

Ast R
1188(2)

OPÚSCULO PRIMERO.
SOLUCION
DEL PROBLEMA

PROPUESTO EL AÑO DE 1797.

DADA Á LUZ
POR UNA ASOCIACION LITERARIA.

*Verum hujusmodi appropinquationes, et si in Geometria
practica utiles, nihil tamen exhibent, quod menti veritatis
avidae satis faciat. WALLISIUS,*

MADRID

En la Imprenta de la Administracion del Real Arbitrio de Beneficencia.
1805.

A 1106181

R. 93081626

AL EXC.^{MO} SEÑOR
DON PEDRO CEVALLOS,

PRIMER SECRETARIO DE ESTADO DE S. M. C.

EXC.^{MO} SEÑOR:

El profundo reconocimiento al Rey nuestro Señor, al Excelentísimo Señor Príncipe de la Paz y á V. E. mismo, por la singular proteccion que

nos han dispensado para llevar á debido efecto la publicacion del contenido de este escrito , y la Real munificencia con que han sostenido á su Autor aquí y en París , en desempeño de sus honrosas comisiones y trabajos literarios , nos impone la mas estrecha y gustosa obligacion de dar un testimonio público de nuestra eterna gratitud. Así que los infrascriptos Subscriptores , en nombre de todos los que acompaña la lista adjunta á la Noticia Histórica de esta empresa , suplicamos á V. E. se digne elevar al trono y á la alta consideracion del Excelentísimo Señor Príncipe de la Paz estos nuestros respetuosos sentimientos de agradecimiento ; y al mismo tiempo nos permita imprimir y poner al frente de este Opúsculo esta nuestra sincera protesta de la singular proteccion del Rey y sus Ministros hácia el Autor , y á los que componen esta Asociacion literaria.

EXC.^{MO} SEÑOR

Luis de Vera. Ramon de Lopez. Francisco Xavier de Jáuregui.

NOTICIA HISTÓRICA

DEL PROBLEMA PROPUESTO EN EL AÑO DE 1797,
PUBLICADA POR LOS SUBSCRIPTORES DE UNA ASOCIACION
LITERARIA.

Quando algunos amigos del Autor del Problema nos juntamos á tratar el medio de que nos valdriamos, para que no quedasen sepultados en un eterno olvido ciertos adelantamientos suyos importantes en las Matemáticas; nuestro primer intento fué formar una Asociacion de sugetos apreciores de las ciencias, que diesen á nuestra empresa la autoridad y auxilios que necesitaba. Pero ¡qual fué nuestra complacencia quando vimos en muy breve tiempo acceder á nuestros buenos deseos todos los Subscriptores comprendidos en la lista que acompaña á este escrito! Formada ya esta subscripcion, determinamos que Don Agustin de Pedrayes (así se llama el Autor) propusiese un Problema resoluble por su método, para asegurarnos de que este era nuevo, si nadie lo resolvía, como se ha verificado.

Pero teniendo bien conocido el carácter del Autor, que, aunque con un genio sobradamente inclinado á las Matemáticas, tanto como estudia para saber, otro tanto repugna el escribir para hacer papel, y adquirir fama y nombradía; previmos la resistencia que habia de oponer á nuestros pensa-

VI

mientos, y por lo mismo le ocultamos el plan trazado hasta el tiempo en que ya no tenia arbitrio para excusarse, y en que debia ceder forzosamente á nuestras instancias.

El estado de su salud quebrantada era la mayor dificultad para llevar al cabo nuestra empresa; pues habiendo sido nombrado Maestro de Matemáticas de los Caballeros Pages del Rey en 1769, sufrió por el largo espacio de diez y siete años continuos una sujecion molesta con penosas fatigas, que arruináron la robustez de su temperamento. Pasó despues al Real Seminario de Nobles quando se unieron entrámbas casas: siguió allí otros cinco años, hasta que no pudiendo absolutamente continuar la enseñanza, la piedad de S. M. le eximió de ella por un Decreto honorífico, y le concedió una licencia general para residir donde gustase con el goce de todo el sueldo que disfrutaba, y sin que se entendiera formal jubilacion; en cuya virtud se retiró á su país, donde permaneció cinco años, y consiguió una notable mejoría en sus achaques.

Restituyóse á Madrid, y entónces fué quando dispusimos con la proteccion del Gobierno hacer públicos los adelantamientos del señor Pedrayes en las Matemáticas, quien con los auxílios de calculadores que le proporcionaba el fondo de la subscripcion, se animó por fin á emprender una obra que le hubiera sido imposible concluir por sí solo,

VIII

to Nacional á juzgar las Memorias que se le remitiesen.

Comenzó á correr el tiempo señalado para Francia en 1.º de Agosto de 1797, y se cumplió en el mismo dia del siguiente 98, como se expresa en el Monitor num.º 345, en el qual, entre otras cosas, se lee lo que sigue: "S. M. Católica para estimular á los sabios que gusten ocuparse en hallar la solucion de este Problema, encargó al Marques del Campo, su Embaxador en París, propusiera un premio de cincuenta luises al primero que segun el juicio del Instituto Nacional de Francia presentase la solucion del enunciado Problema."

La Real Academia de Berlin hizo su publicacion, y propuso el premio de cincuenta federicos de oro en los mismos términos y con las propias condiciones en 1.º de Noviembre de 1797, y corrió el año prefixo hasta igual dia de 98. Mr. Merian, Secretario perpetuo de aquella Academia, recibió una sola Memoria dirigida allí, en cuyo sobre se leia: *A Mr. Pedrayes, Professeur de Mathematiques à Madrid*; y la entregó al Excelentísimo Señor Marques de Muzquiz, Ministro de S. M. Católica en Berlin.

