CARTAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS.

CARTAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS.

CARTAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS
DE TEODOSIO Á EUGENIO,

QUE PARA INTELIGENCIA Y COMPLEMENTO

DE LA RECREACION FILOSÓFICA

ESCRIBIÓ

EL P. D. TEODORO DE ALMEIDA,
de la Congregacion del Oratorio de S. Felipe Neri y de la Academia de las Ciencias de Lisboa, Socio de la Real Sociedad de Lóndres, y de la de Vizcaya.

ESTA OBRA

Contiene un aparato de principios necesarios para entender la Física Experimental, como se explica en los Reales Estudios de San Isidro, y para los que estudian á Jaquier, ú otros muchos Tratados que se han publicado en la Europa, &c.

TRADUCIDA AL CASTELLANO.

SEGUNDA IMPRESION,

CORREGIDA Y AUMENTADA.

TOMO PRIMERO.

CON PRIVILEGIO.
MADRID EN LA IMPRENTA REAL.
AÑO DE 1792.

Se advierte á los Libreros enquadernadores, que estos dos tomos de Cartas Físico-Matemáticas son 1.º y 2.º como se dice en las portadas; y así no atiendan á que en los pliegos dice VIII. y IX. El octavo, que completa la Recreacion, y se añade en esta edicion, saldrá presto.

PRÓLOGO
DEL TRADUCTOR.

Dos motivos principalmente me han animado á facilitar mas la lectura de estas Cartas del Padre Almeyda: el uno el deseo de desengañar á los que han oido decir á sus Maestros, aunque ignorantes de la Física Experimental, y por consiguiente de toda verdadera filosofía natural, que esta ciencia no se compone bien con la verdadera Religion: quando esto fuese otra cosa que el querer dar á su misma ignorancia y pereza un color mas agradable á costa de la verdad, la mucha piedad y religion del Padre Almeyda pudieran desmentirlos, pues junta lo benemérito de la Religion en sus apreciables tareas de púlpito y confesonario, y aquel espíritu de piedad que encanta en tantos libros devotos que tiene escritos con general aceptacion de los buenos, con estar firmemente persuadido á que sola la experimental es la verdadera Física.

Ya está averiguado, que la Religion no puede padecer detrimento por la verdadera Física, en la qual no suben á la dignidad de principios las ficciones ó supuestos arbitrarios, como en Platon y Aristóteles, sino verdades averiguadas con la experiencia; y nadie duda que la verdad no contradice á la verdad: las verdades naturales no se oponen á las que enseña la Fe: la diferencia consiste, en que las primeras se demuestran, porque sus principios ó los efectos que las indican caben en nuestro entendimiento, y las verdades que llamamos Dogmas, tienen el principio por donde pueden demostrarse, no en nosotros, sino en el divino entendimiento: todo quanto puede saber un Teólogo en este punto es que son evidentemente creibles; y son tales los testimonios que Dios nos ha dado, que sería temeridad el no creer: tambien debe estar pronto á manifestar, que no tienen contradicion los Misterios, y no puede la verdadera Filosofía dexar de tener para esto tan buenas y mejores expresiones que la Filosofía Aristotélica, si llegan á manejarla buenos Teólogos. Los impíos y hereges de los siglos anteriores todos ignoráron la verdadera Física.

El segundo motivo que me inclinó fué el ver que muchos aficionados á los descubrimientos que ha hecho en nuestro tiempo la Física, no podrian entenderla sin los principios que son indispensables; y yo los hallaba todos en las Cartas del Padre Almeyda claros y compendiosos; porque ¿en dónde se verá un tomo tan pequeño como el primero, y que al mismo tiempo abrace la geometría y el cálculo que necesita un Físico? ¿ó quién enseña los principios de la Física Experimental, y los demuestra en tan pocos pliegos como comprehende el segundo tomo?

Mas general me pareció la utilidad de estas Cartas: la Geometría es la mejor Lógica, porque no puede el buen Geómetra apartarse de la verdad sin sentir repugnancia; tanto se acostumbra el entendimiento con esta ciencia á la exâctitud. Luego podrémos esperar que empezará la educacion de los jóvenes por la Geometría, ya que está tan clara en el primer tomo de estas Cartas, á imitacion de los grandes Autores de la antigüedad, los que todos tomaban sus principios; y por eso se observa en sus escritos una evidencia y un órden que aun nos encanta. VALE.

ÍNDICE
DE LAS CARTAS
DEL PRIMER TOMO.

CARTAS FÍSICO-MATEMÁTICAS DE TEODOSIO Y EUGENIO.

CARTA PRELIMINAR

PARA SERVIR DE PROLOGO A LAS OTRAS.

Amigo Eugenio, he recibido tus Cartas, en que con amor y cortesía me condenas, por haberte dexado ignorante en muchas materias de la Física, en las que ahora te hallas embarazado. Dices que lees muchos libros de Física en lengua Francesa, que despues has aprendido, y que no los entiendes. Confieso que ninguna de tus Cartas me ha hecho impresion mas gustosa que esta última del 9 de Enero, en que te quejas con mayor sentimiento. A la verdad que yo gusto de verte tan sediento ; y ahora conozco , que el tiempo , las adversidades, los cuidados y los sustos no han podido extinguir en tí el deseo de saber ; y si la semilla arrojada en la playa ha fructificado tanto , me prometo abundantes frutos de esas viciosas plantas de los ardientes deseos en que ahora te veo ; pero sábete , que mi silencio en algunas materias en compañía de Silvio , fué preciso , y fué prudente. Si yo hubiera de tratar de todo lo que pertenece á esas materias , el estómago de tu entendimiento , por no poder digerir asuntos tan fuertes , padeceria indigestiones con mucho dolor , hipo y angustia. No siempre el órden natural de las materias es el órden natural con que deben enseñarse. Hay qüestiones , que aunque pertenecen á puntos que se tratan al principio de la Física, no son para la capacidad de los principiantes , como verás por experiencia. Ademas de que tu entendimiento era como un lienzo limpio , en que yo queria dibujar la imágen de la naturaleza , imprimiendo en ella las ideas mas claras de las maravillas de Dios ; me pareció que debia primero hacer un dibujo de lápiz por mayor de las partes mas principales , é importantes ; y despues ir metiendo los colores, ó retocando las menudencias para perfeccionar la imágen. Sin duda seria ridículo el Pintor que para hacer un retrato no delinease la nariz, boca, hombros, brazos y cuerpo, ántes de dar los últimos toques de los ojos, ó de los cabellos, por la regla de que, segun el órden natural, son los que tienen el primer lugar en la cabeza. Esto mismo haria yo, si no dexase una materia sin decir desde luego todo quanto se puede saber acerca de ella, por pasar á otras mas substanciales. Por esto no esperé á que quedase evaquada toda la mecánica en las leyes de movimiento, ántes de tratar de los colores, del sonido, del fuego, &c. cosas que te habian de dar curiosidad desde el principio. Soy de parecer, que en el método de enseñar se ha de poner la atencion principal en la mayor facilidad para la inteligencia de las materias, y en su dependencia, pudiendo reservarse para otra segunda mano ó retoque de la pintura muchas cosas, que si se tratasen desde luego, pudieran fastidiar ó cansar á los principiantes. No obstante quando se escribe para gente instruida se puede observar con todo rigor el órden de las materias. Ademas de que en la instruccion particular que te he dado, se debia tener presente el dar tan deliciosa idea del estudio de la Física, que todos se aplicasen á ella con gusto; y por esto convenia separar todo quanto pudiese ser mas espinoso y dificil. Ahora, pues, te daré gustoso la instruccion que me pides, porque ya será fácil, y podrá servir de suplemento á la que ya te he dado.

Lo primero que me pides es una instruccion sobre la Geometría, solamente la que baste para poder discurrir bien en las materias mas vulgares de la Física, y particularmente para la mecánica, ó ciencia del movimiento, que es la basa de toda ella; y añades, que no obstante la grande dificultad y trabajo que hallarias en la inteligencia de esta ciencia abstracta y espinosa, deseas tu instruccion. Advierto en tí mucho miedo para lo que solo te ha de causar consuelo y gusto. No temas, amigo, que tan vano es ese miedo en la Geometría, como lo fué en la Física, en la que te dixo la experiencia, que sirvió de materia de recreacion lo que recelabas, que solo lo fuese de aplicacion dificil y costosa. Creeme que has de hallar tanto gusto en ella, como en la Física, aunque al principio no sentirás el mismo sabor; pues solo lo conocerás en entrando un poco mas adentro en esta admirable ciencia, que es la llave de otras muchas. Los primeros pasos son los mas obscuros; pero cada verdad geométrica es una luz ó una antorcha que se enciende, y esta va succesivamente encendiendo otras; de modo, que al principio solo tenemos la simple luz de la razon que nos guia, y da conocimiento de los primeros principios, los quales se llaman *axîomas* ó primeras verdades; pero despues al paso que estas van declarando otras, va el entendimiento iluminado con muchas luces, que se van multiplicando cada vez mas; de modo, que quanto mas se adelanta, mas claro es el camino, y se anda con mas desembarazo. Digo esto de la instruccion que te prometo, porque la experiencia me ha dado esta esperanza.

No es mi intento escribir en estas Cartas los Elementos de Geometría para los que han de seguir profundamente los estudios de Matemática, sino solo preparar á los que como tú desean profundizar en el estudio de la Física, la que en los tiempos presentes no se puede entender bien sin esta previa instruccion. Los apasionados del grande Eúclides pretenden que solo en él ó en su método de tratar las verdades Geométricas se halla la genuina evidencia matemática. Creo que no disputarian conmigo, porque me contento con la evidencia, que se halla en los inumerables tratados modernos, en que Geómetras muy hábiles, dexando el método de Eúclides, siguiéron el que les pareció mas acomodado á las materias que trataban, siguiendo en estas el órden que les pareció mas natural. Bastante honor seria el mio, si pudiera entrar en el catálogo inmenso en que se leen los nombres de Arnaldo, Lami, Cleraut, la Chapele, Besout, y otros muchos, que pusiéron la mira en la facilidad de introducir en la mente de sus discípulos las verdades que los querian enseñar. El mismo Mr. de *Mont-Luca*, Historiador de la Matemática, con ser famoso partidario de Eúclides, dice: No obstante, si yo hubiera de enseñar, no dudaria en adoptar el método de los modernos.

Puede ser que me acriminen el no haber adoptado alguno de los tratados excelentes de Geometría, ya impresos, y que seria mejor que el mio. No lo dudo; mas la libertad de pensar como mejor los parece, que todos tienen en lo que no sea materia de Fe ó de costumbres, da á cada qual el derecho de exponer sus pensamientos, sin que le puedan acusar de vana presuncion, por parecerle mejores que los de los otros. Esta libertad ha sido utilísima, así en todas las ciencias naturales, como en las Matemáticas. Aunque no se concede en las verdades substanciales, sobre las que todos estan acordes, jamas se negó en el modo de enlazarlas, y deducir unas de otras, ó en el de manifestarlas al entendimiento. Si asi no fuese, no habria mas que un solo curso de Geometría, porque todos tendrian la precision de seguir en todo las pisadas del primero.

Tal vez algunas circunstancias serán objeto de la crítica : unos me censurarán de difuso en la explicacion, ó demasiado abundante en las figuras. Respondo, que mas bien quiero que entendida bien una proposicion, lean ademas un par de reglas, que no les serán penosas, que no el que sea preciso volver muchas veces atras para leer lo que ya hubiesen leido sin entenderlo. Quisiera yo, si fuese posible, que cada uno por sí mismo sin Maestro pudiese entender todo quanto le quiero enseñar.

Tambien parecerá extraño, que regularmente quando yo anuncio la proposicion, ya ésta queda aprobada; observando con rigor el método sintético ó de doctrina, desciendo siempre de los principios á las conseqüencias. Lo que me movió á seguir este método no fué el vano deseo de distinguirme de los mas, sino la propia experiencia de muchos años, que estuve enseñando por diferentes modos las mismas verdades Geométricas, y siempre observé constantemente, que quando usaba yo este método, insensiblemente, y como sin trabajo alguno me percibian, y se convencian de las verdades mas complicadas. La razon es porque no sabiendo á qué fin me dirigia, ponian toda la atencion en las proposiciones que yo iba trayendo á la memoria; y despues de haber ofrecido al entendimiento las verdades ya sabidas, en un instante las juntaban, y veian salir de ellas el theorema que yo intentaba manifestarles. Al contrario, quando las anunciaba el theorema, y me preparaba para demostrarle, advertia yo que muchas veces les costaba trabajo comprehender bien lo que yo queria probar; porque á cada verdad que yo iba diciendo, observaba yo que su entendimiento repartia la atencion en dos partes, dando la mitad á la verdad que yo les decia, y reservando la otra para el theorema, cuya verdad querian probar; esperando con impaciencia hasta ver quándo se les presentaba la conexîon, que esperaban descubrir: de esta atencion repartida nacian muchas equivocaciones, y de la impaciencia, con que estaban esperando quando se veria la conexîon con la nueva verdad, tambien nacian otras, y esto sucedia muchas veces. No es lo mismo en el método que yo sigo; pues en éste va el entendimiento de los discípulos sosegado, y sin poder distraerse á cosa alguna, porque solo puede atender á lo que se les dice, por ignorar el fin que lleva el discurso. No pretendo por esto condenar á ninguno, sino dar la razon que tengo para seguir este camino, que la experiencia me ha enseñado ser útil. Teniendo presente que sucede muchas veces, que el desacierto de un Autor temerario da ocasion, y abre la puerta á los felices aciertos de los que despues sobrevienen. La multitud inmensa de Autores, que han escrito y cada dia escriben, dando Elementos de Geometría, es buena prueba de que todavía falta, y se desea conseguir alguna cosa en punto de la facilidad, para que estas verdades se hagan notorias á todos.

Hasta en el modo de escribir las verdades y sus pruebas, separándolas totalmente, poniendo aquellas sueltas y descarnadas de las pruebas, me podrán criticar. Si la experiencia no me hubiera enseñado, que hasta el ser la impresion á la vista mas clara y desembarazada, es conducente para que sea mas fácil y clara la impresion en el alma, no lo hiciera yo así; pero sigo lo que conozco que es mas útil para la claridad y la inteligencia. La mayor claridad y facilidad es lo que me he propuesto en esta instruccion, no la mayor profundidad de doctrina, la que ni es propia de mis fuerzas, ni de una simple preparacion para la Física, como llevo dicho. Tú que por la amistad que me profesas, y la grande confianza que tienes de mi método de enseñar, me prometes seguir en todo lo que yo hallare por conveniente, así para tu instruccion, como para la mayor facilidad de ésta, me animas á que solo atienda á estos dos fines: el uno á instruirte en las verdades mas útiles que se enseñan en la Geometría, de lo que tenemos comunmente necesidad en el estudio de la Física: el otro es ahorrarte trabajo, y aumentarte la claridad en la percepcion é inteligencia. Con esta licencia, pues, empezaré en la Carta siguiente.

CARTA PRIMERA.

Sobre las Líneas y los Angulos.

§. I.

De la formacion de las líneas recta y curva.

Eugenio, imagínate que un punto se mueve; de qualquiera modo que se mueva, siempre ha de seguir algun camino: este camino que lleva el punto es el que llamamos *línea*, como A. B. (*L.* 1. *F.* 1.) Ahora bien, si el punto se mueve en busca de otro punto determinado, la *línea* es *recta*, como sucede al punto A. el qual se supone que va buscando siempre en su movimiento al punto B.

Mas si el punto que se mueve á cada paso fuere mudando de direccion (*L.* 1. *F.* 2.) la *línea* que describiere se llamará *curva*, como sucede en el punto E. de la *línea* E. I.

Explico esto mas. Si juntásemos muchas rectas inclinadas mutuamente, claro está que el punto O. siguiendo estas *líneas*, ya buscaria el punto A, ya el B, ya C, y ya últimamente D; esto no lo dudas: lo mismo, pues, hace en la curva el punto movible E, porque á cada movimiento infinitamente pequeño va mudando de direccion.

Por eso quando el punto movible caminase por una línea recta, llegará á su término mas presto, que si ántes de llegar á él fuese describiendo una curva. De aquí saco una consequencia, que tú irás escribiendo á parte en un quaderno para conservarlas mejor en la memoria.

Nº 1. Luego *la línea recta es menor que la curva, si ambas salen de un punto, y ambas terminan en otro.*

§. II.

De la línea circular.

Si la recta A. B. (L. 1. F. 3.), Eugenio amigo, se fuere moviendo al rededor, afirmándose sobre la extremidad A, la otra extremidad B. irá describiendo una curva, la que vendrá á concluir en su principio quando la recta vuelva por último á su lugar antiguo.

Esta línea recta que se mueve, se llama rayo ó radio, como A. B.: el punto A, ó la extremidad fixa se llama centro.

La curva formada por la extremidad movible se llama circunferencia ó periferia, como B. C. D. E. F.

Qualquiera porcion de esta circunferencia se llama arco, como D. C, ó D. E, &c.

El espacio comprehendido dentro de la circunferencia se llama círculo.

La recta, que de un punto de la circunferencia llega hasta el otro, atravesando por el centro, se llama diámetro. (*Lam.* 1. *Fig.* 4.)

La recta, que no pasare por el centro, y termina por ambos extremos en la circunferencia, se llama cuerda, como O. I.

La recta, que saliere fuera del círculo, se llama secante, como E. F.

Ahora, amigo, de la formacion del círculo salen varias conseqüencias.

I.

Los diferentes rayos de un círculo (*L.* 1. *Fig.* 3.) no son otra cosa sino la misma línea A. B. que se movió, haciendo el círculo y puesta en diversas situaciones hace diversos rayos.

Nº. 2. Luego *todos los rayos de un círculo son iguales entre sí.*

II.

Los rayos de un círculo son la medida de las distancias entre el centro y los puntos de la circunferencia; y como los rayos son iguales, se sigue:

Nº 3. Luego *todos los puntos de la circunferencia estan igualmente distantes del centro.*

III.

Doblado un círculo por el centro (*L.* 1. *F.* 5.) si algun punto de alguna mitad saliere mas ácia fuera, ó entrase mas ácia dentro, que los de la otra mitad, distaria este punto del centro mas ó ménos que los otros, lo que es imposible.

Nº 4. Luego *doblado qualquier círculo por el centro, se ajustarán perfectamente las dos medias circunferencias ó semicírculos.*

IV.

Si dos arcos en un círculo fueren iguales (*L.* 1. *F.* 6.), se podrá doblar el círculo por el centro, de tal modo, que no solo se ajusten las dos medias circunferencias, sino tambien los dos arcos iguales, que son partes de ellas. Entonces poniendo las extremidades de un arco sobre las extremidades del otro, se ajustará perfectamente la distancia entre estas extremidades, ó las cuerdas que las miden.

Nº 5. Luego *en el mismo círculo los arcos iguales tienen cuerdas iguales.*

Del mismo modo si en el mismo círculo son las cuerdas iguales, las extremidades de los arcos que estas atan, estarán igualmente distantes; y por ser igual su curvatura, pues se forman con igual movimiento del mismo rayo, se podrán ajustar y concidir.

Nº. 6. Luego *en el mismo círculo, cuerdas iguales piden arcos iguales.*

§. III.

De los Angulos en comun.

Amigo Eugenio, ántes de hablar de los Angulos, conviene explicarte algunos términos, que podrán ser estraños á los principiantes.

Quando dos líneas van conservando siempre entre sí igual distancia, se llaman *paralelas*: de estas trataremos adelante.

Quando la distancia va siendo mayor al paso que van adelantando estas líneas, se llaman *divergentes*, v. g. (Fig. 6.) las líneas M. I, y N. E. que segun van baxando, van distando mas entre sí.

Quando las líneas van distando entre sí cada vez ménos, se llaman *convergentes*, v. g. las mismas líneas, si se toman de abaxo ácia arriba. Esto supuesto, sabrás que:

Nº. 7. *Angulo es la divergencia de dos rayos, ó de dos líneas que se consideren como tales* (*Lam.* 1. *Fig.* 7.) El punto A. en que se unen se llama *vértice*: las dos líneas se llaman *lados*. [1]

De este conocimiento se siguen las conseqüencias siguientes.

I.

Nº 8. *El ángulo mayor ó menor es la mayor ó menor divergencia de las líneas.* Y así la longitud de las líneas no tiene conexîon alguna con la grandeza del ángulo. Por esto (*Lam.* 1. *Fig.* 8.) el ángulo E. no mudará de quantidad, bien sea que sus líneas se corten en I, ó paren en A, ó continúen hasta O.

II.

Nº 9. La medida del ángulo es la medida de la divergencia; esto es, el arco comprehendido entre los dos rayos que se for-

1 Confieso, que dos líneas unidas en un punto pueden hacer ángulo, aunque sea fuera del círculo; no obsta, como para medir la grandeza de este ángulo siempre se considera una punta del compas puesta en el vértice, y se describe un círculo que corte sus dos lados en igual distancia para conocer el valor del arco que comprehende: en este particular se consideran como rayos. Tambien advierto, que algunas veces se nota ó señala el ángulo con tres letras. En este caso siempre se ha de poner en medio de las otras dos la letra que está en el vértice.

man y describen desde el vértice, como de centro.

La circunferencia de qualquier círculo grande ó pequeño se divide en 360 partes iguales, las que se llaman *grados*: los círculos grandes tienen grados grandes, y los pequeños los tienen pequeños. Cada grado se puede dividir en 60 partes iguales, que se llaman minutos, y cada minuto en 60 partes iguales, que se llaman segundos, &c.

Nº. 10. *Quando el arco comprehendido entre los lados de un ángulo es la quarta parte de un círculo, comprehende 90 grados, y se llama* ángulo recto, como A. (*Lam.* 1. *Fig.* 9.)

Quando el arco es ménos que la quarta parte, se llama *agudo*, como B. (*Lam.* 1. *Fig.* 10.)

Quando el arco comprehende mas de la quarta parte de un círculo, se llama *obtuso*, como D. (*Lam.* 1. *Fig.* 11.)

De estas tres definiciones se sacan varias conseqüencias.

I.

Nº. 11. Luego *solamente los ángulos rectos tienen medida constante y número sabido de grados, y todos son iguales entre sí.*

II.

Nº 12. Luego *el semicírculo ó media circunferencia es la medida de dos ángulos rectos, ó de dos ángulos que tengan el valor de estos* (*Lam.* 1. *Fig.* 12.) *porque es igual á dos quartas partes del círculo, ó á* 180 *grados.*

III.

Nº 13. Luego *la circunferencia total es medida de quatro* (*Lam.* 1. *Fig.* 8.) *ángulos rectos, ó de los ángulos que tengan el valor de ellos* (*Lam.* 1. *Fig.* 13.) porque tiene por medida quatro quartas partes del círculo.

IV.

Nº 14. Luego *todos los ángulos que se pudieren formar sobre una línea recta y en un punto* (*Lam.* 1. *Fig.* 12.) *tienen el valor de dos rectos*, porque todos juntos se pueden medir por la media circunferencia, ó tienen el mismo valor que un semicírculo.

V.

Nº 15. Luego *todos los ángulos que se pueden formar al rededor de un punto* (*Lam.* 1. *Fig.* 13.) *son iguales á quatro rectos*, porque se pueden medir por una circunferencia entera.

Se llama *suplemento* de un ángulo lo que falta á éste para completar la media circunferencia ó semicírculo (*Lam.* 1. *Fig.* 14.) y así el ángulo A. tiene por suplemento la porcion de semicírculo M. N. Se llama *complemento* de un ángulo lo que falta en éste para la quarta parte de un círculo, como B. (*Lam.* 1. *Fig.* 15.) por lo qual el ángulo B. tiene por complemento el arco A. C.

De esta definicion se sacan las conseqüencias siguientes.

I.

Nº. 16. Luego *quando dos ángulos tuvieren el mismo complemento, ó el mismo suplemento, serán iguales entre sí*, porque si á ambos les falta el mismo número de grados para 90, ó para 180, ambos tendrán igual número de grados.

Quando dos rectas se cruzan (*Lam.* 1. *Fig.* 16.) tenemos quatro ángulos A. M. O. N. Aquellos ángulos que no tienen un lado comun á los dos, v. g. A. O. como tambien M. N. se llaman opuestos por el vértice, ó como algunos dicen opuestos verticalmente; adviértase bien, que como he dicho, han de ser formados por dos rectas que se crucen.

Si tomamos juntamente el ángulo M. con el A. ambos se miden por un semicírculo, y por consiguiente A. es el suplemento de M. Asimismo, si tomamos juntos el ángulo N. con el A. tienen por su medida un semicírculo; y por consiguiente A. es suplemento de N. Luego M. y N. tendrán el mismo suplemento A: y esto se puede probar con los ángulos A. y O.

II.

N.º 17. Luego *los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

§. IV.

De la línea perpendicular y de la obliqua.

Se llama línea perpendicular la recta, que cayendo sobre otra, no se inclina mas ácia un lado, que ácia otro. (*Lam.* 1. *Fig.* 17.)

De esta definicion se sacan varias conseqüencias.

I.

N.º 18. Luego *quando la perpendicular hace dos ángulos con la otra línea sobre que cae, estos serán entre sí iguales*; pues á no serlo, se inclinaria mas ácia un lado que á otro

(*Lam.* 1. *Fig.* 17.) y no seria perpendicular.

II.

N.º 19. Luego *los ángulos que hace la perpendicular son rectos*, porque valen ambos dos rectos, y pues son iguales entre sí, cada uno será un recto: por consiguiente:

La línea que con otra hiciere dos ángulos rectos, será perpendicular á esta otra, supuesto que no se inclina mas á un lado que á otro.

III.

N.º 20. Si dos líneas hicieren un ángulo recto (*Lam.* 1. *Fig.* 18.) podemos por el vértice O. prolongar una de ellas, y aparecerá un nuevo ángulo, que tambien será recto: (*Núm.* 14.) por consiguiente una línea será perpendicular á otra; y si prolongasemos las dos líneas que concurren en el ángulo O, tendrémos por la misma razon quatro ángulos rectos, y todas las líneas serian mútuamente perpendiculares.

N.º 21. Luego *siempre que una recta hace ángulo recto con otra, la será perpendicular.*

IV.

Quando una recta es perpendicular sobre otra (*Lam.* 1. *Fig.* 19.) hace con ella un ángulo recto, y entónces tambien la segunda le hace con la primera; y por el n. 21. precedente la será perpendicular.

N.º 22. Luego *quando una línea fuere perpendicular á otra, tambien esta otra lo será respecto de la primera.*

V.

Puesta una recta *m. n.* (*Lam.* 1. *Fig.* 20.) y levantada una perpendicular A. O. si desde el mismo punto queremos levantar otra, ó bien ha de pasar sobre la primera, y entónces no es línea distinta, ó ha de caer ácia alguno de los lados, y entónces no será perpendicular, porque se inclina mas á un lado que á otro.

N.º 23. Luego *del mismo punto de una línea no se pueden levantar dos perpendiculares.*

VI.

Del mismo modo (*Lam.* 1. *Fig.* 21.) si la perpendicular A. O. no se inclina á un lado, ni á otro, qualquiera otra línea que saliere de A, ó ha de venir á parar á O, y entónces no es línea diversa, ó ha de caer ácia uno de los lados, y se inclinará mas á un lado que á otro, y entónces no será perpendicular.

N.º 24. Luego *de un punto no se podrán tirar dos perpendiculares sobre la misma línea.*

V.

De otras propiedades de las líneas perpendiculares.

Supuesto que la perpendicular no se inclina mas á un lado que á otro, saldrán las conseqüencias siguientes.

I.

Nº. 25. *Si del medio de una línea* M. N. (*Lam.* 1. *Fig.* 22.) *se levanta una perpendicular, su extremidad superior* (O.) *distará igualmente de los dos extremos de la línea* M. N; pues de lo contrario, teniendo la perpendicular la extremidad inferior A. igualmente distante de los extremos M. N. y la de arriba O. mas cerca del uno que del otro, toda la línea se inclinaria ácia esta parte, y ya no seria perpendicular.

II.

Podemos partir esta perpendicular O. A. por qualquier punto que se quiera, y en este caso ese punto, v. g. E. seria la extremidad superior, y por consiguiente igualmente distante de los extremos M. N.

Nº. 26. Luego *si del medio de una línea* *se levantare una perpendicular, todos los puntos de ella distarán igualmente de los extremos de la otra línea* M. N.

III.

Diximos en el n. 25, que si del medio de la línea M. N. se levantase una perpendicular, iria á buscar el punto O. igualmente distante de las extremidades M. N. luego la línea que saliere de O, y viniere á parar en A, será perpendicular, y como del punto O. no se pueden tirar dos perpendiculares sobre la misma línea (*Num.* 24.) se sigue que la línea que saliere de O. igualmente distante de las extremidades, si fuere perpendicular ha de venir á buscar el punto A. tambien igualmente distante de ellas.

Nº. 27. Luego *si la extremidad superior de la perpendicular dista igualmente de los extremos de la otra línea, tambien la extremidad inferior distará igualmente de ellos.*

IV.

Ahora bien, pudiéndose cortar la perpendicular por el punto que se quiera, v. g. por E. (*Lam.* 1. *Fig.* 22.), y hacer que éste sea la extremidad superior, se sigue:

Nº. 28. Luego *dado en una perpendicular qualquier punto* (E.) *que diste igualmente de los extremos de la otra línea* M. N. *la per-*

pendicular vendrá á dar en el medio de ella (por el Núm. 27.)

V.

Nº. 29. Luego, generalmente hablando, *dando en la línea perpendicular qualquier punto igualmente distante de los extremos* M. N. *sea ínfimo ó superior ó qualquiera otro, ó por el medio, todos los otros puntos de la perpendicular tendrán igual distancia del uno y el otro extremo de la otra línea* (Núm. 26, 27 y 28.)

VI.

Tambien podemos cortar la línea M. N. por donde nos parezca, y de qualesquiera puntos de ella harémos extremidades; y de este modo lo que hemos dicho de la perpendicular, que dista igualmente de las extremidades de la otra línea, lo podrémos decir de la perpendicular, que distará igualmente de qualesquiera puntos notados en la otra línea.

Nº. 30. Luego *la perpendicular que tuviere un punto* (*Lam.* 1. *Fig.* 23.), *qualquiera que sea, igualmente distante de los dos notados* M. N. *en la línea sobre que cae, tendrá todos sus puntos igualmente distantes de ambos á dos.*

Ahora bien, si todos los puntos de la perpendicular A. E. I. O. (*Lam.* 1. *Fig.* 23.)

se supónen igualmente distantes de M. N. (Núm. 30.), todos los otros puntos que quedáron á los lados de esa perpendicular, ó han de quedar mas cerca de M. ó de N; y así no es posible que punto alguno que quede fuera de la perpendicular diste igualmente de los dos puntos notados en la línea sobre que cae.

Nº. 31. Luego *si un punto de la perpendicular dista igualmente de los dos notados en la línea sobre que cae, la perpendicular pasará por todos los puntos que distaren igualmente de ellos.*

§. VI.

Señales para conocer las perpendiculares, y modo de formarlas.

Hasta aquí, amigo Eugenio, del conocimiento de la perpendicular te enseñé á sacar sus propiedades; ahora por las propiedades te enseñaré á conocer la perpendicular.

I.

Nº. 32. Si una línea (*Lam.* 1. *Fig.* 24.) tuviere dos puntos igualmente distantes á otros dos señalados en otra, basta esto para ser perpendicular; v. g. si A. O. tuviese A. igualmente distante de M. N, y tambien O. igualmente distante de estos mismos, esto basta para ser perpendicular á M. N.

Porque la perpendicular que pasase por el punto O. igualmente distante de M. N, iria á tocar al punto A. tambien igualmente distante de los puntos M. N. (por el Núm. 31.) Luego si esta línea de que se trata llega de O. hasta A, pasa por donde pasaria la perpendicular; y por consiguiente lo será.

Nº 33. Luego *para levantar una perpendicular* (*Lam.* 1. *Fig.* 25.) *sobre un punto, dado* O, *bastaria lo primero señalar en esa línea dos puntos* M. N. *igualmente distantes de* O, *y describir desde ellos como de centros dos arcos con igual abertura del compas, de modo que se crucen en* A. *y tirar la línea desde* A. *hasta* O; pues de este modo tenemos que O. y A. distan igualmente de M. y N; y así por estos dos puntos podrémos tirar la perpendicular que se desea, segun el Núm. precedente.

Nº 34. Si el punto dado para levantar la perpendicular (*Lam.* 1. *Fig.* 26.) fuere I. extremidad de la línea, podrémos continuarla, y notando, como hicimos arriba, los dos puntos M. N, si desde estos describimos los dos arcos, hallarémos que el punto E. es en donde se corta, y desde allí sacarémos la perpendicular hasta I.

III.

Si de las dos extremidades de una línea M. N. (*Lam.* 1. *Fig.* 27.) describiésemos dos arcos iguales para hallar un punto A. igualmente distante de ellas, y repitiésemos la operacion con la misma ú otra abertura de compas para hallar otro punto donde cruce, igualmente distante de ellas, la línea tirada por los dos puntos en donde se cortan los arcos será perpendicular á la primera (Núm. 32.), y pasará por todos los puntos que tuvieren igual distancia de las extremidades (Núm. 35.); y así tambien pasará por el medio de la línea I.

Nº. 35. Luego *para cortar una línea por el medio* (*Lam.* 1. *Fig.* 27.) *bastará describir desde sus extremidades dos arcos iguales que se crucen ó corten en un punto* A, *y otros dos que se corten en otro, y tirar una línea por los dos puntos en que se cruzan los arcos.*

IV.

Si de un punto A. (*Lam.* 1. *Fig.* 28.) describiésemos un arco que corte una línea en dos puntos M. N, y de estos como de centro describiésemos dos arcos iguales, que se corten en O, la línea A. O. tendrá los puntos igualmente distantes de M. N; y por consiguiente le será perpendicular (Núm. 32.)

Nº 36. Luego *de este modo, de un punto se puede baxar una perpendicular sobre otra línea.*

§. VII.

De la línea obliqua.

La línea que se inclina sobre otra mas á un lado que á otro se llama *obliqua.*

Tres conseqüencias se sacan de esta nocion.

I.

Que de un punto dado A. (*Lam.* 1. *Fig.* 29.) podemos tirar sobre una misma línea muchas obliquas, dando mas ó ménos inclinacion; aunque sola una perpendicular se puede tirar desde un solo punto.

Si habiendo tirado de A. una perpendicular y muchas obliquas sobre M. N. (*Lam.* 1. *Fig.* 29.), repitiendo la operacion ácia baxo tirasemos otras líneas iguales, y del mismo modo que las superiores, la línea A. I. O. será recta y perpendicular; pues por la construccion hace los quatro ángulos rectos (Núm. 20.), y pasa por donde pasaria la perpendicular A. I. continuada. Las otras líneas A M O, A R O, A N O, formadas de dos obliquas inclinadas, serán mayores que la recta. Porque así como si el punto A. llegase á O, no por vna recta, sino por una curva, llegaria mas tarde, y andaria mas camino: lo mismo le sucederia, si primero fuese á R. ó N. para ir desde allí á O. Luego la mitad de esas líneas compuestas A. R. O, A. N. O. serian mayores que la mitad de la recta A. I. O.

II.

Nº 37. Luego *la perpendicular es la mas corta de todas las líneas que se pueden tirar desde un punto á otra línea.*

III.

Nº 38. Luego *la línea menor que se pudiere tirar desde un punto á otra línea será perpendicular á esta*, supuesto que la menor de todas es una y única, y la perpendicular es esa menor de todas (por el N. 37.)

§. VIII.

De las paralelas.

Nº 39. Si puesta una línea sobre otra, fuésemos apartando igualmente las extremidades de una de los lugares en donde estaban (*Lam.* 1. *Fig.* 30.), estas líneas conservarian entre sí igual distancia, pues el movimiento fué igual; y esto se entiende, ó bien se haga el movimiento por una línea perpendicular, como M. O. (*Lam.* 1. *Fig.* 30.) ó bien por una línea obliqua, como N. E. (*Lam.* 1. *Fig.* 31.)

N.º 40. Estas líneas que conservan entre sí distancia igual por todas partes, se llaman, como hemos dicho, *paralelas.*

De esta simple nocion de las paralelas se sacan las conseqüencias siguientes.

I.

Si ajustasemos dos ángulos iguales (*Lam.* 1. *Fig.* 32.) E A M, I O N, y despues hiciesemos mover la línea O M por encima de la línea A M, darémos igual movimiento á todos los puntos de la línea O I; por consiguiente quedarán sus puntos igualmente distantes de los puntos correspondientes en la línea A E; y así las dos líneas serán paralelas.

Todas las veces, pues, que dos ángulos sean iguales, podemos ajustar muy bien uno con otro, y despues separarlos, como acabamos de hacer ahora.

N.º 41. Luego *siempre que dos líneas caen sobre otra, y hacen á la misma parte ángulos iguales, son paralelas.*

N.º 42. Luego *siempre que dos líneas caen sobre otra, y son perpendiculares por hacer á la* *misma parte ángulos rectos, serán entre sí paralelas.*

Luego *para tirar una línea paralela á otra por un punto dado* N. (*Lam.* 1. *Fig.* 34.), *bastará levantar una perpendicular* A O, *que pase por el punto dado* N; *y despues levantar desde este punto otra que sea perpendicular á la primera que se levantó.*

Si dos líneas, pues, cayendo una sobre otra; v. g. si A E O I, cayendo sobre A N, son paralelas (*Lam.* 1. *Fig.* 32.), los puntos de una distarán igualmente de los que les corresponden en la otra; y así haciendo mover O N sobre A M, se ajustarán las dos líneas paralelas, y los dos ángulos tambien quedarán ajustados el uno con el otro; lo que nó podria ser, si no fuesen iguales.

Nº. 43. Luego *quando dos líneas son paralelas* (*Lam.* 1. *Fig.* 32.), *harán á la misma parte los ángulos iguales.*

Considerando yo la *Lam.* 1. *Fig.* 33, veo que si las dos paralelas caen sobre otra tercera A O, tambien la línea A O va á encontrar las dos paralelas.

Nº. 44. Luego *quando una recta cae sobre dos paralelas, hace por la misma parte ángulos iguales; y quando una recta hiciere con dos líneas ángulos iguales por la misma parte, las dos son paralelas.*

Supongamos ahora (*Lam.* 1. *Fig.* 35.) que formamos dos ángulos, cuyos lados sean respectivamente paralelos, y que prolongamos una de las líneas A O hasta encontrar un lado del otro ángulo E. En este caso el ángulo A será igual á O, pues una línea corta dos paralelas (N. 34.): y ademas de esto O será igual E, porque dos paralelas caen sobre una línea (N. 43.) Luego A es igual á E.

Nº. 45. Luego *todos los ángulos hechos por paralelas son iguales.*

Quando una recta corta dos paralelas (*Lam.* 1. *Fig.* 36.), los ángulos contrapuestos. A O, como tambien O M, se llaman *alternos*, por razon de estar el uno baxo la una paralela, y el otro encima de la opuesta; y si el uno está á la izquierda de la línea que corta, el otro está á la derecha; por la misma razon son alternos E N, y tambien I R.

Ahora bien, ya hemos dicho que A es igual á I, opuesto en el vértice (N. 15.) tambien diximos que el ángulo I era igual á O por las paralelas (N. 43.); y así A es igual á O, por ser su alterno.

Nº. 46. Luego *todos los ángulos alternos son iguales entre sí.*

Luego *quando una recta, cortando dos rectas, hiciere los ángulos alternos iguales, las dos líneas son paralelas.* Porque si O es igual á A, como A es igual á I, verticalmente opuesto, viene á ser O igual á I, y entónces por el N. 41. serán las dos líneas paralelas.

Quando una recta corta dos paralelas

(*Lam.* 1. *Fig.* 36.), decimos que M junto con I valen dos rectos (N. 11.), y que I es igual á O por las paralelas: luego M junto con O valen dos rectos.

Nº. 47. Luego *quando una recta cortase dos paralelas, los dos ángulos internos ácia la misma parte valen dos rectos.* La misma demostracion se aplica á los ángulos externos de la misma parte.

Luego *quando una recta corta dos paralelas, los ángulos externos ácia la misma parte valen dos rectos.* Y así I mas N son iguales á dos rectos, como tambien E mas R.

§. IX.

De las tangentes de los círculos.

Nº. 48. Quando una recta toca un círculo sin poderle cortar, aunque se la prolongue por ambas partes, se llama *tangente.*

Ahora, pues, la recta nunca puede coincidir con la curva, ni la tangente con la circunferencia. Luego la recta que toca en la circunferencia, si la prolongan, entrará en la circunferencia, ó saldrá fuera de ella: si entra, será *secante*, si sale, será *tangente.*

Nº. 49. Luego *la tangente solo toca en el círculo por un punto* O (*Lam.* 2. *Fig.* 1.)

Nº. 50. Si del centro de un círculo A tirasemos una línea (*Lam.* 2. *Fig.* 2.) al punto del contacto O, y ademas de esto otras muchas hasta tocar en la tangente, sola la del contacto quedará sin salir del círculo, pues todos los demas puntos de la tangente estan fuera de él.

Nº. 51. Luego *el rayo, que es la única línea que llega al punto del contacto, es la menor línea que se puede tirar desde el centro á la tangente.*

Nº. 52. Luego *el rayo del contacto es perpendicular sobre la tangente, y la tangente lo es sobre el rayo.* (N. 38. y 22.)

Nº. 53. Luego *no se pueden tirar muchos tangentes á un mismo punto del círculo* (*Lam.* 2. *Fig.* 3.); porque entónces habria muchas perpendiculares sobre el mismo punto del rayo O; lo que es imposible (N. 23.)

Nº. 54. Luego *si muchos círculos* (*Lam.* 2. *Fig.* 4.) *se tocan en un punto comun, todos tendrán la misma tangente en este punto*; pues no puede haber muchas en un mismo punto (N. 53.)

Ahora bien, quando muchos círculos se tocan en un punto comun, todos los rayos que vienen á parar al punto del contacto son perpendiculares á la tangente en este punto (N. 52.); y no pudiendo haber muchas perpendiculares sobre un solo punto (N. 23.), es preciso que estos rayos hagan una sola línea.

Nº. 55. Luego *quando muchos círculos se tocan en un solo punto, los rayos hacen una sola línea.*

Los centros, pues, de estos círculos son las extremidades de los rayos, los quales todos estan en una línea recta.

Nº. 56. Luego *quando muchos círculos se tocan en un solo punto, todos sus centros estan en la misma línea recta.*

Nº. 57. Luego *si dos dieren un círculo* M (*Lam.* 2. *Fig.* 5.), *y nos pidieren el centro de qualesquira otros que le toquen en un punto determinado* A, *para hallarle, bastará tirar desde el centro* I *una línea por el punto del contacto, y prolongarla.*

Por quanto en esta línea prolongada se hallarán los centros de todos los círculos imaginables que pueden tocar el círculo M en el punto dado A. (N. 56.)

§. X.

De las perpendiculares en los círculos.

Tirada una cuerda en el círculo (*Lam.* 2. *Fig.* 6.), y sobre ella levantada una perpendicular, observamos, que si la perpendicular pasa por el centro, ya tiene un punto igualmente distante de las extremidades de la cuerda, porque estan en la circunferencia; y así (N. 30.) la perpendicular ha de pasar por todos los puntos que distan igualmente de ellas: uno, pues, de estos puntos es el medio de la cuerda.

Nº. 58. Luego *la perpendicular sobre la cuerda, si pasa por el centro, la corta por el medio.*

Nº. 59. Luego *si la perpendicular pasa por el medio de la cuerda, pasa tambien por el centro* (*Lam.* 2. *Fig.* 6.); porque aquí vale la misma razon del N. 30.

Del mismo modo debemos discurrir acerca del arco, porque el medio del arco dista igualmente de las extremidades de la cuerda, pues esas mitades del arco son arcos iguales que tienen cuerdas iguales, y estas cuerdas son las distancias de las extremidades; y así la perpendicular que debe pasar todos los puntos, que distan igualmente de las extremidades de la cuerda, pasará tambien por el medio del arco. (*Lam.* 2. *Fig.* 6.)

Nº. 60. Luego *si la perpendicular pasa por el centro ó por el medio de la cuerda, pasará tambien por el medio del arco; como tambien si pasare por medio del arco, tambien pasará por el medio de la cuerda y del centro, si la prolongan*, por la misma razon del N. 30.

Si en un círculo hubiese dos cuerdas (*Lam.* 2. *Fig.* 7.) paralelas entre sí, y á una tangente, la perpendicular que pasare por el centro dividirá los arcos por el medio; de este modo *e a*, *e o* serán iguales, como tambien *e m*, *e n*; por consiguiente quitando de cada arco grande ó pequeño que en él se incluye, los restos *m a*, *n o* serán iguales.

Nº. 61. Luego *los arcos de un círculo comprehendidos entre paralelas son iguales.*

Diximos que la perpendicular que pasa por el medio de la cuerda corta al arco por el medio (N. 60.), y que los arcos son la medida de los ángulos. (N. 8.)

