12.

1

Curso Mathematico expli
cado Por el R.mo P.e M.ro
Pedro de Ulloa; Cathe-
dratico de Mathematica
en el colegio ymperial de
esta Corte

año 1703. =

Lib. 1º. Elementos Mathematicos

La Mathematica es Vna ciencia, que tiene por objeto à todo aquello, que comparado con otra cosa de su misma naturaleza se puede llamar igual, ò desig. Mayor, ò Menor. Vg.ª el espacio, el numero, la grauedad, la celeridad, el sonido, el mouimento, el tiempo &c.ª De donde viene à ser, que el objeto de la Mathem.ª es todo aquello, que puede medirse, ò contarse; y como todo lo que se puede medir, y contar es cantidad inteligible capaz de augm.to, ò decremen.to Viene a ser que su objecto es la cantidad inteligible que puede augmentarse, ò disminuirse. Esta cantidad si se señalan, ò consideran sus terminos se llama finita: pero si no se señalan, ò si se considera sin considerar los se llama infinita, ò Indefinita.

Tres son los principios sobre q. estriba esta insigne y protentosa maquina. Y son definiciones, Axiomas, y Peticiones. en las difiniciones se Estableze, lo q. se quiere significar por algunas Vozes dela facultad. los Axiom. son Unas Verdades tan ciertas, tan claras y Evidentes, que solo el proponerlas es obligar al entendim.to á conceder su Verdad. En las Peticiones se pide haz lo q. manifiestam.te se reconoce, que puede hazerse.

En las proposiciones Mathematicas se án de distinguir cuidadosam.te cinco cosas, que suelen concurrir en ellas. Lo 1.o es el titulo, que con las menos palabras que se pueda, Exprese lo que se ha de demostrar. Lo 2.o la Declaracion, ó Hypotesis de lo que se propone en el titulo: y esta declaracion, por la breuedad suele introduzirse en el mismo titulo entre parentesis. Lo 3.o la Construccion, que es lo que se manda hazer para executar lo que

se pide.

se pide, que se aga.

Lo 4.° la prevencion, q.
es hazer alguna cosa, de las, que ya que=
dan asentadas poder hazerse para pro=
ceder conmas claridad en la Demostr.
que es lo 5.° que debe considerarse, que es
Vno, ò muchos argumentos sacados
los Vnos delos otros, y fundados sobre
los principios ia asentados para probar
clara, è inuenciblem.te alguna proposicion
y euitar assi toda suerte de objeciones
En la demostracion no obseruan los
Mathematicos la forma sillogistica,
Philosophica, porq. en todo procuran, y ams.
afectan la breuedad.

Diuidieron los antig.
las proposiciones Mathematicas en theo=
remas, y Problemas. Llaman theorem.s
à aquellas proposiciones especulatiuas, q.
expresan las propriedades de alguna cosa,
y la demostracion de tales proposiciones
se remata en estas palabras Q. H. D.

q̃ quiere decir loque se auia de de
mostrar.

llaman problemas á aquellas proposi=
ciones, o questiones enque se propone exe=
cutar alguna cosa, con alguna, ò algũ.
condiciones, demostrando la practica
ỹ modo de hazerla, y disponerla
segun los principios precedentem.te Zandad:
ỹ la demostracion destas proposiciones
se se nota enestas letras Q.H.H. que
quiere decir loq̃ se auia dehazr.

Lema se
llama una proposicion menos princip.al
ỹ como accesoria, hora sea theorema-ti.
hora sea problematica laqual sirve
para la demostracion, que principalm.te
se busca. Corolario, ò Consectario es
una pp.on que naturalm.te se deduce
delo ya demostrado. Scholio es una
reflexion, consideracion, ò aduertencia
que se haze sobre alguna pp.on ya de=
mostrada, ò alas materias, que frisan
con

Tonella. Verdad es, que tambien ai Stolios sobre las difiniciones, y otros principios.

Supuestas estas Noticias porq la Cantidad inteligible se divide en Numero, y Magnitud; y assi en la Magnitud, como en el Numero considera la Mathematica su Razon. su Proporcion, y su Potencia. Y en la Magnitud Especialm.te su Situacion enorden al Espacio. esto es, que esté dentro, ó fuera de otra Magnitud; que esté en Cima, ò debajo &c.a todo loqual se llama Posicion dela Magnitud, Se dividirá este Tratado en dos par.tes En la primera se pondran los principios q pertenecen ala Razon. proporcion y Potencia dela Cantidad en comun. En la 2.a loq sirve para el conocimiento dela Posicion dela Magnitud

Primera Par.te

Primera Parte

Definiciones

Definicion 1.a

Numero unas veces significa el aggregado de muchas cantidades, otras aquello porloque se responde à esta pregunta Quantas cantidades aì? En el primer sentido, Lo primero la unidad no es Numero; lo segundo el Numero se llama Cantidad Discreta porque las partes, deque se compone estan desunidas.

desunidas, aunque sea con imaginaria desunion.

Scholio.

Numero 1.o para Explicar brebe y compendiosamente la innumerable variedad de cantidades discurrieron varias Notas. las mas naturales son unos Puntos enesta forma . . . (tres) ⁝⁝⁝ (nueve) pero entre todas las mas commodas son unas barbaras Zyfras, cuia invencion vulgarmente se attribuye alos Arabes. y son 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

N. 2. Estas pocas Zyfras.

Zyfras, que llaman Numeros Digitos
sirven para Expresar qualquier Mul=
titud de quantidades, supuesta la
Commun Convencion en la Ley, que
Estableció su inventor primero, de que
el valor de cada uno de ellos fuese
el siguiente

1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9.
uno. dos. tres. qtro. cinco. seis. siette. ocho. nueve.

Pero que acompañadas unas con
otras, ó acompañada alguna, ó algunas
dellas azia la mano derecha del q.
las mira con esta 0 que sellama Zero
y sirve para mostrar los lugares vacios
la q. esta enla 2.a valga tantas decenas.
la que esta enel tercero lugar. tantas
centenas; la q. en 4.o tantos millares; la q.
en 5.o tantas decenas de Millares; la que
en 6.o tantas centenas de millares; la q. en 7.o
tantos quentos, ó Millones, la q. en 8. tantas
dezenas de quentos. la q. en 9. tantas cente=
nas de quentos &c.a quantas unidades

significa cada una de por si procediendo siempre por diez, ciento, mil.

N.º 3º de lo dicho se infiere lo 1º. la razon, y origen de expresar qualqr. nº. dado con estas notas. Rg. si se quiere expresar el año de mil, setecientos y uno, consta de lo dicho, que la pª. nota de la mano derecha ha de ser 1. la de el segundo lugar ha de ser .0. porq. el nº. dado no tiene esse lugar; la del 3º. lugar ha de ser 7. ; la del 4º. ha de ser 1. y escritas estas notas assi 1701. quedara expressado el dado numero.

Nº 4. infierese lo 2º. la razon y el origen de pronunciar qualqª. multitud destas acompañadas unas, con otras como la siguiente.

IV III II I
8935478900347516934552783

En la qual para mayor facilidad, empezando por la mano derecha debaxo de cada quarta nota se pondra un punto

incluyendo

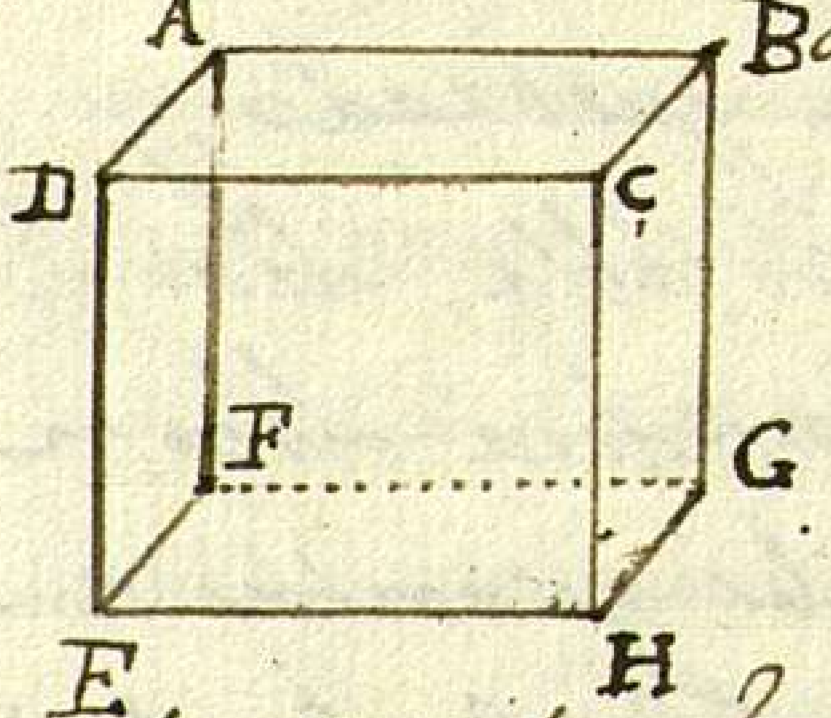
Incluiendo siempre la que ia queda apun-
tada, y sobre cada segundo punto
se pondran unas virgulillas, q. una,
, despues dos, despues tres etª. y estas de-
notaran los millones, bimillones, trimi-
llones etª. ô quentos. biquentos, triquen-tos
etª. y aquellos puntitos de debaxo. los
millares intermedios. El reglon pues
propuesto empezando â leerle por la
mano izquierda del que le mira, q.
es como leen semejantes reglones impor-ta
ocho quatromillones, o quatriquentos etª.

Debe notarse aquí, que quando el
nº propuesto se expresa solo con una
ô algunas notas puestas las unas sobre
las otras, y en medio una raita assí
$\frac{3}{3}$, ô $\frac{25}{4}$ ô $\frac{4}{24}$ se lla ma nº quebrado, y
entonces se supone, q. se abla, de algu-na
quantidad, que se considera dividida
en tantas partes iguales quantas con
sus unidades expresa el nº de abaxo
el qual por esso se llama denominador

del quebrado; y quando el Numerador es menor, que el denominador el quebdo es proprio; pero quando es, ò ygl. ò mayr. se llama quebrado improprio

Definicion 2a

Magnitud es una quantidad, cuyas partes estan continuadas, y unidas. aunq sea con imaginaria union: por esto la Magnitud se llama quantidad Continua. El punto pues, q es una señal, que se considera en la Magnitud, (prescindiendo si tiene, ò no tiene partes) no es Magnitd: bien, que es principio de toda Magnitud, porq si se imagina, que el punto A. se mueve azia B. describira con este movimto la Magnitud AB, la qual



tiene solo una dimension esto es tiene longitud sin latitud, ni profundidad, ò altura, por lo menos en la consideracion, y esta se llama linea. Y si toda la linea AB. se imagina, que

se mueve

se mueve de suerte, que sus extrem. puntos A. B. describan otras lineas Bc. y AD. describirà con su movim.to la Magnitud ABCD. que mas breved.e suele expresarse por las dos letras oppuestas AC. ò BD. Esta Magnitud, la qual se llama Superficie tiene dos dimensional. porq. tiene longitud, y latitud, pero no profundidad, ò altura, por lo menos en la consideracion; y de sus dimensiones la mayor AB. se llama longitud, y la menor AD. se llama latitud, y qualquiera de sus lados suele llamarse Base. Ultimadam.te si toda esta superficie AC. se imagina, que se mueve, azia abajo, ò azia arriba, de suerte, que sus puntos A.B.C.D. describan otras lineas AF, BG. CH, DE. y por consiguien.te cada una de sus lineas otras superficies describirà con este movim.to otra Magnitud de tres dimensiones, ò q. tiene longitud AB, latitud AD. y profundidad DE. si se

mira desde arriba, ò altura &c. si se
mira desde abaxo: Esta Magnitud se
llama Cuerpo, ò Solido, y se Expressa
con las letras oppuestas AH., ò BC &c.
Y qualquiera destas Superficies puede
llamarse Base. Segun la Variedad
pues del Movim.to del punto, linea, y
Superficie se produciran varios generos
de lineas, Superficies, y cuerpos: El cuerpo
con su Movim.to solo produce Cuerpo
maior, q̃ el; pero no Magnitud, que
tenga mas dimensiones; porq̃ solo estas
tres se reconocen en la Naturaleza
y en ellas se han de resolver qualquiera
otras, que se consideren. Siendo el ter=
mino el Extremo de qualquiera Cosa
consta que los terminos de la linea son
puntos; los de la superficie lineas, y los
del solido superficies.

Definicion 3.a

Parte en comun es Una quantidad
menor de otra maior, que llama todo

que

que Repetida algunas Vezes yguala, ò Excede ala Maior. Dividise en part aliquota. y aliquanta. parte aliquota es la que Repetida algunas Vezes Exactamte. Mide à su todo, como Una linea de dos Varas es parte aliquota de Una de ocho porq. la Mide Exactamte. por quatro; esto es la primera esta contenida en la Segunda quatro Vezes Sinq sobre algo. Consta pues, que toda Medida, o parte aliquota (q. por antonomacia te. se llama parte) es a su Medido, ò todo como la Unidad algun N.o entero; porq ella, (que es Una) Repetida algunas Vezes (esse es el numero entero) se supone q. Mide a su todo. Parte aliquanta es la que no Mide Exactamte. a su todo como Una linea de de dos pies Respecto de otra de cinco pies, no la Mide Exactamte. porq esta contenida en ella dos Vezes y sobra Un pie esta parte suele llamar

se

se partes

Deffinicion 4.ª

Partes, (ò sean aliquotas, o sean aliquantas) se mesantes de algunas quantidades, son aquellas delas, quales una està contenida en su todo, como la otra (ò cada una delas otras) en el suyo. como 4. respecto de 8. y 2. respecto de 4, ò 9 respecto de 12. y 15. respecto de 20 son semesantes 4. y 2. = 9. y 15.

Deffinicion 5ª

Quantidad multiplice de otra quantidad es aquella, que contiene à otra quantidad, que llama submultiplice de un determinado N.º de vezes exactamente. como 8 a 4. Quantidades equimultiplices de otras quantidades son aquellas todos, delos quales uno contiene a su parte, como el otro, (o cada uno delos otros) contiene ala suia. como 5 à 2, y 10 à 4.

Deffinicion

Deffinicion 6ª

Adicion es recoger, ò poner en un todo munchas quantidades especialmᵗᵉ del mismo genero. Como numero, y nº, linea, y linea, Superficie, y Superficie, solido, y solido. Esta colection, o se haze de suerte, que este todo, que se llama Summa, ò aggregado se Exprese con nuevo Nombre, ò solo con la dis=nuda Union delas quantidades, que se han de añadir Explicada por la Con-juncion. i. ò por esta señal + que quiere deçir mas y assi estos dos numeros. ...y.... (3 y 4) añadido el uno al otro hazen la summa .... (7) o log es lo mismo ...+.... (3+4) y Esta linea a añadida à esta b haze esta summa ⊢⊢⊢⊢⊢⊢⊢⊢ ò assi ⊢⊢⊢+⊢⊢⊢⊢ que no es otra Cosa, que la segunda, y primera linea tomadas Junta mentᵉ pero si se quiere hablar mas generalmᵗᵉˢ dela addi=cion assi deaquellos nº. como destas li=neas, v de qualquiera otras quantidades

Adicion es suma

Si la primera se llama a. y la segunda b su summa se expresa assi a+b

Deffinicion 2.ª

Resta

Subtracion es quitar una quantidad de otra especialm.te del mismo genero Esta separacion, ò se haze de qualidad que el residuo, ò diferencia se signifique con nuevo y especial nombre ò solo con la desnuda separacion explicada con la particula privativa sin ò por esta señal — que quiere decir menos y assi restando el n.º ...(3) del n.º ....(7) el residuo, ò diferencia sera ....(4) ò lo que es lo mismo ....—...(7−3) y restada esta linea b desta a la diff.a ò residuo sera ò a b esto es la segunda sin la primera pero se requiere ablar mas generalm.te de la subtracion, assi de aquellos n.s como de estas lineas, y de otras qualesquiera quantidades llamando a

ala q.

ala pr.a dequien se ha de restar, la segunda que llame b. el Ressiduo sera a—b esta diferencia entre dos quantidades respecto de la mayor se llama exceso, y respecto dela menor deffecto.

Scholio.

Aqui se notara el modo de summar, y restar quales quiera n.s dados.

Sean N.s dados qualesquiera n.s enteros, que ablan de cosas dela misma especie a. b. c. &c. lo prim.o se describiran de suerte, que las unidades, decenas, centenas &c. delos unos, y los otros se correspondan entresi despues se hira una raya.

a......683
b.........25
c......485
d....1193

Summanse pr.o las unidades detodos empezando por abaxo. o por arriba consecutivam.te diciendo. v.g. 3. y 5. son 8. y 5. son 13. esto es una dezena, y tres unidades. correspondientemente pues alas unidades debaxo de raya se escribira la pr.a figura con q. se expresa esta summa parcial reservando la otra figura para la carrera siguiente delas decenas. y assi se dira 8. y 1. que llevo son 9. y 2. son 11. y 8. son 19. escribirase el 9. de suerte, que corresponda alas decenas delas quantidades, y se reservara la otra figura para la carrera delas centenas y assi se dira 6 y 1. q llevo son 7. y 4 son 11. el qual agregado se describira con todas sus figuras, porq ya no ai mas q summar. y la quantidad .d. sera la summa total, que se buscaba, la qual por la misma operacion consta, q tiene tantas unidades, tantas decenas, y tantas centenas, quantas tienen las quantidades dadas a. b. y c. juntas.

Si las cosas, q representan los n. dados son diversas especies y las primeras de mano derecha en llegando acierto n.o passan ala especie delas, q se siguen hazia la mano izqda. llamando como antes se describira el

Exceso

el Exceso debaxo, guardando para la otra Especie 1.2.3 &c. conforme las veces, que dicho nº se incluyere en aquella summa como se vè enel Exemplo de dic. communes, D. y Ms.

D.s	R.s	M.s
7	35	32
25	10	28
36	2	26

Nº2 Dados tambien qualesquiera dos nº a.y.b, que representen cosas dela misma Especie se restara assi el vno del otro. Escribase siempre el Menor debaxo del mayor, de suerte quelas Vnidades, decenas, centenas &a del vno, y del otro se correspondan, despues tirese vna raya, y siempre que la Nota del de abaxo fuere mayor, q la correspondiente del de arriba se agmentara esta en lo mas tomando vna Vnidad dela Nota, que en su renglon sele sigue. I assi empezando por las Vnidades el 8. a 17. van 9. Escribase este Exceso parcial enel lugar correspondiente à las Vnidades. Y porq el 6. del Reglon a. se

se diminuyo en vna vnidad y a no ero. 5ino 5. y assi se dira de 7. a 15. van 8. el qual se escribira debaxo dela raya en el lugar delas decenas, y el 5. ya no sera mas de 4. el qual se escribira en su lugar.

De otra suerte se puede restar, q̃ es augmentando en vna unidad ala nota de abaxo en lugar de diminuir ala de arriba siempre q̃ la nota antecedente de abaxo huviere sido mayor que su correspondiente de arriba. Y assi se dira, como antes, de 8. a 17. van 9. y luego, y de 8 a 16 van 8. y luego de 1. a 5. van 4. estas unidades añadidas se señalan con vnos punticos para ayudar à la memoria.

Si los nᵒˢ representan cosas de diuersas especies, y las vnas en llegando à cierto nᵒ componen alguna delas otras se procede assi. Escribanse como antes, y si el nᵒ inferior delos

Mr. Vg. fuere maior, que el Superior de los Mr. se le añadirà à esté vna unidad delos Reales, resolviendola en los Mrses de que consta, que son 34. yassi se dirà de 32. à 38. van 6 escribasse este exceso debaxo dela raya correspondiente àla carrera delos Mrses. Despues se passarà alos Rs. y porq del 8. se quitó vna vnid.

Ds	Rs	Ms
45.	8.	4
9.	9	32
35.	9.	6.

No ai alli mas q 7. yassi se le añadirà vna vnid. delos ducados communes resuelta en Reales, que son 11. y se dirà de 9. à 18 van 9. escribase el 9. &c.

Vltimadam^te

porq la addiccion aggrega loq la subtraccion disgrega. el Examen del summar es el restar, assi Enel Exemplo p°. deel summar, si se restan dela summa total .d. la quantidad. a. Vg. el residuo serà ig. ala summa delas dos quantidades b. y c.

Item el Examen del restar es el summar yassi si enel p°. Exemplo del restar se se summan las quantidades b. y c. sera ig.^t esta summa àla quantidad a.

Nº 8. Siguese tambien delas dos difiniciones immeditas. Primero, si vn priuatiuo se añade

Suma

a su positiuo (−3 à +3, ò −a A +a) la summa es 0 porq̃ poner el priuatiuo es quitar el positiuo, y assi Juntar el positiuo conel priuatiuo es destruir el vno

Resta

conel otro. = lo 2º. Si el priuatiuo se resta de su positiuo (−a de +a) el residuo es el doplo del positiuo (+2a) porq̃ quitar el priuatiuo es poner el positiuo. Y assi loq̃ enlas voces se expresa enel 1.^r caso como addicion del priuatiuo, enla realidad es subtraccion; Y loq̃ enlas voces suena enel segundo caso subtraccion, es en realid.^d addicion, y loq̃ eneste se llama residuo es en realidad aggregado, y loq̃ en aquel summa en realidad es residuo = lo 3º. Si el ~~priuatiuo~~ positiuo (+a) se resta de su priuatiuo (−a) el residuo es (−2a) el

duplo

el duplo del priuatiuo, porq quitando el positiuo ar.e otra nueua priuacion, que añadida ala que se suppone haze con ella dos:

Este es el origen, y la razon delas reglas para la addicion, y subtraccion literal. Conuiene a saber = 1.a Si las señales delas quantidades desiguales son diuersas En lugar de summar se resta, y alo q. pro= Viene se pone la señal dela maior. como En el siguien.te Exemplo. Suma

Dela addicion

$$\begin{array}{r} 4b - 2a \\ 3b + 5a \\ \hline 7b. + 3a \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ \text{con}\ c - d + e \\ \hline a - b + c - d + e \end{array}$$

Segunda Regla: en lugar de restarse summa, y alo q. prouiene se pone la señal de aquella de quien se auia de restar como en el Exemplo. sigute. resta

Dela Subtraccion

$$\begin{array}{l} \text{de} \ldots 2a + b \\ \text{restar.}\ a - b \\ \hline \text{residuo..}\ a + 2b \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{de}\ a + b + c \\ \text{resto}\ \ d + e \\ \hline a + b + c - d - e \end{array}$$

Tercera Regla Si las señales fueren las Mismas, y la Maior se huviere de Restar dela Menor se Resta al contrario conformᵉ. a Razon Natural la Menor dela Maior al Residuo sele pondra la señal con traria como se Ve enesta Exemplo ad Virtiendo, que siempre q Una quantidad No tiene delante de si esta señal — se supone que tiene esta señal + q. asi q. es positiua

$$\begin{array}{lr}\text{De} \ldots\ldots & 3a+2b \\ \text{Restar} \ldots & 2a+3b \\ \hline & a-b\end{array} \qquad \begin{array}{lr}\text{de} \ldots & a-b+c \\ \text{restar} \ldots & d-e \\ \hline & a-b+c-d+e\end{array}$$

Deffinicion 8ª.

Multiplicacion es Una Multiplice addicion de Una Misma quantidad. el todo, que proviene se llama producto, y las quantidades por cuio Medio proviene se llaman terminos efficientes. en los N. aquel termino, que se hade añadir asi Mismo algunas Veces se llama quantidad que se hade Multiplicar, y el otro que

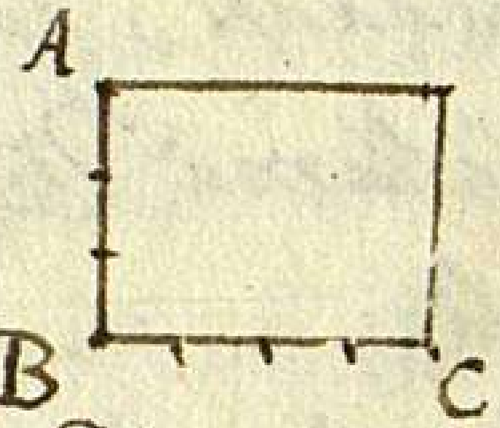
Explica

Explica con sus Unidades, quantas veces
se hade añadir, sellama Multiplicador.

Scholio

Nº 1º La Multiplicacion, ò sea de vn
Nº por otro, v. de vna linea por otra puede
considerarse, que sucede de dos modos
v. de suerte, que el producto sea del mismo
genero, v de diverso. como quando ....
(4). se Multiplica por ... (3). el producto
12. puede considerarse assi ....
o. segun vna superficie vg. :::: ; que es la
razon dellamarse tales Nº. planos conside-
rando, que se produxo por el Movimtº.
del Nº. quaternario elevado por el Nº. ternario
que esta como tendido, ò al contrario.

Dela Misma suerte la Multiplicacion
dela linea A——B por la linea B——C
o se considera hazerse de suerte, q el producto
sea vna linea C————D ò de suerte q
el producto sea superficie producida por el
Movimtº. dela linea AB elevado por la
BC tendida; o al contrario



Y si el N.o Plano, ò la Superficie se vol-
viere a multiplicar por otro tercer termino
se produciran los Solidos.

N.o 2.o Uno y otro
modo de multiplicar, ò sean N.os ò lineas;
ò lineas y Superficies se explica Universalmente
solo con la desnuda immediacion de aquellas letras
que se substituien por las quantidades. Y assi si
por el N.o 2., ò linea de arriba AB. se pone
R. y por 3., ò por la linea BC se escriviere S.
el producto será RS. = El producto pues q.
tiene solo dos dimensiones, ò lados de los
quales el uno se considera como su <u>latitud</u>
y el otro como su <u>longitud</u>, se llama
Plano: el q. tiene tres dimensiones, ò lados
de los quales uno se considera como <u>long.d</u>
otro como <u>latitud</u>, y el otro como altura
ò profundidad se llama Solido. Item si las
dimensiones del plano fuesen iguales llamase

Plano

Plano Equilatero, si desiguales No Equi=
latero, lomismo enel Solido, yassi enel plano
como enel Solido si las dimensiones se
multiplicaren Entre sí lo mas q. pudieron
multiplicarse sellaman Rectangulos; y en=
tonces, si son equilateros el plano se llama
Quadrado, y el Solido Cubo, y el uno y el
otro respectivam.te aqualq.r lado suio, que se
llama Raiz sellama Potencia; el qua=
drado Plana; el Cubo Solida; pero si las
dimensiones no se multiplicaren todo
lo que puede multiplicarse se llaman No
Rectangulos. Fuera desto si los pro=
ductos fueren de igual N.o de lados, y estos
se multiplicaren igualm.te se llaman productos
Equiangulos. Como si los lados A. y B.
Entre si, y los lados C. y D. Entre si se multi=
plicaren igualmente los productos AB. y
CD. son equiangulos. Pero en todos los pro=
ductos Rectangulos, ò Planos, ò Solidos
el otro lado distinto dela base sellama
altura. Como en este Plano Rectangulo

ab. si a. se considera, como Base sera
b su altura; y al contrario; Item si en
este solido rectangulo abc, se consi=
dera ab como Base sera c la altura
y si bc, se considera como Base sera
a. la altura. = Ultimadamte. de la difi=
nicion dela Multiplicacion consta q́
si un positivo se multiplica por un
positivo el producto es positivo, porq́ el
multiplicar es repetir aquella quantidad
tantas veces, quantas prescribe el multi=
plicador; y assi multiplicar por positivo
es repetir positivamte. aquella quantidad
como al contrario multiplicar por priva=
tivo es repetir la privacion de aquella
quantidad.