En el suplemento á la Gazeta de Madrid del Mártes 17 de Abril de 1798 se publicó el Problema para los Matemáticos Españoles. Comenzó la época señalada para la solucion en España el dia 1.º

XII

„ha presentado Don Agustin de Pedrayes sobre la
„resolucion del Problema que años pasados pro-
„puso á los Matemáticos de Europa, y habiéndola
„exâminado con la mayor atencion y escrupulosidad, somos de parecer que dicho Problema
„no puede resolverse por ninguno de los métodos
„que hasta el dia se conocen, y el que propone el Autor es exâcto y riguroso, por no
„hallarse en él nada de arbitrario en los supuestos,
„de inexâcto en los cálculos, ni de ilegítimo en las
„consequencias, y que conducirá á la solucion que se busca;
„pero como él es parte de una teoría, á la qual el Autor se propone aplicarle,
„es de desear que la publique.”

En consecuencia de la censura dicha, S. M. se ha servido conceder permiso para la impresion de la primera Parte de la obra del Profesor de Matemáticas Don Agustin de Pedrayes, relativa á la solucion del Problema, que hace años propuso á los sabios de Europa, y es la que damos á luz. El público, juez recto é imparcial de las obras que se imprimen, dará á ésta el grado de reputacion que merezca.

XIV

Señor Don Vicente Aguilar Jurado.	Señor Don Manuel Guerra y Marchan.
Señor Don Esteban Porlier.	Señor Don Josef Luis de Amandi.
Señor Don Manuel de la Peña.	Señor Don Pedro Manuel de Ayala.
Señor Marques de Nevares.	Señor Don Pedro Joaquin de Cifuentes.
Señor Don Carlos Altamirano.	Señores Don Alvaro Valdés y Don Josef Alvar Gonzalez Zarracina.
Señor Don Francisco de Acedo y Torres.	El Conde de Marcel de Peñalva.
Señor Don Rafael de Echabúru.	Señor Don Domingo Enrique de Puertas.
Señor Don Luis de Vera.	Señor Don Juan Ignacio de Guell.
Señor Don Mariano García de Zamora.	Señor Don Francisco Antonio de Amandi.
Señor Don Rafael Josef de Amandi.	Señor Don Antonio Castilla.
Señor Don Agustin Vitorero.	Señor Don Tadeo Galisteo y Manrique.
Señor Don Bernardo de Riega.	Señor Don Manuel Sixto de Espinosa.
Señor Don Ramon de Rivera.	Señor Don Miguel de Ochoa.
Señor Don Joaquin Mendez de Vigo.	
Señor Don Miguel Antonio de Amandi.	

XXIV

$tT = tr \int \frac{u dx}{\sqrt{rx}}$: si se supone $\sqrt{rx}$ la abscisa comun, se-

rá muy fácil determinar la ordenada correspondiente en cada término; y representando por (L) , (N) , (Q) , (T) estas áreas, de la solución del Problema se sacarán los valores de los coeficientes (l) , (n) , (q) , (t) que multiplican cada una de ellas.

Lo mismo se entenderá dicho de los términos.....

$$mM = mr \int \frac{du \sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}}, \quad pP = pr \int \frac{du \sqrt{r-x}}{\sqrt{u}},$$

$$sS = sr \int \frac{du \sqrt{(4r-x) \cdot (r-x)}}{\sqrt{ru}}, \quad zZ = zr \int \frac{x du}{\sqrt{ru}},$$

en los quales la abscisa comun es $\sqrt{ru}$.

10.^a Ninguna de estas diferenciales dA , dB &c. dS , dZ es separadamente integrable en términos finitos por los métodos que hasta ahora son conocidos.

Agustin de Pedrayes.

ARTÍCULO I.

I

En este artículo se determinan las funciones (x) (u) , y se demuestran sus propiedades.

2

Si se supone $x = \frac{4\Gamma r^2}{\Delta^2}$, dando á (Γ) (Δ) los valores que indican las equaciones (N.º 1. Cálculo. pág. 1.), será $(r-x)$ un quadrado perfecto, y se tendrá $\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r}} = \frac{\Lambda}{\Delta}$ que es una funcion racional de (ϕ) y (r) .

Por lo supuesto será

$$r-x = \frac{(\Delta^2 - 4\Gamma r)r}{\Delta^2}$$

Multiplicando sucesiva y ordenadamente los factores de (Γ) , se halla la equacion que da su valor representado por una funcion de la variable (ϕ) combinada con la constante (r) .

Elevando la funcion (Δ) al quadrado, y restando $4\Gamma r$ resultará un quadrado perfecto que señalaremos por (Λ^2) , y su raiz quadrada por (Λ) ;

Así se tendrá

$$\begin{aligned}\Delta^2 - 4\Gamma r &= \Lambda^2 \\ \frac{r-x}{r} &= \frac{\Lambda^2}{\Delta^2}\end{aligned}$$

2

$$\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r}} = \frac{\Lambda}{\Delta}$$

y se podrá expresar $\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r}}$ por una funcion racional de (ϕ) y (r) .

3

Tambien $\frac{\sqrt{4r-x}}{2\sqrt{r}}$ será representada por otra funcion racional de (ϕ) y (r) .

En la misma suposicion será

$$4r-x = \frac{(\Delta^2 - \Gamma r) \cdot 4r}{\Delta^2}, \text{ y restando (N.º 3.) } (\Gamma r) \text{ de } (\Delta^2)$$

resulta un quadrado perfecto que se supondrá igual á (O^2) , y su raiz quadrada igual á (O) .

Por lo que se tendrá

$$\begin{aligned} \Delta^2 - \Gamma r &= O^2 \\ \frac{4r-x}{4r} &= \frac{O^2}{\Delta^2} \\ \frac{\sqrt{4r-x}}{2\sqrt{r}} &= \frac{O}{\Delta} \end{aligned}$$

Luego las funciones (Γ) (Δ) señaladas dan $\left(\frac{\sqrt{4r-x}}{2\sqrt{r}} \right)$ expresada por una funcion racional de (ϕ) y (r) .

