M. HOYOS

# GEOMETRÍA

Regalado a esta biblioteca por el autor.

10 Dic 915

# GEOMETRÍA

# ELEMENTOS

DE

# GEOMETRIA

POR

Miguel Hoyos y Juliá

Catedrático de Matemáticas en el Instituto General y Técnico de Logroño



LOGROÑO:
Imprenta y Librería Moderna
1913

# ADVERTENCIAS

En gracia a la sencillez que debe campear en este libro, dedicado únicamente a principiantes, se admiten en él como axiomáticas ciertas proposiciones que podrían ser deducidas de otras, aunque al hacerlo así se conceda a la experiencia lo que se merma al raciocinio. Por igual causa, se restringen algunos conceptos cuya total comprensión exige esfuerzos para lectores infantiles.

En las demostraciones prolijas en detalles, preséntase expurgada de ellos la idea sintética de las mismas, tendiendo a evitar el caso, no raro, del alumno que, después de brillante perorata, ignora si ha llegado al término de la prueba o se halla a medio camino. Esto permitirá, además, que el discípulo cuyo entendimiento lo consienta esclarezca por sí mismo los expresados pormenores, ejecutando labor personal—la más eficaz de todas—o percibiendo al menos más clara y enérgicamente destacado el fin a que su discurso se encamina.

Entiéndase, no obstante, que la separación entre lo fundamental y lo explicativo es innecesaria una vez que el alumno se haya asimilado la demostración, y que, en consecuencia, cuando él haya de exponerla puede ir al lado de cada verdad afirmada la prueba de la misma.

Varias demostraciones se hacen intuitivas mediante objetos materiales (de madera, papel, alambre, etc ), debiendo utilizarse este recurso de enseñanza siempre que sea oportuno, y en especial en los casos en que interviene el movimiento (traslación, rotación...), y en el estudio de los poliedros.

En el texto se ofrecen resueltos únicamente los problemas fundamentales, y se proponen como ejercicios sus derivados más inmediatos, los cuales, precedidos a veces de ligeras indicaciones, pueden ser asequibles a la escasa potencia investigadora de los principiantes. Cuando se agotan, presentando su resolución, estos primeros y más sencillos problemas, hay que valerse para despertar la iniciativa del estudiante de otras cuestiones más complicadas o menos útiles.

Los ejercicios de demostración que entre algunas se intercalan, obedecen al mismo deseo de facilitar al alumno el ensayo de sus propias fuerzas.

En cuanto al plan general del libro, y a las variantes introducidas en algunas demostraciones o enunciados, el lector juzgará sin necesidad de más advertencias.

# GEOMETRIA

## CAPÍTULO PRIMERO

## PRELIMINARES

1. **Extensión** de un cuerpo es el lugar que ocupa en el espacio indefinido.

2. **Cuerpo geométrico** es la entidad abstracta que resulta de prescindir en el cuerpo físico de las propiedades de la materia, para no considerar sino su *forma*, *magnitud* y *posición*.

3. **Superficie** de un cuerpo es su parte externa, que lo separa del resto del espacio, y aunque materialmente no se puede desligar del cuerpo, por abstracción se consideran en Geometría superficies aisladas, sin preocuparse del cuerpo a que pertenezcan.

4. **Línea** es el límite que da forma a las superficies, o separa dos porciones de una superficie.

5. **Punto** es el elemento en que se limita una línea o dos partes de ella.

*Elementos geométricos* son los puntos, líneas y superficies, y combinados entre sí forman las *figuras*.

6. **La Geometría** *estudia las propiedades de las figuras y la medida de la extensión.*

7. Los elementos geométricos y las figuras tienen representación gráfica por medio del dibujo.

El punto se representa con uno de estos signos · ×, y para distinguir un punto de otro se coloca en su proximidad una letra mayúscula, con la cual se nombra.

La línea se representa por un trazo, contínuo o interrumpido. (Véase en cualquiera de las figuras del texto).

Las superficies y los cuerpos se representan mediante las líneas que los limitan, y su dibujo requiere nociones prácticas. (Véanse las figuras correspondientes a la 2.ª parte).