N.º 3. Para poder multiplicar
qualqa. N.º Entero dado por qualqa. otro
N.º Entero dado es precisso ò saber
de memoria, ò tener presente la tabla
que por aver la inventado Pitagoras
se llama Pitagorica, la qual se forma
assi

assi Pongase en Vn Renglon todos los nũ
digitos separados algo los Vnos delos otros

A									B
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	6	9	12	15	18	27	24	27
	4	8	12	16	20	24	28	32	36
	5.	10	15	20	25	30	35	40	45
	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	7	4	21	28	35	42	49	56	63
	8	16	24	32	40	48	56	64	72
Ç	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Como estan entre A. y B. despues empezando
por la Vnidad se ira añadiendo assi mismo
hasta llegar al N.o 9. como entre A y Ç des
pues se hara la misma deligencia con cada
Vno delos demas hasta q. el N.o delos ter-
minos iguale al N.o delos terminos primeros
tirense despues Vnas rayas, y quedara divi=
dida la tabla en 9 Colunas. Su Vso es. Bus=
case en la p.a Coluna AC el N.o menor, y en la
Coluna AB el N.o mayor y el num.o del comune

concurso sera el producto rectangulo del vn numero digito por el otro (porq siempre que qualqr No se Multiplica por otro se Multiplican los mas, q quedan multiplicarse y assi 6 es el producto, o rectangulo de dos multiplicado por 3 &c.

No 4o. Sabido esto dada qualquiera quantidad D. que se aya de multiplicar por otra quantidad e. Se escribira el Multiplicador debaxo dela quantidad, q se ha de multiplicar, de suerte que las vnidades, decenas &a del vno, y del otro se correspondan entre si, y tirando vna raya debaxo se multiplicaran todas las vnidades, decenas &a dela quantidad dada por las vnidades del multiplicador, y se iran escribiendo empezando desde las vnidades las primeras figuras delos productos parciales en sus lugares reservando las otras para juntar las con los productos delas carreras siguientes, y assi se dira 3. veces 4. son 12

D	454
e	23
F	1362
G	908
H	10442

Escribase

Escribase el 2. y la Unidad Reservese, y se prorrigira diciendo Veces 5. son 15. y Una que llevo 16 Escribase el 6 en el lugar delas decenas &c.a pero el Ultimo producto se Escribira con todas sus figuras: despues de Multiplicada toda la quantidad por las Unidades del Multiplicador se Multiplicara en la misma forma por las decenas del mismo pero empezando à Escribir sus productos desde el lugar delas dezenas &c.a despues se iran sumando (n.o 1.o Schl. def 6) todos Estos productos parciales, y la summa de es el total, que se busca.

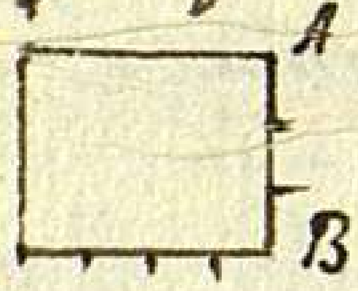
Deffinicion 9.

Division es Una Multiplice Subtraccion de Una quantidad, que se llama divisor de otra, quantidad, que se llama quantidad que se hade dividir. que por abrebiar suele llamarse solo quantidad. y quantas Veces se avia de subtraer lo Expresa otra tercera quantidad, que por esso se llama Quotiente

Scholio.

Scholio.

Nº 1º La quantidad, y el quociente pueden ser, ò del mismo, ò diverso genero. del mismo como si el Nº producto arriba ....(12) se divide por ...(3) provendra al quociente ....(4) ò dividira la linea allada C..............D por la linea A....B. volvera otra vez la linea B.......C. de diverso genero como si el nomº. Plano arriba allado ∴∴∴ ò la superficie AÇ se dividen por la retroducion



del lado elevado AB quedara solo el lado BÇ, y assi consta que en la division se deshaze, lo que en la Multiplicacion se haze.

Nº 2º. Uno y otro modo de dividir se expresa universalmente, ò solo con separar el divisor dela quantidad si actualmente esta junto con el, ò solo con la colocacion del divisor debaxo dela quantidad interponiendo una raia. como si el producto ab. se ha de dividir por b. el quociente sera a.

, y si

Assi por A. sera B. pero si a. ò ab se ha de diuidir por c. como esta letra no se halla en las otras no se puede apartar dellas y assi se expressan los quocientes $\frac{a}{c}$ y $\frac{ab}{c}$ como quando se hade diuidir 2. p 3. porq el diuisor 3 no se contiene en la quantidad se expressa assi el quociente $\frac{2}{3}$. y tem si estos ultimos quocientes se huuieren de multiplicar por c. solo con borrar el c. que daran por lo dicho multiplicados por c; pero si se huuiere de multiplicar por otra letra distinta del su diuisor, como por x. seran los productos $\frac{ax}{c}$ y $\frac{abx}{c}$. porq si estos quocientes se huuiessen departir por x. los quocientes fueran estos $\frac{a}{c}$ y $\frac{ab}{c}$.

N.º 3. Dados qualesquiera dos num.^s enteros se diuidira el uno por el otro escribiendo el diuisor ò partidor debaxo dela quantidad, pero de suerte, que si su ultima figura fuere menor, que la ultima dela quantidad

5407 | 110 ... 17/49
P. 49
50
49
017

Se Escriba debaxo dela Ultima dela quantidad Como enel Exemplo. P.

=Mas si la Ultima figura del partidor fuere Maior, q la Ultima dela quantidad se Escribira la Ultima

47935. | 95 ... 435/500
X 5 0 0
45
29
25
4.

figura del diuisor debaxo dela Penultima dela quantidad Como enel Exemplo X. Executando lo mismo quando las dos Ultimas, la dela quantidad, y la del diuisor fueren iguales, y la penultima del diuisor fuere

5372 | 99 | 26/54
R. 54
486
512
486
26

Major, que la penultima dela quantidad Como Enel Exemplo R.

=ò si Conuiniendo tambien quantidad y partidor enla penultima fuere Maior la ante penultima del partidor, que la antepenultima dela quantidad &c. Escrito assi el partidor debaxo dela quantidad

Veáse

Veasse quantas vezes cabe la vltima fig.^a del partidor en la figura o figuras (nunca pueden corresponder la mas que dos) dela quantidad advirtiendo que han de caber las mismas vezes las demas figuras del partidor en las figuras que directam.^te les corresponden en la quantidad. Como en el exemplo Siguiente.

A...57026.13849 | 72565 — numerador 5564 / denomin.^r... 7859.

B....7859

D...55013 — figura 5

C......20131

B.......7859

F......15718

G.......44133

B.........7859

H.......39295

I.......48388

7859

K.......47154

L.......12344

M.........7859

N.........44859

7859

O.........39295

R.........5564

La vltima figura del partidor B que es 7. cabe en el 57. que son las figuras que en la quantidad le corresponden 8 vezes. pero porq la penultima figura del partidor 8. no cabe en los 10. residuos dela quantidad las mismas 8 vezes, se tomaran solo

7 Veces y Este quociente 6ª parcial se escri=
bira sobre una Raya como en C. despues se
multiplicara por el todo el partidor B compe=
zando desde la primera figura 9 (N 4.
Sch. deff. 8) y saldra un producto D. debaxo
del qual se tirara una raia q. se restara
de las figuras de la quantidad, que directam.te
le corresponden.

Si el parcial quociente, que
se tomo es bueno; lo 1º multiplicandole
con el partidor (como queda dicho) el pro=
ducto D. no ha de ser mayor, que los num.s
de la quantidad de quienes se ha de restar
el dicho producto porq. esse quociente fuera
mayor de lo justo = lo 2º el residuo E.
ha de ser expressam.te menor, que el partidor
B, porq. si quedara ig.l o mayor. fuera
señal de que el partidor cauia mas veces
en la quantidad, y assi que el quociente
parcial era menor de lo justo.

Al residuo E,
se le añadira la figura de la quantidad, q. se
immediata

inmediatam.te se sigue ala q. corresponda
ala q. del partidor, y sera Una nueba quan-
tidad, q. se aura de diuidir por el mis-
mo partidor escribiendo su Vltima
figura en lugar mas hazia la mano
derecha Vg.ta debaxo del 0., que corres-
ponde ala immediata figura del diui-
sor, lo mismo se obseruara enlas siguie-
ntes opperaciones.

Hazase haora la misma
operacion, que antes ~~buscando~~ buscando
de nueuo Vn nueuo quociente (2) mul-
tiplicando le por el partidor B. y el pro-
ducto f. se restara dela quantidad
C. y al residuo G. le añadira la sigui.te
figura. 3. dela quantidad, que es la imm
ediata ala q. baxo antes, y se compondra
Vna nueua quantidad G. debaxo dela
qual se escribira el diuisor B., Vna figura
mas adelante hazia la mano derecha
(como queda dicho) continuando enla
misma conformidad las operaciones

hastaq̃ ayan bajado todas las fig.
dela quantidad, como se ban siguiendo
q̃ se ve en los Exemplos

No es Necessario
Escribir el divisor B. Expresam.te en todas
las opperaciones vasta señalar con vn
punto el lugar enq̃ debe estar su vl-
tima figura, y se Executara la opperac.
como si estubiera subscrito el divisor

Quando ya bajo la primera figura
dela quantidad como en N y se ha bus=
cado el quociente, y restado el product
loq̃ quedara como en R. sera el residuo
que no se puede dividir entre los divi=
sores B. y se añadira alquociente
total C por numerador de vn quebrado
proprio, cuio denominador sera el divisor
B. y quera allado el total quociente
compuesto de sus Enteros, y del quebrado
que av. quando la quantidad A se divide
por el divisor B.

Si en alguna division

particular

no cupiere el divisor en sus figuras correspondientes se pondra enel quosciente vn. 0. y baxando la siguiente figura dela quantidad se promoveran los partidores sin mas operacion como enel exemplo .T. 50436 | 103.....69 y se buscara vn 489 T 489 quosciente nuevo.

$$\begin{array}{r} 50436 \\ 489 \\ \hline 15\cdot3\cdot6 \\ 1467 \\ \hline 69 \end{array}$$

= Si el divisor tubiere alguno, o algunos zeros alo ultimo dela mano derecha se escribiran debaxo delos primeras figuras dela quantidad desde el principio dela opperacion y con los de mas n. del partidor se executara laparticion, y los n. dela quantidad occupados con los zeros del partidor se añadiran ala mano derecha del ultimo residuo, si quedare algo, y si no quedare alguno seran ellos el numerador del quebrado cuio denominador es el divisor con cero con sus zeros como en el Exemplo X. arriba puesto.

Ultimadam.te el examen del multiplicar es la particion; y el dela particion la multiplicacion. Y asi si en el Exemplo dela multiplicacion el total producto. H. se partiera por el multiplicador. B. el quociente sera la quantidad multiplicada D. y se partiere el mismo producto H. por la quantidad multiplicada D. sera el quociente el multiplicador B. = Item si si en la particion se multiplicare el quociente por el partidor se añadiere al producto el Residuo, de le huuo sera el producto la quantidad que se auia de diuidir

Deffinicion. 10.

Extraccion de Raizes es una Especie de diuision, en la qual el quociente es la raiz q.a del quadrado, y del cub dado, y el diuisor no esta dado

sino

sino, que se hade buscar. Y todo Num.º se dize ser quadrado, ò cubo perfecto siempre q̃ su Raiz quadrada, ò Cubica es igual algun Numero

Scholio

Assi Como delos Num.s digitos

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sus Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81
y sus cubos.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

se Conocen sin arte solo por la tabla Pitagorica dela misma suerte la Raiz que se hade sacar del quadrado aa, ò a^2. y del Cubo aaa, ò a^3, es sin duda alguna a; pero si se huviere de sacar la Raiz quadrada de ax, ò la Cubica de fgm. por ser diversas estas letras, y ninguna poderse tomar por Raiz se expresara esta Raiz con esta señal $\sqrt{}$. que llama signo Radical pero la quadrada assi $\sqrt{ax}$, ò assi $\sqrt[2]{ax}$. Y la Cubica assi $\sqrt[3]{fgm}$. al modo, que en los N.s, q̃ no son perfectam.te quadrados como

2.3.5.6.7.8 &c.a no se puede expresar su raiz quadrada sino es assi $\sqrt{2}$. $\sqrt{7}$ &c.a y en los no perfectam.te cubicos como todos los, que ai entre. 1. 8. 27. 64. &c.a tampoco su raiz cubica sino es assi $\sqrt[3]{4}$. $\sqrt[3]{7}$. $\sqrt[3]{62}$. &c.a las quales formulas de raizes en la Arithmetica literal se llaman quantidades Sordas, y en la Vulgar Numeros Sordos: porq. con ningunas notas numericas pueden exactam.te expresarse estas raizes. Donde se notara, que si la primera figura de un numero dado no es la misma, que la primera, ó unica de los quadrados de los n.s digitos no sera ese n.o perfectam.te quadrado, y assi no lo son los q. tuvieren por primera figura 2.3.5.7.8. como tampoco por semejante razon lo seran los q. tuvieren zeros impares al principio.

Deffinicion 11.

Quantidades Commensurables son las q. tienen una medida comun.

Incommensurables las, q. no la tienen.

Unos

Vnos. y otros, ó son tales entre sí, ó en su potencia. Quantidades commensurables entre sí son las, que como estan tienen alguna medida commun; commensurables en su potencia cuias potencias tienen alguna comun medida

Scholio

N.º 1. la summa de dos quantidades inconmensurables entre sí se llama Binomio, y la diferencia entre tales quantidades se llama apotome y solo son. y solo son commensurables entre sí aquellas quantidades de las quales la vna fuere á la otra, como la vnidad á vn numero entero. ó como vn N.º entero á otro N.º entero; porq. ó vno dellos es medida del otro, como de sí mismo; y entonces (Deffi: 3) aquel es como la vnidad á vn N.º entero; o tiene por medida comun á otro tercero; y assí por la misma razon es á cada vno de por sí como la vnidad á vn N.º entero; y por consiguiente entre sí como vn N.º á otro N.º. de donde se infiere, que si vna quantidad es 1. y y la otra $\sqrt{2}$, ó $\sqrt{3}$. &c. estas quantidades son incommensurables entre sí; pero estas mismas son commensurables en su potencia. porq. sus quadrados 1. y 2. son como la Unidad á un N.º entero; si una es 1. y la otra $\sqrt{2}$, ó una es $\sqrt{2}$. y la otra $\sqrt{3}$ ni aun en sus potencias son commensurables.

N.º en la quantidad discreta se llama Num.º primo ó no-compuesto el N.º que solo es multiplice dela Unidad. como son 1. 2. 3. 5. 7. 11. 13. &c. = Numero compuesto el Num.º que es multiplice de otro N.º, mas q. dela Unidad como son 4. 6. 8. 9 &c.ª = Numeros primos entre sí los q. no son multiplices de otro N.º comun, mas q. dela Unidad. como 15. y 8. aunq. ninguno sea primo. = Numeros compuestos entre sí son aquellos que son multiplices de otro N.º comun distinto dela Unidad como son 8. y 10 que son multiplices de 2. Numeros pares son todos los, q. se pueden dividir

diuidir por el 2. sin residuo alguno
y los que no se llaman impares. y como
ninguno delos N.os primos fuera del 2.
puede diuidirse assi todos los N.os prim.s
fuera del 2 son impares. Pariter-pares
se llaman los q pueden diuidirse sin
residuo alguno por 2. veces 2. o que
es lo mismo por 4. y los q no se pueden
diuidir assi justam.te por el 2. se llaman
pariter-impares. = Vltimam.te Numero
perfecto se llama aquel, q es igual à
todos sus diuisores, que cada vno son
menores, q el. Juntos como 6. es igual
a todos sus diuisores. 1.2.3.

Definicion 12.

Razon es el respecto, ò relacion de
dos quantidades especialm.te del mis-
mo genero segun su quantidad ab-
soluta. Porq lo q principalm.te se consi-
dera es la relacion q tienen entre si
las quantidades homogeneas, y no tanto
la relacion, q ai entre vna linea y vn

Plano, Ni entre Vn Plano y Vn solido Ni entre Vn Nº. y Vna linea &c.ª porno ser Homogeneas sino Heterogeneas estas quantidades

Scholio.

N.º 1º. esta respectiua habitud, que pide dos terminos, Vno el que se compara que se llama antecedente, y otro aquien se compara, que se llama consequente es en dos maneras: porq. quando en la razon solo se attiende la diff.ª o Exce=sso dela Vna sobre la otra. Como que el 10 exceda al 7. en el Nº. ternario Se llama respecto Arithmetico, o razon Arithmetica. = Pero quando Especialm.te se attiende en ella ala amplitud, con que el Vno esta comprehendido en el otro alguna, ò algunas Veces. Como que el ternario este incluido tres Veces, y demas à mas Vna tercia q.e seria en el senario, sellama respecto geometrico, o razon geometrica, ò solo razon. o

N2º

N.º 2.º Esta razon se divide lo 1.º En racional, è irracional. Racional es la razon geometrica, que puede expresarse en n.º como la, que ai entre quantidades commensurables, que por esto se llaman tambien racionales. Irracional la q. de ninguna suerte se puede expresar en num.º como la q. ai entre quantidades incommensurab.s que por esto se llaman tambien irracio=nales.

N.º 3. dividise la razon en razon de igualdad. que es q.do los terminos son iguales. la qual igualdad se expresa con esta señal ∽ como 4∽4. a∽a. y quiere decir 4. es ig.l a 4. la quantidad a. es ig.l à la quantidad a. In razon de desigualdad, que es quando los termin.s son desiguales. Esta se subdivide en razon de mayor desigualdad; y en raz.n de menor desigualdad. razon de may.r desigualdad quando el antecedente es

Mayor, que el Consequente, y esta Mayoria
se Expresa assi +q. como 5+q4. ò a+qb.
y quiere decir el 5. es mas, ò maior que
el 4. la quantidad a. es mas, ò Mayor
que la quantidad b. Razon de Menor
desigualdad, quando el antecedente es
Menor, que el consequente, y esta Meno=
ria se Expressa assi —q. como 2—q3.
a—qb. y quiere decir el 2. es menos, ò menor
que el 3. la quantidad a. es Menos, ò
Menor, que la quantidad b.

N.º 4.º Dies.

Especies ai de Razon de desigualdad
Cinco de la Maior; Cinco de la Menor
1.ª Si el antecedente Contiene al Consequente
Una Vez y alguna parte aliquota mas
se llama Razon Superparticular. y si la
parte es Un medio mas se llama Sesqui=
altera como 3 a 2. Si $\frac{1}{4}$. Sesquiquarta como
5. à 4 Si es $\frac{1}{3}$. Sesquitercia como 4 à 3.
= 2.ª Si el antecedente Contiene Una
Vez al consequente, y algunas partes
aliquotas

Aliquotas suias, tales, que todas juntas no compongan una parte aliquota del mismo consequente se llama superparciente. Si las partes son $\frac{2}{3}$ sellama una superbiparcienste tercias. Como 5. à 3. Si las partes son $\frac{3}{4}$ sellama supertripar. ciente quartas. como 7. à 4. pero si las partes aliquotas del exceso fueren tales, que juntas compongan alguna parte aliqota del consequente, ya pertenesera àla razn. superparticular. como 8 à 6. quele comprehende una vez, y dos unidades que juntas componen una terzera parte del. 6.

3.a Si el antecedente contiene al consequente algunas veces sellama multiplice. Si dos veces. dupla. Si tres tripla. Si cinco quintupla cetra.

4.a Si el antecedente contiene al consequente algunas veces. y alguna parte aliquota mas. se compone dela primera y 3.a y delas dos toma el nombre de Multi=plice Superparticular. si le contiene dos veces. y $\frac{1}{2}$ se llama dupla sesqui altera como 5 à 2, si quatro veces y $\frac{1}{3}$. sera quadrupla sesquitercia. como 13 à 3.

5.ª si el antͤ contiene al consequente muchas veces y algunas partes aliquotas suias tales que juntas no componen alguna parte aliquota del mismo consequente se compone dela 2.ª y 3.ª y delas dos toma el nombre de Multiplice superparcienᵈᵉ si le contiene tres veces, y $\frac{2}{5}$. sera tripla superbiparciens quintas como 17. à 5. pero si las partes aliquotas del exceso fueren tales, que juntas componen algª. parte aliquota del consequente perte=necera àla 4. especie como 14. à 6. que tiene razon dupla sexquitercia. Ultimamᵗᵉ quando el antecedente es menor ai otras cinco especies, con los mismos nombᵉˢ. poniendo antes la particula Sub

N.º 5. las tres señales de arriba $-$. $+$q. $-$q. y esta $=$ se llaman señales de Comparacion, o. Cotejo. porq̃ las quantid.des que se pusieren al vn lado, o vanda dellas se Cotejan, y comparan con las que Estubieren ala otra vanda, o lado. y las vnas, y las otras quantidades se llaman terminos dela Comparacion haora sea de igualdad, como quando se vsa dela primera; haora sea de mayor desigualdad, como quando se vsa dela segunda: haora sea de menor desigualdad como quando se vsa dela tercera: Pero quando no consta. si los vnos terminos son ig.s may. ò men.s que los otros se vsara solo dela quarta Pero es euidente, que si vna quantid.d tiene raz. geometrica à otra, y no es mayor, ni menor que la otra, es ig.l si no es ig.l ni mayor, sera menor; si no es ig. ni menor, sera mayor.

N 6.

Nº 6 Aquella señal, q̃ racional, ò irracional &c. Expressa la amplitud, con q̃ el un termino esta contenido en el otro se llama Exponente, ò. Denominador dela razon. Y assi la razon geometrica que la quantidad a. v.g. tiene ala qũa. b. sea la que fuere puede expresar se assi $\frac{a}{b}$ porq̃ si la quantidad b. dividiese ala quantidad a. el quociente $\frac{a}{b}$. seria la quantidad respectiva, Exponente o denominador dela razon, que el a. tiene al b. porq̃ racional, o irracional &c. expresara el modo con q̃ la quantidad a. contiene ala quantidad b. ò es contenida della.

Definicion 13.

Proporcion en general es respecto, habitud o relacion de algunas razones esto es de sus denominadores y Exponientes.

Shcolio.

Nº 1º. assi como el respecto de algunas razones Geometricas se llama proporcion Geometrica

Geometrica, o Solo proporcion asi tamb.^n
el respecto de algunas Razones Arith=
meticas Sellama proporcion Arithmeti.^ca
Pidiendo pues la proporcion alomenos
dos Razones, pide la proporcion alo
menos quatro terminos, dos anteced.^{es}
y dos conseq.^{tes} yasi los antecedentes
Entresi como los conq.^{tes} entresí Sellaman
terminos Homologos dela proporcion
y aunq el antecedente deba Ser del
mismo genero, que su consequente
(def. 12) En cada Razon, no por eso es ne=
cessario, que los dos antecedentes, o conseq.^{tes}
en laproporcion Sean homogeneos, porq
pueden Ser Heterogeneos.

N.º 2.º Dividese
laproporcion en proporcion de igualdad
quando las dos Razones, Son las mis=
mas, iguales, o Semejantes (que aqui
todo es Uno) y en proporcion demajor
desigualdad, quando la primera Razon

es mayor, que la 2.ª, y en proporcion de menor desigualdad, quando la primera razon es menor, q̃ la 2.ª

N.º 3. La proporcion de igualdad, que por antonomasia se llama proporcion, se divide en proporcion no-continua, y en proporcion continua. Proporcion de igualdad no-continua es aquella proporcion de igualdad en la qual los terminos de las dos razones son distintos y la geometrica se expresa asi a..b :: c..d. ò asi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lo qual quiere decir, que la razon, que tiene la quantidad .a. à la quantidad. b. es ig. la misma, o semejante, que la que tiene la quantidad c, a la quantidad. d. y quando el primer termino tiene al 2.º la misma razon, que el tercero al 4. se llama proporcion directa; pero si el 1.º termino tiene al tercero, la misma razon que el 4.º al segundo suele llamarse indirecta

1 tercero
2 x 4

Indirecta, inversa, ò Reciproca.

N.º 4. prop.

De igualdad Continua, es aquella prop. en la qual la quantidad, que en la primera razon es Consq.te, en la 2.a es antecedente. la Arithmetica se expresa assi ÷ a.b.c, y quiere decir, que la diff.a, que tiene la quantidad. a. de la quantidad. b. es la misma, que la que tiene la misma quantidad b. de la quantidad. c. la geometrica se expressa assi ∺ a.b.c., y quiere decir que la razon geometrica, que tiene la quantidad. a. a la quantidad. b. es la misma, que la que tiene la misma qu.d b. a la quantidad c. no obstante se expresara tambien assi $\frac{a}{b} \infty \frac{b}{c}$. los terminos destas dos proporciones se llaman tambien por antonomasia proporcionales, advirtiendo si son Continuos. Y quando la pro=porcion Continua consta de mas de 3. terminos se llama progression, que

que es accendente, quando sus antes van siendo maiores. y decendentes quando sus antes vanriendo menores.

N 5.º Assi como el rectangulo de vna quantidad por si misma se llama quadrado, y el rectangulo del quad.do y dela misma quantidad se llama Cubo: assi tambien si se van continuando estas multiplicaciones se produzen otras potestades mas altas, cuios nombres, caracteres, y exponentes, que son vnos numeros, que acompañan alas quantidades hacia la mano derecha son los siguientes

a	aa	aaa	aaaa *
a^1	a^2	a^3	a^4
Raiz	Q.do	Cubo.	QQ.

....

*Sigue.	aaaaa	aaaaaa	aaaaaaa
	QC.	CC.	QQC.

donde se vê que solo consumar los exponentes

Exponentes de dos potestades se conoce el producto dellas; y solo con restar el menor del mayor se conoce el quociente: porq sumando el Exponente 2. dela segunda, y el Exponente 5. dela quinta. la summa 7. es exponente del nuevo producto dela una porla otra esto es de aaaaa, o a^5. por aa, o a^2. el producto es a^7.

N.º 6. quando algun todo se corta en dos partes desiguales, de suerte que el todo, la parte mayor. y la parte menor esten en proporcion geometrica continua esto es. que como el todo ala mayor parte, assi la misma mayor parte àla menor parte, se dice, que esta cortado segun la Extrema, y Media razon.

I quando ai algunas quantidades continuas proporcionales. vg.ª si ai tres la razon dela primera à la tercera se dice duplicada dela raz. dela 1.ª ala 2.ª y si ai. 4. la raz. dela 1.ª ala 4. se dice

8 .. 4 .. 2 ..

$\frac{8}{4}$ y multip $\frac{8}{4}$

$\frac{64}{16}$ es quis.º $\frac{8}{2}$

8..4..2..1 Triplicada de la razⁿ. dela 1ª ala 2ª. y si

ay 5. la razⁿ. dela 4ª. ala 5ª. se dice qua-

8/4 8/4 8/4 multipº. druplicada dela razⁿ. dela 1ª. ala 2ª. y assi

se va discurriendo, tomando siempre

512/64 es igº. a 8/1 el nombre del Nº. delos terminos menor

uno. = Y aunq. estos nombres de razon

duplicada, triplicada ettª. son como pro-

prios dela progression geometrica, y à de

cierto modo los acomodan los R.R. ala modern

Arithmetica, y assi llaman progression Ari-

thmetica duplicada la que consta de

unos quadrados de numeros, que estan

1.2.3. 4. 5. 6. en progression Arithmetica como 1. 4. 9. 16

1. 4. 9. 16. 25. 36. 25. 36. ettª. y llaman triplicada la que

dupª

1. 8.27. 64. 225. 216 consta de sus cubos. como 1. 8. 27. 64 ettª

tripª

Modos de arguir.

los modos de arguir son los de cotejar

y comparar entre si quatro terminos, que

estan progression geometrica como los

terminos......... a.. b.. c.. d..