4

Si se supone igualmente $u = \frac{4\Gamma r^2}{\Pi^2}$, representando (Γ) por la funcion ya propuesta, y (Π) por otra funcion que se señala (Cálc. pág. 2. N.º 1.) resulta $\left(\frac{r-u}{r}\right)$ un quadrado perfecto, y se tendrá $\frac{\sqrt{r-u}}{\sqrt{r}} = \frac{\Phi}{\Pi}$, que es una funcion racional de (ϕ) y (r) .

Se halla del mismo modo en virtud de la suposicion

$$r-u = \frac{(\Pi^2 - 4\Gamma r) \cdot r}{\Pi^2}$$

Elevando al quadrado la funcion representada por (Π) , y restando de ella $(4\Gamma r)$ (N.º 2.) sale un quadrado perfecto que se representará por (Φ^2) : por consiguiente resulta

$$\frac{r-u}{r} = \frac{\Phi^2}{\Pi^2}$$

$$\frac{\sqrt{r-u}}{\sqrt{r}} = \frac{\Phi}{\Pi}$$

que es una funcion racional de la variable (ϕ) combinada con la constante (r) .

Es tambien $\left(\frac{4r-u}{4r}\right)$ un quadrado perfecto , y

$$\frac{\sqrt{4r-u}}{2\sqrt{r}} = \frac{\Psi}{\Pi}, \text{ esto es, igual á una funcion}$$

racional de (ϕ) y (r) .

Porque se hallará

$$4r-u = \frac{(4\Pi^2 - 4\Gamma r) \cdot r}{\Pi^2}$$

$$\frac{4r-u}{4r} = \frac{(\Pi^2 - \Gamma r)}{\Pi^2}$$

Pero resulta (N.º 3.) $(\Pi^2 - \Gamma r)$ un quadrado perfecto (Ψ^2) : luego se tendrá

$$\frac{4r-u}{4r} = \frac{\Psi^2}{\Pi^2}$$

$$\frac{\sqrt{4r-u}}{2\sqrt{r}} = \frac{\Psi}{\Pi}$$

que es una funcion racional de (ϕ) y (r) .

6

La diferencial de (x) se tiene por esta equacion

$$dx = \frac{4r^2 (\Delta d\Gamma - 2\Gamma d\Delta)}{\Delta^3}$$

Para hallar la diferencial de $\left(\frac{\Gamma}{\Delta^2}\right)$; supóngase

$$D = \frac{\Gamma}{\Delta^2}$$

$$\text{Será } \Delta^2 D = \Gamma$$

$$2 D \Delta d\Delta + \Delta^2 dD = d\Gamma$$

$$\frac{2\Gamma d\Delta}{\Delta} + \Delta^2 dD = d\Gamma$$

$$\text{y se tendrá } dD = \frac{\Delta d\Gamma - 2\Gamma d\Delta}{\Delta^3}$$

Por lo que siendo $x = 4 D r^2 (2)$ resulta

$$dx = \frac{4r^2 (\Delta d\Gamma - 2\Gamma d\Delta)}{\Delta^3}$$

7

Es consiguiente determinar los valores de $(\Delta d\Gamma)$ y de $(-2\Gamma d\Delta)$, lo que se manifiesta en el (Cálc. pág. 3.) executadas las operaciones ordenadamente.

El (N.º 1.) da el valor de $(\Delta d\Gamma)$ (Cálc. pág. 3.)

El (N.º 2.) da el de $(-2\Gamma d\Delta)$.

El (N.º 3.) el de $(\Delta d\Gamma - 2\Gamma d\Delta)$

pues si se supone $\Delta d\Gamma - 2\Gamma d\Delta = 2X d\phi$, se verá en el (N.º 3.) la funcion racional (X) que entra en la expresion de esta diferencial.

Así solamente resta demostrar que (X_1) tiene por factor la función (Ω) sobre las dichas.

Se ve (N.º 2.) el cociente que resulta en la división sin resta de (X_1) por (Φ) .

Y se halla (N.º 3.) por la división cabal y sin resta de $\left(\frac{X_1}{\Phi}\right)$ por (Ψ) su cociente (Ω) ; de lo que se deducen las ecuaciones

$$\frac{X_1}{\Phi \Psi} = \Omega$$

$$X_1 = \Phi \Psi \Omega$$

13

$$\text{Pues que es } dD_1 = \frac{2 X_1 d\phi}{\Pi^3} = \frac{\Phi \Psi \Omega (2 d\phi)}{\Pi^3} \quad (10.)$$

$$\text{se tendrá } du = 4 r^2 dD_1 = \frac{\Phi \Psi \Omega (8 r^2 d\phi)}{\Pi^3}$$

14

Las propiedades de las funciones que representan los valores de (x) (u) demostradas en este artículo, están contenidas en las siguientes ecuaciones:

$$x = \frac{4 \Gamma r^2}{\Delta^2} ; \quad \frac{\sqrt{x}}{2 r} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{\Delta} ;$$

$$\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r}} = \frac{\Lambda}{\Delta} ; \quad \frac{\sqrt{4 r-x}}{2 \sqrt{r}} = \frac{O}{\Delta} ;$$

$$dx = \frac{\Lambda O \Sigma . 8 r^2 d\phi}{\Delta^3} ;$$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{4 \Gamma r^2}{\Pi^2} ; \quad \frac{\sqrt{u}}{2r} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{\Pi} ; \\
 \frac{\sqrt{r-u}}{\sqrt{r}} &= \frac{\Phi}{\Pi} ; \quad \frac{\sqrt{4r-u}}{2\sqrt{r}} = \frac{\Psi}{\Pi} ; \\
 du &= \frac{\Phi \Psi \Omega \cdot 8 r^2 d\phi}{\Pi^3} ;
 \end{aligned}$$