Luego *si nos dieren un ángulo* A (*Lam.* 2. *Fig.* 8.), *para dividirle por el medio bastará describir desde su vértice, como de centro, un arco* M N, *y tirarle su cuerda, dividiendo ésta por el medio con la perpendicular* A O, supuesto que dividida la cuerda por el medio, se divide por consiguiente el arco, el qual es la medida del ángulo.

Diximos que la perpendicular sobre el medio de la cuerda pasa por el centro del círculo que hubiere de pasar por las extremidades de ella. (N. 59.)

Nº. 62. Luego *si nos dieren tres puntos* (*Lam.* 2. *Fig.* 9.) M N O *que no estén en línea recta, y pidieren un círculo que pase por todos ellos, resolverémos el problema del modo siguiente:*

1. Ataremos los tres puntos por medio de dos líneas O N, O M.

2. Levantaré del medio de cada una de ellas las perpendiculares, y estas se cortarán en I, y en donde se cortan ó cruzan me darán el centro del círculo deseado.

Porque la perpendicular A I demuestra, que el centro del círculo que pasa por N O debe estar en ella: la perpendicular E I manifiesta, que el centro del círculo que pasare por M O debe estar en ella. Luego ambas juntas demuestran, que el círculo que hubiere de pasar por los tres puntos M N O, debe tener el centro en el punto I comun á entrambas.

Nº 63. Luego *para hallar el centro de un círculo* (*Lam.* 2. *Fig.* 10.) *bastará tirar dos cuerdas, y sobre el medio de cada una de ellas levantar su perpendicular, y entónces el punto en que se crucen será el centro deseado*, por la razon del núm. precedente.

§. XI.

Problemas sobre los círculos que tocan á otros en puntos dados en la periferia, y pasan por puntos dados fuera de ella.

I.

Si te dieren, Eugenio, un círculo A (*Lam.* 2. *Fig.* 11.), y en él un punto M para el contacto de un nuevo círculo, que debe pasar por B, se hará lo siguiente:

1. Por el N. 52: todo círculo que hubiere de tocar en M, ha de tener el centro en una línea, que pase por ese punto y por el centro del círculo A; por consiguiente estará el centro del nuevo círculo en la línea indefinita A M O.

2. Ademas de esto, el círculo pedido no solo ha de pasar por M, sino tambien por B; para esto, pues, tirada la línea B M; se levantará en el medio de ella la perpendicular E I, la qual (N. 59.) debe pasar por el centro de qualquier círculo, cuya circunferencia haya de pasar por los puntos B M.

Nº 64. Luego *el centro del nuevo círculo que toque en* M, *y pase por* B, *debe estar en el punto* R, *en el qual se cruzan las dos líneas.*

II.

Nº 65. Si el punto B, dado fuera del círculo (*Lam.* 2. *Fig.* 12.), quedase dentro de la tangente, que se retirase por el punto de contacto M, se debe hacer la misma operacion, y se hallará que el centro R cae en el punto en que se cruzan las dos líneas; y en este caso el nuevo círculo incluye al antiguo.

Nº 66. Si el punto dado B (*L.* 2. *F.* 13.) por donde ha de pasar el nuevo círculo, cayere dentro del círculo antiguo, siempre se hallará el centro por la misma operacion en el punto R, y el nuevo círculo quedará incluido dentro del primero.

Nº 67. Si te diesen una línea recta (*L.* 2. *Fig.* 14.), y en ella un punto M, para que en él toque un círculo, el qual haya de pasar por el punto dado B, harás como se sigue: levántese una perpendicular M, porque en ella ha de estar el centro del círculo que se pide (N. 53.), tírese despues la línea B M, y del medio de ella levántese una perpendicular, la qual pasará por el centro del nuevo círculo, y la circunferencia de éste irá por B y por M; y como queda dicho (N. 59.) el punto en donde se cortan ó cruzan R. será el centro.

Esta carta, amigo, se ha dilatado mucho mas de lo que yo habia pensado; bien que la deduccion de las verdades que iban espontaneamente naciendo de las que ya estaban dichas, no me permitia cortar el hilo: perdóname, aunque no te prometo la enmienda.

FIN DE LA PRIMERA CARTA.

CARTA SEGUNDA.

De la medida de los ángulos.

§. I.

De la medida de los ángulos, que tienen el vértice en la circunferencia.

Amigo Eugenio, supuesto que hayas entendido todo lo que te dixe en la carta antecedente, y el grande gusto que me insinuas en que yo continue esta instruccion, prosigo y te advierto, que aunque el ángulo, segun la definicion que dimos, es formado por dos rayos, ó por dos qualesquiera líneas, que se consideren como tales, y se debe medir, poniendo el compas en su vértice, y describiendo un arco que corte los dos lados á igual distancia para conocer el valor del ángulo; no obstante muchas veces no se necesita de esta diligencia para saber su valor, como sucede en los ángulos que tuvieren el vértice en la circunferencia, porque fácilmente se conoce quál sea su medida.

Pero de tres modos puede ser el ángulo que tiene el vértice en la circunferencia:

1. Si uno de los lados pasare por el centro (*Lam.* 2. *Fig.* 15.)

2. Si el centro quedase entre los lados. (*Lam.* 2. *Fig.* 16.)

3. Si el centro estuviese fuera del ángulo. (*Lam.* 2. *Fig.* 17.)

En el primer caso (*Lam.* 2. *Fig.* 15.) si por el centro se tirase una paralela al lado A R, quedará el ángulo central I igual al de la circunferencia O, por causa de las paralelas. (N. 45.) Luego el arco M N será medida de I. y tambien de O.

Veamos ahora, si el arco M N es la mitad del arco total A N, comprehendido por el ángulo O. Los ángulos E I, verticalmente opuestos, son iguales. (N. 17.) Luego M N es igual á R T. Ahora, pues, R T tambien es igual á A M, por ser arcos comprehendidos entre paralelas. (N. 61.) Luego M N es igual á M A; y por consiguiente M N, medida del ángulo O, es la mitad del arco A N comprehendido por él.

Nº 68. Luego *en el primer caso el ángulo de la circunferencia tiene por medida la mitad de su arco.*

En el segundo caso (*Lam.* 2. *Fig.* 16.) en que el centro queda comprehendido dentro del ángulo, tírese desde el vértice A un diámetro, que divida el ángulo total en dos *n n*, y cada uno de ellos quedará en los términos del caso antecedente, y por eso tendrá por medida la mitad de su arco parcial.

Nº 69. Luego *en este segundo caso el ángulo de la circunferencia* A *tiene por medida la mitad de su arco total.*

En el tercer caso (*Lam.* 2. *Fig.* 17.) en que el centro queda fuera del ángulo A, hágase lo siguiente:

Nº 70. Tírese del punto T una línea T N paralela al primer lado R M: en este caso los ángulos O A son alternos é iguales, y tendrán la misma medida (N. 46.); pero el ángulo O por el caso precedente tiene por medida la mitad del arco M N, ó de su igual R T. (N. 61.) Luego A subalterno tendrá por medida la mitad de su arco R T.

Nº 71. Si el nuevo ángulo O todavia no comprehendiere el centro, como se ve en (*Lam.* 2. *Fig.* 18), se irán tirando sucesivamente paralelas al primer lado E A, y despues al segundo, y de aquí al tercero, &c. hasta que un ángulo comprehenda el centro, ó pase por él, y entónces se discurre como arriba; pues todos los ángulos, siendo alternos, serán iguales, y todos los arcos, estando entre paralelas, tambien lo serán. (N. 61.)

Nº 72. Luego *en todos los casos posibles el ángulo que tiene el vértice en la circunferencia, tiene por medida la mitad de su arco.*

CONSEQUENCIAS.

I.

Nº 73. Luego (*Lam.* 2. *Fig.* 19.) *todos los ángulos que tienen el vértice en la circunferencia, y se apoyan sobre el mismo arco, son iguales*, pues tienen la misma medida; y así los ángulos A B C son iguales.

II.

Nº 74. Luego *el ángulo en la circunferencia* (*Lam.* 2. *Fig.* 20.) *apoyado sobre todo el diámetro es recto*, pues tiene por medida la mitad del semicírculo.

III.

Dada la recta O R (*Lam.* 2. *Fig.* 21.), la qual no se pueda alargar, si quisieren levantar de su extremidad O una perpendicular, se hará lo siguiente:

Póngase el compas en un punto arbitrario, ábrase hasta que llegue al punto dado O, y descríbase un círculo, el qual cortará la recta dada en R: de aquí tírese una línea por el centro, la que irá á terminar en S, y de este punto báxese una línea hasta O.

Esta línea hará con la dada un ángulo O, que tiene el vértice en la circunferencia, y está apoyado sobre todo el diámetro R S: por consiguiente es recto; y así una línea es perpendicular á la otra.

Nº 75. Luego *por el ángulo en la circunferencia podemos levantar una perpendicular en la extremidad de una línea dada.*

Si dado un círculo A (*Lam.* 2. *Fig.* 22.) se quisiere hallar el punto, en que una tangente tirada desde el punto B toque al círculo dado, se hallará por el método siguiente:

Tírese de M, centro del círculo A, una línea hasta B: descríbase sobre esta línea un círculo: el punto en que éste cortare al antiguo ángulo A, será el punto del contacto de la tangente.

Porque tirando la línea O M, ya tenemos el ángulo O, cuyo vértice está en la circunferencia, y está apoyado sobre el diámetro M B: por consiguiente es recto; y por ser O M un rayo, O B será tangente. (N. 52.)

Nº 76. Luego *por el ángulo en la circunferencia podemos hallar el punto de contacto de una tangente tirada desde un punto dado, y sobre un círculo dado.*

§. II.

De la medida de los ángulos formados en el círculo.

Amigo, los ángulos en la circunferencia siempre son formados por dos cuerdas, ó un diámetro con una cuerda; pero como en el círculo hay varias líneas que no son cuerdas, ni diámetros, ya se advierte que hay varios ángulos diferentes de los que hemos exâminado, y es preciso tratar de todos con separacion.

El ángulo formado por la tangente y por una cuerda nacida del punto de contacto (*Lam.* 2. *Fig.* 23.), ó ha de ser agudo ú obtuso: ambos los hemos de medir; y así empezarémos por el agudo A.

Pues sabemos medir los ángulos en la circunferencia, reduciré el ángulo de la qüestion A á otro igual en la circunferencia F; y esto ha de ser por medio de una línea M S paralela á la tangente: como F y A son alternos, la medida del uno será medida del otro (N. 46.); pero el ángulo F tiene por medida la mitad del arco R. S. (N. 72.), ó la mitad de M R su igual, por ser comprehendidos entre paralelas. (Núm. 61.) Luego tambien el ángulo A tiene por medida la mitad de ese mismo arco M R comprehendido en él.

En quanto al ángulo obtuso M R O, divídase en dos por medio de una cuerda, sea la que fuese R B; y en este caso el ángulo de la circunferencia tiene por medida la mitad de su arco M B (N. 72): el ángulo de la tangente en I tiene por medida la mitad de su arco B R, por lo que se acaba de decir: por consiguiente el ángulo total M R O tiene por medida la mitad del arco total M R B.

N.º 77. Luego *todo el ángulo formado por cuerda y tangente tiene por medida la mitad del arco que comprehende.* Estos ángulos tambien se llaman *ángulos en el secmento.*

Ademas de estos ángulos se puede formar otro por una cuerda, y la continuacion de otra; v. g. el ángulo S O A (*Lam.* 2. *Fig.* 24.)

Para medir este ángulo divídase el ángulo total con una tangente M N: esto hecho, el ángulo inferior S O N tendrá por medida la mitad del arco S O, que en sí comprehende (N. 77.); y el ángulo superior N O A, como es igual á I, por serle opuesto en el vértice, tendrá la misma medida de él, la que es la mitad del arco R I, por la misma razon del N.º preferente.

N.º 78. Luego *el ángulo total* S O A *hecho por una cuerda, y la continuacion de otra, tiene por medida la mitad del arco comprehendido, y mas la mitad del arco opuesto.*

Tambien se puede formar un ángulo

(*Lam.* 2. *Fig.* 25.) dentro del círculo, cuyo vértice se quede entre el círculo y la circunferencia.

Para medir este ángulo A prodúzcanse ó continúense ambos lados hasta la circunferencia, y del punto O tírese una línea paralela á A N: esto hecho, el ángulo O es igual A (N. 45.), y tendrá por medida la mitad del arco M N R (N. 72.), ó la mitad de M N y la mitad de N R; pero el arco N R es igual á S T, comprehendidos entre paralelas; y por consiguiente en lugar de la mitad de N R, podemos susbtituir S T. Luego esta misma será la medida del ángulo A su igual.

Nº 79. Luego *todo ángulo, cuyo vértice está entre el centro y la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco concavo sobre que estriba, y la mitad del convexô comprehendido entre sus lados, si estos se prolongaran.*

Ultimamente se puede formar un ángulo por dos secantes, que se junten fuera del círculo, y por consiguiente tendrá su vértice fuera de la circunferencia. (*Lam.* 2. *Fig.* 26.)

Para medir este ángulo A, redúzcasele á otro igual O, hecho en la circunferencia por medio de una paralela R S: es así que este ángulo O tiene por medida la mitad de su arco S M; y por consiguiente si yo le diera por medida la mitad del arco total N M, debiera descontar lo que le dí de mas, que es la mitad de N S, ó la mitad de T R su igual (por el N. 61.); y así tomando la mitad del arco cóncavo N M, ménos la mitad del convexô T R, tendrémos la medida verdadera de O, ó de A su igual.

Nº 80 Luego *el ángulo, cuyo vértice queda fuera de la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco cóncavo, ménos la mitad del convexô.*

§. III.

De la medida de los ángulos en los triángulos.

Desembarazados ya, amigo Eugenio, de la medida de los ángulos que pertenecen al círculo, vamos á medir los ángulos en los triángulos.

Llamamos *triángulo* una figura formada por tres líneas rectas, las que por consiguiente forman tres ángulos. Qualquiera de estos ángulos se puede llamar *vértice* del triángulo, y entónces las líneas que forman el ángulo del vértice se llaman *lados*, y la otra línea opuesta al vértice se llama *base.*

Esto supuesto, si consideramos los lados del triángulo, hallamos tres especies de triángulos, porque

O los tres lados son iguales, y se llamará *equilatero* (*Lam.* 2. *Fig.* 27.), ó solo tiene dos lados iguales, y se llamará el triángulo *isosceles* (*Lam.* 2. *Fig.* 28.), ó ninguno de los lados es igual á otro, y entónces se llama el triángulo *scaleno*. (*Lam.* 2. *Fig.* 29.)

Considerando los ángulos de los triángulos, hallamos otras tres especies, porque si tiene un ángulo recto, se llama *rectángulo*. (*Lam.* 2. *Fig.* 30.) Si tiene un ángulo obtuso, se llama *obtusángulo*. (*Lam.* 2. *Fig.* 31.) Si tiene todos los ángulos agudos, se llama *acutángulo*. (*Lam.* 2. *Fig.* 27 *y* 28.).

Para saber el valor de los ángulos de qualquiera triángulo podrémos tirar por el vértice (*Lam.* 2. *Fig.* 32.) una paralela á la base.

Esto hecho, se ve que M es igual á su alterno O, así como N es igual al suyo E (N 46.); pero M A N tienen el valor de dos rectos (N. 11.): luego O A E tienen ese mismo valor. En qualquier triángulo, pues, que sea rectilíneo podemos hacer esta misma demostracion.

Nº. 81. Luego *todo triángulo rectilíneo tiene en sus tres ángulos el valor de dos rectos.*

CONSEQUENCIAS.

I.

Nº. 82. Luego *en un triángulo no puede haber dos ángulos rectos*; porque entónces estos dos con el tercer ángulo tendrian el valor de mas de dos rectos.

II.

Nº 83. Luego *en un triángulo no puede haber dos ángulos obtusos*, por la misma razon.

III.

Nº 84. Luego *sabiéndose el valor de un ángulo, se sabrá el valor de la suma de los otros dos*; porque éste será lo que falta para el valor de dos rectos.

IV.

Nº 85. Luego *sabiéndose el valor de dos ángulos, se sabrá el valor del tercero*, porque éste será lo que faltare á la suma de los dos para llegar á 180 grados, valor de dos rectos.

V.

Nº 86. Luego *si un triángulo tiene dos ángulos iguales á dos de otro triángulo, el tercer ángulo será tambien igual al tercero del otro.*

Nº 87. Si se prolongase un lado de qualquier triángulo (*Lam. 2. Fig.* 33.), este ángulo que se continuase haria un nuevo ángulo con el lado A M, y se llama *ángulo externo.*

Este ángulo A, que junto con E vale

dos rectos (N. 11.) , tambien junto con N M vale dos rectos , por lo que se acaba de decir ; y así tanto vale el ángulo E solo , como el M y el N juntos.

Nº. 88. Luego *el ángulo externo de qualquiera triángulo es igual á los dos internos opuestos.*

Esta misma verdad de que los tres ángulos de qualquiera triángulo rectilíneo , son iguales á dos rectos , se conoce tirando por los tres ángulos un círculo (*Lam.* 2. *Fig.* 34.) ; porque entónces por estar los tres ángulos en la circunferencia , cada uno tiene por medida la mitad de su arco , y por consiguiente entre todos tres la mitad del círculo , la que es la medida de dos rectos. De aquí se sacan otras

CONSEQUENCIAS.

I.

En el triángulo equilátero los tres lados (*Lam.* 2. *Fig.* 34.) son tres cuerdas iguales, que sostienen arcos iguales (Nún. 6.) ; por consiguiente siendo las mitades de estos iguales , dan á los tres ángulos opuestos medidas iguales.

Nº. 89. Luego *todo triángulo equilátero es equiángulo.*

II.

Por la misma razon, si los tres ángulos de un triángulo son iguales, tendrá medida igual, y los arcos opuestos serán iguales, lo qual pide cuerdas ó lados iguales. (Núm. 5.)

N°. 90. Luego *todo triángulo equiángulo es equilátero.*

III.

Haciéndose la misma operacion en el triángulo isosceles (*Lam.* 2. *Fig.* 35.), se ve que los dos lados iguales piden dos arcos iguales, los quales dan iguales medidas á los ángulos opuestos.

Y del mismo modo si dos ángulos A E son iguales, deben tener medida igual en los arcos opuestos, y estos, por ser iguales, piden cuerdas ó lados iguales. (N. 5.)

N°. 91. Luego *todo triángulo isosceles tiene dos ángulos iguales.*

N°. 92. Luego *todo triángulo que tiene dos ángulos iguales será isosceles.*

IV.

Al triángulo scaleno (*Lam.* 2. *Fig.* 36.), por tener todos los lados desiguales, y por ser los lados cuerdas, forzosamente han de corresponder arcos desiguales; y por consiguiente la medida de los ángulos opuestos ha de ser desigual.

Nº 93. Luego *el triángulo scaleno tiene todos los ángulos desiguales, y todo triángulo que tenga los tres ángulos desiguales, será scaleno.*

V.

Nº 94. Luego *en el triángulo scaleno* (por la misma razon) *el mayor ángulo debe estar opuesto al mayor lado, y el ángulo menor al menor lado.*

§. IV.

De la medida de los ángulos en los polígonos.

Llamamos polígono toda figura formada por muchas líneas rectas; pero como ya sabemos valuar los ángulos de los triángulos, bastará dividir los polígonos en triángulos (*Lam* 2. *Fig*. 37.), tirando varias líneas de un ángulo ácia los otros; y de este modo medidos los ángulos de los triángulos, quedarán medidos los del polígono.

En esta division sucede necesariamente, que las líneas tiradas de A á los dos ángulos próxîmos coinciden con los dos lados inmediatos del polígono; por consiguiente hay dos líneas inútiles, que no dividen el polígono en triángulos.

Considerando, pues, todos los triángulos con los vértices en el punto A, de donde salieron las líneas de division, vemos que todos los lados del polígono son bases de triángulos, excepto los dos lados A E, A I, que son los lados inmediatos.

Nº. 95. Luego *en el polígono dividido habrá tantos triángulos, quantos fueren los lados, suprimiendo primero dos lados, que no entran en cuenta.*

Nº. 96. Luego *en los polígonos habrá el valor de tantos rectos, quanto es el duplo de sus lados, habiendo suprimido dos de estos lados*: ó de otro modo: *en el polígono hay el valor de tantos rectos, quanto es el duplo de los lados, ménos quatro rectos.*

Luego *en el pentágono, que es el polígono de cinco lados, se hallará el valor de seis rectos*; porque quitando dos lados de los cinco, quedan tres, y el duplo de éstos es seis. En el exâgono ó de seis lados habrá el valor de ocho rectos. En el eptágono ó de siete lados, habrá el valor de diez. El octógano ó de ocho lados, tendrá el valor de doce. El decágono de diez lados, el de diez y seis. El dodecágono de doce lados, tendrá valor de veinte rectos, &c.

Sabido el valor de la suma de los ángulos internos, de los polígonos, esto es, los ángulos que se forman dentro de ellos; conviene saber valuar la suma de los ángulos externos, ó de los ángulos que habria, si se continuasen todos los lados ácia fuera, y ácia la misma parte, como en la (*Lam.* 2. *Fig.* 38.)

Para esto tómese qualquiera de los ángulos, v. g. A, y en su vértice, por medio de las paralelas á los demas lados, formemos ángulos iguales á todos los ángulos externos; de suerte, que *b* quedará igual á B, porque la línea *b* 2 será paralela á B 2; y por la misma razon el ángulo *c* es igual á C; y así de los demas, por razon de estar todos hechos por paralelas. (N. 45.) Pero sabemos por el N. 12, que los ángulos formados al rededor de un punto tienen el valor de quatro rectos.

Nº. 97. Luego *todos los ángulos externos de un polígono, sea el que fuere, valen quatro rectos.*

Nº. 98. En los polígonos regulares, esto es (*Lam.* 2. *Fig.* 39.), en los que tienen todos los lados iguales y los ángulos iguales, es muy fácil valuar no solamente la suma de todos los ángulos internos, como lo hemos hecho (N. 96.), sino tambien valuar á cada uno de ellos, solo con repartir la suma por el número de los 8 ángulos. De este modo se ve que el exâgono tiene ángulos de 120 grados cada uno, porque la suma de 8 rectos ó 720 grados se reparte entre los 6 ángulos: en el pentágono tenemos 6 ángulos de 108, &c.

Nº. 99. Tomemos ahora un exâgono regular, ó que en todos sus ángulos y lados sea igual y semejante: describamos un círculo que pase por los tres ángulos *a e i* (*Lam.* 2. *Fig.* 41.) por el método que enseñé (N. 62.), y se hallará por centro el punto T: si se repitiere la operacion respecto de los ángulos *e i o*, y de los demas sucesivamente se hallará el mismo punto T por centro; porque cortando la perpendicular *m* T. en T, por la perpendicular al lado *a e* tambien se verá cortada alli mismo por la otra perpendicular al lado *i o*, por ser igual á *a e*, y tan inclinada como ella *â e i*, si es perfecta la regularidad del polígono. Luego el círculo descrito desde el punto T no solamente pasará por *a e i*, sino tambien por *o v s*.

Nº. 100. Tiremos ahora desde el centro líneas á todos los ángulos (*Lam.* 2. *Fig.* 40.); los ángulos del centro todos serán de 60 grados para componer juntos el valor de 360: los ángulos de la circunferencia, ántes de ser divididos, eran de 120, y ahora quedarán de 60. Luego el triángulo *e* M *i* es equiángulo. Lo mismo se dice de los otros triángulos; y todos los rayos M*a* M*e* M*i*, &c. serán iguales á los lados. (N. 90.) Esto supuesto:

Nº. 101. Este círculo será formado de seis arcos, y la circunferencia del polígono es compuesta de seis cuerdas, que sostienen esos arcos; y como cada uno de ellos es mayor que su cuerda, los seis arcos ó la circunferencia del círculo será mayor que los seis lados, que hacen el circuito del polígono; pero estos seis lados son iguales á los seis rayos (N. 100.) ó á tres diámetros.

N.º 102. Luego *la circunferencia del círculo es mayor que tres diámetros de éste*; esto es, que si el diámetro vale 7, la circunferencia ha de valer mas de 21.

N.º 103. Hasta hoy no se ha hallado geométricamente la proporcion que tiene la circunferencia del círculo con su diámetro; en esto consiste la grande dificultad de la quadratura del círculo, ó de reducirle al espacio de un quadrado perfectamente igual; no obstante, Archimedes halló que el diámetro comparado con la circunferencia era como 7 á quasi 22, bien que algo ménos que 22. De esta proporcion se sirven comunmente los Geómetras, despreciando, como muy leve, el yerro que hay en ella; y aunque haya otros números que se acerquen con mas exâctitud á la razon que hay entre el diámetro y la circunferencia, usarémos de estos de Archimedes, por ser mas sencillos.

§. V.

Modo de formar triángulos ó polígonos iguales á los que nos dieren.

Nº 104. Dado un triángulo A B C (*Lam.* 3. *Fig.* 1.), si nos pidieren otro triángulo igual y semejante, le podemos hacer por varios modos: los mas comunes son tres:

Nº 105. 1º Midiendo los tres lados.

2º Midiendo dos lados y el ángulo incluso.

3º Midiendo un lado y los dos ángulos adyacentes.

PRIMER MODO,

midiendo los tres lados.

Nº 106. Pondré una base *a b* igual á A B (*Lam.* 3. *Fig.* 1.): tomaré despues con el compas la distancia A C, y describiré un arco desde el punto *a*, como centro; y últimamente tomando con el compas la otra línea B C, describiré otro arco desde el punto *b*, los quales se cruzan ó cortan en C; y desde este punto tiraré dos líneas ácia *a* y ácia *b*, y tendrémos el triángulo *a b c*, el que vamos á exâminar si es igual ó no al que nos diéron A B C.

Nº. 107. Como A B es igual á *a b*, podrémos poner el un ángulo sobre el otro, y ajustar las dos bases : hecho esto , necesariamente ha de caer el punto C en el arco *i o* , que se describió con el rayo A C, ó con el *a c* ; y siendo este punto C extremidad de la línea B C , ha de caer en el arco *r s* , que se describió con el rayo B C ó *b c*. Luego el punto C necesariamente ha de caer en el punto *c* , en el que los dos arcos se cortan.

Pero si ajustando las dos líneas A B , y *a b*, el punto C coincide con *c* , la línea tirada de A hasta B coincidirá con *a b* , y B C con *b c* ; y quedando los dos triángulos juntos , se manifiesta que son iguales.

SEGUNDO MODO,

midiendo dos lados y el ángulo incluso.

Nº 108. Medida la línea M N en el triángulo A (*Lam.* 3. *Fig.* 2.) , haré otra línea igual *m n* : describiré desde el punto M un arco arbitrario *a o* , y con la misma abertura de compas describiré otro arco indefinito *r s* : despues tomaré con el compas el intervalo *a o* , y haciendo centro en *r* , cortaré el arco indefinito *r s* , y por el punto *s* , en que los dos arcos se cruzan , tiraré una línea indefinita desde *m*. Ultimamente tomaré con el compas el lado M E, y cortaré con igual porcion en la línea indefinita *m e*: hecho esto, tiraré la línea *e n*, y quedará el triángulo B igual á A.

Por quanto sobreponiendo el triángulo B en A, y ajustando M N con *m n*, el lado *m e*, tambien caerá sobre su correspondiente M E, por la igualdad de los ángulos que forman con M N, *m n*: y como *m e* es igual á M E, no puede el punto *e* dexar de coincidir con E; y así la línea *e n* coincidirá con E N, pues ambas son rectas, y por una y otra parte se terminan en puntos que coinciden.

TERCER MODO,

midiendo un lado con los dos ángulos adyacentes.

Antes de pasar adelante conviene explicar este término *adyacentes*. Llamo *ángulos adyacentes* á la línea M A (*Lam.* 3. *Fig.* 3.) los que se forman sobre ella con los lados que suben de las extremidades, como son los ángulos *o e* en el triángulo D.

Nº. 109. Si yo mido M A (*Lam.* 3. *Fig.* 3.), y hago otra línea igual *m a*, y despues mido los ángulos *o e*, y hago otros iguales en *m* y en *a* por el método ya arriba dicho (N. 108.), y tiro dos líneas indefinidas, tendré un punto *n*, en el que se cruzan, y este será el vértice del nuevo triángulo E igual á D.

Por quanto sobreponiendo el triángulo E en D, las bases se ajustarian, como tambien los lados, supuesta la igualdad de los ángulos. Luego el punto N, comun á los dos lados del triángulo antiguo D, caerá sobre *n*, punto comun á los dos lados del triángulo nuevo E, y quedarán los dos triángulos ajustados.

Nº 110. Luego *para hacer una figura rectilínea igual á otra dada, qualquiera qua sea,* (*Lam.* 3. *Fig.* 4.), *bastará dividir en triangulos la que nos diéron, y hacer otros triángulos iguales y semejantes, y disponerlos en la nueva con la misma forma.*

CONSEQUENCIAS.

I.

Nº 111. Luego *todo triángulo que tiene los tres lados iguales á los tres de otro ángulo, le será igual.* (N. 107.)

Nº 112. Luego *todo triángulo que tiene dos lados iguales á dos lados de otro, y el ángulo incluso tambien igual, será igual en todo al otro triángulo.* (N. 108.)

Nº 113. Luego *todo triángulo que tenga un lado igual á un lado de otro, y los dos ángulos adyacentes iguales á los dos adyacentes en el otro, será en todo igual.*

Pongamos ahora dos paralelas, y cortémoslas con otras dos (*Lam.* 3. *Fig.* 5.): tiremos ademas una línea diagonal, esto es, desde una punta R á la otra opuesta S: tenemos dos triángulos P Q con un lado comun, que es la diagonal: ademas de esto, los dos ángulos A O, que la son adyacentes en P, son iguales á sus alternos *a o*, adyacentes á la diagonal en el triángulo Q; por consiguiente los dos triángulos son perfectamente iguales, y sus lados correspondientes tambien lo son.

Nº. 114. Luego *las paralelas cortadas por paralelas, son iguales*; y así M R es igual á S N, y M S es igual á R N.

ADVERTENCIA.

Habiendo ya tratado de las líneas y de los ángulos, para poder explicar la relacion que dicen entre sí varias líneas, conviene tratar de las *razones* y *proporciones* en general.

Para facilitarte, amigo Eugenio, la expresion, y abreviártela, haré lo que todos los modernos acostumbran, usando de las señales ó signos del Algebra; pues la experiencia enseña, que lo que hace mas corta la expresion de una verdad, y en una mirada la coloca enfrente de la imaginacion, facilita increiblemente su inteligencia. Los signos, pues, ó señales de Algebra, que por ahora se necesitan, son los siguientes:

El signo + significa aumentar una cantidad sobre otra, v. g. 2 + 3, quiere decir 2 mas 3, que vale 5.

La señal ó signo — significa quitar la segunda cantidad de la primera; y así 8 — 2 quiere decir 8 ménos 2, que es igual á 6.

La señal = significa igualdad de dos cantidades, v. g. 4 = 3 + 1 quiere decir que 4 es igual á 3 mas 1.

Esta expresion 2. 3 : 5. 6 significa que la diferencia de 2 á 3 es igual á la diferencia de 5 á 6.

Esta expresion 4 : 2 :: 6 : 3 significa que 4 contiene al 2 tantas veces, como 6 contiene al 3.

Esta expresion 2 × 5 significa que 2 está multiplicado por 5, y se lee así: dos multiplicado por cinco.

Por último esta $\frac{8}{2}$ significa 8 partido por 2.

Quando nos servimos del alfabeto para signficar las cantidades sobre que hacemos el cálculo de las tales letras; expresamos la multiplicacion de varios modos, v. g. para multiplicar *a* por *a* podemos decir *a* × *a*, ó bien *aa*, ó bien a^2: y se lee *a* dos, ó *a* multiplicado por *a*; pero 2 *a* quiere decir *a* + *a*, ó *a* sumada con *a*.

FIN DE LA SEGUNDA CARTA.

CARTA TERCERA.

De las razones y proporciones.

§. I.

De la razon en general.

Amigo Eugenio, en esta Carta te voy á dar la instruccion mas importante, porque es una llave precisa para entrar en mil gavinetes de verdades lindísimas; pero es algun tanto enfadosa al principio: si te disgusta, déxala á un lado, y ve leyendo las siguientes: despues volverás á acabar de leer esta poco á poco, porque es muy precisa é importante. Empecemos, pues, que tal vez con el gusto no te parecerá enfadosa, y saltarás de contento, al ver en las Cartas siguientes las utilidades que esta trae.

Quando comparamos entre sí dos quantidades del mismo género, v. g. 6 con 4, ó con 3, para saber su respectiva grandeza, decimos que estan en esta ó aquella razon.

En esta comparacion la cantidad que se pone en primer lugar se llama *antecedente*: la segunda *consiguiente*; y ambas se llaman términos de la comparacion ó de la razon.

De dos modos se pueden comparar las cantidades: ó bien observando el exceso de una respecto de la otra, y esta diferencia ó exceso se llama *razon aritmética*; de este modo entre 8 y 5 la *razon aritmética* es 3.

O tambien podemos reparar en el número de veces, que una cantidad contiene á la otra, y este número de veces se llama *razon geométrica*; y por eso entre 12 y 4 la razon es 3, porque el antecedente 12 contiene tres voces á su consiguiente 4.

Quando el antecedente ó el primer término es mayor que el consiguiente, le contiene mas de una vez, como si digo 6 : 3, cuya razon es 2; ó 6 : 4, cuya razon es $1\frac{1}{2}$, que quiere decir uno y medio; ó si yo digo 11 : 3, cuya razon es tres y dos tercios, y se escribe así $3\frac{2}{3}$, porque el antecedente 11 contiene tres veces á tres, que hacen 9, y ademas de esto contiene dos unidades, que son dos tercios de 3, que era el consiguiente.

Quando el antecedente, pues, es igual al consiguiente, solo le contiene una vez, como 6 : 6, cuya razon es 1.

Pero quando el antecedente es menor que el consiguiente, v. g. quando digo 3 : 6, la razon es ménos que uno, y es un quebrado ó fraccion, esto es, parte de 1, y en este exemplo de 3 : 6 la razon es la mitad de uno, y se expresa $\frac{1}{2}$, y en este de 2 : 8

la razon es $\frac{1}{4}$, porque le contiene la quarta parte de una vez.

§. II.

De la proporcion en comun.

Quando habiendo comparado dos cantidades *homogéneas*, esto es, del mismo género, hallamos la razon que hay entre ellas, y despues comparando entre sí otras dos cantidades, hallamos entre ellas otra razon; si esta es igual, decimos que estos quatro términos estan en proporcion; y así generalmente se dice que

N°. 115. Proporcion es igualdad de razones de un mismo género: v. g. si entre 6 y 3 hay razon dupla, y entre 8 y 4 hay tambien razon dupla, decimos que estos quatro términos estan en proporcion, y se escribe así: 6 : 3 : : 8 : 4, que quiere decir: la razon de 6 y 3 es igual á la razon de 8 respecto de 4.

Pero así como toda razon pide dos términos, la proporcion que envuelve dos razones pide quatro; esto es, dos antecedentes y dos consiguientes.

No obstante, sucede tal vez que el mismo término puede ocupar dos lugares, y ser consiguiente para el primero, y antecedente para el tercero; v. g. si se dixere 12 es á 6, como 6 es á 3, se escribe así ∺ 12 : 6 : 3

y esto se llama proporcion contínua; y quando hay quatro términos distintos, se llama proporcion discreta, com esta 12 : 6 :: 8 : 4.

Pero como hay dos especies de *razon*, tambien debe haber dos especies de *proporcion*, como despues dirémos.

§. III.

De la razon aritmética.

NOCION.

Ya hemos dicho, que el exceso ó diferencia que hay entre dos cantidades del mismo género, se llama razon aritmética.

Nº 116. El modo de conocer esta diferencia es sacar ó quitar una cantidad de otra, y el resto es la *razon aritmética* que se buscaba, v. g. 6 y 4 la razon es 2, porque si de 6 se quitan 4, quedan 2, lo que se escribe así 6 — 4 = 2, comunmente se expresa esta razon aritmética, poniendo un punto entre las dos cantidades de este modo 6 . 4; y se lee: 6 4

Otro exemplo. (*Lam.* 3. *Fig.* 6.) Las líneas B y A son desiguales, el exceso de una sobre la otra vale v. g. dos palmos; podemos, pues decir B — 2 = A, y este exceso 2 es la razon aritmética entre B y A.

PROPIEDADES.

De esta simple nocion se deducen varias propiedades de la razon aritmética, las que explicaré á mi modo: ten paciencia, Eugenio.

Por ser la razon aritmética la diferencia que se halla entre dos cantidades; si esta diferencia desaparece, ó porque se añade á la que era mayor, o porque se quita á la que era menor, las dos cantidades quedarán iguales, v. g. entre 5 y 3 la diferencia es 2: luego si añadimos 2 á 3, quedará igual á 5, y si quitamos 2 á 5, quedará igual á 3.

PROPIEDAD Iª

Nº 117. Luego *la razon aritmética, si se quita de la cantidad mayor, la dexa igual á la menor, y si se añade á la menor, la dexa igual á la mayor.* V. g. la razon de 5 á 2 es 3. Luego $5 - 3 = 2$ y $3 + 2 = 5$. Del mismo modo (*Lam.* 3. *Fig.* 6.) $A + 2 = B$ y $B - 2 = A$.

Pasemos adelante: si puesta una razon entre dos términos, añadimos ó quitamos á los dos la misma cantidad, quedarán ambos con la diferencia y desigualdad que tenian; porque ni en lo que se aumentó, ni en lo que se quitó se produce diferencia alguna, v. g. en 8 y 6 la diferencia es 2: supongamos, pues, que se añade á ambos el valor de 3, quedarán 11 y 9, cuya diferencia es el mismo 2: supongamos por el contrario, que quitamos de los dos 3, quedarán 5 y 3, y la diferencia será tambien 2. Lo mismo sucede en las líneas (*Lam.* 3. *Fig.* 7.) entre A y B la razon aritmética es 2: luego si de ambas líneas quitamos *n*, quedará la diferencia 2, y si á ambas añadimos *n*, la diferencia siempre será 2.

PROPIEDAD II.ª

N.º 118. Luego *si á ambas añadimos ó quitamos porcion igual, conservarán entre sí la misma razon aritmética.*

Supuesto lo que queda dicho, esto es, que en la diferencia ó exceso de una cantidad respecto de otra consiste la razon aritmética, digo ahora, que esta diferencia consiste en que una cantidad tiene lo que la otra no tiene; y así aumentar en la una, ó quitar en la otra, hará el mismo efecto para la diferencia entre ambas, v. g. entre 6 y 9 la diferencia es 3; pero si yo aumento 2 á un término, haré el mismo efecto que si quitase 2 del otro: si quito 2 de 6, quedan 4, y para 9 faltan 5; pero tambien si yo aumento 2 al 9, quedarán 11, y la diferencia de 11 á 6 es 5.

PROPIEDAD III.ª

Nº. 119. Luego *para la razon aritmética tanto importa añadir una cantidad á un término, como quitarla del otro.*

§. IV.

Proporcion aritmética.

Ya diximos, que la igualdad de razones del mismo género hacian la proporcion de ese mismo género.

Nº. 120. Luego *proporcion Aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas.* V. g. entre estos quatro términos 3 y 5, y 4 y 6; porque en ambas comparaciones la diferencia ó razon es 2.

Exprésase esta proporcion así 3. 5 : 4. 6; ó poniendo el exemplo en líneas, comparando A con B (*Lam.* 3. *Fig.* 8), y C con D, lo que se escribe así A. B : C. D.

Nº. 121. Quando tres términos se disponen de modo que el primero excede al segundo tanto, quanto el segundo excede al tercero, se llama *proporcion aritmética continua*, como queda dicho, y se expresa así: 9. 7 : 7. 5, ó así ÷ 9. 7. 5. Y se lee 9 á 7, como 7 á 5.

PROPIEDADES.

De esta nocion se sacan varias propiedades.

I.

La suma de los extremos es igual á la suma de los medios. V. g. si 3. 5 : 4. 6, podemos decir 3 + 6 = 5 + 4, que hacen 9. En líneas A. B : C. D podemos decir A + D = B + C. (*Lam.* 3. *Fig.* 8.)

Porque hecha la suma de los medios 5 + 4, tenemos 9; pero si en lugar de 5, que es término medio, ponemos 3, que es su extremo, y en el valor es 2 ménos, quedará esta suma con dos de ménos, y reducida á 7; pero si tambien trocásemos el otro medio 4, y pusiéremos su extremo 6, que tiene dos de mas, entónces quedará esa suma con 2 de mas, y de 7 pasará á 9; compensándose una diferencia en mas, con otra en ménos; y así 5 + 4 = 9, y tambien 3 + 6 = 9.

Nº. 122. Luego *en toda proporcion aritmética la suma de los extremos es igual á la de los medios.*

II.

Nº. 123. Luego *quando quatro términos estan dispuestos de modo, que la suma de los extremos se halle igual á la de los medios, es* *señal de que estan en proporcion aritmética.* V. g. si 9 + 2 = 6 + 6 podemos decir 9. 6 : 5. 2.

Porque la igualdad de las sumas es señal de que el primer extremo excede tanto á su medio, como el último extremo es excedido por el suyo; pues de lo contrario no se podia compensar el exceso del uno con la falta del otro.

III.

En la proporcion continua, v. g. 9. 7. 5, un término ocupa el lugar de dos, pudiendo decirse 9. 7 : 7. 5, y entónces 9 + 5 = 7 + 7. Luego si el término medio repetido es igual á la suma de los extremos, no repetido, será la mitad de esa misma suma.

Nº 124. Luego *en la proporcion continua aritmética la suma de los extremos es dupla del término medio.*

IV.

Nº 125. Quando tres términos estan dispuestos de modo, que la suma de los extremos es dupla del término medio, estan en proporcion contínua, v. g. si 1 + 4 es duplo de 8, puedo decir ÷ 12. 8. 4; porque en este caso, repitiendo el término medio, quedará igual á la suma de los extremos, lo que es señal, como está dicho, de que estan los términos en proporcion aritmética.

V.

Nº 136. Dados tres términos de una porporcion aritmética, es fácil hallar el quarto. Porque haciendo la suma del segundo y tercero, y sacando de ella el primer término, el resto será el quarto; porque este resto junto con el primero debe ser igual á la suma de los medios, y así quedarán en proporcion por el Nº 223.

Del mismo modo *dados qualesquiera tres términos de una proporcion, se puede hallar el que falta.* V. g. si falta el segundo, hecha la suma de los extremos, y quitando de ella el tercero, tendrémos el segundo, &c.

§. V.

De la razon geométrica.

Ya diximos que el número de veces que una cantidad comprehende á otra se llama *razon geométrica*, v. g. entre 6 y 2 la razon geométrica es 3, y en líneas (*Lam.* 3. *Fig.* 9.) entre B y A la razon geométrica es 3; porque B contiene tres veces A. Debe advertirse que quando se dice razon absolutamente, se entiende la geométrica.

N. 127. Se conoce la razon que hay entre dos cantidades, dividiendo el antecedente por el consiguiente, v. g. 6 por 2;

el quociente 3 que sale en la division, manifiesta la razon que hay entre los dos términos: este número, que sale en el cociente en la division, se llama tambien *exponente*.

Esta razon se expresa de varios modos: ó bien poniendo dos puntos entre las dos cantidades, diciendo 6 : 2, ó bien poniéndo los números con la señal de division, diciendo $\frac{6}{2}$.

Nº 128. Siempre el antecedente se ha de dividir por el consiguiente; y si le contiene dos veces, la razon es *dupla*, si tres, la razon es *triple*, si quatro, *quádrupla*, &c. y así $\frac{6}{2}$ igual 3; ó (*Lam.* 3. *Fig.* 9.) $\frac{B}{A} =$ 3; porque el antecedente dividido por el consiguiente 2, da 3 á cada uno, porque le contiene tres veces, porque la línea B contiene la línea A tres veces.

Si por el contrario, el antecedente fuere menor que el consiguiente, como si decimos 3 : 6, ó 3 : 9, ó 3 : 12, de tal suerte, que el consiguiente contenga al antecedente dos, tres ó quatro veces, la razon será subdupla, subtriple y subquádrupla, y se pueden expresar así $\frac{3}{6}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{3}{12}$, y quiere decir que la razon es tres sextas partes, ó tres nonas partes, ó tres duodécimas partes; de suerte, que siempre ha de ser un quebrado ó fraccion.

En la Aritmética se enseña, que los quebrados se expresan con dos números, uno sobre la rayita, éste se llama *numerador*, otro debaxo de ella, éste se llama *denominador*, v. g. para decir tres quartos se escribe así $\frac{3}{4}$: el de encima dice quántos quebrados son, el de abaxo qué especie de quebrados es; á saber, si son tercios, quartos, quintos, &c.