Alternando se arguie, quando se coteja

entre si los antecedentes, y los consequen

tes.

dela.

dela proporcion. a.. c.. b.. d. y tambien quando truecan entre si los lugares el 1.º y 4.º termino. d.. b.. c.. a.

Componiendo se arguie, quando se cotesa el aggreg.do dela raz.n (delos terminos dela raz.n) al consequente. a+b.. b.. c+d.. d. ò al antecedente. a+b.. a.. c+d.. c. ò quando el antecedente se cotesa al aggregado dela raz. a.. a+b.. c.. c+d. En el primer caso se llama este modo de arguir solo Composicion de raz.n en el 2.º caso. Composicion de raz. Conversa En el 3.º caso. Composicion de raz. Contraria

Dividiendo se arguie, quando se cotesa el exceso del antecedente sobre el consequente con el mismo conseq.te Como a—b.. b.. c—d.. d., o el contrario Como b.. a—b.. d.. c—d. ò el antecedente con la diff.a conq. le excede al consequen.te Como a.. b—a.. c.. d—a. En el primer caso se llama este modo

se arguir solo diuission de razon
En el segundo caso. diuission de razon
conuersa, y en el 3.º diuission de razⁿ.
contraria.

Como el vno al vno assi los
aggregados, se arguie. quando se cote=
ja vn antecedente, con su consequente
del aggregado de los antecedentes, con el
aggregado de los consequentes. Como
a.. b.. a+c.. b+d, ò como c.. d.. a+c.. b+d.

.Como el vno al vno assi la differencia
se arguie, quando se coteja vn ante
con su consequente y la differencia de los
antecedentes con la difª. de los conseqtes.
Como a.. b.. a=c.. b=d

Componiendo, y Jun=
tamte. diuidiendo, y diuidiendo, y Junta=
mente componiendo se arguie, quado se
coteja el aggregado de la razon con la
differencia de la razⁿ. como a+b.. a=b..
c+d.. c=d. ò la differencia con el aggre=
gado como a=b.. a+b.. c=d.. c+d.

Inuertiendo

Inuertiendo se arguie. quando se cotejan los consequentes, con los antecedentes de las razones. como b.. a.. d.. c.

Conuirtiendo se arguie quando se coteja el antecedente al Exceso con q el mismo Excede al consequente. a.. a—b.. c.. c—d.

Eleuando, y deprimiendo se arguie, quando se multiplica el antecedente de vna delas razones por vna quantidad, y por essa misma se parte el cosequente dela otra razon, ò al contrario. como ae.. b.. c.. $\frac{d}{e}$, ò como a.. $\frac{b}{e}$.. çe.. d.

Quadrando se arguie, quando cada vno delos terminos dela proporcion se multiplica lo mas q se puede por si mismo. como. aa.. bb.. cc..dd. . Y cubicando se arguie quando essos productos se vueluen a multiplicar en la misma conformidad. por la misma quantidad, ò raiz como

Como aaa.. bbb.. ccc.. ddd.

Permutando dimensiones se arguie, quando el 2.º termino dela proporcion da su dimension al 3.º y el 1.º al 4.º Sean las quatro proporcionales ab.. cd.. e.. f. Seran como a.. c.. ed.. bf.

Por igualdad se arguie, quando auiendo en dos proporciones geometricas de igualdad dos terminos en cada una ig.^les o los mismos se infiere que los otros quatro constituien una proporcion geometrica de igualdad, Sean como a.. b.. c.. d. y como b.. f.. d.. e. Seran por igualdad de razon como la p.ª a. ala ultima f. assi la primera c ala ultima e.

Diffinicion 15.

Proporcion Armonica es quando puestos tres terminos la razon geometrica, que tiene el 1.º al 3.º es la misma, que la razon geometrica que tiene la diff.ª entre el 1.º y 2.º ala

diff.ª

differencia entre el 2.º y 3.º Sea los tres terminos a.b.c. digo, q. si el 1.º a. al tercero c. tiene la misma raz. geometrica, que la diferencia a=b. ala differencia b=c, la tal proporcion es Armonica. que tambien se Expressa assi $\frac{a}{c} \sim \frac{a=b}{b=c}$ y los terminos Estan en proporcion Armonica, y ellos se llaman terminos proporcionales armonicos v.g. 3. 4. 6. Si huviere mas q. tres terminos en esta proporcion se llama progression armonica = ~~Proproporcion~~ Contra-armonica se llama, quando la diff.ª del 1.º y 2.º es ala del 2.º y 3.º como el tercero al 1.º como 6.5.3

24.. 16.. 12.. la dif.ª del 1.º al seg.do son 8 y la dif.ª del seg. y 3.º son 4. la 24. con 12 tiene la misma razon q. 8 a 4.

de 6.. 5. la dif.ª es 1. y de 5. a 3. es 2. luego etc.

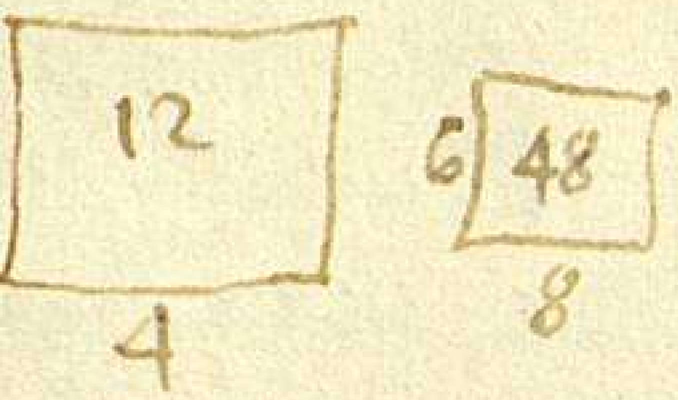
Deffinicion 16

Proporcionalidad es la identidad, igualdad, o semejanza de proporciones. esta semejanza consiste en q. las razes de la vna prop.n sean proporcionales con prop. q. de igualdad alas razes de la otra v.g. $\frac{4}{2}..\frac{6}{3}$. assi $\frac{12}{6}$..

Diff.n 17.

Razon compuesta es la raz. que sale multiplicando entre si las quantidades de otras razones, ò es Vna razon cui denominador se produce por la multiplicacion delos denominadores de otras razones las guales se llaman razones componentes.

Deffinicion 18.



Productos semejantes se llaman, ò son los productos equiangulos, cuios lados son proporcionales con proporcion de igualdad como si los productos .ab. y .cd. fueren equiangulos, y de mas a mas, fuere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ seran semejantes estos productos y la señal de la semejanza sera esta $\underline{\Omega}$

Axiomas.

1.º El todo es mayor, que su parte, ò igual a todas sus partes juntas.

2. Si quantidades iguales se augmentan, ò se disminuyen de la misma suerte, è igualmente por una quantidad misma, ò por quantidades iguales, los augmentos, ò diminuciones son iguales (Sean. $a = a$. y $b = b$ augmentando sera $ab = ab$. y tambien $a+b = a+b$. y diminuyendo sera $a-b = a-b$. y tambien $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.) Y si augmentandose, ò disminuyendose de la misma suerte

è igualmente

è, igualm.te algunas quantidades por Una misma quantidad, ò por quantidades iguales, los augmentos, ò diminuciones fueren iguales las tales quantidades son iguales

3.o Si quantidades desiguales se augmentan, ò diminuien dela misma suerte, è igualm.te por Una misma quantidad, ò por quantidades iguales los augmentos, ò diminuciones son desiguales. Sean $a+q.b$ y $c.=.c$ augm.do sera $ac+q.bc$ y $a+c+q.b+c$ diminuyendo. $a-c+q.b-c$ y $\frac{a}{c}+q.\frac{b}{c}$ y maior el dela quantidad major, y si augmentandose, ò diminuyendo se, dela misma suerte, è igualm.te algunas quantidades por Una misma quantidad, ò por quantidades iguales, los augm.tos, ò diminuciones fueren desiguales, las tales quantidades seran desiguales, y maior la del augm.to, ò diminucion major.

4.o Si quantidades desiguales se augmentan dela misma suerte, o igualm.te por quantidades desiguales el augm.to dela quantidad mayor por la quantidad mayor es mayor, que el augm.to dela quantidad menor por la quandad menor (seran las quantidades $a+q.b.$ y $c+q.d$ sera augm.do $ac+q.bd$, y $a+c+q.b+d$.

Postulado

Dada qualquier quantidad * tomar otra igual suya.

* poder

Proposicion 1.a T.

(7.r p. del 5. eu) Dos quantidades iguales (a.y.a) tienen a una tercera (b) ò a dos iguales (b.y.b) la misma razon: y una quantidad b, ò dos iguales (b y b) à dos quantidades iguales (a.y.a) tienen la misma razon.

Demostracion por la 1.a p.e por la suposicion $a \Omega a$ pero (ax 2) $\frac{a}{b} \Omega \frac{a}{b}$. luego (n.o 6 Schol. difinicion 12) dos quantidades iguales tienen a una tercera, ò à dos iguales la misma razon, que era lo primero por la seg.da par.te por la supp.n $b \Omega b$ por el ax 2 $\frac{b}{a} \Omega \frac{b}{a}$ luego (n.o 6 Schol. def. 12) una quantidad, ò dos iguales à dos quantidades ig.s tienen la misma

raz

razon: luego dos quantidades iguales, etta
que es lo que se àuia de demostrar.

Prop. 7 th.

dos quantidades (b.y.c) que a vna misma (.a.)
o à dos iguales (a.y.a) tienen la misma
razon. son iguales entre si; y si vna quantidad
(a), o dos iguales (a.y.a) tienen la misma
razon. à dos quantidades (b.y.c) estas son ig.
entre si.

Demostracion = por la primera parte: por la
supp. $\frac{b}{a} = \frac{c}{a}$: luego (ax 2). $b = c$, que era lo prim.
= 2a parte: por la sup. $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$: luego (ax 1)
$a = \frac{ba}{c}$, y $ac = ba$, y $c = b$., que era lo 2o.
: luego dos quantidades, que a vna misma &c.
Q.E.D.

Prop. 8. th.

De dos quantidades (a y b) desiguales la
mayor. (sea .a.) à otra tercera (c) tiene mayor razon
que la menor b. pero la tercera (c) à la menor (b).
de las dos tiene mayor razon, q. à la (à) mayor

Demostracion: 1a parte por la sup. $a +q\, b$: luego (ax 3)
$\frac{a}{c} +q\, \frac{b}{c}$: que era lo q. 2a parte: por la sup. $a +q\, b$
luego (ax. 3.) $ac +q\, bc$ y $c +q\, \frac{bc}{a}$ y $\frac{c}{b} +q\, \frac{c}{a}$

que era la seg.^{da} parte: luego de dos quanti-
dades et.^{a} Q.E.D. Prop.^{n} 4. Th.

De dos quantidades (a. y. b) la à que tiene
à otra tercera c mayor razon, es mayor
y destas mismas quantidades (a. y. b) la (b)
aquien otra tercera (c) tiene mayor razon
es menor.

Demostracion = 1.^{a} p.^{te} por la sup.^{n} $\frac{a}{c} + q \frac{b}{c}$
luego (ax 3) $a + q\, b$, que era lo 1.^{o} = 2.^{a} parte por
la sup.^{n} $\frac{c}{b} + q \frac{c}{a}$: luego (ax 3) $c + q \frac{bc}{a}$. y $ac + q\, bc$
y $a + q\, b$. y assi $b - q\, a$. que era la 2.^{a} parte
luego de dos quantidades etta Q.E.D.

Corolario 1.^{o}

Las quantidades, que son iguales à una tercera
ò a dos iguales son iguales entre si. Y si
una quantidad es mayor, ò menor, que una
de dos ig.^{s} sera tambien mayor, o menor q
la otra. y al contrario: si una de dos quanti-
dades ig.^{s} es mayor, o menor, q una tercera
ò dos ig.^{s} tambien la otra de las iguales sera
mayor, o menor, que la misma.

Corolario 2.^{o}

Si una

si Una (a) es ig.^l, Mayor, o Menor, que otras Juntas (b+c), y otra distinta (d) fuere ig.^l à alguna dellas ($c \propto d$) la primera sera tambien igual, mayor, o menor, que esta d. Junta con la otra: porq.^e (por sup.^n) $c \propto d$ luego (ax) $b+c \propto b+d$: luego (Corolario 1.^o) si $a \propto b+c$ sera $a \propto b+d$ y si $a +q\ b+c$ sera $a +q\ b+d$, y si $a -q\ b+c$ serà $a -q\ b+d$.

Corolario 3.^o

Si dos quantidades desiguales (a. y b) Exceden à otras dos (c, y d) con Un mismo, ò ig.^l Exceso (x), tambien las Excedentes (a. y. b) y las Excedidas (c. y. d) entre si tienen iguales Excessos: porq.^e por sup.^n $a \propto c+x$. y tam $b \propto d+x$ * luego $a-b \propto c-d$ que era el q.^o

$a \propto c+x$
$a-c \propto x$
$b \propto d+x$
$b-d \propto x$
x q. colario 1.^o

Corolario 4.

Si de dos quantidades iguales (a . a) se restan quantidades desiguales b+q c los residuos son desiguales, y menor s $a-b -q.\ a-c$ de donde se sigue la mayor = pero si quantidades iguales (a. a) se parten

$b-d \propto a-c$
$b \propto d+a-c$
$b+c \propto d+a$
$c \propto d+a-b$
$c-d \propto a-b$

por quantidades desiguales los quocientes son desiguales, y maior ($\frac{a}{c}+q.\frac{a}{b}$) el que proviene partiendo por la menor.

Demostracion

1^{a} p^{te}. por sup^{on} $b+q.c$ luego (ax 3) $a+b+q\,a+c$ $a+q\,a+c-b$ y $a-c+q\,a-b$ que era lo 1°.

2^{a} p^{te}: Por la sup^{on} $b+q.c$: luego (ax 3°) $ab+q.ac$ y $a+q\,\frac{ac}{b}$ y $\frac{a}{c}+q\,\frac{a}{b}$ que era lo segundo: lueg etta.

Scolio.

Todo lo q̄ se ha demostrado en las quatro prop.^{es} antecedentes, y lo q̄ dicen estos Corolarios se hade entender tambien delas mismas Razones Cotejadas Entre sí; porq̄ tambien son quantidades aunq̄ Respectivas, o Relativas y asi dos Razones ig.^{s} $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{b}$ á otra tercera $\frac{e}{f}$, o a dos ig.^{es} $\frac{e}{f}$ y $\frac{e}{f}$ tienen la misma Razon

Prop 8. Th.

Si dos quantidades ($a.y.b$) son desiguales la suma de su agregado ($a+b$) y de su diferencia ($a-b$) es el duplo dela

Mayor, supponese, que lo es (a)
Demostracion el aggregado es $a+b$
la differencia es $\frac{a-b}{}$ pero
la Suma desto (nº 3. Sch. deff.) es 2a. o. luego
si dos quantidades &c.

Corolario.

Si la Suma se llama. S. y la differencia. D.
y la quantidad Mayor. M. tirando por lo de
mostrado q. S+D. ≏ 2M. sera (ax2)
$\frac{S+D}{2}$ ≏ M.

Prop. 6 Th.

Si la diff.ª (a−b) de dos quantidades desig.^s
(a, y. b.) se resta de su aggregado (a+b)
el residuo es duplo dela menor, que se pone. b.

Demostracion: el agg.do es $a+b$
la diff.ª es $\frac{a-b}{}$ pero
(Corol. 2 def. 7) el residuo desto es. o. +2b: luego la
diff.ª &c.

Corolario

Si la quantidad menor se llama. m. sera por lo
demostrado ahora S−D. ≏ 2m y assi (ax 2º)
$\frac{S-D}{2}$ ≏ m

Pr. 7. Th.

Si el aggregado de dos quantidades desiguales (a. y b) se suppone, que resulta dela diff.a delas mismas el Residuo es tanto menor, que nada, quanto es duplo dela menor, que se suppone .b.

Demostracion = La diff.a es $a-b$

Restese el aggregado $\underline{a+b}$

sera (corolario 3. diff. 7) el residuo desto $o-2b$

Prop. 8. Th.

Si Un positivo se multiplica por Un privativo o al contrario el producto es privativo.

Hypotesis aviendose de multiplicar $a-b$ por $+c$ es cierto (por la diff.a 8) que .a. multiplicado por .c. haze el producto positivo .ac. digo pues haora, que si $-b$ se multiplica por .c. (el privativo por positivo) haze el producto $-bc$ y assi, que el producto de $a-b$ por c es $ac-bc$

Inuencion de $a-b$ por $+c$ es $ac-bc$. Pruevo sea (por tal lado) $a-b = e$ y sera (ax 2) ec ig.l al producto de $a-b$. por $+c$

Demostracion = por la supp. $a-b = e$: luego (por el ax 2) $a = b+e$: luego (ax 2) $ac = bc+ec$ * pero ec (ynuencion) es ig.l al producto

* $ac-bc = ec$

producto de $a-b$ por $+c$: luego. (Corolario 4. 2) $ac-bc$ es el producto que era log. Q. D.

Corolario

haviendose producido $ac-bc$ por la Multiplicacion de $a-b$ por c es claro (def. 9), que si $ac-bc$ se divide por c provendra el quociente $a-b$ y assi, que dividiendo el positivo ac, por el positivo c el quociente es positivo, pero diviendo el privativo $-bc$ por el positivo c el quociente sera Negativo $-b$.

Prop. 9 Th.

Si Un privativo se Multiplica por Un privativo el producto es positivo.

Hypotesis. ayase de Multiplicar $a-b$ por $-c$ es cierto (8) que a. Multiplicada por $-c$ da por producto $-ac$ digo ahora, que Multiplicado $-b$ por $-c$ da por producto $+bc$ y assi, que todo el producto es $-ac+bc$. Prevencion sea (postulado) $a-b \Omega e$, y sera (ax 2 y 8) $-ec$ igual al producto de $a-b$ por $-c$

Demostracion: Por la hypp. $a-b \Omega e$

: luego (a $\times$ 2º) $a \propto c+b$: luego (a $\times$ 2º. y 8.) $-ac \propto -cc-cb$: luego (a $\times$ 2º) $-ac+cb \propto -cc$ pero (precedente) $-cc$ es ig.^l al producto de $a-b$ por $-c$: luego (corolario 4) $-ac+cb$ es el producto q. Era lo q.s.d.

Corolario 1º

hauiendose producido $-ac+bc$ por la Multiplicacion de $a-b$ por $-c$ es claro (por la difin. 9) que si $-ac+bc$ se buelue à diuidir por $-c$ prouendra por quociente $a-b$ y assi diuido el priuatiuo $-ac$ por el priuatiuo $-c$ el quociente sera positiuo; pero diuidiendo el positiuo $+bc$ por el priuatiuo $-c$ el quociente sera el priuatiuo $-b$.

Corolario 2ª

Esto es el fundamento delas reglas dela logistica Especiosa En las Multiplicaciones y diuissiones delas quantidades compuestas o polinomios; Conuiene a saber. las mismas señales $+$ por $+$, ò $-$ por $-$ produce la señal $+$ pero las señales diuersas $+$ por $-$, ò $-$ por $+$ producen señal $-$ Como se ve en los siguientes Exemplos.

Exemplos

Exemplos dela Multiplicacion

$$\begin{array}{rrr} & a & +b \\ & a & -b \\ \hline & -ab & -bb \\ +aa & +ab & \\ \hline +aa & 0 & -bb \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & & a & -b \\ & & c & -d \\ \hline & & -ad & +db \\ ac & -cb & & \\ \hline ac & -ad & -bc & +bd \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3d-4e+2f \\ 5d-g \\ \hline +15dd-20de+10fd \\ -3gd+4ge-2fg \\ \hline 15dd-20de+10fd-3gd+4ge-2fg \end{array}$$

Exemplos dela division

ayase de dividir aa−bb por a+b. como en L.

$$\begin{array}{lrrr} & +a & -b & \\ L\ldots & aa & -bb & \\ M\ldots & a & +b & \\ N\ldots & aa & +ab & \\ \hline P\ldots & 0 & -ab & -bb \\ Q\ldots & & a & +b \\ R & & -ab & -bb \\ \hline S. & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Y subscribase el divisor .a. ó b
Si tomo .a. voi a buscar en el
dividendo el termino q
conviene .a. y assi digo aa
dividido por a el quociente
(corolario 2) es a anotese
el es quociente parcial como

En t. y multipliquese por el divisor a+b
y produce (corolario 2) la quantidad N. tirase
una raia, y restase este producto dela quan-
tidad L. y porq no ai en esta quantidad
termino de quien poder restar +ab se
escribe despues del cero con la señal − y
baxo el termino siguiente dela quantidad

à Esta nueua quantidad se subscribe el mis=
mo diuisor. M. como se ve en q. buscase
en ella el termino, q̃ tiene a. y se dice
$-ab$ partido por a da (corolario 2) el quociente
$-b$, que con su señal se escribe en. t. y mul=
tiplicando por el diuisor Q. produce (corol. 2)
el producto R. el qual restado de P. el residuo
S. es nada.

Si al fin dela diuision resta al-
guna cosa, o no se puede hacer la diuision
por la diuersidad delas letras dela quantidad
y del diuisor se hara vn quebrado siendo
el diuisor denominador. Como si se ha de partir
$aa+bb$ por $a+b$ sera el quociente $\frac{aa+bb}{a+b}$
Item si se ha de partir a^3+b^3. por
$a-b$ sera el quociente $\frac{a^3+b^3}{a-b}$ &c.

Prop. 10 et 3.

Si dadas 3. quantidades ($a.b.c$) el producto
(ac) delas extremas fuere igual al producto
(bb) equiangulo dela media por si misma
la razon ($\frac{a}{b}$) dela 1. ala 2.ª es igual

ala razõ

a la raz. $\left(\frac{b}{c}\right)$ de la misma 2.ª a la 3.ª ; y si la razon de la 1.ª a la 2.ª fuere ig.^l a la raz.^n de la de la misma 2.ª a la 3.ª el producto de las extremas sera ig.^l al producto de la media por si misma.

Demostracion 1.ª p.^te: por la supp.^n $ac \backsim bb$ luego (ax. 2) $a \backsim \frac{bb}{c}$ y $\frac{a}{b} \backsim \frac{b}{c}$ que era lo primero = 2.ª p.^te por la supp.^n $\frac{a}{b} \backsim \frac{b}{c}$: luego (ax 2) $a \backsim \frac{bb}{c}$ y $ac \backsim bb$ que era lo 2.º luego si ~~et~~

corolario.

Si tres quantidades son continuas prop.^s el rectangulo de las extremas sera ig.^l al quadrado de la media, y al contrario

Prop. 11. 45.

Si dadas quatro quantidades (a. b. c. d.) el producto ad de las extremas es igual al producto equiangulo. bc. de las medias la raz.^n de $\left(\frac{a}{b}\right)$ de la 1.ª a la 2.ª es ig.^l a la raz.^n $\left(\frac{c}{d}\right)$ de la 3.ª a la 4.ª: y la raz.^n de la primera a la 2.ª fuere ig.^l a la raz.^n de la 3.ª a la 4.ª el producto de las extremas sera ig.^l al produto equiangulo de las medias =

Demostracion 1.ª p. por la Sup. $ad = bc$ luego ($a \times 2.°$) $a = \frac{bc}{d}$. y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. q. era lo 1.°
2.ª p.: Por la Supp. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: luego ($a \times 2$) $a = \frac{bc}{d}$ y $ad = bc$. que era lo 2.°: luego si dadas 4. quatro quantidades &c.ª

Prop. 12 Th.

Si dadas 4. quantidades ($a.b.c.d.$) el producto ad de las extremas es maior que el producto equiangulo (bc) de las medias la razon ($\frac{a}{b}$) de la 1.ª a la 2.ª es maior, que la razon ($\frac{c}{d}$) de la 3.ª a la 4. Y si la razon de la 1.ª á la 2.ª fuere maior, que la razon de la 3. a la 4.ª el producto de las extremas sera maior, q. el producto equiangulo de las medias.

Demostracion = 1.ª p. por la Supp. $ad + q\, bc$: luego ($a \times 3.°$) $a + q \frac{bc}{d}$ y $\frac{a}{b} + q \frac{c}{d}$. que era lo 1.° = 2.ª p. por la suposicion $\frac{a}{b} + q \frac{c}{d}$: luego ($a \times 3$) $a + q \frac{bc}{d}$ y $ad + q\, bc$ que era lo 2.°. : luego si dadas quatro quantidades &c.ª

Prop. 13. Th.

Si dadas quatro quantidades ($a.b.c.d$) el producto (ad). de las extremas fuere

menor

Menor, que el producto equiangulo (bc) delas Medias la razō $\left(\frac{a}{b}\right)$ dela 1.ª y 2.ª es menor, que la razō $\left(\frac{c}{d}\right)$ dela 3.ª à la 4.ª Y si la razō dela 1.ª à la 2.ª fuere menor que la razō. dela tercera ala 4.ª el producto delas Extremas sera menor, que el product Equiangulo delas Medias.

Dem.ⁿ 1.ª p.ᵗᵉ porla Suposs.

$ad \lneq bc$. luego $(a \times 3)$ $a \lneq \frac{bc}{d}$ y $\frac{a}{b} \lneq \frac{c}{d}$ que era lo 1.º 2.ª pa.ᵗᵉ: porla Sup. $\frac{a}{b} \lneq \frac{c}{d}$: lueg $(a \times 3)$ $a \lneq \frac{bc}{d}$ y $ad \lneq bc$, que era lo 2.º luego o. q. l. d.

Corolario 1.º

Dadas quatro qualesquiera quantidades (a.b.c.d) la razō. dela 1.ª ala 2.ª $\left(\frac{a}{b}\right)$ ala razō. dela tercera ala 4. $\left(\frac{c}{d}\right)$ es como el producto ad dela 1.ª y 4.ª × si ig.ᵗᵉ (11) igual; si Major (12.) maior si menor (13) menor. × al producto b. dela 2.ª y 3.ª

Corolario 2.º

La razō. q. qualq.ʳᵃ dos productos, Equiangulos (ad. bc) tienen entresi, esa misma tienen sus lados tomados reciproca.ᵗᵉ esto es tomando de Enel uno un lado por antecedente, y enel otro

otro lado por consequente dela 1.ª Razon
y en esta misma el otro lado por antecedente
y en el 1.º el otro lado por consequente dela
2.ª Razon como se ve aqui.

$$ad \,..\, bc \,::\, \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} \,..\, \frac{c}{d} \\[4pt] \frac{a}{c} \,..\, \frac{b}{d} \\[4pt] \frac{d}{b} \,..\, \frac{c}{a} \\[4pt] \frac{d}{c} \,..\, \frac{b}{a} \end{array} \right.$$

Y assi si $ad \backsim bc$ (11) $\frac{a}{b} \backsim \frac{c}{d}$. si $ad +q\; bc$ por la (12) $\frac{a}{b} +q\; \frac{c}{d}$. &c.ª si $ad -q\; bc$ $\frac{a}{b} -q\; \frac{c}{d}$ por la (13) &c.ª

Corolario 3.º

Si de 4. terminos (a.b.c.d. prop.^s con prop. de igualdad el producto delos extremos, o medios se parte por uno delos otros dos terminos el quociente es ig.^l al otro delos dos extremos o medios, que no sirvio de divisor y assi

$\frac{bc}{d} \backsim a$. $\frac{bc}{b} \backsim c$ $\frac{ad}{c} \backsim b$

Corolario 4.º

(* esto es como A 1.ª à B 2.ª assi a 4.ª à b 3.ª o como a 4.ª à A 1.ª assi b 3.ª à B 2.ª (diff.^n dela pp.^n reciproca)

En toda proporcion reciproca A .. B .. b .. a * el producto del 1.º y 3.º es ig.^l al producto del 2.º y 4.º

2º. y 4º. porq. el 1º. y 3º. son ó los dos Extremos ó los dos Medios de una proporcion de igualdad directa en la qual los otros dos son los dos Medios, ó los dos Extremos.