Falta solamente explicar el modo con que se han hallado dichas funciones, y desde luego se manifiesta una aplicacion de la analisis de Diofanto.

$$\text{Sea } x = \frac{\Gamma r}{\Delta^2}$$

$$r-x = \frac{(\Delta^2 - \Gamma) \cdot r}{\Delta^2} = \frac{(\Delta - K)^2 r}{\Delta^2}$$

$$4r-x = \frac{(4\Delta^2 - \Gamma) \cdot r}{\Delta^2} = \frac{(2\Delta - H)^2 r}{\Delta^2}$$

$$\text{Se tendrá } \Delta = \frac{K}{2} + \frac{\Gamma}{2K}$$

$$\Delta = \frac{H}{4} + \frac{\Gamma}{4H}$$

$$\Gamma = \frac{KH(2K-H)}{K-2H}$$

$$\text{Suponiendo } u = \frac{\Gamma r}{\Pi^2}$$

$$r-u = \frac{(\Pi^2 - \Gamma) \cdot r}{\Pi^2} = \frac{(\Pi - F)^2 r}{\Pi^2}$$

$$4r-u = \frac{(4\Pi^2 - \Gamma) \cdot r}{\Pi^2} = \frac{(2\Pi - N)^2 r}{\Pi^2}$$

Se hallará del mismo modo

$$\Pi = \frac{F}{2} + \frac{\Gamma}{2F}$$

17

Suponiendo en la fórmula antecedente $y = 2x$; $S = A$; resultará substituyendo los valores correspondientes

$$dA = \frac{2r dx}{\sqrt{(2r - 2x) \cdot 2x}} = \frac{r dx}{\sqrt{(r - x) \cdot x}}$$

18

Suponiendo $y = \frac{1}{2}x$; $S = B$; resultará

$$dB = \frac{\frac{1}{2}r dx}{\sqrt{(2r - \frac{1}{2}x) \cdot \frac{1}{2}x}} = \frac{r dx}{\sqrt{(4r - x) \cdot x}}$$

19

Suponiendo $y = 2u$; $S = C$; resulta

$$dC = \frac{r du}{\sqrt{(r - u) \cdot u}}$$

20

Últimamente, si se supone $y = \frac{1}{2}u$; $S = E$ resulta

$$dE = \frac{r du}{\sqrt{(4r - u) \cdot u}}$$

21

Luego (dA) es la diferencial de un arco de círculo correspondiente á la abscisa $(2x)$ contada desde el origen del diámetro $(2r)$.

Igualmente (dB) (dC) (dE) son las diferenciales de otros arcos circulares correspondientes á las abscisas $(\frac{1}{2}x)$, $(2u)$ $(\frac{1}{2}u)$ contadas desde el origen del mismo diámetro.

22

Las diferenciales (dA) (dB) &c. de los arcos reciben las transformaciones indicadas por las equaciones siguientes

$$\begin{aligned} 1.^a \quad \frac{dA}{4r\sqrt{r}} &= \frac{O \Sigma d\phi}{\Delta \sqrt{\Gamma}} \\ 2.^a \quad \frac{dB}{2r\sqrt{r}} &= \frac{\Lambda \Sigma d\phi}{\Delta \sqrt{\Gamma}} \\ 3.^a \quad \frac{dC}{4r\sqrt{r}} &= \frac{\Psi \Omega d\phi}{\Pi \sqrt{\Gamma}} \\ 4.^a \quad \frac{dE}{2r\sqrt{r}} &= \frac{\Phi \Omega d\phi}{\Pi \sqrt{\Gamma}} \end{aligned}$$

$$\text{Siendo (17.) } dA = \frac{r dx}{\sqrt{(r-x) \cdot x}}$$

$$(14.) r dx = \frac{\Lambda O \Sigma. 8 r^3 d\phi}{\Delta^3}$$

$$\sqrt{r-x} = \frac{\Lambda \sqrt{r}}{\Delta}; \quad \sqrt{x} = \frac{2r\sqrt{\Gamma}}{\Delta};$$

Si se substituyen estos valores será

$$dA = \frac{\Lambda O \Sigma. 8 r^3 d\phi}{\Delta^3 \cdot \frac{\Lambda \sqrt{r}}{\Delta} \cdot \frac{2 r \sqrt{\Gamma}}{\Delta}} = \frac{O \Sigma. 4 r d\phi \sqrt{r}}{\Delta \sqrt{\Gamma}};$$

y de esta se saca la equation primera.

$$dB = \frac{r dx}{\sqrt{(4r-x) \cdot x}} \cdot \sqrt{4r-x} = \frac{2 O \sqrt{r}}{\Delta}$$

luego

$$dB = \frac{\Lambda O \Sigma. 8 r^3 d\phi}{\Delta^3 \cdot \frac{2 O \sqrt{r}}{\Delta} \cdot \frac{2 r \sqrt{\Gamma}}{\Delta}} = \frac{\Lambda \Sigma. 2 r d\phi \sqrt{r}}{\Delta \sqrt{\Gamma}};$$

de la que se deduce la equation segunda.

Igualmente se tienen estas equations

$$dC = \frac{r du}{\sqrt{(r-u) \cdot u}} \cdot r du = \frac{\Phi \Psi \Omega. 8 r^3 d\phi}{\Pi^3}$$

$$\sqrt{r-u} = \frac{\Phi \sqrt{r}}{\Pi}; \quad \sqrt{u} = \frac{2 r \sqrt{\Gamma}}{\Pi}$$

de las que resulta la equation tercera.

$$\text{Del mismo modo substituyendo en } dE = \frac{r du}{\sqrt{(4r-u) \cdot u}}$$

por $\sqrt{4r-u}$, $\frac{2 \Psi \sqrt{r}}{\Pi}$, se halla la equation quarta.