Nº. 129. Diximos al Nº. 127. que la razon geométrica se espresaba en dos números puestos con la señal de division, v. g. el 6 y 3 colocados de este modo $\frac{6}{3}$. De aquí se sigue, que en todos los casos el antecedente se puede tomar como *numerador*, y el consiguiente como *denominador*; de suerte, que en la expresion $\frac{6}{3}$, ó 6 comparados con 3, podemos decir seis tercios; y la razon de 12 respecto de 7 es de 12 séptimos $\frac{12}{7}$, &c. Esto facilita mucho para conocer la razon entre qualesquiera números.

Nº. 130. Quando la razon entre las cantidades se puede explicar por números, bien sean enteros ó quebrados, se llama *racional*; pero quando no se puede explicar por números algunos, v. g. el lado del quadrado y su diagonal, ó el número 1, la raiz quadrada del número 2, entónces esta razon se llama *surda* ó irracional.

Las cantidades que tienen entre sí razon de número á número, son conmensurables, las que tienen razon surda, son inconmensurables, por no haber medida comun que las pueda medir.

Tambien es preciso explicar estas dos voces, partes *aliquotas* y *aliquantas*: las aliquotas son aquellas que multiplicadas cierto número de veces, agotan el todo exâctamente, como son palmos respecto de la vara: las aliquantas son las que nunca ajustan con el todo, como el codo respecto de una vara; porque ésta no contiene un número de codos exâctamente.

§. VI.

Propiedades de la razon geométrica.

Hemos dicho, que la razon geométrica se conocia, dividiendo una cantidad por otra, y que el quociente expresaba la razon, v. g. $\frac{6}{3}=2$.

De esta nocion se sacan varias propiedades.

I.

N°. 131. *El consiguiente multiplicado por la razon es igual al antecedente.* V. g. si yo digo $\frac{6}{3}=2$, diré luego $2\times 3=6$, porque la multiplicacion vuelve á hacer lo que la division deshizo, y pone la cantidad en los términos en que estaba ántes de dividida; y así vemos que por la multiplicacion se prueba si está bien hecha la division. Vaya otro exemplo para quando el antecedente fuere menor que el consiguiente: si decimos 3 : 6, ó $\frac{3}{6}$, la razon es $\frac{1}{2}$; pero el consiguiente 6 multiplicado por $\frac{1}{2}$ es igual al antecedente 3. ó seis medios $=$ 3.

II.

Los dos términos de una razon multiplicados por una cantidad, conservan la misma razon en que estaban. V. g. si 12 y 6 estan en razon dupla, y se multiplican por 3, siempre quedarán en razon dupla: así $12 \times 3 = 36$, y $6 \times 3 = 18$, que tambien estan en la misma razon dupla. Otro exemplo (*Lam.* 3. *Fig.* 11.): si D y B estan en razon dupla, multiplicando ambos por 3, quedarán en la misma razon; y así N y M estan en razon dupla.

Por quanto si un antecedente, v. g. D, contiene dos veces á su consiguiente B, juntando otro antecedente igual á D, este nuevo antecedente comprehenderá tambien otras dos veces á su consiguiente igual á B, y lo mismo será con todos los demas antecedentes iguales que fueremos añadiendo, respecto de sus consiguientes, que les fueremos uniendo; cada antecedente D llevará en sí el valor de dos consiguientes iguales á B. Luego tomando el antecedente primitivo D tres veces, y tomando otras tantas su consiguiente primitivo B, el valor de todos los antecedentes juntos N será duplo del valor de los consiguientes juntos M; pero tomar los términos tres ó quatro veces, &c. es lo mismo que multiplicarlos por 3 ó por 4, &c.

Nº. 132. Luego *la multiplicacion de dos términos por una misma cantidad los dexa en la misma razon que ellos tenian.*

III.

la division de dos términos por la misma cantidad los dexa en la misma razon que ellos tenian. V. g. si 12 y 6 estan en razon dupla, síguese que $\frac{12}{3}$ y $\frac{6}{3}$ estan en la misma razon. Pongamos otro exemplo (*Lam.* 3. *Fig.* 10.): los dos espacios representados por Q y P estan en razon dupla. Q consta de seis espacios, como el de A y P solo consta de tres: dividamos ahora á P y á Q por 3, y tendrémos en P una A, y en Q dos; y así se ve otra vez la razon dupla.

La razon de esto es porque dividido el valor del antecedente Q en tres partes iguales, y tambien el del consiguiente P; si un tercio del antecedente no contiene dos veces al tercio del consiguiente, ninguna de las otras partes iguales á la primera las contendrá dos veces. Luego todas las partes del antecedente juntas, ó el antecedente entero Q no podrá contener dos veces las partes juntas del consiguiente entero P, como se suponia.

Nº. 133. Luego *si dos términos se dividen por una misma cantidad, deben conservar la misma razon que tenian.* Adviértase, que quando dos cantidades se dividen igualmente por otra, las partes de éstas se llaman proporcionales.

Nº. 134. Luego *la misma razon que se hallare entre dos términos, se hallará tambien entre sus partes proporcionales*; esto es, entre sus mitades, y entre sus tercios ó sus quartos, &c.

IV.

Establecimos arriba, que dos cantidades multiplicadas por una se quedaban en la misma razon que tenian (N. 132.); pero multiplicar dos cantidades por una, ó una por dos, es lo mismo.

Nº. 135. Luego *quando una cantidad se multiplica por dos, se quedará en la misma razon que ellas tenian.* V. g. A (*Lam.* 3. *Fig.* 10.) multiplicada, bien sea por 6, ó bien por 3, que estan en razon dupla, hará que resulten los dos espacios Q y P, que estan tambien en la misma razon dupla.

V.

Tambien diximos arriba, que dos cantidades divididas por una, se quedaban en la misma razon que tenian ántes de dividirse.

Nº. 136. Luego *una cantidad dividida por dos, queda en la razon de éstas; pero inversa*; esto es, si el divisor es duplo ó triple, &c. el quociente es subduplo, subtiple, &c. v. g. $\frac{24}{6} = 4$; $\frac{24}{3} = 8$; pero 4, 8 tienen razon subdupla, y los divisores 6 : 3 estaban en razon dupla. Pongamos otro exemplo. (*Lam.* 3. *Fig.* 10.): el espacio Q dividido en seis partes, queda con el valor de A, y dividido en tres partes, queda con el valor duplo de A. Luego quando el divisor es subduplo, el quociente es duplo.

La razon de todo esto es, porque un mismo valor del dividendo Q, repartido por mas partes, da ménos valor á cada una de ellas. Luego en la misma razon que se aumentare el número de las partes, ó creciere el divisor, se ha de disminuir el valor de cada una de ellas, ó será menor el quociente.

VI.

Ya en el Nº. 134 quedó establecido que las partes proporcionales de dos cantidades estaban en la misma razon que las cantidades tenian ántes de dividirse.

N.º 137. Luego *si aumentaremos los dos términos con alguna parte proporcional, ó la quitamos de ellos, quedarán en la misma razon que ántes tenian.* V. g. 12 : 6 tienen la razon dupla; aumentemos en 12 su tercio, y en 6 el suyo, tendrémos $12 + 4 = 16$, y en el consiguiente tendrémos $6 + 2 = 8$; pues 16 y 8 tambien estan en razon dupla. Del mismo modo, si de ambos términos quitamos una parte proporcional, v. g. un $\frac{1}{3}$, quedarán en la misma razon dupla: y así $12 - 4 = 8$, y $6 - 2 = 4$, quedan 8 : 4, que estan en razon dupla.

La razon es: para que un antecedente contenga v. g. dos veces á su consiguiente, es preciso que cada parte proporcional del antecedente contenga dos veces á la que la corresponde en el consiguiente. (N. 133.) Luego si acrecentásemos á ambos la tercera parte v. g., esta nueva parte del consiguiente se hallará inclusa dos veces en la que se aumentó al antecedente, y de este modo quedarán estos dos términos en la razon dupla en que se estaban.

Del mismo modo sucede en la division: si sacamos de ambos términos $\frac{1}{3}$, ú otra qualquiera parte proporcional las que restaren, así en uno, como en otro se comprehenderán dos veces, como sucedia en el antecedente, y consiguiente. Por eso diximos, que

F 2

aumentar ó quitar de dos términos una parte proporcional, los dexa en la misma razon que ántes tenian.

VII.

Nº 138. En la razon geométrica la misma mutacion causa el multiplicar un término por una cantidad, que dividir por ella el otro término. V. g. en 24 y 6 la razon es quadrupla: digo, pues: si yo conservo el consiguiente, y divido el antecedente por 3, diciendo $\frac{24}{3} : 6$; el quociente $1\frac{1}{3}$, porque $\frac{24}{3} = 8$; y $8 : 6 = 1\frac{1}{3}$; pero esto mismo sucederá si yo conservare el antecedente 24, y solo multiplicase el consiguiente por 3, diciendo: $24 : 6 \times 3$; pues $6 \times 3 = 18$; ya se ve que en $24 : 18$ el quociente es $1\frac{1}{3}$.

La razon es, porque el que el antecedente comprehenda en sí al consiguiente mas ó ménos veces, depende tanto de la grandeza del antecedente, como de la pequeñez del consiguiente: luego lo mismo será disminuir el antecedente, partiéndole por un término, v. g. 3, como aumentar el consiguiente, multiplicándole por él; como al contrario, lo mismo será aumentar el valor del antecedente, multiplicándole por 2, v. g. que disminuir el consiguiente, partiéndole por 2.

§. VII.

De la proporcion geométrica.

NOCION.

Nº 139. *Proporcion geométrica es la igualdad de dos razones geométricas.* V. g. entre 6 y 3 la razon es 2, entre 8 y 4 la razon es 2; entonces, pues, dirémos, que estos quatro términos estan en proporcion, lo que se expresa así, 6 : 3 : : 8 : 4, ó así $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$. diré: 6 á 3 como 8 á 4.

Nº 140. Quando la proporcion geométrica consta de tres términos, en tal forma, que el primero sea respecto del segundo, como el segundo es respecto del tercero, se llama contínua, como ya se dixo, y se escribe así 12 : 6 : : 6 : 3, ó de este modo $\div$ 12 : 6 : 3.

De esta nocion se siguen varias propiedades.

I.

Puesta qualquiera proporcion geométrica, v. g. la de 6 : 3 : : 8 : 4, conviene exâminar si el producto de los extremos es igual al de los medios, v. g. si 6 × 4 es = 3 × 8.

Saquemos primeramente el producto de los medios $3 \times 8 = 24$: si en lugar del medio 3 pusieremos su extremo 6, que es duplo, el producto sube á ser duplo, y en lugar de 24 dará 48 (N. 135.): para remediar esto trocamos tambien el otro medio 8 por su extremo 4, que es subduplo; y en este caso baxa el producto de 48 á 24 (N. 135.); pero si de 48 baxa á 24, se corrige en un trueque la desigualdad que hizo el otro, por ser las razones iguales.

N.º 141. Luego *en toda porporcion geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

II.

Quando quatro términos estan dispuestos de modo, que el producto de los extremos sea igual al de los medios, estan en proporcion geométrica, v. g. si $6 \times 4 = 3 \times 8$ se sigue que $6 : 3 :: 8 : 4$.

Porque hecho el producto de los medios 3 por $8 = 24$, si yo trueco el medio 3 por su extremo duplo 6, sube el valor á ser duplo de lo que ántes era, y de 24 pasa á 48. Ahora bien, si el otro extremo 4 compensare con su disminucion respecto del 8 que es medio, el aumento que se hallaba en 6, respecto de 3 (lo que es preciso para la igualdad de los productos), es prueba de que tantas veces contiene 6 á su medio 3, como

4 es contenido en su medio 8.

Nº. 142. Luego *si el producto de los medios es igual al de los extremos, estarán los quatro términos en proporcion.*

Aquí advierto, que hacer el quadrado de un número es multiplicarle por sí mismo, v. g. $3 \times 3 = 9$ es el quadrado de 3; $5 \times 5 = 25$ es el quadrado del número 5; y del mismo modo el quadrado de 6 es 36, el quadrado de 7 es 49, &c.

III.

La proporcion continua $\div$ 12 : 6 : 3 se puede escribir, repitiendo el término medio 12 : 6 : : 6 : 3. En este caso el producto de los medios, que es el quadrado del término medio 6, es igual al producto de los extremos (N. 141.)

Nº. 143. Luego *en la proporcion continua el producto de los extremos es igual al quadrado del medio.*

IV.

Quando tres términos son tales, que el producto de dos es igual al quadrado de otro, se puden disponer en proporcion continua: v. g. de $12 \times 3 = 6 \times 6$ podemos decir $\div$ 12 : 6 : 3.

La razon es, porque en este caso, poniendo como extremos los factores del producto, y repitiendo el término que se ha de multiplicar por sí mismo, para llenar los lugares de los medios, quedan los términos en el caso del número precedente y en proporcion; pero entónces, suprimiendo una vez el término medio, quedará proporcion contiua.

Nº. 144. Luego *siempre que el producto de dos términos es igual al quadrado de otro, se podrán disponer en proporcion continua.*

V.

Toda cantidad multiplicada por 1 queda en el mismo valor que tenia: luego si la unidad fuese extremo de una proporcion, el otro extremo solo será igual al producto de los medios, v. g. si dixeremos 1 : 3 :: 5 : 15, ó al contrario 15 : 3 :: 5 : 1, el producto de los medios será igual á solo un extremo.

Nº. 145. Luego *en toda multiplicacion podemos disponer una proporcion, poniendo dos factores por medios, el producto por un extremo, y la unidad por otro.*

VI.

Podemos considerar qualquier dividendo como un producto hecho por el divisor y quociente, como factores.

Nº. 146. Luego *toda division nos da una proporcion, si colocamos el divisor y el quocien-*

se como medios, y el dividendo y la unidad como extremos. V. g. si $\frac{15}{3} = 5$, podemos decir $15 : 3 :: 1 : 5$, y tambien $1 : 3 :: 5 : 15$; porque por la razon del Nº. precedente el producto de los extremos es el dividendo: el quociente y el divisor son factores.

VII.

Lo que llaman regla de tres consiste en hallar el quarto término de una proporcion, dados los tres. Pero si el producto de los medios es igual al de los extremos, repartiendo el producto de los medios por el término primero, dará por quociente el quarto término de la proporcion.

Nº. 147. Luego *teniendo tres términos de una proporcion, podemos hallar el quarto.*

Nº. 148. *Por el mismo método, podemos hallar qualquiera de los dos términos.* V. g. si faltaba el tercero, sacarémos el producto de los extremos, y la partirémos por el segundo, y dará por quociente el tercero.

§. VIII.

De las mutaciones que se pueden hacer en los términos, conservando la proporcion.

I.

Mutaciones de lugar solamente.

De lo que diximos arriba (N. 142.) se infiere, *que toda mudanza hecha en una proporcion, que conserve la igualdad entre el producto de los medios y el de los extremos, conservará tambien la proporcion.*

N.º 149. Luego *puesta qualquiera proporcion, podemos hacer las mutaciones siguientes:*

I.

Trocar los medios entre sí, pues por esto no se muda el valor de su producto.

II.

Trocar solos los extremos entre sí, por la misma razon.

III.

Hacer los extremos medios, y los medios extremos, lo qual no muda su valor; y esto da de sí muchas mutaciones.

De este modo puesta esta proporcion. . . . . 6 : 3 : : 8 : 4.

1. Podrémos *transponer*, esto es, poner primero los dos últimos términos, y en su lugar los que estaban ántes, v. g. . . . . 8 : 4 : : 6 : 3. porque los extremos se convierten en medios, y los medios en extremos.

2. Podemos *invertir*, esto es, hacer los antecedentes consiguientes, y los consiguientes antecedentes, diciendo. . . . . 3 : 6 : : 4 : 8.

3. Podemos *alternar*, esto es, comparar los dos antecedentes entre sí, y entre sí tambien comparar los consiguientes. . . . . 6 : 8 : : 3 : 4. porque se truecan los lugares en los dos medios.

4. Podrémos cambiar solos los extremos entre si, lo que se llama *alternar* y *invertir* y *transponer*, diciendo. . . . . 4 : 3 : : 8 : 6.

5. Podemos tomar todos los quatro términos al reves, lo que se llama *invertir* y *transponer*, diciendo. . . . . 4 : 8 : : 3 : 6.

Pongamos otro exemplo en líneas (*Lam.* 3. *Fig.* 12.) *Si* A : B : : C : D, *podemos hacer las mutaciones siguientes*:

1. C : D : : A : B. transponiendo.
2. B : A : : D : C. invirtiendo.
3. A : C : : B : D. alternando.
4. D : B : : C : A, y esto es alternando, invirtiendo y transponiendo.
5. D : C : : B. A, lo qual es invertir y transponer.

Porque en todas estas mutaciones se halla que el producto de los medios es igual al de los extremos, que es una prueba de proporcion. (Núm. 142.) Otras mutaciones se pueden hacer que se incluyen en estas; por las quales se ve que si un medio se convierte en extremo, tambien el otro medio; lo que es preciso para que el producto de los extremos sea siempre igual al de los medios.

II.

De las mutaciones que se hacen, componiendo ó dividiendo los términos.

Ademas de las mutaciones de lugar que hicimos de los términos, se pueden hacer algunas mas aumentando los unos con los otros, lo qual se llama *componer*, ó quitando el valor de unos del de los otros, lo que se llama *dividir*, ó mejor, *disminuir*. Quando se juntan, se forma una *suma*, quando se quitan, aparece la *diferencia*; y estas sumas y diferencias tambien estarán en proporcion. Sobre lo qual hay varias proposiciones sacadas de lo que queda dicho.

Pero es preciso traer á la memoria lo que diximos al N.º 137, que quando aumentamos ó quitamos á dos cantidades sus partes proporcionales, quedan con la misma razon que ántes tenian entre sí; pero los consiguientes de una proporcion son partes proporcionales de sus antecedentes.

N.º 150. Luego *puestos quatro términos en proporcion, si á los antecedentes añadimos sus consiguientes, ó se los quitamos de su valor, quedarán en la misma razon que tenian entre sí.* V.g. si decimos $A : B :: C : D$, tambien podrémos $A + B : C + D :: A : C$, y asimismo $A - B : C - D :: A : C$. Otro exemplo en números : $12 : 6 :: 8 : 4$, podemos decir $12 + 6 : 8 + 4 :: 12 : 8$, ó bien $12 - 6 : 8 : - 4 :: 12 : 8$.

En otros términos; es decir lo primero, que la suma de los dos primeros terminos es á la suma de los dos segundos, como el primer antecedente es al segundo, ó que dicen la misma proporcion.

Lo segundo, que la diferencia de los dos primeros términos es á la diferencia de los dos segundos, como el primer antecedente es al segundo.

III.

Nº. 151. Ahora bien, si las sumas entre sí, y las diferencias entre sí son como un antecedente es al otro; las sumas entre sí, y las diferencias entre sí vendrán á tener la misma razon, y podemos hacer esta proporcion: una suma es respecto de otra suma, como una diferencia es respecto de otra diferencia: v. g. si $12 : 6 :: 8 : 4$: luego $12 + 6 : 8 + 4 :: 12 - 6 : 8 - 4$, ó bien si $A : B :: C : D$: luego $A + B : C + D :: A - B : C - D$; y alternando esta, tambien podemos decir: una suma respecto de su diferencia es como otra suma respecto de la suya. Y así $12 + 6 : 12 - 6 :: 8 + 4 : 8 - 4$.

Nº. 152. Luego *la suma de los primeros es á su diferencia, como la suma de los segundos es á la suya.*

IV.

Nº. 153. Sentada esta doctrina, y la que diximos de la alternacion, podemos sacar otras conseqüencias, v. g. si diximos:

$12 : 6 :: 8 : 4,$

tambien podrémos decir:

$$\begin{cases} 12 + 6 : 8 + 4 :: 12 : 8. \\ 12 + 6 : 8 + 4 :: 6 : 4. \end{cases}$$

Luego, alternando la primera conseqüencia dirémos:

$12 + 6 : 12 :: 8 + 4 : 8,$

y alternando la segunda dirémos:

$12 + 6 : 6 :: 8 + 4 : 4.$

Por la misma razon si decimos:

$A : B :: C : D,$

podrémos inferir:

Luego $A + B : A :: C + D : C.$

ó de otro modo:

$A + B : B :: C + D : D.$

Nº. 154. Luego *en qualquiera proporcion la suma de los dos primeros es á qualquiera de ellos, como la suma de los dos segundos al que le corresponde.*

V.

Puesta la primitiva proporcion $12 : 6 :: 8 : 4$, inferiamos estas dos proporciones:

$12 - 6 : 8 - 4 :: 12 : 8.$

$12 - 6 : 8 - 4 :: 6 : 4.$

Luego alternando la primera dirémos:

$$12 - 6 : 12 :: 8 - 4 : 8,$$

y alternando la segunda dirémos:

$$12 - 6 : 6 :: 8 - 4 : 4.$$

N.° 155. Luego *en qualquiera proporcion podemos decir : la diferencia de los primeros términos es á qualquiera de ellos , como la diferencia de los últimos respecto del que la corresponde.*

Podemos alternar toda proporcion propuesta ; y con esto harémos que los antecedentes sean términos primeros , y los consiguientes términos últimos.

VI.

N.° 156. *Todo quanto hemos dicho de las sumas y diferencias de los primeros y últimos términos , lo podemos decir de las sumas y diferencias de los antecedentes y de los consiguientes*; de donde se deducen las siguientes proporciones nacidas de una proporcion dada, v. g. si

$$A : B :: C : D.$$

Luego alternando será

$$A : C :: B : D.$$

1. Luego combinando las sumas

$$A + C : B + D :: A : B,$$

2. O bien

$$A + C : B + D :: C : D.$$

3. Luego combinando las diferencias

$$A - C : B - D :: A : B,$$

4. ó $A - C : B - D :: C : D.$

5. Luego combinando sumas con diferencias

$A + C : B + D :: A - C : B + D.$

6. Luego alternando

$A + C : A - C :: B + D : B - D.$

Exemplo en números.

Demos que sea la proporcion primitiva

$12 : 4 :: 9 : 3.$

Luego alternando

$12 : 9 :: 4 : 3.$

I. Luego combinando las sumas

$12 + 9 : 4 + 3 : 12 : 4.$

II. O bien

$12 + 9 : 4 + 3 :: 9 : 3.$

III. Luego combinando las diferencias

$12 - 9 : 4 - 3 :: 9 : 3.$

IV. Luego combinando sumas con diferencias

$12 + 9 : 4 + 3 :: 12 - 9 : 4 - 3.$

V. Luego alternando

$12 + 9 : 12 - 9 :: 4 + 3 : 4 - 3.$

De aquí se prueban las proposiciones siguientes:

VII.

Nº. 157. *Luego la suma de los antecedentes es á la suma de los consiguientes, como un antecedente á su consiguiente.*

VIII.

Nº 158. Luego *la diferencia de los antecedentes es á la de los consiguientes, como un antecedente es á su consiguiente.*

IX.

Nº 159. Luego *la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consiguientes es á la diferencia de éstos.*

Hasta aquí en estas seis proporciones, que son conseqüencias de la proporcion primitiva, combinamos sumas con sumas, diferencias con diferencias, y sumas con diferencias. Ahora falta combinar las sumas de los antecedentes ó consiguientes y sus diferencias con cada uno de ellos, y para esto bastará alternar las proporciones de arriba.

Exemplo.

Sea la proporcion primitiva

$$A : B :: C : D.$$

Luego alternando la primer conseqüencia que pusimos arriba Nº 156, dirémos:

$$A + C : A :: B + D : B;$$

y alternando la segunda, dirémos:

$$A + C : C :: B + D : D;$$

y alternando la tercera, dirémos:

$$A - C : A :: B - D : B;$$

y alternando la quarta, dirémos:
A — C : C : : B — D : D.

Otro exemplo en números.

Sea la proporcion primitiva

12 : 4 : : 9 : 3.

Luego alternando la primer conseqüencia de arriba, dirémos:

12 + 9 : 12 : : 4 + 3 : 4:

alternando la segunda tendrémos:

12 + 9 : 9 : : 4 + 3 : 3:

alternando la tercera, se dirá:

12 — 9 : 12 : : 4 — 3 : 4;

y alternando la quarta, se dirá:

12 — 9 : 9 : : 4 — 3 : 3.

De aquí se prueban las dos verdades siguientes:

XI.

N.º 160. *La suma de los antecedentes es á cada uno de ellos como la suma de los consiguientes es al que le corresponde.*

XII.

N.º 161. *La diferencia de los antecedentes es para cada uno de ellos, lo que la diferencia de los consiguientes para el que la corresponde.*

§. IX.

De la razon compuesta.

Nº 162. Sucede muchas veces, amigo Eugenio, que una cantidad excede á otra por muchos principios: v. g. una sala es mayor que un gavinete por ser mas larga, por ser mas ancha, y por ser mas alta: supongamos que tiene la longitud quadrupla de la del gavinete; solo por este principio seria como 4 : 1 : supongamos tambien que la anchura es como tres á la del gavinete; ya solo por este principio debe ser como 3 : 1; y combinando estas dos razones no hemos de juntar ó sumar una con otra, y $4 + 3 = 7$, sino multiplicar la una por la otra, y decir $4 \times$ por $3 = 12$, siendo el 12 el exponente de esta razon compuesta.

Por quanto si la anchura es triple podrémos dividirla en tres iguales partes, y por haber en cada uno de estos tres tercios una longitud quadrupla de la del gavinete, entrará en solo un tercio quatro veces el gavinete, y otras tantas en cada uno de los otros dos tercios, lo que en todo compone 12; y así será preciso repetir doce veces el *area* ó el suelo del gavinete para llenar el area ó pavimento de la sala.

Ahora bien, si la altura de la sala fuere dupla, y la dividimos por medio con tablas, quedaria en la parte superior otro tanto vacío como en la parte inferior; esto es, se podian hacer otros doce gavinetes: volverémos, pues, á multiplicar por 2 (exponente de las alturas) el exponente compuesto del pavimento 12, y dirémos que la sala es al gavinete como 24 : 1.

N.º 163. Quando el exponente de una razon es el producto de dos exponentes, la razon se llama compuesta de dos: quando es producto de tres exponentes, la razon será compuesta de tres, &c.

Si las dos razones ó exponentes, que multiplicados dan una razon compuesta, son iguales entre sí, v. g. 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4, &c. entónces la razon compuesta se llama *duplicada*, y en el primer caso es duplida de razon dupla, en el segundo *duplicada* de razon triple, en el tercero *duplicada* de razon quadrupla, &c.

Del mismo modo si el exponente de la razon es el producto de tres exponentes iguales, será exponente de una razon triplicada; y si los exponentes primitivos, v. g. de longitud, latitud y altura fueren 2 × = 8, la razon será triplicada de razon dupla 3 × 3 × 3 igual, 27 será la razon triplicada de la razon triple; si fueren 4 × 4 × 4 = 64, la razon será triplicada de razon quadrupla.

Aquí se ve la diferencia que hay entre la razon dupla y la razon duplicada, entre la razon triple ó quadrupla y la razon triplicada ó quadruplicada. Las duplas, triples, quadruplas se hacen, añadiendo ó sumando unidades: las duplicadas, triplicadas, &c. se hacen, multiplicando exponentes semejantes.

Tambien se advierte que qualquiera de las razones que componen la duplicada, es subduplicada; las que componen la triplicada son subtriplicadas. Pongamos ahora dos proporciones.

10 : 5 : : 4 : 2. (su exponente. . 2.

6 : 2 : : 9 : 3. (su exponente. . 3.

Los exponentes son 2 y 3: multipliquemos ordenadamente los términos de una por los de la otra, diciendo:

10×6, 5×2, 4×9, 2×3.

En los mismos productos resulta otra proporcion:

60 : 10 : : 36, 6,

cuyo exponente es 6, producto de los dos exponentes el 2 y el 3, por ser lo mismo multiplicar 10 por 6, que multiplicar dos veces 5 por tres veces 2; y en esto no solo multiplicamos los dos consiguientes 5 y 2, sino los dos exponentes, uno que dice *dos veces*, y otro que dice *tres veces*: y así el producto 60, no solo comprehende á su consiguiente (10) las dos veces de la primera proporcion, sino las dos veces de esta primera proporcion multiplicadas por 3 de la segunda, que hacen 6. Ahora, pues, como en los otros dos términos de la proporcion 4×9, y 2×3 hay la misma razon, y en ellos se multiplica tambien el 4 *duplo* por 9 *triple*, el producto debe ser sextuplo, como vemos en 36 y 6; y así habiendo en ambas razones el mismo exponente, quedan los quatro términos en proporcion.

Nº. 164. Luego *quando se multiplican ordenadamente los términos de una proporcion por los de otra, los productos hacen tercera proporcion, y el exponente de ésta es el producto de los exponentes primitivos.*

Ahora, pues, si se multiplicaren los términos, no solo de dos, sino de muchas proporciones que tengan varios exponentes, v. g. 2, 3, 4 los productos, si la multiplicacion se hace por el órden en que se hallan antecedentes y consiguientes, harán una nueva proporcion, cuyo exponente será el producto de los tres exponentes primeros; esto es, $24 = 2 \times 3 \times 4$, porque aquí milita la razon que dimos para las dos razones combinadas; y las tres proporciones se pueden reducir á ménos, combinando primero dos de ellas, y despues el producto de estas con el exponente de la tercera; y así lo harémos, si fueren quatro ó mas las proporciones dadas.

Luego *quando se multiplicaren ordenadamente los términos de muchas proporciones, los productos harán una nueva proporcion, cuyo ex-*

ponente será el producto de todos los exponentes primitivos.

De aquí se sigue que si fueren solas dos las proporciones, y del mismo exponente, v. g. 2.

$$\begin{cases} 1 : 2 :: 3 : 6. \\ 4 : 8 :: 5 : 10. \end{cases}$$

los productos tendrán un exponente, que será 4 quadrado del primero; y estarán en razon duplicada de la primera razon dupla; esto es, 4 : 16 :: 15 : 60; cuyo exponente es 4, término quadrado del exponente 2, que reynaba en las otras proporciones.

Y por la misma razon: si juntaremos tres proporciones en que haya la misma razon, los productos tendrán por exponente un cubo del primero, ó el producto de tres razones iguales, y quedarán en razon triplicada de la primera.

Nº. 165. Luego *puestos qualesquiera términos en proporcion* 1 : 2 :: 3 : 6, *los quadrados de estos* 1 : 4 :: 9 : 36, *y sus cubos* 1: 8 : : 27 : 216 *tambien estarán en proporcion.*

Porque entre cada antecedente y su consiguiente siempre se hallará razon igual, esto es, el producto de dos ó de tres razones iguales.

Nº. 166. Luego *en la proporcion de los quadrados el exponente será un quadrado del exponente de la proporcion simple ó de la raiz, y en la proporcion de los cubos el exponente tambien será un cubo del exponente de la proporcion simple;* por razon de que en la proporcion de los quadrados el exponente es el producto de dos razones iguales; y en la de los cubos el exponente es el producto de tres razones iguales.

§. X.

De la proporcion recíproca.

La proporcion directa, que es la que hemos explicado hasta aquí, se da quando una cosa contiene á otra igualmente por dos circunstancias, v. g. si una puerta contiene á otra dos veces por la altura, y dos veces por la latitud; entónces decimos que la altura mas grande es á la mas pequeña, como la latitud grande es á la longitud pequeña, creciendo siempre á proporcion tanto la longitud, como la altura. Lo mismo decimos quando una sala es seis veces mas ancha que un gavinete, como tambien seis veces mas larga.

N.º 167. Quando una cosa excede á otra, v. g. tres veces en una circunstancia, y es excedida de ella tambien tres veces en otra, estan en proporcion recíproca, v. g. quando un campo es diez veces mas largo que otro, pero diez veces mas estrecho que el otro, excede en una dimension, pero igualmente es excedido en otra.

Pongamos otro exemplo: Quando dos

animales corren, y tanto mayor es la velocidad en el uno, quanto el tiempo preciso para andar una legua es menor que el del otro, decimos que entónces estan las velocidades en proporcion recíproca con los tiempos. Y la velocidad de un galgo, v. g. es á la velocidad del hombre, como el tiempo que emplea el hombre es al tiempo que emplea el galgo.

Otro exemplo: Quanto mayor es la tripulacion de una nave, ménos tiempo dura una determinada provision de alimentos, y decimos: la tripulacion de la nave grande es á la tripulacion de la pequeña; como la duracion de las provisiones es en la nave pequeña, respecto de la duracion de los alimentos en la grande.

En todos estos casos se ve que en la proporcion recíproca el segundo y tércero término pertenecen al mismo objeto, y el primero con el quarto pertenecen al otro, v. g. en el exemplo de las velocidades y tiempos, la velocidad del galgo es el primer término, y su tiempo que gasta es el quarto; y la velocidad del hombre es el segundo término, y su tiempo el tercero, como se ve haciendo la proporcion; y para abreviar llamarémos á las velocidades V, á los tiempos T, al galgo G, y al hombre H.

$$VG : VH : TH : TG.$$

Y en esto está la diferencia de la proporcion *directa*, en que en la *directa* el primer término y el tercero pertenecen á un objeto, y el segundo con el quarto á otro; pero en la *recíproca* el primero y el quarto pertenecen á uno, y el segundo y tercero á otro.

Esta materia, amigo mio, es un poco cansada y obscura, pero es indispensable: si á la primera vez que se lee esta Carta no se comprehende bien, pasa adelante: ve leyendo las otras, y vuelve despues á leer en esta misma Carta, que la irás entendiendo mejor: y creeme, amigo, que puse toda diligencia para tratar esta materia con la mayor facilidad posible: agradéceme la buena voluntad.

FIN DE LA TERCERA CARTA.

CARTA QUARTA.

De las líneas proporcionales.

§. I.

Dividir las líneas en la proporcion pedida.

La doctrina, amigo Eugenio, que te dí acerca de la proporcion de los números, se aplica fácilmente á las líneas, dividiéndolas en cierto número de partes iguales: y yo, ahora tratando de las líneas proporcionales, me iré fundando sobre lo que dixe acerca de las razones y proporciones de los números.

Nº. 168. Supongamos, pues, que nos dan una línea A C (*Lam.* 3. *Fig.* 13.), y que nos piden que la dividamos en cierto número de partes iguales, v. g. seis; harémos lo siguiente:

I.

De una extremidad A tiremos otra línea indefinida, como A B.

II.

Tomemos con el compas en esta línea indefinida A B varias porciones iguales, y del fin de la última porcion B tiremos una línea B C hasta la extremidad de la línea dada para dividir la A C.

III.

De todos los puntos que fué señalando el compas en A B, tiremos paralelas á A B C.

IV.

De todos los puntos 1, 2, 3, que las paralelas van á tocar en A C, tiremos unas pequeñas líneas á A B. Esto hecho, se infiere,

I.

Que estos triángulos pequeños tienen los lados de los puntitos iguales entre sí por ser iguales á las porciones que tomó el compas en la línea A B. (N. 114.)

II.

Que estos triángulos tienen los ángulos correspondientes iguales entre sí, por ser hechos por una línea, que corta paralelas (N. 45.)

III.

Que en esta suposicion estos triángulos tienen un lado igual, y los ángulos adyacentes: y por esto (N. 109.) son iguales entre sí, y por consiguiente la línea A C está dividida en seis partes iguales, y del mismo modo que lo está la línea A B, aunque las partes de A C no son iguales á las de A B, así como las líneas totales no lo eran.

Nº 169. Luego *qualquiera de las paralelas á la base de este triángulo divide sus lados, de tal suerte, que las quatro partes de ellas estan en proporcion*; porque la línea *m n* v. g. de tal suerte divide las líneas A B, A C, que A*m* : *m*B : : A*n* : *n*C; pues en ambas partes la razon es de 4 : 2.

Lo mismo podemos decir de qualquiera otra paralela, así en este, como en otro qualquier triángulo, porque le podemos aplicar la misma demostracion.

Nº 170. Luego *toda paralela á la base de un triángulo* (*Lam.* 3. *Fig.* 14.) *divide sus lados proporcionalmente*: y así P Q divide los lados del triángulo en tal forma, que A P: N P : : A Q : Q M.

Ahora bien, el punto Q, en que la línea A M queda dividida proporcionalmente, es punto único, solo corresponde á P;

por consiguiente toda línea que saliendo de P, fuere á cortar el otro lado proporcionalmente, ha de ir á parar á Q, y coincidir con la paralela P Q; y por consiguiente será tambien esa línea paralela á la base.

Nº. 171. Luego *toda línea que cortare proporcionalmente los lados de un triánglo, será paralela á la base de éste.*

Supongamos ahora (*Lam.* 3. *Fig.* 15.) que tiro yo desde A vértice de un triángulo una línea A M sobre la base: esta línea divide un triángulo en dos, y es un lado comun para ambos; y así la línea S R que fuere paralela á la base, cortará proporcionalmente no solo los dos lados antiguos A B, A C, sino tambien la nueva línea A M.

Luego *toda línea que sale del vértice de qualquier triángulo, queda cortada proporcionalmente á los lados por toda otra paralela á la base.*

En esta suposicion podemos sacar de estas proposiciones muchos usos utilísimos para la práctica. (*Lam.* 3. *Fig.* 16.)

Demos que sea preciso reducir de un golpe muchas líneas diferentes á una séptima parte ménos, ó á otra qualquiera proporcion, harémos lo siguiente:

I.

Sean las líneas que deben reducirse (*L.* 3. *Fig.* 16.) *a*O, *b*O, *c*O, *d*O, *e*O, *f*O.

II.

Tiraré una línea indefinida P Q: iré, pues poniendo con el compas todas las líneas dadas, de tal forma, que todas salgan del punto O, y terminen en la línea P Q; lo que es muy fácil, haciendo á O centro de muchos arcos, cuyos rayos sean las líneas dadas, los quales irán á cortar la indefinida en *a*, *b*, *c*, *f*, *d*, *e*, &c.

III.

Cortaré de una, qualquiera, v. g. O *a*, la parte que hayan pedido (Núm. 168.) y del punto M de la division tiraré la paralela M N; esta línea dividirá todas las demas con proporcion á la primera.

Nº. 172. Luego *ya tenemos método para dividir muchas líneas juntamente en la misma razon pedida.*

Dado un triángulo, qualquiera que sea (*Lam.* 3. *Fig.* 17.), supongamos que dividimos por medio el ángulo del vértice *B*: esta línea B P dividirá la base en dos partes M N. Veamos ahora si son estas proporciocionales á los dos lados, de suerte que podamos decir M : N : : Q : T : para exâminar este punto tiro de la extremidad E una paralela A B P, y continuo el lado T S hasta encontrar con la paralela en I.

Por lo que queda dicho al Núm. 170, por ser la línea B P paralela á R I base del triángulo grande, dividirá sus lados proporcionalmente, y por conseqüencia M : N : : S : T.

Ahora bien, si el lado Q fuere igual á S, se le podrá substituir y poner en su lugar : de este modo tendrémos la proporcion que buscamos. Para conocer que Q es igual á S, advertirémos que el ángulo $y = o$ por las paralelas, $o = c$ por la division en dos mitades, $e = r$ su alterno : luego $i = r$; por consiguiente el triángulo I B R es isosceles (N. 92.), y su lado S igual Q : luego podemos en lugar de S poner Q, sin perturbar la proporcion, y decir M : N : : Q : T.

Nº. 173. Luego *la línea que divide el ángulo del vértice por el medio, divide la base proporcionalmente á los lados.*

§. II.

De los lados proporcionales en los triángulos semejantes.

Nº. 174. Llamamos *triángulos semejantes* aquellos que tienen todos los ángulos correspondientes, iguales (*Lam.* 3. *Fig.* 18.), v. g. los triángulos A B C, y *a b c*.

Los lados opuestos á ángulos semejantes se llaman tambien *homólogos*. Si yo, pues, sobrepongo el triángulo pequeño O sobre el grande E á la parte del ángulo A los dos ángulos A*a*, y las líneas que los forman, coincidirán. Ademas de esto, como el ángulo *b* = B, y el ángulo *c* = C, la línea de puntos *b c* es paralela á B C (N. 42.); y así corta los dos lados A B, A C proporcionalmente (N. 170.); y comparando los dos triángulos O E, podemos decir *a b* : A B : : *a c*, A C.

Del mismo modo poniendo el triángulo pequeño O sobre el grande E en el ángulo C: se prueba que *a b*, que corresponde á A B, le es paralela; y que por consiguiente corta en proporcion los dos lados A C, B C.

Nº. 175. Luego *todos los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales.*

Amigo Eugenio, por ser esta proposicion la clave de infinitos descubrimientos en Geometría, procurarémos todos los modos de conocer quándo son semejantes dos triángulos: y á esto se ordenan las observaciones siguientes:

Sabemos que siempre que una línea es paralela á la base de un triángulo (*Lam.* 3. *Fig.* 14.), hace dos ángulos *m n* iguales á M N, adyacentes á la base (N. 44.); y que el ángulo del vértice A queda comun al triángulo antiguo y al nuevo. Pero quando dos triángulos tienen los ángulos correspondientes iguales, son semejantes.

Nº. 176. Luego *toda línea que corte los lados de un triángulo, siendo paralela á la base, hace dos triángulos semejantes.*

Diximos tambien que todos los ángulos formados por líneas, respectivamente paralelas, eran iguales (N. 45.)

Nº. 177. Luego *quando todos los lados de un triángulo fueren paralelos á los de otro, los triángulos son semejantes.*

Sabemos (*Lam.* 3. *Fig.* 20.) que si una línea fuere perpendicular sobre otra, si se la da una revolucion de 90 grados, ó coincide con ella, ó es su paralela (N. 18.); y así quando un triángulo tuviere todos los lados perpendiculares á sus correspondientes en el otro, en dando una revolucion de 90 grados á un triángulo, todos los lados de uno (*Lam.* 3. *Fig.* 20.) serán paralelos á los del otro; y por consiguiente los ángulos respectivos iguales.

Nº. 178. Luego *quando el triángulo tuviere todos sus lados perpendiculares á los de otro, le será semejante.*

Tambien diximos que los ángulos opuestos en el vértice son iguales (N. 15.), y que tambien lo eran los ángulos alternos.

Nº. 179. Luego *quando los triángulos son formados por dos líneas que se cruzan, y por dos entre sí paralelas, son semejantes* (*Lam.* 3. *Fig.* 21.), porque sus ángulos ó son verticalmente opuestos, ó son alternos.

Formando un triángulo qualquier H (*Lam.* 3. *Fig.* 22.), si tomamos tres líneas E, I, O, proporcionales á sus lados, podrémos hacer de ellas un triángulo v. g. P. Veamos ahora si necesariamente es este nuevo triángulo semejante al primero.

Poniendo los dos lados E, O sobre sus correspondientes (supongamos que son mitades de ellos) terminan en D, E: tiremos por los puntos en que los lados quedan cortados proporcionalmente una línea, la que siendo por eso mismo paralela á A B (N. 177.) formará el triángulo *h*, semejante á H por el Nº. 176: solo falta demostrar que este pequeño triángulo *h* es lo mismo que P, hecho con las tres proporcionales, lo que se conoce así.

Como los triángulos *h* y H son semejantes, todas sus líneas serán proporcionales, y de este modo la vertical será á la vertical, como la orizontal á la orizontal; pero E C es la mitad de B C por la suposicion. Luego D E será lo mismo que *d e*, mitad de A B; y por consiguiente el triángulo *b* será lo mismo que el triángulo P.

Nº 180. Luego *quando los tres lados de un triángulo son proporcionales á los tres de otro, los triángulos son semejantes.*

Esto supuesto, si nos pidieren una quarta proporcional; esto es, si nos dieren (*Lam.* 3. *Fig.* 23.) tres líneas AB, AC, AD, y nos pidieren otra quarta, que con las tres haga proporcion, harémos lo siguiente:

I.

Haré un ángulo arbitrario de líneas indefinidas B C A, y pondré por una parte la primera línea dada A B, y cerraré el triángulo con la línea de puntitos B C.

II.

Pondré en el primer lado la tercera línea dada A D, y tiraré una línea D E paralela á B C.

Esto hecho, los dos triángulos son semejantes por el Nº 176, y los lados proporcionales por el Nº 175: luego A B : A C : : AD : A E; por consiguiente A E es la quarta proporcional que nos pedian.

Nº. 181. Luego *tenemos modo de hallar una quarta proporcional.*

Del mismo modo, si dadas dos líneas AB, AC, nos pidieren una tercera proporcional, harémos lo siguiente (*Lam.* 3. *Fig.* 24.):

Hecho el ángulo arbitrario, pondrémos de un lado la primera y segunda línea, y en el otro repetirémos la segunda, y cerrarémos el triángulo con la línea BC; y últimamente por medio de la paralela CD hallarémos la tercera línea que buscabamos, y podrémos decir AB : AC : : AC : AD.

Nº. 182. Luego *tenemos modo de hallar una tercera proporcional.*

§. III.

