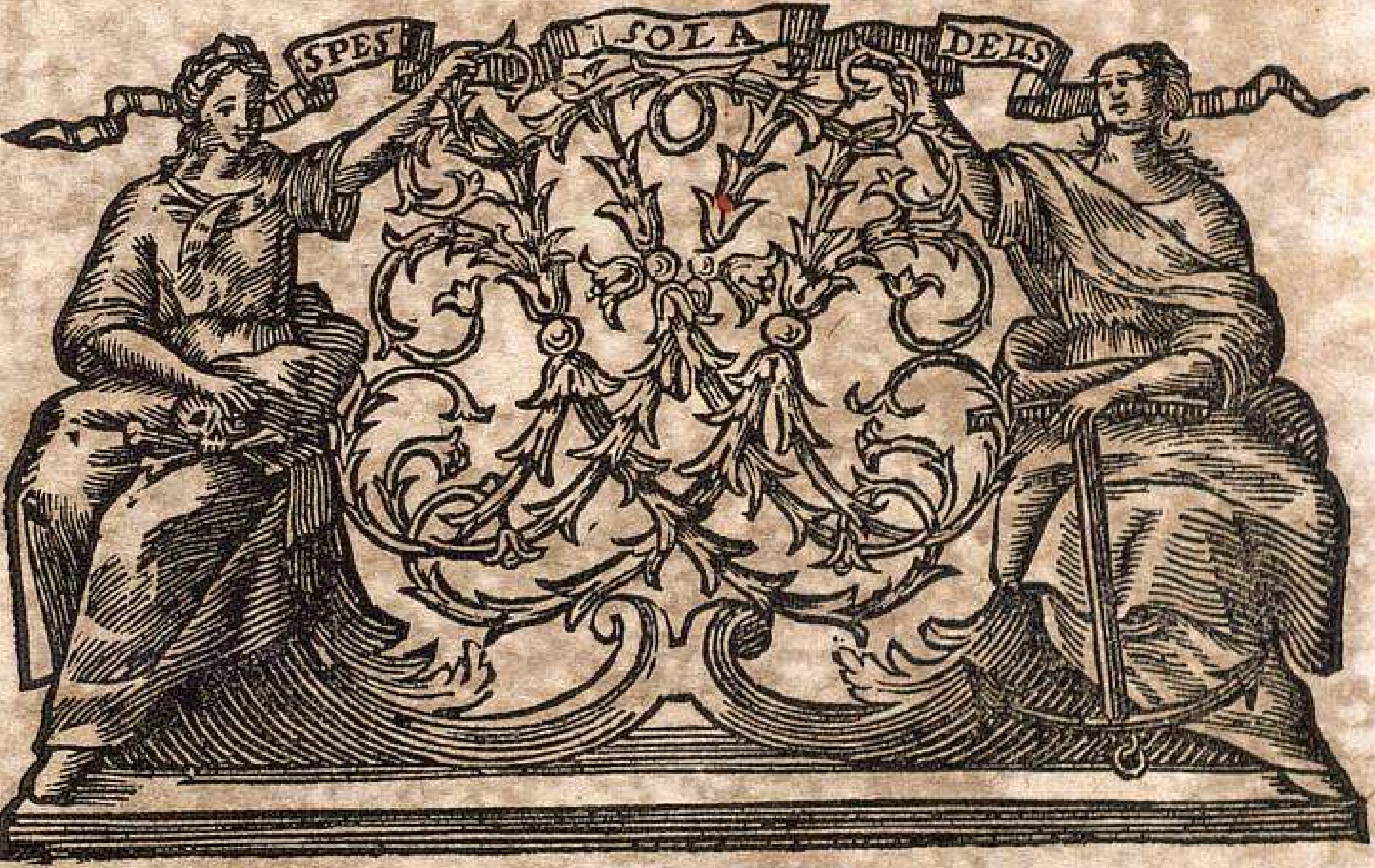
# GEOMETRIÆ METHODUM

Conſcripta

Ab ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

*ACCEDUNT HUIC QUARTÆ EDITIONI NOTÆ QUÆDAM & animadverſiones tumultuariæ in univerſum Opus.*

Cum Gratia & Privilegio Sac. Cæſ. Majeſt.




*FRANCOFURTI AD MOENUM,*

Sumptibus FRIDERICI KNOCHII, Bibliop.

*Anno M DC XCV.*

# LECTORI S.

CUM omnes sapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamque indignum sapientis gravitate atque constantia sit, quàm aut falsum sentire, aut quod non satis exploratum sit, sine ulla dubitatione defendere: nescio quo fato fiat, quòd non operam dent ejusmodi studiorum viam ingredi, quâ mens adsvescat verum à falsis & dubiis distingvere. Quandoquidem enim à teneris adsvescere multum est, egregiè sibi consulerent, si ad Mathesin excolendam ab ineunte ætate animum appellerent. Mathematicas autem disciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari potest, modò consideretur, quidquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmissis necessitate quadam sequi, vel verum, vel dubium, vel falsum, prout præmissæ variis modis sese habuerint: Adeò ut, & si non aliis usibus inserviret Mathesis, tamen vel hoc nomine, ad sui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex ea speraretur emolumentum. Quod cum abundè observatum & usu comprobatum sit à Veteribus, quos plerique nostra ætate ita suspiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidisse videantur, quàm quantum nostrorum ingeniorum acies intueri potest; inter alia mirari subit, omnes ferè, exemplum illorum hac in re deseruisse. Quippe compertum est, antiquos Philosophos non permisisse, ἀγεωμετρήτους scholas suas ingredi, ut ad Sapientiæ studium admitterentur, quique ante non haberent λαβὰς τῆς φιλοσοφίας. Quod sanè propositum, non ratione prudentius, quàm eventu felicius fuit: cum hanc fuisse causam, quòd ad illam pertigerint scientiam, quàm posteritas tantopere miratur: & quò virtute sua nonnulla eniti se posse desperant, conjiciam. Frustra enim spectatur fructus disciplinarum, ab eo, qui earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere potest, qui non solerter rimatur viam, & aditus, qui eò ferunt, negligit. Mathesis autem, cum ex notionibus simplicissimis, cognituque facillimis, ad difficiliora, atque remotissima quæque cognoscenda perducat juniores, qui præconceptis opinionibus vacui non impediuntur varietate rerum, quæ animis provectiorum inhærent; non dubito, quin si ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maximè compositarum atque obscuriorum, cognitionem sit penetratura. Et quoniam Mathesis variis partibus constat, quæ omnes circa quantitatem versantur; res à nostri seculi Luminibus eò redacta est, ut generaliter illæ omnes tractari, & quantitas hæc in universali & abstracto per literas Alphabeti concipi possit. Ita enim, factâ ad omnes quantitatis species applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas distinctè progredi potest. Postquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quàm fructus ullus sperari poterat; opportunè nobis Nobilissimus D. Des-Cartes, insuperabilis ingenii Vir (qui, reclusâ à se, hactenus incognitâ, ad veram sapientiam viâ, post tot seculorum fœdissimam servitutem, omnibus imitando exemplo, ita naturæ mysteria pandit, ut veræ sapientiæ studium, humanarumque scientiarum encyclopædia & perfectio,

*fectio, immaturâ ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum est, non aliâ ratione quàm studio & diligentia evinci possit. Taceo hîc perfectionem, ad quam res Mathematicas hujus Methodi subsidio redegit: cum ipsarum testimonia non tantùm invitos laudumque suarum detractores in illis palmam ei dare cogant, sed etiam quousque, humanum ingenium in iisdem progredi quidve præstare valeat determinent. Verùm enimvero cum omnium magnarum rerum sicut arborum altitudo nos delectet, & radices stirpesque non item: sic multi ad summa pervenire optarent, nisi in elementis hærere opus haberent. Atqui, quemadmodum illa altitudo sine radicibus, stirpibusque esse non potest; ita illi frustra se in id fastigium recipi sperant, quibus cordi non est fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita sint ulla principia, quæ ad adita hujus Methodi ducerent; quid mirum? si multi in ipso limine hæsitaverint, pluresque, quos, re inexpertâ, desperatio in fugam avertit. Et enim nec hujus Methodi Auctor, nec Doctissimi ejus Commentatores à semetipsis impetrare potuerunt, ut bonas horas, quas subtilioribus inventis dicaverant, in edendis, quæ viam ad hanc Methodum sternerent, impenderent. Cum itaque nihil hac in re, omnibus votis, tam à me ipso olim, quàm à multis hodie expetita, præstitum esse repererim: diu multumque inter spem & metum hærens, dolui, tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea desiderari, quæ ad scientiarum incrementa emunctioris naris homines necessariò requiri jam pridem censuerunt. Ego sanè opportunitate mira, ante aliquot annos voti campos factus, postquam ad hasce oras Academiam Illustrem, quæ Leidæ est, accessi, Vir Celeberrimus atque Doctissimus Franciscus à Schooten, Matheseos ibidem Professor publicus, me Artem Analyticam, hancque Methodum, tam eximia fide docuit, ut ad perfectionem*

 *nihil*

*nihil mihi præter ingenium & propriam industriam defuisse crediderim. Quocirca sepositâ privati commodi æstimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem, & quæ propriis usibus destinaveram, publici juris redderem, de elementis hisce, quibus inter alia imbutus eram, evulgandis, cogitare cœpi. Et licèt vererer ne amicitiæ jura, quæ inter nos cum fido semper servari optabam, hac ratione violarem; tamen facilem mihi veniam sperabam, si non nisi officiosa fraude fallerem, quæ gloriæ ejus, qui se bono publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum ingratum testari posset. Ac ne primas quidem spes fortuna destituit: quippe ab ipso, qui nullum erga me benevolentiæ pignus atque indicium omittit, non modò veniam hujus zeli impetravi, sed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemque ingenii & consilii sui porrigere. Operis brevitatem quod attinet, non est, quam displicere cuipiam putem: siquidem copiam exemplorum, quibus ad discendum nihil aptius, nullus (ut opinor) hîc desiderabit; in quibus afferendis ejusmodi delectus est observatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipso Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo sparsim ita sunt disposita, ut, meo judicio, non alio loco meliùs intelligi, simulque prædictis locis illustrandis inservire potuerint, in quem finem, in margine paginarum citationem additam esse apparebit. Adeò ut, quicunque tantùm Arithmeticæ Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, levique numerorum irrationalium notitiâ instructus, in allatis exemplis accuratè examinandis sese exercuerit, se non inutiliter tempus, ubi ad* Geometriam D^{ni.} Des-Cartes *accesserit, consumpsisse experturus sit. Quin imò videbit januam reseratam omni ei, quod ab Algebra & Analysi Geometrica exspectari potest: ideoque se Matheseos Universalis constitutionem animo comprehendisse, neque enim existimo, hisce intellectis, operæ pretium fore, Algebræ vul-*

*vulgaris cognitionem ampliùs exoptare, licèt leviorem ejus notitiam, vel ipse D. Des-Cartes, antehac, ad suæ Geometriæ Methodum intelligendam, requisiverit. Vale.*

CATA-

# CATALOGUS

eorum,

Quæ hoc Opere continentur.

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Matheseos Universalis, seu Introductio ad CARTESIANÆ GEOMETRIÆ Methodum. Conscripta ab ERASMO BARTHOLINO.

FLORIMONDI DE BEAUNE duo Tractatûs posthumi. Alter de Natura & Constitutione, alter de Limitibus Æquationum.

JOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum Linearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.

Notæ & Animadversiones tumultuariæ in universum opus.

PRIN-

# PRINCIPIA MATHESEOS UNIVERSALIS, SEU INTRODUCTIO AD GEOMETRIÆ METHODUM RENATI DES CARTES.

## *De logistica quantitatum simplicium.*

CUm in omni Scientia, ad difficiliorum rerum cognitionem, utile sit à simplicissimis & cognitu facillimis ordiri; haud inconsultum fuerit, ad generalem atque facilem comprehensionem Mathematicarum Scientiarum, quæ omnes circa quantitatem versantur, ad ea primùm attendere, quæ non aliquam ejus speciem excludere, sed eas, quocunque se habeant modo, sub certis notis cuique obviis repræsentare possint. Unde cum in universa illarum Scientiarum constitutione, licèt diversa objecta respiciant, non nisi relationes sive proportiones quædam, quæ in iis reperiuntur, considerentur; consentaneum est rationes atque proportiones illas seorsim spectare, easque literis Alphabeti, utpote notis simplicissimis nobisque cognitissimis, insignire. Neque enim ratio ulla est, quo minùs per *a, b, c,* &c. concipiantur magnitudines *a, b, c,* &c. quàm pondera aut numeri iisdem characteribus designati. Attamen quia tum phantasiæ tum sensibus ipsis, nihil simplicius nec distinctius exhiberi posse occurrit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportiones, quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præstat per prædictas literas

*Vide dissertationem de methodo, parte secunda.*

teras solummodo lineas rectas concipere. Hinc si duæ fuerint quantitates designatæ per $a$ & $b$, intelligentur per ipsas duæ differentes lineæ rectæ, diversæ scilicet longitudinis: ita ut per $a$ intelligatur longitudo seu quantitas unius, & per $b$ longitudo seu quantitas alterius. Non secus atque per $a$ & $a$, aut per $b$ & $b$ duæ intelliguntur lineæ æquales; nisi indicaveris supposuérisve $a$ esse æqualem ipsi $b$, vel $a$ & $b$ ejusdem esse valoris, id quod sic denotatur $a \propto b$. Et sic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua sit aliquoties sumenda, oportet tantùm numerum convenientem ipsi literæ præfigere: Ut ad designandum, lineam $a$ esse bis sumendam, scribo $2a$. Sic & ad designandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipsius $b$, scribo $2b$, $3b$, $4b$, &c. Nec aliter fit si ad designandum semissem, tertiam aut aliam quamcunque partem lineæ $a$, scribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri solet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, &c. sic & duas tertias, tres quartas, &c. ipsius $b$, ita designaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel sic, $\frac{2b}{3}$, $\frac{3b}{4}$, atque ita de aliis.

Jam cum in universa Mathesi operationes omnes ad quinque diversas (vulgò Species dictas) reduci possint, quæ sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum extractio; consequens est ut ostendatur, quâ ratione dictæ operationes per literas sint instituendæ.

## *De Additione quantitatum simplicium.*

IGitur ad addendum lineam $a$ ad lineam $a$, scribo pro summa $2a$: sic & ad addendum $2b$ ad $3b$, scribo $5b$. Lineæ enim eisdem literis si denotantur, oportet tantùm numeros præfixos addere, & summam eidem literæ præfigere. Si verò diversæ fuerint, additio fiet interposito signo $+$, quod denotat plus. Ut si ad lineam $a$ sit addenda linea $b$, scribo $a+b$, hoc est, $a$ plus $b$, quo indicatur $b$ esse additam ipsi $a$, vel adhuc esse addendam. Ubi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, seu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit, si plures in unam summam sunt colligendæ. Ut ad addendum $2b$, $b$, & $3b$, scribo $6b$. Sic & ad addendum $a$, $b$, & $c$, scribo $a+b+c$.