1º modo

$Ab \backsim Ba$

$A \backsim \frac{Ba}{b}$

$\frac{A}{B} \backsim \frac{a}{b}$

2º modo

Item si el producto Ab del 1º. y 3º. es igl. al producto Ba. de el 2º. y 4º. los dos primeros son Reciprocos a los otros dos, porq. el 1º. y 3º son Extremos, ó Medios de una proporcion de igualdad directa donde los otros dos son Medios, ó Extremos.

Corolario 5

~~[illegible]~~

$Ab \backsim aB$

$\frac{Ab}{B} \backsim a$

$b \backsim \frac{a}{B}$

Corolario 5.

Los productos semejantes (ab. y cd) son

Son tambien iguales, si demas a mas alguun lado del uno fuere ig.^t a alguun lado homologo del otro como si es $a \backsim c$; porq siendo por la supp.^n $a \backsim c$ por ser semeSantes los productos $\overset{x}{ad}$ y bc sera (def. 18)

$\overset{x}{ab}$ y de $\frac{a}{b} \backsim \frac{c}{d}$: luego (2) $b \backsim d$: luego (ax 2°)

$\overset{x}{ab} \backsim de$ $\overset{x}{ad} \backsim bc$ que era log.^{do}

Corolario 6

Los quadrados son productos planos semeSantes, porq si lo son aa. y bb. es $\frac{a}{a} \backsim \frac{b}{b}$. Item los cubos son productos solidos semeSantes, porq si lo son aaa y bbb es $\frac{aa}{a} \backsim \frac{bb}{b}$ ò $\frac{a}{aa} \backsim \frac{b}{bb}$.

Corolario 7.

Los productos equiangulos (ab. cd) semeSantes à otro tercero (ef) son tambien semeSantes entre si porq por la supp. $\frac{a}{b} \backsim \frac{e}{f}$ y tener $\frac{c}{d} \backsim \frac{e}{f}$: luego (Scholio 4°) $\frac{a}{b} \backsim \frac{c}{d}$: luego (Diff. 18) ab semeSante al cd q.^e era log.^{do}

Prop. 19. th.

En toda razon geometrica de desigualdad el termino major (a) es ig.^l al termino menor (b) multiplicado

Multiplicado por el quociente dela division del Mayor por el Menor. esto es por el denominador dela razⁿ y el termino menor (b) es igˡ. al Mayor partido por el mismo denominador.

Preudᵒ: Sea postulado $\frac{a}{b}$ = e. Demostracion 1.ᵃ p. por la preudᵒ. $\frac{a}{b}$ = e: luego ($a \times 2^{o}$) a = be, que era lo primero = 2.ᵃ p. por la 1.ᵃ p. be = a: luego ($a \times 2$) b = $\frac{a}{e}$

Corolario 1º.

Si los terminos de una razⁿ. geometrica de Maior desigualdad son a y b, y el denominador della, fuere e. se podra expresar esa razⁿ. assi a .. $\frac{a}{e}$. y si la razⁿ fuere de menor desigualdad assi. a .. ea.

Propᵒ. 15. th.

Un todo (a) à otro todo (b) tiene la misma razⁿ. que una parte suia ($\frac{a}{e}$) a la parte ($\frac{b}{e}$) semejante del otro, y al contrario y si una parte ($\frac{a}{e}$) a otra semejante ($\frac{b}{e}$) tubiere la razⁿ, que el todo (a) al todo (b)

Sera tambien el residuo $(a-\frac{a}{e})$ al residuo $(b-\frac{b}{e})$ como el todo (a) al todo (b) ò como la parte $\frac{a}{e}$ ala parte $(\frac{b}{e})$ seme=jante. Isto el residuo $(a-\frac{a}{e})$ tiene al residuo $(b-\frac{b}{e})$ la razon, que la parte $(\frac{a}{e})$ ala parte $(\frac{b}{e})$ semejante, el todo a al todo b. tiene la mis=ma razon.

Demostracion 1.ª p. por la 11 $a..b::\frac{a}{e}..\frac{b}{e}$ porq (por la deff. 9) el producto delos Extremos y medios es $\frac{ab}{e}$. luego un todo a otro todo tiene la misma razon, que una parte suia ala parte semejante del otro, que era lo 1.º 2.ª p. por la misma razon $\frac{a}{e}..\frac{b}{e}::a..b$. luego tambien al contrario, que era lo 2.º

3.ª parte: por la supp. $\frac{a}{e}..\frac{b}{e}::a..b$, pero por la (11) $a-\frac{a}{e}..b-\frac{b}{e}::a..b$. porq (8) el producto delos Extremos y medios es $ab-\frac{ab}{e}$. luego (Schol. 4) $a-\frac{a}{e}..b-\frac{b}{e}::a..b$. Item $a-\frac{a}{e}..b-\frac{b}{e}::\frac{a}{e}..\frac{b}{e}$. luego si una parte a otra parte semejante tubiere la razon que el todo al todo sera tambien el residuo al residuo como el todo al todo, ò como la

parte

parte ala parte semejante, que era lo 3.º

$=4.^{a}\ p.^{te}$ Por la supp.^{n} $a-\frac{a}{e} .. b-\frac{b}{e} :: \frac{a}{e} .. \frac{b}{e}$

pero ($1.^{a}\ p.^{te}$) $\frac{a}{e} .. \frac{b}{e} :: a .. b$: luego por el (Scholio 4)

$a .. b :: a-\frac{a}{e} .. b-\frac{b}{e}$: luego si el residuo tiene al residuo la razon, que la parte ala parte semejante, el todo tiene al todo la misma razon, que era lo 4. luego O.^{a} q. H. d.

Scholio

N.º 1. Las partes, y los igualm.^{te} multiplices tienen la misma razon, y al contrario, porq.^{e} esta demostrado, que los todos tienen la misma raz.^{n}, que sus partes semejantes, y al contrario

N.º 2. Si algunas quantidades se multiplican, o parten por una misma quantidad, o por quantidades iguales, los productos, o quocientes tienen la misma raz.^{n}, que las quantidades multiplicadas, ò partidas = Y assi dados quatro quantidades, que constituian una proporcion Elevando, ò deprimiendo, esto es multiplicando o partiendo por una misma quantidad, o todos los 4. terminos: ò los antecedentes solos; o solo los consequentes, y finalm.^{te} solo los dos terminos

que constituyen qualqᵃ delas razones se quedar-
En la misma proporcion.

N.º 3.º Si dadas 4 quan-
tidades (a.. b. c. d) tomando qualesquiera igᵐᵉˢ
Multiplices dela 1ª. y 3ª (ae. y. ce) y otros quales=
quiera igualᵐᵉˢ Multiplices dela 2ª. y 4ª.
(bx. y. dx), tubieren la misma razon que los
Multiplices dela 2ª. y 4ª. las tales quatro quan-
tidades (a. b. c. d, Estan en Vna misma pro=
porcion de igualdad: Porq̃ siendo (supp.)
$\frac{ae}{ce} = \frac{bx}{dx}$ sera $ae = \frac{bxce}{dx}$, y $aedx = bxce$
: luego (ax 2º) $ad = bc$: luego (Corolario 2. 83) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
= Con la misma facilidad se demostrara, que
si los Multiplices dela 1ª. y 3ª tienen mayor razⁿ
que los Multiplices dela 2ª y 4ª, las quatro quan=
tidades constituien proporcion de mayor desigualdad

N.º 4.º Cada Vna razon geometrica se hallara
otra igˡ. suia multiplicando, o partiendo por Vna
misma quantᵈ. assi el antecedente, como el consᵗᵉ.
dela razon dada : porq̃ $\frac{a}{b} = \frac{ag}{bg}$. Item.
$a .. b :: \frac{a}{g} .. \frac{b}{g}$.

Prop. 46 th.

la summa

La summa $(a+b)$ de dos quantidades $(a \text{ y } b)$ a su semisumma $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ tiene la misma razon, q̃ su diff.ª $a-b$ a su semidiferencia $\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Demostracion: Por la ℔. $a+b \,..\, \frac{a+b}{2} :: 2 \,..\, 1$. porq̃ el producto de los Extremos, y Medios es el mismo $a+b$. Item por la misma razon $a-b \,..\, \frac{a-b}{2} :: 2 \,..\, 1$ porq̃ el producto de Extremos, y Medios es $a-b$. Luego (Scholio 4.) $a+b \,..\, \frac{a+b}{2} :: a-b \,..\, \frac{a-b}{2}$. que era log. ℔.

Corolario.

Siendo por esta $\frac{S}{Ss} \sim \frac{D}{Sd}$ sera $(ax\,2)$ $S \sim \frac{SsD}{Sd}$ y $S\,Sd \sim SsD$ y $Sd \sim \frac{SsD}{S}$, y $\frac{Sd}{D} \sim \frac{Ss}{S}$. Item siendo por la ℔. 5. $S+D \sim 2M$ sera $(ax\,2)$ $S \sim 2M-D$ y por lo demostrado ahora, y por el (Schol. 4) $2M-D \sim \frac{SsD}{Sd}$. Item siendo por la ℔. 6 $S-D \sim 2m$ sera $(ax\,2)$ $S \sim 2m+D$. y por lo demostrado ahora, y por el (Schol. 4) sera $2m+D \sim 2M-D$. y $(ax\,2)$ $2m \sim 2M-2D$ &.

Prop. 17 ℔.

En toda multiplicacion, la razon que la

que la Unidad (1) tiene al uno de los multi=plicadores (a, ò b) esa misma tiene el otro (b, ò a) al producto (ab)

Demostracion por la 11.

$\frac{1}{a} \backsim \frac{b}{ab}$, ò $\frac{1}{b} \backsim \frac{a}{ab}$ porq̃ el producto de Extremos y Medios es ab. luego en toda &c.

Prop.on 18.

En toda division la razon, que la Unidad (1) tiene al quociente $\frac{a}{b}$ esa misma tiene el divisor (b) a la quantidad (a) dividida.

Demostracion: $1 .. \frac{a}{b}$ :: b .. a. porq̃ multiplicando todos los terminos por b quedan asi b .. a :: bb .. ab. pero estos por la (11) estan en proporcion de igualdad: luego (N.º 2 Scholio. 15) tambien los 1.os, que era lo q̃. s. d.

Scholio

N.º 1.º La Unidad, ni multiplica, ni parte las quantidades.

N.º 2.º toda razon tiene à la Unidad ~~la razon~~ la razon, que el antecedente tiene al consequente esto es $\frac{a}{b}$ .. 1 :: a .. b porq̃ multip.do estos terminos por b quedan (11) estos terminos en

proporcion

Proporcion de igualdad; y asi (Nº 2 Scholio 15) tambien ellos lo estan, con q. si $a = b$ sera $\frac{a}{b} = 1$ si $a +q, b$ sera $\frac{a}{b} +q, 1$. si $a -q b$ sera $\frac{a}{b} -q 1$.

N.º 3. Toda razon es a la Unidad como el producto de su antecedente y conseq.te al producto equiangulo del conseq.te por si mismo esto es $\frac{a}{b} .. 1 :: ab .. bb$, porq. elevando estos terminos por b. quedan por la (16) en proporcion de igualdad; y asi (nº 2 Scholio 15.) tambien ellos lo estan.

Nº 4. En toda razon $\frac{a}{b}$ el antecedente tiene al Consequente la razon, que el producto del antecedente, y conseq.te tiene al producto equiangulo del conseq.te por si mismo. Esto es $\frac{a}{b} = \frac{ab}{bb}$; porq. $abb = abb$.

N.5. Toda Una quantidad absoluta .a. se reducira à respectiva, que tenga un consequente dado .b. multiplicando la quantidad dad .a. por el quociente dado .b. y al producto ab se le pondra el consequente dado .b. y assi $a = \frac{ab}{b}$ porq. elevando por b. uno, y otro termino del

Coteso

quedan $ab = ab$.

N 6. dada Una razon $\frac{c}{a}$ se multiplicara por Una quantidad absoluta dada .b. ò esta .b. se multiplicara por aquella $\frac{c}{a}$ assi $\frac{bc}{a}$. porq̃ $1 .. \frac{c}{a} :: b .. \frac{bc}{a}$ porq̃ eleuando por a. los consequentes (por 14, 11) los terminos estan en proporcion de igualdad luego (nº 2 Scholio. 15) tambien los primeros

N.7. Dada Una quantidad absoluta c se partira por Una razon dada $\frac{a}{b}$ multiplicando la quantidad absoluta por el consequente dela razon, y poniendo este producto por antecedente y el antecedente dela razon dada por consequente assi $\frac{bc}{a}$. porq̃ $1 .. \frac{bc}{a} .. \frac{a}{b} .. c$ porq̃ eleuando los terminos por a. y despues los productos por b sera el producto de Extremos, y medios $bbac$.

N. 8. para partir Una razon por Una quantidad absoluta dada c. basta multiplicar solo el consequente dela razon por la quantidad dada. assi $\frac{a}{bc}$. porq̃ $1 .. \frac{a}{bc} :: c .. \frac{a}{b}$ porq̃ eleuando sera el producto de Extremos, y medios $bbbcca$.

N9.

N.º 9. Si dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{d}$ tienen el mismo antecedente tienen entresi la razon reciproca de sus consequentes. esto es $\frac{a}{b}..\frac{a}{d}::d..b.$ porq. (corolario .1.º3) $\frac{a}{b}..\frac{a}{d}..ad..ab.$ pero (tl) $ad..ab::d..b.$ luego (Scolio .4.) $\frac{a}{b}..\frac{a}{d}::d..b.$ = pero si dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$ tienen el mismo consequente, tienen entresi la razon, que sus antecedentes, lo qual se demuestra con la misma razon.

Prop. 13 Probl.

Dadas dos razones ($\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$) de diversos consequentes reducirlas á otras iguales suias que tengan el mismo conseq.te

Construccion = multipliquese el antecedente dela 1.ª con el conseq.te dela segunda, y el producto .ad. sera antecedente de otra razon ig.l ala 1.ª item multipliquese igualm.te el antecedente dela segunda con el consequente dela 1.ª y el producto .bc equiangulo con el 1.º sera antecedente de otra razon ig.l ala 2.ª y el producto equiangulo .bd. delos consequentes delas dos razones dadas sea el comun consequente delas nuevas razones ig.s alas dadas.

Demostracion = por la (11) $\frac{a}{b} \backsimeq \frac{ad}{bd}$ porq. abd es el mismo. Item por la misma $\frac{c}{d} \backsimeq \frac{ad}{bd}$ porq. cbd: luego las dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se han reducido à otras dos $\frac{ad}{bd}$. y $\frac{cb}{db}$ iguales à ellas, y que tienen el mismo consequente Q.H.H.

Lo mismo se hara, quando huviere mas q. dos razones, como $\frac{b}{a}$. $\frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n}$ porq. sus ig.s por su orden seran $\frac{bdn}{adn}$. $\frac{can}{adn}$. $\frac{mad}{adn}$

Prop. 20 Probl.

Sumar dos razones $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$ de un mismo conseq.te, ò reducidas à el por la prop. 19.

Construccion = Sumense los antecedentes a y. b y dese el mismo conseq.te c. digo, q. $\frac{a+b}{c} \backsimeq \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ = Demostracion = Multiplicando por. c. los terminos del cotejo, quedan $a+b \backsimeq a+b$: luego por el (ax 2) $\frac{a+b}{c} \backsimeq \frac{a+b}{c}$. luego &c. Q.H.H.

Scolio.

N. 1º.

N.º 1.º La summa de dos razones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{d}$ es por la 19. y por esta $\frac{bd+ac}{ad}$ pues (n.º 2 schol. 18) $\frac{b}{a}+\frac{c}{d}$ .. 1 :: $bd+ac$ .. ad

N.º 2.º Dada una quantidad absoluta . a . se sumara con una respectiva $\frac{b}{c}$. reduciendo (n.º 5 schol. 18) la absoluta . a . en respectiva, que tenga el consequente dado, y añadiendo al anteced.te de esta raz.n el dela razon dada, por esta. Item sumaranse muchas quantidades absolutas con muchas respectivas sumando de por si las absolutas, y de por si las respectivas, y despues haziendose la suma, como queda dicho

Prop. 21. Probl.

Restar una raz.n ($\frac{a}{b}$) de otra, que tiene el mismo conseq.te $\frac{c}{b}$. o reducides àel por la pp. 19.

Construcion = restese el menor antecedente (sea c) del maior (a) y al residuo a−c dese sele el mismo conseq.te (b) digo, $\frac{a-c}{b}$ ∾ $\frac{a}{b}$ ⊣ $\frac{c}{b}$ = Demostracion: multiplicando por b los terminos del consq.to queda a−c ∾ a−c : luego (ax 2)

$\frac{a-c}{b} \backsim \frac{a}{b} - \frac{c}{b}$: lueg. Q.HH.

Scholio.

N.1º. La diffª. de dos razones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{d}$ es por la 19. y por esta $\frac{bd-ca}{ad}$ y assi (nº 2 Schol. 18) $\frac{bd-ca}{ad}$ t :: bd-ca . ad

N2º. Restese Vna quantidad absoluta de Vna Respectiva ò al contrario reduciendo (nº 5. Schol. 18) la absoluta, a respectiva, que tenga el mismo conrreqte. y despues restando por esta la Vna dela otra. Ytem restarase Vna absoluta y Vna respectiva de otra absoluta, ò al contrario, summando (nº.2. Schlo. 20) la absoluta con su respectiva, y restando por lo dicho àhora desta summa la absoluta, ò al contrario. Ytem. Vna absoluta y Vna respectiva, de otra absoluta, y otra respectiva, summando cada absoluta con su respectiva, reducidas essas summas a Vn comun conreqte. se hara la substraccion

Prop. 22. Probl.

Dadas dos razes. ($\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$) multiplicar la Vna

Vna por la otra.

Construcion multipliquense los antecedentes entresi, y el producto ac sera antecedente dela nueva razon, y el producto Equiangulo bd. delos consequentes sera Consequente dela misma. = Demostracion

$1 .. \frac{a}{b} :: \frac{c}{d} .. \frac{ac}{bd}$. porq elevando estos terminos por las quantidades b. d. y bd es el producto delos Extremos y medios $b^{3} d^{8}$. ac. luego (por la 17) Esta bien hecha la Multiplicacion delas dos razones. &c.

Dela misma suerte se produce si ay mas razones. como $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ &c.

Scholio.

Vna quantidad absoluta, y Vna respectiva, se multiplicaran por Vna absoluta, o al contrario Summando (n.º 2.º Schol. 20) la absoluta con su respectiva, y despues haciendo por esta la multiplicacion. Item Vna absoluta y Vna respectiva se multiplicara por otra absoluta, y por otra respectiva sumando cada absoluta con su respectiva, y despues haziendo por esta la multiplicacion.

Prop. 23. Probl.

Dadas dos Razones $\left(\frac{a}{b}\ y\ \frac{c}{d}\right)$ partir la Vna $\left(\frac{a}{b}\right)$ por la otra $\left(\frac{c}{d}\right)$

Construccion: Multipliquese el ante dela que se hade diuidir conel conseq. dela q̃ es diuisor, y el ante dela q̃ es diuisor Multipliquese igualm. conel conseq. dela q̃ se hade diuidir: el primer producto (ad. sera antecedente, y el 2.º equiangulo bc sera el conseq. del quociente, q̃ se busca.

Dem. Por la

(11) $1 \cdot\cdot \frac{ad}{bc} :: \frac{c}{d} \cdot\cdot \frac{a}{b}$ porq̃ Multiplicando estos terminos por las quantidades bc, d, y b. el producto delos Extremos, y Medios es $b^3 . d . c^2$ luego (18) esta bien hecha la diuision q. s. H.

Scholio.

Partirase Vna quantidad absoluta con Vna respectiua por Vna absoluta, o por Vna absoluta con respectiua reduciendolas (n.º 2.º Scholio 20) a las summas, y despues haziendo por esta pp. la diuision.

Propn. 24. Probl.

Dadas tres quantidades (a. b. c) hallar la qua proporcional

Proporcional.

Construccion. Multipliquese la 2.ª por la tercera, y el producto bc partase por la 1.ª digo, q. el quociente $\frac{bc}{a}$ es la quarta proporcional que se busca.

Dem.ⁿ por la (M) $a \cdot\cdot b :: c \cdot\cdot \frac{bc}{a}$ porq. Elevando todos los terminos por a es el producto de Extremos, y Medios $aabc$. luego &c. Q. H. H.

Scholio.

N.º 1. Este mismo quociente $\frac{bc}{a}$ demostrado quarto prop.ˡ á las tres quantidades $a. b. c$ sale lo prim.º partiendo la 2.ª quantidad por la primera. assi $\frac{b}{a}$. y Multiplicando este quociente por la tercera c. = lo 2.º partiendo la tercera quantidad por la 1.ª assi $\frac{c}{a}$ y Multiplicando este quociente por la 2.ª, que en uno, y otro caso es (n.º 4. Scolio 18.) $\frac{bc}{a}$. = Lo 3.º partiendo la 1.ª quantidad por la 2.ª assi $\frac{a}{b}$. y partiendo por este quociente la 3.ª quantidad. c. = Lo 4.º partiendo la 1.ª quantidad por la 3.ª assi $\frac{a}{c}$ y partiendo por este quociente la segunda quantidad b. porq. en uno, y otro caso es (n. 7. Schlio. 18) $\frac{bc}{a}$.

N.° 2.° delos tres terminos dados uno, ò dos ò todos tres pueden ser quantidades respectivas si el uno, ò puede ser el 1.° ò el 2.° ò el 3.°. Si dos ter=minos son quantidades respectivas pueden ser, o el 1.° y 2.°, ò el 2.° y 3.° o el 1.° y 3.° en todos estos casos propuestos la construcion para dexarlos en terminos absolutos es la que se ve en ellos

1.°

$\frac{a}{b} \ldots c \ldots d. \quad a \ldots bc \ldots d$, ò $a \ldots c \ldots bd$

$a \ldots \frac{b}{c} \ldots d \quad ac \ldots b \ldots d$

$a \ldots b \ldots \frac{c}{d} \quad ad \ldots b \ldots c$

$\frac{a}{b} \ldots \frac{c}{d} \ldots e \quad ade \ldots bc \ldots d$

$a \ldots \frac{b}{c} \ldots \frac{d}{e} \quad ace \ldots b \ldots d$

$\frac{a}{b} \ldots c \ldots \frac{d}{e} \quad ae \ldots c \ldots bd$

3.

$\frac{a}{b} \ldots \frac{c}{d} \ldots \frac{e}{f} \quad adf \ldots cb \ldots e$

La razon dela equi=valencia en todos los casos es el N.° 2.° schlio 15. reducidos

reducidos pues los terminos dados á su equivalentes se executará con ellos la construccion deste problema y saldrá el quarto termino prop.

N.3º. Si uno delos tres terminos dados fuere quantidad absoluta, y juntamente respectiva, se summará (n.2º Schol. 20) la absoluta con la respectiva, y se resolverá el Problema segun el n.2º deste: como si los terminos dados son $a + \frac{b}{c} \ldots d :: e$ sus equivalentes serán $\frac{ac+b}{c} \ldots d :: e$. y por el nº 2º. los terminos conque se resolverá el Problema serán $ac+b \ldots cd :: e$ y ultimadamente el 4º termino prop. $\frac{cde}{ac+b}$

N.4º. En esta proporcion se funda la regla de tres, porq̃ dados tres terminos conocidos se busca el quarto, que tambien se llama de oro por su utilidad, y de proporcion, porq̃ los tres dados, y 4º. que se busca, constituien una proporcion de igualdad en la qual, si creciendo el tercer termino, tambien el 4. ha de crecer, y menguando el 3º. el 4º. ha de menguar es proporcion Directa

Como si 80 ꝛ. ganan 200: 32 ꝛ que ganaran?
Lo mismo es en las mercadurias, cambios, é
interesses. Donde se notara lo 1º. que siempre
que el termino de la misma especie, que el
que falta esta en primer lugar es menester
alterar los terminos por no estar con el
debido orden = Como si en 15 dias. se ganan
120 ꝛ para ganar 500 ꝛ de que dias saldran?
= Lo 2º, que algunas vezes se dan dos terminos
simples, y uno compuesto, y assi se ha de hazer
composicion de los otros dos: Como por cada duca=
do comun ai 1 ꝛ de derechos, se han ganado
550 ꝛ communes. quanto importaran los derechos
y assi porq los 500 ꝛ se componen de caudal, y de
derechos se avra de componer tambien el
ducado con su derecho, y se dira. si en 12 ꝛ
ai 1. ꝛ de derechos en 550 ꝛ, que avra? ó si
en 12 ꝛ ai 11. de caudal en 550, que caudal ai?
lo mismo se observara en cambios, intereses
y reduccion de monedas.

Prop. 25. Probl.

Dada una quantidad (a) dividirla en partes
x y z

x. y. z. proporcionales alas partes (c. d. e) de otra quantidad (b) dada.

Construcion. Lo 1º

Multipliquese la quantidad. a. por. c. y el producto partase por b. digo que el quocien^{te} $\frac{ac}{b}$ = x.

Lo 2º. Multipliquese. a. por. d. y el producto partase por. b. sera $\frac{ad}{b}$ = y. Y lo tercero multipliquese. a. p. e. y el producto partase por. b. y sera $\frac{ae}{b}$ = z el Mapa es el sig^{te}

$$b \,..\, a :: \begin{cases} c \,..\, \frac{ac}{b} = x \\ d \,..\, \frac{ad}{b} = y \\ e \,..\, \frac{ae}{b} = z \end{cases}$$

Demostracion En todos los casos el producto de Extremos, y Medios es el Mismo: luego por la 11. son proporcionales En proporcion de igualdad

Prop. 26. Problema.

Dadas tres quantidades (a. b. c) hallar la 4.ª la qual tenga ala 3.ª la misma razon que la 2.ª à la 3.ª

Construc^{on}

Construcion: Multiplíquese la 1.ª con la 2.ª y el producto .ab. partase por la 3.ª digo q̃ $\frac{ab}{c}$ es la quantidad, que se busca = Dem.ⁿ Por la M. $\frac{ab}{c}$ .. a :: b .. c porq̃ elevando por ç el producto de Extremos, y medios es .cab. luego &c.

Scholio En esta proporcion se funda la regla de tres inversa. como si treinta soldados hazen una faena en dos oras 40. soldad.^s en quanto lo haran?

Pero notese, que algunas vezes parece la proporcion inversa. y no lo es sino que estan los terminos fuera de su lugar. como si una redoma se llena con 20 quartos de vino de 5. r.^s por quantos quartos se llenara de vino de 8 r.^s siendo la especie, que falta los quartos, no pueden estar los quartos en primer lugar. y assi se dira. 5 r. dan 20 quartos 8 r. que quantos daran?