Aplicacion de la doctrina precedente á medir distancias inaccesibles sin el socorro de la Trigonometría.

Nada lisonjea mas el gusto de los principiantes que el medir distancias inaccesibles sin intrumentos, ni cálculos embarazosos; lo qual pueden conseguir, sacando varias conseqüencias de la regla general que arriba hemos puesto, y es esta.

Todos los triángulos semejantes tienen los lados en proporcion.

CONSEQUENCIAS.

I.

Nº 183. Luego *para medir la distancia inaccesible* A B (*Lam.* 4. *Fig.* 1.) *bastará hacer lo siguiente:*

I.

Poner una estaca en B y otra en Q, esto es, en la línea visual que va desde B hasta el objeto A. Despues se tira la línea visual desde B hasta C, en donde pondrémos otra estaca C.

II.

Tirarémos una línea visual *a b* paralela á la otra visual B A; la línea *b a* se notará con dos estacas, pero de modo que la estaca *a* esté tambien en la visual C A, y *b* en la visual C B.

III.

Estas estacas con el objeto distante A, hacen los términos de los triángulos semejantes C B A y *c b a*, consideremos las dos líneas B C y *b c* como bases de los dos triángulos, cuyos vértices sean A y *a*. Ahora bien, como estos triángulos, por ser semejantes, han de tener los lados proporcionales (N. 175.), se sigue que la pequeña base es, respecto de la grande, como la pequeña altura es respecto de la grande; y así tenemos esta proporcion *c b*: C B:: *b a*: B A; y así si la pequeña base es, v. g. diez veces menor que la grande B C, tambien la línea *b a* será diez veces menor que la distancia B A, que es la que deseabamos conocer.

II.

Nº 184. Quando no se puede trabajar en el terreno que va desde la línea B C (*Lam.* 4. *Fig.* 2.) ácia adelante, por ser el terreno corto ó escabroso, se puede hacer esta operacion en la parte opuesta en el terreno mismo que pisamos, y el modo es fácil.

I.

Puesta la línea visual B A, tiremos una perpendicular B *b*, y despues otra *b a*, perpendicular á *b* B.

II.

Estas dos líneas B A y *b a*, siendo perpendiculares á la misma línea B *b*, hacen los ángulos alternos iguales, y vienen á quedar paralelas entre sí. (N. 41.)

III.

Dividamos la línea B *b* en partes *aliquotas* (así se llaman las que repetidas agotan el valor de la cantidad, como si una línea se divide en doce dedos ó quartas, que valgan tanto como toda la línea, se dice está dividida en partes *aliquotas*, porque aliquantas son las que se consideran mitades de mitades, &c.): divídase, pues, la línea B *b*, y pongamos en una de ellas la estaca C.

IV.

Retirémonos por cima de la línea *b a* hasta que la estaca C nos embarace la vista del objeto distante A, y pongamos allí otra estaca *a*.

En este caso los dos triángulos *a b c* A B C son semejantes (N. 179.), y los lados proporcionales: llamamos bases de estos triángulos las líneas B C y *b c*: luego la pequeña base es respecto de la grande, como la altura del triángulo pequeño es á la altura del grande, y podemos hacer esta proporcion *b c* : B C : : *b a* : B A; y así queda conocida la distancia B A, que nos es inaccesible.

III.

Nº 185. Si quisiesemos medir la altura de una torre, por la sombra lo podrémos hacer del modo siguiente (*Lam.* 4. *Fig* 3.):

I.

Me llegaré al fin de la sombra de la torre, de modo que la sombra de mi cabeza llegue á la última punta de la sombra que hace la torre.

II.

Dexaré una señal en el suelo en el mismo lugar en que estaban mis pies; un criado notará tambien en el suelo el lugar B, en que estuvo la sombra de mi cabeza, igual al mismo punto donde llegaba la sombra de la torre.

III.

Hecho esto, ya tenemos dos triángulos semejantes, porque todos sus lados son respectivamente paralelos; pues la sombra de mi cuerpo es paralela á la de la torre: los rayos del sol que pasan por mi cabeza para terminar mi sombra, y los que pasan por la aguja de la torre para terminar la de ésta, y últimamente mi cuerpo con el de la torre todos estan paralelos, pues estos dos últimos estan á plomo.

IV.

Luego la sombra pequeña es respecto de la grande, como la altura de mi cuerpo es á la altura de la torre. Esto supuesto, como yo puedo medir el espacio que ocupa mi sombra en el tiempo de la operacion; pues quedáron señales en el suelo, así de mis pies, como de la sombra de mi cabeza; y aun por el lugar de esta podemos conocer hasta dónde llegó la sombra de la torre en aquel mismo tiempo; se sigue que si la sombra de la torre es, v. g. veinte veces mayor que la mia, tambien la altura de la torre será veinte veces mayor que la de mi cuerpo.

Adviértase que se debe contar en la sombra de la torre todo lo que hay desde su centro A, para que quede á plomo la línea que va hasta la aguja C, pues solo esta línea es paralela á mi cuerpo puesto á plomo.

Tambien se ha de notar, que esta operacion no admite tanta exâctitud, como las que se hacen con las líneas visuales, porque la sombra no termina en punto fixo: no obstante siempre se conoce la altura con corta diferencia.

ADVERTENCIA.

Quando se forman estas proporciones siempre se ha de guardar el término no conocido para quarto lugar; y por consiguiente se ha de principiar por un término que no sea *homólogo*, ó correspondiente al término incógnito, v. g. pues en el caso presente el término no conocido es la altura de la torre, ha de entrar en quarto lugar, y no debo empezar por mi altura, porque es el término *homólogo*, correspondiente al incógnito, sino que debo principiar por mi sombra, y decir: una sombra es á otra, como una altura á otra altura; ó una sombra pequeña es á la altura pequeña, como la sombra grande á la altura grande.

Te enseño este problema, amigo Eugenio, no porque en la práctica se pueda executar con perfecta exâctitud, sino porque sirve para una medida poco mas ó ménos, y es fácil.

Tambien te advierto, que quando se comparan los lados de dos triángulos semejantes, solo se comparan entre sí los lados *homólogos*, esto es, los que estan opuestos á ángulos iguales.

IV.

Nº 186. Si hubiere un grafómetro

(*Lam.* 3. *Fig.* 4.) y un semicírculo graduado (*Lam.* 4. *Fig.* 5.), se pueden medir las distancias inaccesibles con bastante exâctitud de este modo:

I.

Poniendo dos estacas en B C (*Lam.* 4. *Fig.* 1.), las quales con el objeto distante A hacen los tres puntos del triángulo visual: despues de esto, en el lugar C pondré el grafómetro (*Lam.* 4. *Fig.* 4.) para medir el ángulo C.

El medio de medir los ángulos visuales con el grafómetro es el siguiente: Pondré en C orizontal el instrumento, y de modo que por la regla ó *alidada* fixa P Q vea yo la estaca fixa en B, y sin mover el instrumento volveré la *alidada* ó regla movible M N, de forma, que por las *pínulas* M N vea yo el objeto distante A: de este modo el arco del grafómetro, comprehendido entre las dos alidadas, dará el número de grados comprehendidos por el ángulo visual C A y C B de la (*Lam.* 4. *Fig.* 2.)

II.

Medido por este modo el ángulo visual en C, quitaré el grafómetro de allí, y dexaré una estaca en su lugar: le pasaré al lugar de otra estaca en A: volveré el instrumento de modo, que por la alidada fixa P Q pueda ver la estaca C; y sin tocar al instrumento volveré la alidada movible M N, hasta ver el objeto distante en A; y entónces el arco comprehendido entre las dos alidadas mostrará el valor del ángulo visual en B.

III.

Mediré la línea B C para ver quántos pasos ó varas contiene.

IV.

Esto supuesto, haré en un papel (*Lam.* 4. *Fig.* 5.) una línea *b c*, que tendrá tantas partes de pie de Rey, ó qualquiera otro petipie, quantas varas, brazas, &c. hubiere en la línea visual B C: tirada así esta línea *b c*, pondré en sus extremidades el centro *o* del semicírculo H, y haré allí dos ángulos iguales á los dos ángulos visuales, que tenemos en B y en C; pondré dos puntitos en los grados que les corresponden en el semicírculo, por los quales tiraré dos líneas, que se han de cruzar en alguna parte; y en donde se cruzan pondré la letra *a*, que corresponde al objeto distante A.

V.

Hechos estos triángulos, llamaré bases á las líneas B C y *b c*; llamaré alturas las líneas B A y *b a*, y diré que la base del triángulo pequeño es á su altura, como la base del grande es á la suya. Y de este modo, sabiendo yo quantas partes de petipie tiene la línea *b c*, y pudiendo averiguar quántas se contienen en *b a*; sabiendo tambien quántas brazas tiene la línea visual B C, tengo una proporcion *b c* : *b a* : : B C : B A : los tres términos son conocidos, y por consiguiente el quarto lo será, y este quarto término es la distancia que buscabamos.

V.

Nº. 187. Podemos medir de otro modo al mismo tiempo la distancia y altura de un objeto distante, sin mas instrumento que dos estacas á plomo. (*Lam.* 4. *Fig.* 6.)

I.

Pongamos dos estacas á plomo P y Q.

II.

Llegando á la estaca P notaré allí el punto *a* á la altura de los ojos, y notaré en la otra estaca el punto *n*, por donde pasa el rayo visual que va á terminar á la base N del edificio.

III.

Tomaré la distancia que hay desde *n* hasta el suelo, y la pasaré á la estaca P en el punto *m*; ya con esto tenemos un triángulo pequeño *a n m*, y otro grande que le es semejante A N M; y la razon de semejanza es porque *n m* es paralela al suelo ó pavimento representado en la línea N M.

IV.

Supuesta la semejanza de los triángulos, llamaré su altura las líneas *a m* y A M, y diré: la altura del pequeño es á la del grande, como la base del pequeño es á la base del grande, y así *a m* : A M : : *m n* : M N, siendo las tres primeras cantidades conocidas, tambien lo será la quarta, que es la distancia del edificio representada en la línea N M.

Mas para medir la altura haré lo siguiente:

I.

Llevaré á la estaca Q la altura *a* M, notando allí el punto *o*, de forma, que la línea visual *a o* y O quede paralela al pavimento.

II.

Desde *a* miraré á lo mas alto del edificio, y notaré en la segunda estaca el punto *i*, por donde pasa el rayo visual.

III.

Con esto tenemos un pequeño triángulo *a i o*, y otro grande A I O, el qual es semejante, porque la estaca Q está paralela al edificio.

IV.

Luego la base del pequeño triángulo es á la del grande, como la altura del pequeño á la altura del grande, y así diré : *a o*: A O : : *o i* : O I; pero las tres primeras cantidades son conocidas : luego tambien lo será la quarta : y si juntáremos la altura O I con la altura *a* y M, ó bien O N, quedará conocida la altura total del edificio N I.

Advierto que tampoco esta operacion puede ser exâctísima ; pero hecha con cuidado dará á conocer la distancia y altura con corta diferencia.

VI.

Nº 188. Por semejante método tenemos el medio para medir una distancia inaccesible por ambas extremidades (*Lam.* 4. *Fig.* 7.)

I.

Del punto C, tomado á discrecion, miraré á los dos objetos, cuya distancia quiero conocer, y tendré el triángulo A C B, cuyos tres lados, por ser incógnitos, parecen inútiles para toda operacion; mas para conocerlos haré lo siguiente:

II.

De un punto arbitrario M, tomado en la línea C A, miraré al objeto B, y tomando en esa misma línea una parte proporcional á mi discrecion, notaré un punto *m*, del qual tiraré la línea *m b*, paralela á la grande M B, lo que es muy fácil, poniendo el grafómetro en M, y despues en *m*, sin mudar la graduacion de la alidada movible, y notaré el punto *n*.

Esto hecho, ya tenemos dos triángulos semejantes *m b c* y M B C: llamaré bases á las líneas M C y *m c*; podré decir: la base del pequeño es á la del grande, como la obliqua del pequeño es á la del grande, de este modo C *m* : C M : : C *b* : C B.

III.

Transportaré á la línea C B las mismas

distancias que tomé en la línea C A; esto es, notando los puntos N *n* que estan en las mismas distancias de C, que *m* y M, tiraré de N una línea visual N A, y otra paralela á esta *n a* con el fin de tener dos triángulos semejantes *n a c*, N A C; y llamando bases de estos triángulos las líneas C *n*, C N, podemos decir: la base del pequeño es á la del grande, como la obliqua del pequeño es á la del grande; esto es, C *n* : C N : : C *a* : C A, y como las tres primeras cantidades son conocidas, tambien lo será la quarta C A.

IV.

Si el terreno no consintiere tomar los puntos *n* N en la misma distancia de *m* M, bastará tomar qualesquiera otros, con tal que la pequeña distancia C *n* sea respecto de la grande C N, como C *m* es á C M.

V.

Juntando ahora lo que tenemos probado, conocerémos que si C *m* es v. g. la quarta parte de C *m*; y C *n* de C N, tambien C *a* será la quarta parte de C A, y C *b* de C B.

VI.

Habiendo hallado los dos puntos *a b*, que dividen en proporcion los dos lados C A, C B, tirarémos por ellos una línea *a b*, la qual por el Nº 171. es paralela á la no conocida A B; y así los dos triángulos C *a b*, C A B son semejantes, y los lados proporcionales: por consiguiente, llamando bases las líneas *a b*, A B, dirémos que el lado del pequeño C *b* es al lado del grande C B, como la base del pequeño *a b* á la del grande A C, esto es, B *a* : C A : : *a b* : A B.

Y con esto se conocerá no solo la distancia A B, sino tambien en qué rumbo ó direccion se halla esta línea, pues debe ser la misma que la de su paralela *a b*.

§. IV.

Aplicacion de la doctrina dada á la division de qualquiera línea en partes proporcionales muy pequeñas.

Teniendo presente, amigo Eugenio, dos verdades esenciales ya probadas: una que la paralela que corta un triángulo, hace dos triángulos semejantes (Núm. 176.): otra que los triángulos semejantes tienen los lados

I 2

proporcionales (Núm. 175.); sacarémos de ellas varias conseqüencias.

I.

Nº. 189. El modo de dividir exâctamente qualquier línea muy pequeña en las partes que se pidieren. (*Lam.* 4. *Fig.* 8.)

Sea la línea dada D E, y supongamos que la quieren dividir en 2, 3 ó 5 séptimas partes, lo que se expresa así: $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{7}$.

I.

Tomarémos una línea arbitraria B C, y en ella con el compas harémos siete medidas iguales entre sí, bien que tambien á discrecion.

II.

Tomaré con el compas las siete medidas juntas que hace la línea B C, y describiré desde sus extremidades dos arcos, que se cruzan en A, para formar un triángulo equilátero.

III.

De las divisiones 2, 3, 5 tiraré líneas al vértice A. Esto hecho, ya sé que toda línea que fuere paralela á B C, quedará dividida, como ella lo está, esto es, en $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{7}$.

IV.

Tomaré con el compas la línea dada D E, y desde el vértice A describiré un arco, que corte los lados del triángulo en *b c*, y tiraré la línea *b c*, la qual será igual á D E, por quanto el nuevo triángulo A *b c*, teniendo el vértice comun en A, y los ángulos de la base iguales con los del triángulo grande A B C, ha de ser equilátero como él, y por la misma razon todos los triángulos pequeños, cuyas bases hacen la línea *b c*, son semejantes á los grandes, cuyas bases juntas hacen la línea B C.

Luego *la línea dada* D E, (ó su igual *b c*) *se halla dividida como* B C, *esto es, en* $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{7}$.

II.

Nº. 190. Tenemos el modo de formar el petipie de centésimas, que muchos llaman de décimas.

El petipie de centésimas se halla en muchos instrumentos matemáticos para tomar las partes centésimas de una pulgada, y se puede aplicar á qualquiera otra línea; éste se forma del modo siguiente (*Lam.* 4. *Fig.* 9.)

I.

Sea la línea dada A B, la qual se procura dividir en cien partes iguales: para esto la dividirémos en diez partes iguales, numerándolas por las decenas siguientes: 10, 20, 30, &c.

II.

De las dos extremidades baxarémos las dos paralelas entre sí A *e*, B *o*, en cada una de las quales tomaré con el compas diez partes iguales, notándolas con los números siguientes 1, 2, 3, &c.

III.

Unirémos las dos paralelas A *e*, B *o* con la línea *e o* igual á A B.

IV.

Tirarémos paralelas á A B por todos los puntos notados en A *e*.

V.

Tirarémos una obliqua A *m*, y todas las demas paralelas á esta obliqua.

Esto supuesto demos que me pidan 56 partes iguales centésimas de la línea A B, buscaré en ella la division 50, y en A *e* la division 6, y veré en qué parte esas dos divisiones se encuentran, lo que sucede en el punto O; y tomando con el compas la distancia de O hasta 6, hallaré 56 partes centésimas. Por quanto de O hasta *i* hay 5 divisiones, cada una de 10 partes, y desde *i* hasta 6 hay seis partes centésimas; lo que se prueba de este modo:

Estando este triángulo *e* A *m* dividido por paralelas, en qualquier parte que le corten éstas, siempre queda triángulo semejante al total: Luego así como la altura del grande es á la del pequeño como 10 á 6, así la base del grande será á la del pequeño, como 10 á 6; y así *e m* vale 10 partes centésimas, 6 *i* valdrá 6.

Del mismo modo se pueden hallar todas las partes centésimas desde 1 hasta 99.

§. V.

De las líneas que son medias proporcionales.

Nº. 191. Llamamos, Eugenio, media proporcional una línea, que si se pone entre otras dos líneas dadas, haga con ellas una progresion geométrica, ó proporcion continua.

Pero ántes es preciso advertir, que se llama hipotenusa en un triángulo la línea opuesta á un ángulo recto v. g. (*Lam.* 4. *Fig.* 10.) la línea A B, y el triángulo que tiene un ángulo recto se llama triángulo rectángulo.

Tomemos ahora un triángulo rectángulo; baxemos desde el ángulo recto la línea O *o* perpendicular sobre la hipotenusa A B: ya tenemos el triángulo total T dividido en dos, uno pequeño P, otro mayor M.

P tiene un ángulo recto en *o*, así como el total le tiene en O; y ademas de esto tiene el ángulo A comun al triángulo P y al total T; y por consiguiente (N. 86.) será semejante al total.

Del mismo modo el triángulo M tiene un recto en *o*, y otro agudo en B, comun al triángulo M y al triángulo T; y por consiguiente será semejante al total, y semejante tambien á A P: de aquí sacarémos esta conseqüencia general:

Nº. 192. Luego *toda perpendicular sobre la hipotenusa divide el triángulo en dos, que son semejantes entre sí y al total.*

Siendo, pues, los tres triángulos semejantes, sus lados serán proporcionales. (N. 175.) Tomemos, pues, en P y en M los lados que forman los ángulos rectos para compararlos entre sí: y dirémos: A*o* : *o*O : : *o*O : *o*B.

Nº. 193. Luego *la perpendicular baxada sobre la hipotenusa es media proporcional entre las dos partes de ella.*

Luego *si nos dieren dos líneas a, b* (*Lam.*4. Fig. 11.), *y nos pidieren una media proporcional entre ellas, se podrá hallar de este modo:*

Pondré las dos líneas *a*, *b* seguidas una á otra; haré de ambas el diámetro de un semicírculo, y levantaré del punto *e* en que se juntan las dos, una perpendicular: despues tirando las dos líneas *o r*, *o s*, haré un triángulo rectángulo (N. 47.), y por el Nº. precedente *a*: *m* : : *m* : *b*.

Nº. 194. Luego *tenemos método para hallar una media proporcional entre dos líneas dadas.*

Por la misma razon de la semejanza de los triángulos P y T (*Lam.* 4. *Fig.* 10.) podemos comparar entre sí los lados que en uno y otro forman el ángulo comun, y decir: A*o* : AO : : AO : AB. Lo mismo harémos en los triángulos M y T, comparando entre sí los lados que forman el ángulo comun C, y dirémos: B*o* : BO : : BO: BA.

Nº. 195. Luego *dividido qualquier triángulo rectángulo por la perpendicular sobre la hipotenusa, qualquiera de los lados es media proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento de ella, que le corresponde.*

Si describimos un semicírculo (*Lam.* 4. *Fig.* 12.), su diámetro será hipotenusa del triángulo hecho por ella, y por dos cuerdas terminadas en su circunferencia, porque estas precisamente hacen ángulo recto. (N. 74.)

Nº. 196. Luego *qualquier cuerda* (*Lam.* 4. *Fig.* 12.) *tirada de la extremidad del diámetro,* *es media proporcional entre todo el diámetro, y el segmento de éste, cortado por la perpendicular baxada desde la extremidad de la cuerda, y podemos decir* : AO : AM : : AM : AB.

Tambien podemos hallar una media proporcional por otro medio : si juntamos en un punto fuera del círculo (*Lam.* 4. *Fig.* 13.) una secante y una tangente, tenemos tres líneas, que son la exterior A O, la tangente A N, y la secante total A M. Para exâminar si estan en proporcion tirarémos las líneas N O y N M, las quales forman dos triángulos N A O, N A M. Llamemos al pequeño P, y al grande T.

Estos dos triángulos tienen el ángulo A comun : ademas de esto, el ángulo M tiene por medida la mitad del ángulo N O (N. 72.), y el ángulo O N A tiene tambien esta medida, por ser ángulo de cuerda y de tangente. Luego los dos triángulos son semejantes; y si comparamos los lados homólogos que forman el ángulo comun A, se hallarán proporcionales, y podrémos decir: AO : AN : : AN : AM.

Nº 179. Luego *la tangente que toca en la extremidad de la secante, es media proporcional entre toda la secante y su parte exterior.*

§. VI.

Modo de dividir qualquier línea en media y extrema razon.

Nº 198. Llamamos, amigo Eugenio, dividir una línea *en media y extrema razon*, quando la dividimos en tal forma, que la parte pequeña comparada con la grande esté en la misma razon que la mayor tiene con la total (*Lam.* 5. *Fig.* 1.): v. g. si nos dan la línea A B para dividirla, y la partimos en el punto *e*, quedará la parte pequeña *p* con la grande *g*, como esta grande comparada con la total T, y podrémos decir $p : g :: g : T$. Para conocer que esto es verdad harémos lo siguiente:

I.

Tomaré la mitad de la línea dada A B, y levantaré sobre la extremidad una perpendicular A O, igual á esa misma mitad, la que me servirá de radio para un círculo, quedando de este modo su diámetro igual á la línea dada A B.

II.

Tiraré de la extremidad B una secante, que pase por el centro del círculo, y termine en la circunferencia M.

Esto hecho, ya tenemos una secante y una tangente unidas en un punto, y por consiguiente (N. 197.) la exterior B N es á la tangente B A, como ésta es respecto de la secante B M, diciendo así ∺ B N : B A: B M. B N es á B A como B A á B M.

Ahora, pues, el diámetro M N es igual á la tangente A B, y se puede substituir por ella sin perturbar la progresion, luego podemos decir ∺ B N : N M : B M, quedando de este modo dividida la secante en media y extrema razon.

Pero si tiramos las dos paralelas M A, N *e*, tenemos dos triángulos semejantes, cuyos lados estan cortados proporcionalmente y del mismo modo (N. 170.)

N.º 199. Luego *tenemos modo de cortar qualquiera línea dada en media y extrema razon.*

§. VII.

De las líneas que estan en proporcion recíproca.

Nº 200. Llamamos proporcion recíproca siempre que un objeto comprehende á otro tantas veces en una circunstancia, quantas es comprehendido por él en otra: de esta suerte en la *proporcion recíproca* el segundo y tercer término pertenecen al mismo objeto, y el primero con el quarto pertenecen á otro.

En esta suposicion, si tiramos en un círculo dos cuerdas A N, E M (*Lam.* 5. *Fig.* 2.), las quales se corten, y unimos sus extremidades con dos líneas E A, N M, harémos dos triángulos P y Q, los quales son semejantes, porque los ángulos en O son opuestos en el vértice, y los ángulos en E N, por estar en la circunferencia y apoyados en el mismo arco A M, tambien son iguales. Luego los lados que forman los ángulos en O son proporcionales; y así se infiere que OA : OE : : OM : ON. Bien se advierte que el segundo y tercer término pertenecen á una misma línea, así como el primero y el quarto pertenecen á la otra.

Nº 201. Luego *quando dos lineas se cru-*

zan dentro de un círculo, hacen quatro segmentos que estan en proporcion recíproca.

Supongamos ahora que dos secantes se juntan en un punto fuera del círculo (*Lam.* 5. *Fig.* 3.), y que de los puntos O I, en que cortan el círculo, tiramos dos líneas de puntitos á las extremidades M N: en este caso tendrémos dos triángulos N I A, M O A, los quales tienen un ángulo comun en A, y los ángulos en M N iguales, por estar en la circunferencia, y apoyados en el mismo arco I O (N. 72.); por consiguiente serán semejantes, y los lados respectivos proporcionales; de suerte, que el lado mas pequeño de P será al lado mas pequeño de Q, como el lado máxîmo de P al máxîmo de Q, esto es, AI : AO : : AN : AM.

Ahora, pues, el segundo término y el tercero pertenecen á la misma línea AN, así como el primero y quarto pertenecen á otra AM, señal propia de proporcion recíproca.

N.º 202. Luego *quando dos secantes se unen en un punto fuera del círculo, las exteriores estan en razon recíproca con las secantes enteras.*

§. X.

De las circunferencias proporcionales en los polígonos y en los círculos.

Para conocer qué proporcion hay entre las circunferencias de varios polígonos semejantes, ó diversos círculos, podemos advertir lo siguiente:

I.

Que los polígonos se pueden dividir en triángulos.

II.

Que siendo los triángulos respectivamente semejantes, y puestos del mismo modo, vienen á formar polígonos semejantes: de esto se infieren varias conseqüencias:

I.

Dado qualquier polígono irregular (*Lam.* 5. *Fig.* 4.), si nos pidieren otro semejante, cuyo circuito sea duplo, triple, ó en qualquiera otra razon, respecto del que fué dado; harémos lo siguiente:

I.

Del ángulo O tirarémos diagonales á todos los demas ángulos, y las prolongarémos indefinidamente.

II.

Prolongarémos tambien indefinidamente los lados que forman el ángulo O.

III.

Tomarémos en la línea O M una extension, que tenga al lado O A, la razon dupla, triple, &c. y del punto M, en que se termina el nuevo lado, tiraré una paralela A I al lado del polígono antiguo, y del punto N otra paralela al otro lado antiguo, y así en los demas lados.

Por quanto hecho esto, el nuevo polígono será semejante al que nos dieron: pues los triángulos que le forman son semejantes á los que formaban el que nos diéron. (N. 176.)

Ademas de esto, como los lados son proporcionales, la misma razon habrá entre A O y O M, que entre A I y M N, y por consiguiente entre los dos circuitos de los polígonos.

Nº. 103. Luego *en los polígonos semejantes los circuitos son proporcionales á los lados homólogos.*

II.

Nº. 204. Si el polígono fuere regular, dividido éste en triángulos con los radios tirados desde el centro, y hecha la misma operacion, quedará el nuevo polígono semejante, con el círculo, en la razon de sus radios, por la misma razon que dimos en los polígonos irregulares.

III.

Pues los círculos se consideran como polígonos de infinitos lados, podemos decir de los círculos lo que diximos de los polígonos regulares.

Nº. 205. Luego *las circunferencias de los círculos son entre sí como los radios ó como sus diámetros*, por la razon del número precedente.

Ahora bien, amigo Eugenio, si hubieres entendido bien estas Cartas, puedes sosegar, pues no encontrarás en los Elementos de Geometría cosa que sea dificil, porque el peor camino ya está pasado: ten presente la comparacion que te hice, y creeme, que cada proposicion demostrada es como una nueva antorcha, que te ha de iluminar en el obscuro camino que resta; pero teniendo tantas hachas encendidas, no debes temer las tinieblas. Dios te guarde, &c.

FIN DE LA QUARTA CARTA.

CARTA QUINTA.

De las superficies.

§. I.

De la formacion de la superficie.

Despues de tratar, amigo Eugenio, de las líneas y sus propiedades, pide el buen órden que ahora tratemos de las *superficies*, y despues de éstas tratarémos de los *sólidos*. Ahora te acordarás de que para darte idea de la *línea*, te dixe que considerases un punto en movimiento; y que tuvieses por línea el camino por donde el punto va pasando: ahora te digo una cosa semejante para darte idea de la superficie. Quando una línea se considera, moviéndose toda ácia algun lado, el espacio por donde se considera que la línea entera va pasando, se llama *superficie*.

Nº 205. Debes ahora suponer que quando una línea recta se mueve ácia un lado, siempre va paralela á sí misma; y así el espacio que corrió la línea se llama paralelogramo. (*Lam.* 5. *Fig.* 7.) La línea A B se considera *movible*, y la línea A C es la *direc-*

triz, y se considera quieta.

Nº 207. Si la movible con la directriz hacen un ángulo recto (*Lam.* 5. *Fig.* 8.), el paralelogramo se llama rectángulo, como A.

Nº 208. Si ademas de ser el ángulo recto, la movible es igual á la directriz, el paralelogramo se llama quadrado, como B. (*Lam.* 5. *Fig.* 9.)

Nº 209. Si la movible hiciere con la directriz un ángulo que no sea recto, el paralelogramo, se llama obliquángulo; y en este caso, si la movible es igual á la directriz, el paralelogramo se llama rhombo, v. g. C (*Lam.* 5. *Fig.* 10.); pero si no fuesen iguales las dos líneas, se llama rhomboyde, como D. (*Lam.* 5. *Fig.* 11.)

Nº 210. Tomemos ahora un paralelógramo, de qualquier especie que sea, y tirémos en él una línea desde un ángulo al otro ángulo opuesto, y se llamará esta línea la *diagonal*; y cada mitad del paralelogramo será un triángulo, y los dos, ó son rectángulos ú obliquángulos, segun era el paralelogramo de donde salieron, como T y D. (*Lam.* 5. *Fig.* 8 y 9.)

Nº 211. Juntando dos triángulos, el uno á lo largo del otro, de modo que tengan un lado comun, resulta una figura de quatro lados: si dos de ellos fueren paralelos, la figura se llama *trapecio* (*Lam.* 5. *Fig.* 12.); pero si no hubiere lado alguno paralelo al otro, se llama simplemente quadriláte-ro. (*Lam.* 5. *Fig.* 13.)

Nº 212. Toda figura de muchos lados, y por consiguiente de muchos ángulos, se llama *polígono*: si los lados, como tambien los ángulos, fueren todos iguales, será polígono regular, como M (*Lam.* 5. *Fig.* 14.); mas si los lados ó ángulos son desiguales, la figura será polígono irregular, como N. (*Lam.* 5. *Fig.* 15.)

Nº 213. El espacio comprehendido dentro de una línea circular se llama *círculo* (*Lam.* 5. *Fig.* 16.): el espacio comprehendido entre dos radios y el arco, se llama *sector* (*Lam.* 5. *Fig.* 17.); pero el espacio comprehendido entre la cuerda y su arco, se llama *segmento*. (*Lam.* 5. *Fig.* 18.)

CONSEQUENCIAS.

I.

Diximos al Nº 210, que en todo *paralelogramo, tirada una diagonal, resultaban dos triángulos*. Ahora decimos que estos triángulos (*Lam.* 5. *Fig.* 8, 9, 10, 11.) tienen un lado comun, que es la diagonal; y ademas de esto los ángulos adyacentes á la diagonal son alternos: y así los dos triángulos vienen á ser iguales. (N. 113.) Tienen ademas por base los lados que al mismo tiempo son base del paralelogramo, y son de la misma altura que éste.

Nº 214. Luego *todo paralelogramo se divide en dos triángulos iguales de la misma base, y de la misma altura del paralelogramo.*

Nº 215. Nótese que podemos llamar base á qualquiera de los lados de un triángulo, con tal que llamemos vértice al ángulo que la sea opuesto. Adviértase tambien que llamamos altura del triángulo ó del paralelogramo la perpendicular sobre la base, ó sobre la continuacion de ésta, como AC. (*Lam.* 5. *Fig.* 19.)

Nº 216. Luego *el valor de qualquier triángulo es la mitad del valor que tendria su paralelogramo*; esto es, siendo de la misma base y de la misma altura. Aquí se advierte que quando hablamos del valor del triángulo, paralelogramo, círculo, polígono, &c. hablamos de la arëa ó espacio comprehendido entre las líneas que le componen.

§. II.

Modo de valuar las superficies.

Nº 217. Para valuar la superficie de un paralelogramo rectángulo, se debe multiplicar la base por la altura; mas los principiantes no pueden bien comprehender cómo se multiplica una línea por otra: para esto se advierte, que qualquiera cantidad representada por una línea se debe dividir en cierto número de unidades, aunque la calidad de éstas es arbitraria, pues cada unidad puede ser línea, pulgada, palmo, &c. y así multiplicando el número de las unidades de una línea por el número de las de la otra, queda multiplicada una línea por otra.

Nº 218. Adviértase tambien, que no es lo mismo formar una superficie, que valuarla; pues para su formacion se considera la línea matemáticamente, esto es, prescindiendo de su grueso; y esta línea se mueve de lado, caminando siempre paralela á sí misma, segun la direccion de otra línea para formar la superficie.

Pero si queremos valuar la superficie ya formada, debemos numerar la cantidad de partes que la componen; y en esto ya se ve, que esas mismas partes son tambien superficies, y no puramente líneas, por quanto de líneas matemáticas sin latitud ó grueso no se puede componer una extension física, la qual tiene anchura; siendo cierto, que la nada, por mas que se multiplique, no puede dar cosa positiva.

Es evidente, pues, que quando se trata de valuar alguna superficie, debemos considerar la línea movil como la primera serie de unidades extensas, esto es, pulgadas, palmos, quadrados, &c. y por la misma razon la línea directriz debe dividirse tambien en unidades; y entónces multiplicando el número de unidades de la una línea por el de la otra, tendrémos el valor de la superficie.

Supongamos ahora (*Lam.* 5. *Fig.* 20.) que el paralelogramo que debemos valuar tiene cinco pulgadas en la base, y tres de altura: multiplicaré 5 por 3, y dará 15, porque la base tiene en sí cinco pulgadas quadradas, la segunda serie tiene otras cinco, y las mismas la tercera: poniendo, pues, tres series de pulgadas quadradas, hemos agotado el paralelogramo que tiene tres de altura.

Nº. 219. Luego *multiplicando la base del paralelogramo rectángulo, por su altura tenemos su valor.*

Si la unidad que ha de servir de medida, no fuere quadrado, sino paralelogramo (*Lam.* 5. *Fig.* 21.), v. g. si queremos saber quántos ladrillos se necesitan para el pavimento de una sala, debemos hacer la misma cuenta, mas con la cautela siguiente: Si A, que es el lado mayor del paralelogramo que sirve de unidad fuere la base, el lado menor O, debe servir para medir la altura del paralelogramo, porque de este modo, multiplicando el primer órden tantas veces, quantas la altura del ladrillo entra en la altura del paralelogramo, quedará agotado todo el espacio; y así $3 \times 4 = 12$, que es el valor del paralelogramo.

Para valuar los paralelógramos obliquángulos harémos la reflexíon siguiente: Tomemos el paralelogramo rectángulo A (*Lam.* 5. *Fig.* 22.), y dividámosle en varios paralelógramos orizontales: si despues de esto, en vez de considerarlos unos sobre otros á plomo, como en A, los consideráremos en la forma que se ve en B, el valor de ellos siempre será el mismo.

Tiremos ahora de las dos extremidades de la base C E dos paralelas á las extremidades de la línea D F; la línea C D cortará todos los triángulos que se ven en la figura, y la línea E F cerrará en la otra parte otros tantos espacios vacios triangulares, en los que cabrian exâctamente dos triángulos de la parte opuesta; pues la altura de los unos y de los otros es la misma; los ángulos adyacentes al lado que forma su altura, son de un ángulo recto siempre igual, y otro ángulo formado por paralelas, que es igual por el Núm. 45; por consiguiente cada triángulo de una parte es igual al vacío que le corresponde por la otra; y si los consideramos mudados á la parte opuesta, la llenarán perfectamente por el Núm. 113. Hecho esto así, el paralelogramo rectángulo A se reduce al obliquando B.

Nº. 220. Luego *los paralelogramos que tienen la misma base y la misma altura son iguales*; pues si el paralelogramo B (*Lam.* 5. *Fig.* 23.) es igual al rectángulo A, y éste se valua, multiplicando la base por la altura, del mismo modo se debe valuar su igual B, esto es, multiplicando la base R S, no por el lado S O, sino por la altura S E.

Nº 221. Luego *quando se hubiere de valuar un paralelogramo obliquángulo, se debe multiplicar su base por la altura perpendicular, y no por uno de sus lados.*

De paso observamos que el paralelogramo obliquo B, teniendo lados mas largos que el recto A, es igual á él en el valor. Luego *puede el mismo espacio, sin mudar de valor, ser comprehendido, ó por líneas mayores ó por menores.* (*Lam.* 5. *Fig.* 23.)

La razon es, porque en los dos paralelogramos A y B los lados de A son líneas perpendiculares, los de B son obliquas; y siendo siempre las líneas obliquas mayores que las perpendiculares, que caen sobre la misma línea por el Num. 37, pueden ser los espacios iguales, aunque las líneas que los comprehenden no sean iguales.

Nº 222. Luego *los espacios ó superficies no siguen la misma proporcion de las líneas que los terminan.*

Nº 223. Diximos que los triángulos eran la mitad de los paralelogramos, que tuviesen la misma base y altura (N. 216.); y acabamos de decir que los paralelogramos de la misma base y altura son iguales; por consiguiente tambien lo serán las mitades respectivas.

Nº. 224. Luego *los triángulos de la misma base y altura son iguales.* A es igual á B. (*Lam.* 5. *Fig.* 24.)

Nº. 225. Luego *quando nos dieren un triángulo para valuarle , lo podemos hacer por estos modos* (*Lam.* 5. *Fig.* 25.):

I.

En el triángulo A. *multiplicando toda la base por toda la altura , y tomando solamente la mitad de este producto para valor del triángulo* A. La base es 5 , la altura es 4 , el producto es 20 , la mitad de éste 10 , será el valor del triángulo A.

II.

Multiplicando la base del triángulo B *por media altura*, entónces la base es 5 , multiplicada por media altura 2 , dará 10 , valor del triángulo B.

III.

En D , *multiplicando toda la altura* 4 *por la mitad de la base* $2\frac{1}{2}$, *resultan* 10 , *valor del triángulo* D ; la razon es , porque de todos estos tres modos viene el triángulo á tener la mitad del valor de su paralelogramo.

Si nos dieren el trapecio de la (*Lam.* 5. *Fig.* 26.) para hallar su valor harémos lo siguiente: Tirarémos la línea M N paralela á las dos faces ó lados paralelos del trapecio y en igual distancia de ellos: despues le multiplicarémos por la altura, haciendo un paralelogramo rectángulo. De este modo cortarémos del trapecio los dos triángulos inferiores, y formarémos en la parte superior otros dos, los que son iguales á los de abaxo, porque la altura de ellos es la misma (pues ésta se dividió por el medio): los ángulos rectos son iguales, y los que son opuestos en el vértice tambien lo son: por consiguiente (N. 113.) el triángulo inferior es igual al superior que le corresponde; y así puestos los triángulos superiores en lugar de los inferiores, que son sus iguales, el trapecio se convierte en un paralelogramo rectángulo, cuyo valor es el producto de la paralela del medio, multiplicada por toda la altura.

N.º 226. Luego *todo trapecio es igual al paralelogramo, en que la paralela del medio del trapecio se multiplica por la altura.*

§. III.

Modo de valuar ó hallar el valor de los polígonos regulares y los círculos.

Nº 227. Qualquiera polígono regular (*Lam.* 5. *Fig.* 27.) se puede dividir en triángulos iguales y semejantes, tirando líneas desde el centro á todos sus ángulos, por ser iguales todos los lados que forman la circunferencia y todos los ángulos; pues á no serlo, no seria el polígono regular.

La línea perpendicular tirada desde el centro á los lados, se llama *Aposthema.*

Para hallar este centro levantarémos una perpendicular del medio de un lado F, y levantando otra en medio del lado E, se cruzarán en algun punto O; pero como el lado A tiene igual inclinacion á F, tambien la perpendicular desde el medio de este lado cortará á la de F en el mismo punto O, en que la cortó la perpendicular tirada de E. El mismo argumento se hace de los otros lados, y todas se cruzan en O.

Digo ahora que O será el centro del polígono, porque todos los triángulos tienen bases iguales en la circunferencia, y los ángulos adyacentes iguales; y así en todo son iguales: Luego el círculo descrito de O, como de centro, puede pasar por todos los ángulos, pues todos los radios y lados de los triángulos son iguales.

Esto supuesto (*Lam.* 5. *Fig.* 28.), si yo separase todos los triángulos en que se dividió el polígono, poniéndolos en línea recta, el conjunto de estos triángulos tendria el mismo valor del polígono.

Ademas de esto, ya se ve que los espacios vacíos que dexan entre sí estos triángulos, son otros triángulos iguales, en situacion inversa; porque los lados son iguales, y los ángulos de los vértices comprehendidos por ellos tambien son iguales por ser alternos; pues los lados C *m*, D *n* son paralelos por la igualdad de los ángulos de la base en todos los triángulos del polígono.

Supongamos, pues, que yo tomaba los tres últimos triángulos D, E, F para colocarlos sobre los tres primeros A, B, C (*Lam.* 5. *Fig.* 29.), ajustándolos en los vacíos que habia entre ellos, y que divido por medio el triángulo F para colocarle en las extremidades: en este caso formaria un paralelogramo, cuya base seria media circunferencia del polígono, y su altura todo el *Aposthema.*

Nº 229. Luego *el polígono regular es igual á un paralelogramo, cuya base sea media circunferencia, y su altura todo el Aposthema.*

Si divido por el medio el paralelogramo (*Lam.* 5. *Fig.* 29.), y pongo (*Lam.* 5. *Fig.* 30.) las dos mitades una delante de la otra, en este caso tendré un paralelogramo del mismo valor, cuya base seria toda la circunferencia, y su altura medio *Aposthema* solamente.

Nº 230. Luego *el polígono regular tambien es igual á un paralelogramo, cuya base sea toda la circunferencia, y cuya altura sea medio Aposthema.*

Dividamos ahora este paralelogramo (*Lam.* 5. *Fig.* 30.), y tiremos en la una mitad la diagonal *a o*; harémos con ella un triángulo *n*, al qual podemos colocar sobre el punto *o* (*Lam.* 5. *Fig.* 31.) con el fin de que caiga ácia otra parte, y haga un triángulo.

En estos términos el triángulo *m* seria igual á *n*; pues ambos tienen un ángulo recto, y los lados que le forman son iguales en uno y otro triángulo (N. 113.); y así el valor de ellos es el mismo: Luego cortando el triángulo *m*, y poniendo *n* en su lugar, no se mudará el valor; y en este caso tenemos un triángulo, cuya base es toda la circunferencia, y su altura todo el Aposthema.

Nº 231. Luego *el polígono regular es igual á un triángulo, cuya base sea toda la circunferencia, y su altura todo el Aposthema.*

Ahora, pues, el círculo (*Lam.* 5. *Fig.* 32.) se puede confundir con el polígono regular de lados infinitos; y de este modo todo quanto se dice del polígono regular se puede aplicar al círculo.

Nº. 232. Luego *el círculo* A *es igual, lo primero al paralelogramo* B, *cuya base sea media circunferencia, y su altura todo el radio: lo segundo es igual á un paralelogramo* C, *cuya base sea toda la circunferencia, y su altura todo el radio.*

Hemos dicho que sector del círculo era una porcion de éste comprehendida entre dos radios y el arco. (*Lam.* 6. *Fig.* 1.) En esta suposicion, así como el círculo se reduce á un paralelogramo, cuya base sea toda la circunferencia, ó todos los arcos que le forman, y su altura medio radio; así podemos decir del sector. Y por la misma razon, así como el círculo se reduce á un paralelogramo, cuya base sea media circunferencia, y su altura todo el radio, así tambien será el sector.

Nº. 233. Luego *el sector del círculo* (*Lam.* 6. *Fig.* 1.) *será igual al paralelogramo* A, *que tiene por base medio arco* M E, *y por altura todo el radio* M O, *y tambien será igual al paralelógramo* B, *cuya base será igual á todo el arco* M E N, *y la altura la mitad del radio* M O.

Diximos en su lugar, que el segmento era la parte del círculo comprehendida entre la cuerda y el arco; por consiguiente, quitando del valor del sector (*Lam.* 6. *Eig.* 2.), el triángulo A, hecho por la cuerda y dos radios, el resto será el valor del segmento.