Exem-

*Exempla additionis simplicium.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $2b.$ |
| Add. | $a.$ | $2b.$ | $3d.$ | $b.$ |
| | $a.$ | $3b.$ | $d.$ | $3b.$ |
| Summa | $2a.$ | $5b.$ | $4d.$ | $6b.$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | $a.$ |
| Add. | $a.$ | $a.$ | $3c.$ | $b.$ |
| | $b.$ | $2b.$ | $4d.$ | $c.$ |
| Summa | $a+b.$ | $a+2b.$ | $3c+4d.$ | $a+b+c.$ |

Ubi notandum, in additione literarum $d$ & $3d$, cogitandum esse literam $d$ sibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in sequenti exemplo & similibus est observandum: ut &, cùm plures adduntur diversæ literæ, perinde esse quo ordine scribantur, ut $a+b$, vel $b+a$.

## *De Subtractione quantitatum simplicium.*

JAm verò ad subtrahendum lineam $2a$ à linea $5a$, scribendum est $3a$: siquidem lineæ, quæ iisdem literis sunt designatæ, subducuntur, subtrahendo tantùm à se invicem numeros præfixos. Sic & si $2b$ auferantur à $3b$, , reliquum erit $1b$ seu $b$. Similiter sublato $d$ de $4d$, relinquitur $3d$: At $a$ de $a$ manet $0$ seu nihil.

Quòd si verò lineæ diversis literis notatæ fuerint, subductio fiet interposito signo —, quod denotat minus. Ut si ab $a$ subtrahenda sit $b$, scribo $a-b$, hoc est, $a$ minus $b$, quo indicatur $b$ esse sublatam ex $a$, vel adhuc esse subducendam. Ubi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, hoc est, quæ ex priori est subtrahenda.

Eodem modo, sublatis $4d$ ex $3c$, reliquum erit $3c-4d$.

*Exempla subtractionis simplicium.*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ex | $5a.$ | $3b.$ | $4d.$ | $a.$ | Ex | $a.$ | $3c.$ | $a.$ | $2c.$ |
| subtr. | $2a.$ | $2b.$ | $d.$ | $a.$ | subtr. | $b.$ | $4d.$ | $4b.$ | $d.$ |
| reliq. | $3a.$ | $b.$ | $3d.$ | $0.$ | reliq. | $a-b.$ | $3c-4d.$ | $a-4b.$ | $2c-d.$ |

Unde notandum, in ejusmodi quantitatum subtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex alia subtrahi debet, esse minorem:

hoc est, ad subtrahendum $b$ ex $a$, (ut in superiori exemplo) opùs esse, ut $b$ sit minor quàm $a$. Quòd si autem non proponatur aut constet, utra quantitas sit major aut minor, & tamen subductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: $a = b$, hoc est, $a - b$ vel $b - a$.

## *De Multiplicatione quantitatum simplicium.*

Porrò ad multiplicandum lineam $a$ per lineam $b$, scribo $ab$ vel $ba$. Sic & ad multiplicandum $a$ per $a$ hoc est, $a$ in se, scribo $aa$ seu $a^2$: & $aaa$ seu $a^3$ ad prædictum productum $aa$ adhuc semel multiplicandum per $a$. Adeò ut literæ immediatè sese consequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam esse, indicent. Non secus, si multiplicare velim $a$, $b$ & $c$ per invicem, scribo $abc$, vel $bac$, vel $cba$, &c: & $abb$ seu $ab^2$ vel $b^2a$, ad multiplicandum $a$, $b$, & $b$. Hîc enim, ut in additione, non refert, quo ordine scribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in se, id quod producitur vocatur Quadratum ejusdem numeri, & si productum illud adhuc semel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipsius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque si $a$ multiplicetur per $a$, productum $aa$ seu $a^2$ appellari consuevit $a$ quadratum, seu $a$ duarum dimensionum; & si $aa$ rursus multiplicetur per $a$, producetur $aaa$ seu $a^3$, quod ideo appellari poterit $a$ cubus, seu $a$ trium dimensionum: atque ita $a^4$, $a^5$, $a^6$, &c. dici poterunt $a$ quadrato-quadratum, $a$ surdesolidum, $a$ quadrato-cubus, &c. seu, $a$ habens 4, 5, aut 6. &c. dimensiones.

Sicuti autem numerus aliquis, si in se ducatur, dicitur radix quadrata istius producti seu quadrati: & si adhuc semel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus posterioris producti appellatur, &c; sic & $a$ dicitur radix Quadrata ex $aa$ seu $a^2$, & radix Cubica ex $a^3$, & radix Quadrato-Quadrata ex $a^4$, & radix Sursolida ex $a^5$, & radix Quadrato-Cubica ex $a^6$, atque ita porrò. Idem de reliquis est intelligendum.

Ex quibus constat diligenter esse notandum, quòd magnum sit discrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus est, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo est adscriptus. Ut inter $2a$ & $a^2$, $3a$ & $a^3$, $4a$ & $a^4$, &c. siquidem per $2a$, $3a$, $4a$ &c. simpliciter intelligitur quantitas $a$ bis, ter, quater,

ter, &c. sumta, hoc est, $a$ sibi ipsi toties addita: at verò per $a^2$, $a^3$, $a^4$, &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum, &c. ipsius $a$, hoc est, ipsa quantitas $a$ toties posita & multiplicata.

## *Exempla multiplicationis simplicium.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Multipl. | $a.$ | $a$ | $aa$ | $ab$ | $ab$ | $ab$ | $aa$ | $a^3.$ |
| per | $b.$ | $a$ | $a$ | $c$ | $b$ | $cd$ | $ab$ | $a^3.$ |
| productum | $ab.$ | $aa.$ | $a^3.$ | $abc.$ | $abb.$ | $abcd.$ | $a^3b.$ | $a^6.$ |

Ubi notandum in $a^3b$, producto multiplicationis quantitatum $aa$ & $ab$, numerum ternarium quantitatem præcedentem $a$ respicere, non autem sequentem $b$: quod, cum brevitatis causâ scribatur pro $aaab$, in omnibus similibus casibus quoque est intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum $a^3$, hoc est, $aaa$ per $a^3$ seu $aaa$, producetur $a^6$, hoc est, $aaaaaa$.

Quòd si quantitates occurrant multiplicandæ, quibus numeri, sive integri sive fracti, præfiguntur, oportebit dictos numeros in se invicem ducere, ut in vulgari Arithmetica, & eorum productum præfigere producto, quod exsurgit ex multiplicatione quantitatum dictarum. Ut ad multiplicandum $2a$ per $3b$; multiplicatis 2 per 3, provenit 6, quod si præfigatur ipsi $ab$, producto quantitatum $a$ & $b$ per invicem, erit quæsitum productum $6ab$. Similiter multiplicatis $2b$ per $c$, productum erit $2bc$. nam unitas, quæ hîc ipsi $c$ præfigi subintelligitur, ducta in 2, producit 2.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum $3ab$, hoc est, ter $ab$ per $2cd$, hoc est, bis $cd$, scribatur $6abcd$. Sic &, multiplicatis $\frac{1}{2}aa$ per $\frac{1}{3}ab$, hoc est, semisse ipsius $aa$ per tertiam partem ipsius $ab$, productum fiet $\frac{1}{6}a^3b$, hoc est, $\frac{1}{6}aaab$.

## *Exempla multiplicationis.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Multipl. | $2a$ | $2b$ | $\frac{3}{2}a$ | $3ab$ | $\frac{1}{2}aa$ | $a^3$ | $6a^3.$ |
| per | $3b$ | $c$ | $\frac{1}{2}d$ | $2cd$ | $\frac{1}{3}ab$ | $3b^3$ | $\frac{2}{3}a^3.$ |
| product. | $6ab.$ | $2bc.$ | $\frac{3}{4}ad.$ | $6abcd.$ | $\frac{1}{6}a^3b.$ | $3a^3b^3.$ | $4a^6.$ |

Ubi tandem sciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plurium dimensionum seu literarum; earum tamen additionem atque subtractionem non aliter fieri atque præcedentium.

tium. Ut ad addendum $2ab$ ad $3ab$, ſcribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, ſcribitur $6ab+2bc$. Non ſecus, ad ſubtrahendum $2ab$ de $3ab$, ſcribitur $ab$: & ad ſubtrahendum $2bc$ de $6ab$, ſcribitur $6ab-2bc$. Et ſic de aliis.

## *De Diviſione quantitatum ſimplicium.*

QUoniam verò diviſio reſolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem $ab$ ſeu $ba$ per $a$, opùs tantùm eſſe ex quantitate dividenda $ab$ tollere quantitatem $a$, quæ diviſor eſt, & pro quotiente ſcribere reliquam quantitatem $b$. Eodem modo, ſi dividatur $aa$ per $a$, orietur $a$; & $aaa$ ſeu $a^3$ per $a$, orietur $aa$. Non ſecus diviſâ $abc$ per $a$, fiet $bc$: at per $b$, fiet $ac$: & per $c$, fiet $ab$.

Quòd ſi verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri ſint præfixi; oportet, factâ diviſione quantitatum, ut jam oſtenſum eſt, ſimiliter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

### *Exempla diviſionis ſimplicium.*

$$\begin{matrix}\text{Divid.}\\ \text{per}\end{matrix}\left.\begin{matrix}ab\\ a\end{matrix}\right\}\, b \text{ quot.}\quad \left.\begin{matrix}aa\\ a\end{matrix}\right\}\, a.\quad \left.\begin{matrix}a^3\\ a\end{matrix}\right\}\, aa.\quad \left.\begin{matrix}abc\\ a\end{matrix}\right\}\, bc.\quad \left.\begin{matrix}abc\\ ab\end{matrix}\right\}\, c.\quad \left.\begin{matrix}a^3b\\ ab\end{matrix}\right\}\, aa.\quad \left.\begin{matrix}a^5\\ aa\end{matrix}\right\}\, a^3.$$

$$\begin{matrix}\text{Divid.}\\ \text{per}\end{matrix}\left.\begin{matrix}6ab\\ 2a\end{matrix}\right\}\, 3b.\quad \left.\begin{matrix}\frac{1}{6}a^3b\\ \frac{1}{3}ab\end{matrix}\right\}\, \tfrac{1}{2}aa.\quad \left.\begin{matrix}3a^3b^3\\ 3b^3\end{matrix}\right\}\, 1a^3 \text{ ſeu } a^3.\quad \left.\begin{matrix}3a^3b^3\\ a^3\end{matrix}\right\}\, 3b^3.$$

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ diviſoris præcedenti modo tolli nequeunt; ſubſcribitur Diviſor ipſi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Ut ad dividendum $ab$ per $c$, ſcribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur $ab$ eſſe diviſam per $c$, vel adhuc eſſe dividendam. Sic & ad dividendum $a$ per $b$, ſcribitur $\frac{a}{b}$. ſimiliter diviſâ $abc$ per $de$, quotiens erit $\frac{abc.}{de}$. & ſic de aliis. Quæ quidem quantitates ſic diviſæ appellantur Fractiones.

Eſt verò hìc obiter notandum, diviſis $a$ per $a$, $2b$ per $2b$, ſimilibúſve, quotientem eſſe $1$: ſiquidem quævis quantitas ſe ipſam ſemel continet, ideoque per ſeipſam diviſa, unitatem profert.

## *DE LOGISTICA QUANTITATUM COMPOSITARUM.*

EXplicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & ſubtractione oriuntur quantitates, per ſignum + compoſitæ, aut per ſignum — disjunctæ, ( quæ communiter generali nomine Compoſitæ dicuntur ); conſequens eſt, ut harum quoque operationem deinceps oſtendamus.

## *De Additione quantitatum compoſitarum.*

IGitur ad addendum quantitates Compoſitas, iiſdem literis notatas, oportet conſiderare ſigna + & —, quibus afficiuntur, & notare, ſi eadem fuerint, additionem fieri ut in ſimplicibus, & earum ſummæ præfigi idem ſignum. Ut ad addendum $a+3b$ ad $a+2b$: additis $a$ ad $a$, & $3b$ ad $2b$, ſumma erit $2a+5b$. Eodem modo $2a-b$ additum ad $3a-3b$, facit ſummam $5a-4b$.

Quòd ſi verò ſigna diverſa fuerint, ſubtrahendæ erunt quantitates eiſdem literis denotatæ, ſicut in ſubtractione ſimplicium, & ei quod relinquitur præfigendum eſt ſignum, quo major quantitas afficitur. Ut ſi addendum ſit $3b+5a$ ad $2b-2a$: additis $3b$ ad $2b$, & ſubtractis $2a$ ex $5a$, ſumma erit $5b+3a$. Similiter ſi $a+d$ addatur ad $a-4d$, fiet ſumma $2a-3d$. Ubi patet ſi $2b+a$ addatur ad $3b-a$, ſummam fore $5b$: quantitates enim $+a$ & $-a$, cum propter diverſa ſigna ſint ſubtrahendæ, ſe mutuò tollunt.

Jam ad addendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet tantùm eas ſuis ſignis connectere. Ut ad addendum $a+b$ ad $c-d$, ſcribo $a+b+c-d$: ſiquidem quantitas $c$, & omnis alia cui nullum præponitur ſignum, intelligitur ſibi præfixum habere ſignum +.

### *Exempla additionis compoſitarum.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Add. | $a+3b$ | $2a-b$ | $\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$ | $a^3-\frac{5}{4}abc$ | $aa+2a-3.$ |
| | $a+2b$ | $3a-3b$ | $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}bb$ | $\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc$ | $aa+a-6.$ |
| ſumma | $2a+5b.$ | $5a-4b.$ | $ab+bb.$ | $\frac{5}{3}a^3-2abc.$ | $2aa+3a-9.$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Add. | $3b+5a$ | $a+d.$ | $2b+a.$ | $aa-2ab$ | $3a^3-\frac{1}{3}aab$ | $aa-5a+6.$ |
| | $2b-2a$ | $a-4d.$ | $3b-a.$ | $aa+ab$ | $2a^3+\frac{1}{2}aab$ | $aa+a-6.$ |
| aggr. | $5b+3a.$ | $2a-3d.$ | $5b.$ | $2aa-ab.$ | $5a^3+\frac{1}{6}aab.$ | $2aa-4a.$ |

Add.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Add. Summa | $\begin{cases} a+b \\ c-d \end{cases}$ | $2aa+3ab-bb.$ <br> $5ab-3aa$ | $3abc$ <br> $a^3-abc$ | $a^3+2abb-aab+abc.$ <br> $a^3+aab-3abb-b^3.$ |
| ſeu aggr. | $a+b+c-d.$ | $8ab-aa-bb.$ | $a^3+2abc.$ | $2a^3-abb+abc-b^3.$ |

E quibus manifeſtum fit, ( cum ad addendum $3b+5a$ ad $2b-2a$, ſcribi poſſit $3b+5a+2b-2a$, hoc eſt, $5b+3a$: ſiquidem $+3b$ & $+2b$ faciunt $5b$, & $+5a-2a$ faciunt $+3a$) quantitates eiſdem literis denotatas, quando diverſa habent ſigna, ſubtrahendas eſſe, & ſummæ aſcribendum eſſe ſignum majoris quantitatis.