Prop. 27 Probl.

Dada una razon $\left(\frac{a}{b}\right)$ hallar otra reciproca a la dada.

Contrucion

Construccion. Multipliquense entre si los terminos dela razon dada, y el producto ab partase por qualqr. quantidd. x. digo que la razon del quociente $\frac{ab}{x}$ a el divisor es reciproca ala dada

Demn. por la 11.

$x \,..\, a :: b \,..\, \frac{ab}{x}$ porq. elevando por x el producto de extremos, y medios es xxab. luego &c.

Propn. 28 Probl.

Dada una razon $\left(\frac{a}{b}\right)$ reducirla à otra igual, que tenga un conseqte. (d.) dado.

Construccion: Hagase por la 24. como $b \,..\, a ::$ $d \,..$ àotro quarto termino, que sea e. digo q. $\frac{e}{d} = \frac{a}{b}$. $\frac{ad}{b}$

Demn. por la Constn. $\frac{b}{a} = \frac{d}{e}$ luego (ax 2) $b = \frac{ad}{e}$. y $be = ad$: luego $e = \frac{ad}{b}$ y $\frac{e}{d} = \frac{a}{b}$. que era loq. &c.

Scholio.

*assi

N.º 1.º *assi como dela division delos Enteros en varias partes nacen los num. quebrados, assi tambien, de esas mismas partes subdividîdas en otras menores nacen

los quebrados de quebrad.^s Escribense assi
$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{7}$ y quiere decir tres quintas partes
de Un sexmo de tres Septimos = Para las
operaciones destos quebrados se necessita
reducir los à quebrados simples, loque
se Executa multiplicando (22) estas
razones, y reducidos se manejan enla
misma conformidad, que los quebrados
simples cuia theorica, y practica quedan
demostradas debaxo del Nombre de razon
y de quantidad respectiua. Solo resta
ad Vertir, que Un quebrado $\frac{12}{4}$ maior
que su entero se reduciria à entero, partiendo el denominador 12. por el denomi=
nador 4. y el quociente 3. sera el entero
aque equivale porq. $\frac{12}{4}$ a 3.

N.^{o} 2.^{o} Dados quales=
quiera dos num.^s enteros (20. y 32) se hallara
su razon mas abreuiadad, y su mayor com=
mun medida. lo 1.^o buscando los num.^s pri=
mos por los quales, pueden Exactam.^{te} diui=
dirse los tales num.^s como por 20. son 1.
2. 5.

Y para

Y para 32. son 1.2 (dela Unidad no se haze caso). Lo 2º. diuidiendo cada Nº. dado por el maior comun numero primo, que en el caso presente es 2. y se tendra para 20. 10, y para 32. 16. = Lo 3º mirando si el maior comun numero primo puede seruir para diuidir exactamente los quocientes hallados, y por q. aqui pueden diuidirse 10. y 16 por 2. y seran los quocientes 5. 8. y viendo, que 2. como ni otro alguno delos Numeros comunes primos delos dos dados, puede diuidir à 5. y 8. se concluira, que la raz. de 5. à 8 es la raz. mas abreuiadad. de 20 à 32 = Ultimadamente. para conocer su medida major commun, multipliquense continuadamente todos los numeros primos, que han seruido à las diuisiones hechas: como en el exemplo el mismo numero 2. que siruio à las dos diuisiones, y se concluira que 4. producto de 2. por 2. es la maior medida comun de 20. y 32. y assi de de otros.

Si los num. dados fueren primos entre si no se podra reducir á menores terminos su razon porq. todos los num. primos son en su razon los minimos.

Prop. 29. Th.

Si huviere qualesq.ra quantidades (a. b. c. d.) de el mismo genero, la razon de la 1.a (a) ala ultima (d) es la misma, que la compuesta de las razones $\left(\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}\right)$ intermedias

Demostr.n por la 11. $\frac{abc}{bcd} \backsim \frac{a}{d}$ porq. el producto de medios, y extremos es abcd. luego &a.

Corolario 1.o

La razon compuesta es ig.l alas razones de que se compone, y al contrario. porq. esta demostrado $\frac{abc}{bcd} \backsim \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} \div$

Corolario 2.o

La raz. duplicada es una razon compuesta de dos razones iguales: la triplicada compuesta de tres razones iguales &a. porq. $\div$ a. b. c. d. f &c.a por la supp. $\frac{a}{b} \backsim \frac{b}{c}$ pero $\frac{ab}{bc} \backsim \frac{a}{c}$. Item

por la

por la Supp. $\frac{a}{b} \backsim \frac{b}{c} \backsim \frac{c}{d}$: pero $\frac{abc}{bcd} \backsim \frac{a}{d}$: luego 3.º
(Corolario 3) qualesquiera productos equiang.
planos, o solidos (ab. y cd, ó abc, y def)
tienen entresi la razon compuesta de sus
lados: porq. Corolario 1.º ($\frac{ab}{cd} \backsim \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$. Item.
$\frac{abc}{def} \backsim \frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f}$.

Prop. 30 Probl.

dada una razon simple ($\frac{a}{b}$) convertirla en comp.^da
y dada una razon compuesta ($\frac{ac}{bd}$) convertirla en
simple

Primera parte. Construccion multipliquese
cada uno delos terminos a. y. b por la misma
quantidad x. digo q. $\frac{ax}{bx} \backsim \frac{a}{b}$ porq el producto
de extremos, y medios es. axb.

2.ª parte. Construccion

Hagase (24). como c.. d:: b.. á otro quarto ter-
mino. g. esto es agase la razon $\frac{b}{g}$ igual á
una delas q. componen la razon compuesta
dada: con q. sera (ax. 2.) $\frac{ac}{bd} \backsim \frac{ab}{bg}$. pero (29)
$\frac{ab}{bg} \backsim \frac{a}{g}$: luego (Scholio 4.) $\frac{ac}{bd} \backsim \frac{a}{g}$ y assi en adelante
si la razon compuesta se compusiere de mas
razones.

Prop.ⁿ 31.

Scholio sobre la Naturaleza dela Razon Compuesta.

N.º 1.º Todo lo, que se demostró en las proposiciones. 11. 12. y 13. se entiende tambien por las mismas demostraciones delas razões y assi lo q.º dadas qualesq.ra quatro razones $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{d}$ $\frac{e}{f}$. y $\frac{g}{h}$. la proporcion entre la 1.ª y 2.ª ala proporcion entre la tercera y 4 es como la raz. comp.ta dela 1.ª y 4.ª ala razon comp.ta dela 2.ª y 3.ª sig.te (11) ig.l: si maior (12) maior: si menor (13 men.or

= L.º 2.º la razon, q qualesq.ra dos razones comp.tas tienen entresí, esa misma tienen las proporciones delas lados tomados reciprocam.te: y assí si son las razones compuestas $\frac{ag}{bh}$. y $\frac{ce}{df}$ esta razon como aquí

$$\frac{ag}{bh} \cdot\cdot \frac{ce}{df} \because \begin{cases} \frac{a}{b} \cdot\cdot \frac{c}{d} \cdot\cdot \frac{e}{f} \cdot\cdot \frac{g}{h} \\ \frac{a}{b} \cdot\cdot \frac{e}{f} \cdot\cdot \frac{c}{d} \cdot\cdot \frac{g}{h}. \\ \frac{g}{h} \cdot\cdot \frac{c}{d} \cdot\cdot \frac{e}{f} \cdot\cdot \frac{a}{b} \\ \frac{g}{h} \cdot\cdot \frac{e}{f} \cdot\cdot \frac{c}{d} \cdot\cdot \frac{a}{b} \end{cases}$$

N.º 2.º Si huviesse dos razones compuestas $\frac{ag}{bh}$ y

$\frac{ag}{bh}$ .y. $\frac{ce}{df}$. la 1.ª ala Segunda tiene la mesma razon, que el producto (agdf) de los antecedentes dela 1.ª y consequentes de la 2.ª tienen al producto (bhce) Equiang.es delos conseq.tes dela 1.ª, y antecedentes dela 2.ª porq.e (corolario 1. 13) $\frac{ag}{bh}$ .. $\frac{ce}{df}$ :: agdef .. bhce.

Donde Senotarà, que enlas razones comp.tas se puede arguir permutando, o inVertiendo. Porq.e lo 1.º assi los antecedentes entresi, como los consequentes entresi. Item cada Vno, ò todos los antecedentes dela Vna, con los consequentes dela otra se pueden permutar, yasi enlas dos razones compuestas dichas, se puede inferir qualesquiera delas combinaciones dichas delas quales ai aqui algunas

$$\frac{ga}{bh} = \frac{ce}{df} \;.\text{ò}\; \frac{ag}{bh} = \frac{ce}{dt}. \;\&^{a}$$

$$\frac{ad}{bh} = \frac{ce}{gf} \;.\text{ò}\; \frac{ag}{be} = \frac{he}{df}. \;\&^{a}$$

$$\frac{df}{bh} = \frac{ce}{ag} \;.\text{ò}\; \frac{ag}{ce} = \frac{bh}{df} \;.\&^{a}.$$

Lo 2.º cada Vna delas razones dela Vna puede ponerse enla otra Vanda del coteio inVersando. y assi se puede inferir, luego $\frac{a}{b} = \frac{ceh}{dfg}$. Y assi como aqui la razon $\frac{g}{h}$ se puso inuersa en la otra banda del coteso assi tambien qualquiera otra razon, y aun todas pueden transferirse ala otra parte inVersando; y la razon de todo esto, es porq̃ son los mismos los productos. $agdf\ bhce$.

N.º 3º. Si las razones ($\frac{a}{b}$. y $\frac{c}{d}$ de que se compone una razon ($\frac{ac}{bd}$) son ig.^s alas razones ($\frac{e}{f}$. y $\frac{g}{h}$) de que se compone otra razon ($\frac{eg}{fh}$) la razon compuesta delas primeras es ig.^l ala razon compuesta delas segundas porq̃ siendo (por supp.º) $\frac{a}{b} \backsim \frac{e}{f}$. y $\frac{c}{d} \backsim \frac{g}{h}$. sera (ax. 2) $\frac{ac}{bd} \backsim \frac{eg}{hf}$. y assi las razones duplicadas, o triplicadas &c.^a de iguales razões son iguales entresi. porq̃ las razones componentes. (Corol. 2. 29) son iguales.

N.º 4. Si dos razones compuestas $\frac{ac}{bd}$ y. $\frac{eg}{fh}$ son iguales, y una de las razones componentes dela una fuere ig.^l ala una delas razones componentes dela otra la razon residua dela q.^e es ig.^l ala razon à la Razon Residua dela 2ª. porq̃ siendo por (Supp.) $\frac{ac}{bd} \backsim \frac{eg}{fh}$. y $\frac{a}{b} \backsim \frac{e}{f}$ será (ax. 2º) $\frac{c}{d} \backsim \frac{g}{h}$ y assi si las Razones duplicadas, o triplicadas fueren igˡ. las Razones de quienes lo fueren lo serán tambien, porq̃ aquellas se componen destas, y esta demonstrado (Corolario 1º. 29) que las Razones componentes son igˡ. à la Razon compuesta.

N. 5. Si huviere qualesquiera dos Proporciones de igualdad ($\frac{a}{b} \backsim \frac{c}{d}$. y $\frac{e}{f} \backsim \frac{g}{h}$ los productos equiangulos delos terminos Homologos estan tambien en proporcion de igualdad esto es, ae .. bf :: cg .. dh. ~~y los productos equiangulos~~ porq̃ siendo $\frac{a}{b} \backsim \frac{c}{d}$. Item $\frac{e}{f} \backsim \frac{g}{h}$ será (ax. 2º) $\frac{ae}{bf} \backsim \frac{cg}{dh}$.

Nº 6. En toda Question Arithmetica de proporcion se han de distinguir dos partes. Una en que se conocen todos los terminos; otra, en que falta uno, que se busca y de tantas proporciones se compone la question quantos son los numeros conocidos dela 2ª. parte, Estas proporciones pueden ser

todas directas, o unas directas, y otras inuer
sas: para resoluerlas todas sirue el Methodo
siguiente.

Los terminos siempre se han de Escri-
bir de suerte, que el 1.º dela una parte sea
dela misma Especie que el 1.º dela otra corres
pondiendose el 1.º con el 1.º, 2.º con el 2.º &c. como
se ve en este Exemplo

Si con 20 d. gano 8 d. con 15 que ducados ganare.
y porq si se Escribe el termino, que falta en pri
mer lugar, y luego por su orden los terminos
dados dexando tantos a una parte como
a otra los productos dela una, y dela otra son
iguales, sera 3 terminos. 4.º 1.º — 2.º 3.º

Para questiones. 5 .... 6. 1. 2 — 3. 4. 5
7 ... 8. 1. 2. 3 — 4. 5. 6. 7
9 .... 9. 10. 1. 2. 3. 4 — 5. 6. 7. 8. 9.
11 .... 12. 1. 2. 3. 4. 5 — 6. 7. 8. 9. 10. 11

Y se podra formar un quebrado poniendo
los unos terminos por numerador, y los otros
por denominador v.g.ª $\frac{4.1.}{2.3.}$ y assi como quando
la proporcion es directa poner 4.1.º — 2.3. puede
facilm.te

facilm.te buscarse qualq.r termino v.g. el 1.o por saber (ax 2.o) que 1.o $\sim \frac{2.3}{4}$ &c.a En la misma conformidad se hallara qualquiera delos terminos delas otras proporciones. Y quando la proporcion fuere inversa el termino en quien se hallara la inversion mudara solu.te con su correspondiente pasandole de el denominador á el nominador. o al contrario. Siendo siempre divisores los terminos conocidos, que estan en aquella parte donde esta el termino, que se busca.

Prop. 32. th.

Si huviere dos proporciones $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h}$ y la razon delos productos equiangulos de las quantidades Extremas, y medias dela 1.a (ad. y bc) fuere ig.l á la razon delos productos equiangulos delas quantidades Extremas, y medias dela 2.a (eh. fg) las tales dos proporciones son semejantes, Y si dos proporciones fueren semej.tes la razon delos productos equiangulos delas quantidades Extremas, y medias dela 1.a sera igual á ala razon delos productos equiangulos delas quantidades Extremas, y Medias dela 2.ª

Demostracion. 1.ª p.te por la Sup.on $\frac{ad}{bc} \mathrel{\Omega} \frac{eh}{fg}$ pero (corolario 2.º 13) $ad \,..\, bc :: \frac{a}{b} \,..\, \frac{c}{d}$: luego (Schol. 4) $\frac{a}{b} \,..\, \frac{c}{d} :: eh \,..\, fg$, pero (corol. 2. 13). $eh \,..\, fg :: \frac{e}{f} \,..\, \frac{g}{h}$: luego (Scholio 4.) $\frac{a}{b} \,..\, \frac{c}{d} :: \frac{e}{f} \,..\, \frac{g}{h}$ que era lo primero = 2.ª part. Por la Sup.on $\frac{a}{b} \,..\, \frac{c}{d} \mathrel{\Omega} \frac{e}{f} \,..\, \frac{g}{h}$. pero por el (Corolario 1.º de 13.) $\frac{a}{b} \,..\, \frac{c}{d} :: ad \,..\, bc$ Item $\frac{e}{f} \,..\, \frac{g}{h} :: eh \,..\, fg$: luego (Scholio 4.) $\frac{ad}{bc} \mathrel{\Omega} \frac{eh}{fg}$. que era la 2.ª parte: luego &.ª

Prop.n 33. th.

Dadas qualesq.ra 4. quantidades del mismo genero viendo con ellas delos 9. primeros Modos de arguir se conservan en la misma proporcion de igualdad, sino es invirtiendo y converviendo, quando las dos razones son desiguales.

Hypotesis. Sean qualesq.ra quatro quantidades del mismo genero $am. a. bp. b.$ siendo el Exponente dela 1.ª razon $\frac{am}{a}$ la quantidad m, y el Exponente dela 2.ª razon $\frac{bp}{b}$ la quantidad p.

Demostr.

Demostracion. Si es $m \backsim q$. sera (def. 13)
$\frac{am}{a} \backsim \frac{bq}{b}$. y (11) $amb \backsim abq$. pero en todos
los. 9. primeros Modos de arguir, los produc-
tos de Extremos, y Medios son iguales, como
se vera Examinandolos: luego (30) se conser-
van en la misma proporcion.

Si es $m + q$. p. $\frac{am}{a} + q$
$\frac{bq}{b}$. y por la (12) $amb + q\ abq$. pero en todos los
9. Modos de arguir sucedera lo mismo,
Excepto inuertiendo, y conuirtiendo, que
sucedera lo contrario, porq el producto de
Medios sera maior, que el de los Extremos, por
la inversion de sus terminos.

Si es $m - q$. q. sera
(por la diff. 13) $\frac{am}{a} - q\ \frac{bq}{b}$. y por la (13) $amb - q\ abq$.
luego lo mismo sucedera en los 9. primeros
Modos de arguir, Excepto inuertiendo, y con-
uirtiendo, donde sucedera lo contrario.
porq el producto de los Extremos sera major
que el de los Medios por la inuersion de sus ter-
minos. luego &c.

El mapa de los. 9. primeros Modos

de arguir aplicados a quatro terminos, que
Estan en proporcion de igualdad es el Siguie.
de donde se inferira la applicacion a qual-
quiera otros 4. terminos, que estan en propor.
de Mayor, o Menor desigualdad.

$$\frac{Am}{a} \backsim \frac{Bm}{b}$$

1. $\frac{Am}{Bm} \backsim \frac{a}{b}$. ò $\frac{b}{a} \backsim \frac{bm}{am}$ $\qquad \frac{am}{am+a} \backsim \frac{bm}{bm+b}$

2. $\frac{am+a}{a} \backsim \frac{bm+b}{b}$, ò $\frac{am+a}{am} \backsim \frac{bm+b}{bm}$. ò

3. $\frac{am+a}{a} \backsim \frac{bm-b}{b}$. ò $\frac{a}{am+a} \backsim \frac{b}{bm-b}$ ò $\frac{am}{a-am} \backsim \frac{bm}{b-bm}$

4. $\frac{am}{a} \backsim \frac{am+bm}{a+b}$

5. $\frac{am}{a} \backsim \frac{am-bm}{a-b}$

6. $\frac{am+a}{am-a} \backsim \frac{bm+b}{bm-b}$ ò $\frac{am-a}{am+a} \backsim \frac{bm-b}{bm+b}$

7. $\frac{a}{am} \backsim \frac{b}{bm}$

8. $\frac{am}{am-a} \backsim \frac{bm}{bm-b}$

9. $\underline{ame} .. a :: bm .. \frac{be}{e}$. ò $am .. \frac{a}{e} :: bme .. b$

Y en cada uno de estos Modos de arguir haciendo los productos de los Extremos, y Medios pueden hazerse los argumentos del nº 2. Scholio pp 45. y sin hazerlos, los de la illacion 9.ª del Corol. de la pp. 14. Y a los terminos como estan en cada

Modo

de arguir se les puede ir applicando cada uno delos otros.

Scholio.

Si de quatro quantidades proporcionales con proporcion de igualdad, la 1.ª es mayor, o menor, o igl. conla 3.ª la 2.ª sera tambien, ò mayor, ò menor, o igl. conla 4.ª porq. por (supp.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. luego alternando $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ luego. (def.) si $a + q.\ c$ sera $b + q.\ d$. si $a = c$ sera $b = d$. si $a - q.\ c$ sera $b - q.\ d$.

Prop.ⁿ 34. th.

Dada qualq.ʳ proporcion ($\frac{ab}{cd} = \frac{e}{f}$) permutando las dimensiones (b. y d,) resulta una propor. semetante $\frac{a}{c} = \frac{de}{bf}$. Demost.ⁿ En la una, y en la otra, los productos equiangulos delas quantidades medias, y extremas tienen la misma razⁿ. porq son abf. y. cde. luego (37) son semetantes, que era &.

Prop.ⁿ 35. th.

Si huviere dos proporciones de igualdad q la una tubiere dos terminos iguales, o los mismos, con dos dela otra, los otros dela una y dela otra constituien una proporcion de igualdad.

Hypotesis sean 1°.

$\frac{a}{b} \sim \frac{d}{e}$ Itona $\frac{b}{c} \sim \frac{e}{f}$ digo, que $\frac{a}{d} \sim \frac{c}{f}$

Demostracion. por la Supp. $\frac{a}{b} \sim \frac{d}{e}$. ~~Item por (Supp.) $\frac{b}{e} \sim \frac{c}{f}$~~. luego alternando $\frac{a}{d} \sim \frac{b}{e}$ Item (por Supp.) $\frac{b}{c} \sim \frac{e}{f}$: luego alternando $\frac{b}{e} \sim \frac{c}{f}$. luego (Scholio 2.) $\frac{a}{d} \sim \frac{c}{f}$

Sean lo 2°. la

$\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$. Item. $\frac{b}{c} \sim \frac{d}{e}$: luego por la (11) af $\sim$ be. y be $\sim$ çd. luego (por el Corolario 1. 2) af $\sim$ çd: luego (n. 2° Scholio 13) $\frac{a}{d} \sim \frac{c}{f}$

Dadas pues qualesq.ra proporciones de igualdad con la calidad del titulo se deduciran ò al primer caso, en q. los terminos iguales en una estan en el 1°. y 3°. lugar, y en la otra en 2°. y 4°. ò al 2.° caso, en que en una estan en 1°. y en 4°. lugar, y en otra en 2°. y 3°. En el primer caso se llama. Razon directa, ò alterna; y en el 2°. Reciproca, pero en uno

Sen otro

y en otro los otros terminos constituien proporcion desigualdad

Prop. 36. Probl.

Dadas dos quantidades (a. y. b) hallar la 3.ª 4.ª 5.ª continua proporcional.

Construcion: Multipliquese la 2.ª b por si misma y el producto bb. partase por la a. digo, que el quociente $\frac{bb}{a}$ es la 3.ª que se busca.

Demostr.on por la 11. a .. b :: b .. $\frac{bb}{a}$. porq.e llevando por a, el producto de extremos y medios. aabb. luego dela misma suerte si la tercera se multiplica por si misma y el producto se parte por la 2.ª el quociente sera la 4.ª continua proporcional, y asi en adelante, multiplicando siempre la ultima por si misma, y partiendo el producto por la antecedente, como se ve enel Mapa sig.te

$$a .. b .. \frac{bb}{a} .. \frac{b^3}{a^2}\ \frac{b^4}{a^3}\ \frac{b^5}{a^4}\ \frac{b^6}{a^5}\ \frac{b^7}{a^6}\ \frac{b^8}{a^7}\ \frac{b^9}{a^8}.$$

Scholio.

N.º 1.º Los productos planos semejantes

(ab. y. cd) tienen entresi la Razon compuesta delas dos Razones iguales desus lados homologos, y assi (Corol. 2. 29) duplicada de sus lados. porq̃ siendo $ab \sim cd$, sera $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$. alternando. $\frac{a}{c} \sim \frac{b}{d}$, (pero (Corol. 3. 29) $\frac{ab}{cd} \sim \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$ luego el producto ab. à su semejante cd tiene la misma Razon de sus lados; y assi dadas tres quantidades continuas prop.es sera como la 1.a ala 3.a y assi el producto plano, que se formare con la 1.a al producto plano semejante que se formare con la 2.a

N.o 2.o los productos solidos semejantes (abc. y. def) tienen entresi la Razon compuesta, detres Razones iguales de sus lados homologos y assi (Corol. 2. 29) triplicada desus lados. porq̃ siendo $abc \sim def$ sera $\frac{a}{b} \sim \frac{d}{e}$ y $\frac{b}{c} \sim \frac{e}{f}$. luego alternando $\frac{a}{d} \sim \frac{b}{e}$ y $\frac{b}{e} \sim \frac{c}{f}$: luego $\frac{a}{d} \sim \frac{b}{e} \sim \frac{c}{f}$

pero

Pero (corol. 3. 29) $\frac{abc}{def} = \frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f}$:
luego el producto solido abc. á su semejante def. tiene la misma razon q.^e la razon compuesta delas tres razones iguales de sus lados.

N.º 3.º Si quatro quantidades son prop.^tes los planos. y los solidos semejantes formados sobre ellas, son tambien proporcionales, y si 4. planos. ó solidos son proporcionales, las 4.^o quantidades sobre, que se forman son tambien proporcionales: porq (n. 3. y 4. scolio. 31.) las razones simples, y sus duplicadas ó triplicadas tienen la misma razon.

N.º 4. qualesq.^ra productos equiangulos, planos ó solidos (ab. y ac, ó abd, y abf) que tienen un lado comun, tienen la razon, que el otro

$$\text{estos}\begin{cases} ab \,..\, ac :: b \,..\, c \\ abd \,..\, abf :: d \,..\, f \\ abc \,..\, ade :: bc \,..\, de \end{cases} \quad \text{porq}\begin{cases} abc \\ abdf \text{ son } \\ abcde \end{cases}$$

N.º 5.º qualesq.^ra productos equiangulos planos ó solidos iguales (ab y cd, ò abc y def) (tomados sus lados reciprocamente constituien vna progresion de igualdad: y si la consti-tuien desta suerte, son iguales.

Demonstracion.

1.ª p.te Por la Supp. ab = cd: luego (Corolario 2.13.) $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ Item (Supp.) abc = def: luego ab .. de :: f .. c ò a .. d :: ef .. bc. que era lo 1.º = 2.ª p.te por la Supp. a .. c :: d .. b: luego ab (11) = dc: Item (Supp.) ab .. de :: f .. c, ò a .. d :: ef .. bc: luego abc = def, que era lo 2.º luego etc.

N 6 consta, que los productos planos, ò solidos iguales constituidos sobre iguales bases, tienen vna misma, ò igual altura: y que planos, ò solidos iguales, que tienen vna misma altura están constituidos sobre la misma, o iguales bases; y que si tienen la misma, o iguales bases, y alturas son iguales

Propo. 37. 15.

Si ay dos quantidades (a y b), y vna dellas (a) se corta en quales quiera partes (c. y d.)

el producto

ab dela cortada, y dela entera es igual a todos los productos equiangulos dela Entera, y de cada vna dellas partes dela cortada juntos.

Demostracion: porla supp. $a = c+d$: luego ($ax2$) $ab = bc+bd$ que era log. H.D.

Corolario

Los productos, que resultan multiplicando vna quantidad por qualesquiera quantidades juntos son iguales al producto equiang.º de aquella quantidad porel aggreg.do de estas.

Prop. 38. th.

Si vn todo (a) se corta en qualesquiera partes (b.y.c) el producto del todo porsi mismo es ig. atodos los productos equi-ang.os juntos del todo, y de cada vna de sus partes.

Demostr. Porla supp. $a = b+c$: luego ($ax2$) $aa = ab+ac$ que era lo primero &.

Corolario

ò Multipliquese Vn todo porsi mismo
o por todas sus partes deporsi, los pro=
ductos equiangulos siempre son iguales

Scholio.

En estas dos proposiciones se funda la
practica de multiplicar Vn numero
V.g.ª 126. por 3. ó 348. por 27. &ª porq.
despues de hechos los productos parciales
se recogen en Vna suma

Prop.ª 39. th.

Si Vn todo (a+b) se corta en dos qua-
lesq.ra partes (a. y b) el producto del todo
y Vna de sus partes (b) es ig.l alos produc=
tos equiangulos dela dicha parte porsimis-
ma yel delas dos partes entresi juntos

Demostracion. Multiplicando el todo

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{por\ \ b} \\ ab + bb \end{array}$$

es este el producto que era loq.e Co.ª

Prop.ª 40 th

Si Vn todo (a.) se corta en dos qualesq.ra
partes (b. y c) el producto del todo porsi
mismo es ig.l alos productos equiangulos

de cada

de Cada parte por si misma, y a dos de las partes entre si.