Para que esto se haga sensible pongamos los dos paralelogramos A B de la figura 1, á los que reducimos el valor del sector, y reduzcamos ahora sobre ellos el triángulo *a*, que está por baxo del segmento; reduzcámosle, digo, á los paralelógramos *a*, *a*, para ver lo que resta; y primeramente empezando por el paralelogramo A, reduzcamos el triángulo *a* á un paralelogramo *a*, cuya base sea la mitad de la cuerda, y su altura todo el complemento de la flecha (esto es, de la altura del segmento). Siguiendo despues en el paralelogramo B, reduzcamos el triángulo *a* á otro paralelogramo *a*, cuya base sea toda la cuerda, y su altura medio complemento de la flecha, como se ve en la figura B. Hecho esto, verémos lo que resta, y eso será el valor del segmento. No hay duda que es una figura irregular, pero se resuelve en dos paralelogramos rectos, fáciles de valuar.

Nº. 234. Luego *el segmento del círculo es igual al paralelogramo, que tiene el valor del sector, ménos el paralelogramo, que tiene el valor del triángulo hecho por la cuerda y radios,* como se ve en la (*Lam.* 6. *Fig.* 2.)

§. IV.

Modo de reducir un paralelógramo á otro.

Nº. 235. De lo dicho al núm. 220. se sigue, que podemos reducir qualquier paralelogramo obliquángulo B (*Lam.* 5. *Fig.* 23.) á otro recto A, que le sea igual. Prolongarémos una base B del obliquángulo, y levantarémos de las extremidades de la otra base R S dos perpendiculares hasta encontrar la línea A B, y quedará el paralelogramo recto igual á B.

Ahora darémos varios métodos para reducir qualquier paralelógramo á otro que se nos pida. Para esto es necesario saber (*Lam.* 6. *Fig.* 3.), que quando tiramos una diagonal en un paralelogramo, y por algun punto de dicha diagonal O tiramos dos paralelas á los dos lados del paralelogramo, formamos otros dos pequeños paralelogramos A B, que se llaman *complementos.*

Para exâminar si estos complementos A B son iguales, es preciso reparar en que la diagonal divide en triángulos iguales, no solo el paralelogramo total, sino tambien los dos paralelogramos parciales, cortados por la diagonal; de este modo el triángulo M es igual á N, como el triángulo *i* es igual á *e*:

por consiguiente, si del triángulo que está sobre la diagonal sacamos M é *i*, y del triángulo que está debaxo de la diagonal quitamos N *e*, los dos rectos A B han de ser iguales.

Nº. 236. Luego *los paralelógramos* A B, *que son complementos, son entre sí iguales.* De esta regla general se toma la solucion de varios problemas:

I.

Nº. 237. Dado un paralelogramo A *a* (*Lam.* 5. *Fig.* 26.), si nos piden otro igual, que tenga un lado igual á la línea dada M N, harémos lo siguiente:

I.

Prolongarémos *o n*, aumentándole con la dada M N ó *m n* su igual; y despues prolongaré igualmente *e u*, base inferior de A.

II.

Prolongarémos indefinidamente los dos lados *o u* y *n e*, perpendiculares á *n o*.

III.

Tirarémos una diagonal desde *m*, que pase por el ángulo *e* hasta encontrar la línea *o* I.

IV.

Del punto I, en que se encuentran las dos líneas, tiraré P I paralela, é igual á *m o*, y terminaré el paralelogramo *mo*, PI. Esto hecho, en él se ve que B es paralelógramo igual á A, y de la grandeza que nos le pidiéron, porque ambos son complementos. (N. 236.)

II.

Nº. 238. Si ademas de esto nos pidieren (*Lam. 6. Fig. 6.*) que el nuevo paralelógramo no solamente sea de la grandeza dada O E, sino que sea obliquo, y con un ángulo igual al ángulo M, harémos lo siguiente:

Continuaré indefinidamente las dos bases *as*, *ur*, y entre ellas formaré un paralelogramo obliquángulo B igual á A (N. 220.), y como el ángulo M.

Para reducir B á otro que sea igual, y tenga por un lado la línea dada O E, harémos la operacion como en el número precedente, habiendo ántes prolongado las dos bases de B y los otros dos lados *ci*, *on*; y tirando despues la diagonal *en* hasta encontrar la línea *ci*, y acabando el paralelogramo *c e i t*, se determina la altura del paralelogramo D.

De este modo el paralelogramo D será

igual á B, por ser ambos complementos (N. 236.); y por consiguiente D tambien será igual á A, y tendrá todas las circunstancias que se pidiéron.

III.

Nº 239. Demos un campo como le representa la (*Lam.* 6. *Fig.* 4.), de forma, que un dueño sea señor de todo el espacio blanco, y otro de todo el espacio obscuro; pídese que sin hacer mediacion alguna de las dos lindes, se dé una línea recta *x y* paralela á E *i*, la qual divida los campos en tal forma, que sin perjuicio de los poseedores una sola línea separe sus posesiones. Harémos lo siguiente:

I.

Prolongarémos la línea E *i* hasta O.

II.

Pondrémos uno de los dueños en O, y el otro en A.

III.

Pasearemos por la línea R *i* hasta que nuestra persona impida el que los dos poseedores se vean.

IV.

Por el punto *n*, en que esten nuestros pies, tirarémos la línea *x y*, la qual dará satisfaccion á lo que se pidió; la razon es porque el paralelogramo M, que el uno pierde de su antigua posesion, es igual á N, que adquiere de nuevo; pues M N son *complementos.* (N. 236.)

IV.

Nº 240. Para convertir un paralelogramo, qualquiera, en un quadrado igual, harémos lo siguiente:

Nº 241. Debemos traer á la memoria lo que se dixo de las proporcionales (N. 143.), que quando tres cantidades estaban en progresion, el producto de los extremos era igual al quadrado del término medio.

Ahora bien, siendo el paralelogramo dado M (*Lam.* 6. *Fig.* 7.), pondré como primer término de la progresion su altura A, y por tercer término su longitud C. Esto hecho, buscaré una media proporcional entre A C, la que será *b*, y este será el lado del quadrado N, que me piden; porque estando en progresion las tres líneas $\div a : b : c$, inferirémos, luego $a \times c = b \times b$, ó b^2 (N. 143.): por consiguiente M es igual á N.

V.

Tambien podemos resolver por otro modo el problema del Núm. 237, valiéndonos de las proporciones.

Nº 242. Sea dado (*Lam.* 6. *Fig.* 8.) el paralelogramo A, y pídase otro, cuyo lado sea M: ignoramos quál deba ser su altura x para que este paralelogramo sea igual al dado.

Diximos que estando en proporcion quatro cantidades, el producto de los extremos es igual al de los medios (N. 141.); de aquí se sigue, que si yo pusiere la línea dada M como primer término de la proporcion, la altura y la base del paralelogramo dado A como segundo y tercer término, tendré en el quarto término x la altura del paralelogramo B, y podré entónces decir, si $m : n :: o : x$: luego $m \times x = n \times o$; por consiguiente A formado por $o \times n$ es igual á B hecho por $m \times x$.

§. V.

Reduccion de las figuras irregulares á otras tambien irregulares.

Diximos (N. 224.) que los triángulos de la misma base y altura eran iguales; y de esta proposicion se sacan varias consequencias:

I.

Nº. 243. Si nos dieren un pentágono B (*Lam.* 6. *Fig.* 9) para reducirle á un quadrilátero, harémos lo siguiente:

I.

Tirarémos una diagonal M N, y por el vértice I una paralela á la diagonal.

II.

Continuarémos uno de los lados de la porcion inferior hasta encontrar en la paralela O, y tirarémos la línea M O: en este caso el triángulo que hacemos de nuevo M O N es igual al que ántes habia M I N, por tener la misma base y la misma altura: luego el quadrilátero E M O A será igual al pentágono que nos habian dado.

II.

Nº. 244. Supongamos que quieren reducir (*Lam.* 6. *Fig.* 10.) este ú otro quadrilátero á un triángulo: harémos la misma operacion, tirando la diagonal M A y la paralela R S, y despues la línea R A.

Porque, esto hecho, el triángulo antiguo

M E A es igual al nuevo M E A; y de este modo el quadrilátero M E A O será igual al triángulo R A O.

III.

Nº 245. Si nos dieren un triángulo, y pidieren un paralelogramo igual, harémos lo que se dixo al núm. 225.

IV.

Nº 246. Si nos dieren un triángulo, y nos pidieren un quadrado igual, le reduciré primero á un paralelogramo, conforme á lo dicho (N. 225.), y despues reduciré este paralelogramo á un quadrado por el método del núm. 241.

§. VI.

De las proporciones, de las superficies del mismo nombre, supuesto que sean desemejantes entre sí.

Nº 247. Conocido el valor de las superficies, conviene saber la razon que tienen entre sí: principiemos por las que tienen el mismo nombre, v. g. paralelogramos entre sí, y triángulos entre sí; y para esto hemos de atender ya á sus bases, ya á sus alturas, y ya á todo igualmente.

Siendo la altura de los dos paralelogramos A B (*Lam.* 6. *Fig.* 11.) la misma, si una base entra en la otra tres veces, dividida la base por paralelas, aparece A tres veces en B.

Nº 248. Luego *los paralelogramos de la misma altura estan entre sí como sus bases.*

Ahora bien, los triángulos son las mitades de sus paralelogramos, y son entre sí como estos. (N. 134.)

Nº 249. Luego *los triángulos de la misma altura* (*Lam.* 6. *Fig.* 12.) *estan entre sí como sus bases.*

Si los paralelogramos A B. (*Lam.* 6. *Fig.* 13.) tienen la misma base, en dividiendo la altura del mayor A por paralelas á la base, quantas veces entra la altura del uno en la del otro, tantas entrará todo el paralelogramo B, que es el pequeño, en el grande A.

Nº 250. Luego *los paralelogramos de la misma base estan entre sí como sus alturas*; de suerte, que si la altura de A fuere veinte veces mayor que la de B, por la operacion de las paralelas entrará B veinte veces en A.

Ahora bien, los triángulos ó las mitades de los paralelogramos son entre sí como estos.

Nº 251. Luego *los triángulos de la misma base* (*Lam.* 6. *Fig.* 14.) *estan entre sí como sus* *alturas*; y si B es duplo de A, la mitad de B será dupla de la mitad de A.

Los paralelogramos pueden juntamente ser diferentes en la base y en la altura, de forma, que (*Lam.* 6. *Fig.* 15.) divididas por paralelas las bases y las alturas, A puede entrar en B muchas veces por la cuenta de la base, y muchas por la cuenta de la altura.

Nº. 252. Luego *los paralelogramos de diferente base y altura estan entre sí en la razon de sus bases, multiplicada por la razon de las alturas.*

Y así si la base de A es tres veces mas pequeña que la de B, por esto solo entra A tres veces en B por el núm. 248; pero como en B la altura es dupla de A, las tres cantidades que ya se contenian en B, vuelven á repetirse para formar el paralelogramo B de altura dupla: por consiguiente B viene á ser seis veces mayor que A, esto es, está en razon de tres de la basa multiplicada por dos de altura.

Ahora, pues, hemos dicho muchas veces, que los triángulos, por ser la mitad de los paralelogramos, estan entre sí como ellos. (N. 134.)

Nº. 253. Luego *los triángulos de diversas bases y alturas* (*Lam.* 6. *Fig.* 16.) *estan entre sí en razon de las bases, multiplicada por la de las alturas.* Por esta razon, completando los paralelogramos A B, que los corresponden, se quedan siendo mitades de los paralelogramos, que tienen entre sí esta razon.

§. VII.

De la proporcion de las superficies del mismo nombre y semejantes.

Nº 254. Acabamos de decir, que los paralelogramos y triángulos de diferente base y altura estan entre sí en la razon de las bases, multiplicada por las alturas.

Pero quando la razon de las bases y alturas es la misma, multiplicar una por otra es hacer el quadrado de qualquiera de ellas.

Nº 255. Luego *los paralelogramos semejantes* (*Lam.* 6. *Fig.* 17.) *estan entre sí, como los quadrados de qualquiera de los lados*; esto es, si el lado de uno fuere duplo del del otro, el paralelogramo grande será quadruplo del pequeño. Asimismo (*Lam.* 6. *Fig.* 18.) si el lado de uno vale tres veces el del otro, todo el paralelogramo tendrá el valor del otro nueve veces.

Los triángulos son mitades de los paralelogramos.

Nº 256. Luego *los triángulos semejantes* (*Lam.* 6. *Fig.* 19.) *estan entre sí, como los quadrados de los lados.*

Nº 257. De los triángulos semejantes podrémos formar todas las figuras que fueren semejantes entre sí, y por consiguiente conservarán entre sí la misma razon que tenian los triángulos de que se formáron.

Nº. 258. Luego *todas las figuras semejantes* (*Lam.* 6. *Fig.* 20.) *tienen entre sí la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos.*

Nº. 259. Luego *todos los polígonos regulares y semejantes estan entre sí, como los quadrados de sus lados homólogos.* Pero como en los polígonos semejantes los lados estan entre sí, como los rayos que los dividen, ó como los apothemas, esto es, como las líneas O E, *o e*, que salen del centro perpendiculares á los lados; dirémos que los polígonos semejantes son como los quadrados de los rayos ó de los apothemas. De este modo (*Lam.* 6. *Fig.* 20.) el polígono B contiene quatro veces A, pues el lado es dos.

Sabemos que los círculos se pueden considerar como polígonos semejantes de infinitos lados; y que en este caso los apothemas se confunden con los rayos; y por consiguiente los círculos estan entre sí, como los polígonos semejantes.

Nº. 260. Luego *los círculos estan entre sí, como los quadrados de los rayos.* (*Lam.* 7. *Fig.* 1.) Y así si el radio de B es duplo del de A, el círculo B vale quatro veces A.

Los diámetros son cada uno dos radios, y tienen entre sí la misma razon que ellos.

Nº. 261. Luego *los círculos estan entre sí, como los quadrados de los diámetros.*

En los paralelogramos semejantes (*Lam.* 7. *Fig.* 2.) el exponente de la razon de las bases es el mismo que el de la razon de las alturas; y quando se multiplica un exponente por otro, se multiplica por sí mismo, y se hace un quadrado de qualquiera de ellos. Pero lo que se dice de los paralelogramos semejantes, se dice de los triángulos, y de todas las figuras semejantes entre sí.

Nº 262. Luego *el exponente de figuras semejantes es el quadrado del exponente de los lados.* (*Lam.* 7. *Fig.* 2.)

§. VIII.

De la razon que hay entre el círculo y los quadrados inscripto y circunscripto, y del formado sobre el radio.

Nº 264. Se llama quadrado circunscripto aquel que se queda fuera del círculo, tocándole por todos quatro lados. Este quadrado precisamente ha de tener por lado el diámetro del círculo. (*Lam.* 7. *Fig.* 3.)

Nº 265. Se llama quadrado inscripto el que se forma dentro del círculo, tocando la circunferencia con sus quatro ángulos. (*Lam.* 7. *Fig.* 4.)

Se llama quadrado del radio el que le tiene por lado. (*Lam.* 7. *Fig.* 5.)

Nº 266. Ahora, pues, para conocer

razon que hay entre el círculo y el quadrado circunscripto, haré lo siguiente (*Lam.* 7. *Fig.* 3.):

I.

Reduciré el círculo á un paralelogramo A, cuya base sea la circunferencia, y su altura medio radio (N. 232): de este modo si el diámetro del círculo vale 7, la circunferencia de él, ó grandeza del paralelogramo será 22. (N. 130.)

II.

Dividiré el quadrado en quatro paralelogramos iguales, quedando cada uno de ellos con la altura de medio radio, y todo lo largo del diámetro: por consiguiente todos quatro juntos hacen un paralelogramo B de la misma altura que A; pero su grandeza será quatro veces 7: ó 28. Pero estos dos paralelogramos A B tienen la misma altura, y son como sus bases. (N. 248.)

N.º 267. Luego *el círculo es al quadrado circunscripto, como la circunferencia es á quatro diametros*; lo que viene á ser como 22 á 28.

Si queremos saber la proporcion del círculo con el quadrado inscripto, harémos lo siguiente (*Lam.* 7. *Fig.* 4.).

I.

Dividirémos el quadrado circunscripto con dos diagonales en quatro triángulos, y cada uno de ellos tendrá por base el diámetro, y por altura el radio.

II.

Dividiré el quadrado inscripto con una diagonal en dos triángulos, que tambien tendrán por base el diámetro, y por altura el radio.

Nº 268. Luego *el quadrado inscripto es la mitad del circunscripto.* Por consiguiente el círculo es, respecto del quadrado inscripto, como la circunferencia á dos diámetros, ó como 22 á 14.

Finalmente para saber la razon que hay entre el círculo y el quadrado de su radio, haré lo siguiente:

Dividiré el quadrado circunscripto (*Lam.* 7. *Fig.* 5.) por dos diámetros en quatro quadrados iguales, y cada uno de ellos será quadrado del radio: por consiguiente si el quadrado circunscripto vale 28, el quadrado del radio solamente valdrá 7.

Nº 269. Luego *el círculo es al quadrado de su radio, como la circunferencia á un diámetro, ó como* 22 *á* 7. Luego los tres quadrados que pertenecen á un círculo, son como 7, 14, 28, valiendo el círculo 22.

§. IX.

De la razon que hay entre el quadrado de la hipotenusa y los quadrados de los otros dos lados.

Esta proposicion, que es famosísima, se atribuye á Pitágoras, de quien dicen, que por haberla hallado sacrificó cien bueyes á las Musas en accion de gracias.

Para conocer, pues, la proporcion que hay entre el quadrado T de la hipotenusa (*Lam.* 7. *Fig.* 6.), y los dos quadrados A B, formados sobre los lados del triángulo *a b*, harémos lo siguiente:

I.

Tirarémos una perpendicular desde el vértice del triángulo, la que le dividirá en dos *a b*; los quales son semejantes entre sí, y al triángulo total, por tener cada uno un ángulo recto.

II.

Debemos tener presente, que los triángulos semejantes son entre sí, como los quadrados de sus lados (N. 256.); y así los tres triángulos *a b*, y el total son entre sí, como los quadrados A B T.

III.

Observemos que los dos triángulos pequeños *a b* juntos son iguales al grande: Luego tambien los dos quadrados pequeños A B juntos son iguales al grande T.

Nº 270 Luego *el quadrado de la hipotenusa es igual á los dos quadrados de sus lados.*

Supuesto que es tan famosa esta proposicion, no será desagradable á los principiantes la noticia de algunas otras demostraciones que añadirémos aquí.

Formemos un triángulo rectángulo R (*Lam.* 7. *Fig.* 7.), y sobre sus tres lados formemos los tres quadrados A, B, H: baxemos desde el vértice del triángulo una perpendicular, que no solo divida la hipotenusa, sino tambien su quadrado en dos paralelogramos *a b*.

Pero segun el núm. 195, quando se baxa una perpendicular desde el vértice sobre la hipotenusa, qualquier lado del ángulo recto es media proporcional entre toda la hipotenusa, y el segmento cortado por la perpendicular; y por consiguiente tenemos M *e*: MO:: MO: MN: Luego multiplicando el primer término por el último harémos un paralelogramo igual al quadrado del término medio; y así el paralelogramo *a* es igual al quadrado A. Por la misma razon *b* es igual á B : Luego *a* + *b*, que hacen el quadrado de la hipotenusa, es igual á A + B, quadrados de los lados.

Tambien se puede demostrar por otro modo. (*Lam.* 7. *Fig.* 8.) Tenemos el triángulo rectángulo A E O : queremos probar que el quadrado de A O es igual al quadrado de A E junto con *e*, quadrado de E O.

Pongamos el triángulo en *b*, y formemos sobre sus lados los dos quadrados P Q; resultan los dos paralelogramos que se pintan claros, con los quales se llenaria el quadrado total de la figura P, T, R, Q.

Formemos ahora el quadrado de la hipotenusa *a o*, y tendrémos el quadrado *a*, *o*, *i*, *s*. Este quadrado dexa quatro triángulos *m*, *m*, *m*, *m*. Estos triángulos son iguales entre sí, y tambien iguales á *b*; lo que se conoce, advirtiendo que los lados del quadrado total P T R Q son iguales, y cada uno es igual á un lado pequeño de los triángulos junto con un lado grande, y como todos son rectángulos, todos vienen á ser iguales. Pero cada paralelogramo claro vale dos triángulos *m*, *m*: Luego tanto valen los dos paralelogramos claros, como los quatro triángulos *m*, *m*, *m*, *m*; pero si quitamos del quadrado total los dos paralelogramos, restan los dos quadrados P y Q; y si quitamos del quadrado total los quatro triángulos, quedará solo el quadrado de la hipotenusa: Luego tanto vale el quadrado de la hipotenusa, como los dos que se forman sobre los otros lados del triángulo rectángulo.

El grande Eúclides demuestra esta proposicion del modo siguiente (*Lam.* 7. F. 9.):

Forma el triángulo rectángulo M O N, y los tres quadrados sobre sus lados: tira una perpendicular sobre la hipotenusa, la qual divide su quadrado en dos paralelógramos; y prueba despues que el paralelógramo G es igual al quadrado B, así como el paralelógramo H es igual á A, lo que prueba del modo siguiente:

Primeramente los dos triángulos S O N, N M F son iguales, pues ambos tienen un lado del quadrado grande, y otro lado del quadrado B; y el ángulo comprehendido entre ellos es compuesto del ángulo comun *e*, y de un ángulo recto; lo que basta para ser iguales. (N. 112.)

Pero el triángulo S O N es la mitad del paralelógramo G, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice estuviese en *c*. Del mismo modo el triángulo N M F es la mitad del quadrado B, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice M pasase á O: Luego si la mitad de G es igual á la mitad de B, el paralelógramo G es igual al quadrado B, que le corresponde.

Del mismo modo se prueba que H es

igual á A: Luego si H y G hacen el quadrado de la hipotenusa, será éste igual á los dos quadrados de los lados A + B.

Conseqüencias de esta proposicion.

I.

Si el triángulo rectángulo (*Lam.* 7. *Fig.* 10.) tuviere un lado del ángulo recto que valga 3, y otro que valga 4, el quadrado del 1 será 9, y el del otro 16, los quales juntos hacen 25: así el quadrado de la hipotenusa será 25, cuya raiz es 5.

Nº 271. Luego *en el triángulo rectángulo, si el ángulo recto está hecho por lados del valor de* 3 *y de* 4, *la hipotenusa será* 5.

II.

Nº 272. Si quisieremos levantar una perpendicular en la extremidad de una línea (*Lam.* 7. *Fig.* 11.), quando el terreno no permite prolongarla, ni trabajar mas abaxo de ella, lo harémos con el método siguiente:

I.

Señalarémos con el compas en la línea dada cinco medidas iguales.

II.

Tomarémos tres medidas con el compas, y desde el punto M describiré un arco.

III.

Tomaré con el compas cinco medidas, y llegando al punto A, que termina quatro medidas, describiré otro arco, que cortará al primero en O; y desde ese punto baxaré una perpendicular M; la qual sin duda es perpendicular, porque siendo el triángulo formado con lados de 3, 4, 5 medidas, necesariamente será rectángulo.

III.

N°. 273. Siempre que el triángulo rectángulo fuere isosceles, v. g. (como quando (*Lam.* 7. *Fig.* 12.) dividimos un quadrado por su diagonal, el quadrado de la hipotenusa será duplo de qualquiera quadrado que se forme sobre los lados, porque siendo el de la hipotenusa igual á la suma de los dos quadrados de los lados, es duplo de las mitades de esa suma; y así,

Si nos dan un quadrado A (*Lam.* 7. *Fig.* 12.), y nos pidieren otro que sea doble de él, tirarémos una diagonal, y esa será el lado del nuevo quadrado B, porque es hipotenusa de un triángulo isosceles.

Nº. 274. Luego *hay método para formar un quadrado duplo de otro dado.*

IV.

Si en un quadrado A tiramos las diagonales R M , O N , serán mutuamente perpendiculares (*Lam.* 7. *Fig.* 13.); porque la primera tiene dos puntos R M igualmente distantes de las extremidades de la otra (N. 32.); y del mismo modo la segunda respecto de la primera; y por tener cada una dos puntos igualmente distantes de las extremidades de la otra, se cortan por el medio (N. 35.); por consiguiente el triángulo N *e* M es rectángulo é isosceles.

Luego el quadrado de la hipotenusa N M es duplo del quadrado sobre uno de sus lados *o* M; y por consiguiente el nuevo quadrado B es la mitad del que nos diéron A.

Nº. 275. Luego *tenemos método para formar un quadrado* B, *que sea la mitad de otro quadrado que nos hayan dado* A.

V.

Nº. 276. Si nos pidieren que reduzcamos á un solo quadrado dos quadrados dados A B (*Lam.* 7. *Fig.* 14.), harémos lo siguiente:

I.

Formarémos un ángulo recto con líneas indefinidas.

II.

Pondrémos de una parte el lado de A, y de otra el de B: tirarémos una línea M N, que será hipotenusa, y por lo mismo el quadrado C, que está sobre ella, será igual á los dos juntos A B.

§. X.

Aplicacion de la doctrina de la hipotenusa á los polígonos y círculos.

Diximos al núm. 261, que todas las figuras semejantes eran entre sí como los quadrados de sus lados correspondientes; pero los polígonos regulares del mismo número de lados son figuras semejantes.

Nº. 277. Luego *el polígono regular sobre la hipotenusa es igual á los dos polígonos semejantes sobre los dos lados.* Y así el polígono C (*Lam.* 7. *Fig.* 15.) es igual á los dos A B.

Como los círculos se pueden considerar á manera de polígonos regulares, podemos decir de los círculos lo que acabamos de decir de los polígonos.

Nº. 278. Luego *el círculo sobre la hipotenusa es igual á los dos círculos sobre los lados* (*Lam.* 7. *Fig.* 16.); y así C será igual á B junto con A; y si el triángulo fuere isosceles, el círculo de la hipotenusa será doblado del círculo de qualquiera de los lados. (N. 273.)

CONSEQUENCIAS.

I.

Si nos dieren una corona ó un anillo (*Lam.* 7. *Fig.* 17.), y nos pidieren un círculo que sea igual al anillo, la operacion se hará de este modo:

I.

Tomaré el diámetro exterior del anillo M N para hacer de él una hipotenusa, describiendo sobre ella un medio círculo *m o n*.

II.

Tomaré el diámetro interior del anillo, y haré de él el lado *m o* del triángulo rectángulo.

III.

Acabaré el triángulo con la línea *o n*, y ésta será el diámetro del círculo P, el qual será igual al anillo dado.

Pues el círculo A de la hipotenusa es igual á los dos P Q: Luego A ménos Q, ha de ser igual á P; pero A ménos Q, es lo mismo que el anillo, porque el círculo Q es igual al vacío Q; y así lo mismo es decir A ménos Q, que decir el anillo; y por consiguiente el anillo A es igual á P.

Nº. 279. Luego *hay método para reducir un anillo ó corona á un círculo entero.*

II.

Si nos dieren (*Lam.* 7. *Fig.* 18.) una luna ó creciente B para reducirla á un círculo entero, procederé como en el caso precedente, porque tanto monta quitar de un círculo grande uno pequeño concéntrico, como sacarle mas de un lado que de otro, lo que hace que en lugar de una corona ó anillo tengamos una especie de luna nueva. No obstante se ha de advertir, que el círculo pequeño A no debe salir del grande en ningun caso, para que la demostracion tenga su vigor.

II.

Si nos dieren un círculo A (*Lam.* 7. *Fig.* 19.), y nos pidieren otro que sea duplo de éste, lo haré del modo siguiente:

I.

Tiraré dos diámetros en ángulo recto, y los uniré con una hipotenusa B O.

II.

De esta hipotenusa me serviré como de radio para el nuevo círculo B.

En esta suposicion tenemos que B tiene como radio una hipotenusa, y A uno de los lados del triángulo; siendo éste isosceles; pero ya diximos que los círculos eran como los quadrados por el núm. 260; y por el 277, se dixo, que el quadrado de la hipotenusa era duplo del quadrado de qualquiera de los lados: Luego B será duplo de A.

Nº. 280. Luego *hay método para hacer un círculo duplo de otro.*

IV.

Si nos dieren un círculo A (*Lam.* 8. *Fig.* 1.), y nos pidieren uno que sea la mitad del que nos diéron, lo harémos del modo siguiente:

Tírense dos diámetros en ángulo recto, y dos cuerdas MO, NO, que hagan con el diámetro un triángulo. Este será rectángulo (N. 74.); y como los arcos NO, MO son iguales, tambien las dos cuerdas lo son por el núm. 5, y queda el triángulo N O M isosceles y rectángulo: por consiguiente el círculo A, que tiene por diámetro la hipotenusa M N, será duplo del nuevo círculo B, que solo tiene por diámetro uno de los lados NO, como diximos al núm. 278.

Nº. 281. Luego *tenemos método para hacer un círculo B, que sea la mitad de otro dado A.*

§. XI.

Modo de formar quadrados y círculos en qualquiera razon que nos pidieren, con respecto á los que nos fueren dados.

Nº. 282. Diximos al núm. 196, que tirando de la extremidad de un diámetro (*Lam.* 8. *Fig.* 2.) una cuerda A M, ésta era media proporcional entre todo el diámetro A B, y su segmento AO, cortado por la perpendicular MO.

Pudiendo entónces decir $\div$ AO : AM: AB: por consiguiente el producto de los extremos ha de ser igual al quadrado de la cantidad media; esto es, $AO \times AB = AM^2$, que es lo mismo que $AM \times AM$. Del mismo modo (*Lam.* 8. *Fig.* 2.) puedo demostrar que la otra cuerda AN es media proporcional entre el diámetro AB, y el segmento AI, cortado por la perpendicular NI, pudiendo decirse $AI : AN :: AN : AB$; y por consiguiente $AI \times AB = AN^2$.

Nº. 283. Hacemos esto sensible en la (*Lam.* 8. *Fig.* 3.): las dos cuerdas *Mr*, *Ms* son medias proporcionales entre el diámetro total MN, y sus dos segmentos *Mo*, *Mi*; por consiguiente $Mo : Mi :: Mr : MN$: Luego $Mo \times MN = Mr \times Mr$.

Pero $Mo \times MN$ es el paralelogramo *a*, cuya base es *Mo*, y su altura es $Mn = MN$; y $Mr \times Mr$ es el quadrado A: Luego el paralelogramo *a* es igual al quadrado A.

Del mismo modo se prueba que el paralelogramo total *Mp* es igual al quadrado mayor B, cuyo lado sea la cuerda *Ms*.

Pero estos dos paralelogramos *Mg*, *Mp*, teniendo la misma altura, son entre sí como sus bases, esto es, como los segmentos *Mo Mi*: Luego los dos quadrados que le son iguales entre sí, son como los segmentos *Mo Mi*.

Nº. 284. Luego *los quadrados de las cuerdas tiradas de la extremidad del diámetro, son entre sí como los segmentos del diámetro, cortados por sus perpendiculares.*

De esta regla general se sacan varias consequencias.

I.

Nº 285. Si dado un quadrado A (*Lam.* 8. *Fig.* 4.), nos pidieren á un tiempo otros varios, que tengan diversa proporcion con el primero, v. g. 4. veces mayor 6, 9, 13, ó 15½, ó 20, en brevísimo tiempo podemos resolver este problema del modo siguiente:

I.

Tírese una línea arbitraria, y descríbase sobre esta un medio círculo.

II.

Tómese con el compas *a i*, lado del quadrado A que nos diéron, y fórmese de él una cuerda *a i*, que salga de la extremidad del diámetro; y de otra extremidad de la cuerda (*i*) tírese una perpendicular sobre el diámetro.

III.

Tómese con el compas ese segmento *a*, 1 del diámetro; con esta medida vamos dividiendo todo el diámetro en la forma de la de la figura.

IV.

Notaré el número 4, 6, 9, 13, 15½, 20, &c. que corresponden á los quadrados que me pidieron; levantaré desde ellos perpendiculares, las quales irán á terminar en los puntos de la circunferencia *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, adonde tambien van á parar las cuerdas tiradas desde *a*, que serán los lados de los quadrados que nos pidieren.

Por quanto queda ya probado, que estos diferentes quadrados de la figura son entre sí, como los segmentos del diámetro, cortados por las perpendiculares (N. 284.): Luego los nuevos quadrados estan en esta misma proporcion de 4, 6, 9, 13, 15½.

Si acaso el número de los quadrados que nos pidieren fuere tan largo, que no quepa en el diámetro arbitrario que se escogió, tómese otra línea mayor á proporcion de las que faltaren, y repítase para estos la operacion.

Nº 286. Luego *tenemos método para formar con una sola operacion qualesquiera quadrados en la razon que los pidan.*

II.

Diximos que los círculos estaban entre sí, como los quadrados de sus diámetros, al núm. 261; por consiguiente podemos decir de los círculos, cuyos diámetros fueren las cuerdas (*Lam.* 8. *Fig.* 5.), que ellos tienen entre sí la misma razon de los segmentos de un diámetro, cortados por varias perpendiculares que salen de las otras extremidades de las cuerdas; y así dándonos el círculo B, podrémos hacer otros C D, que sean cinco ó siete veces mayores, ó en qualquiera otra razon que los pidieren.

Nº. 287. Luego *tenemos método para formar con una sola operacion los círculos que nos pidieren en qualquiera razon que se quiera, respecto de algun círculo dado* B.

III.

Nº. 288. Si nos dieren un círculo A (*Lam.* 8. *Fig.* 6.), y nos pidieren otro, que sea la tercera ó quinta parte de él, harémos lo siguiente:

I.

Tírese una línea á discrecion; pero que sea mayor que el diámetro del círculo dado, y descríbase sobre ella un semicírculo; últimamente tírese una cuerda *m n* igual al diámetro M N del mismo círculo dado.

II.

Tírese desde *n* una perpendicular sobre el diámetro *n o*, y divídase este segmento del diámetro *m o* en tres partes iguales: de la division primera levántese una perpendicular, la que irá al punto *e*: desde éste tírese la cuerda *e m*, que será el diámetro del nuevo círculo B, el qual por lo que ya queda dicho, será la tercera parte de A, por razon de que los círculos A B están entre sí, como los segmentos del diámetro *m* 1, *m* 3.

VI.

Nº. 289. Si habiéndonos dado dos quadrados ó dos círculos A B (*Lam.* 8. *Fig.* 7.), nos preguntaren en qué razon estan entre sí, harémos lo siguiente:

I.

Descríbase un semicírculo arbitrario, bien que de forma, que su diámetro sea mayor que el de qualquiera de ellos.

II.

De los dos diámetros se harán dos cuerdas, ambas nacidas del punto M; y de las otras extremidas de las cuerdas baxaré perpendiculares sobre el diámetro del semicírculo.

III.

Veré la proporcion que hay entre los dos segmentos de este diámetro MO, ME, y esa misma será la razon entre los dos círculos dados.

Del mismo modo se puede executar si fueren quadrados, haciendo cuerdas de sus lados.

Nº 290. Luego *hay método para hallar la razon entre muchos quadrados, ó entre muchos círculos dados.*

V.

Si nos dieren un círculo A (*Lam.* 8. *Fig.* 8.), y nos pidieren otro que sea, v. g. tres veces mayor, sin valernos de los quadrados de las cüerdas, como al núm. 287, podrémos hacerlo así:

I.

Pongamos el diámetro *m n* del círculo dado, y continuemos la línea, tomando otras tres porciones iguales.

II.

Descríbase sobre esa línea total un semicírculo.

III.

Levántese una perpendicular desde el punto *n*, y esta será el diámetro del nuevo círculo B, el que debe ser, respecto de A, como 3 á 1: la razon es, porque las tres líneas *mn*, *ne*, *no* estan en proporcion. Luego el quadrado de la primera línea *mn* es al quadrado de la segunda *ne*, como la primera línea es á la tercera *no* (N. 116.), y como los círculos estan entre sí como los quadrados por el núm. 261, el círculo de *mn* es al de *ne*, como la línea de *mn* es á la línea *no*.

Luego *tenemos otro método para hacer un círculo en la razon pedida, respecto del que nos diéron, sin valernos de las cuerdas de los círculos.*

§. XII.

Modo de hallar superficies, que sean medias proporcionales entre dos superficies dadas.

Diximos que quando se multiplicaba una línea por otra, se hacia un paralelogramo, en el que una de las líneas servia de base, y la otra de altura perpendicular (N. 219.); y que los paralelogramos de la misma base eran como las alturas (N. 250.), y los de la misma altura eran como sus bases. (N. 248.)

Supongamos ahora que nos dan dos quadrados A B (*Lam.* 8. *Fig.* 9.), que multiplicamos el lado de uno por el lado del otro, harémos el paralelogramo C. Este paralelogramo, respecto de A, estará en razon de las bases, esto es, de tres á quatro, y respecto de B, en razon de las alturas, tambien de tres á quatro; pero como en los quadrados la razon de las bases es la misma que la de las alturas, se sigue que la misma razon hay entre A C, que entre C B; y por consiguiente C es media proporcional entre A y B.

N.º 291. Luego *hay método para hallar un paralelogramo, que sea media proporcional entre dos quadrados dados.*

Por el mismo método (*Lam.* 8. *Fig.* 9.) si nos dieren otros dos quadrados E B, en multiplicando un lado de B por otro de E, harémos el paralelogramo D, que será medio proporcional entre los dos, por la misma razon de arriba. Esto se confirma con los números; porque si A tuviere por lado 3, y B 4 (*Lam.* 8. *Fig.* 9.), A vale 9, y B 16; pero mutiplicando 3, lado del 1, por 4, que lo es del otro, tendrémos el paralelogramo 12, medio proporcional entre 9 y 16, porque podrémos decir: 9 : 12 :: 12 : 16, reynando en esta proporcion la razon de 3 á 4.

Del mismo modo, si el lado de B vale 4, y el de E vale 5, multiplicando 4 por 5, harémos el paralelogramo que vale 20, medio proporcional entre B, que vale 16, y E que vale 25, pudiendo decir: 16: 20 : : 20 : 25; pues en ambas partes reyna la razon de 4 á 5.

N°. 292. Si dados dos quadrados, nos piden otro nuevo, que sea medio proporcional entre los dos, harémos lo siguiente:

Búsquese una media proporcional entre los lados de los dos quadrados que nos diéron A B (*Lam.* 8. *Fig.* 10.), y hallarémos la línea *e*, que será el lado del quadrado pedido E.

Porque si tres cantidades *a e b* estan en progresion, tambien lo estan los quadrados que se forman de ellas, aunque la razon sea diferente. (N. 259.)

Exemplo ∺ 1 : 2 : 4, el exponente ó la razon que reyna en esta progresion es 2: y si hacemos los quadrados de estas raices, tendrémos ∺ 1 : 4 : 16, cuyo exponente es 4. Luego si ∺ *a*, *e*, *b* estan en proporcion, tambien lo estarán sus quadrados ∺ A. E. B.

Ve aquí, amigo Eugenio, un resumen de las proposiciones mas útiles que hallé en la materia de superficies: sé que esto te dará un gusto indecible, por lo que me has escrito en los correos pasados; pues si la doctrina sobre las líneas te interesa tanto, que segun tu expresion, andas encantado, mucho mas te encantará la doctrina de las superficies, y aun mucho mas la de los sólidos, que empiezo ya á preparar para enviártela con brevedad.

FIN DE LA CARTA QUINTA.

CARTA SEXTA.

Sobre los sólidos.

§. I.

De la formacion de los sólidos.

Pues me envias á decir, amigo Eugenio, que has entendido bien lo que te dixe en la Carta antecedente, no dudo que comprehenderás fácilmente lo que ahora te diré sobre los sólidos.

En quanto á su formacion quiero que tengas presente la formacion de las líneas y las superficies; porque así como considerando que un punto se mueve ácia alguna parte, formamos idea de que va formando la línea; y considerando que una línea se va moviendo, puesta de lado, nos formamos la idea de la superficie, acomodando á la línea la idea de sola la longitud, y á la superficie la de la anchura ó latitud, así tambien

Nº. 293. Considerando el movimiento de una superficie (v. g. *Lam.* 9. *Fig.* 1.) AM, que va siempre paralela á sí misma, y siguiendo una línea recta A E, harémos la idea de un *sólido*: este sólido así formado se llama con nombre general *Prisma.*

Nº 294. Si la superficie, que se supone moverse, es un paralelogramo, como A M (*Lam.* 9. *Fig.* 1.), el *sólido* ó *prisma* que forma se llama paralelipípedo, esto es, sólido comprehendido entre superficies paralelas.

Si la superficie movil es un triángulo ó polígono (*Lam.* 9. *Fig.* 1.), el prisma que se forma es *triangular*, ó *poligónico.* [1]

Nº 295. Si el plano que se supone que se va moviendo es O, subiendo un círculo, el sólido que resulta se llama cilindro, como la (*Lam.* 9. *Fig.* 3.)

Nº 296. Si el plano ó superficie que se movió, no solamente va siempre paralelo á sí mismo, sino que á proporcion que se mueve va disminuyendo por todos los lados proporcionalmente, hasta acabar en un punto el sólido que de aquí resulta; si el plano era figura rectilínea, se llama pirámide, y si era un círculo, se llama cono. (*Lam.* 9. *Fig.* 4.)

Nº 297. El movimiento del plano de-

1 Esta voz poligónico no conviene á los sólidos, porque polígono es figura plana de muchos ángulos: la voz propia es poliedro, que es un cuerpo que tiene asiento por muchas caras, ó es un sólido de muchas superficies.

be seguir una línea recta, v. g. A E (*Lam.* 9. *Fig.* 1.), la qual se llama *directriz*.

Si la directriz se eleva perpendicular sobre el plano, como en las figuras 1, 2, 3, 4, el *prisma*, *cilindro*, pirámide ó *cono* se llaman *rectos*; pero si la directriz se inclina mas á una parte del plano que á otra, el sólido se llama *obliquo*, como la (*Lam.* 9. *Fig.* 5. y 6.)

Nº. 298. Si la superficie móvil era un quadrado, y la directriz igual á los lados de éste y perpendicular, el sólido se llama cubo, como la (*Lam.* 9. *Fig.* 7.)

Nº. 299. El movimiento de un círculo, que anda al rededor de su diámetro, forma una esfera. (*Lam.* 9. *Fig.* 8.)

Nº. 300. El movimiento de un sector ó de un segmento de círculo, andando al rededor de su exe, hace el sector ó el segmento de la esfera. (*Lam.* 9. *Fig.* 9. y 10.)

Nº. 301. El movimiento de una superficie oval, andando al rededor de su menor diámetro, forma una esferoyde abatida. (*Lam.* 9. *Fig.* 11.) ó chata.

Nº. 302. Pero si anduviere al rededor de su mayor diámetro, hace una esferoyde oblonga. (*Lam.* 9. *Fig.* 12.)

Nº. 303. Si un polígono regular anduviere al rededor de su diámetro, hace una esferoyde multilátera (*Lam.* 9. *Fig.* 13.), ó un poliedro, que quiere decir de muchas caras ó asientos. El Autor la llama poligónica: habla impropiamente, porque el polígono es figura plana, y el poliedro es sólida.

De estas simples formaciones de los sólidos se sacan varias

CONSEQUENCIAS.

I.

Nº. 304. La base inferior es la misma que por el movimiento viene á ser la base superior. Luego *en qualquier prisma la base superior es igual á la inferior.*

II.

Nº. 305. Por qualquier parte que se corte el prisma, siendo la seccion paralela á la base inferior, esta seccion será base superior. Luego *toda seccion del prisma paralela á la base es igual á ésta.*

III.

Diximos que la base de la pirámide, moviéndose paralela á sí misma, y disminuyendo en proporcion por todos sus lados, á medida que sube, formaba el pirámide; y lo mismo se dixo del *cono.*

Nº. 306. Luego *toda seccion de la pirá-*

mide ó cono, siendo paralela á la base, es un plano semejante á ella.

IV.

En el círculo que por su movimiento al rededor del diámetro engendró la esfera (*Lam.* 9. *Fig.* 14.), se pueden considerar muchas cuerdas perpendiculares al diámetro ó exe, cuyas mitades *a o*, *e i* son rayos, que andando circulares al rededor de una extremidad fixa, describen otros tantos círculos.

Pero hecha qualquiera seccion por un plano en la esfera, se puede considerar como un plano perpendicular al diámetro del círculo generante, formado por la revolucion de alguna media cuerda.

Nº 307. Luego *toda seccion en la esfera es un círculo.*

Pero si tiramos en el círculo generante muchas líneas perpendiculares á su diámetro ó exe, la línea que pasare por el centro (*Lam.* 9. *Fig.* 14.) es la máxîma de todas; porque es la única que llega á la tangente *m i n*, siendo todas las demas terminadas por la circunferencia que se aparta de la tangente.

Nº 308. Luego *en toda seccion de la esfera sola la que pasa por el centro es el círculo máxîmo, como engendrado por el rayo máxîmo; y toda otra seccion será círculo menor que ella.*

Pero la línea *e i* (*Lam.* 9. *Fig.* 14.) perpendicular al exe del círculo generante que toca en el centro, siempre es el rayo de este círculo, igual siempre en todos casos.