## *De Subtractione quantitatum compoſitarum.*

POrrò ad ſubtrahendum quantitates compoſitas, quæ eiſdem literis ſunt denotatæ, ſciendum eſt: ſi ſigna eadem fuerint, & quantitas è qua ſubtractio fieri debet, major ſit quantitate ſubducendâ; tum ſubtractionem fieri ut in ſimplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum eſſe idem ſignum. Ut ſi ſubtrahatur $a+2b$ ex $2a+5b$: ( ſubtractis $a$ ex $2a$, & $2b$ ex $5b$, ) remanet $a+3b$. Non ſecus ſi ſubtrahatur $3a-3b$ ex $5a-4b$, reliquum erit $2a-b$.

Si verò ſigna eadem fuerint, & quantitas à qua ſubtractio fieri debet quantitate ſubducendâ minor ſit; oportet, ſubtractâ minore ex majore, reſiduo ſignum contrarium præponere. Ut ſi ſubtrahendum ſit $a+3b$ ab $3a+2b$: ſubtractis $a$ ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, reſiduum erit $2a-b$. Similiter, ſublatis $a-3b$ ex $2a-b$, relinquitur $a+2b$.

Quòd ſi quantitates iiſdem literis deſignatæ, atque ad ſubtrahendum propoſitæ, diverſa ſigna habeant; erunt ipſæ addendæ, ut in ſimplicibus, & ſummæ præfigendum ſignum quantitatis, à qua ſubductio fieri debet. Ut ſi velimus ſubtrahere $a-b$ ex $2a+b$: ſubtractis $a$ ex $2a$, additiſque $b$ ad $b$, reſiduum erit $a+2b$. Eodem modo, $2a+5d$ ſubductum à $3a-2d$, relinquet $a-7d$.

Cæterùm ad ſubtrahendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet quantitates ſubducendas, variatis ſignis connectere cum iis, à quibus ſubductio fieri debet. Ut ſi ſubtrahi debeat $c-d$ ab $a+b$; erit differentia ſeu reſiduum $a+b-c+d$: variatis nempe ſignis quantitatum $c$ & $d$.

*Exempla subtractionis compositarum.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ex | $2a+5b$ | $5a-4b$ | $\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$ | $a^3-\frac{5}{4}abc+abb-b^3$ | $2aa+3a-9.$ |
| Subtr. | $a+2b$ | $3a-3b$ | $\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$ | $\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc+abb-b^3$ | $aa+2a-3.$ |
| Reliq. | $a+3b.$ | $2a-b.$ | $\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb.$ | $\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}abc.$ | $aa+a-6.$ |
| Ex | $3a+2b$ | $2a-b$ | $2aa-ab$ | $5a^3+\frac{1}{6}aab-\frac{2}{3}abb$ | $3aa-2a+6.$ |
| Subtr. | $a+3b$ | $a-3b$ | $aa-2ab$ | $2a^3+\frac{1}{2}aab-abb$ | $2aa-3a+9.$ |
| Resid. | $2a-b.$ | $a+2b.$ | $aa+ab.$ | $3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{1}{3}abb.$ | $aa+a-3.$ |
| Ex | $2a+b$ | $3a-2d$ | $8ab-aa$ | $3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{2}{3}abb-b^3$ | $3aa-2a+6.$ |
| Subtr. | $a-b$ | $2a+5d$ | $2aa-3ab$ | $-2a^3+\frac{2}{3}aab$ | $aa+a-3.$ |
| Diff. | $a+2b.$ | $a-7d.$ | $11ab-3aa.$ | $5a^3-aab+\frac{2}{3}abb-b^3.$ | $2aa-3a+9.$ |
| Ex | | $a+b$ | $2aa-4a$ | $3abc$ | $a^3+aab-abb-b^3.$ |
| Subtr. | | $c-d$ | $aa+a-6$ | $a^3-abc$ | $aab-{}^2a^3+c^3-abb.$ |
| Rel. resid. seu diff. | | $a+b-c+d.$ | $aa-5a+6.$ | $4abc-a^3.$ | $3a^3-b^3-c^3.$ |

E quibus perspicuum fit (cùm ad subtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ scribi possit $3a+2b-a-3b$, hoc est, $2a-b$, subtractis nempe $a$ ex $3a$ & $2b$ ex $3b$) : quantitates eisdem literis denotatas, quando eadem habent signa, sed quantitates subducendæ aliis sunt majores, subtrahendas esse, & relicto præponendum esse signum contrarium.

Similiter, quoniam ad subtrahendum $a-b$ ex $2a+b$ scribere possum $2a+b-a+b$, hoc est, $a+2b$, (subtrahendo videlicet $a$ à $2a$, & addendo $b$ ad $b$) patet, quâ ratione, quantitates eisdem literis designatæ, cùm diversa habuerint signa, sint addendæ, & summæ præfigendum sit signum ejus, à quâ subtractio fieri debet. Quòd autem subtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, scribendum sit $2a+b-a+b$, variatis nempe signis quantitatum subducendarum, inde manifestum fit; quòd ad subtrahendum $a$ ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote subducendo quantitatem $a$, præponendo ei signum $-$, ut in subtractione simplicium est dictum: at quoniam subducendo quantitatem $a$ ex $2a+b$, plus justo tollitur, siquidem non $a$ absolutè tollendum proponitur, sed diminutum quantitate $b$; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor sit quàm justa differentia, quantitate $b$: adeoque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem $b$, & scribere $2a+b-a+b$, hoc est, $a+2b$. Et sic de aliis.

## *De Multiplicatione quantitatum compositarum.*

POst hæc, ad multiplicandum quantitates compositas, operatio institui potest ad modum Arithmeticæ vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in se invicem, ut in simplicibus est ostensum, atque producta simul addere. Quod autem ad signa $+$ & $-$ attinet iisdem præfigenda, sciendum est: eadem signa (hoc est $+$ per $+$, vel $-$ per $-$) facere signum $+$, diversa verò (hoc est $+$ per $-$, vel $-$ per $+$) facere $-$. Ut ad multiplicandum $a+b$ per $c$: multiplicatis $+a$ per $+c$, & $+b$ per $+c$, fiunt $+ac$, & $+bc$: quibus additis, fit productum $+ac+bc$, seu $ac+bc$. Sic si multiplicandum sit $a-b$ per $c$, producetur $ac-bc$.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum proponatur $a+b$ per $c+d$: multiplicatis enim $a+b$ per $c$, ut ante; & rursus $a+b$ per $d$ (siquidem $a+b$ non tantùm per $c$, sed etiam per $d$ multiplicari debet): fiet $ac+bc+ad+bd$. Non secus ad multiplicandum $a-b$ per $c-d$ scribitur $ac-ad-bc+bd$: multiplicatis nempe primùm $a-b$ per $+c$, fit $+ac-bc$: deinde $a-b$ per $-d$, fit $-ad+bd$. quippe $+a$ per $-d$, producit $-ad$: at $-b$ per $-d$ producit $+bd$, juxta regulam. Et sic de aliis. Nec refert utrùm à dextra an verò à sinistra initium fiat, sicut sequentibus exemplis manifestum fiet.

### *Exempla multiplicationis compositarum.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mult. | $a+b$ | $a-b$ | $a+b$ | $a-b$ | $a+b$ |
| per | $c$ | $c$ | $c+d$ | $c-d$ | $a+b$ |
| prod. | $ac+bc$. | $ac-cb$. | $ac+bc$ | $ac-bc$ | $+ab+bb$ |
| | | | $+ad+bd$ | $-ad+bd$ | $aa+ab$ |
| product. | | | $ac+bc+ad+bd$. | $ac-bc-ad+bd$. | $aa+{}^2ab+bb$. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Multipl. | $a-b$ | $a+b$ | $aa-2ab+bb$ | $aa-ab+bb$ |
| per | $a-b$ | $a-b$ | $a-b$ | $a+b$ |
| | $-ab+bb$ | $aa+ab$ | $-aab+{}^2abb-b^3$ | $+aab-abb+b^3$ |
| | $aa-ab$ | $-ab-bb$ | $a^3-2aab+abb$ | $a^3-aab+abb$. |
| prod. | $aa-{}^2ab+bb$. | $aa-bb$. | $a^3-{}^3aab+{}^3abb-b^3$. | $a^3+b^3$. |

Mult.

$$\begin{array}{lr} \text{Mult.} & 3dd + 4de + ee \\ \text{per} & 3dd - ee \\ \hline & 9d^4 + 12d^3e + 3ddee \\ & -3ddee - 4de^3 - e^4 \\ \hline \text{product.} & 9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a^3 + \tfrac{1}{2}aab + \tfrac{2}{3}abb \\ \tfrac{2}{3}ab - \tfrac{1}{2}aa \\ \hline -a^5 - \tfrac{1}{4}a^4b - \tfrac{1}{3}a^3bb \\ + \tfrac{4}{3}a^4b + \tfrac{1}{3}a^3bb + \tfrac{4}{9}aab^3 \\ \hline \tfrac{13}{12}a^4b + \tfrac{4}{9}aab^3 - a^5. \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{Multipl.} & 4a^3 + 3aa - 2a + 1 \\ \text{per} & aa - 5a + 6 \\ \hline & + 24a^3 + 18aa - 12a + 6 \\ & -20a^4 - 15a^3 + 10aa - 5a \\ & + 4a^5 + 3a^4 - 2a^3 + 1aa \\ \hline \text{product.} & 4a^5 - 17a^4 + 7a^3 + 29aa - 17a + 6 \end{array}$$

Cæterùm advertendum hìc eſt, non raro utile eſſe, multiplicationem hoc modo non inſtituere, ſed tantummodo eam innuere interſerendo voculam *in* vel M. Ut ad multiplicandum $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ per $\overline{aa - 5a + 6}$, ſcribo $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ in $\overline{aa - 5a + 6}$, vel $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ M $\overline{aa - 5a + 6}$.

Quòd autem $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ faciat $-$, ſic patet. Eſto $a - b$ multiplicandum per $c$, & ſit $a - b \infty e$: hinc ſi utrobique addatur $b$, fiet $a \infty b + e$. Jam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo ſi utrinque multiplicetur per $c$, erit $ac \infty bc + ec$, hoc eſt, auferendo utrinque $bc$, erit $ac - bc \infty ec$. Quocirca cum ſtatuatur $a - b \infty e$, & utrâque parte ductâ in $c$, producatur $ac - bc \infty ec$; perſpicuum fit, $-b$ ductum in $+c$, producere $-bc$.

Nec aliter oſtendetur $-$ per $-$ multiplicatum producere $+$. Etenim ſi $a - b$ multiplicandum ſit per $c - d$: ponendo, ut ante, $a - b \infty e$, erit productum ex $a - b$ in $c - d$ æquale producto ex $e$ in $c - d$ vel $c - d$ in $e$: id eſt, $ce - de$. Sed $ce$, ut ſupra, æquatur $ac - bc$: unde $ac - bc - de$ æquabitur producto ex $a - b$ in $c - d$. Porrò cum $a - b$ æqualis ſit poſita ipſi $e$, & utrâque parte ductâ in $d$, productum $ad - bd$ æquetur producto $de$: hinc ſi ex $ac - bc$ ſubtrahatur $ad - bd$ loco $de$, ei æquale; erit juxta regulam ſubtractionis $ac - bc - ad + bd$ productum quæſitum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

## De Divisione quantitatum compositarum.

PRæterea, ad dividendum quantitates compositas, operatio non absimilis erit ei, quâ in Arithmetica vulgari duo integri numeri per se invicem dividuntur. Quod autem signa $+$ & $-$ concernit, sciendum est, si dividatur $+$ per $+$, aut $-$ per $-$, semper oriri $+$; at si $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ dividatur, semper oriri $-$. omnino ut in multiplicatione. Operationem autem sive à dextra sive à sinistra incipias perinde erit. Ut ad dividendum $ac+bc$ per $c$: divisis $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, fiunt ut in simplicibus est ostensum $+a$ & $+b$, unde quotiens quæsitus erit $a+b$. Similiter si dividatur $ac-cb$ per $c$, orietur $a-b$: divisis enim $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-cb$ per $+c$, fit $-b$. Non dissimili ratione dividitur $ac+ad+bc+bd$ per $c+d$, & fit $a+b$. Cujus operatio talis est.

$$\begin{array}{lcccc} \text{Divid.} & ac+ & ad+ & bc+ & bd \\ \text{per } c+d) & \underline{ac}+ & \underline{ad}+ & \underline{bc}+ & \underline{bd} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Quotiens} & +a+b. \end{array} \qquad \frac{+ac}{+c}\Big|+a. \quad \frac{+bc}{+c}\Big|+b.$$

Diviso $ac$ per $c$, (ut in simplicibus) fit $a$, scribendum sub linea in quotiente. hinc multiplicato divisore $c+d$ per quotientem inventum $a$, productum $ac+ad$ ex dividendo auferatur, scribendo partes ejusdem denominationis sub invicem, & reliquum sub linea infra ductâ. Unde cum subducto $ac$ ex $ac$, & $ad$ ex $ad$ maneat nihil, scribitur sub linea ducta o. Deinde diviso $+bc$ per $+c$, fit $+b$, ascribendum priori quotienti. unde multiplicato divisore $c+d$ per hunc quotientem $b$, fit productum $+bc+bd$. id quod si scribatur, ut ante, sub dividendo, & fiat subductio; erit pro reliquo sub linea scribendum o. Et peracta erit divisio.

$$\begin{array}{rcccc} \text{Eodem modo ad dividendum} & ac- & ad- & bc+ & bd \\ \text{per } c-d:) & \underline{ac}- & \underline{ad}- & \underline{bc}+ & \underline{bd} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{Erit quotiens} & +a-b. \end{array} \qquad \frac{+ac}{+c}\Big|+a \quad \frac{+bc}{+c}\Big|-b$$

Divido primùm $ac$ per $c$, & fit $a$, scribendum sub linea in quotiente. Jam multiplicato divisore $c-d$ per $+a$, fit productum

$ac-$

$ac - ad$, ſubducendum ex dividendo, & relinquitur o. Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, ſub linea ſcribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato diviſore $c - d$ per $-b$, fit productum $-bc + bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet diviſionem eſſe ad finem perductam, & quotientem eſſe $a - b$.

Sic etiam ad dividendum $aa - 2ab + bb$

$$\begin{array}{rl} \text{per } a - b:) & \underline{aa} - \underline{ab} \\ & \mathrm{o} - ab \\ & \underline{-ab} + \underline{bb} \\ & \quad \mathrm{o} \quad\;\; \mathrm{o} \\ \hline \text{fit quotiens} & a - b. \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Divido primùm $aa$ per $a$, & oritur $a$, ſcribendum ſub linea in quotiente. Unde multiplicato diviſore $a - b$ per $a$, & ablato producto $aa - ab$ ex dividendo, ſcribendum erit reliquum $-ab$ ſub linea ducta infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, ſcribendum ſub linea in quotiente. Tum ducto diviſore $a - b$ in $-b$, fit productum $-ab + bb$, quod ſublatum à reliquo dividendi relinquit o. Et erit operatio finita, ac quotiens quæſitus $a - b$.