8. Entre las superficies, la más importante es el *plano;* y entre las líneas, la *recta.*

La superficie del agua en reposo, la de un cristal de espejo, y, más en tosco, la tabla de una mesa o el piso de una habitación, son imágenes materiales que, idealizadas por nosotros hasta concebirlas perfectamente *lisas,* sin rugosidad ni aspereza alguna, nos dan el concepto del *plano;* y un hilo delgado y tirante nos ofrece la idea de *recta,* tanto más aproximada al sér ideal que en Geometría se estudia, cuanto menores sean el grueso y la flexibilidad del hilo.

9. Adquiridos los conceptos de línea recta y de superficie plana, se podrían definir negativamente otras líneas y superficies llamadas **curvas,** diciendo que son las que no tienen, respectivamente, ninguna porción recta ni plana; pero también podemos encontrar imágenes directas en la Naturaleza. Así, el hilo de antes abandonado a su flexibilidad da idea de la *línea curva,* y ejemplo de

superficie curva lo tenemos en la de una naranja o del tronco de un árbol, etc.

10. **Línea quebrada** es la compuesta de trozos de recta, tales que cada uno comienza donde acaba el anterior, y no constituyen entre ambos recta única.

11. Relativamente al plano y a la recta admitiremos algunas verdades intuitivas o experimentales, que sirven de fundamento a la Geometría, y podrían, por ello, denominarse *axiomas geométricos*, como son los que siguen:

12. *La recta se extiende indefinidamente en dos sentidos opuestos a partir de un punto de ella.*

Este punto puede considerarse como *origen* de dos porciones indefinidas de la recta, las cuales se denominan *semirrectas* opuestas entre sí. (AX, AY de la fig. 1).

*Segmento* de recta es la porción de ella limitada por dos puntos, llamados extremos del segmento. (AB de la fig. 1).

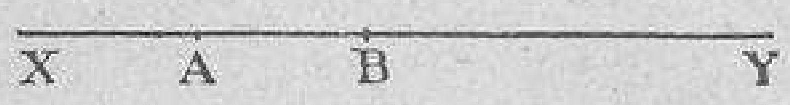

Fig.1

13. *En un plano, de un punto a otro sólo se puede trazar una recta, la cual está* **toda ella** *contenida en el plano, y queda determinada o fijada en posición por aquellos puntos.*

Despréndese de aquí que dos rectas con dos puntos comunes coinciden o se confunden por completo. Cualquier segmento de recta puede colocarse sobre otra recta o sobre otro segmento. Si los extremos de ambos segmentos pueden coincidir, dichos segmentos son *iguales*.

14 *El segmento rectilíneo que une dos puntos es más corto que cualquier otro camino formado por una línea quebrada o curva que fuese del uno al otro punto.*

La magnitud de dicho segmento rectilíneo se llama *distancia* entre los puntos dados.

Si un punto A está *a igual distancia* de otros, B, C..., se dice que *equidista* de ellos; lo cual significa que los segmentos AB, AC... son iguales. (Hágase la figura).

15. *Un segmento de recta*, AB (fig. 1), *puede moverse resbalando sobre la recta indefinida*, XY, *a que pertenece, sin dejar de estar sobre ella.* Del mismo modo, *una recta, confundida con otra puede resbalar a lo largo de ella sin perder la coincidencia.*

Cuando se dice que una recta *resbala sobre sí misma*, se entiende que resbala sobre otra recta confundida con ella.

16. *Una figura puede girar alrededor de una recta fija sin sufrir deformación.*

El movimiento de que la figura está animada se llama de *rotación alrededor de un eje:* el *eje* es la recta que se conserva inmóvil.

17. *Una recta indefinida, situada en un plano, lo divide en dos regiones* (llamadas *semiplanos) que coinciden al doblar el plano por dicha recta.*

18. 1.º—*Una semirrecta situada en un plano puede girar alrededor de su origen dando la vuelta sin salir del plano, coincidir con la semirrecta opuesta y volver a su posición inicial.*

En este movimiento, llamado de *rotación alrededor de un punto*, no hay punto del plano por el cual no pase, una sóla vez, la recta móvil.