Nº 309. Luego *la seccion central de la esfera siempre es igual.*

§. II.

De las superficies de los primas y cilindros.

En las superficies de los prismas, amigo Eugenio, solo se consideran los lados que le cortan al rededor, con abstraccion, ó prescindiendo de las bases. Lo mismo se dice de los cilindros, prismas, &c.

Pero diximos al núm. 219, que la superficie de qualquier paralelogramo recto era igual á la base, multiplicada por la altura perpendicular; y vemos en la (*Lam.* 9. *Fig.* 15.) que los lados del prisma recto B, extendidos, son los paralelogramos tambien rectos A, E, I, O, en los que el circuito de la base *a*, *e*, *i*, *o* se multiplica por la altura.

Nº 310. Luego *la superficie del prisma recto* (*Lam.* 9. *Fig.* 15.) *es igual al circuito de la base a, e, i, ó, multiplicado por la altura.*

En quanto á la superficie del cilindro

recto D (*Lam.* 9. *Fig.* 16.) sabemos que es igual, ó se puede confundir con la del prisma de infinitos lados; y así podemos decir de la una lo que de la otra.

Nº. 311. Luego *la superficie del cilindro recto es igual á la base multiplicada por la altura.* (*Lam.* 9. *Fig.* 16.)

Tambien se dixo al núm. 221, que quando el paralelogramo era obliquo (*Lam.* 9. *Fig.* 17.), le habiamos de reducir á recto para valuarle, multiplicando la línea A O, no por la obliqua O E, sino por la perpendicular O I ó A N.

Nº. 312. Luego *la superficie del prisma obliquo* (*Lam.* 9. *Fig.* 18.) *no se debe valuar, multiplicando la línea de su longitud*, A *i por el circuito de la base* A M, *ó bien* I N, *sino por el circuito de la seccion perpendicular i o.*

Porque el prisma obliquo tiene la superficie compuesta de algunos paralelogramos obliquos, y esto se hace, cortando la porcion triangular *i o n* de la parte superior, y añadiéndola de la parte de abaxo; pues en este caso el prisma se convierte de obliquo en recto, y su superficie por el núm. precedente se compone de la línea de su largo A *i*, multiplicada por el circuito de la seccion perpendicular *i o.* Ya hemos dicho muchas veces que los cilindros se confunden con los prismas de infinitos lados.

Nº. 313. Luego *la superficie del cilindro obliquo es igual á la línea de la longitud* A E

(*Lam.* 9. *Fig.* 19.) *multiplicada, no por el circuito de la base* E N, ó A M, *sino por el circuito de la seccion perpendicular* E O. Lo que tambien se hará visible, cortando la porcion superior E O N para ponerla en el lugar inferior A I M.

§. III.

De las superficies de las pirámides, y conos enteros y truncados.

Diximos al núm. 225, que los triángulos eran iguales á sus bases, multiplicadas por la mitad de la altura, ó bien á las alturas multiplicadas por la mitad de la base.

Luego es *preciso, para medir las superficies de las pirámides compuestas de triángulos, como se manifiesta en* B (*Lam.* 9. *Fig.* 20.), *atender á sus bases y alturas.*

Adviértase, no obstante, que no es lo mismo la altura de una pirámide, y la altura de los triángulos que componen su superficie; pues A *o*, altura de la pirámide, se toma en la perpendicular, que va desde su vértice A hasta la base *o*, ó á continuacion de ella, si el pirámide fuere inclinado; pero la altura de los triángulos es la línea A *m*, que va por la superficie abaxo mas perpendicularmente á la línea del circuito de la base. Esta altura de los triángulos tambien se llama apothema.

Nº 314. Luego *la superficie de las pirámides recta y regular (compuesta de triángulos, como lo vemos en* B) *es igual al circuito de la base, multiplicado por medio apothema, como se ve en* D, *ó á todo el apothema* B *e*, *multiplicado por medio circuito de la base i r s.*

En la pirámide obliqua é irregular, como los apothemas son diferentes, no es tan fácil la reduccion; pero se debe hacer separadamente la reduccion de cada triángulo.

Así como el cilindro se puede confundir con el prisma de infinitos lados, tambien el cono se puede confundir con la pirámide de infinitos lados. Y así la superficie verdadera del cono que se ve en M (*Lam.* 9. *Fig.* 21.), se puede considerar como si fuese una coleccion de triángulos de bases infinitamente pequeñas; pero que juntos igualasen el circuito de la base del cono, y tuviesen por altura su apothema *o i.*

Nº 315. Luego *la superficie del cono recto* A (*Lam.* 9. *Fig.* 21.) *es igual á un paralelogramo* N, *en el qual el circuito de la base i r s t se multiplica por medio apothema, ó al paralelogramo* H, *en que se multiplica medio circuito de la base por todo el apothema.*

Nº 316. La superficie de la pirámide truncada P (*Lam.* 9. *Fig.* 22.) se compone de muchos trapecios, los quales juntos hacen la figura B; pero reduciendo los trapecios á paralelogramos (N. 226.), esto es, multiplicando su altura *m a* por las medias paralelas *n o*, todos ellos hacen un paralelogramo M, cuya base es la media paralela de los trapecios, y cuya altura es el apothema.

Nº. 317. Luego *la superficie de una pirámide truncada* P *es igual á un paralelogramo* M, *cuya base es el circuito medio de la pirámide, y cuya altura sea todo el apothema.*

Por la misma razon que confundimos el cono entero con la pirámide, debemos reputar el cono truncado por una pirámide, truncada tambien y de infinitas caras.

Nº. 318. Luego *la superficie del cono truncado* E (*Lam.* 10. *Fig.* 1.) *es igual al paralelogramo* H, *en el qual la base es el circuito medio del cono a i, y la altura todo su apothema m n.*

Nº. 319. Si al cono entero le quitamos, aunque sea un solo punto del vértice, quedará truncado; y entónces no merece atencion la diferencia que solo procede de un punto. En este caso se puede reputar el uno como el otro, y discurrir de la superficie del uno como de la del otro, y así reducir la superficie del cono entero (*Lam.* 9. *Fig.* 21.) á un paralelogramo, cuya base sea el medio circuito A *e*, y su altura todo el apothema, como se ve en H.

§. IV.

De la superficie de la esfera, y de los segmentos de ésta.

Nº 320. Así como podemos considerar un círculo como un polígono de infinitos lados, así tambien podemos confundir la esfera formada por un círculo, que da vuelta al rededor de su exe, como una esferoide formada por un polígono, que anda al rededor de su mismo diámetro (*Lam.* 10. *Fig.* 2.)

Por consiguiente para medir la superficie de la esfera bastará medir la superficie de la esferoide poligónica, ó poliedro esferoide, no obstante que ésta es de pocas caras, por quanto esa misma doctrina se aplica á la de infinitas caras, y de ésta se pasa á la esfera.

Para medir, pues, la superficie de esta esferoide harémos lo siguiente:

I.

Dividamos la esferoide (*Lam.* 10. *Fig.* 2.) en conos truncados, cortándola por las secciones *e r*, *s t*, &c.

Ahora bien, supuesto lo dicho en el párrafo precedente, podemos reducir la superficie de cada uno de estos conos truncados *s e* (*Lam.* 10. *Fig.* 2.), ó S E (*Lam.* 10. *Fig.* 3.) á un paralelogramo A (*Lam.* 10. *Fig.* 4.), en que la circular media sea la basa, y los apothemas sean las alturas. (N. 318.)

Mas como cada cono tiene su particular media circular, y su especial apothema, es preciso que se procure reducir todas estas líneas á otras que sean de ménos confusion; y para esto

II.

Tomemos uno de estos conos truncados *e r s t*, que componen la esferoide, y pongámosle á parte (*Lam.* 10. *Fig.* 3.). Tírese una media paralela por la superficie de él, la que hará una circular, que debe tener su rayo A*i*, que sale de M*u*, exe del cono, y llega hasta A.

III.

Tírese desde el mismo punto A una línea hasta M, centro de la esferoide que se supone; y con la parte del exe M*i* completemos un triángulo de puntitos M A*i*.

IV.

Del punto E, en que termina el apothema del cono S E, baxarémos una perpendicular E R sobre su base.

V.

Dispuesto todo así, tenemos dos triángulos, uno mayor M A *i*, otro menor S E R.

Para probar, pues, que son semejantes, basta probar que los lados del uno son perpendiculares á los lados del otro; por quanto la línea M A, que pasa por el centro y por medio de la cuerda S E, le es perpendicular (N. 32.) Y ademas de esto E R corta perpendicularmente á A *i*, porque es perpendicular sobre la base del cono, paralela de A*i*: y últimamente S R continuada va á cortar perpendicularmente á M*i*, por ser parte del exe. Luego los dos triángulos son semejantes (N. 178.), y sus lados respectivos proporcionales; y así podemos decir: MA á A*i*, como SE á ER.

Pero sabemos que la circunferencia del rayo A*i* será á la circunferencia del rayo AM, como los dos rayos son entre sí (N. 205.); por consiguiente en lugar de los dos rayos podemos poner las dos circunferencias sin perder la proporcion; y así la circunferencia de MA es á la circunferencia de A*i*, como SE á ER, y podrémos decir: circ. MA es á la circ. A*i*, como SE es á ER.

Luego *multiplicando el primer término por* *el último, tendrémos el mismo producto, que multiplicando el segundo por el tercero* (N. 141.); y así la circunferencia MA multiplicada por ER, igual á la circunferencia A*i*, multiplicada por SE. Pero la circunferencia MA se diferencia de la circunferencia del círculo máxîmo de la esfera á proporcion que la línea MA, que hallamos en la esferoide, se diferencia del rayo de la esferoide: por tanto, considerando la esferoide compuesta de infinitos conos truncados, ó como polígono general de infinitos lados, podrémos confundir la esferoide con la esfera, y la línea MA con el rayo de la esfera, la cuerda SE con el arco SE; y la circunferencia de MA será lo mismo que la circunferencia del círculo máxîmo de la esfera; y podrémos decir por consiguiente:

La circunferencia del círculo máxîmo de la esfera, multiplicada por la línea ER, *es igual á la circunferencia de* Ai, *multiplicada por* SE, *y el paralelogramo* A (*Lam.* 10. *Fig.* 4.) *igual á* B.

Para hacer esto visible pongamos B (*Lam.* 10. *Fig.* 4.), cuya base es la circunferencia del círculo máxîmo de la esfera, y su altura la altura del cono, y tambien el paralelogramo A, cuya base es la circunferencia de A*i*, su altura la línea SE.

Nº 321. Luego *si la superficie del cono es igual al paralelogramo* A, *tambien lo es al paralelogramo* B.

Por la misma razon todos los demas conos truncados de que se compone la esferoide tendrán la superficie igual á los paralelogramos, que tengan por base la circunferencia del círculo mâxîmo de la esfera, y por altura las alturas de los conos.

Nº. 322. Luego *la superficie de la esferoide de muchos lados, ó poliedra es igual á un paralelogramo, que tenga por base la circunferencia del círculo máxîmo, y por altura todas las alturas de los conos, ó el diametro de la esferoide.*

Mas como podemos confundir esta esferoide con la esfera, se podrá decir:

Nº. 323. Luego *la superficie de la esfera* A (*Lam.* 10. *Fig.* 5.) *es igual á un paralelogramo* B, *en el qual la circunferencia del círculo máxîmo de la esfera es la base, y el diámetro la altura.*

De estas verdades se deducen varias consequencias.

I.

Nº. 324. Divídase este paralelogramo en quatro paralelogramos iguales *d*, *e*, *f*, *g*, cada uno de ellos será igual á un círculo máxîmo de la esfera (N. 232.), por tener por base la circunferencia, y por altura el medio radio. Luego todo el paralelogramo B es igual á quatro círculos máxîmos D E F G.

Luego *la superficie de la esfera* A *es igual á la de quatro círculos máxîmos.*

II.

Nº 325. Como los quatro círculos máxîmos son iguales á uno, que tenga el diámetro duplo (N. 264.), se sigue (*Lam.* 10. *Fig.* 6.): Luego *la superficie de la esfera* A *es igual á un círculo* H, *que tenga por radio el diámetro de ella.*

III.

Nº 326. Luego (*Lam.* 10. *Fig.* 7.) *la superficie convexâ de una media esfera es dupla de su superficie plana*; porque la superficie convexâ de la media esfera vale dos círculos máxîmos, y la superficie plana solamente es uno.

IV.

Qualquier segmento de la esfera se puede considerar compuesto de varios conos truncados unos sobre otros, como se dixo de la esferoide, cuyas superficies juntas son iguales á un paralelogramo, que tenga por base la circunferencia del círculo máxîmo de la esfera, y por altura la flecha A O (*Lam.* 10. *Fig.* 8.), ó la altura del segmento.

Nº 327. Luego *la superficie del segmento* S *es igual á un paralelogramo* T, *cuya base* *sea la circunferencia del círculo mâxîmo de la esfera, y su altura la flecha.*

V.

Ya diximos que la superficie del cilindro circunscripto E (*Lam.* 10. *Fig.* 9.) era igual á un paralelogramo B, cuya base fuese la circunferencia del cilindro, ó la de la esfera, que es la misma, y cuya altura fuese la del cilindro, ó el diámetro de la esfera. (N. 311.)

Luego *el mismo paralelogramo* B, *hecho por la circunferencia del círculo máximo de la esfera y su diámetro, medirá la superficie de la esfera* A, *y la del cilindro circunscripto* E; y así podemos decir:

Nº 328. Luego *la superficie del cilindro circunscripto es igual á la de la esfera* (*Lam.* 10. *Fig.* 9.), *y por consiguiente será igual á quatro círculos máximos.*

Ya se dixo arriba de la superficie de los prismas y cilindros, que solo se atendia á la superficie que los rodea, prescindiendo de las dos bases superior é inferior. Por consiguiente, si contamos la superficie total del cilindro circunscripto, será igual á seis círculos máxîmos, siendo la superficie de la esfera igual á quatro solamente.

§. V.

De la solidez ó valor de los prismas y de los cilindros.

Nº. 329. Toda medida, amigo Eugenio, es una repeticion ó multiplicacion de la unidad primitiva, y debe ser del mismo género que la cantidad que por ella se ha de medir ó valuar; y así si queremos medir líneas, esto es, distancias ó longitudes, la unidad debe ser línea ó distancia pura, como *palmo*, *vara* ó *legua*: pero si queremos medir superficies ó areas, la medida debe ser superficie, v. g. palmo quadrado, vara quadrada, ó cosa semejante: por último debe significar superficie ó espacio.

Finalmente si queremos valuar sólido ó volúmen, esto es, cosa que tenga las tres dimensiones de longitud, latitud, y profundidad ó altura, la unidad debe ser tambien un sólido que las tenga, v. g. palmo cúbico, pulgada cúbica, ó cosa semejante.

Nº. 330. Ademas de esto diximos en la multiplicacion de una línea por otra para valuar las superficies, que la línea móvil no se consideraba como línea matemática sin cuerpo, sino como una serie de partes ó unidades quadradas, que se multiplicaban por el número de unidades que se consideran en la línea directriz. Así tambien quando se quiere valuar el volúmen de los sólidos, no se ha de considerar la basa móvil como una superficie matemática sin grueso alguno, sino como una cantidad de unidades sólidas, que puestas unas al lado de otras, ocupan la base, y esta coleccion de unidades, que forman el primer órden de ellas, se debe multiplicar por el número de unidades que se consideran en la altura, haciendo de éstas varios órdenes, como que todas llenan el espacio del sólido.

En esta suposicion, para medir el volúmen de qualquier sólido, debemos valuar primero su base, y despues multiplicarla por el valor de la altura, lo que dará el valor del prisma.

Pongamos por exemplo la (*Lam.* 10. *Fig.* 10.) El sólido A tiene en la anchura quatro veces la de B, que le sirve de medida: tiene de profundo dos veces el sólido B: Luego multiplicando 4 por 2, tenemos que la base de A está compuesta de ocho veces B; pero A tiene tripe altura de B, y así es preciso repetir tres veces las ocho medidas B, que se hallan en la primera órden de A; y así para formar el volúmen de A son precisos 24 volúmenes de B.

Nº 331. Luego *para valuar qualquier prisma recto, cuya base sea un paralelogramo recto, bastará multiplicar las tres dimensiones longitud,* *latitud y profundidad*; porque multiplicando la longitud por la latitud, tenemos la base; y despues, multiplicando la base por la profundidad, tenemos el volúmen: Luego multiplicando las tres dimensiones, sabrémos el valor del sólido.

Advierto que podemos considerar qualquier lado del prisma como si fuese base, colocándole sobre él, y así podemos variar el modo de multiplicar estas tres dimensiones, y siempre tendrémos el mismo producto 24, porque podemos decir como arriba:

$4 \times 2 = 8, \times 3 = 24,$

ó de este modo: $4 \times 3 = 12, \times 2 = 24,$

ó tambien: $3 \times 2 = 6, \times 4 = 24,$

y lee de este modo: 4 multiplicado por 2, es igual á 8, y este 8 multiplicado todavia por 3, es igual á 24.

Asimismo advierto, que si la base del prisma fuere paralelogramo obliquángulo, no se debe multiplicar el un lado de ésta por el otro para valuar la base, sino un lado por su perpendicular, como diximos al núm. 221, reduciéndole á rectángulo, y despues este paralelogramo reducido á rectángulo, multiplíquese por la altura perpendicular.

Nº. 332. Luego *si la base de uno ó de muchos prismas fuere igual á la del otro, y su altura la misma, el valor será el mismo.*

Diximos que el triángulo tenia la mitad del valor de su paralelogramo (N. 216.): Luego quando quisiéremos valuar la base de un prisma triangular (*Lam.* 10. *Fig.* 11.), bastará contar con la base del prisma G, que sea un paralelepípedo, y contar solamente la mitad de la base para multiplicarla por su altura.

N.º 333. Luego *el valor del prisma triangular* F *es la mitad del valor de su paralelepípedo correspondiente* G.

Los polígonos diximos que se podian dividir en triángulos, por consiguiente los prismas multiláteros, divididas sus bases en triángulos, y continuadas estas divisiones desde una hasta otra base, quedarán divididos en prismas triangulares: por consiguiente podemos decir de los unos lo que acabamos de decir de los otros.

N.º 334. Luego *para valuar los prismas multiláteros hemos de multiplicar el valor de sus bases por su altura perpendicular.*

Hemos dicho muchas veces, que el círculo se puede confundir con el polígono, considerándole como uno de infinitos lados: de lo que se infiere, que podemos confundir el cilindro con un prisma de una infinidad de lados, y proceder en la valuacion del cilindro, como en el valor de los prismas.

N.º 335. Luego *valuada la base del cilindro, y multiplicada por la altura, tenemos su valor.*

N° 336. Luego *si las bases de muchos cilindros fueren iguales á la de uno solo, y la altura fuere la misma, el valor será el mismo.*

N° 337. Luego *si la base de uno ó muchos cilindros fuere igual á la de uno ó muchos prismas, y la altura la misma, el valor ha de ser el mismo.*

§. VI.

De la comparacion de los prismas y cilindros rectos con los obliquos.

Diximos que el paralelogramo rectángulo era igual al obliquángulo, quando los dos tenian la misma base y la misma altura. (N. 220.) Ahora para saber si tambien el prisma recto y el obliquo son iguales quando tienen la misma base y altura, conviene hacer lo siguiente (*Lam.* 10. *Fig.* 12.):

I.

Pongamos un paralelepípedo recto A, cuya base sea un rectángulo, y divídase la altura en partes iguales por secciones paralelas á la base.

II.

Pónganse estas partes unas sobre otras, no á plomo, sino en la forma que se representan en E.

III.

Tírense dos líneas desde las extremidades de la base *m n* hasta *o i*, y córtense, segun la línea *m o*, todos los prismas triangulares que hay desde *m* hasta *o*, para ponerlos por la otra parte desde *n* hasta *i*, como hicimos, hablando de los paralelogramos (N. 219.) (*Lam.* 5. *Fig.* 22.); y verémos que los claros desde *n* hasta *i* se llenarán por la razon que allí dimos; y de este modo el cuerpo E se muda en el paralelipipedo obliquo C.

N.º 338. Luego *los paralelipipedos* A C *de la misma base y altura, tienen el mismo valor, aunque el uno sea recto, y el otro obliquo.*

Pero los prismas que tuvieren por base paralelogramos obliquos, se pueden reducir á rectos, y por consiguiente darémos de ellos la misma doctrina.

Pero dividiendo los paralelipipedos recto y obliquo, segun las diagonales tiradas en sus dos bases, quedarán prismas triangulares, que serán entre sí como los paralelipipedos.

N.º 339. Luego *los prismas triangulares* *recto y obliquo, de la misma base y altura, son iguales*

Pero en los dos prismas triangulares juntos entre sí hallamos toda la qualidad de prismas; y por consiguiente dirémos de los prismas de muchos lados y compuestos lo que diximos de los triangulares y simples.

Nº 340. Luego *todos los prismas que tuvieren la misma base y altura serán iguales.*

Así como podemos confundir un círculo con un polígono de infinitos lados, así tambien podemos confundir un cilindro con un prisma multilátero de infinitos lados, y decir del cilindro lo que se dice del prisma.

Nº 341. Luego *el cilindro recto y el obliquo de igual base y altura son iguales* (*Lam.* 11. *Fig.* 1.)

Adviértase que no es lo mismo un cilindro obliquo que un cilindro inclinado; porque cilindro inclinado es aquel que salió de su plomo, en el qual toda seccion que sea perpendicular á su longitud, es un círculo; mas el cilindro obliquo es un sólido, cuya base es un círculo que va subiendo siempre paralelo á sí mismo, pero siempre siguiendo una línea directriz inclinada á la base; y así para ser circular la seccion en el cilindro obliquo, debe ser paralela á la base; porque si fuere perpendicular á la longitud, entónces será oval ó elíptica.

§. VII.

De la comparacion de las pirámides y conos rectos con los obliquos.

En quanto á las píramides podemos considerar primero (*Lam.* 11. *Fig.* 2) un sólido piramidal A, compuesto de varios prismas de igual altura, y de bases semejantes, cuyos lados homólogos van disminuyendo en progresion aritmética, y se ponen á plomo unos sobre otros.

Consideremos ahora que vamos sucesivamente apartando ácia un lado estos mismos prismas, ú otros iguales, huyendo siempre del plomo, como en B, y siguiendo una línea directriz, inclinada á la base. En este caso es evidente que en A y en B, no solo son iguales la base y la altura, sino que tambien lo es el valor.

Ahora bien, podemos con la consideracion aumentar quanto se quiera el número de los prismas, y disminuir la altura de cada uno de ellos; y quanto mas se disminuya esta, mas se llegarán estos sólidos á las pirámides que imitan. Siendo siempre verdad, que quando la base y altura son iguales, serán compuestas de los mismos ó iguales prismas, bien que puestos de diferente modo; y por consiguiente que es igual el valor de los sólidos: de este modo podemos confundir estos sólidos piramidales con las pirámides, y decir de ellas lo que acabamos de decir, que siendo la base igual, é igual la altura, el valor será igual.

Nº 342. Luego *las pirámides que tienen la base y la altura iguales, son iguales en el valor.* (*Lam.* 11. *Fig.* 3.)

Los conos se pueden comparar á las pirámides de infinitos lados.

Nº 343. Luego *los conos de la misma base y altura son iguales.*

Si una pirámide se dividiera desde el vértice hasta la base, en lugar de una tendriamos muchas, y todas juntas igualarian el valor de la total.

Nº 344. Luego *quando las bases de muchas pirámides fuesen iguales á la de una sola, y la altura fuese la misma, el valor seria el mismo.*

Nº 345. Luego *quando las bases de muchos conos fuesen iguales á la de uno solo, siendo la altura la misma, seria el mismo el valor,* por la misma razon.

§. VIII.

Modo de conocer el valor de las pirámides y de los conos.

Para conocer, amigo Eugenio, el valor de los triángulos, diximos que bastaba conocer el paralelogramo que les correspondia, y del qual el triángulo es solamente la mitad. Pero no sucede así en las piramides, respecto de los prismas: para conocer el valor de la solidez de ellas harémos lo siguiente (*Lam.* 11. *Fig.* 5.):

I.

Tomemos un prisma triangular recto H, y del ángulo *e* tiremos dos diagonales por los dos lados *e r*, *e s*, y cortemos el prisma, siguiendo esas líneas: de este modo queda separada la pirámide A, cuyo vértice está en *e*, y la base es la misma del *r o s*, siendo su altura *e o*, que es tambien la del prisma.

II.

Separemos esta pirámide A, queda el prisma antiguo mutilado, y hace la figura que vemos en B: entónces podemos arrojar sobre la mesa este cuerpo B; de forma, que el paralelogramo *a r m s* sea la base de quatro lados, y el punto *e* sea el vértice de una pirámide de quatro lados.

III.

Tírese en la base de esta pirámide B una diagonal *a s*, y desde el vértice *e* dividamos la pirámide de quatro lados en dos triángulares, siguiendo la direccion de la diagonal, y tendrémos las pirámides C y D.

Estas dos pirámides tienen las bases iguales entre sí, porque cada una de ellas es mitad del paralelogramo *a m r s*, y ambas hacian la base de la pirámide B, y el vértice es comun, por ser el punto *e*: Luego las dos pirámides C D tienen igual la base, y la misma altura; por consiguiente son iguales por el núm. 342.

Pero la pirámide D necesariamente es igual á la pirámide A, porque una tiene por base el plano ó base inferior del prisma *r o s*, y la otra, si la volvieren, puede tener por base el plano superior del prisma *a e m*, igual al inferior.

Ademas de esto, la pirámide A tiene por altura la esquina del prisma *e o*, y la pirámide D tiene por altura la otra esquina igual del prisma *m s*; y así si la base es la misma, y la altura tambien, las pirámides A D son iguales por el núm. 342; y como ya sabemos que la pirámide D era igual á C, se sigue que las tres pirámides A C D, en que el prisma triangular recto se dividió, son iguales.

Nº 346. Luego *el prisma triangular recto tiene el valor de tres pirámides, que tengan la misma base y altura que él.*

Pero todo el prisma que no fuere recto, se puede reducir á uno que lo sea, y tenga la misma base y altura, como tambien las pirámides: por consiguiente podrémos decir de todos los prismas triangulares obliquos lo que diximos de los rectos.

Nº 347. Luego *toda la pirámide triangular* B (*Lam.* 11. *Fig.* 7.) *solo vale el tercio del prisma* A, *que tenga la misma base y altura.*

Nº 348. Luego *toda la pirámide triangular es igual á un prisma* C *de la misma base, y de la tercera parte de su altura.* (*Lam.* 11. *Fig.* 7.)

El cubo (*Lam.* 11. *Fig.* 6.) es un prisma, cuya division en pirámides tiene una propiedad singular, porque se divide en tres pirámides iguales y semejantes, lo que no sucede en ninguna otra especie de prismas.

El cubo tiene seis lados: tres se representan en la estampa, y los otros tres opuestos que no se ven, se suponen: uno que es la base M, O, N, E, otro es el lado posterior R, T, O, N, otro es la cara del lado S, R, M, O.

En los tres lados que se ven tiremos tres diagionalas desde el mismo ángulo I, que son IR, IM, IN, y del mismo ángulo I tiremos otra diagonal, que pase por el centro del cubo, y vaya á parar al ángulo opuesto O: si por estas diagonales se hiciere la division, tendrémos una pirámide quadrilátera H, cuyo vértice caerá al ángulo de las diagonales I, y cuya base es la base del cubo *m*, *o*, *n*, *e*, esta es la primera pirámide.

Tenemos otra, cuya base es el lado posterior R, T, O, N, y cuyo vértice viene á estar en el ángulo de las diagonales I.

La tercera pirámide tiene por base la cara lateral S, R, M, O, que no se ve, y el vértice está en el ángulo de las diagonales I.

Ahora, pues, como todos los lados en el cubo son iguales y semejantes, y todos los ángulos iguales, se sigue que todas estas pirámides tienen base igual y semejante, como tambien la misma altura: por consiguiente todas son iguales y semejantes.

Nº. 349. Luego *el cubo se divide en tres pirámides iguales y semejantes, cada una de la misma base y altura del cubo, y cada pirámide, aunque de la misma base y altura del cubo, solo es la tercera parte de él.*

Para exâminar qué proporcion tiene un prisma multilátero con la pirámide de la misma base y altura (*Lam.* 11. *Fig.* 8.), dividamos así el prisma multilátero, como tambien su pirámide de la misma base y altura en prismas triangulares, y en pirámides triangulares. Esto hecho, cada pirámide será el tercio de su prisma por el núm. 347. Luego la suma de las pirámides, ó la pirámide total B será el tercio de la suma de los prismas, esto es, será el tercio del prisma total A.

Nº. 350. Luego *la pirámide multilátera B es igual á un prisma* C (*Lam.* 11. *Fig.* 8.) *de la misma base, y de la tercera parte de altura.*

Supuesto lo que hemos dicho acerca de poder confundir el cilindro con un prisma de infinitos lados, y el cono con la pirámide correspondiente, podemos inferir:

Nº. 351. Luego *el cilindro* A *vale tres conos* B, *de la misma base y altura del cilindro.* (*Lam.* 11. *Fig.* 9.)

Nº. 352 Luego *el cono* B *vale un cilindro* C, *de la misma base, y de la tercera parte de la altura del cono.*

IX.

Del valor de la pirámide y cono truncado.

Nº. 353. Como la pirámide truncada A (*Lam.* 11. *Fig.* 10.) es una pirámide entera, ménos la pequeña pirámide *e*, para conocer el valor de la truncada es preciso valuar la total, y despues valuar la pequeña imaginaria *e*, para descontarla de la total, y el resto será el valor de la pirámide truncada.

Del mismo modo, como el cono truncado B es un cono entero, ménos la parte que se supone cortada *r* (*Lam.* 11. *Fig.* 10.), valuado el total, y descontado el cono imaginario *r*, el resto será el valor del cono truncado B.

Nº 354. La dificultad está en conocer por el cono truncado quál seria la altura del cono, si estuviese entero; para lo que harémos lo siguiente, y es una operacion que se puede aplicar á la pirámide.

I.

Tírese una línea indefinida N I (*Lam.* 11. *Fig.* 10.)

II.

Señálese en esta línea la altura del cono truncado N *o*.

III.

Póngase en N el rayo de la base inferior del cono N S, y en *o* el rayo de la base superior *o i*, siendo ambas líneas perpendiculares á N I.

IV.

Baxemos de *i* una paralela á *No*.

V.

Tiremos por las dos extremidades de los radios *i s* una obliqua, que irá á cortar la indefinida en I.

Esto hecho, las dos paralelas *o* N, *i n* hacen que sean semejantes los dos triángulos *n i s*, N I S; y así *n s* á N S, como *n i* á NI.

Esto es, la pequeña base es á la grande como la pequeña altura es respecto de la grande. En esta proporcion los tres primeros términos son conocidos, porque *n s* es el exceso del radio de la base inferior N S, sobre el radio superior *o i*. Tambien es conocida la línea N S, radio inferior. Tambien es conocida *n i*, altura del cono: Luego hallamos N I, altura del cono total, y así será tambien conocida la línea *o* I, altura del cono imaginario *r*, el qual si fuese verdadero, seria complemento del total.

Nº. 355. Luego *dado qualquier cono truncado, en conociendo los radios de la base inferior y superior, y la altura del cono truncado, harémos esta proporcion.*

Nº. 356. *La diferencia de los radios es, respecto del radio grande, como la altura del* *cono truncado es á la altura del entero.*

§. X.

Del valor de la esfera.

Nº. 357. Consideremos la esfera dividida muchas veces, mas siempre por el centro, y quedarán muchas pirámides, cuyas bases juntas hacen la superficie de la esfera, cuyo vértice será el centro; y la altura será el radio de esta misma esfera. (*Lam.*. 11. *Fig.* 11.)

De este modo la esfera A es una coleccion de estas pirámides unidas por sus lados.

Pero como la superficie de la esfera A es igual á quatro círculos máxîmos por el núm. 325, si en lugar de esta coleccion de pirámides, que componen la esfera, ponemos quatro conos (*Lam.* 11. *Fig.* 12.), cada uno de los quales tenga por base un círculo máxîmo, y por altura el radio de la esfera, el valor de estos quatro conos será igual al de la coleccion de pirámides que diximos (N. 343.), ó al de la esfera.

Estos conos B son iguales á quatro cilindros D (*Lam.* 11. *Fig.* 13.) de la misma base, y de la tercera parte de la altura de los conos. (N. 352.) Por consiguiente tambien la esfera será igual á quatro cilindros D, siendo la base de cada uno un círculo máxîmo, y la altura un tercio del radio; pero estos quatro cilindros D, puestos unos sobre otros, hacen un cilindro E, cuya base es un círculo máxîmo, y cuya altura es la de los quatro juntos, esto es, quatro tercios de radio, ó dos tercios de diámetro.

Nº. 358. Luego *la esfera tambien es igual á un cilindro* E (*Lam.* 11. *Fig.* 13.), *cuya base sea un círculo máxîmo, y cuya altura sea quatro tercios de radio, ó dos tercios de diámetro.*

Pero los quatro cilindros D de la figura 13 tienen la misma base que uno solo (*Lam.* 11. *Fig.* 14.), cuya base sea un círculo que tenga por radio el diámetro de la esfera, y la altura misma de un tercio de radio.

Nº. 359. Luego *la solidez de la esfera* A *tambien es igual á un cilindro* F, *cuyo radio sea el diámetro de la esfera, y su altura un tercio del radio de ésta.*

Tambien los quatro conos B de la (*Lam.* 11. *Fig.* 12.) son iguales á uno solo G de la (*Lam.* 12. *Fig.* 1.), cuya altura sea el radio, y cuya base sea un círculo, que tenga por radio el diámetro de la esfera. (N. 260.)

Nº. 360. Luego *la esfera* A (*Lam.* 12. *Fig.* 1.) *tambien es igual á un cono* G, *cuya altura sea el radio, y cuya base sea el círculo formado por el diámetro, como radio.*

Como la superficie de la esfera es igual á un paralelogramo, que tenga por altura el diámetro de la esfera, y por base la circunferencia de su círculo máxîmo por el núm. 323; dando á este paralelogramo H (*Lam.* 12. *Fig.* 1.) la misma altura que dimos á los quatro cilindros D, esto es, un tercio del radio, será este prisma igual á los quatro cilindros D (*Lam.* 11. *Fig.* 13.), y por consiguiente á la esfera A.

Nº. 361. Luego *la esfera A es igual á un prisma, cuya base sea un paralelogramo hecho por el diámetro de la esfera, y por la circunferencia de su círculo maxîmo, y cuya altura sea un tercio del radio.*

§. XI.

De la razon que tienen los sólidos entre sí.

Valuados los prismas, los cilindros, las pirámides, los conos y las esferas, conviene que sepamos la razon que estos cuerpos tienen entre sí: empecemos, pues, por los sólidos de la misma especie.

PRISMAS.

Diximos al núm. 135, que quando una cantidad se multiplica por dos, está en la misma razon que ellas tenian; y tambien diximos al núm. 293, que en la formacion del prisma se multiplicaba la base por la altura; y así quando la misma base se multiplicare por alturas diversas, los prismas serán como las alturas.

Nº 362. Luego *los prismas de la misma base son entre sí como las alturas*; y por esto (*Lam.* 12. *Fig.* 2.) los prismas A, B estan en razon quadrupla, porque esta es la razon de sus alturas.

Tambien diximos al núm. 132, que quando dos cantidades se multiplicaban por una, quedaban entre sí en la razon que ántes tenian: y así diversas bases multiplicadas por la misma altura, se quedan entre sí como estaban ántes.

Nº 363. Luego *los prismas de la misma altura son entre sí como las bases*; y de este modo (*Lam.* 12. *Fig.* 3.) A, B estan entre sí en razon triple, porque sus bases tienen entre sí esta razon.

Nº 364. Luego *quando la altura es diversa, y tambien es diversa la base, los prismas estan entre sí en razon compuesta de la razon de las bases, multiplicada por la razon de las alturas.* (*Lam.* 12. *Fig.* 4.)

Por quanto si la altura de A y B fuese la misma, y la base en B fuese quadrupla de A, por solo esto B tendria quatro veces el valor de A. Supongamos que ponemos encima de B otro cuerpo semejante B para que en él fuese dupla la altura de A; esta segunda porcion superior B seria igual á la inferior, y por esto tendria en sí misma quatro veces el valor de A: por consiguiente el prisma total B tendria ocho veces el valor de A, que viene á ser lo mismo que la razon de quatro de la base multiplicada, por la razon segunda de la altura.

De esta regla general se sacan varias

CONSEQUENCIAS.

I.

Como las partes proporcionales de varias cantidades estan entre sí en la misma razon que tienen las cantidades totales (N. 134.), y las pirámides son los tercios de sus prismas (N. 346.), inferimos:

Nº 365. Luego *las pirámides de la misma base (Lam. 12. Fig. 5.) estan entre sí como sus alturas*; y de este modo B es dupla de A, porque la altura tambien es dupla.

Nº 366. Luego *las pirámides de la misma altura estan entre sí como sus bases*; y así (*Lam.* 12. *Fig.* 6.) A : B : : 1 : 4, porque las bases estan en esa razon.

Nº 367. Luego *las pirámides de diferente base y altura estan entre sí en razon de sus bases multiplicada por la razon de las alturas* (*Lam.* 12. *Fig.* 7.); y así F : G : :

1 : 8, porque la razon de las alturas es 2, y la de las bases es 4 : Luego la razon de las pirámides es 8, ó 2 × 4.

II.

Ademas de esto como los cilindros se confunden con los prismas de infinitos lados, ó son como prismas de infinitos lados, podemos decir:

Nº. 368. Luego *los cilindros de la misma altura estan entre sí como las bases* (*Lam.* 12. *Fig.* 8.); y así A : B : : 1 : 4, porque las bases estan en esa razon.

Luego *los cilindros de la misma base estan entre sí como sus alturas* (*Lam.* 12. *Fig.* 9.) : y así E : F : : 1 : 2, porque esta es la razon en que estan sus alturas.

Luego *los cilindros de la base diversa, y de diversa altura estan entre sí en la razon de las bases, multiplicada por la de las alturas* (*Lam.* 12. *Fig.* 10.): y así A : B : : 1 : 8, porque las bases son como 1 : 4, y las alturas como 1 : 2. Luego los cilindros son como 1 : 8, esto es, como 2 × 4.

III.

Como los conos son los tercios de los cilindros, debemos decir:

Nº. 369. Luego *los conos de la misma altura estan entre sí como sus bases.*

Luego *los conos de la misma base estan entre sí como sus alturas.*

Luego *los conos de diferente base y diferente altura estan entre sí en la razon de las bases, multiplicada por la de las alturas.*

§. XII.

De la razon que tienen entre sí los sólidos semejantes.

Ya diximos en su propio lugar, que los sólidos se formaban por el movimiento de una superficie; y que de la diversidad de la superficie móvil ó *generante* juntamente con la diversidad de la línea que dirige el movimiento, y se llama directriz, nacian las diferentes especies y calidades de sólidos.

Ahora decimos, que quando las superficies generantes son semejantes, y semejante su movimiento, en tal forma que los ángulos sean iguales, y todas las líneas en proporcion, los sólidos que de aquí resultan se llaman *sólidos semejantes.*

Se dixo que los paralelogramos, triángulos, y demas figuras planas que se forman de ellos estaban en la razon compuesta de la razon de las bases, multiplicada por la razon de las alturas de la figura plana.

Pero los sólidos, como acabamos de decir, estan en razon compuesta de la razon de las superficies, que les sirven de base, multiplicada por la razon de las líneas, que les miden su altura; y de este modo los sólidos estan entre sí en una razon compuesta de tres, esto es, de dos razones que hay en la base generante, y otra en las alturas del sólido.

N.º 370. Luego *la razon de los prismas entre sí es compuesta de tres razones, dos que hay en la superficie generante ó base del prisma, y una que hay en su altura.*

Pero quando las bases de los prismas son semejantes, las dos razones que hay en ellas son iguales; de forma, que una razon multiplicada por otra es lo mismo que multiplicada por sí misma; y así el exponente de esta razon compuesta es un quadrado de la razon simple. (N. 262.)

Si los prismas son semejantes, la misma razon que hay entre qualesquiera lados correspondientes de la base, la ha de haber tambien en las alturas; y por consiguiente quando la base se multiplica por la altura, para formar el prisma la razon de la base, que es un quadrado de la razon simple de los lados, se multiplica de nuevo por esa razon simple ú otra igual; lo qual es una razon compuesta de tres razones semejantes.

N.º 371. Luego *los prismas semejantes estan entre sí en la razon compuesta de tres razones iguales.*

Nº. 372. Luego *el exponente de los prismas semejantes es el producto de la razon simple de qualquier lado, multiplicada por sí misma una vez para hacer un quadrado, y multiplicada otra vez por la raiz para hacer un cubo.*

Nº. 373. Luego *los prismas semejantes estan entre sí, como los cubos de qualquiera de sus lados correspondientes.*

Pero las pirámides son los tercios de los prismas por el núm. 346, y las partes proporcionales estan entre sí como sus todos por el núm. 134.

Nº. 374. Luego *las pirámides semejantes estan entre sí, como los cubos de sus lados.*

Tambien diximos, que los cilindros se podian considerar como prismas de lados infinitos, y los conos como pirámides de una infinidad de lados.

Nº. 375. Luego *los cilindros semejantes y los conos semejantes estan entre sí, como lo cubos de sus lados homólogos.*

Ya hemos considerado la esfera como compuesta de infinitas pirámides, que tienen el vértice en su centro.

Nº. 376. Luego *las esferas son entre sí, como los cubos de sus diámetros.* De modo, que si una esfera tiene el diámetro duplo de la otra, su valor es ocho veces mayor, porque $2 \times 2 \times 2 = 8$; y si el diámetro fuere triple, su valor es veinte y siete veces mayor, porque $3 \times 3 \times 3 = 27$; y lo mismo se dice de todos los otros sólidos semejantes.

XIII.

De la proporcion que se halla entre el valor de la esfera y el del cilindro, cubo y cono, que tuviesen la misma altura y profundidad de la esfera.

Nº. 377. Llamamos cilindro circunscripto á la esfera á aquel que tiene por base un círculo máxîmo de la esfera, y por altura su diámetro (*Lam.* 12. *Fig.* 11.), y por consiguiente toca á la esfera por el punto superior, por el inferior, y por el circuito.

Acabamos de decir en el núm. 358, que la esfera A es igual al cilindro, que tiene por base un círculo máxîmo, y por altura dos tercios del diámetro, y que el cilindro circunscripto B (*Lam.* 12. *Fig.* 11.) tiene la misma base del cilindro L (*Lam.* 12. *Fig.* 14.), y tres tercios del diámetro por altura. Luego *estos dos cilindros* B, L (*Lam.* 12. *Fig.* 11 y 14.) *son entre sí como las alturas, esto es, como dos tercios á tres.*

Nº. 378. Luego *tambien la esfera* A (*Lam.* 12. *Fig.* 11.) *es á su cilindro circunscripto* B. *como dos á tres*; esto es, si la esfera pesa 22 onzas, el cilindro pesará 33.

Vale, pues, la esfera dos tercios del cilindro circunscripto. Pero el cono que tuviere esa misma base y esa misma altura del cilindro, vale solamente una tercera parte de él; esto es, si el cilindro B pesa 33 onzas, el cono C (*Lam.* 12. *Fig.* 12.) pesará solas 11.

N.º 379. Luego *el cono* (*Lam.* 12. *Fig.* 12.) *que tiene por base un círculo máxîmo de la esfera, y por altura su diámetro, vale la mitad de la esfera*; de modo, que si la esfera vale 22, el cono valdrá 11.

Y así el cono C que tuviere por base un círculo máxîmo, y por altura el diámetro de la esfera, es igual á media esfera, ó al emisferio D. (*Lam.* 12. *Fig.* 12.)

N.º 380. Luego *el cono, la esfera y el cilindro que tienen la misma altura y profundidad, son como* 1, 2, 3, *ó como* 11, 22, 33 (*Lam.* 12. *Fig.* 15.).

Quanto al cubo circunscripto (*Lam.* 12. *Fig.* 13.), si le quisiéremos comparar con la esfera, dividirémos la dificultad, é irémos dando solucion poco á poco.

N.º 381. Lo primero comparemos la esfera, ó el cilindro L su igual (*Lam.* 12. *Fig.* 14.) con un prisma M de la misma altura, esto es, de dos tercios de diámetro, ó quatro tercios de radio. Mas siendo la altura la misma, solo se halla la diferencia en las bases F G, y ésta, como diximos al número 267, es como 22 á 28, esto es, como la circunferencia á quatro diámetros. Luego si el cilindro L, ó la esfera que le es igual pesa 22 onzas, el prisma M pesará 28.