Eâdem ratione ſi dividendum ſit $aa - bb$ per $a + b$.

$$\begin{array}{lr|l} \text{Divid.} & aa - bb & -ab \\ \text{Diviſ. } a + b\,) & \underline{aa} - \underline{bb} & \underline{-ab} \\ & \mathrm{o} \qquad \mathrm{o} & \mathrm{o} \\ \hline \text{Quotiens} & a - b & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Incipiendo rurſus à primo termino, divido $aa$ per $a$, & habebitur $a$, ſcribendum ſub linea in quotiente. Unde multiplicato diviſore $a + b$ per quotientem inventum $a$, producetur $aa + ab$, quod ſublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hic terminus præter ſuperſtitem $-bb$ ad dividendum huc acceſſit, ideo poſt linem ei adſcribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum acceſſit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente ſub linea ſcribendum. Quo facto, ſi multiplicetur diviſor $a + b$ per hunc quotientem $-b$, exſurget $-ab - bb$ ad ſubtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum poſt ſubtractionem relinquat o; liquet absolutam esse operationem, & quotientem fore $a - b$.

Nec aliter se res habet si dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, & incipiatur ab ultimo termino.

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{Dividend.} & a^3 + b^3 & -abb & +aab \\
\text{Divisor } a+b) & +\underline{a^3} + \underline{b^3} & -\underline{abb} & +\underline{aab} \\
 & \text{o} \quad \text{o} & \text{o} & \text{o} \\
\hline
\text{Quotiens} & +aa - ab + bb. & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
b^3 & bb \\
b & \\
-abb & -ab \\
+b & \\
+aab & +aa \\
+b &
\end{array}
$$

Etenim diviso $+b^3$ per $+b$, fit $+bb$, scribendum in quotiente. tum ducto divisore $a+b$ in $+bb$, producitur $+abb+b^3$: Id quod si subtrahatur ex dividendo, relinquetur $-abb$. Deinde diviso $-abb$ per $+b$, oritur $-ab$, scribendum in quotiente, quo multiplicato per divisorem $a+b$ exsurgit $-aab-abb$, ad subtrahendum ex reliquo dividendi, eritque residuum $+aab$. Denique diviso $+aab$ per $+b$, prodibit $+aa$ scribendum in quotiente. unde si multiplicetur divisor $a+b$ per $+aa$, & productum $+a^3+aab$ auferatur ex residuo dividendi, erit reliquum o. Id quod ostendit, diviso $a^3+b^3$ per $a+b$, oriri $aa-ab+bb$, quod erat faciendum.

*Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberiorem exercitationem divisionis compositarum.*

$$
\begin{array}{lrrrr}
\text{Dividend.} & a^3 & -3aab & +3abb & -b^3 \\
\text{Divisor } a-b.) & & & +\underline{abb} & -\underline{b^3} \\
 & & & +2abb & \text{o} \\
 & & -\underline{2aab} & +\underline{2abb} & \\
 & & -aab & \text{o} & \\
 & \underline{a^3} & -\underline{aab} & & \\
 & \text{o} & \text{o} & & \\
\hline
\text{Quotiens} & +aa & -2ab & +bb. &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-b^3 & +bb \\
-b & \\
+2abb & -2ab \\
-b & \\
-aab & +aa \\
-b &
\end{array}
$$

Divi-

$$\begin{array}{ll} \text{Dividend.} & 9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4 \mid -3ddee \\ \text{Divis. } 3dd - ee) & 9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4 \mid -3ddee \\ & \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Quotiens} & +4de + 3dd + ee \end{array}$$

$$\frac{-e^4}{-ee} \Big| +ee \qquad \frac{-3ddee}{-ee} \Big| +3dd. \qquad \frac{-4de^3}{-ee} \Big| +4de.$$

---

$$\begin{array}{ll} \text{Dividend.} & \tfrac{13}{12}a^4b + \tfrac{4}{9}aab^3 - a^5 \mid -\tfrac{1}{3}a^3bb \\ \text{Divis. } \tfrac{2}{3}ab - \tfrac{1}{2}aa) & +\tfrac{4}{3}a^4b + \tfrac{4}{9}aab^3 - a^5 \mid -\tfrac{1}{3}a^3bb \\ & -\tfrac{1}{4}a^4b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ & -\tfrac{1}{4}a^4b \\ & \quad 0 \\ \text{Quotiens} & +\tfrac{2}{3}abb + \tfrac{1}{2}aab + 2a^3. \end{array}$$

$$\frac{-a^5}{-\tfrac{1}{2}aa} \Big| +2a^3. \qquad \frac{-\tfrac{1}{4}a^4b}{-\tfrac{1}{2}aa} \Big| +\tfrac{1}{2}aab. \qquad \frac{-\tfrac{1}{3}a^3bb}{-\tfrac{1}{2}aa} \Big| +\tfrac{2}{3}abb$$

---

$$\begin{array}{ll} \text{Divid.} & d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbdd \mid -b^3d \mid -aabd \\ \text{Div. } d+b) & d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbdd \mid -b^3d \mid -aabd \\ & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Quotiens} & +d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab. \end{array}$$

Pag. 340. lin. 4.

$$\frac{d^4}{d} \Big| d^3. \qquad \frac{-bd^3}{+d} \Big| -bdd. \qquad \frac{+bbdd}{+d} \Big| +bbd. \qquad \frac{-b^3d}{+d} \Big| -b^3.$$

$$\frac{+2aady}{+d} \Big| +2aay. \qquad \frac{+aadd}{+d} \Big| +aad. \qquad \frac{-aabd}{+d} \Big| aab.$$

---

$$\begin{array}{ll} \text{Dividend.} & +y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \\ \text{Divisor } yy - 16) & +y^6 \mid +8y^4 + 4yy - 64 \\ & 0 - 16y^4 - 128yy \quad 0 \\ & \quad -16y^4 - 128yy \\ & \qquad 0 \qquad 0 \\ \text{Quotiens} & +1y^4 + 8yy + 4. \end{array}$$

Pag. 77.

$$\frac{-64}{-16} \Big| +4. \qquad \frac{-128yy}{-16} \Big| +8yy. \qquad \frac{-16y^4}{-16} \Big| +1y^4.$$

Divi-

Pag. 78.

$$\begin{array}{lllllllll|l}
\text{Dividend.} & +y^6 & +aay^4 & -2ccy^4 & -a^4yy & +c^4yy & -a^6 & -2a^4cc & -aac^4 & +2aaccyy \\
\text{Div. } yy-aa-cc) & +y^6 & -aay^4 & -ccy^4 & -2a^4yy & +c^4yy & -a^6 & -a^4cc & -aac^4 & +aaccyy \\
\hline
 & \circ & +2aay^4 & -ccy^4 & +a^4yy & \circ & \circ & -a^4cc & \circ & +aaccyy \\
 & & +2aay^4 & -ccy^4 & +a^4yy & & & -a^4cc & & +aaccyy \\
\hline
 & & \circ & \circ & \circ & & & \circ & & \circ
\end{array}$$

Quotiens $+y^4+2aayy-ccyy+a^4+aacc.$

$$\frac{+y^6}{+yy}\Big|+y^4. \quad \frac{+2aay^4}{+yy}\Big|+2aayy. \quad \frac{-ccy^4}{+yy}\Big|-ccyy$$

$$\frac{+a^4yy}{+yy}\Big|+a^4. \quad \frac{+aaccyy}{+yy}\Big|+aacc.$$

Pag. 380. lin. 15.

$$\begin{array}{lllllll|l}
\text{Dividend.} & +\tfrac{1}{4}q & -\tfrac{1}{4}fq & +f^3uuq & -fuuq & -4f^4u^4q & +4f^3u^4q & +ffuuq \\
\text{Div. } \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}f-ffuu+f^3uu) & \tfrac{1}{4}q & -\tfrac{1}{4}fq & +f^3uuq & -fuuq & -4f^4u^4q & +4f^3u^4q & +ffuuq \\
\hline
 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ
\end{array}$$

Quotiens $+q-4fuuq.$

$$\frac{+\frac{1}{4}q}{+\frac{1}{4}}\Big|+q. \qquad \frac{-fuuq}{+\frac{1}{4}}\Big|-4fuuq.$$

Quòd ſi quantitates dividendæ occurrant, quæ præcedenti modo dividi nequeunt, ſubſcribendus erit diviſor ipſi dividendo, interjectâ lineolâ, ſicut in fractionibus vulgaribus. Ut ad dividendum $ad-ae$ per $d+e$, ſcribo pro quotiente $\frac{ad-ae}{d+e}$. quo indicatur $ad-ae$ diviſum eſſe per $d+e$, vel adhuc eſſe dividendum. Sic & ſi $bb+bd+cc$ dividatur per $b+d$, fit quotiens ſeu fractio $\frac{bb+bd+cc}{b+d}$, hoc eſt, $b+\frac{cc}{b+d}$. Quippe ſæpe conducit, ut in Arithmetica vulgari, diviſionem, quantùm fieri poteſt, inſtituere, & quod ſupereſt inſtar fractionis quotienti adſcribere. Et tantum de diviſione.

## *De extractione radicis.*

Quoniam autem de Radicis Extractione, quæ pro diviſionis ſpecie haberi poteſt, agendum reſtat, ſciendum eſt, ejus operationem non eſſe diverſam ab illa, quâ in Arithmetica vulgari radix ex dato aliquo numero elicitur.

Etenim

Etenim ut $a$ multiplicatum per $a$ facit $aa$, seu $a$ quadratum, cujus radix seu latus dicitur $a$; sic & radice quadratâ extractâ ex $aa$ proveniet rursus $a$. Similiter cum $aa$, hoc est, $a$ quadratum multiplicatum per $a$ producat $a^3$ seu cubum ex $a$; ita etiam extractâ radice cubicâ ex $a^3$, fiet $a$. Et sic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit si ex quantitatibus compositis radix sit extrahenda. Sicut enim ex quantitatibus simplicibus radicis extractio non secus se habet atque extractio radicis ex aliquo numero, quæ tantùm unius sit characteris: ita radix, quantitas existens composita, non aliter extrahetur, ac si ex aliquo numero radix, quæ pluribus constet characteribus, eliceretur.

Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $aa+2ab+bb$: extraho primùm radicem ex $aa$, & fit $a$, quæ in se multiplicata & ab $aa$ ablata relinquit o. Deinde multiplicato $a$ per 2, divido $+2ab$

| | |
|---|---|
| Quadratum | $aa+2ab+bb$ |
| | $aa+2ab+bb$ |
| | o o o |
| Radix | $a+b$ |
| Divisor | $2a$ |

per $2a$, & fit $+b$: quod adscribo priori radici inventæ $a$. Hinc si ducatur $2a$ in $b$, fit $+2ab$, quod sublatum ex $2ab$ relinquit o. Similiter si multiplicetur $b$ in se, fiet $+bb$; quâ itidem ex $+bb$ ablatâ, remanebit o. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quæsita $a+b$. Et sic de aliis.

*Exempla extractionis radicum ex compositis.*

| | |
|---|---|
| Quadratum | $a^4-2aabb+b^4$ |
| Radix | $aa-bb$ |
| Divisor | $2aa$ |

---

| | |
|---|---|
| Quadratum | $64xx-160x+100$ |
| Radix | $8x-10$ |
| Divisor | $16x$ |

Quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$

$\underline{aa}+\underline{2ac}+\underline{cc}-\underline{2ab}-\underline{2bc}+\underline{bb}$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Radix $a+c-b$

Primus divisor $2a$

Secundus divisor $2a+2c$

Quadratum $aa$

Radix $a$

$$\begin{array}{l} a+c \\ \text{per } \underline{2} \\ 2a+2c, \end{array}$$ secundus divisor.

$$\begin{array}{r} a \\ \text{per } \underline{2} \\ \text{Primus divisor } 2a \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \\ \underline{a} \\ aa \end{array} \qquad \begin{array}{r} -2ab \\ +2a \end{array}\Big|\, -b$$ quot. secundus.

$$\begin{array}{r} +2ac \\ +2a \end{array}\Big|\, +c$$ quotus primus

$$\begin{array}{r} 2a+2c \\ -b \\ \hline -2ab-2bc. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a \\ +c \\ \hline +2ac \end{array} \qquad \begin{array}{c} c \\ c \\ \hline cc. \end{array} \qquad \begin{array}{r} -b \\ -b \\ \hline +bb \end{array}$$

---

Cubus $a^3+3aab+3abb+b^3$

Radix $a+b$

Divisor $3aa$

$$\begin{array}{r} +3aab \\ +3aa \end{array}\Big|\, +b.$$

---

Cub. $27x^6-54x^5+171x^4-188x^3+285xx-150x+125$ Cub. $27x^6$

$\underline{27x^6}-\underline{54x^5}+\underline{36x^4}-\underline{8x^3}+\underline{60xx}-\underline{150x}+\underline{125}$ Rad. $3xx.$

$0 \quad 0+135x^4-180x^3+225xx \quad 0 \quad 0$ $\quad 3xx$

$+\underline{135x^4}-\underline{180x^3}+\underline{225xx}$ $\quad \underline{3xx}$

$0 \quad 0 \quad 0$ $\quad 9x^4.$

Radix $3xx-2x+5.$

per $\underline{3}$

$27x^4.$ 1. div.

Primus divis. $27x^4$

Secundus divisor $27x^4-36x^3+12xx$

$$\begin{array}{r} -54x^5 \\ +27x^4 \end{array}\Big|\, -2x$$ quot. primus.

$-2x$

$$
\begin{array}{r}
+27x^4 \\
-2x \\
\hline
-54x^5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-2x \\
-2x \\
\hline
+4xx \\
+3xx \\
\hline
+12x^4 \\
\text{per } 3 \\
\hline
+36x^4.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
-2x \\
-2x \\
\hline
+4xx \\
-2x \\
\hline
-8x^3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3xx-2x \\
3xx-2x \\
\hline
-6x^3+4xx \\
9x^4-6x^3 \qquad \\
\hline
9x^4-12x^3+4xx \\
\text{per } \qquad 3 \\
\hline
27x^4-36x^3+12xx.
\end{array}
$$

Secund. div.

$$
\begin{array}{r|l}
+135x^4 & +5 \text{ quotus secund.} \\
+27x^4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
+5 \\
+5 \\
\hline
+25 \\
+3xx-2x \\
\hline
+75xx-50x \\
\text{per } 3 \\
\hline
+225xx-150x.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
+5 \\
+5 \\
\hline
+25 \\
+5 \\
\hline
+125.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
+27x^4-36x^3+12xx \\
+\quad 5 \\
\hline
+135x^4-180x^3+60xx.
\end{array}
$$

Cæterùm si quantitates, ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint, ut radix prædicto modo inveniri non possit, designabitur ipsa præfigendo quantitatibus propositis signum $\sqrt{}$. Ut ad extrahendum radicem quadratam ex $aq$, scribo $\sqrt{aq}$; quo indicatur radicem quadratam ex $aq$ esse extractam, vel adhuc esse extrahendam. Sic & $\sqrt{aa+bb}$ designabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extr[illegible] radicem cubicam ex $aaq$, scribo [illegible] ut & $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex $a^3-b^3+abb$. Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ seu Irrationales, ad modum numerorum surdorum seu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Ubi notandum, signum $\sqrt{}$, vocari Signum Radicale, atque in genere usurpari ad denotandam quamcunque radicem, sive Quadratam, sive Cubicam, sive Quadrato-quadratam, &c; sed ad illam distinguendam, communiter scribi $\sqrt{Q}$, vel etiam simpliciter $\sqrt{}$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\sqrt{C}$, ad denotandam radicem Cubicam: & $\sqrt{QQ}$ seu $\sqrt{}\sqrt{}$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam, &c. quæ radices etiam sic designantur: $\sqrt{(2)}$, $\sqrt{(3)}$, $\sqrt{(4)}$, &c; atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\sqrt{\mathfrak{z}}$, $\sqrt{\mathfrak{c}}$, $\sqrt{\mathfrak{zz}}$, &c.