Si se supone en una Elipse, (e) = al semi-exe mayor;
 (f) = al semi-exe menor; (t) = á la abscisa contada
 desde el centro; (y) = á la semi-ordenada correspondiente;
 (S) = al arco; se tendrá

$$dS = \sqrt{dy^2 + dt^2} = \frac{dt \sqrt{e^2 + \left(\frac{f^2 - e^2}{e^2}\right) \cdot t^2}}{\sqrt{e^2 - t^2}}$$

De la equacion á la Elipse $y^2 = \frac{f^2}{e^2} (e^2 - t^2)$ se sacan
 las siguientes

$$e^2 y^2 = f^2 e^2 - f^2 t^2$$

$$e^2 y dy = -f^2 t dt$$

$$e^4 y^2 dy^2 = f^4 t^2 dt^2$$

$$e^4 y^2 dt^2 = -f^2 e^2 t^2 dt^2 + f^2 e^4 dt^2$$

$$e^2 y \sqrt{dy^2 + dt^2} = dt \sqrt{f^2 e^4 + (f^4 - f^2 e^2) \cdot t^2}$$

$$\sqrt{dy^2 + dt^2} = dS = \frac{dt \sqrt{f^2 e^4 + (f^4 - f^2 e^2) \cdot t^2}}{e^2 y}$$

$$e y = f \sqrt{e^2 - t^2}$$

$$\text{luego } dS = \frac{dt \sqrt{e^2 + \left(\frac{f^2 - e^2}{e^2}\right) \cdot t^2}}{\sqrt{e^2 - t^2}}$$

Determinados los valores de la fórmula por estas equaciones $t^2 = 4rx$; $e^2 = 4r^2$; $f^2 = 3r^2$; $S = F$; se halla

$$dF = \frac{dx \sqrt{4r^2 - rx}}{2\sqrt{(r-x) \cdot x}}, \text{ porque}$$

$$dt = \frac{dx \sqrt{r}}{\sqrt{x}}; \frac{\sqrt{e^2 + \left(\frac{f^2 - e^2}{e^2}\right) \cdot t^2}}{\sqrt{e^2 - t^2}} = \frac{\sqrt{4r - x}}{2\sqrt{r-x}};$$

$$\text{y por consiguiente } dF = \frac{dx \sqrt{4r^2 - rx}}{2\sqrt{(r-x) \cdot x}}.$$

Luego siendo $t^2 = 4ru$; $S = K$, se tendrá tambien

$$dK = \frac{du \sqrt{4r^2 - ru}}{2\sqrt{(r-u) \cdot u}}$$

Así (dF) (dK) son las diferenciales de dos arcos elípticos correspondientes á las abscisas $2\sqrt{rx}$, $2\sqrt{ru}$ contadas desde el centro de una misma Elipse, cuyo semi-exe mayor es $= 2r$, y su semi-exe menor $= r\sqrt{3}$.

Las equaciones

$$\frac{d F}{4 r \sqrt{r}} = \frac{O^2 \Sigma d \phi}{\Delta^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$\frac{d K}{4 r \sqrt{r}} = \frac{\Psi^2 \Omega d \phi}{\Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

dan la expresion de dichas diferenciales en funciones de (ϕ)
multiplicadas por la diferencial de (ϕ) .

En la equacion $d F = \frac{d x \sqrt{4 r^2 - r x}}{2 \sqrt{(r-x) \cdot x}}$ se substituirá

$$\frac{\Lambda O \Sigma. 4 r^2 d \phi}{\Delta^3} = \frac{d x}{2}$$

$$\frac{2 O r}{\Delta} = \sqrt{4 r^2 - r x}$$

$$\frac{2 r \Lambda \sqrt{\Gamma r}}{\Delta^2} = \sqrt{(r-x) \cdot x}$$

y reduciendo resultará la equacion primera.

En $d K = \frac{d u \sqrt{4 r^2 - r u}}{2 \sqrt{(r-u) \cdot u}}$, substituyase

$$\frac{\Phi \Psi \Omega. 4 r^2 d \phi}{\Pi^3} = \frac{d u}{2}$$

$$\frac{2 r \Psi}{\Pi} = \sqrt{4 r^2 - r u}$$

$$\frac{2 r \Phi \sqrt{\Gamma r}}{\Pi^2} = \sqrt{(r-u) \cdot u} \text{ y se tendrá}$$

$d K = \frac{\Psi^2 \Omega. 4 r d \phi \sqrt{r}}{\Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$, de donde sale la equacion segunda.

Suponiendo (e) el semi-eje primero de una Hyperbola, (f) el semi-eje segundo, (t) la abscisa contada desde el centro, (y) la semi-ordenada correspondiente, (ϑ) su arco;

$$\text{será } d\vartheta = \frac{dt \times \sqrt{\left(\frac{e^2 + f^2}{e^2}\right) \cdot t^2 - e^2}}{\sqrt{t^2 - e^2}}.$$

La equacion á la Hyperbola, $y^2 = \frac{f^2}{e^2} (t^2 - e^2)$ da las siguientes equaciones

$$e^2 y^2 = f^2 t^2 - f^2 e^2$$

$$e^2 y dy = f^2 t dt$$

$$e^4 y^2 dy^2 = f^4 t^2 dt^2$$

$$e^4 y^2 dt^2 = f^2 e^2 t^2 dt^2 - f^2 e^4 dt^2$$

$$e^4 y^2 (dy^2 + dt^2) = (f^4 + f^2 e^2) t^2 dt^2 - f^2 e^4 dt^2$$

$$e^2 y^2 (dy^2 + dt^2) = f^2 dt^2 \left(\left(\frac{f^2 + e^2}{e^2} \right) t^2 - e^2 \right)$$

$$e y \sqrt{dy^2 + dt^2} = f dt \sqrt{\left(\frac{e^2 + f^2}{e^2} \right) \cdot t^2 - e^2},$$