2.º *Una recta que se apoye en otra fija, y se mueva sin girar ni salir del plano, lo recorre por completo de* *modo que cada semirrecta de las dos en que queda dividida por la recta fija pasará sucesivamente por todos los puntos del plano situados en la región en que ella se mueve.*

19. **Segmentos.**—Con frecuencia se considera el segmento rectilíneo como camino recorrido por un punto que partiendo de un extremo llegase al otro. Entonces, el punto de partida se llama *origen;* y el de término, *extremo.* Si se invirtiesen cambiaría el *sentido del movimiento.*

Los segmentos se enuncian y designan con las letras correspondientes a su origen y a su extremo, enunciando primero aquélla.

Los segmentos AB y BA son de sentido contrario, porque el primero tiene su origen en A y su extremo en B, y el segundo inversamente.

Dos segmentos del mismo sentido son *iguales* si puestos sobre una recta con los orígenes juntos coinciden los extremos; y, si no acontece así, es *menor* aquel cuyo extremo caiga dentro del otro segmento.

20. *Para sumar segmentos de un mismo sentido, basta colocarlos sobre una recta de modo que el extremo de cada uno sea origen del siguiente. La suma es la distancia entre el origen del primer sumando y el extremo del último.*

*Para restar un segmento de otro se procede como para sumarlos, pero invirtiendo el sentido del substraendo.*

Se colocará, pues, sobre una recta el minuendo, y tomando su extremo como origen del substraendo, se llevará éste en sentido contrario. La parte comprendida entre el origen del minuendo y el extremo del substraendo es la *diferencia*. (Efectúese prácticamente).

Se desprende de aquí que la diferencia de dos segmentos iguales es cero; y que también es cero la *suma* de dos segmentos de sentido contrario e igual magnitud; es decir:

$$AB - AB = 0 \quad y \quad AB + BA = 0.$$

No hay, pues, imposibilidad, entendida la substracción como se ha dicho, en restar de un segmento otro *mayor* que él; solamente se advierte que la diferencia será un segmento *de sentido contrario* al que se hubiere atribuído al minuendo. Para distinguir esto, se llama *positivo* un sentido cualquiera de recorrido, v. gr.: de izquierda a derecha, y *negativo* el sentido opuesto, y entonces se puede decir que restar es lo mismo que sumar un sumando *negativo*, y que si se resta de un segmento otro mayor, la diferencia es negativa.

(Estas consideraciones son útiles en el estudio del Álgebra, y allí deberán ampliarse).

No obstante lo dicho, nosotros generalmente haremos caso omiso del sentido de los segmentos, lo que equivale a considerarlos todos del mismo.

21. Entre las líneas curvas, la más importante es la circunferencia.

**Circunferencia** *es la línea curva que describe el extremo de un segmento de tamaño fijo, cuando gira dicho segmento alrededor de su origen, en un plano, hasta volver a su posición inicial.*

La porción de plano recorrida por el segmento en su movimiento se llama *círculo;* el segmento, *radio;* su origen, *centro.* (Fig. 2).

La anterior definición sugiere la idea del trazado de la circunferencia, que podría hacerse con un hilo tirante sujeto por un extremo al plano y que en el otro llevase un lápiz, clarión, etc. Pero más cómodamente se dibuja la circunferencia con el *compás*, instrumento tan conocido que creemos inútil describirlo.

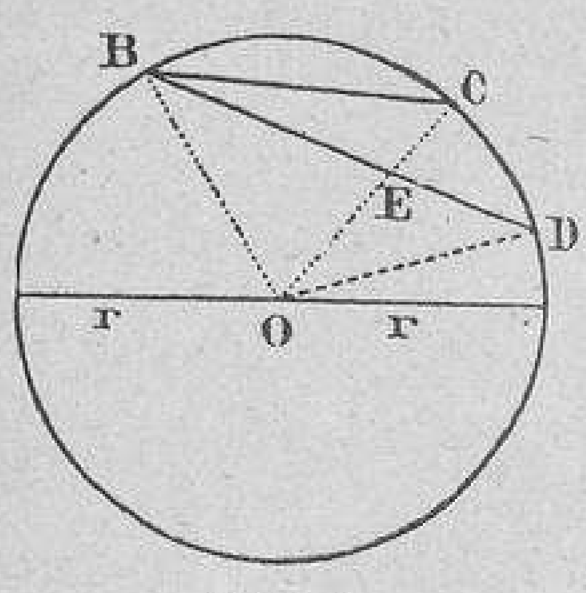

Fig. 2.