## De logistica fractionum.

QUandoquidem ex divisione quantitatum simplicium & compositarum ostensum est oriri Fractiones, sicut in Arithmetica vulgari, quarum operatio easdem leges sequitur atque numerorum fractorum vulgarium; satis erit, si suppositis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc, cum per fractionem quamlibet designetur semper divisionem aliquam esse faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur; facile constat, si numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam designari unitatem. Ut $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & similes. Unde patet, quânam ratione unitas denotari possit in formam fractionis, cujus denominator sit is, qui requiritur.

Quòd si verò $ab$, $aa-bb$, &c. in formam fractionis designare velimus, oportet tantùm, assumpto $ab$ & $aa-bb$, &c. tanquam numeratore fractionis, subscribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$, &c.

Porrò si quantitas aliqua, ut $a$, designanda sit in formam fractionis, cujus denominator ea sit, quæ præscribitur, ut $d$, aut $a+b$, &c; oportet, multip[illegible] per $d$, aut per $a+b$, scribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$, &c.

Non aliter fit, si $a+\frac{aa}{d}$ sit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato $a$ per denominatorem $d$, addatur producto $ad$ numerator $aa$, & summæ $ad+aa$ subscribatur denominator $d$, habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic &, $\frac{aa}{d}-a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud secus si $a+b$ $+\frac{aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterùm notandum hîc, cum ad dividendum $aa$ per $bb$, scribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem sive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per divisorem seu denominatorem $bb$, pro-

producto scribendum esse numeratorem $aa$. Non secus si $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a-b$, productum erit $bb$. Unde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum est $a$; superest tantùm ut hoc productum adhuc multiplicetur per $a$, ut habeatur quæsitum productum $aa$. Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cum multiplicato $\frac{1}{2}$ per $2$, fiat $1$; hinc multiplicandum tantùm restat $1$ per $ab$, & fit productum quæsitum $1ab$ seu $ab$. Et sic de aliis.

## *De Reductione fractionum ad simpliciores.*

Jam ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad simpliciorem; elisâ communi literâ $c$, quæ tam in numeratore quàm in denominatore reperitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{ab3}{abc}$: elisis literis $a$, $b$, numeratoris atque denominatoris, hoc est, diviso tam $ab^3$ quàm $abc$ per $ab$; fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac-aad}{cd-dd}$: quoniam diviso $aac$ per $cd$, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; hinc $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ ad minores terminos reductum, facit $\frac{aa}{d}$.

[illegible]tione ad reducendum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$: quia (ut supra) diviso $aac$ per $cd$, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; & rursus $-bbc$ diviso per $cd$, oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd-dd$ multiplicatum producit $-bbc+bbd$; hinc $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa-bb}{d}$.

Sic & $\frac{a6cccoomm+4a6ccm3p}{ooppz4+4mp3z4}$ abbreviatum, facit $\frac{a6ccmm}{ppz4}$. Pag. 214. lin. 15.

Non secus $\frac{aac-aad-acd+add}{cd-dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d}-a$, vel

 aa—

$\frac{aa - ad}{d}$. Nam $aac - aad$ divisum per $cd - dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd + add$ divisum per $cd - dd$, facit $-a$.

Similiter si fuerit $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: divido $a^3 - abb$ per $aa + 2ab + bb$, & relinquitur post divisionem $+ 2abb + 2b^3$ (nullâ hîc quotientis $a - 2b$ habitâ ratione). Deinde divido $aa + 2ab + bb$ per reliquum $+ 2abb + 2b^3$, & fit quotiens $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$. Hinc cum peracta sit divisio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator $a^3 - abb$ & denominator $aa + 2ab + bb$ per $2abb + 2b^3$, Invenieturque $\frac{aa}{2bb} - \frac{a}{2b}$, pro numeratore,

& $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$, pro denominatore,

hoc est, multiplicando ubique per $2bb$, habebitur $\frac{aa - ab}{a + b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3 - b^3}{aa - bb}$. Divisis enim $a^3 - b^3$ per $aa - bb$, relinquitur $abb - b^3$: dein $aa - bb$ per $abb - b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, & peracta est divisio absque reliquo. Quare si dividatur $a^3 - b^3$ & $aa - bb$ per $abb - b^3$,

fiet $\frac{aa}{bb} + \frac{a}{b} + 1$, pro numeratore.

& $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, pro denominatore.

Ideoque si ubique multiplicetur per $bb$, fiet fractio reducta $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ ad $\frac{a^3 - aab + aab - b^3}{a}$. & $\frac{x^3 - 25x}{xx + 10x + 25}$ ad $\frac{xx - 5x}{x + 5}$. Et sic de aliis.

Ostensâ igitur ratione, qua fractiones ad simpliciores reduci possunt, superest ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitatibus, sive simplicibus, sive compositis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipsas sine reliquo dividi potest, id quod in sequentibus usum habere patebit. Est autem operatio similis ei, quâ secundùm prop. 36. lib 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus invenitur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividitur.

Ut,

Ut, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi potest per duas datas $aac$ & $cd$: constitutis $aac$ & $cd$ in formam fractionis, hoc pacto: $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, seu simpliciorem $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta se positis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$, si multiplicatio instituatur per crucem, procreabitur eadem quantitas ex $aac$ in $d$, atque ex $cd$ in $aa$: fiet enim utrobique $aacd$, minima quippe quantitas, quæ sine reliquo dividi potest per $aac$ & $cd$.

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$: Tum multiplicato $aac - aad$ per $d$, aut $cd - dd$ per $aa$, fiet quantitas quæsita $aacd - aadd$, minima scilicet, quæ divisibilis est per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter si dentur $a^4 - b^4$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ reducitur ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$, & $a^4 - b^4$ multiplicatum per $a$ facit $a^5 - ab^4$; erit $a^5 - ab^4$ quantitas quæsita.

Eâdem ratione si datæ fuerint $x^3 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæsita quantitas $x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x$. Et sic de cæteris.

Quòd si verò compertum sit aut constet, duas illas datas quantitates ad simpliciores reduci non posse, sed primitivas esse; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæsitam. Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad simpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cùm secundùm præcedentia scribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$), & fit quæsita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterùm datis tribus aut pluribus quantitatibus, invenietur minima quantitas quæ per ipsas absque reliquo dividi potest, hoc modo: Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primùm, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi potest per

$a^3 -$

$a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$. quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifestum est $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$ esse quantitatem quæsitam. Sic & si datæ fuerint $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + ab^3$, & $a + b$: inventâ primùm minimâ quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi potest per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$, (ut ante), quoniam ipsa dividi nequit per tertiam $a^4 + ab^3$: hinc ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + ab^3$ similiter aliam quæro, ut $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$. quæ cum hîc etiam divisibilis sit per reliquam $a + b$, patet $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$ esse quantitatem quæsitam. Et sic de cæteris.

## *De Reductione fractionum ad eandem denominationem.*

QUibus explicatis, facile est ostendere, quâ ratione fractiones diversæ denominationis reducantur ad fractiones ejusdem denominationis. Ut ad reducendum fractiones $\frac{b^3d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad eandem denominationem: quæro primùm minimam quantitatem, quæ dividi potest per denominatores $aac$ & $cd$ (ut jam est ostensum), & fit $aacd$: quæ erit denominator communis. Jam ad inveniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$ per $aac$ & $cd$, unumquemque scilicet ex denominatoribus datis, & quotientes $d$ & $aa$ multiplicentur per numeratores $b^3d$ & $a^3$ datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæsiti $b^3dd$ & $a^5$, fiuntque fractiones quæsitæ $\frac{b^3dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac - aad}$ & $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$ ad eandem denominationem: invento denominatore communi $aacd - aadd$, minimâ nempe quantitate, quæ dividi potest per $aac - aad$ & $cd - dd$, divido $aacd - aadd$ per $aac - aad$ & $cd - dd$, & quotientes $d$ & $aa$ multiplico per numeratores $b^4$ & $a^3 + b^3$, fiuntque fractiones quæsitæ $\frac{b^4d}{aacd - aadd}$ & $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Eodem modo si $\frac{125}{x^3 - 25x}$ & $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$ reducantur ad eandem denominationem, provenient $\frac{125x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$ & $\frac{x^3 - 30xx + 125x}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non

Non secus $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$ reductæ sub eodem denominatore, facient

$$\frac{a^8 - a^7b + a^6bb}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6},$$
$$\frac{a^8 - 3a^7b + 5a^6bb - 6a^5b^3 + 5a^4b^4 - 3a^3b^5 + aab^6}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6},$$
$$\frac{a^8 - a^7b + a^6bb - a^5b^3 - a^3b^5 + aab^6 - ab^7 + b^8}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}, \ \&$$
$$\frac{a^8 - a^7b + 2a^6bb - 2a^5b^3 + 2a^4b^4 - 2a^3b^5 + aab^6 - ab^7}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}.$$

## *De Additione & Subtractione fractionum.*

Additio & Subtractio fractionum eodem modo perficiuntur, atque additio & subtractio numerorum fractorum vulgarium. Etenim si fractiones ejusdem fuerint denominationis, oportet tantùm earum numeratores addere aut subtrahere, & summæ vel reliquo subscribere denominatorem communem. Ut ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$ summa erit $\frac{aa + bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d + e}$ additum ad $\frac{2ae}{d + e}$, facit $\frac{2ad + 2ae}{d + e}$, seu $2a$. Non secus si addantur $\frac{bd}{b + d}$, $d + \frac{bb}{b + d}$, & $a - \frac{dd}{b + d}$, erit summa $a + \frac{2bd + bb}{b + d}$.

Quòd si fractiones diversæ denominationis fuerint, reducendæ erunt priùs ad eandem denominationem: quo facto, operandum erit ut jam dictum est. Ut ad addendum $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ad $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, fiet summa $\frac{x^3 - 30xx + 250x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non secus si addantur $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$, erit summa $\frac{4a^8 - 6a^7b + 9a^6bb - 9a^5b^3 + 7a^4b^4 - 6a^3b^5 + 3aab^6 - 2ab^7 + b^8}{a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6}$.

Jam ad subtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, scribo pro differentia $\frac{bb - aa}{c}$. Eodem modo subductis $\frac{2ae}{d - e}$ à $\frac{2ad}{d - e}$, reliquum erit $\frac{2ad - 2ae}{d - e}$ seu $2a$. Similiter $\frac{bd}{b + d}$ de $d + \frac{bb}{b + d}$ relinquit $\frac{dd + bb}{b + d}$.

Nec aliter fit, si subtrahendum sit $\frac{b^4}{aac - aad}$ de $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$. Etenim

nim reductis ad eundem denominatorem, si auferatur $\frac{b^4d}{aacd - aadd}$ de $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$, relinquetur $\frac{a^5 + aab^3 - b^4d}{aacd - aadd}$. Sic & si tollatur $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ex $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, remanebit $\frac{x^3 - 30xx - 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Eâdem ratione ad subducendum $\frac{aa - ab}{a + b}$ de $a$, reductâ quantitate $a$ ad denominatorem $a + b$, demptoque $\frac{aa - ab}{a + b}$ de $\frac{aa + ab}{a + b}$, fiet reliquum $\frac{2ab}{a + b}$. Non secus si subtrahatur $b + \frac{cc}{b + d}$ de $a + b$, relinquetur $a - \frac{cc}{b + d}$.

## *De Multiplicatione fractionum.*

AD multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem $ab$ per numeratorem $de$, ut & denominatorem $c$ per denominatorem $f$ (ad modum fractionum vulgarium), fitque productum $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa - bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b + c}$ producit $\frac{2a^3b - 2ab^3}{bc + cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non rarò convenit abbreviare quantitates per crucem. Ut ad multiplicandum $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{aa + 2ab + bb}$ per $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$: quoniam $aac - aad - bbc + bbd$ & $cd - dd$ reducuntur ad simpliciores $aa - bb$ & $d$, ut & $a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$ ad $aa - ab$ & $a + b$; hinc loco multiplicandi $aac - aad - bbc + bbd$ per $a^3 - abb$ multiplico $aa - bb$ per $aa - ab$; & loco multiplicandi $aa + 2ab + bb$ per $cd - dd$ multiplico $a + b$ per $d$: eritque productum $\frac{a^4 - a^3b - aabb + ab^3}{ad + bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa - bb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1 pro denominatore ipsius $aa - bb$, quoniam numerator $aa - bb$ & denominator $a + b$ reduci possunt ad $a - b$ & 1, hinc multiplicatis numeratoribus inter se, ut & denominatoribus, fiet productum $\frac{a^3 - 2aab + abb}{1}$ seu $a^3 - 2aab + abb$.

Eâdem ratione cùm multiplicatur $a + \frac{bb}{a - b}$ per $a - 2b + \frac{bb}{a}$, hoc est, $\frac{aa - ab + bb}{a - b}$ per $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$: quoniam $aa - 2ab + bb$

&

& $a-b$ reduci possunt ad $a-b$ & $1$; hinc multiplicatis $aa-ab+bb$ per $a-b$, & $a$ per $1$, provenit $\frac{a^3-2aab+2abb-b^3}{a}$, seu $aa-2ab+2bb-\frac{b^3}{a}$.

Similiter si ad multiplicandum proponatur $\frac{xx-5x}{x+5}$ per $\frac{xx-25}{x}$: reductis $xx-5x$ & $x$ ad $x-5$ & $1$, itemque $xx-25$ & $x+5$ ad $x-5$ & $1$, multiplico tantùm $x-5$ per $x-5$, & fit productum $xx-10x+25$.

Præterea ad multiplicandum $a+\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$: quoniam $a$ per $a-b$ facit $aa-ab$, & $\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$ facit $bb$; hinc productum quæsitum erit $aa-ab+bb$. Quâ quoque ratione multiplicabitur $\frac{aa-ab}{a+b}$ per $aa-bb$, & producetur $a^3-2aab+abb$; cum enim $aa-bb$ fiat ex $a+b$ in $a-b$, & $\frac{aa-ab}{a+b}$ multiplicatum per $a+b$ producat $aa-ab$, superest tantùm multiplicandum $aa-ab$ per $a-b$, ut habeatur $a^3-2aab+abb$.

Denique si multiplicandum sit $\frac{a^3-abb}{cd-dd}$ per $c-d$, fiet, divisis $cd-dd$ per $c-d$, productum $\frac{a^3-abb}{d}$.