y como es $\sqrt{dy^2 + dt^2} = d\vartheta$,

$$e y = f \sqrt{t^2 - e^2} \text{ se tendrá}$$

$$d\vartheta = \frac{dt \sqrt{\left(\frac{e^2 + f^2}{e^2} \right) \cdot t^2 - e^2}}{\sqrt{t^2 - e^2}}$$

$$\text{Sea } e = 2r; f = 2r\sqrt{3}; t = \frac{r\sqrt{4r-x}}{\sqrt{r-x}}$$

$$\text{resultará } \left(\frac{e^2 + f^2}{e^2} \right) t^2 - e^2 = 4t^2 - 4r^2;$$

$$4t^2 - 4r^2 = \frac{16r^3 - 4r^2x}{r-x} - 4r^2 = \frac{12r^3}{r-x};$$

$$t^2 - e^2 = \frac{4r^3 - r^2x}{r-x} - 4r^2 = \frac{3r^2x}{r-x}; \text{ luego}$$

$$\text{será } \frac{\sqrt{\left(\frac{e^2 + f^2}{e^2} \right) \cdot t^2 - e^2}}{\sqrt{t^2 - e^2}} = \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{De la equacion } t = \frac{r\sqrt{4r-x}}{\sqrt{r-x}} \text{ se saca}$$

$$t^2(r-x) = 4r^3 - r^2x$$

$$2t dt(r-x) - t^2 dx = -r^2 dx$$

$$2r dt(r-x)\sqrt{(4r-x)(r-x)} = 3r^2 dx$$

$$\text{así es } dt = \frac{3r^2 dx}{2(r-x)\sqrt{(4r-x)(r-x)}}$$

de la que se deduce la diferencial de un arco hyperbólico

$$d\vartheta = \frac{3r^2 dx \sqrt{r}}{(r-x) \cdot \sqrt{(4r-x) \cdot (r-x) \cdot x}}.$$

Si se supone $\beta = \frac{2 \sqrt{(4r-x) \cdot rx}}{\sqrt{r-x}}$; será

$$d\beta = \frac{dx \sqrt{r^2 - rx}}{\sqrt{(4r-x) \cdot x}} + \frac{3r^2 dx \sqrt{r}}{(r-x) \sqrt{(4r-x) (r-x) \cdot x}},$$

pues que se tendrán estas equaciones

$$\beta^2 (r-x) = 16r^2 x - 4rx^2$$

$$2\beta d\beta (r-x) - \beta^2 dx = 16r^2 dx - 8rx dx$$

$$2\beta d\beta (r-x)^2 = 16r^3 dx - 8r^2 x dx + 4rx^2 dx$$

$$d\beta (r-x) \sqrt{(4r-x) (r-x) \cdot rx} = 4r^3 dx - 2r^2 x dx + rx^2 dx$$

$$d\beta (r-x) \sqrt{(4r-x) (r-x) \cdot rx} = (r-x)^2 \cdot r dx + 3r^3 dx;$$

y de esta última se deduce la propuesta.

Por la octava condicion del Programa

$$dH = \frac{dx \sqrt{r^2 - rx}}{\sqrt{(4r-x) \cdot x}}$$

$$dG = \frac{du \sqrt{r^2 - ru}}{\sqrt{(4r-u) \cdot u}}$$

Luego $dH = d\beta - d\beta'$

$dG = d\beta' - d\beta'$; y los términos (H) , (G) son cada uno la diferencia de un arco hyperbólico á una recta finita.

31

Procediendo del mismo modo que en el (26) se halla

$$\frac{dH}{2r\sqrt{r}} = \frac{\Lambda^2 \Sigma d\phi}{\Delta^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$\frac{dG}{2r\sqrt{r}} = \frac{\Phi^2 \Omega. d\phi}{\Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

32

Representando (ϑ) la abscisa de una curva, (β) la ordenada correspondiente ($\beta d\vartheta$) la diferencial de su area, será muy fácil determinar la abscisa y ordenada en los términos de la advertencia nona del Programa.

$$\text{Sea } \beta d\vartheta = dL = \frac{r dx \sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{será } \vartheta = 2\sqrt{rx}$$

$$\beta = \sqrt{4r^2 - ru}$$

$$\text{pues se tendrá } d\vartheta = \frac{dx \sqrt{r}}{\sqrt{x}}$$

$$\beta d\vartheta = \frac{r dx \sqrt{4r-u}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{sea } \beta d\vartheta = dM = \frac{r du \sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}}$$

$$\text{será } \vartheta = 2\sqrt{ru}$$

$$d\vartheta = \frac{du \sqrt{r}}{\sqrt{u}}$$

$$\beta = \sqrt{4r^2 - rx}$$

supóngase igualmente $\beta d\vartheta = dT = \frac{ru dx}{\sqrt{rx}}$

se halla $\vartheta = 2\sqrt{rx}$

$$d\vartheta = \frac{dx \sqrt{r}}{\sqrt{x}}$$

$$\beta = u$$

y si se supone $\beta d\vartheta = dZ = \frac{rx du}{\sqrt{ru}}$

se tendrá $\vartheta = 2\sqrt{ru}$

$$d\vartheta = \frac{du \sqrt{r}}{\sqrt{u}}$$

$$\beta = x$$

Del mismo modo se determinará la abscisa, y ordenada en los demas términos.