Demonstracion. Por la Supposicion

$a \infty b+c$

Item $a \infty b+c$

$\underline{\ \ +bc+cc}$

$\underline{bb+bc}$ luego $(a \times 2)$ sera.

$aa \infty bb+2bc+cc$.

Corolario.

El quadrado de Vna quantidad. a. Cortada como quiera en dos partes, es igl. a dos quadrados de sus partes, y a dos rectangulos contenidos de las partes, conque si las partes enque se corta, son iguales seran (   ) todos quadrados iguales. Y assi el quadrado de la quantida dupla es quadruplo del quadrado de su mitad.

Prop. 41. Prob.

Dado Vn quadrado $aa+2ab+bb$. sacar su raiz

Construcion. Saquese la raiz del quadrado, que es .a. y notese como en x. formese su quadrado, y escribase debaxo del ultimo termino de el quadrado dado como en M. tirese una raya, y restese de todo el renglon y sera el residuo el renglon N, y como en este residuo ai 2a. como se ve en el plano 2ab partase este plano por 2a, que es el duplo de la letra allada. a. y partiendo sera (Corolario 29.) +b que poniendole con su señal despues de. a. en x. sera la segunda figura de la raiz del quadrado dado ~~que es el primer~~ ~~[illegible]~~ pongase tambien debaxo de su quadrado bb. (que es el primer termino del residuo 2ab + bb) con que debaxo del dicho residuo avra 2a+b como en el renglon P. multipliquese este renglon P. por la segunda figura b. y sera el producto del renglon Q:

$$
\begin{array}{ll}
x \ldots & a+b \\
L \ldots & a^2+2ab+bb \\
M \ldots & \underline{a^2} \\
N \ldots & 0 +2ab+bb \\
P \ldots & 2a+b \\
Q \ldots & \underline{2ab+bb} \\
 & 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

que restandole del renglon N. sera el residuo nada: digo pues, que a+b. es la raiz quadrada del quadrado dado porque multiplicada por si misma

Por si misma lo mas que pueda multiplicarse, restituira el mismo quadrado.

Si la quantidad dada no tiene la raiz quadrada se le antepone la señal $\sqrt{}$. Como si se pidiere la raiz quadrada $a^2b^2+a^2c^2$ se escribira $\sqrt{a^2b^2+a^2c^2}$

Prop.ⁿ 42.

Si una quantidad (a) se corta en qualesq.ʳ dos partes (b. y c) el solido dela toda es ig.ᵗ alos solidos equiangulos de sus partes, y a seis solidos, delos quales cada tres tienen por base el plano equiangulo dela una por si misma y por altura ála otra.

Demostracion. Por la supp.ⁿ $a = b+c$

$a = b+c$

$a = b+c$

luego (ax 2). $a^3 = b^3+3b^2c+3c^2b+c^3$

Corolario

El cubo de una quantidad cortada como quiera en dos partes es ig.ᵉ alos cubos de sus partes, y á seis solidos rectangulos delos quales cada tres se forman enel quadrado dela una parte, y dela altura dela otra.

Prop.^r 43. Probl.

Dado Vn cubo (L) sacar su raiz.

Construcion = saquese la raiz del cubo aaa, que es .a. y escribase sobre Vna raia como en R. formese su cubo a^3. y escribase debajo del Vltimo termino del cubo dado como en M. tirese Vna raia, y restese de todo el reglon, y restese de todo el reglon L. con que dara N.

$$R \ldots\ a+b$$
$$L \ldots\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$M \ldots\ a^3$$
$$N \ldots\ 0 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$P \ldots\ 3a^2$$
$$3a^2b$$
$$L \ldots\ 0 + 3ab^2 + b^3$$
$$+3ab^2$$
$$0 + b^3$$
$$+b^3$$
$$0\ \ 0\ \ 0\ \ 0$$

que se partira por $3a^2$ esto es por el triplo del quadrado dela p.^a letra hallada .a. porq.^e en el Vltimo termino de dicho residuo se halla dicho triplo. el quociente b se anotara con su señal en el quociente R. por segunda figura dela

Raiz

Raiz, que se busca; y multiplicandole por el divisor 3ª se escribira su producto como en P. tirase una raia q̃ se restará de todo el Renglon N. y quedara el Renglon Z de quien se restará $3ab^2$, y b^3. esto es el triplo solido que resta dela primera figura hallada a. y del quadrado dela 2^a b, y no quedara nada, y assi el cubo dado tendra por raiz $a+b$ porq̃ multiplicada porsimisma, y el producto vuelto a multiplicar por ella reduzirà el cubo dado.

Si el Polinomio dado no tubiere la raiz cubica se expresara con la señal radical como para expresar la raiz cubica deste Binomio $a^3b^3+a^3c^3$ se expresara assi $\sqrt[3]{a^3b^3+a^3c^3}$

Scholio 1º.

Nº 1º. assi como suponiendo cortada la raiz en dos partes yguales q̃ 2^a diò à conocer la equivalencia del quadrado y cubo de una quantidad cortada como quiera en dos partes dotras dos quantidades: assi tambien volvi ondo a multiplicar el Cubo por la misma Raiz se conocera la misma equivalencia de otras potestades. Vease el Mapa siguiente que puede continuarse En infinito.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Raiz} & a+b \\
 & a+b \\
\hline
 & ab+b^2 \\
 & a^2+ab \\
\hline
2^{do} \ldots & a^2+2ab+b^2 \\
 & a+b \\
\hline
 & ba^2+2ab^2+b^3 \\
 & a^3+2a^2b+ab^2 \\
\hline
\text{Cubo} & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
 & a+b \\
\hline
 & a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
 & a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\
\hline
2^{do}\text{-}2^{do} & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
 & a+b \\
\hline
 & a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5 \\
 & a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4 \\
\hline
 & a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\
 & a+b \ \text{\&c}
\end{array}
$$

Solo resta explicar el modo con que estas formulas dirigen para sacar la raiz, que se pide: N.º el numero dado de quien se ha de hade Sacar la Raiz se hade diuidir de tantas en tantas figuras (empezando desde la 1.a) quantas son las Vnidades del Exponente dela potestad, quede lo que quedare para la Vltima diuision, y tantas quantas diuisiones huuiere de tantas notas constara la Raiz, que se busca. Despues veare la formula de aquella potestad. el Vltimo termino de esa formula expresa la operacion que se le debe ala Vltima diuision, y todos los demas dirigen ala Extraccion, y assi porq enel Vltimo termino se contiene solo la potestad prim.a del Raiz, que se busca se sacara dela Vltima diuision del N.o dado la maior Raiz, que se pueda de aquel genero Esto se hara formando Vna tabla, que contenga las potestades delos numeros digitos, y auidandose della, continuando la dela dessr.bo.

N3.o en la operacion del penultimo termino, la qual es comun a todos los de mas ai dos principales partes. La 1.a

La 1.ª es la invencion del divisor por medio del qual se debe conocer la nueva nota Radical; La 2.ª como se hade multiplicar esta nueva nota hallada por medio del divisor, para tener los productos, que se hande restar dela nueva quantidad. Lo uno, y lo otro expresan las formulas delas potestades con la clara constuccion delas letras a, y b. La A. significa todo lo q. hasta entonces esta conocido dela raiz. La B. significa la nota dela raiz, que aun no està conocida, pero esta proxima a conocerse. La invencion del divisor la indican los terminos intermedios esto es todos fuera del 1.º y del ultimo por medio dela letra A. el modo dela multiplicacion le prescriben todos los terminos fuera del ultimo.

Y asi porq. en el termino medio de la formula del quadrado aa. 2a. el duplo dela raiz yà hallada sera el divisor sin hacer caso dela 1.ª figura dela quantidad, que

se ha

Se ha de diuidir, porq. 2a no per tenece
al quadrado bb, que es el primer termino
dessa formula. I porq. en la misma for
mula quitado el Vltimo termino as.
2ab + bb se multiplicara el diuisor. 2a
por b. que es la Nota nueua m.te allada
y la misma Nota nueua por si misma
y la suma dessos productos Escriptos en los
lugares, que la misma formula prescri-
be se restara dela quantidad, que auia

N.° 4. Dela misma suerte, porq. en los
terminos medios dela formula del cubo
as. $3a^2 + 3a$ el quadrado dela Raiz hasta
entonces hallada triplicado, y la misma
Raiz triplicada daran el diuisor sumando
estas quantidades como prescribe la formula
y porq. en ella quitado el Vltimo termino
as. $3aab + 3abb + bbb$. el termino $3a^2b$
muestra, que se ha de multiplicar el triplo
del quadrado dela Raiz hasta entonces alla-
da con la nueua m.te allada. b. Y el termino
$3abb$ que se ha de multiplicar el triplo dela

Raiz misma por el quadrado dela nota b.
y el termino bbb muestra, que se ha de
multiplicar cubicamte la nota b. y todos
estos produtos summados segun sus lugares
dan la summa, que se ha de restar
dela quantidad, que huviere.

Scholio 2º.

N.º 2º. Dado que qualquier numero
A. se sacara su raiz quadrada, dividiendo
le de en dos, en dos figuras. Despues busque-
se la raiz quadrada dela quantidad, que
esta enla ultima division, y si no la
huviere se elige la del quadrado proxima-
mte menor como aqui. Porq. 11. que esta
Enla ultima division no es quadrado
se busca el quadrado proximamte menor
que es 9. cuia raiz quadrada es 3. esta
se escribe como en C y haciendo su quadro B.
y tirando una raia se resta dela quan-
tidad dela ultima division. al residuo
se le añaden las dos figuras dela division
siguiente, y se tendra la quantidad. D.

para

Para, para quien se buscara divisor, tomando el duplo dela raiz hasta ahora hallada que es F por el qual se partira la quantidad D sin hazr. caso desta primera figura y saldra por quociente 4. que sera otra nueva nota dela raiz q̃ se escribira como en G.

N.º 2.º Para tener el producto, que se ha de restar dela quantidad D. multipliquese la nota nueva mte. hallada por el duplo dela nota hallada antes, y sera el producto I.. quadrese la misma nota nueva mte. hallada y su quadrado H. se escribira unidades mas afuera como se ve. Y la summa I destos productos dos se restara la quantidad B. al residuo se le añadiran las dos figuras dela division siguiente, y se tendra la quantidad L. para esta se buscara divisor tomando el duplo dela raiz 34. hallada hasta ahora, que es M. y partiendo por ella quantidad L sin hazr. caso dela sig.te figura sera el quociente 5. que escribiendole como ∈ sera la primera nota dela raiz, que se busca porq̃ multiplicandola por el duplo dela raiz antes allada sera el producto N. y quadrandola si estos productos se suman como estan escriptos su summa ⋮ restada dela quantidad L. deja por residuo nada digo pues, que la quantidad A. es num.º quadrado, cuia raiz quadrada es 325. lo qual se examina, haziendo el quadrado della.

N.º 3. Notese, que en muchas quantidades por ser irracionales las raizes, que se piden, quedar algun residuo, entonces para azercarse lo mas, que ser pudiere ala verdadera raiz, que se pide della se añadiran al dicho residuo algunas classes de tantos zeros, quantos son las unidades del exponente de esta potestad esto es al residuo de un quadrado dos zeros, al de un cubo 3. &ª y continuando

la misma

la misma operacion en este residuo, la 1.ª figura, que saliere al quociente denotara las partes decimas de una quantidad, y la segunda las partes centecimas &c.ª y assi en adelante siempre en proporcion decupla. porq̃ la addicion de dichos ceros tiene el mismo effecto, que la multiplicacion por 10. 100. &c. como si se quiere sacar la raiz quadrada de dos esto es de. 2. añadiendo dos ceros, se tendra 14 por raiz de 200. cercana a la verdadera y consiguientemente $\frac{14}{10}$, o $\frac{4}{10}$ por raiz de 2. que es mas exata, que 1. pero nunca se tendra la verdadera porq̃ nunca, quadrando el numerador, y denominador del quebrado, que saliere equivaldra precisa, y absoluta.te a 2. (succediendo lo mismo con el. 3. 5. &c.ª)

N.º 4. En la misma conformidad, se sacara la raiz cubica de qualq̃.r numero dado como A. porq̃ dividiendo de tres en tres figuras, de la ultima division

se sacara la Raiz cubica, y si no la tubi-
ere se eligera la del cubo proximam.te menor
como aqui. porq la ultima division 102.
no es cubo se busca el cubo proximam.te
menor. 64. cuia Raiz cubica es. 4. Y con
sure esta como en C. y haziendo su cubo
B, y tirando una raia se restara la
quantidad dela ultima division, al
Residuo se añadiran las tres figuras
dela division siguiente, y se tendra
la quantidad D, para quien se buscara
divisor, asi

N.5. tomese el triplo del q.do
dela Raiz hasta haora hallada, que
es F. triplique se la misma Raiz, y sera
la triplo G. y la suma destos dos pro
ductos escriptos, como estan, que es H.
sera el divisor partase pues D (sin hazer
caso de su primera nota) por H. y sera
el quociente 6. el qual se escribira en C
N.6. despues multiplique se lo prim.ro
esta nota radical ultimam.te hallada 6
por el

Porel triplo del quadrado dela 1.ª y saldra el producto L. Multipliquese lo 2.º al quadrado dela Nota Ultima de hallada por el triplo dela nota radical 1.ª y sera el producto M. Lo 3.º la misma Nota radical Ultima de hallada cubiquese y sera su Cubo N. Summense estos tres productos, escribiendolos como estan, y la summa prescribase debaxo dela quantidad D. Tirese una raia y restese della y al residuo añadase la division sig.e que es la primera del N.º dado R. Conque se tendra la quantidad. C. para quien se buscara divisor, assi

N.º 7.º el quadrado dela raiz 26 hallada hasta haora triplíquese y sera el producto Q. y triplíquese la misma raiz, y sera el producto R. la summa destos dos productos escritos, como estan, que es S. sera otro nuevo divisor por el qual se hade partir la quantidad. E. sin hazer caso dela 1.ª figura, y saldra de

porque es

quociente 8, que sera la 1.ª nota dela Raiz Cubica, que se busca porq̃ multiplicando 8. por 3 sale 4 y multiplicã-do el quadrado del 8. que es 64 por A sale 2. y ultimadamente el Cubo del ultimo 8. e.z. la suma que V. destos productos como estan escritos, restada dela quantidad. e. dela por residuo nada.

N.º 8. digo que, que la quantidad A, es numero Cubo cuia Raiz Cubica es .468. loqual se exa=mina, haziendo el Cubo della = Notese, que si despues dela ultima subtraccion sobra algo el numero, que se propone no sera Cubo pero lo sera si se sequita ese resi=duo: En la misma conformidad se sacan las raices delas demas potestades

Scholio 3.º

N.º 9. entre dos quantidades dadas a y b se hallara un medio proporcional, multi=plicando las quantidades, y sacando la raiz quadrada del producto ab, y seran

$\div$ a. Vab. b porq ab = ab quadrado de Vab. Item entre dos quantidades dadas a. y. b se hallaran dos medias proporcionales assi por el N.º 2. Schol. pg. 36. a..b:: $\overset{3}{a}$..m. cong sera conocida la raiz cubica de $\overset{3}{m}$. que sera el primer medio prop. entre esta raiz y la quantidad b. hallese el medio prop. por lo dicho antes, y este sera el 2.º que se busca

N.º 2.º el producto ab. de dos quantidades a. y. b es medio proporcional entre los quadrados aa. y. bb. de estas dos quantidades por. $\div$ aa. ab. bb. y assi el producto de dos num. quadrados es quadrado aabb. cuia raiz es el plano ab de las raizes a. y. b. de los otros dos quadrados. Item si dados dos cubos aaa y bbb. se multiplica el quadrado de la raiz del 1.º por la raiz cubica de el 2.º, cuio producto es aab, y el quadrado de la raiz de el 2.º por la raiz cubica de el 1.º cuio producto es bba. estos dos productos son medios proporcionales entre los cubos dados $\div$ $\overset{3}{a}$. aab. bba. b^3 porq $\div$ $\overset{3}{a}$. $\overset{2}{a}$b. b^2a. Item $\div$ $\overset{2}{a}$b. $b\overset{2}{a}$. b^3

Y tambien el producto de dos Numeros Cubicos aaa. y bbb. es Numero Cubico $aaab^3$. cuia Raiz es ig.^{l} al producto delas dos raizes Cubicas delos dos Numeros Cubicos dados. Item entre dos quadrados-quadrados, como a^4. y b^4. estos tres productos a^3b. a^2b^2. ab^3. son tres medios proporcionales. Item entre a^5. y b^5. estos productos a^4b. a^3b^2. a^2b^3. ab^4. son 4. medios prop.^{s} &c.^{a} Vease al marg.^{a} del Escholio. 1.^{o}

N.3. Si dos razones racionales ($\frac{12}{24}$ $\frac{8}{16}$) son ig.^{s} el producto delos antecedentes que es 96 al producto delos consequentes (384) es como un num.^{o} quadrado á otro numero quadrado porq.^{e} reducidas a menores terminos son $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ en las quales los antecedentes son un mismo num.^{o} y los conseq.^{tes} son un mismo num.^{o}: luego el producto delos unos, y delos otros sera quadrado. Por semejante razon si tres razones racionales son iguales. $\frac{a}{b}$ — $\frac{c}{d}$ — $\frac{f}{h}$. el producto delos antecedentes

mcf.

a.c.f. al delos consequentes b.d.h. es como Vn N.º Cubo, á Vn numero Cubo. Y así el producto de dos numeros planos seme=jantes, 8. y 18 cuios lados 2.4. y 3.6 son proporcionales es Vn N.º quadrado. porq $\frac{2}{3}$ = $\frac{4}{6}$ sera el producto delos antecedentes 8. al producto delos consequentes 18. como Vn numero quadrado a Vn Num.º quadrado es decir como 4. à 9, que son los quadrados delos terminos 2. y 3. àq se pueden reducir las dos razones iguales delos lados delos planos propuestos.

N.º 4. Si se le añade a Vn N.º qua=drado el duplo de su raiz, mas la Vni=dad, sera la summa el Num.º proximam.te mayor al quadrado propuesto. y así si aa = 36 sera a = 6 y aa + 2a + 1 = 49. y $\sqrt{aa+2a+1}$ = a + 1 = 7. Y así si se disponen subcessiua=m.te por su orden los numeros impares. 1.3.5. 7.9 &.ª el 1.º destos numeros, que es 1. sera el primer quadrado, y este quadrado mas 3. sera el quadrado, que lo sigue, que es el de de el 2.º Item si se añade á un nº. cubo el triplo del quadrado de su raiz mas el triplo de su misma raiz mas la 1. la suma será igl. al numero cubo proxi mamte. maior al dado porq si aaa = 27 y a = 3 será $a^3 + 3a^2 + 1 = 64$. y delo dicho acerca destas potestades se infiere, que el producto de dos potestades numericas del mismo grado es un Nº. dela misma potestad y assi, que un numero quadrado-quadrado multiplicado por un Nº. quadrado-quadrado produce un numero quadrado-quadrado.

Item, que si quatro razones racionales son iguales el producto delos antecedentes y el delos consequentes son como dos num̃. quadrados-quadrados, y assi delas 5.ª y 6.ª

Nº. 5.º la razon duplicada, o triplicada de una razon racional es tambien razon racional, que tiene por exponentes numeros quadrados, si es duplicada, y cubos si es triplicada: porq la razon duplicada es igl. á una razon compta. de dos razones

iguales

iguales, en quien los antecedentes estan multiplicados el uno por el otro: luego (n.º 8) los dos productos, que son los terminos de la razon duplicada son entresi, como dos num.º quadrados, luego esta razon tiene por exponentes numeros quadrados. De la misma suerte la razon triplicada es igual à una razon compuesta de tres razones iguales, y assi los terminos desta razon son (n.º 8) entresi, como dos numeros cubos, y esta tiene por exponentes num.º cubos.

N.º 6. Una razon simple es sorda, si la razon duplicada, ò triplicada de esa razon, o no es de numero à numero, o no tiene por sus exponentes numeros quadrados, ò cubos: porque si la razon de x a z fuera de numero à numero xx à zz. ò xxx à zzz fuera (n.º 5) como numero à num.º y que tuviera por sus exponentes numeros quadrados, o cubos; pero (por supp.º) no es assi: luego la razon de x a z no es razon de numero à numero

N 7.º Si tres quantidades son continuas ∺ la razon dela 1.ª à la 3.ª solo puede ser de uno de tres modos. Lo 1.º de numero à numero, teniendo por exponentes numer. quadrados. lo 2.º de num.º à num.º no teniendo por exponentes num.s quadrados lo 3.º no de num.º à numero.

Si lo 1.º las tres quantidades son commensurables porq. sean ∺ a . b . c y $\frac{a}{c} \backsim \frac{4}{9}$ el producto de 4. y 9. que es 36 sera (n.º 2) numero quadrado cuia raiz 6 sera (n 1) medio prop.l entre a, y c pero (supp.) b es este medio. luego a . b . c ∷ 4 . 6 . 9 y assi exprimiendose por num.s la razon de a, à b y de b à c. a, b, c son commensurables.

Si lo 2.º la quantidad media es incommensurable en si misma, y commensurable en potencia con la 1.ª y 2.ª porq. sean ∺ a . b . c y la razon de $\frac{a}{c} \backsim \frac{3}{4}$, y assi la raz. compuesta delas dos razones iq.s $\frac{a}{b} \backsim \frac{b}{c}$ tendra por exponentes dos num.s no quadrados: luego (n.º 6) es sorda. pero siendo (   )

$a^2 . b^2$

$a^2 .. b^2$

$b^2 .. c^2$ $\left\{ \begin{array}{l} a .. c \\ 3 .. 4 \end{array} \right.$ Sean $a^2. b^2. c^2$ commensurables

: luego a. b. y c incommensurables entre si son commensurables en potencia.

Si lo 8º. la quantidad media es incommensurable entre si, y en su potencia porq. el quadrado dela 1ª. al quadrado dela 2ª. es ( ) como la 1ª. ala tercera: pero (Supp.) la razon dela 1ª. ala 3ª. no es de Num.º a Numero: luego la 1ª y 2ª son incommensurables en potencia. Y lo mismo la 2ª. y 3ª., y assi estas tres quantidades son incommensurables entre si, y en sus potencias.

N. 8. Si quatro quantidades son continuas proporcionales la razon dela 1.ª ala 4.ª sera lo primero q. de Numero á Numero, que tenga por Exponentes numeros cubos, ó lo 2.º que no tenga por exponentes num̃ cubos; ó lo 3.º, no de Num.º á Num.º

Sito 1.º las quatro quantidades son commensurables porq̃ sean ∺ a.b.c.d y $\frac{a}{d} \backsim \frac{8}{27}$ con que seran (n 2) 12. y 18. dos medio proporcionales entre los cubos dados y assi a.b.c.d ∷ 8.12:18.27. luego las Razones destas quatro quantidades pueden expressarse en num̃ y assi ellas son commensurables.

Sito 2.º la 1.ª y la 2.ª son incommensurables en si mismas, y commensurables en su potencia tercera, y lo mismo dela 2.ª y 3.ª, y dela 3.ª y 4.ª porq̃ sean ∺ a.b.c d. $\frac{a}{d} \backsim \frac{3}{4}$ conq̃ teniendo la Razon de a. á d, que es triplicada destas Razones, por Exponentes los num̃ 3 y 4. que no son cubos, son (n. 6) incommensurables, las Razones de $\frac{a}{b}$. $\frac{b}{c}$. y $\frac{c}{d}$ pero

Pero $a^3 .. b^3$
$b^3 .. c^3$ :: $\left\{ \begin{array}{l} a .. d \\ 3 .. 4 \end{array} \right.$
$c^3 .. d^3$

luego sus cubos son commensurables.

Silo 3.

La 1.ª y la 2.ª, la 2.ª y la 3.ª, la 3.ª y la 4.ª son incommensurables assi ensi mismas, como como en sus potencias solidas: porq. lo primero ensimismas lo son (N.º 6) lo 2.º en su potencia solida: porq. la razon del cubo dela 1.ª al cubo dela 2.ª es la misma, que la razon dela 1.ª ala 4.ª pero esta se supone ser no de num.º à num.º: luego

N.º 9. Si dos quantidades quadradas, ó no son como num.º à numero, ó no tienen por exponentes de su razon numeros ~~[illegible]~~ quadrados, las raizes son incommensurables en si, como tambien, si dos quantidades cubicas, ó no son como num. à numero, ó no tienen por exponentes de su razon numeros cubicos, porq. los quadrados estan son razon duplicada de sus raices, y los Cubos en triplicada (n 172 scholio 36) pero (nº 6) si dos razones, ò duplicadas, ò triplicadas no son de num.º à numero, tas razones, de quienes ellas son compuestas. son sordas: luego las raizes destos quadrados, ò Cubos seran incommensurables

Nº 10. Entre dos num.s, que no tienen por Exponentes de su razon numeros quadrados, no se puede hallar vn num.º que sea medio prop.l y entre dos num.s que no tienen por Exponentes de su raz.n numeros Cubos no se pueden hallar dos num.s que sean medios prop.s: porq si se pudiera tres quantidades proporcionales serian commensurables aunq la 1.ª y la tercera no fuessen entre si como dos numeros quadrados, que es contra el caso 2º deel n.º 7. Item quatro quantidades continuas prop.s serian commensurables aunq la 1.ª y la 4.ª no fuessen como dos numeros cubos, que es contra el caso 2º del Nº 8: luego.

N 11.

N. 11. dos numeros no son quadrad.s si los Exponentes de su razon no son num.s quadrados, porq. si es $\frac{bb}{cc}$ = $\frac{1}{2}$ entre bb y cc no se puede hallar (n.º 10) un medio prop.l lo qual se pudiera si fueran dos num.s qua. porq. su producto fuera n.º quadrado, cuia raiz fuera medio prop.l entre bb y cc) n.º 2) y assi se ve, que no se puede hallar numero quadrado, que sea Mitad. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ o $\frac{1}{7}$ de otro numero quadrado porq. estos numeros $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$. Exponentes de essas razones no son numeros quadrados. Item dos num.s no son Cubos, si los Exponentes de su razon no son num.s Cubos; porq. si bbb.. ccc:: 1..2 no se pueden hallar (n. 10) dos medias proporcionales lo qual se pudiera (n.º 2) si estos dos numeros fueran Cubos; y assi se ve, que no se puede hallar un Cubo, que sea $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$ o $\frac{1}{7}$ de otro Numero Cubo.

N.º 12. Ni por num.s enteros, ni por quebrados puede Expressarse el Valor de la raiz quadrada de un num.º, que no es quadrado ni la Cubica de vn num.º, que no es Cubico

Porq. sea lo 1.º el numero dado 18, y la Raiz, que se señala sea x. Multipliquese el numero 18. por 1 cuio producto es el N.º plano 18. y su Raiz, quadrada sera (n.º 1) medio proporcional Entre 1. y 18. y seran ÷ 1. x. 18 pero no teniendo la Razon de 1 à 18 por sus Exponentes numeros quadrados, x es incommensurable con 1. y con 18: luego la Razon de la Raiz x à 18 es sorda.