Nº 382. Comparemos ahora este prisma M con el cubo circunscripto N, como ambos son de la misma base, toda la diferencia está en la altura; pero teniendo el cubo tres tercios de diámetro por altura, y el prisma solamente dos, si el prisma M vale 4 diámetros, ó 28, el cubo debe valer 6 diámetros, ó 42; y por consiguiente, comparando la esfera A, ó el cilindro L su igual con el cubo N circunscripto, será como 28 á 42, ó como la circunferencia á 6 diámetros.

Nº 383. Luego *los quatro cuerpos que pertenecen á la esfera en el modo arriba dicho* (*Lam.* 12. Fig. 15.), *esto es, el cono, la esfera, el cilindro y el cubo estan en esta proporcion* 11, 22, 33, 42.

§. XIV.

Del valor del sector, y del segmento de la esfera.

Nº 384. Así como arriba consideramos la esfera dividida en pirámides, cuyo vértice comun era el centro, podemos dividir ahora el sector en muchas pirámides, cuyo vértice comun sea el centro, y cuyas bases hagan la superficie convexa del sector. (*Lam.* 13. *Fig.* 1.)

Nº. 385. Luego *el sector es igual á muchas pirámides juntas, cuyas bases hagan la superficie, y cuya altura sea el radio.* Ya se dixo al núm. 346, que cada pirámide valia un tercio de su prisma correspondiente, y era igual á su base multiplicada por el tercio de la altura del prisma.

Nº. 386. Luego *el sector* Z (*Lam.* 13. *Fig.* 1.) *es igual á un prisma* B, *cuya base sea un paralelogramo igual á la superficie convexâ del sector, y cuya altura sea un tercio del radio de la esfera.*

Pero la superficie convexâ del sector Z, que es la misma del segmento, ya diximos al núm. 327, que era igual á un paralelogramo B, cuya longitud fuese la circunferencia del círculo máxîmo de la esfera, y su altura la flecha. (*Lam.* 13. *Fig.* 1.)

Luego *el valor de* Z, *sector de la esfera, es igual á un prisma* B, *cuya longitud sea la circunferencia de la esfera, y su anchura la flecha, y su altura un tercio del radio* (*Lam.* 13. *Fig.* 1.).

Nº. 387. Para valuar el segmento de la esfera (*Lam.* 13. *Fig.* 2.), despues de hallado el valor del sector B, bastará cortar todo el cono K, y sabido el valor de este cono, el resto será el valor del segmento H.

Pero el cono K ya diximos que era igual á un cilindro de la misma base, y de la tercera parte de la altura (N. 352.);

y tambien habiamos dicho que el círculo de la base de este cono se podia reducir á un paralelogramo, que tuviese por longitud la circunferencia de él, y por altura medio radio (N. 232.).

Nº. 388. Luego *haciendo un prisma* P, *cuya longitud sea la circunferencia del cono, y su latitud medio radio de su base, y la altura el tercio de la altura del cono, se conocerá su valor.*

Nº. 389. Luego *el valor del segmento* H (*Lam.* 13. *Fig.* 2.) *es el valor del sector* Z (*Lam.* 13. *Fig.* 1.), *ménos el del cono* K.

Nº. 390. Luego *el valor del segmento* H *es igual al del prisma* B *de la* (*Lam.* 13. *Fig.* 1.), *quitando de éste el valor del cono* K, *que es el de otro prisma* P (*Lam.* 13. *Fig.* 2.), y de este modo el segmento H será igual al sólido; y la razon es, porque así como juntando ó sumando el cono K con el segmento H, tenemos el sector Z, así tambien juntando el prisma P, que tiene el valor del cono K, y añadiéndole el sólido *y*, en donde entra, se formará el prisma B de la (*Lam.* 13. *Fig.* 1.) igual al sector Z.

§. XV.

Del modo de valuar el prisma recto truncado.

Nº 391. Llamamos prisma truncado todo aquel que sea cortado irregularmente, como A (*Lam.* 13. *Fig.* 3.).

Para simplificar la doctrina hablarémos del prisma triangular, porque todos los otros se pueden reducir á triangulares.

Tiene, pues, el prisma triangular A tres esquinas desiguales, y para reducirle á un prisma regular, capaz de ser valuado, se hará lo siguiente:

I.

Nº 392. Tirarémos del ángulo sólido *o* dos diagonales *om*, *on*: considerarémos cortada esta pequeña pirámide, cuya base *man* es la base del prisma, y cuyo vértice está en *o*, abaxo ponemos en E esta pirámide.

II.

Separada la pirámide E, queda el resto B, que es una pirámide irregular de quatro caras, cuya base es *r s m n*, y cuyo vértice está en *o*, y en esta base *s r m n* podemos tirar una diagonal *m s*.

III.

Podemos considerar una division desde el vértice *o*, buscando siempre la diagonal *m s*, y dividimos esta pirámide quadrilátera en dos triangulares, las que podemos separar una C, cuya base es *r s m*, y su vértice está en *o*; otra D, cuya base es *m s n*, y su vértice está en *o*, las quales, si se juntan, vuelven á hacer el sólido B; y poniéndolas encima la pirámide E, queda formado el prisma truncado A primitivo.

De este modo se conoce que el prisma truncado A se divide en tres pirámides E, C, D.

Como estas pirámides son desemejantes, y nada tienen comun, veamos si reducimos C y D á otras iguales, que tengan la misma base de E, que viene á ser la del prisma primitivo A; pues de este modo será mas fácil hallar el valor de las pirámides y del prisma que se dividió en ellas.

IV.

Nº. 393. Hagamos despues dos pirámides imaginarias F, G, cuyas bases sean como la de la pirámide E; esto es, la del prisma primitivo A, y demos á F la altura del prisma en la esquina *r m*, y á la pirámide G la altura del prisma en la esquina *s n*. Teniendo la pirámide E la altura del prisma en *a o*, tenemos con esto tres pirámides todas con la misma base del prisma, y cada una tiene por altura una esquina del prisma, *a o* será la altura de E, *r m* la de F, y *s n* la de G.

V.

Veamos ahora si estas dos pirámides imaginarias F, G valen tanto como las verdaderas C, D, en que el prisma se dividió. Quanto á C, esta tiene el vértice en *o*, y tiene por base el triángulo *m r s*. Pero la pirámide imaginaria P, si la sobreponen en el triángulo *m r n*, tendrá ese triángulo por base: para comparar, pues, estas dos bases ó triángulos *m r s*, *m r n*, busquémoslos en el prisma A, y verémos que el triángulo *s r m*, ó *r n m* son iguales, porque estan entre las mismas paralelas por el número 224. Luego el triángulo *r s m*, base de C, es igual á *r n m*, base de F: veamos ahora la altura de estas dos pirámides C y F: C tiene el vértice en *o*, y F en *a*; pero mirando bien el prisma primitivo A, se advierte que *o* y *a* estan en la misma paralela: luego las pirámides C y F tienen base igual y altura igual, por consiguiente son iguales.

Vengamos ahora á las pirámides G, D, para ver si tambien son sus iguales entre sí.

Pongamos la una y la otra, de suerte, que tengan por vértices en G el punto *a*, en D el punto *o*, ambos por la misma esquina *a o*, del prisma A, que ya vimos estaban en la misma altura.

Quanto á la base de D, es el triángulo *m s n* del prisma A; la base de G es el mismo triángulo *m s n* del prisma A: luego D, G tienen la misma base, y los vértices estan á la misma altura; y así la pirámide imaginaria G es igual á la pirámide verdadera D.

Nº. 394. Luego *el prisma truncado es igual á las tres pirámides* E, F, G, *que tienen por bases la del prisma truncado, y por alturas las tres esquinas de éste.*

Pero estas tres pirámides (*Lam.* 13. *Fig.*4.) se reducen á tres prismas de la misma base del truncado A, y de una altura que sea un tercio del de las pirámides, ó un tercio de las esquinas del prisma A; y así los prismas B, C, D son iguales á las pirámides E, F, G, que se corresponden á plomo en la lámina.

Nº. 395. Luego *el prisma truncado* A (*Lam.* 13. *Fig.* 3.) *es igual á un prisma entero* A (*Lam.* 13. *Fig.* 4.) *de la misma base, cuya altura sea la suma de las terceras partes de las tres esquinas del truncado*; y así el prisma truncado es igual al prisma entero A, compuesto de los prismas B, C, D.

Si el prisma no fuere recto, córtese

por el medio con una seccion perpendicular á las esquinas, y quedará dividido en dos prismas rectos truncados, y sabrémos hallar su valor.

§. XVI.

Modo de valuar el volúmen de los cuerpos irregulares.

Nº 396. Qualquier cuerpo irregular se puede dividir por una seccion recta, y entónces las dos nuevas superficies de la seccion pueden servir de bases rectas de los dos cuerpos.

En segundo lugar, puesta qualquiera de estas partes sobre su base recta, podemos ir dividiendo cada una de ellas en prismas triangulares truncados; y sabiendo valuar cada prisma, se sabe el valor del sólido: bien pudieran quedar algunas pirámides; pero á estas ya las sabemos hallar su valor.

Para abreviar la operacion darémos algunas reglas, que nos dispensen de llegar hasta la última division de los prismas triangulares truncados.

I.

Nº 397. Sea un sólido como el de la Fig. 5 de la Lam. 13: su base E A O Q sea un paralelogramo, sobre cuyos quatro ángulos se levanten perpendicularmente quatro esquinas desiguales E S, A I, P Q, O R, el lado E O S R esté cortado de forma, que se termine en I: el lado O Q R P córtese tambien de forma, que se termine en I. Aquí tenemos un paralelepípedo irregularmente truncado: supongamos, pues, que es preciso saber su valor.

II.

Tiremos en la base la diagonal A O, y conforme á esa diagonal hágase una seccion por las esquinas O R, A I, quedará dividido en los dos prismas truncados, que vemos con separacion en la misma figura, y cuyo valor sabemos averiguar por lo que queda dicho.

Por quanto el que tiene por base el triángulo E A O es igual á un prisma recto de esta base, cuya altura sea un tercio de E S con mas un tercio de A I, mas un tercio de R O; del mismo modo el otro es igual á un prisma recto, cuya base sea el triángulo A O Q, y la altura un tercio de P Q con un tercio de A I, y un tercio de R O.

Pero como las dos bases, por ser triángulos mitades del paralelogramo, son iguales, en vez de hacer dos productos ó prismas, hagamos uno con la altura de los dos, esto es, un prisma, cuya base sea E A O, y cuya altura sea un tercio de E S, un tercio de P Q, y dos tercios de A I, mas dos tercios de R O; ó por otro medio, un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de las esquinas que sean comunes á ambos, y son aquellas por donde va la division. Como el prisma quadrilátero total se divide en los dos, su valor es la suma de ambos.

Nº. 398. Luego *el paralelepípedo diferentemente truncado es igual a su media base, multiplicada por un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de cada esquina comun á los dos prismas triangulares, en que se podia dividir.*

Lo mismo dirémos, si el paralelepípedo fuese cóncavo (*Lam.* 13. *Fig.* 6.), entónces se podrá dividir, segun la línea de direccion de la concavidad M N, y se tirará la diagonal en la base *o i*, y se hará la misma operacion de arriba.

Nº. 399. El prisma quadrangular que no fuere paralelepípedo, solo se puede valuar, haciendo la division en la base, segun la línea ó direccion de la convexîdad, ó de la concavidad superior; y haciendo dos triángulos, y de cada uno de ellos multiplicado por los tercios de sus tres esquinas, formando un producto, la suma de ambos será el valor de este sólido.

§. XVII.

De los sólidos regulares.

Nº. 400. Llamamos sólido absolutamente regular al que en las superficies, en las líneas y en los ángulos guarda una perfecta igualdad y semejanza. De este género son el *cubo*, el *tetrahedro*, ó de quatro superficies, el *octahedro* de ocho, el *icosahedro* de veinte, y el *dodecahedro* de doce, en los quales no hay la mínima desigualdad en ángulos, líneas, ni superficies.

Nº. 401. La esfera (*Lam.* 14. *Fig.* 1.) tambien podia colocarse entre los cuerpos regulares, por ser en todas partes semejantes á sí mismo: de suerte, que de qualquiera modo que se la tome siempre ofrece la misma superficie igualmente convexa.

El cubo (*Lam.* 14. *Fig.* 2.) es formado por seis quadrados iguales: el uno está en la base, los quatro al rededor de la base hacen los quatro lados, y el sexto forma la base superior. En el cubo todos los ángulos sólidos son formados por la concurrencia de tres quadrados; y en los quadrados todos los ángulos son de noventa grados, y todas las líneas son iguales.

Nº. 402. Luego *el cubo es un sólido perfectamente regular.*

Con quadrados no podemos formar otro sólido, porque si quisiéremos juntar solamente dos, no se forma ángulo sólido, pues éste forzosamente ha de tener tres lados á lo ménos, y tres dimensiones en longitud, latitud y profundidad.

Si juntamos los tres lados quadrados que diximos, formamos un ángulo sólido, como se ve en el cubo. Si juntamos quatro (*Lam.* 14. *Fig.* 7.) *e*, *i*, *o*, *u*, teniendo cada qual noventa grados, todos juntos hacen 360; y por consiguiente el punto en donde concurren es el centro de un círculo, y no puede hacer ángulo sólido.

Nº. 403. Luego *con quadrados no se puede formar otro sólido que no sea el cubo.*

Veamos ahora los sólidos que formamos con los triángulos equiláteros; pues todos los otros triángulos son por su irregularidad incapaces de formar cuerpo perfectamente regular.

Juntos tres triángulos (*Lam.* 14. *Fig.* 3.), harán un ángulo sólido M, y como la base tambien ha de ser un triángulo formado por tres lados de los triángulos que forman las superficies, ha de ser triángulo; y pues las líneas que le forman son lados de triángulos equilateros, tambien él ha de ser equilátero, y por esto igual á los superiores. Los tres triángulos de la base, siendo todos ellos formados por tres triángulos equiláteros, uno de la base, y dos de los lados, que son todos iguales á los que forman el ángulo del vértice M, tambien le son iguales.

Estos quatro triángulos se ven en la (*Lam.* 14. *Fig.* 8.), y en ella se advierte cómo podrán formarse de plano para armar el tetrahedro: B es la base, A, E, O son los lados que pueden levantarse al rededor de la base, y juntándose los ángulos *m m m*, harán el vértice del tetrahedro M de la (*Lam.* 41. *Fig* 3.).

Nº. 404. Luego *el tetrahedro formado por quatro triángulos equiláteros, es cuerpo regular.*

Juntemos ahora quatro triángulos equiláteros *a e m n* (*Lam.* 14. *Fig.* 12.), de suerte que se junten *o o*, quedará una pirámide de quatro lados con el vértice en *i*: no obstante la base será quadrada, y por eso desigual á los lados, y así será un sólido irregular.

Pero formemos otra pirámide semejante, y juntemos las dos bases quadradas, resultará el sólido regular H (*Lam.* 14. *Fig.* 4.).

I.

Todos los ocho lados son triángulos equiláteros.

II.

Todos los ángulos sólidos son formados por quatro lados con el vértice en *i*; porque el vértice inferior *t* se supone ser lo mismo que el de arriba; los laterales *r s*, &c. son formados cada uno por el concurso de dos triángulos superiores, y dos inferiores; y así son formados por quatro triángulos equiláteros.

Nº 405. Luego *el octahedro es cuerpo perfectamente regular.*

Para formarle de papel se puede cortar como en la (*Lam.* 14. *Fig.* 9.), y doblarle, de modo que *o o* se junten, y se verá formado un sólido en *i* de los triángulos *a e m n*, y los otros quatro formarán la parte inferior del octahedro, cuyo vértice es *t*.

Juntemos ahora cinco triángulos equiláteros (*Lam.* 14. *Fig.* 13.), y hagamos que *n m* se junten, se levantará el centro *o*, y quedará un sólido de cinco lados iguales y semejantes. Con todo eso la base de esta pirámide es un pentágono, y los lados son triángulos, lo que contradice á la regularidad que se desea; y así por este medio todavía no tenemos sólido regular.

Si formamos otra pirámide de cinco lados semejantes, para juntarla, poniendo la cúspide ácia abaxo, como hicimos en el octahedro, queda un sólido todo formado por triángulos equiláteros. No obstante los ángulos sólidos no son semejantes, por ser el superior y el inferior formados con la concurrencia de cinco triángulos, y los laterales de al rededor *a a a a*, &c. son formados por solos quatro, dos de la pirámide superior, y dos de la inferior; por consiguiente aun no tenemos sólido regular.

Pero hagamos una figura en papel, como se representa (*Lam.* 14. *Fig.* 10.), en la que, ademas de los cinco triángulos equiláteros *e*, *e*, *e*, *e*, *e*, que han de formar la pirámide superior O; y de los otros cinco que formarán la inferior E, tenemos M N, formada de diez triángulos equiláteros, cinco que unen por las tres bases con los superiores, y otros cinco que unen con los inferiores. Doblando, pues, esta lista de triángulos circularmente, de modo que se junten las dos extremidades M N, y disponiendo las divisiones en tal forma, que solo por ellas se doble la lista, y haga un circuito de superficies planas, si arriba unimos todos los ángulos *o*, *o*, *o*, *o*, *o*, y abaxo los ángulos *e*, *e*, *e*, *e*, *e*, tendrémos un sólido, como se ve en la (*Lam.* 14. *Fig.* 5.), en el qual se observa lo siguiente:

I.

Que este sólido es compuesto de veinte triángulos equiláteros.

II.

Que todos los ángulos sólidos son formados por el concurso de cinco lados: en O, E se ve claro; en los laterales el circuito *a*, *i* vemos que cada ángulo sólido de los que terminan la base de la pirámide superior O, es formado por dos triángulos de la pirámide superior; otros dos que penden de estos, y caen ácia abaxo, y otro que viene de abaxo á introducirse entre los dos que estan pendientes. Lo mismo digo de *s*, y de los otros que terminan la base de la pirámide inferior E.

Nº 406. Luego *el icosihedro es un cuerpo regular, formado por veinte lados semejantes é iguales, &c.*

Si juntamos seis triángulos equiláteros (*Lam.* 14. *Fig.* 14.), como cada ángulo de los del centro es de sesenta grados, todos seis harán 360, que es el circuito de un círculo: de suerte, que si los juntamos el centro O no se puede levantar del plano, ni formar ángulo sólido.

Nº 407. Luego *con triángulos equiláteros no se puede formar cuerpo alguno regular, fuera del tetrahedro de quatro lados, del octahedro de ocho, del icosahedro de veinte.*

Vengamos ahora á los pentágonos para ver qué cuerpos sólidos podrémos formar con ellos, y juntemos tres pentágonos.

(*Lam.* 14. *Fig.* 15.) Para exâminar qué valor tienen sus ángulos, tomemos un pentágono, y tiremos desde un centro radios á sus ángulos. Los del centro *o*, como tienen por medida un quinto de la circunferencia, tendrán setenta ȳ dos grados por medida.

Pero cada triángulo tiene el valor de 180 grados: luego faltan para el valor de los dos ángulos, que cada triángulo tiene al rededor del pentágono lo que va de 72 á 180. Esto repartido entre los dos, á cada uno dará 54; pero si convertimos estos radios, que dividen el pentágono en triángulos, cada ángulo queda doble del que hacia la base del triángulo, esto es, duplo de 54, que viene á ser 108.

Luego *los ángulos del pentágono valen* 108.

Juntando ahora tres pentágonos A, *e*, *o* (*Lam.* 14. *Fig.* 15.), solo tenemos en A 324 grados en el valor que ocupan los tres ángulos, y aun falta el valor de 36 grados para completar la circunferencia de 360. Luego si juntasemos *e* con *i*, formarémos un ángulo sólido con tres lados de cinco ángulos.

Tomemos, pues, un pentágono de papel M (*Lam.* 14. *Fig.* 11.), y de sus cinco lados hagamos que se levanten otros cinco pentágonos iguales hasta unirse mutuamente en forma de una vandexa (perdónese la familiaridad de los términos, porque solo atendemos á la claridad, que es la que necesitan los principiantes): formemos otra vandexa semejante al rededor del pentágono N, y colocarémos una sobre otra, como se ve en la (*Lam.* 14. *Fig.* 6.). Pero en esta figura tenemos que observar

I.

Que todos los lados son semejantes, formados por ángulos planos, semejantes é iguales; pues todos son pentágonos iguales y semejantes.

II.

Que todos los ángulos sólidos son formados por tres lados: en los que se forman al rededor del pentágono superior M, y el inferior N, es manifiesto; pues los forma la base con los dos pentágonos, que se levantan como lados hasta encontrarse mutuamente, y los que se forman por el concurso de la mitad superior con la inferior, tambien se forman por un pentágono, que sube de abaxo para introducirse entre los que penden del que está encima, ó al contrario.

Nº 408. Luego *el dodecahedro es un solido regular, compuestò de doce lados iguales y semejantes.*

Si quisiéremos juntar quatro pentágonos para hacer con ellos un ángulo sólido, no podrémos; porque teniendo cada uno de ellos los ángulos de diez grados, quatro juntos harian la suma de 432, los que siendo mucho mas que la circunferencia del círculo, no pueden caber en el plano, y mucho ménos en el ángulo sólido, que para elevarse del plano debe tener circunferencia menor que la del círculo.

Nº 409. Luego *con pentágonos regulares no se puede hacer otro sólido que el dodecahedro.*

Si quisiéremos formar con exágonos algun cuerpo sólido, verémos que es imposible, porque (*Lam.* 14. *Fig.* 16.) juntando tres, tenemos 360 grados, pues cada ángulo del exágono regular contiene 120 por el núm. 98: Luego tres hacen 360, lo que es justamente la circunferencia del círculo; y así el punto de concurrencia no podria elevarse del plano para hacer ángulo sólido.

Si queremos valernos del eptágono, que quiere decir figura de siete ángulos, no podrémos hacer sólido alguno, porque si tres exágonos no pueden hacer ángulo sólido, mucho ménos podrán los eptágonos, cuyos ángulos son mayores.

Nº 410. Luego *no puede haber sólido alguno regular fuera de los que hemos dicho, esto es, cubo, tetrahedro, octahedro, icosahedro y dodecahedro; exceptúase la esfera, de la qual no hablamos aquí.*

Ahora, amigo Eugenio, ántes de poner término á estos elementos de Geometría, gobernado por la experiencia que tengo, quiero hacerte un epílogo de combinacion entre las razones de las líneas, de las superficies y de los sólidos, lo que te dará mucha luz; le añadiré á esta Carta, que ya tenia concluida.

EPILOGO

sobre la combinacion de las razones y proporciones de las líneas, superficies y sólidos.

§. I.

Nº 411. Diximos al núm. 139 que quando muchos términos estaban en proporcion, siempre iba reynando la misma razon entre todos ellos; de suerte, que entre dos términos inmediatos se hallará el mismo exponente de la razon.

Tambien diximos que un número multiplicado por sí mismo hacia el quadrado, v. g. 4 por 4 dará 16, que es el número quadrado de 4. Tambien diximos que este quadrado multiplicado otra vez por su raiz, ó por el número primitivo 4, formaba el cubo. Ahora bien, quando una cantidad se multiplica por sí misma para formar el quadrado, se dice que se eleva á la *segunda po-*

tencia; y quando se multiplica otra vez este quadrado por la raiz para formar el cubo, se dice que sube á la *tercera potencia*; quando todavia se multiplica el cubo otra vez por la raiz, se eleva ésta á la *quarta potencia*: si aun se multiplica de nuevo, sube á *la quinta potencia*.

Lo que es costumbre expresar así en Algebra: sea la cantidad simple ó raiz igual á A; el quadrado de A se expresa así $A \times A$, ó bien A^2: el cubo de A, ó la *tercera potencia* se podria expresar así $A \times A \times A$; pero es mas corto A^3; y del mismo modo la quarta potencia de A se expresa así A^4, y la quinta A^5.

Nº. 412. Aquí deben advertir los principiantes, que no es lo mismo 3 A que A^3, porque el número 3 ántes de A significa suma ó adicion, esto es, que la cantidad A se toma tres veces, siendo así que A^3 significa que la cantidad A no solo se multiplica una vez, sino que su producto se ha de multiplicar por A otra vez. Supongamos que A valga 4 palmos, 3 A significará 12 palmos, y A^3 significará 64 palmos, porque 4×4 vale 16, y 16×4 vale 64.

Nº. 413. En la Geometría podrémos dar figura sensible así de la *segunda potencia*, que es una superficie como de la tercera, que es un sólido; pero como no hay mas de tres dimensiones, no podemos dar figura sensible de la quarta, de la *quinta potencia*, &c.

Solo los números dan idea de esta multiplicacion, y no las líneas.

Esto supuesto, formando una progresion geométrica ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32: 64 : 128, &c., cuyo exponente comun es 2, ó el exponente de la razon es doble. Se ve claramente que para llegar el primer término al valor del segundo basta multiplicarle una vez por el exponente 2; mas para elevarle al valor del tercero es preciso multiplicarle otra vez por el mismo exponente; y del mismo modo para que se eleve al valor del quarto término es preciso tercera multiplicacion, por el mismo exponente de la razon que reyna. De esto se infieren varias conseqüencias:

I.

Que podemos decir, que la razon del primer término á su inmediato es el exponente simple, esto es, 2.

II.

Nº 414. Que la razon del primer término al tercero es un quadrado ó *segunda potencia* del exponente 2, esto es, 4.

III.

Nº 415. Que la razon del primer término al quarto es un cubo, ó *tercera potencia* del exponente 2, esto es, 8.

IV.

Nº 416. Que la razon del primer término al quinto es 2, elevado á la *quarta potencia*, esto es, 16.

V.

Nº 417. Que la razon del primer término al sexto es 2, levantado á la *quinta potencia*, esto es, 32, &c.

Nº 418. Supongamos ahora que formamos quadrados de estos mismos términos de la progresion, véase la (*Lam.* 15. *Fig.* 1.)

$$\div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 \text{ - - - razon - - - } 2.$$
$$\div\!\div\ 1 : 4 : 16 : 64 \text{ - - - razon - - - } 4.$$

La razon ó exponente que reyna en esta segunda progresion es 4, esto es, el quadrado del exponente que reyna en la primera; porque como diximos al núm. 164, en los quadrados hay la razon compuesta de la que habia entre las bases, y de la que habia entre las alturas; y como son iguales, y la razon compuesta de dos iguales es un quadrado de las simples, se sigue, N.º 419. Luego *en la progresion de los quadrados el exponente del primero al segundo es un quadrado del exponente simple.*

Pero entre el primer término de las raices y el tercero el exponente es un quadrado del exponente simple por el núm. 408; y entre el primer quadrado y el segundo el exponente tambien es el quadrado del quociente simple por el núm. 413.

N.º 420. Luego *en la progresion de los quadrados el exponente es el mismo que hay en la progresion de las raices, saltando un número.*

Hagamos ahora los cubos de las cantidades primitivas (*Lam.* 15. *Fig.* 1.)

∺ 1 : 2 : 4 : 8 - - - exponente 2 raiz.
∺ 1 : 4 : 16 : 64 - - - exp. 4 quadrado.
∺ 1 : 8 : 64 : 512 - - - exp. 8 cubo.

En esta tercera progresion el exponente que reyna es 8, esto es, un cubo del exponente primitivo 2; porque como ya diximos al núm. 409, el exponente que hay entre el primer término y el quarto de la primera progresion simple es un cubo del exponente simple; pero tambien diximos al núm. 164, que entre los cubos el exponente era compuesto de tres razones semejantes: por consiguiente es como el exponente del primer término al quarto de la primera progresion.

Nº. 421. Luego *entre el primer término y segundo de la última progresion el exponente es un cubo del exponente simple de la primera progresion.*

§. II.

Nº. 422. Otra cosa has de observar, Eugenio, y es que todo lo que son líneas, ó qualesquiera figuras semejantes, tienen entre sí la razon de las raices, esto es, del exponente simple, bien sea la proporcion aritmética ó geométrica; de suerte, que (*Lam.* 15. *Fig.* 2.) si en los círculos son los radios como 1, 2, 3, los diámetros son como 1, 2, 3, las circunferencias son como 1, 2, 3, los arcos de igual número de grados serán como 1, 2, 3, &c.

Nº. 423. Pero si comparamos superficies semejantes unas con otras, ya su exponente ó razon no es el exponente simple de las raices, sino que ha de ser este exponente elevado á la segunda potencia, esto es, el quadrado del primero, como diximos al núm. 412; y ese mismo exponente ha de reynar en todo quanto fuere superficie; y así (*Lam.* 15. *Fig.* 3.) si las líneas son como 1, 2, 3, los quadrados formados sobre ellas serán como 1, 4, 9, los triángulos como 1, 4, 9; y tambien en las pirámides, cubos, conos, esferas todo lo que fuere superficie será como 1, 4, 9.

Nº 424. Ultimamente si comparamos sólidos semejantes entre sí (*Lam.* 15. *Fig.* 3.), el exponente no será, ni el de las raices, ni el de las superficies, sino el de los cubos, esto es, ha de ser un cubo del primer exponente; y si las líneas que les pertenecen, esto es, los diámetros ó periferias eran 1, 2, 3, sus volúmenes serán 1, 8, 27, porque el cubo de 1 es 1, el de 2 es 8, el de 3 es 27; de forma, que así como en los círculos distinguimos el area ó campo de la circunferencia que los cierra, y decimos que las superficies ó areas son como 1, 4, 9; pero que las líneas de la circunferencia siempre son como 1, 2, 3, conforme á los radios ó diámetros, así ahora en los sólidos no hemos de confundir los volúmenes con las superficies que los contienen; y por consiguiente si los radios de una esfera (*Lam.* 15. *Fig.* 3.), ó los lados de varios cubos fueren como 1, 2, 3 todo lo que sea línea, en esos sólidos semejantes será como 1, 2, 3, esto es, altura 1, 2, 3, lados, como 1, 2, 3, &c. mas todo lo que fuere superficie, v. g. base, cara, &c. serán como 1, 4, 9, y el peso ó volumen, ó el espacio comprehendido dentro de la superficie total serán como 1, 9, 27.

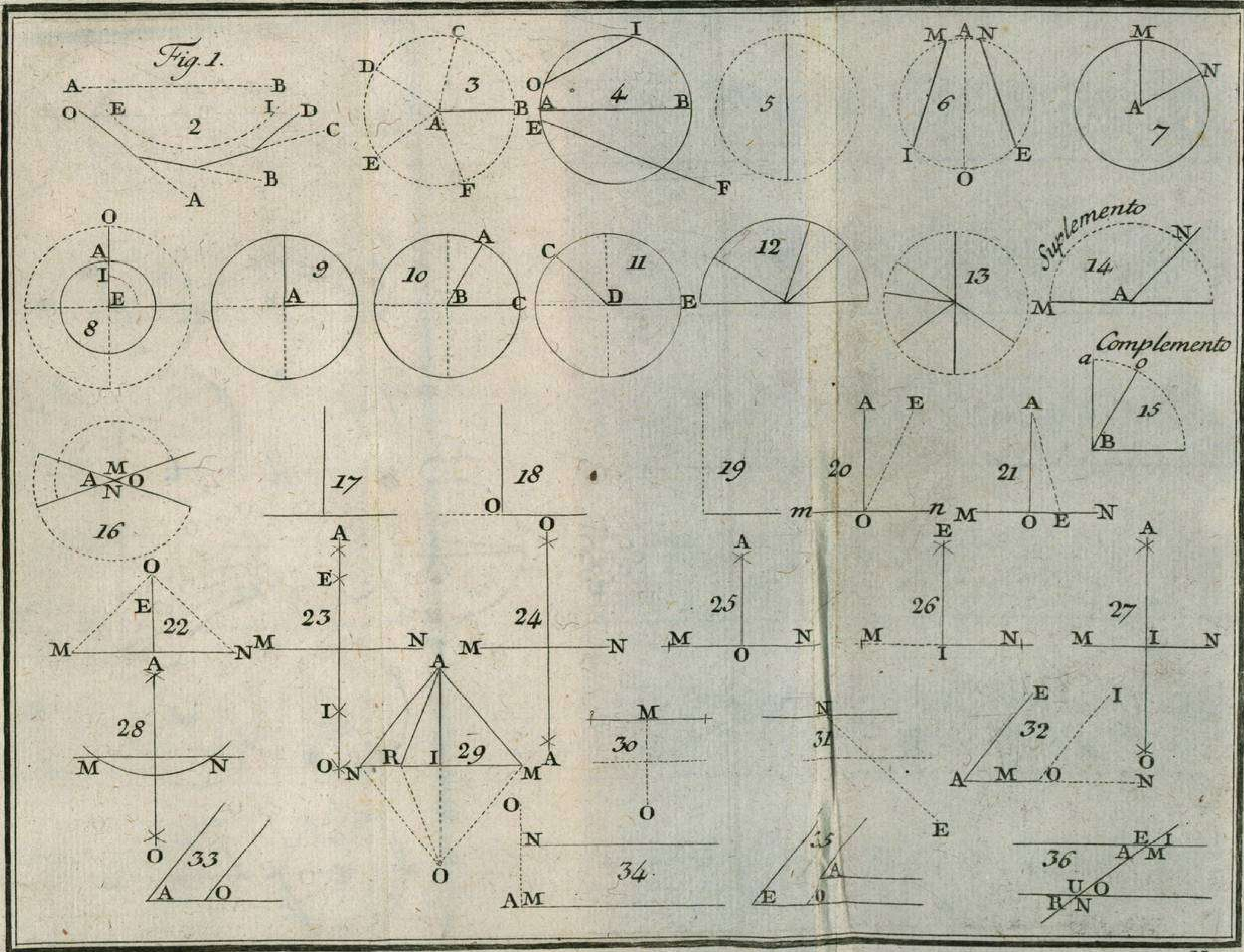
Nº 425. De aquí se sigue que en los sólidos semejantes todas las líneas correspondientes estan en la razon simple.

Todas las superficies en la razon de los quadrados.

Todos los volúmenes, ó el peso del sólido en la razon de los cubos.

Ve aquí, amigo Eugenio, lo que me ha parecido suficiente para inteligencia de la Física, que deseas saber, y que yo te iré enseñando en varias Cartas que te escribiré, conforme á lo que tengo prometido. (*)

(*) *En vez de enseñar por Cartas compuso el P. Almeyda una Física completa en tres tomos en octavo mayor, de los quales ya está el primero traducido, é impreso.*



Navia sc.

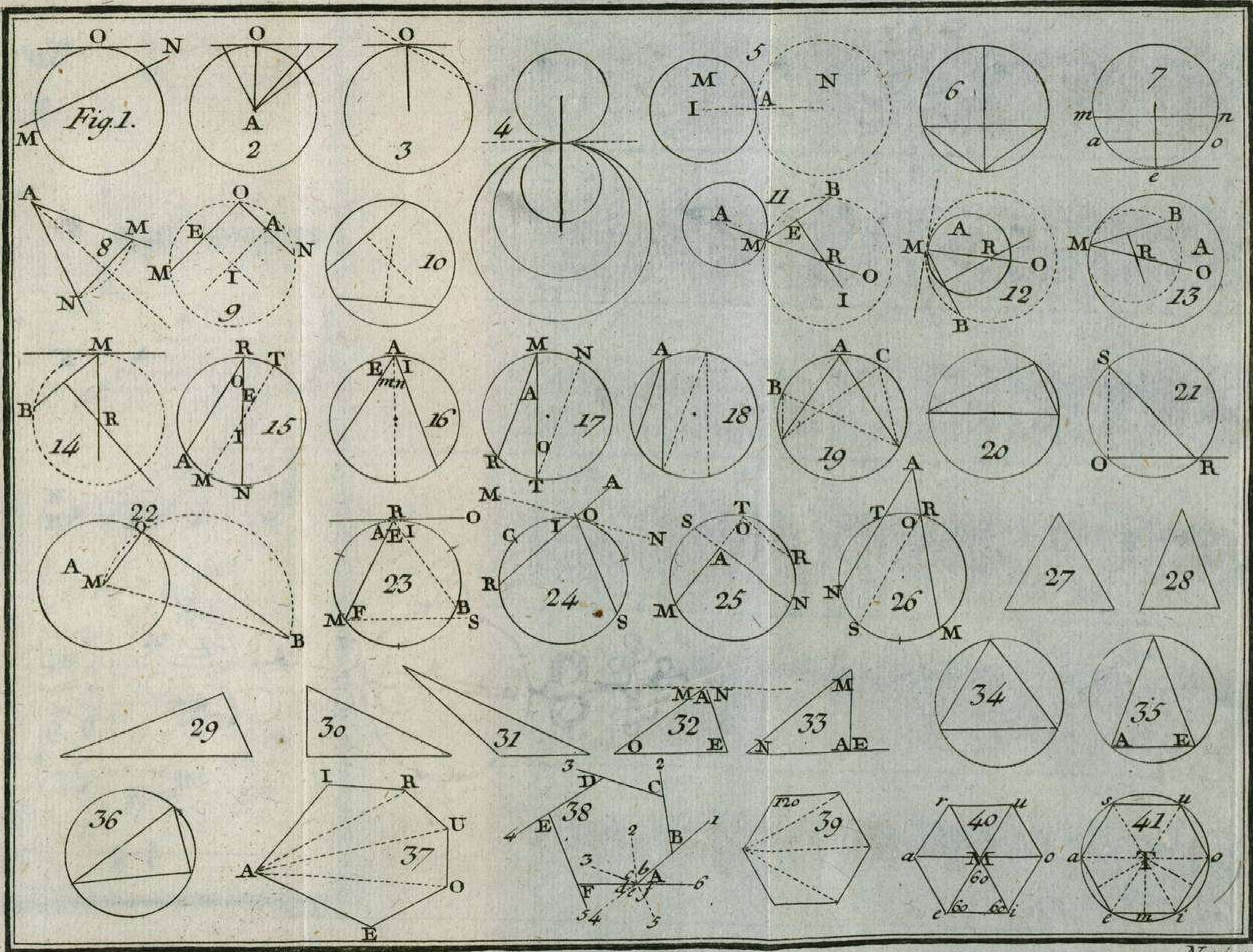
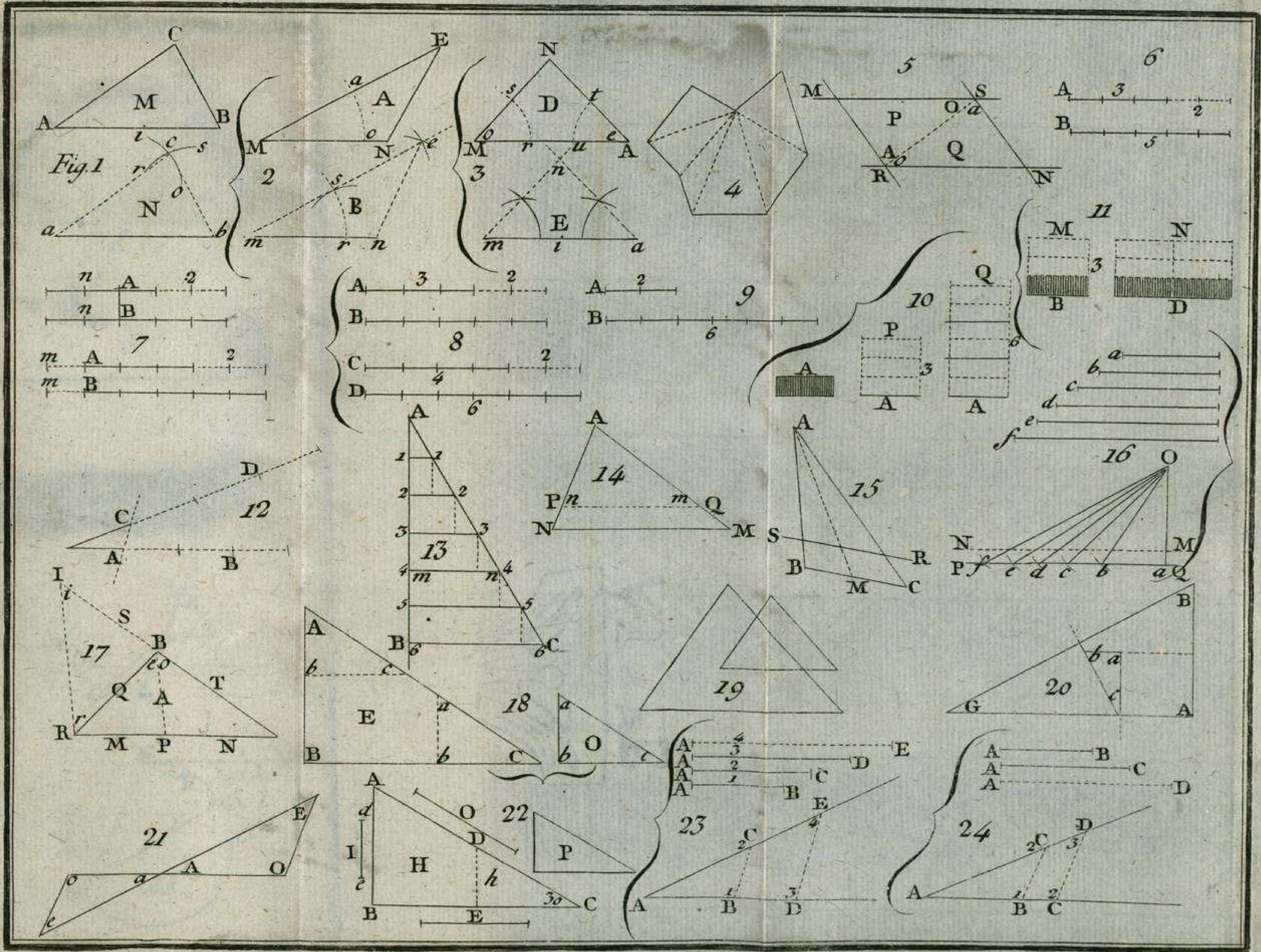
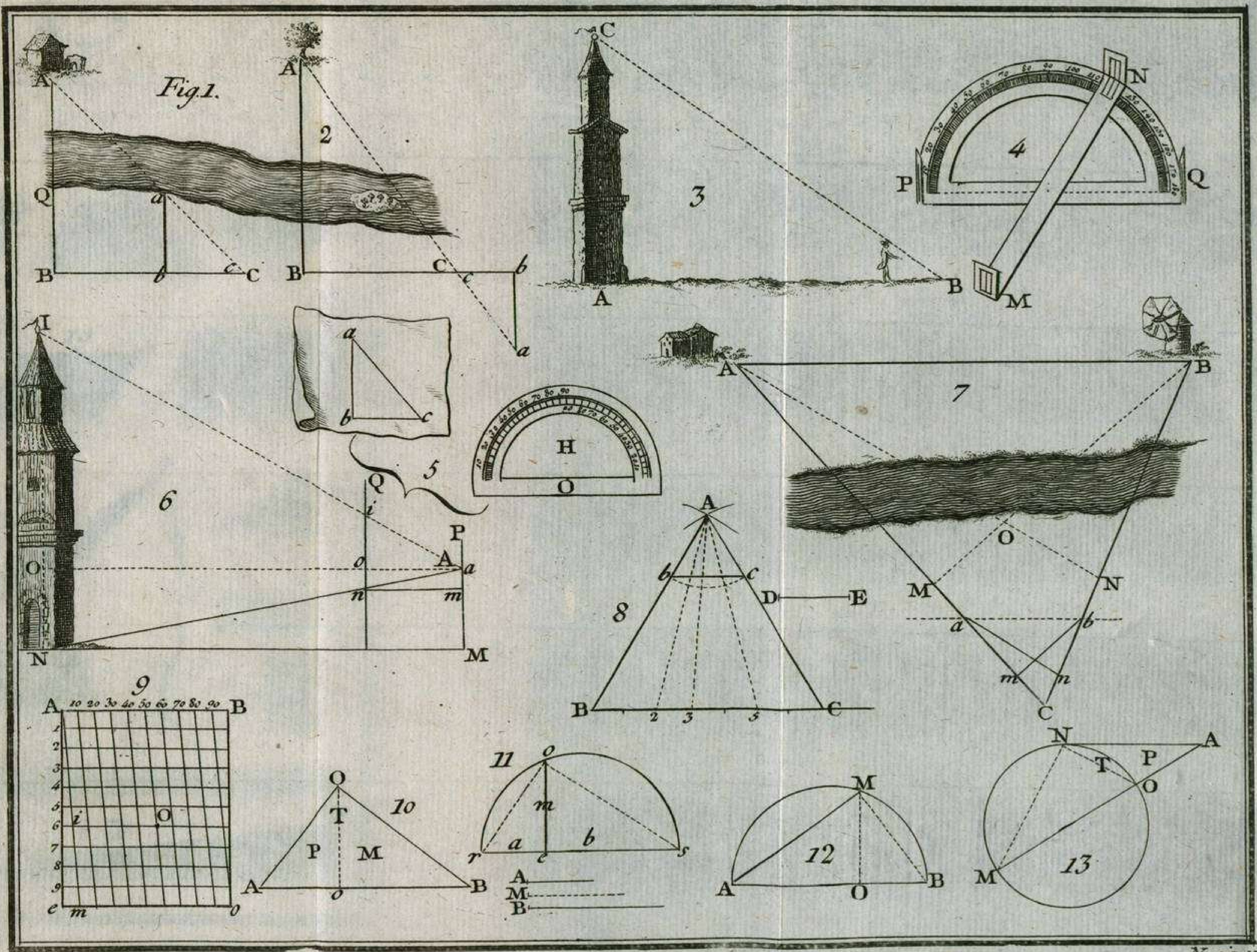


Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41

Navia sc.