## *De Divisione fractionum.*

Ad dividendum $\frac{ab^3}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omisso communi denominatore $c$, divido $ab^3$ per $bb$, fietque quotiens $ab$. Pari ratione si $\frac{a^3-abb}{c-d}$ dividatur per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, orietur $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ seu $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Quòd si denominatores fuerint diversi, reductio ad eandem denominationem fiet, si multiplicatio instituatur per crucem, ut in vulgaribus. Ut ad dividendum $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$: quoniam multiplicato prioris numeratore $a^3-b^3$ per posterioris denominatorem $c$, & hujus numeratore $aa-ab+bb$ per illius denominatorem $a+b$, fiunt $a^3c-b^3c$ & $a^3+b^3$; hinc quotiens erit $\frac{a^3c-b^3c}{a^3+b^3}$.



Ad-

Advertendum autem hîc est, ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, sicut etiam denominatores non rarò ad simpliciores terminos reduci posse. Ut ad dividendum $\frac{a4-b4}{aa-2ab+bb}$ per $\frac{aa+ab}{a-b}$: cum numeratores $a^4-b^4$ & $aa+ab$ reduci possint ad $a^3-aab+abb-b^3$ & $a$, & denominatores $aa-2ab+bb$ & $a-b$ ad $a-b$ & $1$; ideo loco multiplicandi $a^4-b^4$ per $a-b$, multiplico $a^3-aab+abb-b^3$ per 1, & fit $a^3-aab+abb-b^3$; & loco multiplicandi $aa+ab$ per $aa-2ab+bb$ multiplico $a$ per $a-b$, & fit $aa-ab$, unde quotiens divisionis fit $\frac{a3-aab+abb-b3}{aa-ab}$ vel $a+\frac{bb}{a}$. Eâdem ratione si $\frac{x4-625}{xx-10x+25}$ dividatur per $\frac{xx+5x}{x-5}$, orietur $\frac{x3-5xx+25x-125}{xx-5x}$ sive, $x+\frac{25}{x}$. Nam $x^4-625$ & $xx+5x$ reduci possunt ad $x^3-5xx+25x-125$ & $x$, quin & $xx-10x+25$ & $x-5$ ad $x-5$ & $1$, unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3-5xx+25x-125$ & $xx-5x$.

Porrò ad dividendum $a^3-2aab+abb$ per $\frac{aa-ab}{a+b}$: substituto 1 pro denominatore dividendi $a^3-2aab+abb$, quoniam numeratores $a^3-2aab+abb$ & $aa-ab$ reduci possunt ad $a-b$ & $1$; hinc multiplicatis $a-b$ per $a+b$ & 1 per 1, fiet quotiens $aa-bb$.

Sic & ad dividendum $aa+\frac{3abb}{a+4b}$ per $a+b$, hoc est, $\frac{a3+4aab+3abb}{a+4b}$ per $\frac{a+b}{1}$: div[illegible] $aab+3abb$ per $a+b$, & fit $aa+3ab$, unde quotiens quæsitus fit $\frac{aa+3ab}{a+4b}$. Hau[illegible] si dividatur $aa-ab$ per $\frac{aa-ab}{a+b}$, orietur $a+b$. Et $\frac{xx+5x}{x-5}$ per $xx+5x$, orietur $\frac{1}{x-5}$. Ac $a^3-aab$ per $\frac{aa-ab}{a+b}$, orietur $aa+ab$. Et denique $\frac{xx+5x}{x-5}$ per $x+5$, exsurget $\frac{x}{x-5}$.

## *De Radicum extractione ex fractionibus.*

CUm in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quæsitam: hinc si extrahenda sit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam radix

dix quadrata ex $aabb$ est $ab$, & radix quadrata ex $cc$ est $c$, scribo pro radice quæsita $\frac{ab}{c}$.

Eodem modo, si extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + 4ab + 4bb}$, fiet $\frac{aa - bb}{a + 2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$: quoniam $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100 - 160x + 64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100 - 160x + 64xx$ est $10 - 8x$, & radix quadrata ex 25 est 5; erit radix quæsita $\frac{10 - 8x}{5}$ seu $2 - \frac{8x}{5}$.

Non secus radix cubica ex
$\frac{27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125}{x^3 - 9xx + 27x - 27}$ erit $\frac{3xx - 2x + 5}{x - 3}$.

Quòd si quæsita radix prædicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, præponitur datæ fractioni signum radicale $\sqrt{}$. Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb} - ac$, scribo $\sqrt{\frac{ccxx}{4bb} - ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb} - ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx - 4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi potest radix, quæ est $2b$: ideo quæsita radix sic quoque scribi poterit $\frac{\sqrt{ccxx - 4abbc}}{2b}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa + bb}$, erit $\frac{ab}{\sqrt{aa + bb}}$. Idem de reliquis radicibus est intelligendum.

## *De logistica quantitatum surdarum.*

Quemadmodum fractiones oriuntur ex divisione imperfecta quantitatum, quarum una per alteram sine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radicis quantitatum radicem non habentium exsurgunt quantitates Surdæ, quarum operationem sequentibus exemplis exponere visum fuit.

## *De Reductione quantitatum surdarum.*

Sciendum itaque, quòd, sicut ad operationem fractionum diversæ denominationis oportet priùs ipsas ad eundem denomi-

 nato-

natorem reducere, ita & opùs ſit, quantitates ſurdas, ſi diverſa ſigna radicalia habuerint, reducere ad idem ſignum radicale. Quod fit, ſi ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniatur numerus, qui per ipſos ſine reliquo dividi poſſit. Ut ad reducendum $\sqrt{aq}$ ſeu $\sqrt{(2)}\,aq$ & $\sqrt{C.\,aaq}$ ſeu $\sqrt{(3)}\,aaq$ ad idem ſignum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus $\sqrt{Q}$ & $\sqrt{C}$ denominantur) minimum numerum, qui per ipſos ſine reliquo dividi poteſt, qui eſt 6. Jam cum 6 diviſo per 2 oriatur 3, & per 3 diviſo oriatur 2; hinc $aq$ multiplicandum erit in ſe cubicè, & $aaq$ quadratè; fientque ſub eodem ſigno $\sqrt{QC.\,a^3q^3}$ ſeu $\sqrt{(6)}\,a^3q^3$, & $\sqrt{QC.\,a^4qq}$ ſeu $\sqrt{(6)}\,a^4qq$. Sic & $\sqrt{ab}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$ ſub eodem ſigno radicali erunt $\sqrt{\sqrt{aabb}}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$.

Huc refer cùm quantitas aliqua rationalis per multiplicationem in ſe reducitur ad aliquod ſignum radicale. Exempli gratiâ, ad reducendum $a+b$ ad idem ſignum radicis cum $\sqrt{aa+bb}$: oportet multiplicare $a+b$ in ſe quadratè, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$. Non ſecus ſi multiplicetur $a+b$ in ſe cubicè, fiet $\sqrt{C.\,a^3+3aab+3abb+b^3}$ ſub eodem ſigno cum $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$. Et ſic de aliis.

Deinde ſciendum, quantitates ſurdas non rarò ad ſimpliciores reduci poſſe, tollendo ex ſigno radicali quicquid eſt rationale: nimirum, dividendo quantitates ſub eodem ſigno $\sqrt{}$ comprehenſas per aliquod Quadratum, vel Cubum, &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Ut $\sqrt{75aa}$ reduci poteſt ad $5a\sqrt{3}$: nam $75aa$ producitur ex multiplicatione $25aa$ per 3, quarum radices ſunt $5a$ & $\sqrt{3}$; adeò ut, ſi $75aa$ dividatur per qua[...]modo: $25aa$, ſub ſigno radicali tantùm ſcriben[...] $5a\sqrt{3}$. Id quod monſtrat $5a$, hoc [...] $\sqrt{25aa}$, multiplicatum eſſe per $\sqrt{3}$.

Eodem modo cum $a^3b+aabb$ dividi poſſit per quadratum $aa$, & oriatur $ab+bb$; fit ut pro $\sqrt{a^3b+aabb}$ ſcribi queat $a\sqrt{ab+bb}$.

Similiter quoniam $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ dividi poteſt per quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, cujus radix eſt $a+c-b$, & quotiens eſt $ab+bb$; hinc

hinc loco $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ scribi potest $a + c - b\sqrt{ab + bb}$.

Non secus pro $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ scribi poterit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$: reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum priori, potest utriusque numerator dividi per $aamm$, cujus radix est $am$, oriturque $oo + 4mp$. Denominator autem cum sit rationalis, liberabitur à signo $\sqrt{}$, extrahendo radicem ex $ppzz$. *Pag. 31, lin. 9.*

Eâdem ratione loco $\sqrt{C.\, x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 15x^3 - 108xx + 324x - 324}$ scribi potest $x - 3\sqrt{C.\, x^3 + 12}$. Et sic de aliis.

Verùm enimverò quoniam sæpenumero difficile est invenire Quadratum, Cubum, &c. per quod divisio, ad hanc reductionem necessaria, institui possit; non inutile fuerit, si hoc loco ostendamus, quâ ratione datarum quarumlibet quantitatum divisores omnes inveniantur, perinde atque in numeris est ostensum. Vide p. 100.

*Ratio inveniendi divisores omnes quarumcunque datarum quantitatum.*

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primitivam (hoc est, quæ non nisi per unitatem aut se ipsam dividi potest), & rursus quotiens per hanc eandem sive aliam primitivam, idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam, quæ per se ipsam est dividenda. Ut ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$: divido $a^3b + aabb$ per $a$, & fit $aab + abb$, id quod rursus per $a$ divisum dat $ab + bb$. Jam quia quotiens hic per $a$ ampliùs dividi nequit, divido $ab + bb$ per $b$, & provenit $a + b$, quæ quantitas est primitiva, ideoque per se ipsam dividenda. Quibus peractis reserventur divisores $a$, $a$, $b$, & $a + b$.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^3b + aabb & aab + abb & ab + bb & a + b & 1 \\ a & a & b & a + b & \end{array}$$

Jam ut ex hisce divisoribus inveniantur divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$, multiplico primùm $a$ per $a$, & fit $aa$. Deinde $b$ per 1, $a$, & $aa$, fiuntque $b$, $ab$, & $aab$. Denique multiplico $a + b$ per 1, $a$, $aa$, $b$, $ab$, & $aab$, & fiunt $a + b$, $aa + ab$, $a^3 + aab$, $ab + bb$, $aab + abb$, & $a^3b + aabb$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline a. \quad a. \\ \hline aa. \\ \hline b. \quad ab. \quad aab. \\ \hline a+b.\ aa+ab.\ a^3+aab.\ ab+bb.\ aab+abb.\ a^3b+aabb. \end{array}$$

Atque ita divisores omnes erunt $1, a, aa, b, ab, aab, a+b$, $aa+ab$, $a^3+aab$, $ab+bb$, $aab+abb$, & $a^3b+aabb$.

Sic & ad inveniendum omnes divisores quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: divido $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$ per quantitatem primitivam $aa+bb$, & fit $a^4-3aabb+b^4$, id quod rursus divisum per quantitatem primitivam $aa+ab-bb$ dat $aa-ab-bb$, quæ quantitas etiam primitiva est, adeoque per se ipsam dividenda. Eruntque divisores reservandi $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $aa-ab-bb$.

$$\begin{array}{r|c|c|c} a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6 & a^4-3aabb+b^4 & aa-ab-bb & 1 \\ aa+bb & aa+ab-bb & aa-ab-bb & \end{array}$$

Ex quibus ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: multiplico primùm $aa+bb$ per $aa+ab-bb$, & fit $a^4+a^3b+ab^3-b^4$. Deinde $1$, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $a^4+a^3b+ab^3-b^4$ per $aa-ab-bb$, fiuntque $aa-ab-bb$, $a^4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline aa+bb. \quad aa+ab-bb. \\ \hline a^4+a^3b+ab^3-b^4. \\ \hline aa-ab-bb.\ a^4-a^3b-ab^3-b_4.\ a^4-3aabb+b^4.\ a^6-2a_4bb-2aab^4+b^6. \end{array}$$

Ita ut divisores omnes sint $1$, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, $a^4+a^3b+ab^3-b^4$, $aa-ab-bb$, $a_4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

Pag. 78. lin. 12. Eodem modo ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: divido $a^6+2a^4cc+aac^4$ per $a$, & fit $a^5+2a^3cc+ac^4$, quod rursus per $a$ divisum, dat $a^4+2aacc+c^4$. Jam cum hic quotiens dividi ampliùs non possit per $a$ aut $c$ similemve quantitatem, divido $a^4+2aacc+c^4$ per $aa+cc$, vel, quod hîc idem est, ex $a^4+2aacc+c^4$ extraho radicem quadratam

dratam $aa+cc$, quâ denuo per seipsam divisâ, provenit 1. Unde cum divisores reservati sint $a$, $a$, $aa+cc$, & $aa+cc$; ideo ut ex iis inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: multiplico primùm $a$ per $a$, & fit $aa$: deinde 1, $a$, & $aa$ per $aa+cc$, fiuntque $aa+cc$, $a^3+acc$, & $a^4+aacc$: ac denique $aa+cc$, $a^3+acc$, & $a^4+aacc$ per $aa+cc$, & fiunt $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$; eruntque divisores omnes 1, $a$, $aa$, $aa+cc$, $a^3+acc$, $a^4+aacc$, $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
a^6+2a^4cc+aac^4 & a^5+2a^3cc+ac^4 & a^4+2aacc+c^4 & aa+cc & 1 \\
a & a & aa+cc & aa+cc &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1. \\ \hline
a. \quad a. \\ \hline
aa. \\ \hline
aa+cc.\ a^3+acc.\ a^4+aacc. \\ \hline
aa+cc.\ a^4+2aacc+c^4.\ a^5+2a^3cc+ac^4.\ a^6+2a^4cc+aac^4.
\end{array}$$

Similiter ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$: quia, factâ divisione per $b$, oritur $a^3-aab+2aac+acc-abb+bcc-2bbc+b^3$, & hujus quotientis per $a+b$, oritur $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, & radix quadrata ex $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$ est $a+c-b$, hoc est, $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$ divisum per $a+c-b$, dat $a+c-b$; divido demum $a+c-b$ per $a+c-b$, & fit 1. Unde cum divisores reservati sint $b$, $a+b$, $a+c-b$, & $a+c-b$; multiplico $b$ per $a+b$, & fit $ab+bb$: tum 1, $b$, $a+b$, & $ab+bb$ per $a+c-b$, fiuntque $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$: ac denique $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbc-b^3$ per $a+c-b$, fiuntque $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b+aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$. Atque ita divisores omnes erunt 1, $b$, $a+b$, $ab+bb$, $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, $aab+abc+bbc-b^3$, $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac$

$+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$.

Non secus si proponatur $a^3bc-ab^3c$, invenientur ex divisoribus reservatis $a, b, c, a-b$, & $a+b$ divisores sequentes: $1, a, b, ab, c, ac, bc, abc, a-b, aa-ab, ab-bb, aab-abb, ac+bc, aac-abc, abc-bbc, aabc-abbc, a+b, aa+ab, ab+bb, aab+abb, ac+bc, aac+abc, abc+bbc, aabc+abbc, aa-bb, a^3-abb, aab-b^3, a^3b-ab^3, aac-bbc, a^3c-abbc, aabc-b^3c$, & $a^3bc-ab^3c$.