Sea lo 2º el numero dado 24. que no es Cubo, y llamese su Raiz Cubica x, y tomando el Cubo de 1, que es 1. seran (n.º 2) ÷ 1. 1x. 1xx. 24. Ahora assi por el segundo Caso del Num.º 8. la Razon de 1 à 1x es sorda pero 1.. 1x :: 1.. x : luego x es incommensurable con 1, que es commensurable: luego incommensurablem.te con 24. que es lo q. ~~a~~ de lo q. se ha demostrado en este Scholio de las segundas, y terceras potestades se puede deducir lo q. se ha de decir de las otras.

Scholio 4. = En este scholio se pondran

se pondran las operaciones Arithmeticas de con dlas quantidades Sordas.

N1.º Multiplicar

dos quantidades sordas ($\sqrt{5}$ y $\sqrt{3}$) Construccion hagase el Rectangulo delas quantidades propuestas debaxo delos signos radicales y al producto 15. antepongase el signo radical digo, que $\sqrt{15}$. es el producto, que se busca.

Demostracion

por la 17. como $1 .. \sqrt{3} :: \sqrt{5} ..$ al producto luego (quadrandolo) $1 .. 3 :: 5.$ al quadrado de aquel producto, pero este quadrado es 15. luego aquel producto es $\sqrt{15}$. que es Ք.º

N2.º Dividir

Una quantidad sorda ($\sqrt{15}$) por otra ($\sqrt{5}$) Construccion dividanse las quantidades propuestas debaxo delos signos radicales la una por la otra 15. y al quociente 3. antepongase le el signo radical digo, que $\sqrt{3}$. es el quociente, que se busca. Demostracion = por la 18) $\sqrt{5} .. \sqrt{15} :: 1.$ al quociente luego (quadrando) $5 .. 15 :: 1.$ al quadrado del quociente, pero este quadrado

es 3: luego aquel quociente es $\surd 3$. que era Rª
=conta, de aqui la reducion de una quantidad
sorda á otra parte racional, y parte no-racional
y al contrario, la de esta ala forma de una
quantidad mera rad.ᵉ sorda como si esta quan-
tidad mixta $2a\surd b$ se quiere reducir a forma
de quantidad mera rad.ᵉ sorda, que esté toda
debaxo del signo radical: formese el qua-
drado (ó el cubo conforme fuere la raiz) de
la quantidad racional propuesta fuera del
signo, y multiplicandola con la quantidad
que esta debaxo del signo radical, se le
antepondra el signo á ese producto, y así
$\surd 4a^2b = 2a\surd b$ porq $2a = \surd 4aa$ y (por lo
demostrado ahora) multiplicando $\surd 4aa$ por
$\surd b$. el producto es $\surd 4aab$: luego. = Y al contrario
si esta formula $\surd 4aab$ se quisiere reducir
a mas simple, que tenga fuera del signo
radical lo que ai alli racional se dividira
la quantidad propuesta debaxo del signo
radical por algun quadrado, o cubo rad.ª
como $\surd 4aab$ por $\surd 4aa$ que es $2a$ y sera el
quociente

quociente $\sqrt{b}$ el qual multiplicado por la divisor $2a$ es presara en forma mas simple la quantidad propuesta asi $2a.\sqrt{b}$.

Consta tamb.ⁿ que se puede conocer el producto de dos raizes sordas, quando las quantidades de quienes ellas son raizes producen un numero quadrado como estas raices sordas $\sqrt{2}$. y $\sqrt{50}$. multiplicadas entre si producen el num.º quadrado 100, cuia raiz es 10 ig.ᵗ al producto delas raizes de 2 y de 50.

N.3. reducir dos, o mas razones sordas ($\sqrt{aa}$ y $\sqrt[3]{b^3}$) à un mismo nombre, ò a un mismo signo radical = Construccion Elevese la menor ala potestad de la maior y assi agmentando ala 1.ª en una dimension quedara $\sqrt[3]{a^3}$ y con essa tendra el mismo nombre que la 2.ª sin alterar su valor porq.ᵉ $\sqrt{aa} = a$ y tam $\sqrt[3]{a^3} = a$: lueg (Colario 1. A) $\sqrt{aa} = \sqrt[3]{a^3}$.

Nota no siempre segun la regla dada, se podran reducir a un mismo signo

los raizes dadas, como $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{40}$ porq para
eleuar esta $\sqrt{5}$. y de quadrada hazerla cubica.
se hauia de multiplicar el quadrado 5 por su
raiz quadrada, y esto es imposible por ser sorda.
entonces pues se han de eleuar las dos raices
à otras potestades mas altas, para lo qual
No es forzoso conocer el valor dela raiz qua-
drada de 5. ni la cubica de 40. porq multi-
plicando 5. por si mismo el producto 25.
es el quadrado-quadrado: luego $\sqrt{\sqrt{25}} = \sqrt{5}$.
y multiplicando el quadrado 25 por su
raiz 5. el producto 125. es quadrado-cubo cuia
raiz qc $\sqrt{125} = \sqrt{5}$ y multiplicando el cubo
40 por si mismo el producto 1600. es un qua-
drado-cubo cuia raiz es $\sqrt{qc}\,1600 = \sqrt[3]{40}$.
y assi las dos raizes $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{40}$ reducidas a
estas $\sqrt{qc}\,125$. $\sqrt{qc}\,1600$. tienen el mismo
nombre.

Para saber aque potestad se han
de eleuar, las quantidades, cuias raices
son propias de sordas, para reducirlas

à vn

aun mismo Nombre, Multipliquese el Exponente delas dimensiones dela Una porel Exponente delas dimensiones dela otra, yel producto con sus Unidades Expresa la potestad. aque sean de eleuar.

N.4º Reducir las raizes sordas $\sqrt{75}$ y $\sqrt{27}$ alas Expresiones mas simples, ò alos terminos menores, conque se puedan Expressar.

Diuidanse las quantidades questan debaxo delos signos radicales por un comun diuisor tal quelos quocientes dela diuision sean quadrados, ò cubos &c. cuias raizes se pondran fuera del signo radical, y debaxo del el comun diuisor; yasi diuidiendo 75. y 27 por 3. los quocientes son 25. y 9. numeros quadrados. Digo pues: $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$. y $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$. consta del N.º 1.

Puede pues conocerse la razon, que tiene entresi dos quantidades sordas, como seha visto, quela raiz quadrada de 75 que es sorda es ala raiz quadrada de 27. que tambien es sorda, como 1 a 3. y assi Vna raiz, que no es commensurable con el quadrado de quien ella es raiz puede serlo con otra raiz sorda, y tales raices se llaman communicantes

N 5.° Averiguar si dos quantidades sordas son communicantes: Vease si las q.tidades puestas debaxo delos signos radicales se pueden dividir por algun quadrado proviniendo el mismo quociente como 8. y 18. que pueden dividirse aquel por 4. este por 9. siendo en ambas occasiones el quociente de 2. y entonces si el quociente se dexa en Vna y otra parte debaxo del signo radical y la raiz del quadrado dividiente se pone delante del signo aquellas mismas quantidades pueden expressarse assi $2\sqrt{2}$. y $3\sqrt{2}$ porq $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ y $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ = o dividase la mayor por la menor si el quociente es num.° quadrado, o cubo &c.a se podra expressar por numeros

Numero la razon de estas dos quantidades sean las dos quantidades dadas $\sqrt{12}$: y $\sqrt{3}$. diuidiendo 12. por 3. el quociente es 4. num.º quadrado cuia raiz es 2. digo pues, que $\sqrt{12}..\sqrt{3}::2..1$. porq̃ hauiendo diuidido estas quantidades 12. y 3. los quocientes son 4. y 1: luego (5) $12..3::4..1$: luego ( ) $\sqrt{12}..\sqrt{3}::\sqrt{4}..\sqrt{1}$. pero $\sqrt{4}=2$ y $\sqrt{1}=1$: luego $\sqrt{12}..\sqrt{3}::2..1$.

Sean lo 2.º dadas estas dos quantidades $\sqrt{320}$ y $\sqrt{135}$. diuidiendo la vna, y la otra por 135. los quocientes son 1. y $2.\frac{10}{27}$. y reduciendo este vltimo sera ( ) $2\frac{10}{27}=\frac{64}{27}$ y reducido tambien el primer quociente á quebrado sera $1=\frac{27}{27}$. la raiz cubica de $\frac{27}{27}$ es $\frac{3}{3}$ la de $\frac{64}{27}$. es $\frac{4}{3}$: luego $\sqrt{320}..\sqrt{135}::\frac{4}{3}..\frac{3}{3}$.

N.º 6.

Sumar dos quantidades sordas, ayanse de summar $\sqrt{8}$. y $\sqrt{18}$. lo 1.º summense sus quadrados 8. y 18, que hazen 26. des pues multipliquense las quantidades dadas y su producto √144. doblese multiplicando le por √4. y la raiz 24. de su duplo añadase ala suma delos quadrados de arriba y la raiz dela summa total contiene a saber √50 es la summa delas quantidades sordas dadas porq. (   ) el quadrado de qualqᵃ quantidad cortada como quiera en dos partes &ª.

Si la raiz, del duplo producto fuere sorda, como si se huviessen de summar √3. y √7 ala summa de cuios quadrados que es 10 se havia de añadir el duplo producto dellas, que es √84. la qual no puede expressarse con numero absoluto, entonces se sumaran con la señal + asi √3+√7. y si reducidas las quantidades alas mas simples expresiones se hallan ser commensurables, solo con sumar sus exponentes se expresara la summa y assi √75. y √27. reducidas à 5√3 y 3√3 sera suma 8√3

N 7. restar dos quantidades sordas, summense sus quadrados

y dela

Y de su summa restese el duplo producto
delas quantidades, y la raiz del residuo
es la diff.ª que se busca Como si de $\sqrt{75}$. se
hade restar $\sqrt{48}$ Sumando 75. y 48 es la
suma 123 de quien se quita 120 duplo de
60 que es la raiz del producto de 75 por 48.
el residuo es 3. digo, q̃ su raiz $\sqrt{3}$ es la
diferencia, que se busca.

Porq. sea $75 = aa$ y $48 = bb$
restando $\sqrt{bb}$ de $\sqrt{aa}$ el residuo es $a-b$ y así
se hade demostrar, que es $a-b = 3$. el quadrado
de $a-b$. es $a^2-2ab+bb$ loqual es ig.l a 75. mas
48. menos dos veces el producto dela raiz del
producto 75, y de 48. laqual raiz es 60: luego
$a^2-2ab+bb = 75-120+48$ pero quitando de
75 y 48 los 120 es el residuo 3: luego $a^2-2ab+bb$
$= 3$: luego $\sqrt{a^2-2ab+bb} = \sqrt{3}$.

Si la raiz del duplo
producto fuere sorda se restara con la señal
$-$ Como si se hade restar de $\sqrt{50}$. $\sqrt{40}$. se escri-
birá $\sqrt{50}-\sqrt{40}$, y si reducidas las quantidades
dadas á las expresiones mas simples se hallare

son communicantes solo con restar el expon.te
dela una del dela otra se tendra el residuo
y assi reducidas estas $\sqrt{75}$. y $\sqrt{27}$ à esta $5\sqrt{3}$ y
$3\sqrt{3}$ el residuo es. $2\sqrt{3}$

Como tambien para multi-
plicar, ó partir tales quantidades basta multi-
plicar sus exponentes. y assi $15\sqrt{3}$ es el producto
de $\sqrt{27}$. y $\sqrt{75}$ porq̃ se reducen àestas $3\sqrt{3}$. y
$5\sqrt{3}$, ó diuidir el exponen.te dela una por el
dela otra y assi porq̃ $\sqrt{75} .. \sqrt{27} :: 5 .. 3$ si se diuide,
5 por 3 poniendo el quociente desta diuision
$1.\frac{2}{3}$ delante del signo radical, quedra expre-
ssada esta diuision assi $1\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Prop. 44. 45

Si vn todo (2a) se corta en dos partes ig.
a y a, y en dos desig. $a+b$ y $a-b$ la inter
media delas secciones. b. esto es lo que se
le añade ala vna, y se quita à la otra
delas partes iguales, es la semidifferencia
delas partes desig.

Demostracion restese dela p.te mayor ...... $a+b$
la parte menor ... $a-b$
sera el residuo ... $0+2b$

: luego

luego $(a \times 2)\ b = \frac{D}{2} = sd$, que era lo que se avia de demostrar

Prop. 45 th.

Si un todo $(2a)$ se corta en dos partes ig. a. y. a, y en dos desig. $a+b$ y. $a-b$ el producto delas partes desig. junto con el producto equiangulo dela semidiff.ª (b) delas partes desiguales por si misma es ig. al producto equiangulo dela mitad. (a) por si misma.

Demostracion delas par.tes desig.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2 - ab - bb \\ + ab \\ \hline \end{array}$$

este el producto $\quad a^2 \quad 0 - bb$

añadasele $\quad + bb$

sera la summa $aa = aa$, que era &c.ª

Prop. 46 th.

La diff.ª $(aa - bb)$ de dos planos equiangulos $(aa. y bb)$ de dos quantidades $(a y b)$ multiplicada cada una por si misma es ig. al producto equiangulo del aggregado $a+b$ y dela diff.ª $(a-b)$ delas mismas quantidades. Pero los tales dos productos son ig. al producto equiangulo dela diff.ª delos

lados por si misma junto con los productos equiangulos delos mismos lados. Item son duplos delos productos equiang.
dela ~~Semid.~~ summa $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ y dela semidifer. $\frac{a-b}{2}$ delos lados cada vna por si misma.

Demostracion 1. parte multiplicando $a+b$

$$
\begin{array}{r}
a+b \\
\text{por} \quad a-b \\
\hline
-ab-bb \\
a^2+ab \\
\hline
\end{array}
$$

es el producto .... $a^2 \; 0 - bb$

que era lo 1.º

2.ª parte multiplicando .. $a-b$

$$
\begin{array}{r}
a-b \\
\text{por..} \quad a-b \\
\hline
-ab+bb \\
a^2-ab \\
\hline
\end{array}
$$

es el producto .... $a^2-2ab+bb$

$$
\begin{array}{r}
+2ab \\
\hline
a^2 \; 0 + bb
\end{array}
$$ que

era lo 2.º

3.ª parte el producto dela semi summa por si misma es $\frac{aa+2ab+bb}{4}$

$\frac{aa-2ab+bb}{4}$

y la summa dellos es $\frac{2a^2 \; 0+2b^2}{4}$ pero a^2+b^2 es duplo della, porq elevando por 4. vno y otro termino del cociente $4a^2+4b^2 = 2a^2+2b^2$. luego (   ) tambien el 1.º es duplo del 2.º que era lo 3.º luego &c.

Prop. 47.

Prop. 47. th.

Si aun todo (2a) cortado en dos partes ig.^{s} (a. y a) se le añade algo del mismo gen.^{ro} (b) sera el producto del compuesto del todo, y lo añadido 2a+b y de lo añadido (b) junto con el producto equiangulo (aa) dela mitad (a) por si misma ig.^{l} al produto equiangulo del compuesto (a+b) dela mitad, y lo añadido por si misma.

Demostracion el producto de 2a+b por b. es 2ab+bb añadasele el producto aa de la mitad por si misma y sera la summa aa+2ab+bb. pero el producto de a+b comp.^{to} dela mitad, y lo añadido por si mismo es tambien aa+2ab+bb. luego &.^{a}

Prop.^{n} 48. th.

Si un todo a+b se corta como quisiera en dos partes (a. y. b) el producto del todo por si mismo junto con el producto equiangulo de qualq.^{ra} delas partes (a. ó. b) por si misma es ig.^{l} al duplo producto equiangulo del todo, y la p.^{te} tomada (sea a.)

Junto con el producto equiangulo de la otra parte sea (b) por si misma.

Demostracion el producto del todo $a+b$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a \\ \hline aa+ab \end{array}$$

la p.te tomada es $aa+ab$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2aa+2ab \end{array}$$

duplo $2aa+2ab$

añadase el producto de la otra ...... $+bb$

y sera la suma $2aa+2ab+bb$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline +ab+bb \\ aa+ab \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

El producto del todo por si mismo es $aa+2ab+bb$

añadasele .... aa

y sera la suma tambien .... $2aa+2ab+bb$

que era lo que se D.a

Prop.r 49. B.

Si un todo $(a+b)$ se divide en dos qualesquiera partes $(a$ y $b)$ sera el quadruplo producto del todo, y de una de sus partes (sea b) junto con el producto equiangulo de la otra parte (a) por si misma ig.l al producto equiangulo del compuesto del todo, y la p.te $(a+2b)$ por si mismo.

Demostracion

Demostracion: el product del todo $a+b$
y la parte b. es ...$\dfrac{b}{ab+bb}$
que Multiplicado por... 4
es..... $4ab + 4bb$

Y añadiendo el producto Equivalente de la otra parte a por si misma aa es la summa $aa+4ab+4bb$

Prop. 50. Th.

Si Un todo $(2a)$ se Corta en dos partes ig.s $(a. y. a)$ y en otras dos desig.s $(a+b. y. a-b)$ seran los productos de las partes desig.s por si mismas. Juntos, duplo de los productos Equivaleng. de la Mitad (a) por si misma, y de la Semidiff.a (b) por si misma.

Demostracion = El producto de la parte Maior $a+b$............ es.. $aa+2ab+bb$.
y de la parte Menor $a-b$.. es.. $aa-2ab+bb$
la Summa de estos es..... $2aa \quad 0 \quad +2bb$
pero esta es duplo de aa producto de la mitad por si misma, y de bb producto de la Semi=diff.a por si misma: luego &c.a

Prop. 51. Th.

Si à Un todo $(2a)$ cortado en dos partes

iguales (a. y. a) se le añade algo del mis=
mo genero (b) sera el producto del compu.
del todo, y lo añadido (2a+b) por si mis-
mo junto con el producto equiangulo de
lo añadido (b) por si mismo esto es da mi=
tad y lo añadido (a+b) por si mimo dos juntos.

Demostracion: El producto del todo, y lo
añadido 2a+b por si mismo es $4aa+4ab+bb.$
y añadido . . . . $+bb$
sera la summa . . . . $4aa+4ab+2bb$
pero esta es dupla de $2aa+2ab+bb.$ summa
de los productos equiangulos de a por si mima
y de a+b por si mismo: luego &c.^a^

Prop. 52. th.

El cubo de la diff.^a^ (a—b) de dos quanti=
(a. y b) es ig. al cubo de la quantidad maior
(a) mas tres solidos rectang. sobre el quadra^do^.
de la menor (b) en la altura de la maior
menos tres solidos sobre el quadrado de la
maior en la altura de la menor, menos el
cubo de la menor.

Demostracion: Multiplicando a—b.
por. a—b

$$\begin{array}{r} a-b \\ \text{Por } a-b. \\ \hline -ab+bb \\ a^2-ab \qquad \\ \hline a^2-2ab+bb \end{array}$$ es el producto y Volviendo á multiplicar por $a-b$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline -a^2b+2ab^2-b^3 \\ a^3-2a^2b+ab^2 \qquad \\ \hline a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}$$ que era lo q. s. &c.

Corolario 1º. el cubo dela summa de dos quantidades desiguales (a. y b) junto conel cubo dela difª. delas mismas es igl. á dos cubos dela mayor (a) y á seis solidos sobre el quadrado dela menor b enla altura dela mayor porq el cubo de $a+b$ es... $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ y el cubo de $a-b$ es.. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ cuya summa es $2a^3.\ 0+6ab^2.\ 0$

Y assi si una quantidad (2a) se corta en dos partes igs. (a. y. a) y en dos desiguales (a+b y a−b) los cubos delas partes desiguales juntos son el duplo del cubo dela mitad y de tres solidos formados sobre el quadrado dela intermedia (b) En la altura dela mitad a. dela quantidad propuesta.

Corolario 2.º

El Cubo dela Summa de dos quantidades deseg. (a y b.) excede al Cubo dela diff.ª ($\bar{a}-b$) delas mismas en seis Solidos formados sobre el quadrado dela mayor. ($\bar{a}^2$) En la altura dela menor b. y en dos Cubos dela menor por q. Si se resta del

Cubo a+b........ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

el Cubo de a−b $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Sera el residuo $0+6a^2b \quad 0 \quad +2b^3$

Y assi si una quantidad (2a) se corta en dos partes ig.s a y a, y en dos ig. (a+b. y. a−b) y el cubo dela parte menor se quita del cubo dela maior el residuo es duplo del cubo dela intermedia, y de tres Solidos sobre el quadrado dela Mitad (a) en la altura dela intermedia.

Prop. 53. L. 5.

Si una quantidad (2a) se corta en dos p.s ig.s (a. y. a) y se le añade algo del mismo genero (b) los dos cubos el del compuesto del todo con lo añadido (2a+b) y el de lo

añadido

añadido (b) juntos con el duplo del cubo del compuesto dela Mitad y dela añadida $a+b$. y de tres solidos sobre el quadrado dela Mitad en la altura del compuesto dela Mitad, y delo añadido.

Demostracion = la summa delos cubos del todo, y lo añadido $2a+b$. es. $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

El delo añadido (b) es $\qquad b^3$

Avia summa es............ $8a^3+12a^2b+6ab^2+2b^3$.

el cubo dela Mitad, y lo añadido es $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

los tres solidos sobre el quadrado dela Mitad en la altura del compuesto dela Mitad y lo añadido, esto es el triplo del producto de $a+b$ por a^2 es.................... $3a^3+3a^2b$

la summa de esto es.................... $4a^3+6a^2b+3ab^2+b^3$

Pero de esta summa es el duplo dela primera: luego &c^a que era lo q^e

Prop. 54. th.

En toda razon arithmetica (del. a. àl. b.) el antecedente (a) menos, ò mas la diff.^{cia} (x) de su conseq.^{te} (b) es ig.^{l} à su consequente

D. Si es $a-\!\!\!\sim b+x$. sera ($ax2$) $a-x-\!\!\!\sim b$: luego

y assi las demostraciones siguientes compre-
henden los dos casos de ser mayor, o menor
El antecedente, que el consequente porque puede mu-
darse la señal $-$ en $+$ o al contrario.

Prop. 55 Th.

Si dados tres terminos (a.b.c) la summa
de los Extremos $(a+c)$ fuere igual al duplo
del medio $(2b)$ la razon Arithmetica del
1.º al 2.º es la misma, que la del mismo 2.º
al 3.º: y si la razon del 1.º al 2.º fuere la mis-
ma, que la del mismo 2.º al 3.º la summa
de los Extremos es igual al duplo del medio.

Demostracion. 1.ª p. por la supp. $a+c = 2b$
: luego $(a \times 2)$ $a = 2b - c$: luego $a-b = b-c$
( ) $\div a.b.c = 2.ª p.$ Por la supp. $\div a.b.c$
: luego $a-b = b-c$: luego $a+c = 2b$. que era
lo 2.º: luego &.ª

Corolario.

Dados dos terminos (a. y b) se hallara el
medio Arithmetico sumando los dos, y de
essa summa tomando la mitad, porque
estan demostrados $\div a . \frac{a+b}{2} . b$

Prop. 56.

Prop.ⁿ 56. th.

Si dadas quatro quantidades (a. b. c. d) la Summa delos Extremos (a + b) fuere ig.ᵗ ala delos medios (b + c) la razon Arithmetica dela 1.ª ala 2.ª es ig.ᵗ ala dela 3.ª a la 4. y si fueren ig.ˢ estas razones la summa delos Extremos sera ig.ᵗ àla delos Medios

Demon.ⁿ 1.ª p.ᵗᵉ $a+d = b+c$: luego ($ax2$) $a = b+c-d$. luego ($ax2$) $a-b = c-d$ que era lo 1.º

2.ª p.ᵗᵉ por la supp.ⁿ $a-b = c-d$. luego ($ax2$) $a = b+c-d$: luego $a+d = b+c$, que era lo 2.º: luego &c.ª

Corolario 1.º

Dados tres terminos (a. b. c) se hallara el quarto propor.ˡ Arithmetico sumando el 2.º y 3.º y restando de ese aggregado el 1.º porq el residuo sera el q se busca, porq a. b. c

$b+c-a$.

Corolario 2.º

Demostrarase facilm.ᵗᵉ, que si dadas quatro quantidades, la suma delas Extremas es maior, que la delas Medias, la Razon Arithmetica dela 1.a á la 2.a es maior, que la dela 3.a á la 4.a. Y que si la Summa de las Extremas es menor, que la delas Medias la Razon Arithmetica dela 1.a ala 2.a es menor que la dela 3.a ala 4.a &c.

Corolario 3.o

Los quatro terminos de una prop. Arithmetica son Arithmeticam.te prop. en qualquier transposicion, con tal, que los Extrem. sean siempre los Extremos, ó los medios. Y asi la proporcion Arithmetica de igualdad a. b: c. d. es la misma, que qualq.ra destas siette

a . . c : b . d

b . . a : d . . c

~~b . . a : d . . c~~

b . . d : a . . c

c . . a : d . . b

c . . d : a . . b

d . . b : c . . a

d . . c : b . . a

Prop. 57.

Prog.r 57. Prob

Conocidos dos terminos (a. y. a+x) o solo uno (a) y la diffa. x. continuar una progresion Arithmetica.

Primera p.te Construcion Del duplo duplo del segundo 2a+2x. resten el 1.o a. digo, que el residuo sera el 3.o

Demostra.n

Por la 56. $\div$ a. a+x. a+2x En la misma conformidad se hallara el 4.o &c.

2.a p.te el 1.o mas. ó menos la diff.a dada sera el 2.o Del 2.o ~~mas, o menos~~ la diff.a dada sera el 3.o &c. y asi

$\div$ a a+x. a+2x. a+3x. a+4x. a+5x. a+6x. a+7x &a

$\div$ a a+x . a−2x. a−3x. a−4x a−5x. a−6x. a−7x &a

Schalio.

N.1.o En toda progression Arithmetica accendente, y descendente. lo 1.o cada termino incluie una vez al 1.o y mas, o menos, la diff.a tantas veces, quantos terminos tien= en antes de si = lo 2.o si el intervalo de dos terminos es ig.l al de otros dos los quatro

Estan en una progression Arithmetica = Lo 3º. cada termino es Medio prop. Arithm.co entre otros dos igualm.te distantes del = Lo 4º. la summa delos Extremos ò del 1º. y ultimo termino es ig.l ala del 2º y del penultimo, ~~ò de dos igualm.te dis=tantes~~, ò ala del 3º y de el ante-penultimo ò de dos igualm.te distantes delos Extrem.s ò al duplo del termino Medio, si el nº. delos terminos fuere impar = Lo 5º. el 1º. 3º. 5º. 7º, 9º &c.a Item. 1º. 4º. 7º. 10º. 13º. &c.a Item 1º. 5º. 9º. 13º. &c.a Estan en progression Arithm.ca

N. 2º. pueden facilm.te resolverse los mas delos problemas de progressiones Arith.cas con lo ya demostrado: porq llamando el pri=mer termino P. al ultimo U. al num.º delos terminos N ala diff.a ù. de nomi=nador D y pudiendo ser la descendente ascendente, considerada en el orden retraga=do siendo lo 1º. en esta progression 18a + $\frac{72x - 2 \cdot 9a}{2}$ + 36x estos siendo el quociente que proviene partiendo .2. la summa delos productos

Productos del 1.º y Ultimo termino por el
Num.º delos terminos y q. a la Summa de
todos los terminos sera $\frac{PN+VN}{2}=S$: luego
$PN+VN=2S$. luego lo 1.º $P+V=\frac{2S}{N}$. luego
lo 2.º $N=\frac{2S}{P+V}$: luego lo 3.º $P=\frac{2S}{N}-V$: luego
lo 4.º $V=\frac{2S-P}{N}$

Y siendo lo 2.º en esta progre=
sion $\frac{a+Dx-a}{x}+1=N$ sera $\frac{V-P}{D}+1=N$
: luego lo 1.º $\frac{V-P}{D}=N-1$. luego lo 2.º $V-P=ND-1D$.
luego lo 3.º $D=\frac{V-P}{N-1}$ que es en lo q. se funda
la practica de dados dos Numeros (a 5 y 306)
hallar los Medios prop.s arith.cos que se
quisieren partiendo la diff.a entre los
N.os dados por el N.º delos medios prop.s
que se buscan anadiendo à ese Numero
la Unidad, y el quociente es el denomi=
nador de esa progression (n.º 14. 6.) sera el
primer termino, y. a. el Ultimo: luego lo
4.º $V=ND+P-1D$: luego lo 5.º $P=V+D-ND$.