33

Por las equaciones siguientes se tiene la expresion de todos estos términos en $(d\phi)$ y funciones de (ϕ) .

$$1.^a \quad \frac{dL}{8r^2 \sqrt{r}} = \frac{\Lambda O \Sigma \Psi d\phi}{\Delta^2 \Pi \sqrt{\Gamma}}$$

$$2.^a \quad \frac{dM}{8r^2 \sqrt{r}} = \frac{\Phi \Psi \Omega O d\phi}{\Delta \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$3.^a \quad \frac{dN}{4r^2 \sqrt{r}} = \frac{\Lambda O \Sigma \Phi d\phi}{\Delta^2 \Pi \sqrt{\Gamma}}$$

$$4.^a \quad \frac{dP}{4r^2 \sqrt{r}} = \frac{\Phi \Psi \Omega \Lambda d\phi}{\Delta \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$5.^a \quad \frac{d Q}{8 r^2 \sqrt{r}} = \frac{\Lambda O \Sigma \Phi \Psi d \phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$6.^a \quad \frac{d S}{8 r^2 \sqrt{r}} = \frac{\Phi \Psi \Omega \Lambda O d \phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$7.^a \quad \frac{d T}{16 r^2 \sqrt{r}} = \frac{r \Gamma \Lambda O \Sigma d \phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

$$8.^a \quad \frac{d Z}{16 r^2 \sqrt{r}} = \frac{r \Gamma \Phi \Psi \Omega d \phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$$

El método de substituciones es el mismo en estos términos que en los antecedentes, y para evitar repeticiones se señala solamente el resultado.

34

La equacion contenida en la advertencia quinta del Programa se puede expresar como se representa (Cálc. pág. 7. N.º 1. 2. 3. 4.), sin mudar su forma.

En las equaciones (N.º 1. 2.) los términos correspondientes son iguales; esto es

$$\begin{aligned} & \frac{a d A}{4 r \sqrt{r}} + \frac{b d B}{2 r \sqrt{r}} + \frac{c d C}{4 r \sqrt{r}} + \&c.^a \\ &= \frac{a O \Sigma d \phi}{\Delta \sqrt{\Gamma}} + \frac{b \Lambda \Sigma d \phi}{\Delta \sqrt{\Gamma}} + \frac{c \Psi \Omega d \phi}{\Pi \sqrt{\Gamma}} + \&c.^a \end{aligned}$$

Son tambien homogéneos ó del mismo número de dimensiones, y con multiplicar dichas equaciones por $(r^2 \sqrt{r})$ tendrán sus términos las mismas dimensiones que los correspondientes en la equacion de la advertencia quinta.

Mirando como conocidos por la solución del Problema los valores de los coeficientes en la equacion (N.º 1.), señá-
lense por las letras (a') (b') &c.^a, y será fácil determinar
los valores de los coeficientes en los términos correspondien-
tes de la equacion (*advertencia quinta*); pues se tendrá

$$a r d A = \frac{a' r d A}{4} ; \quad b r d B = \frac{b' r d B}{2} \text{ \&c.}^a ;$$

luego $a = \frac{a'}{4} ; \quad b = \frac{b'}{2} \text{ \&c.}^a$, y las dos equa-
ciones serán idénticas.

En el (N.º 2.) se representan dichos términos expresados
por ($d \phi$), y funciones de (ϕ); finalmente (N.º 3.) estan
reducidos al mismo denominador.

35

Luego si se hace esta serie de diferenciales

$$= \frac{X_1 d \phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}} , \quad \text{resultará}$$

$$dY = \frac{X_1 d \phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}} , \quad \text{en la qual es}$$

$$X_1 = a O \Sigma \Delta \Pi^2 + b \Lambda \Sigma \Delta \Pi^2 + c \Psi \Omega \Delta^2 \Pi + \text{\&c.}^a \text{ (N.º 5.)}$$

36

En la equacion (N.º 1. Cálcl. pág. 8.) estan todos los términos de (X 1) expresados por los valores que tienen las funciones de (ϕ).

Multiplicando los valores de las funciones $\Delta O \Sigma \Pi^2$ se tendrá el primer término

$$a \Delta O \Sigma \Pi^2 = 27 a (\phi^{18}) + 405 ar (\phi^{17}) + 2502 ar^2 (\phi^{16}) \&c.^a,$$

y del mismo modo todos los demas términos, como se ve en el (N.º 1. Cálcl. pág. 8.), en donde por evitar la prolixidad del cálculo no está señalada completamente cada serie, pues sin este trabajo se manifiesta muy claramente la forma del cálculo siempre que se quieran tener los valores de los coeficientes.

37

Suponiendo $V = \text{funcion } (\phi)$ será $Y = \frac{2 V \sqrt{\Gamma}}{\Delta \Pi}$ la integral finita de la equacion diferencial propuesta en el Programa.

Hágase $\Delta \Pi = R$, y se tendrá

$$Y = \frac{2 V \sqrt{\Gamma}}{R}$$

$$Y R = 2 V \sqrt{\Gamma}; \quad Y^2 R^2 = 4 V^2 \Gamma$$

$$R^2 Y dY + Y^2 R dR = 4 \Gamma V dV + 2 V^2 d\Gamma$$

$$2 R V dY \sqrt{\Gamma} + \frac{4 V^2 \Gamma dR}{R} = 4 \Gamma V dV + 2 V^2 d\Gamma$$

por consiguiente la cantidad (X) resulta idéntica á (X_1) , y se halla la integral finita de la equacion diferencial propuesta.

41

De lo demostrado hasta aquí se infiere con toda evidencia que la forma de este cálculo no puede ser ni mas sencilla, ni mas conforme á principios analíticos: su prolixidad depende únicamente de la naturaleza de las funciones (Γ) , (Δ) , (Π) , que dan la solucion.

Si fuese posible conseguirla con otras funciones de ménos términos, otro tanto se reduciria dicho cálculo.

ARTÍCULO III.

42

En lo demostrado hasta aquí está contenido el primer método para hallar la integral finita (Y) , la qual tambien se puede expresar en funciones de (x) (u) , como se demuestra en las proposiciones siguientes.