Neque prætereundum hoc loco videtur, quo pacto horum divisorum ope duæ pluresve quantitates datæ aliâ ratione, quàm ex superioribus facilè fuit colligere, ad simplicissimos terminos reduci queant. Ut ad reducendum $a^3-abb$, $aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ ad terminos simplicissimos, eandem cum ipsis rationem habentes; quæro primò (ut ante) omnes cujusque quantitatis datæ divisores: eruntque ipsius $a^3-abb$ divisores $1, a, a-b, aa-ab, a+b, aa+ab, aa-bb$, & $a^3-abb$: ipsius autem $aab-b^3$ divisores erunt $1, b, a-b, ab-bb, a+b, ab+bb, aa-bb$, & $aab-b^3$: at verò ipsius $a^3+aab-abb-b^3$ divisores erunt $1, a-b, a+b, aa-bb, aa+2ab+bb$, & $a^3+aab-abb-b^3$. Jam cum inter ipsos tres sint, qui sibi invicem respondeant, ut $a-b$, $a+b$, & $aa-bb$, quorum ope datæ quantitates ad simpliciores reduci possunt; hinc ad inveniendum terminos simplicissimos, divido $a^3-abb$, $aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ per $aa-bb$ (utpote divisorem pluribus dimensionibus constantem), fiuntque $a$, $b$, & $a+b$. Ubi notandum, quantitates propositas fore inter se primas, si nulli ex divisoribus sibi mutuò respondeant.

Quæ ratio inveniendi divisores non ineptè quoque adhiberi potest ad fractionum abbreviationem. Ut ad abbreviandum $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$: quia tam numerator quam denominator dividi potest per $a+b$, poterit pro $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ scribi $\frac{aa-ab}{a+b}$. Et sic de cæteris. Vide supra pag. 22.

Inventis autem omnibus divisoribus, videndum est num aliqui ex ipsis sint quadrati, vel cubi, &c. qui si reperiantur, adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex signo radicali

dicali. Ut quia inter divisores quantitatis $a^3b + aabb$ reperitur quadratum $aa$, poterit $\sqrt{a^3b + aabb}$ dividendo per $aa$, reduci ad $a\sqrt{ab + bb}$.

Sic & cum $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$ pro divisore habeat quoque quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$, poterit pro $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ scribi $a + c - b\sqrt{ab + bb}$. Similiter cum numerus 75 inter divisores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa}$ ad $5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi potest per numeros quadratos 4, 16, 25, 100, & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ scribi $2ab\sqrt{300}$, vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quòd si inter divisores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperiatur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, nisi velis eam in formam fractionis designare. Ut quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter divisores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100, &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{5}{2}}$, vel $5a\sqrt{\frac{2}{5}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{10}}$, &c.

Sciendum denique, quòd, licèt hæ quantitates omnes per se consideratæ surdæ existant, tamen inter se collatæ duorum sint generum: aliæ enim dicuntur Commensurabiles seu Communicantes; aliæ verò Incommensurabiles seu non-Communicantes.

Communicantes sunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter se sunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, seu sicut numerus ad numerum.

Non-Communicantes verò sunt, quarum unius ad alteram relatio non est ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoscendi communicantes à non-communicantibus est, si, postquam ad simplicissimos terminos sunt reductæ, reperiantur inter se esse ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Ut $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ sunt communicantes, quia divisione per $\sqrt{3}$, maximum earum communem divisorem, reducuntur ad $\sqrt{25aa}$ & $\sqrt{9aa}$, hoc est, ad $5a$ & $3a$: adeò ut pro $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ scribi possit $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, quæ inter se sunt ut $5a$ ad $3a$, vel 5 ad 3.

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, quia utrâque divisâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa}$ & $\sqrt{bb}$, seu $a$ & $b$: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter se sunt ut $a$ ad $b$.

Pag. 31. Similiter communicantes sunt $\sqrt{-\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam3}{pzz}}$: quippe reducuntur ad $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio est, ut $\frac{z}{a}$ ad $-\frac{am}{pz}$, seu $pzz$ ad $aam$.

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $x+3\sqrt{xx+12}$ & $5-x\sqrt{xx+12}$, habent inter se eam rationem, quæ est ipsius $x+3$ ad $5-x$. Et sic de aliis.

## *De Additione & Subtractione quantitatum surdarum.*

AD addendum vel subtrahendum quantitates surdas, oportet primùm explorare utrum sint communicantes nec ne: si enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel subtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra signum radicale reperiuntur. Ut ad addendum $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, scribo, additis $5a$ & $3a$, pro summa $8a\sqrt{3}$; & $2a\sqrt{3}$, pro earundem differentia, utpote sublatis $3a$ ex $5a$.

Eodem modo si fuerint $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$: addendo & subtrahendo $a$ & $b$, erit summa $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$, & differentia $\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter si proponatur $\sqrt{-\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam3}{pzz}}$, hoc est, $\frac{a}{z}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, erit summa $\frac{pzz+aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$,

& dif-

& differentia $\frac{pzz = = aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$. Nec aliter fit, si habeatur $\sqrt{\frac{4aabb-4aaxx}{bb}}$ vel $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ & $\sqrt{bb-xx}$: erit enim summa $\frac{2a+b}{b}\sqrt{bb-xx}$, & differentia $\frac{2a=b}{b}\sqrt{bb-xx}$. Pari ratione additis $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, erit summa $8\sqrt{xx+12}$, eisdemque subtractis, erit differentia $2x = 2\sqrt{xx+12}$. Pag. 173, lin. 18.

Quod si verò non communicantes fuerint, non poterunt addi vel subtrahi ita ut unam radicem constituant, quocirca addendæ vel subtrahendæ sunt mediantibus signis + & —. unde Binomia & Multinomia exsurgunt. Ut si addendum sit $\sqrt{aa+bb}$ ad $\sqrt{aa-bb}$, scribo pro summa $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$; & ad subtrahendum $\sqrt{aa-bb}$ de $\sqrt{aa+bb}$, scribo pro reliquo $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$. Non secus si addatur $a+b$ ad $\sqrt{aa+bb}$, erit summa $a+b+\sqrt{aa+bb}$; at si subducatur $\sqrt{aa+bb}$ de $a+b$, erit reliquum $a+b-\sqrt{aa+bb}$. Cum enim $a+b$ sit quantitas rationalis, & $\sqrt{aa+bb}$ quantitas surda, non magis communicantes esse possunt, quàm omnes quantitates surdæ, quæ diversis signis radicalibus designantur. Haud dissimili ratione concludes summam ex $aa+bb+a\sqrt{aa+bb}$ & $aa-bb-b\sqrt{aa+bb}$ esse $2aa+\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$, & differentiam esse $2bb+\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$.

## *De Multiplicatione quantitatum surdarum.*

SI quantitates datæ sunt communicantes, oportet, multiplicatis quantitatibus vel numeris extra signum radicale positis, productum multiplicare per quantitatem vel numerum sub signo radicali contentum, ut habeatur productum quæsitum. Ut ad multiplicandum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, multiplico primùm $5a$ per $3a$, & fit $15aa$: tum $15aa$ per $3$, eritque productum quæsitum $45aa$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: multiplicato $a$ per $b$, &

producto $ab$ per $aa+bb$, fiet productum quaesitum $a^3b+ab^3$. Nec aliter fit si ad multiplicandum proponatur $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ per $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, per $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$: Multiplicatis enim $x+3$ per $5-x$, fit $15+2x-xx$, quod multiplicatum per $xx+12$, productum facit $180+24x+3xx+2x^3-x^4$.

Quòd si datae quantitates non fuerint communicantes, oportet tantùm multiplicare quantitates sub signis radicalibus comprehensas, & producto praefigere commune signum radicale. Si verò signa radicalia diversa fuerint, reducenda priùs sunt ad idem signum, sicut superiùs est ostensum, & deinde operandum, ut jam dictum est. Ut, ad multiplicandum $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$: multiplicatis $ab$ per $cd$, praefigatur producto $abcd$ signum $\sqrt{}$, & fit productum quaesitum $\sqrt{abcd}$. Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa-bb}$: multiplicatis $aa+bb$ per $aa-bb$, fiet productum $\sqrt{a^4-b^4}$. Similiter si multiplicari debeat $\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, reduco priùs $a+b$ ad idem signum radicale, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$: tum multiplicatis $aa+2ab+bb$ per $aa+bb$, fit productum $\sqrt{a^4+2a^3b+2aabb+2ab^3+b^4}$, vel etiam scribendo hoc pacto: $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Nec aliter fit si multiplicandum sit $a+\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$, hoc est, $a+\sqrt{bc}$ in se: multiplico primùm $a+\sqrt{bc}$ per $a$, & fit $aa+a\sqrt{bc}$: tum $a+\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$, fitque $a\sqrt{bc}+bc$. quae producta si addantur, fiet productum quaesitum $aa+bc+2a\sqrt{bc}$. Non secus si multiplicandum proponatur $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$ per $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa+bb}$, & $+\sqrt{aa-bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$ (omissis scilicet tantùm signis radicalibus) fiunt $aa+bb$ & $-aa+bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$, & $\sqrt{aa+bb}$ per $+\sqrt{aa-bb}$ producta evanescunt: hinc productum quaesitum erit $2bb$.

## *De Divisione quantitatum surdarum.*

Si datae quantitates sunt communicantes, oportet tantùm dividere quantitates, vel numeros, extra signum radicale positos,

&

& quod oritur erit quotiens quæsitus. Ut ad dividendum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$: divido $5a$ per $3a$, seu $5$ per $3$; eritque quotiens quæsitus $\frac{5}{3}$ seu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: divisis $a$ per $b$, fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non secus $\sqrt{abcc}$ seu $c\sqrt{ab}$ divisum per $\sqrt{ab}$, dat $c$. Et sic de aliis.

Quòd si communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates sub signis radicalibus comprehensæ, & ei quod oritur præfigendum est commune signum radicale. Ut ad dividendum $\sqrt{a^3b-ab^3}$ per $\sqrt{aa-bb}$: divisis $a^3b-ab^3$ per $aa-bb$, fit $ab$; unde quotiens quæsitus erit $\sqrt{ab}$.

Et quidem si signa radicalia fuerint diversa, reducenda priùs erunt ad idem signum, & deinde operatio instituenda erit, ut jam dictum est. Ut ad dividendum $a^3+abb$ per $\sqrt{a^4+aabb}$: multiplicando $a^3+abb$ in se, fit $a^6+2a^4bb+aab^4$; quare divisâ $\sqrt{a^6+2a^4bb+aab^4}$ per $\sqrt{a^4+aabb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $a+b$: multiplico primùm $a+b$ in se, ut fiat sub eodem signo radicali $\sqrt{aa+2ab+bb}$, quo facto, si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $\sqrt{aa+2ab+bb}$, fiet quotiens quæsitus $\sqrt{aa-bb}$.

Non aliâ ratione $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$. quippe diviso quadrato per suum latus, oritur latus. Unde si $a^3+abb$ dividatur per $\sqrt{aa+bb}$, orietur $a\sqrt{aa+bb}$.

Porrò si dividendum sit $a^3+abb+ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primùm $a^3+abb$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit ut ante, $\sqrt{aa+bb}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit $b$, unde quotiens quæsitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non secus si dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}-aa+bb$ per $a+b$, orietur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter si dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam $ab$ divisâ per $a$, eadem exoritur quantitas $b$, quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$: hinc quotiens quæsitus erit $b$. Eodem modo $aab-bbc-ab+\frac{bbc}{a}\sqrt{bc}$ divisum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{bbc}{a}$.

Postea ad dividendum $aa-bc$ per $a+\sqrt{bc}$, divido $aa$ per $a$,

& fit

& fit $a$, quod multiplicatum per $\sqrt{bc}$ producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc}-bc$. diviso jam $-a\sqrt{bc}$ per $a$, fit $-\sqrt{bc}$, quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur si auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur o, & absoluta erit divisio, eritque quotiens quæsitus $a-\sqrt{bc}$. Eodem modo $ab-cd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$: & $a^3+bc\sqrt{bc}$ divisum per $a+\sqrt{bc}$, dat $aa+bc-a\sqrt{bc}$: & $aabb-ccdd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\overline{ab+cd}\sqrt{ab}+\overline{ab+cd}\sqrt{cd}$: & $a^3b-abbc$ divisum per $aa+a\sqrt{bc}$, dat $ab-b\sqrt{bc}$: ut & $a^3-abc+\overline{aa-bc}\sqrt{bc}$ divisum per $a-\sqrt{bc}$, dat $aa+bc+2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$: quia $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$ seu $\sqrt{cc-2cd+dd}$ dividi nequit, scribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a4+b4}}{c-d}$, vel $\sqrt{\frac{a4+b4}{cc-2cd+dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c-d}\sqrt{a^4+b^4}$. Eodem modo si dividatur $a\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, fiet quotiens $\frac{a}{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa-bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa-bb}}$: & $aa+\sqrt{abcd}$ per $a+\sqrt{bc}$, facit $\frac{aa+\sqrt{abcd}}{a+\sqrt{bc}}$. Sic etiam ad dividendum $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ per $8\sqrt{xx+12}$, scribitur pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x3-x4}{8\sqrt{xx+12}}$; vel quia $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ producitur ex $\overline{15+2x-xx}$ in $xx+12$, quadratum nempe ipsius $\sqrt{xx+12}$, fit ut scribi quoque possit $\frac{\overline{15+2x-xx}\text{ in }\overline{xx+12}}{8\sqrt{xx+12}}$, vel breviùs $\frac{\overline{15+2x-xx}}{8}\sqrt{xx+12}$, utpote dividendo $xx+12$ per $\sqrt{xx+12}$. Non aliter si $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ sit dividendum per $x+3\sqrt{xx+12}$, scribo pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x3-x4}{\overline{x+3}\sqrt{xx+12}}$ seu $\frac{60-12x+5xx-x3}{\sqrt{xx+12}}$. nam $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ dividi potest per $x+3$, & fit $60-12x+5xx-x^3$; vel quoniam $60-12x+5xx-x^3$ producitur ex $\overline{5-x}$ in $\overline{xx+12}$, fit ut etiam scribi possit $\frac{\overline{5-x}\text{ in }\overline{xx+12}}{\sqrt{xx+12}}$ seu $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$.

# De Extractione Radicis Quadratæ ex Binomiis.

MOdus, quo ex quantitatibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi solet ad inventionem radicis quadratæ ex Binomiis, estque talis:

*Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.*

*Subductis quadratis partium dati Binomii à se invicem, si radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem auferatur; erunt radices quadratæ ex semisse summæ & differentiæ, per signum + vel — dati Binomii connexæ, binæ partes radicis quæsitæ.*

Ut ad extrahendum radicem quadratam ex $aa+bc+2a\sqrt{bc}$, subtraho $4aabc$, quadratum minoris partis ex $a^4+2aabc+bbcc$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4-2aabc+bbcc$, cujus radix quadrata $aa-bc$ addita ad majorem partem $aa+bc$, & ab eadem ablata facit summam $2aa$, & differentiam $2bc$, quarum semisses sunt $aa$ & $bc$: unde radices quadratæ sunt $a$ & $\sqrt{bc}$, quæ si connectantur per signum +, erit radix quæsita $a+\sqrt{bc}$.