Y lo 3.º siendo por lo demostrado antes
$P+V=\frac{2S}{N}$. y por lo demostrado ahora
$V-P=ND-1D$. sera lo 1.º sumando el

$2V \backsim \frac{2S}{N} + Nd. - d.$ Lo 2.º restando 2.º

$\backsim \frac{2S}{N} - Nd + d.$

Prop.ⁿ 58 Probl.

Dada una quantidad (a) y qualquier denominador (e) formar una progresion Geometrica.

Construccion. Si se pide, que sea ascendente multipliquese el denominador dado por el antecedente dado, y el producto ea sera el 2.º termino, y multiplicando el quadrado del denominador dado por el antecedente dado el producto ea^2 sera el 3.º &c. = Si se pide q. la progression sea descendente se partira por el denominador dado el antecedente y el quociente $\frac{a}{e}$ sera el 2.º termino, y partiendo el mismo antecedente por el quadrado del denominador dado sera el quociente $\frac{a}{e^2}$ el tercer termino &c.

Demost. por la 1.ª

$\div\ a\ ea.\ ea^2.\ ea^3.\ ea^4.\ ea^5.\ ea^6.\ ea^7.\ ea^8.\ ea^9$ &c.

$\div\ a.\ \frac{a}{e}.\ \frac{a}{e^2}.\ \frac{a}{e^3}.\ \frac{a}{e^4}.\ \frac{a}{e^5}.\ \frac{a}{e^6}.\ \frac{a}{e^7}.\ \frac{a}{e^8}.\ \frac{a}{e^9}$ &c.

porq.

Porq̃ considerandolos de 3. en 3. el pro=
ducto delos Extremos es igual al produ=
cto equiangulo del Medio por si mis-
mo: luego. ett.a

Corolario 1.

Si tres quantidades ($a . ea . e^2a$) son continu=
as prop.s el quadrado dela summa delas
Extremas es ig.l á los quadrados dela diff.a
dela diff.r delas extremas y al del duplo del
Medio porq̃ el quadrado dela summa delas
Extremas es $e^4a^2 + 2e^2a^2 + a^2$. pero el dela diff.a
delas Extremas es $e^4a^2 - 2e^2a^2 + a^2$ y el del
duplo del Medio es $4e^2a^2$ cuia summa es
$e^4a^2 + 2e^2a^2 + a^2$. que es ig.l al otro: luego. &a

Corolario 2°.

Si la razon de menor desigualdad se con-
tinua infinitam.te se llegará á una quantidad
Maior, que qualquiera propuesta, y si
la razon de Maior desig. se continua
infinitam.te se llegara á una quantidad
menor, que qualquiera propuesta.

Corolario 3.

Corolario 3.º

En toda progression geometrica el 2.º es ig.t al 1.º multiplicado, ó partido por la 1.ª potestad, ó por la raiz de las potestades del denominador. El 3.º es ig.t al 1.º multiplicado, ó partido por la 2.ª = el 4.º es ig.t al 1.º multiplicado, ó partido por la 3.ª potestad del mismo denominador y asi en adelante.

Corolario 4.

En qualq.r progression geometrica el producto de los extremos es ig.t al producto equiang.lo de qualq.ra otros dos medios igualm.te distantes como tambien el product.o equiangulo del medio por si mismo. Asi el producto de el 1.º y ultimo es ig.t al de el 2.º, y penultimo, ó al de el 3.º y antepenultimo. Y qualq.r termino es medio prop.t entre qualesq.ra dos igualm.te distantes de el.

Corolario 5.

Los n.os 1. 3. 5. 7. 9. &c.a tomados assi consecu.

En dos, y tamb. 1.° 4.° 7.° 10.° 13.° 18.ª tomados de en tres en tres; Item el 1.° 5.° 9.° 13.° 17.° 18.ª tomados de en 4. en 4. y generalm.te todos los consercuazen Vn mismo interVallo forman tambien progression.

Corolario 6.

Si el intervalo de dos terminos de qualq.ra progression geometrica es ig.l al de otros dos terminos como 2.° y 5.° y 7.° y 10 los Vnos son prop.s a los otros

Prop.n 59. th.

En toda progression geometrica (÷ b. c. d. &c.) los quadrados de dos terminos, que se sigu.n immediatam.te (bb. cc.) son entresi como el primer termino es al tercero; Del cubo del 1.° es al Cubo del 2.° como el primer termino es al quarto. Del quadrado-quadrado del 1.° es ala misma potestad del 2.° como el 1.° termino es al 5.° y asi enlas demas potestades.

Demostracion: 1.° p.te Porel N.° Scholio pp.° 33) bb. à cc tienen duplicada la razon de b. à c. pero siendo (por supp. ÷ b. c. d. f.) b. à d. tienen duplicada la raz. de b. à c. luego &c.

2ª parte por el Nº 2º scholio pp. 33.) bbb. ccc tienen triplicada razon de b à c: ~~luego~~ pero siendo ÷ b. c. d. f. la razon de b. à f. es triplicada de la raz. de b à c: luego de la misma suerte se demostrarà de qualquiera otra potestad.

Corolario

Entre dos quantidades (b y l) dadas se hallaràn los medios prop. que se quisieren (c. d. f. g. h.) assi, siendo por esta prop. como b. à l. assi la 6ª potestad de b. à la 6ª potestad de c primer medio prop. seràn b. . l :: b⁶. . c⁶ y se sabrà ( ) el valor de c y hallado este se hallarà el 2º. porq por esta c. . l :: c⁵. . l⁵ y se conocerà el valor de d. y conociendo este se hallarà el de f. porq por esta d. . l :: d⁴ assi l. . f⁴ &c.

Prop. 60. th.

Prop.ⁿ 60 th.

Dadas quatro, ó mas quantidades geometricam.ᵗᵉ prop.ˢ continuas (a b c d e et.ᵃ) las summas enteri ($a+b$. $b+c$. $c+d$. $d+e$) y las diff.ˢ ($a-b$. $b-c$. $c-d$. $d-e$) tomadas de cada dos terminos son tambien continuas pp.

Dm.ᶜⁿ a 1.ᵃ p.ᵗᵉ por la supp. $\frac{a}{b} \sim \frac{b}{c}$ luego componiendo $\frac{a+b}{a} \sim \frac{b+c}{b}$. y alternando $\frac{a+b}{b+c} \sim \frac{a}{b}$. Item supposicion $\frac{b}{c} \sim \frac{c}{d}$ luego $\frac{b+c}{b} \sim \frac{c+d}{c}$ y $\frac{b+c}{c+d} \sim \frac{b}{c}$. Item supp.ⁿ $\frac{c}{d} \sim \frac{d}{e}$: lueg $\frac{c+d}{c} \sim \frac{d+e}{d}$. y $\frac{c+d}{d+e} \sim \frac{c}{d}$ pero por la supp.ⁿ $\div$ $a.b.c.d.e.$ luego $\div$ $a+b$. $b+c$. $c+d$. $d+e$. que era lo 1.º

2.ᵃ part. Por la supp.ⁿ $\frac{a}{b} \sim \frac{b}{c}$. luego conuirtiendo $\frac{a}{a-b} \sim \frac{b}{b-c}$. y alternando $\frac{a}{b} \sim \frac{a-b}{b-c}$. Item (supp.) $\frac{b}{c} \sim \frac{c}{d}$. luego $\frac{b}{b-c} \sim \frac{c}{c-d}$ y $\frac{b}{c} \sim \frac{b-c}{c-d}$. Item $\frac{c}{d} \sim \frac{d}{e}$: luego $\frac{c}{c-d} \sim \frac{d}{d-e}$. y $\frac{c}{d} \sim \frac{c-d}{d-e}$ pero (por supp.) $\div$ $a.b.c.d.e$ luego $\div$ $a-b$. $b-c$. $c-d$. $d-e$ que era lo 2.º

luq.ᵒ lo 1.ᵃ

Quando se dize la progression ascendente considerandola en el orden retrogado es descendente, y corre la demonstr.

Prop. 61. th.

En toda progression geometrica descendente ($\div\!\!\div$ a b c d e &c.) la dif.ª entre los dos primeros $a-b$ es al 2.º (b) como la dif.ª entre el 1.º y [×el] ultimo $a-e$ es a la summa $(b+c+d+e)$ de todos los que siguen al 1.º

Demostracion $\frac{a}{b} \backsim \frac{b}{c}$. luego dividiendo $\frac{a-b}{b} \backsim \frac{b-c}{c}$. Item $\frac{b}{c} \backsim \frac{c}{d}$: luego $\frac{b-c}{c} \backsim \frac{c-d}{d}$. Item $\frac{c}{d} \backsim \frac{d}{e}$: luego. $\frac{c-d}{d} \backsim \frac{d-e}{e}$: luego como el uno al el otro assi los aggregados

$$\frac{a-b}{b} \backsim \frac{a-b+b-c+c-d+d-e}{b+c+d+e}$$

Pero $\frac{a-b+b-c+c-d+d-e}{b+c+d+e} \backsim \frac{a-e}{b+c+d+e}$

luego (4) $\frac{a-b}{b} \backsim \frac{a-e}{b+c+d+e}$

P.P. 62. th.

En toda progression Geometrica ascendente

(b. c. d. f. g. h. &a) la diff.a entre el 2.o y 1.o
(c−b) es al primero .b. como la diff.a entre el
ultimo, y 1.o (h−b) es ala summa de todos
los terminos b+c+d+f+g antecedentes

Demostr. Porla 33. $\frac{b}{c} = \frac{b+c+d+f+g}{c+d+f+g+h}$.

Inuertiendo. $\frac{c}{b} = \frac{c+d+f+g+h}{b+c+d+f+g}$.

luego diuidiend.o $\frac{c-b}{b} = \frac{c+d+f+g+h-b-c-d-f-g}{b+c+d+f+g}$.

Pero $c+d+f+g+h-b-c-d-f-g = h-b$

luego ( ) $\frac{c-b}{c} = \frac{h-b}{b+c+d+f+g}$

Corolario.

Si se llama .S. la summa de todos los termi-
minos, que proceden al ultimo .lo 1.o en toda
progression dupla sera $V-P = S$. porq. si el
primer termino es P el segundo sera 2P. y
porlo demostrado haura $\frac{2P-P}{P} = \frac{V-P}{S}$ pero
$2P-P = P$: luego $V-P = S$.

lo 2.o En toda
progression tripla sera el $V-P = 2S$ porq.
siendo el 1.o P sera el 2.o 3P y porlo demost.do

hasta $\frac{4P-P}{P} = \frac{V-P}{S}$ pero $4P-P = 3P$: luego el $V-P = \frac{P}{3S}$ y assi en las otras progressiones quintupla, sextupla &c.

Prop.ⁿ 63 Th.

En toda progression geometrica ascendente el residuo del ultimo menos el p.° partido por el denominador dela razon diminuido en una unidad es ig.ˡ ala summa de todos menos el ultimo.

Hypotesis. Sea el denominador dela razon .e. y el primer termino .a. y el ultimo e^6a digo, que $\frac{e^6a-a}{e-1} = a+ea+e^2a+e^3a+e^4a+e^5a$

Demostracion elevando por $e-1$. $e^6a-a = ea-a+e^2a-ea+e^3a-e^2a+e^4a-e^3a+e^5a-e^4a+e^6a-e^5a$ cuia summa es $-a+e^6a$ pero $e^6a-a = -a+e^6a$ luego (Ax 2) tambien los primeros, que era lo q. s. d.

Corolario.

Siendo pues el $\frac{V-P}{D-1} = S-V$: luego (Cor.ᵒ 1. schol: 18) $\frac{V-P}{D-1} = \frac{S-V}{1}$. luego invertiendo $\frac{D-1}{V-P} = \frac{1}{S-V}$ y alternando $\frac{D-1}{1} = \frac{V-P}{S-V}$ y $DS-DV = S+V = V-P$

$V-P$, y $S-P = \delta S - \delta V$. y $\frac{S-P}{S-V} = \delta$. y $S = \delta S + P - V\delta$. y $P = S + \delta V - \delta S$.

Scolio.

N.º 1.º Queda Explicado el fundam.to de los logarith.s que son Dnos Numeros, que En progression Arith.ca correspondiendo à otros dispuestos en progression geometrica, y assi si algunos Num.s continuos prop.s geometricam.te, que empiezan desde la Unidad se señalan ornitiendo el 1.º con los ordinales assi ∴ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. &c.a

1 II III IV. V VI VII. VIII. &c.o

Lo 1.º Seqúales q.ra dos como 8. y 32. se hubiezen de Multiplicar añadidos sus logarith.s III. y V. la summa VIII. da el logarithmo del producto 256. y al contrario si 128. se hucierezen de dividir por 4 restando el logaritmo desc, que es II. de el de àquel, que es VII. será el logarithmo del quociente, que se busca 32. con q.e la Multiplicacion de los proporcionales se Convierte en addicion, y la division

En Subtraccion; ytem la Extraccion
En Raiz quadrada En bisecciones
porq tomando la mitad del logarithmo
dela Raiz quadrada, que se busca 4.
Item la Extraccion dela Raiz cubica
En triseccion; porq partido por 3. el
logarithmo del Cubo 62. que es 41.
Su tercera parte 11. es el logarithmo
dela Raiz Cubica, que se busca. 4.
Para Componer las tablas delos loga=
rithmos, y señalar àcada Uno delos
num.^s desde 1. hasta 1000. ò 10.000 &.^a
los suios se sacaron, lo 1.^o todos aquellos
Numeros, que proceden en Continua pro=
gresion geometrica, y con eleccion arbi=
traria, los q van creciendo en Razon
decupla como 1. 10. 100. 1000 &.^a = lo 2.^o
para señalar logarithmos à estos nu=
meros no se eligieron los numeros
simples 1.2.3 &.^a si no, que se aug=
mentaron com muchos zeros, para
poder señalar sus logarithmos alos
num.^s

Num.s intercep.tos. entre 1. y 10. que son 8. Entre 10. y 100. que son 89.- entre 100 y 1000 que son 899. &c.a Y asi aestos Numeros geometrica prog.de les correspondian sus logarithmos arithmetica prog.de en esta conformidad

1	10	100	1000	2000
0.0000000.	1.0000000	2.0000000.	3.0000000	4.0000000

Donde se vê, que todos los logarithmos delos Num.s interceptos entre 1. y 10. ande empezar por el zero: los delos numeros interceptos entre 10 y 100. por 1. &c.a y por esso la ultima nota delos logarithmos, que se separa delas demas con un punto, se llama Characteristica, porq.e muestra quantas figuras tiene el N.o de quien es logarithmo menos una unidad.

Hallados estos logarithmos delos Numeros p.ales para hallar los delos otros intermedios, ya precisos y determinados se considera, que todos los numeros naturales estam en una misma progression geometrica, y q.e los logarithmos por ser indices dela progression geometrica

muestran enq. lugar esta cada uno
despues dela unidad y assi el logarith.
mo del Nº 10. significa, que esta enel
lugar 1.0000000 despues dela unidad
o que desde la unidad hasta llegar
al Nº 10. ai 1.0000000 num. continuos
prop.s, entre los quales estan tambien
2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 conque averiguando enque
lugar despues dela unidad està cada
uno se tendran sus logarithmos entre to=
dos los modos, que para averiguar esto ai
el mas facil es el siguiente.

Hariase de
buscar el logarithmo v.g.ª del Nº 9.
y porq. el nueve entre 1. y 10. se añadira
à cada uno 7. zeros loqual (n.º 2. schol.
15) los dexa enla misma razõ. y assi
tambien el 9. con los siete zeros se que=
da enel mismo lugar despues dela
unidad enla progression geometrica
como que haba entre 1. y 10. sin los
zeros añadidos. Enla fabrica se añaden

muchos

muchos Zeros para Exacción, por los q̃ se pierde en la Extraccion delas Raizes irracionales, y despues de Concluida la fabrica se quitan delas primeras figuras, tantas quantos fueron los siette, que se añadieron sobre los siette

Numº proporcion.	Logarithᵒˢ
A 1.0000000	0.00000000
C 3.1622777	0.50000000
B 10.0000000	1.00000000
B 10.0000000	1.00000000
D 5 6234132	0.75000000
C 3.1622777	0.50000000

Busquese pues (n 1 Sch. 3.43). Entre A y B el Nº. medio prop.ˡ que es C y es menor, que 9. con los siette zeros, pero mayor, que el A. Con q̃ el 9. Con los siette zeros esta entre el C, y el B.

El logarith.º del Numº C se halla añadiendo al logarith.º dela Unidad, que es .0. tantos zeros quantos son menester para, que tenga tantas figuras, como el logarith.º del numero .10. y la mitad desta suma, que es 0.5000000 es el logarith.º del N.º C.

Buscare despues, por ser el N.º 9. con los siette zeros maior, q. el C. y menor que el B el medio prop.l que es D. y su logarith.º a saldo expresa en q. lugar esta el num.º D despues dela unidad en la progression geometrica. Y en esta conformidad se va siempre tomando delos proporcionales un numero proximam.te maior, y otro proxi=mam.te menor, que es el num.º Q. que se busca, y hallando entre ellos la medias prop.s y sus logarithmos, hasta q. entre los medios prop.s venga uno, que sea 9 con siette zeros y el logarithmo deste, que es 0.95424251. es el logarithmo del numero 9. y significa en que lugar esta el numero 9. en la progression geometrica despues dela unidad. Dela mis ma suerte se buscan los logarithmos detodos

los

los logarith.^s de todos los numeros primos entre 1. y 1000. que son 168, pero quanto mas van subiendo los numeros son las operaciones mas faciles, y breves.

Hallados los logarithmos de los numeros primos, porque todos los demas salen por la multiplicacion de los numeros primos, o de cada uno por si, o con los otros, se tienen todos los demas en fuerza destas reglas, que nazen de el

Corolario 2.º

1.ª La summa de los logarithmos de el multiplicador, y del multiplicando da el logarithmo del producto = 2.ª el logarithmo del divisor restado del dividendo da por residuo el logarithmo ~~[illegible]~~ del quociente = 3.ª el logarithmo duplicado de qualquier numero es logarithmo del quadrado de aquel numero; y triplicado del cubo = 4. la mitad del logarithmo de qualquier numero es logarithmo de su raiz quadrada; y la tercera parte de su raiz cubica: De esta suerte se componen

Las Tablas delos logarithmos delos Nu=
meros Naturales desde. 1. hasta 10000
ò hasta 10000

Ea

finis

Num.º 9. para tener facilm.te todas las potestades que se quisieren, con los productos de que se componen; considerada su raiz divi= dida como quiera en dos partes= Escribase lo primero la unidad= lo segundo la raiz = lo tercero su quadrado = lo 4. su cubo como se ve en la tabla ajunta; dando siempre una division mas, a la columna que se sigue al modo, que Ce. tiene una mas que la Bd. y la Ff una mas que la Ce.

	b									
C	1	c								
D	$1a$	$1b$	d							
E	$1aa$	$2ab$	$1bb$	e						
F	$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$	f					
G	$1a^4$	$4a^3b.$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$	g				
H	$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$	h			
Y	$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4.$	$6ab^5$	$1b^6$	y		
K	$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3.$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7.$	k	
L	$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5.$	$28a^2b^6.$	$8ab^7.$	$1b8$	l

+ $15a^2b^4$

Esta

Vegan se ha de attender assi a las lettras de los productos como a los Numeros por quien el dichos productos estan multiplicados. Para poner las letras y sus ~~dignidades~~ Dimensiones, primero como van creciendo, y menguando assi de un lado hazia otro, como de arriba abaxo. En la a. siempre se van augmentando las dimensiones hazia abaxo. y diminuiendo hazia la mano derecha = En la b hazia abaxo no se augmentan las dimensiones, pero si hazia la mano derecha.

Para poner los Numeros por quienes estan multiplicados esos productos Notese que la unidad de la division Cc forma la 1.ª y segunda division de la Columna Dd, y tam, que el N.º de la primera division de la Columna Dd forma el de la 1.ª division de la Columna Ce. y los dos de la Columna Dd. juntos forman el de la 2.ª division de la misma Columna Ce: y el 2.º de la Columna Dd forma el de la 3.ª division de la misma Columna Ce.. Item que el de la 1.ª division de la Columna Ce. forma el de la 1.ª division de la Columna Cf, el de la 1.ª y 2.ª division de la misma Columna Ce juntos forman el de la segunda division Cf. El de la 2.ª y 3.ª division de la Columna Ce juntos forman el de la 3.ª division de la Columna Cf, el de la 3.ª division de la Columna Ce forma el de la 4. division de la Columna Cf: assi en adelante

Scholio 3.º

N.º Entre dos quantidades (a y b)

El fin deste Nº [illegible] P. el Cabanas = el Cr. que se baxa =
a esto se armoniza lo sig.te =

Hallaranse dos quanti=
dades (z y x) que esten en razon directa
con dos lados (a y b) y en razon reciproca
con otras dos dadas (c y d) de esta suerte

Hagase (22). $\frac{a}{b} \Omega \frac{d}{g}$ item por lo dicho haga=
hagase $\frac{c}{x} \Omega \frac{x}{p}$. item (24) $\frac{b}{a} \Omega \frac{x}{z}$ digo, q. x y z
que estan en razon directa con las dadas
a y b. estan en razon reciproca con las
dadas c y d.

Demonstracion por la construccion

$\frac{z}{x} \Omega \frac{a}{b}$. pero tambien $\frac{a}{b} \Omega \frac{d}{g}$: luego (Scholio 4)
$\frac{z}{x} \Omega \frac{d}{g}$ y alternando $\frac{z}{d} \Omega \frac{x}{g}$ pero (construccion)
$\frac{c}{x} \Omega \frac{x}{p}$: luego (Scholio 4) $\frac{z}{d} \Omega \frac{c}{x}$ que era 1.a
= y segun el 2.o el producto a h = g.

Regla de Sumar

quando los caracteres son semejantes se suman llanam.te los numeros q.e preceden a las letras y despues se pone la mesma letra y exponente

$$\begin{array}{r} 6A^1 \\ 4A^1 \\ \hline 10A^1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5Z^4 \\ 3Z^4 \\ \hline 8Z^4 \end{array}$$

quando es diferente la letra, o el expon.e se suma con el signo +

$$\begin{array}{r} 6A^2 \\ 12A^2 \\ 5A^3 \\ 4A^3 \\ \hline 18A^2 + 9A^3 \end{array}$$

quando las letras, exponentes, y signos son semejantes se suma con el signo + o −

$$\begin{array}{l} 6Z^4 + 10b^1 - 4b^2 \\ 3Z^4 + 5b^1 \\ \hline 9Z^4 + 15b^1 - 4b^2 \end{array}$$

quando las letras i exponentes son seme-
jantes, y los signos diferentes en lugar
de sumar se resta el num.º menor de
el mayor, y a lo q.º proviene se le pone el
signo del numero mayor

$$\begin{array}{l} 5b^5 z^2 + 4b^2 - 10 \\ 2b^5 z^2 - 7b^2 + 15 \\ \hline 7b^5 z^2 - 3b^2 + 5 \end{array}$$

Si las letras y exponentes fueren diferen
tes se dexa cada parte con su signo y
entre las dos se añade +

Restar

Si las letras y exponentes son semejantes se restan los num.s sencillamente pero si el restador fuere mayor q.e la cantidad se quita el menor del mayor y se le pone a la Resta el signo −

$$\begin{array}{c}15A^2\\ 8A^2\\ \hline 7A^2\end{array}\qquad\begin{array}{c}12b^3\\ 20b^3\\ \hline -8b^3\end{array}$$

quando las letras o exponentes son diferentes ~~se resta el num.o menor del mayor~~ i se pone el signo − sea maior o menor el restador

$$\begin{array}{c}10A^2\\ 8B^3\\ \hline 10A^2-8B^3\end{array}\qquad\begin{array}{c}5b^2\\ 7b^3\\ \hline 5b^2-7b^3\end{array}$$

quando las letras exponentes y sig
nos son semelantes y el restador
es menor se resta llanamente

$$\begin{array}{r} 6x^1 + 10 \\ 4x^1 + 6 \\ \hline 2x^1 + 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4b^2 - 6b \\ 3b^2 - 4b \\ \hline 1b^2 - 2b \end{array}$$

quando el restador es mayor se quita
el menor del mayor i se pone el sig
no contrario

$$\begin{array}{r} 8d^2 + 10d^1 \\ 5d^2 + 15d^1 \\ \hline 3d^2 - 5d^1 \end{array}$$

quando las letras iexponentes son semejantes y los signos diferentes, los terminos q̃ preceden alos signos serestan y los q̃ se siguen se suman y sepone siempre el signo dela parte superior q̃ es el dela Cantidad

$$\begin{array}{l} 7b^3 + 7b^2 \\ 5b^3 - 6b^2 \\ \hline 2b^3 + 13b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4a^2x^3 + 10a^5 - 9x^2 \\ 6a^2x^3 - 8a^5 + 3x^2 \\ \hline 2a^2x^3 + 18a^5 - 12x^2 \end{array}$$

quando las letras o exponentes son diferentes los terminos dela parte superior se ponen enla resta con su propios signos, i los del restador con los signos contrarios, ien los semejantes se obserua la Regla de los semejantes

$$\begin{array}{l} 9b^2 - 8b^1 + 10. \\ 4b^2 + 2z^3. \\ \hline 5b^2 - 8b^1 + 10 - 2z^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9a^3 + 5a^2 \\ 6z^2 + 7z^2 - 30 \\ \hline 9a^3 + 5a^2 - 6z^2 - 7z^2 + 30. \end{array}$$

Multiplicar

Si las letras son semejantes, se multiplican los numeros q̃ preceden y los exponentes se suman

$$\begin{array}{r} 10\,A^2 \\ 7\,A^3 \\ \hline 70\,A^5 \end{array}$$

quando las letras son diferentes se multiplican los numeros, y las letras se iuntan con sus mismos exponentes sin interponer signo.

$$\begin{array}{r} 4\,x^2 \\ 3\,a^4 \\ \hline 12\,x^2\,a^4. \end{array}$$

quando en las dos partes es una mesma letra sumanse los exponentes y no se repite la letra

$$\begin{array}{r} 8\,b^2\,d^2 \\ 3\,b^3 \\ \hline 24\,b^5\,d^2 \end{array}$$

quando los signos son semejantes
+ y + o menos − y − siempre el
producto es + y si son encontrados siem
pre es − si las letras son seme
jantes se suman los exponentes y se
multiplican los numeros q. prece
den, comenzando por el primer ter
mino de la mano derecha, como
en la aritmetica vulgar

$$4z^3 + 2z^1$$
$$6z^3 + 3z^1$$
$$+12z^4 + 6z^2$$
$$24z^6 + 12z^4$$

Suma $24z^6 + 24z^4 + 6z^2$

$-15\,6^4 - 10\,6^1 - 6$

TABLA

ELEMEN
tos
Mathem:
ticos.
MS