43

La equacion

$$d. \frac{\sqrt{(r-x).u}}{2r\sqrt{r}} = \frac{-4r\Gamma\Pi O\Sigma d\phi + \Delta\Lambda\Phi\Psi\Omega d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}}$$

representa la diferencial de $\sqrt{(r-x).u}$ expresada en funciones de (ϕ) multiplicadas por su diferencial $(d\phi)$.

Supóngase $D = \sqrt{(r-x).u}$ será

$$D^2 = (r-x).u$$

$$2D dD = -u dx + du(r-x)$$

$$2dD = \frac{-u dx}{\sqrt{(r-x).u}} + \frac{du\sqrt{r-x}}{\sqrt{u}}$$

Si se substituyen en estos dos términos los valores de (u) , (dx) , $(\sqrt{r-x})$, &c.³ segun se hallan por las fórmulas (14.), quitando los factores constantes y comunes, y reduciendo al mismo denominador se hallará la equacion propuesta.

44

De lo dicho se infiere, que observando el órden en que se combinan los factores correspondientes se puede determinar, sin mas cálculo, la diferencial de $\sqrt{(r-u).x}$, como se ve en la equacion que sigue

$$d. \frac{\sqrt{(r-u).x}}{2r\sqrt{r}} = \frac{-4r\Gamma\Delta\Psi\Omega d\phi + \Pi\Phi\Lambda O\Sigma d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}}.$$

La diferencial de $\sqrt{(4r-x).u}$ se señala del mismo modo en esta equacion

$$d. \frac{\sqrt{(4r-x).u}}{4r\sqrt{r}} = \frac{-r\Gamma\Pi\Lambda\Sigma d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}} + \frac{\Delta O\Phi\Psi\Omega d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}}.$$

Haciendo $D = \sqrt{(4r-x).u}$ se tendrá la equacion

$$2 d D = \frac{-u dx}{\sqrt{(4r-x).u}} + \frac{du \sqrt{4r-x}}{\sqrt{u}}$$

de la que se deduce la antecedente por la substitucion de los valores que contiene haciendo las reducciones ya indicadas.

Por la analogía de los factores se halla sin nuevo cálculo

$$d. \frac{\sqrt{(4r-u).x}}{4r\sqrt{r}} = \frac{-r\Gamma\Delta\Phi\Omega d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}} + \frac{\Pi\Psi\Lambda O\Sigma d\phi}{\Delta^2\Pi^2\sqrt{\Gamma}}.$$

$$\text{Tambien se halla } d. \frac{\sqrt{x}}{2r} = \frac{\Pi^2\Lambda O\Sigma d\phi}{\Delta^2\Pi^3\sqrt{\Gamma}}$$

Sea $D = \sqrt{rx}$ será $D^2 = rx$

$$2 d D = \frac{dx \sqrt{r}}{\sqrt{x}}$$

y substituyendo, $2 d D = \frac{\Lambda O \Sigma. 4 r d \phi \sqrt{r}}{\Delta^2 \sqrt{\Gamma}}$

$$\text{luego } d. \frac{\sqrt{x}}{2 r} = \frac{\Pi^2 \Lambda O \Sigma. d \phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}.$$

48

$$\text{Igualmente se tiene } d. \frac{\sqrt{u}}{2 r} = \frac{\Delta^2 \Phi \Psi \Omega d \phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}.$$

49

Cada una de estas diferenciales tiene la forma prescrita por la equacion $d Y = \frac{X d \phi}{\Delta^2 \Pi^2 \sqrt{\Gamma}}$ (37.) para ser comparada al segundo miembro de la equacion (N.º 1. Cálculo. pág. 7.)

Sea $d Y = d. \frac{\sqrt{x}}{2 r}$ será $X = \Pi^2 \Lambda O \Sigma$; y multiplicando los valores señalados á los factores (Π) , (Λ) (O) , (Σ) , sube (ϕ) al grado 18., por consiguiente puede ser comparada á dicho segundo miembro.

Lo mismo se demostrará de las demas diferenciales.

En la equacion (N.º 5. Cálculo. pág. 10.)

$$Y = \frac{\varepsilon \sqrt{x}}{2r} + \frac{\delta \sqrt{u}}{2r} + \frac{\rho \sqrt{(4r-x) \cdot u}}{4r \sqrt{r}} + \frac{\pi \sqrt{(4r-u) \cdot x}}{4r \sqrt{r}} \&c.^a$$

el segundo miembro puede ser $= 0$, y por consiguiente $Y = 0$, quedando la variable (ϕ) indeterminada.

Substituyendo por (x) , (u) , sus valores, se tendrá

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \sqrt{x}}{2r} &= \frac{\varepsilon \Pi \sqrt{\Gamma}}{\Delta \Pi} \\ \frac{\delta \sqrt{u}}{2r} &= \frac{\delta \Delta \sqrt{\Gamma}}{\Delta \Pi} \\ \frac{\rho \sqrt{(4r-x) \cdot u}}{4r \sqrt{r}} &= \frac{\rho O \sqrt{\Gamma}}{\Delta \Pi} \\ \frac{\pi \sqrt{(4r-u) \cdot x}}{4r \sqrt{r}} &= \frac{\pi \Psi \sqrt{\Gamma}}{\Delta \Pi} \\ \frac{\omega \sqrt{(r-x) \cdot u}}{2r \sqrt{r}} &= \frac{\omega \Lambda \sqrt{\Gamma}}{\Delta \Pi} \\ \frac{\mu \sqrt{(r-u) \cdot x}}{2r \sqrt{r}} &= \frac{\mu \Phi \sqrt{\Gamma}}{\Delta \Pi} \end{aligned}$$

pero quedando indeterminada la variable (ϕ) puede resultar

$$\varepsilon \Pi + \delta \Delta + \rho O + \pi \Psi + \omega \Lambda + \mu \Phi = 0;$$

pues es claro que comparando término á término estas fun-