Sic radix quadrata ex $mm+\frac{pxx}{m}+x\sqrt{4pm}$ erit $m+x\sqrt{\frac{p}{m}}$. *Pag. 182, lin. 13.*

Eodem modo si extrahenda sit radix quadrata ex $\overline{a+b}\sqrt{ab}+2ab$: subducto $4aabb$, quadrato partis minoris, ex $a^3b+2aabb+ab^3$, quadrato majoris partis, erit reliqui $a^3b-2aabb+ab^3$ radix quadrata $\overline{a-b}\sqrt{ab}$. quæ si addatur & auferatur ex majori parte $\overline{a+b}\sqrt{ab}$, fiet summa $2a\sqrt{ab}$, & differentia $2b\sqrt{ab}$, unde semissium radices quadratæ constituunt radicem quæsitam $\sqrt{a\sqrt{ab}}+\sqrt{b\sqrt{ab}}$ seu $\sqrt{\sqrt{a^3b}}+\sqrt{\sqrt{ab^3}}$.

Nec aliter fit cùm extrahitur radix quadrata ex $\overline{a+d}\sqrt{bc}+2\sqrt{abcd}$: etenim subtracto $4abcd$, quadrato minoris partis, ex $aabc+2abcd+bcdd$, quadrato majoris partis, relinquetur $aabc-2abcd+bcdd$, cujus radix quadrata est $\overline{a-d}\sqrt{bc}$: hæc ergo si addatur & subtrahatur ex majori parte $\overline{a+d}\sqrt{bc}$, erit summa $2a\sqrt{bc}$, & differentia $2d\sqrt{bc}$: Ex quarum dimidiis si radices quadratæ extrahantur, fiet radix quæsita $\sqrt{a\sqrt{bc}}+\sqrt{d\sqrt{bc}}$ vel $\sqrt{\sqrt{aabc}}+\sqrt{\sqrt{ddbc}}$.

F Quòd

Quòd si, subductis quadratis partium dati binomii à se invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: satiùs erit ipsi binomio signum universale radicis quadratæ præfigere. Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ scribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Universales.

Pag. 6.

## DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM.

QUoniam ad resolvendum aliquod Problema, id ipsum supponendum est ut jam factum, atque nomina imponenda sunt quantitatibus tum datis, tum quæsitis; & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponuntur priores literæ Alphabeti $a, b, c$, &c. pro quæsitis autem posteriores $z, y, x$, &c: fit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognitas & incognitas facto discrimine, à se invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur. Unde cum æquatio nihil aliud sit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè constat, quantitates hasce cognitas & incognitas, prout diversimode sunt affectæ atque dispositæ, diversas efficere posse Æquationum formulas, quæ tamen per sequentes regulas reduci queunt ad hasce similésve species:

Pag. 7.

$z \propto b$ aut

$zz \propto -az+bb$, aut

$z^3 \propto +azz+bbz-c^3$, aut

$z^4 \propto +az^3+bbzz-c^3z+d^4$, &c.

## De Reductione per Additionem.

UT si habeatur æquatio inter $z-3$ & 12, hoc est, si fuerit $z-3 \propto 12$: quoniam si æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt sunt æqualia; hinc si utrinque addatur $+3$, fiet $z \propto 15$. nam $-3$ & $+3$ addita faciunt o.

Sic & si fuerit $z-b \propto$ o addendo utrinque $b$, fiet $z \propto b$. Aut si hasi habeatur $b - z \infty 0$, fiet, addendo utrobique $z$, $b \infty z$. Et si habeatur $zz - aq \infty 0$, erit $zz \infty aq$: ut & si $z^3 - aaq$ æquetur 0, fiet $z^3 \infty aaq$, &c.

Non secus si habeatur $z^4 - az^3 - bbzz \infty d^4 - c^3z$, addendo utrique parti $+ az^3 + bbzz$, fiet $z^4 \infty az^3 + bbzz - c^3z + d^4$.

Ex quibus constat, quantitates signo — adfectas addi utrique parti, si eximantur ab una parte, & in alteram partem transferantur sub signo +.

## *De Reductione per Subtractionem.*

DEinde si fuerit $z + 3 \infty 12$; quia si ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur sunt æqualia, fit ut, subtrahendo utrinque $+3$, habeatur $z \infty 9$.

Eodem modo si habeatur $zz + az \infty bb$, subtracto utrinque $+az$, fiet $zz \infty - az + bb$.

Similiter $z^3 + 2c^3 \infty azz + bbz + c^3$ reducetur ad $z^3 \infty azz + bbz - c^3$, subtrahendo utrinque $+2c^3$.

Unde colligitur quantitates signo + adfectas ab utraque parte subtrahi, eximendo ipsas ex una parte & transferendo in alteram partem sub signo —: atque adeò quicquid vel additione vel subtractione transfertur, adfici signo contrario.

## *De Reductione per Multiplicationem.*

POrrò si ad reducendum proponatur $\frac{z}{3} \infty 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3, $z \infty 15$. Sic & si habeatur $z \infty \frac{aq}{z}$, invenietur, multiplicando utrinque per $z$, $zz \infty aq$, &c.

Eodem modo si fuerit $\frac{zz}{z-b} \infty a$: quoniam, delendo denominatorem $z - b$ prioris partis $\frac{zz}{z-b}$, ipsa pars multiplicatur per $z - b$: hinc oportet etiam alteram partem $a$ multiplicare per $z - b$, ut habeatur æquatio inter $zz$ & $az - ab$.

Similiter si sit $\frac{zz}{a} \infty \frac{zz - bz + bb}{z}$: quoniam sublato denomina-

F 2 tore

tore $a$ partis prioris $\frac{zz}{a}$, multiplicata est pars prior per $a$, & fit $zz$; hinc oportet & alteram partem $\frac{zz-bz+bb}{z}$ multiplicare per $a$, ut habeatur $\frac{azz-abz+abb}{z}$. Unde cum æquatio proposita reducta sit ad $zz \infty \frac{azz-abz+abb}{z}$, si denuo utraque pars multiplicetur per $z$, denominatorem posterioris partis $\frac{azz-abz+abb}{z}$, fiet $z^3 \infty azz-abz+abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pas est fractio, reduci ad aliam, quæ fractione caret, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem posterioris, & numeratorem posterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem est ac si binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipsæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Ubi notandum, ad majorem abbreviationem atque operationis facilitatem, non rarò tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad simpliciores terminos reduci posse. Ut si fuerit $\frac{z^3}{zz-aa} \infty \frac{az-aa}{z+a}$: reductis denominatoribus $zz-aa$ & $z+a$ ad $z-a$ & $1$, fiet $\frac{z^3}{z-a} \infty \frac{az-aa}{1}$, ac proinde, si multiplicetur per crucem, invenietur $z^3 \infty azz-2aaz+a^3$. Similiter si habeatur $\frac{aaz-bbz}{z+b} \infty \frac{a^3-abb}{z}$: reductis numeratoribus $aaz-bbz$ & $a^3-abb$ ad $z$ & $a$, habebitur $\frac{z}{z+b} \infty \frac{a}{z}$, ubi si per crucem multiplicetur, fiet $zz \infty az+ab$. Non secus si habeatur $\frac{azz-bzz}{bb-bz} \infty \frac{aa-ab}{b}$: cum numeratores $azz-bzz$ & $aa-ab$ reduci possint ad $zz$ & $a$, ut & denominatores $bb-bz$ & $b$ ad $b-z$ & $1$, fiet $\frac{zz}{b-z} \infty \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exsurget $zz \infty -az+ab$.

Huc etiam refer, cùm integrum æquatur fractioni. Ut si habeatur æquatio inter $\frac{az^3-bz^3}{zz+az+aa}$ & $ab-bb$: substitutâ enim unitate pro denominatore ipsius integri $ab-bb$, cum $az^3-bz^3$ & $ab-bb$ reduci possint ad $z^3$ & $b$, erit æquatio talis

$z^3$

$\frac{z^3}{zz+az+aa} \infty \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \infty bzz+abz+aab$.

Ad hæc si proponatur $\sqrt{z}$ æquari 5: quoniam æqualium æqualia quoque sunt quadrata, cubi, &c; hinc si utraque pars in se multiplicetur quadratè, habebitur $z \infty 25$. Sic & si fuerit $\sqrt{z} \infty \sqrt{5}$: ductâ utrâque parte in se quadratè, fiet $z \infty 5$. Pari ratione si $\sqrt{z}$ æquetur $\sqrt{aab-b}$, erit $z \infty aab-b$. Haud secus si fuerit $\sqrt{C.\,z} \infty \sqrt{C.\,aabb-b}$, fiet, utramque partem in se multiplicando cubicè, $z \infty aabb-b$. Et sic de aliis.

## De Reductione per Divisionem.

Postea si detur $zz \infty 4z$: quoniam, æqualibus per æqualia vel idem divisis, proveniunt æqualia, fit ut, si utraque pars dividatur per $z$, oriatur $z \infty 4$. Sic & si habeatur $z^4 \infty az^3+bbzz$, dividendo utrinque per $zz$, fiet $zz \infty az+bb$. Similiter fit, si proponatur $3z \infty 12$: etenim si utrobique dividatur per 3, proveniet $z \infty 4$. Eodem modo si fuerit $az \infty ab$, dividendo utramque partem per $a$, fiet $z \infty b$. Nec aliter si habeatur $ax-bx \infty bb$, orietur, divisâ utrâque parte per $a-b$, $x \infty \frac{bb}{a-b}$. Haud secus si proponatur $azz+bzz \infty abz+bbz-abb-b^3$: quoniam utraque pars dividi potest per $a+b$, orietur $zz \infty bz-bb$. Sic & si fuerit $azz-bzz \infty aaz-bbz+abc$, dividendo utrinque per $a-b$, fiet $zz \infty az+bz+\frac{abc}{a-b}$, seu $zz \infty \begin{matrix}a\\+b\end{matrix}z+\frac{abc}{a-b}$. Pag. 149. lin. 27.

Huc referendum quoque est, cùm binæ æquationis partes, juxta modum p. 34. ostensum, reduci possunt ad simpliciores terminos. Ut si fuerit æquatio inter $az^4-abz^3+abbzz$ & $-abz^3+2abbzz-2ab^3z+ab^4$: dividendo utramque partem per maximum communem divisorem $azz-abz+abb$, orietur $zz \infty -bz+bb$.

## De Reductione per Extractionem Radicis.

Denique ad reducendum $zz \infty 25$: quoniam æqualium quadratorum ac cuborum &c. æqualia quoque sunt latera seu radices, fit ut, si ex utraque parte extrahatur radix quadrata, pro-

F 3 veniat

veniat $z \infty 5$. Sic & si fuerit $z^3 \infty 125$, erit, extractâ utrinque radice cubicâ, $z \infty 5$. Eâdem ratione, si habeatur $zz \infty aa + 2ab + bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \infty a + b$. Nec aliter fit si fuerit $zz \infty aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \infty a + \sqrt{bc}$. Non secus si $xx$

Pag. 6. æquetur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, erit $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

His subjunge sequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis simul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{zz + 3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz - 3aa}{4}} \infty \sqrt{\frac{azz}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia sunt, æqualia quoque sunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in se quadratè, $\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}} \infty \frac{azz}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$, & subtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo scilicet ipsas in alteram partem sub contrario signo, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$ sola ex una parte, fietque $\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} \infty \sqrt{\frac{z^4 - 9a^4}{4}}$. Quo facto, multiplicetur rursus utraque pars æquationis in se quadratè, ut evanescat signum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{az^4}{b} + \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{z^4 - 9a^4}{4}$. Ubi si utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac subtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm signis, erit $\frac{az^4}{b} - \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{9a^4}{4}$. Porrò ut deleantur fractiones, reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto, si utrinque per eundem multiplicetur, ipsum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur $4abz^4 - 4aaz^4 \infty 9a^4bb$. Dividatur jam ubique per $a$, hoc est, $a$ ubique deleatur fitque $4bz^4 - 4az^4 \infty 9a^3bb$: quo facto, dividatur utraque pars per $4b - 4a$ ut habeatur quantitas $z^4$ ex una parte sola, eritque $z^4 \infty \frac{9a^3bb}{4b - 4a}$. Ubi si utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur $zz \infty \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$: & si denuo utrinque extrahatur radix quadrata, invenietur $z \infty \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & subtractionem

nem instituí tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones tum quantitates surdas; & reductionem per divisionem, tam ad deprimendas dimensiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & simplicissimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis constantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæsitam ex data æquatione inveniendam utiles esse possint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta sufficiant.

F I N I S.

---

*Menda Typogr. in hac Introductione ita corrigantur:*

Pag. 11. l. 2. pro $\frac{1}{3}aa$ leg. $\frac{1}{2}aa$. p. 12. l. proant. pro $+bc$ l. $-bc$ p. 13. l. 30. & 31. pro *linem* l. *lineam*. p. 36. l. 10. & ult. pro $\sqrt{}\,oo+4mp$. l. $\sqrt{oo+4mp}$. p. 39. l. 27. pro $\sqrt{aa+bb+b}$. l. $\sqrt{aa+bb}+b$.

FRAN-

# AD LECTOREM.

NE superstes hæc Pagina vacua relinqueretur, visum fuit hoc loco indicare sphalmata, quæ in Exercitationibus nostris Mathematicis, quas anno 1657. in lucem emisimus, fuerunt commissa, ac postmodum à nobis recognita; ut ea sequenti modo Lector Benevolus emendare dignetur:

Pag. 6. l. 2 lege *pretium*. p. 7. l. 8 lege *quæstio*. p. 163. l. penult. lege *quæsiverim*. p. 193. l. 12 lege *nullæ omnino*. p. 228. l. 3. lege fit $zz-2aa$. ibid. l. penult. lege *in circumferentia*. p. 295. l. 28 lege *descriptio*. p. 317. l. 22 lege *quod est rectum*. p. 327. l. 4 lege *Ostenso*. ibid. l. antep. lege *ipsa circa* p. 329. l. 10. pro EG lege EC. p. 347. l. 5. pro EC, EF lege ${}_{\varepsilon}C$, ${}_{\varepsilon}F$. p. 361. l. 1 lege *ad E, ita ut AE sit æqualis AB*. p. 372. l. antep. post Quod, & p. 393. l. 9 post Quod eo tolle virgulas. p. 423. l. 15 pro 69 lege 639. p. 432. l. 7. lege 1634. p. 434. l. ult. & p. 462 l. 30, ut & p. 480. l. 24. lege *abs re*. p. 471. l. 22. lege *in locum* $xx$. p. 525. lineæ 6, 7, 8, 9, 10 in locum linearum 2, 3, 4, 5 sunt substituendæ, & vice versâ. p. 527. l. 21 lege *Hæ autem*.