Navia sc.



Navia sc.

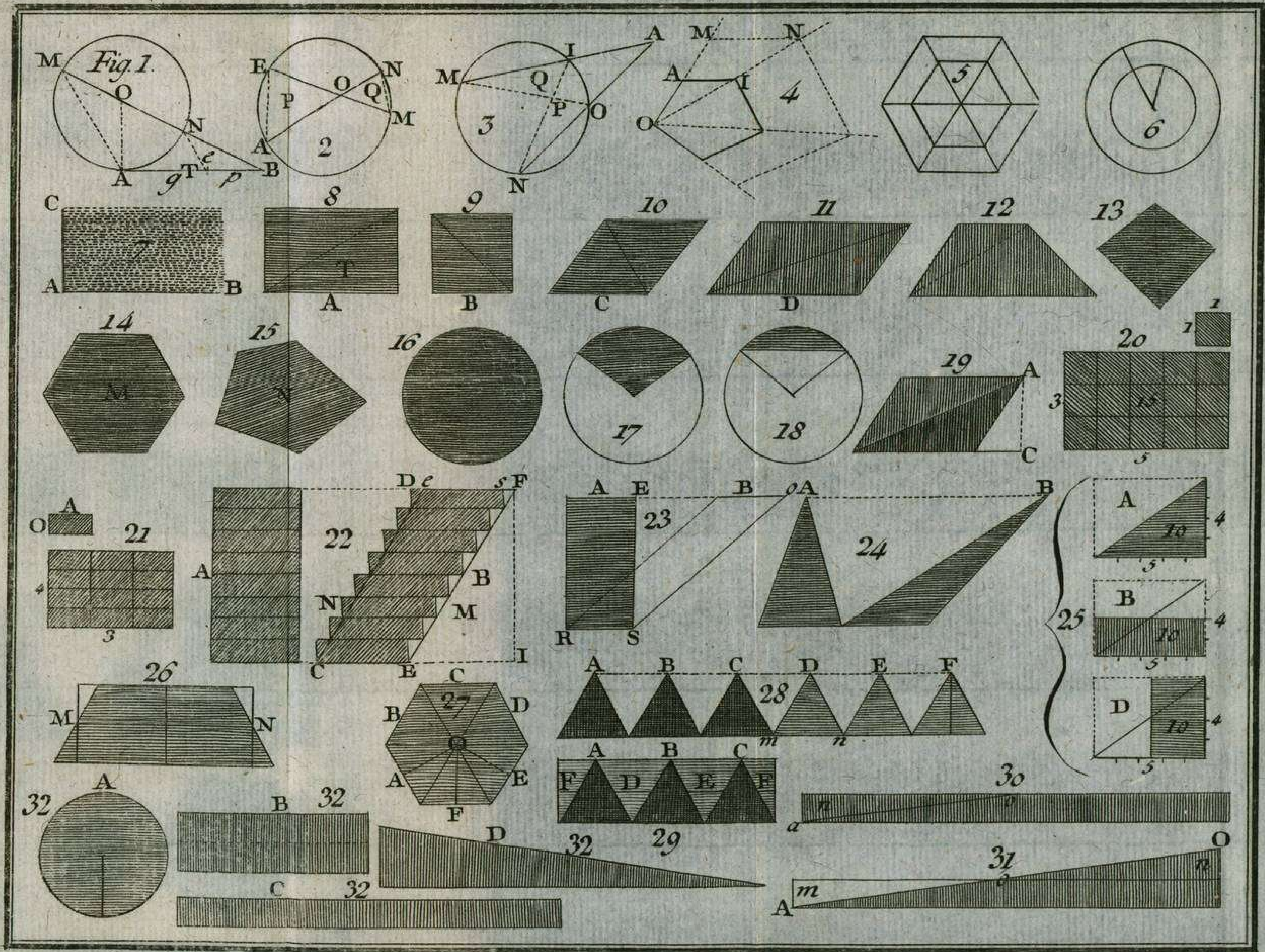
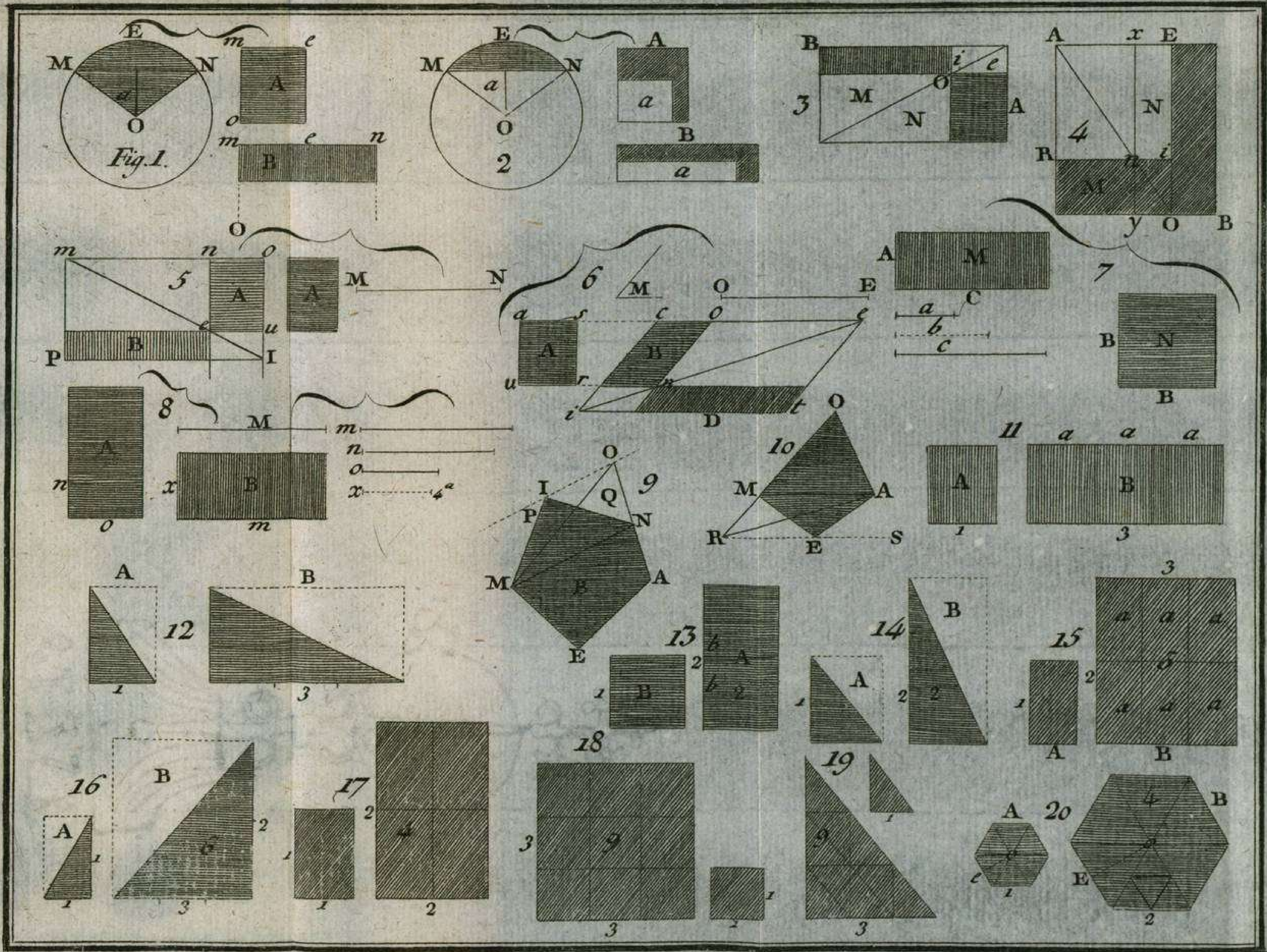


Fig. 1.
M O N A T B g e p
E N O Q P M A 2
A I M Q P O 3 N
M N A I 4 O
5
6
C 7 A B
8 T A
9 B
10 C
11 D
12
13
14 M
15 N
16
17
18
19 A C
20 1 1 3 15 5
A O 21 4 3
22 D e s F A B N M C E I
A E B 23 R S
o A B 24
25 A 10 4 5 B 10 4 5 D 10 4 5
26 M N
C 27 B D O A E F
A B C D E F 28 m n
A B C F D E F 29
30 n o a
31 O n m e A
32 A B 32 D 32 C 32

Navia sc.



Navia sc.

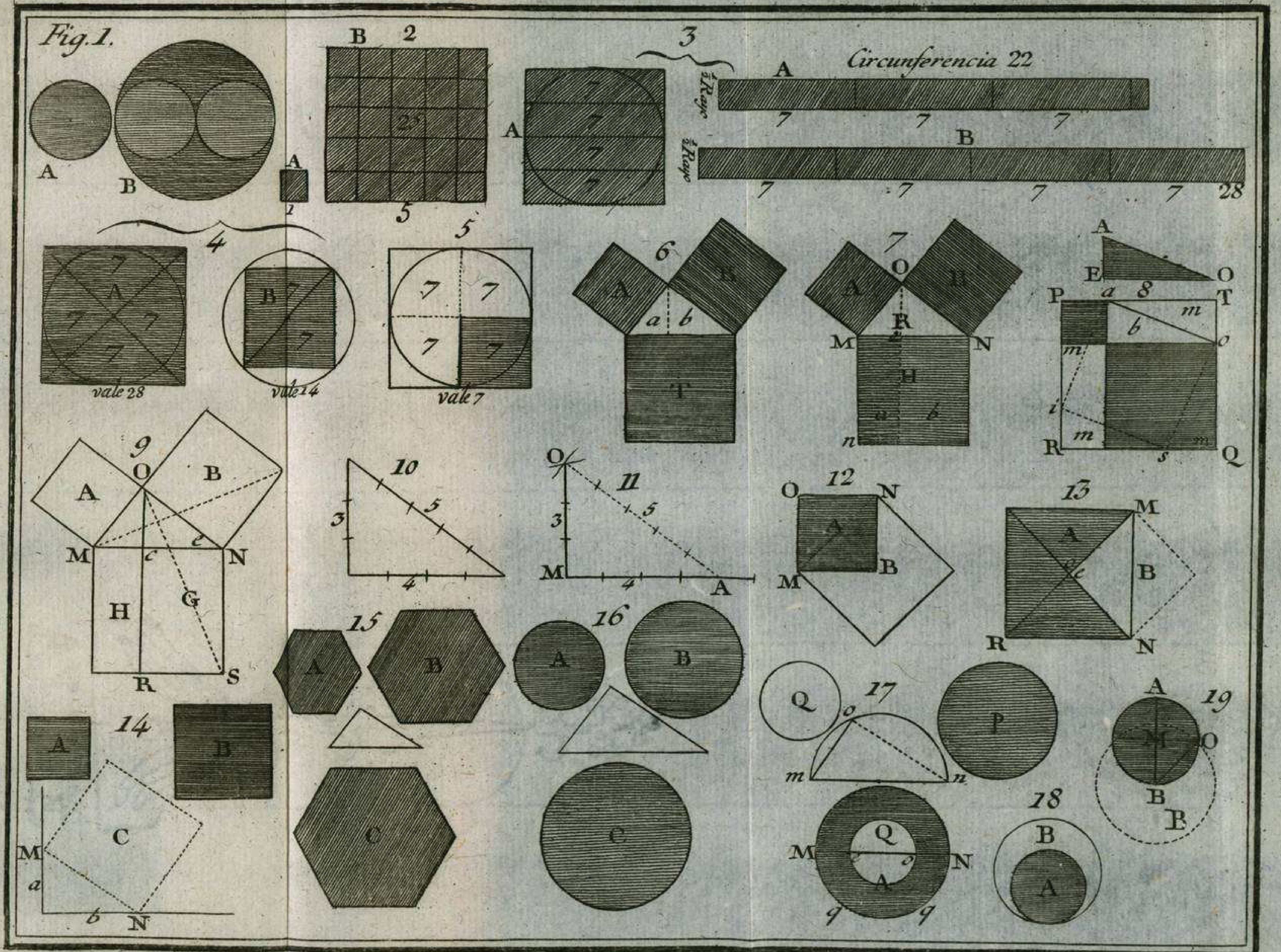


Fig. 1.
2
3
Circunferencia 22
½ Rayo
28
4
5
vale 28
vale 14
vale 7
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19

Navarro sc.

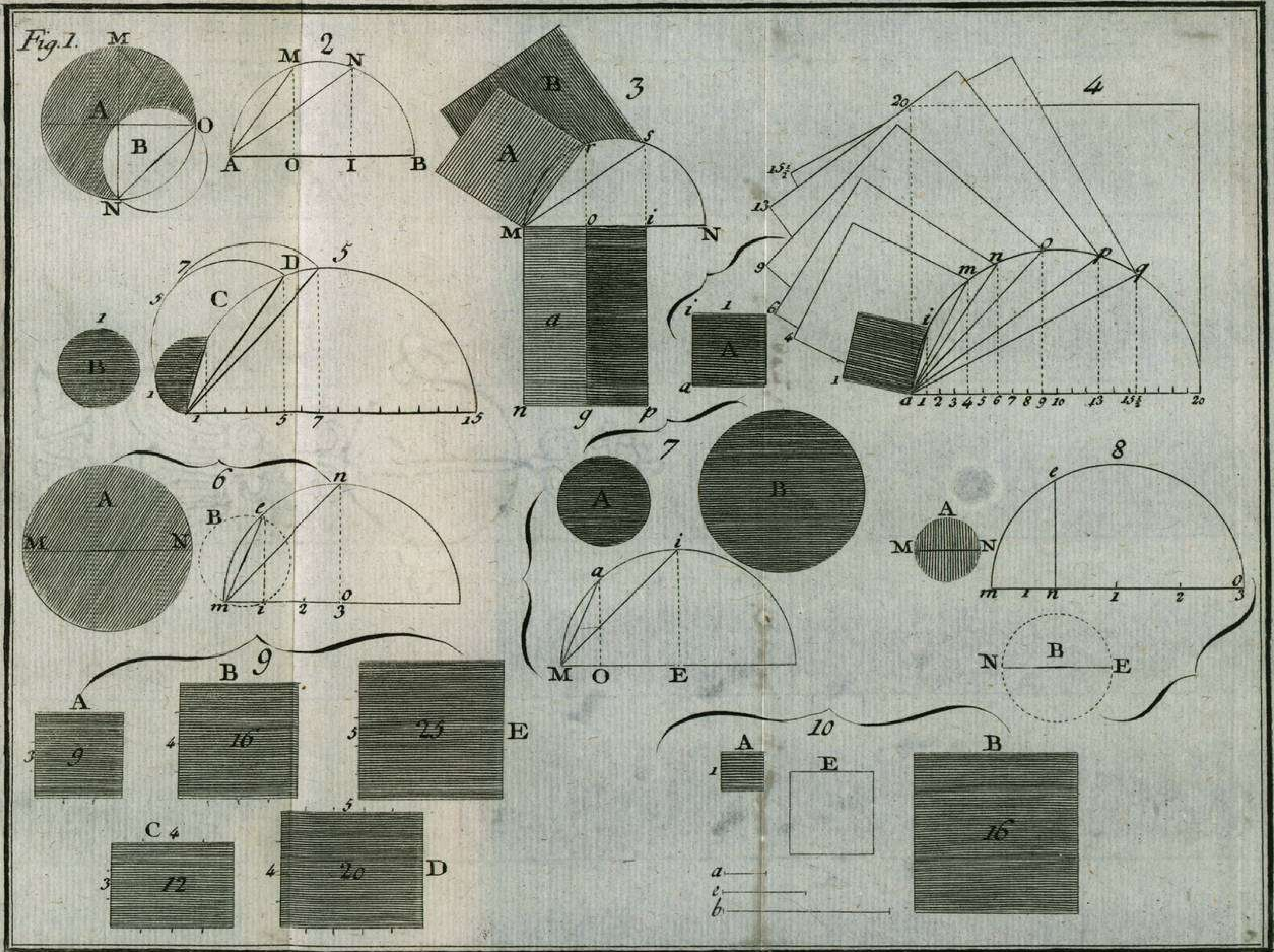


Fig. 1.
M
A
B
O
N
2
M
N
A
O
I
B
3
B
A
r
s
M
o
i
N
a
n
g
p
4
20
15½
13
9
6
4
1
i
m
n
o
p
q
a 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 13 15½ 20
i
1
A
a
5
7
D
C
5
1
B
1
1
5
7
15
6
A
M
N
B
e
n
m
i
2
3
o
7
A
B
i
a
M
O
E
8
A
M
N
e
m
1
n
1
2
3
o
N
B
E
9
A
9
3
B
16
4
25
5
E
C 4
12
3
5
20
4
D
10
A
1
E
B
16
a
i
b

Navia sc.

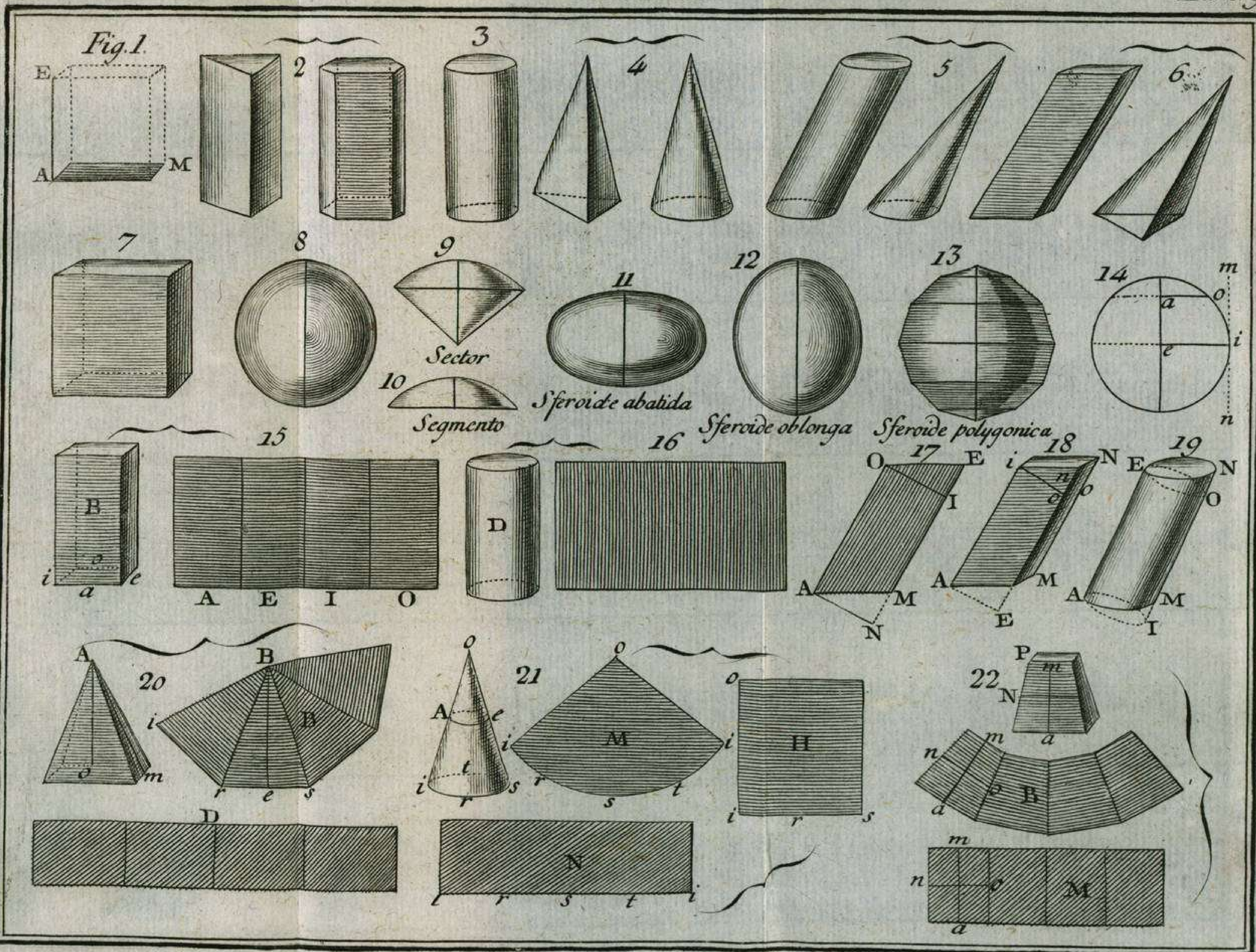


Fig. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
Sector
10
Segmento
11
Sferoide abatida
12
Sferoide oblonga
13
Sferoide polygonica
14
15
16
17
18
19
20
21
22
A E I O
B
D
H
M
N

Bausa cf.

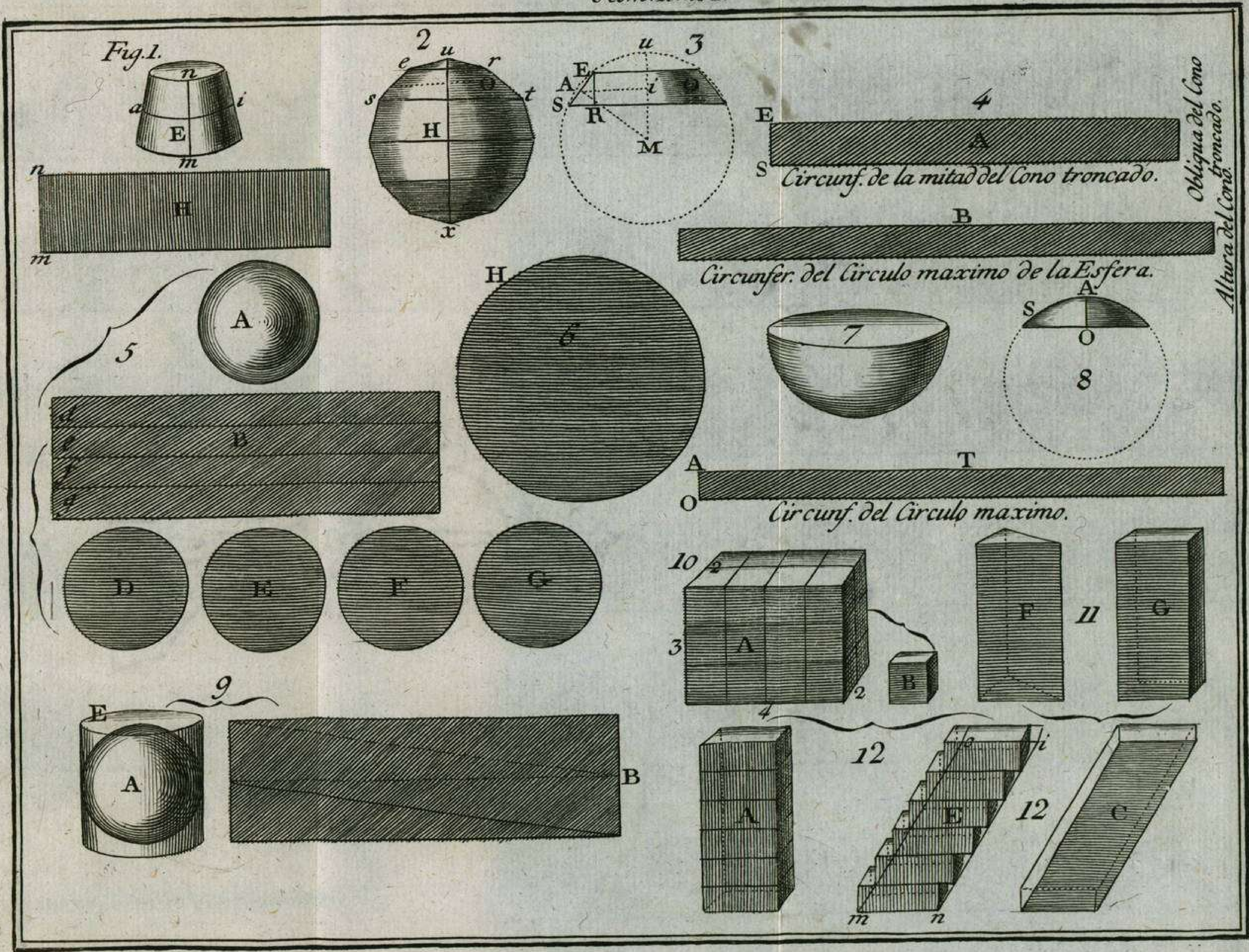


Fig. 1.
2
3
4
Circunf. de la mitad del Cono troncado.
Obliqua del Cono troncado.
Altura del Cono.
Circunfer. del Circulo maximo de la Esfera.
5
6
7
8
Circunf. del Circulo maximo.
9
10
11
12

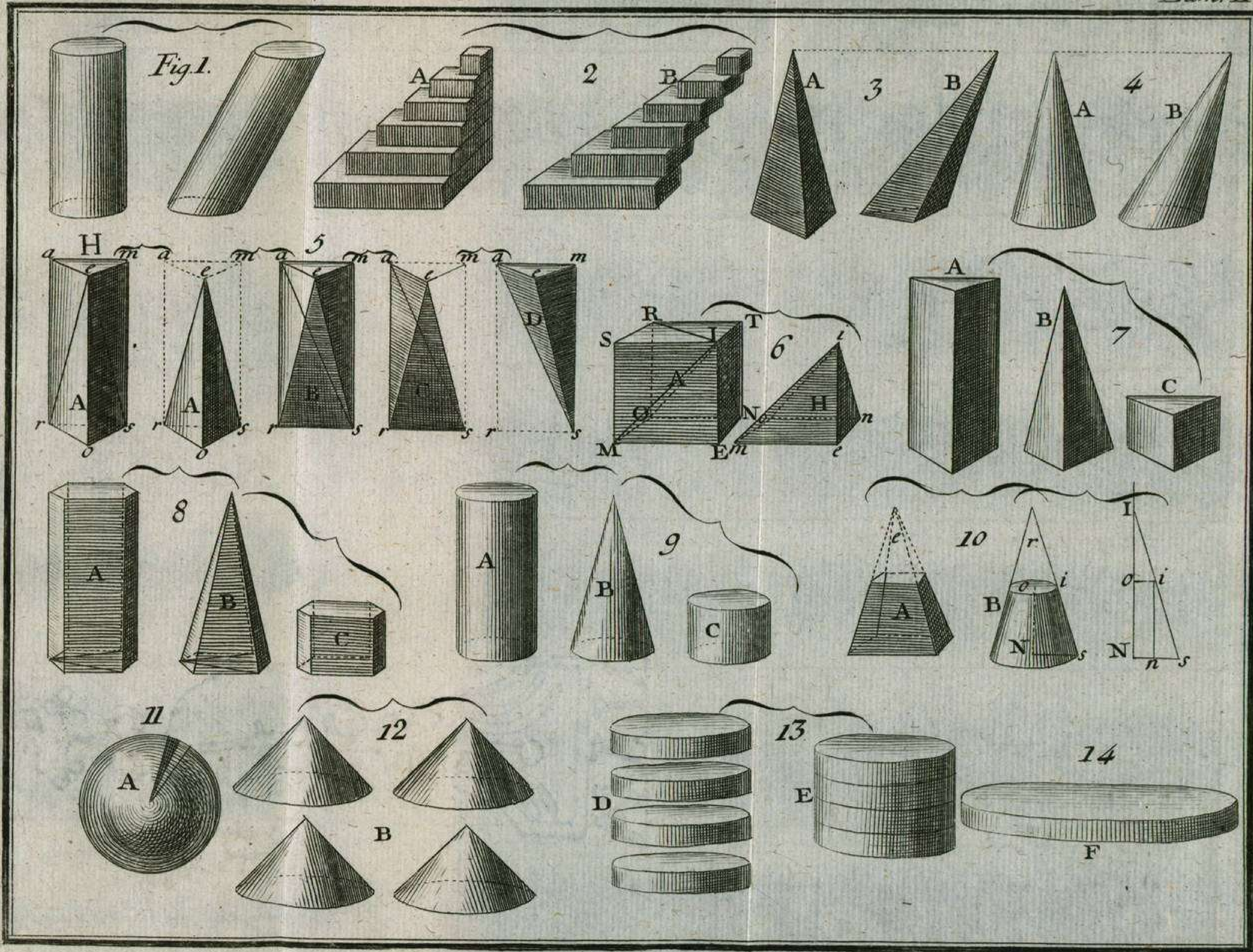


Fig.1.
2
A
B
3
A
B
4
A
B
H
5
a m a m a m a m a m
e
A
A
B
C
D
r o s r o s r s r s r s
6
R
T
S
I
A
O
N
H
i
n
M
E
m
e
7
A
B
C
8
A
B
C
9
A
B
C
10
e
A
r
o
i
B
N
s
I
o
i
N
n
s
11
A
12
B
13
D
E
14
F

Navia sc.

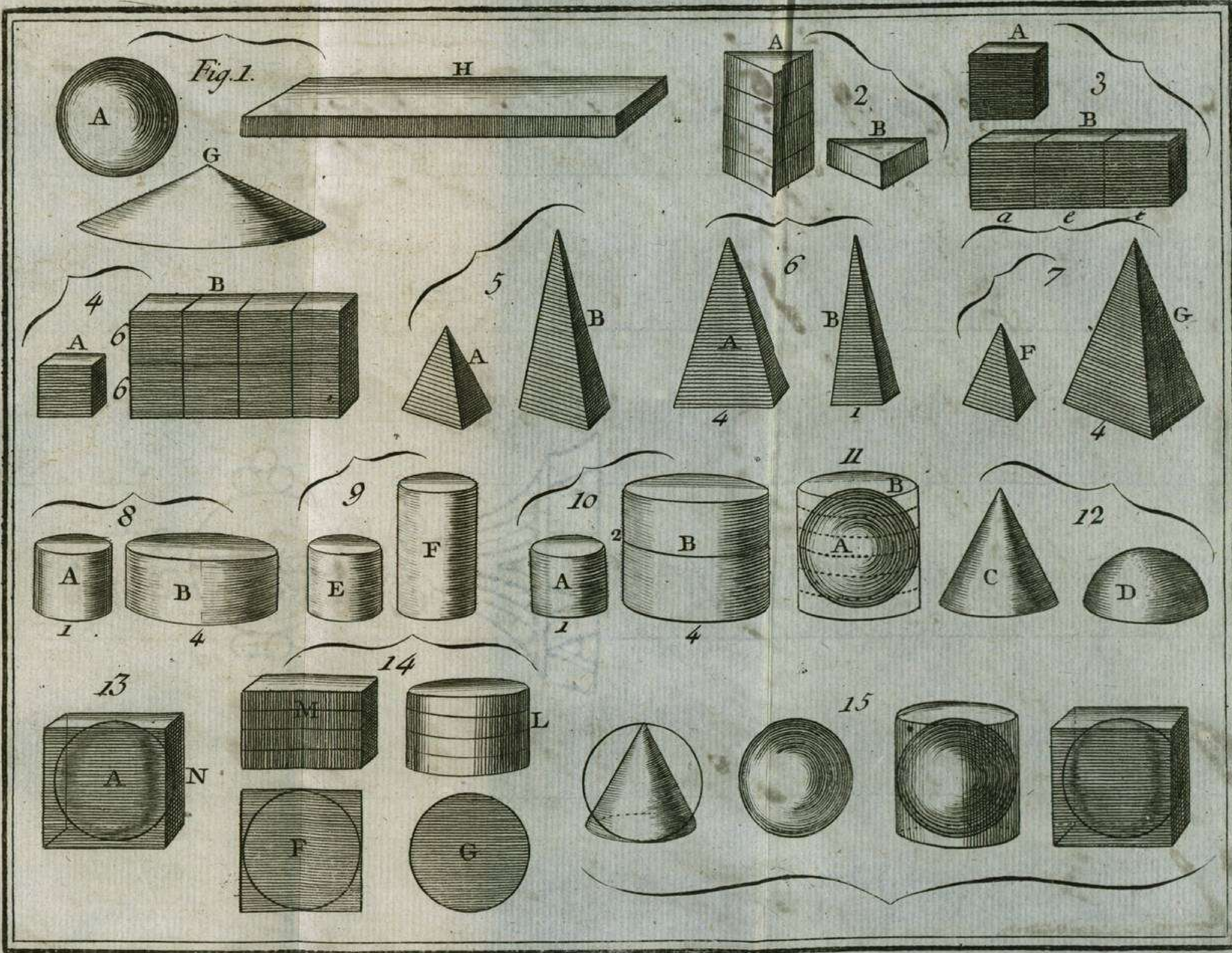


Fig. 1.
A
H
G
A
2
B
A
3
B
a e i
4
A
B
6
6
5
A
B
6
A
B
4
1
7
F
G
4
8
A
B
1
4
9
E
F
10
A
B
2
1
4
11
B
A
12
C
D
13
A
N
14
M
L
F
G
15

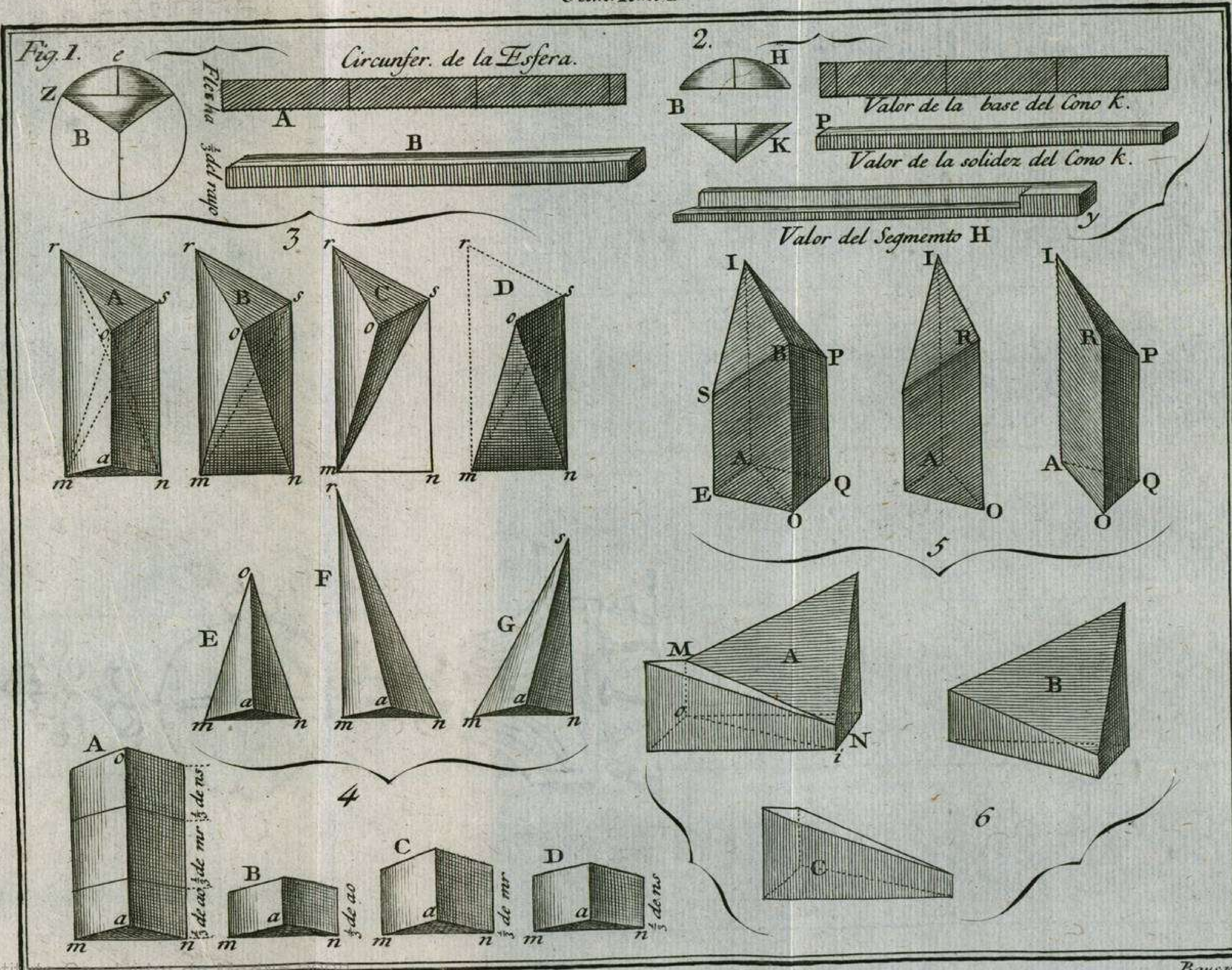
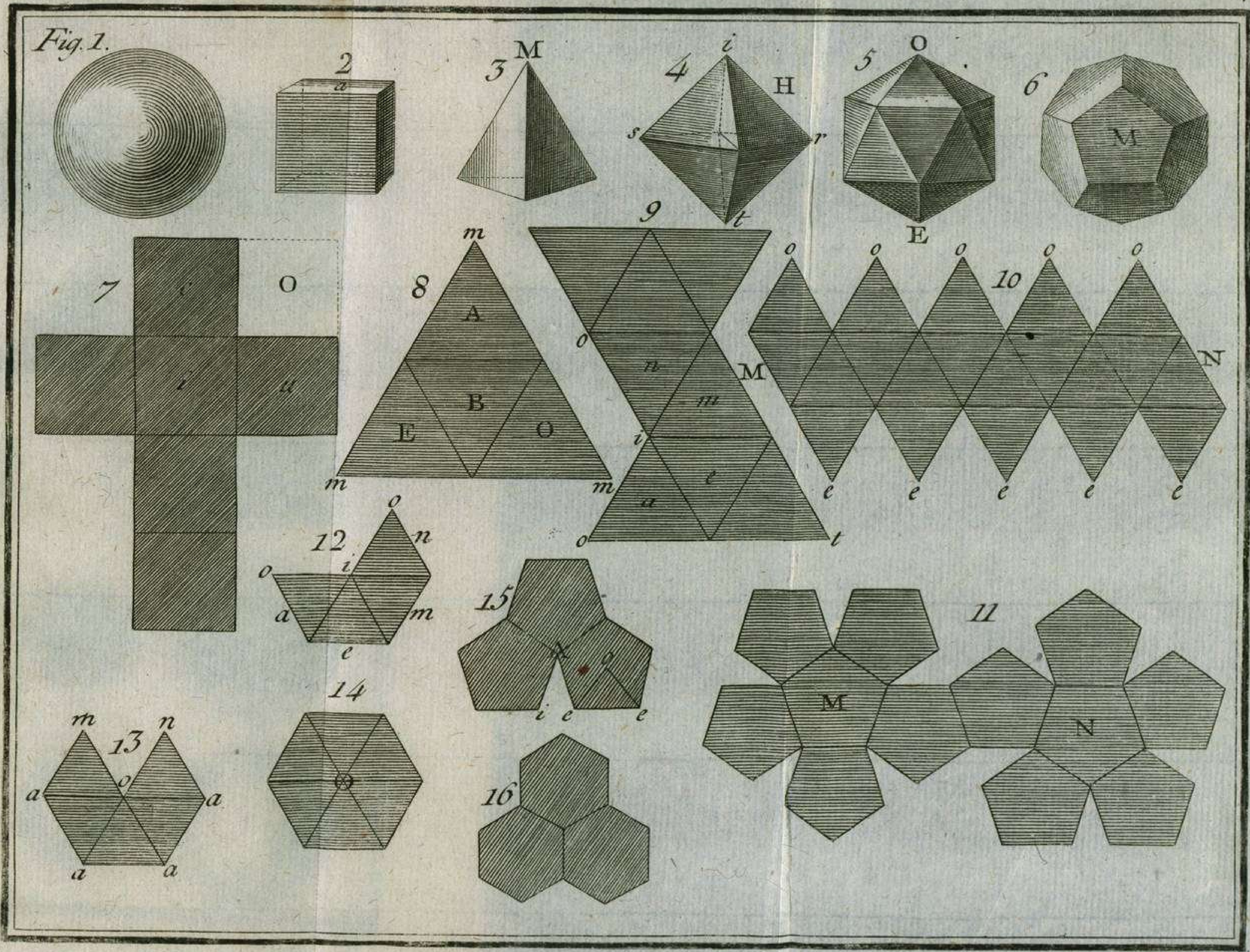
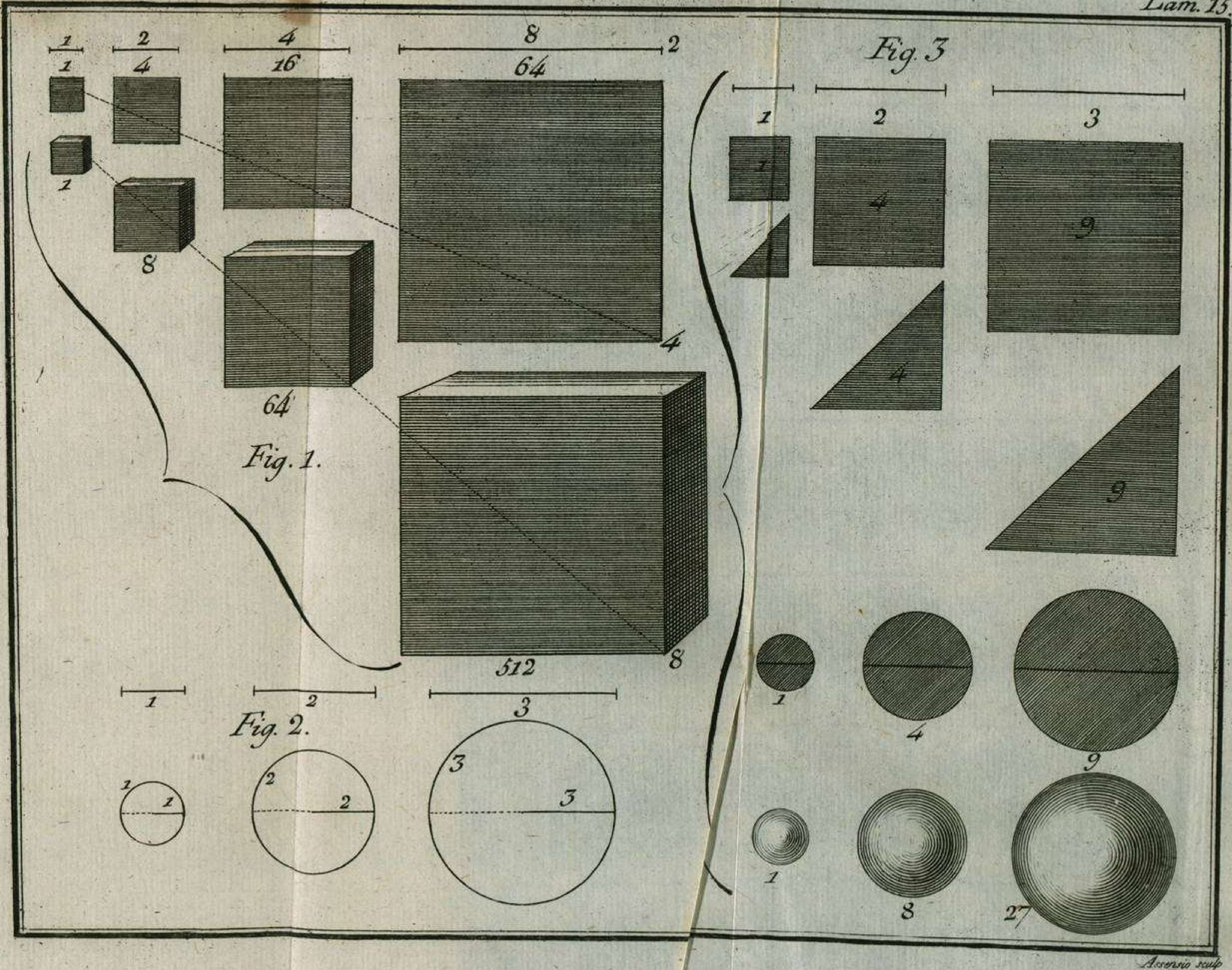


Fig. 1.
Circunfer. de la Esfera.
Flecha
⅓ del rayo
2.
Valor de la base del Cono K.
Valor de la solidez del Cono K.
Valor del Segmemto H
3
4
5
6

Bausa sc.



Assensio sculp.


1
1
2
4
4
16
8
2
64
1
8
64
4
512
8
Fig. 1.
Fig. 2.
1
2
3
3
1
1
2
2
3
3
Fig. 3
1
2
3
1
4
9
4
9
1
4
9
1
8
27
Assensio sculp

ALMEID
CARTAS
FILOSOF

TOM
I