Despréndese de la definición dada, ésta, que frecuentemente la sustituye: *la circunferencia es una curva, cerrada y plana, cuyos puntos equidistan de otro interior, llamado centro.*

La distancia constante entre el centro y un punto de la circunferencia es el radio de ésta y del círculo por ella limitado.

Dedúcese también que según un punto esté dentro del círculo, en la circunferencia o fuera del círculo, su distancia al centro será menor, igual o mayor que el radio, y recíprocamente.

22. Se dice que una línea es el *lugar geométrico* de una serie de puntos que tienen cierta propiedad, cuando ésta pertenece *exclusivamente* a *todos* los puntos de la línea.

Según esto: *la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de su plano que se encuentran a una distancia del centro igual al radio.*

Porque *todos* los puntos de la circunferencia cumplen con esa condición, y son los *únicos* que satisfacen a ella.

23. PROBLEMA. *Dado un punto*, O, *hallar todos los que en el mismo plano, estén a una distancia de aquél fijada por el segmento* r. (Fig. 2).

*Solución.* Con una abertura de compás igual a $r$, o con un hilo de igual tamaño, se describirá, haciendo centro en O, una circunferencia, cuyos puntos serán los pedidos.

La solución del problema es única, pues claramente se advierte que con centro y radio fijos, sólo se puede trazar una circunferencia, o varias coincidentes. Luego dos circunferencias de igual radio coinciden al superponer sus centros y sus planos.

A veces se supone hecha esta coincidencia de dos circunferencias para hacer resbalar una sobre la otra girando alrededor del centro sin levantarse del plano; y esto indica que *una porción de circunferencia se ajusta sobre ella cualquiera que sea la parte de la circunferencia total sobre la cual se coloque.*

24. **Arco** *de una curva es una porción de ella, limitada por dos puntos extremos.*

Según lo dicho, dos arcos de una misma circunferencia, o de dos circunferencias iguales, se adaptan perfectamente al superponerlos; y si entonces se puede hacer que sus extremos coincidan, los arcos serán *iguales.*

En sentido más general, *arco de circunferencia* es cualquier porción recorrida sobre la misma, desde un punto llamado *origen* hasta otro denominado *extremo.*

Las consideraciones acerca del sentido, y las operaciones de suma y resta con esta clase de arcos, son completamente análogas a las de los segmentos de recta que se explicaron en los párrafos 19 y 20, quedando a cargo del lector su enunciación y práctica.

25. **Diámetro** de una circunferencia es la recta que

pasando por el centro se limita en los puntos en que corta a la circunferencia. (Fig. 2).

El diámetro es la suma de dos radios opuestos, y, por consiguiente, *todos los diámetros son iguales*, puesto que lo son los radios.

Un segmento, BC, que une dos puntos de la circunferencia es menor que la suma de los dos radios OB y OC que van a sus extremos, (14), luego es menor que un diámetro.

Trazando un diámetro de la circunferencia y doblando por él el plano, los arcos que caían a distinta región, coincidirán; porque sus puntos están a igual distancia del centro.

Estos arcos iguales se llaman *semicircunferencias* (mitades de circunferencia) y las porciones de círculo que separan, *semicírculos*.

26. **Cuerda** es el segmento de recta que une los extremos de un arco. (BC; fig. 2).

*Las cuerdas de arcos iguales, son iguales.*

Porque a la par se podrían hacer coincidir los arcos y los extremos de las cuerdas.

*Para arcos* (menores que la semicircunferencia) *desiguales, al menor arco le corresponde menor cuerda* (1).

Para justificar este aserto supongamos los arcos BC y BD, (fig. 2), de los cuales el menor, BC, tendrá su extremo entre B y D, y, de consiguiente, a distinta región que el centro O con relación a la cuerda BD, por lo cual

(1) No se crea por esto que hay proporcionalidad entre los arcos y las cuerdas, pues es fácil probar que a doble arco no corresponde doble cuerda.

el radio OC cortará a ésta en un punto E. Se podrá entonces escribir según un axioma conocido (14):

$$\text{Cuerda BC} < \text{BE} + \text{EC}$$
$$\text{Radio OD} < \text{OE} + \text{ED}$$

y sumando estas desigualdades y teniendo presente que los trozos BE y ED componen la cuerda BD y los EC y OE el radio OC, saldrá:

$$\text{cuerda BC} + \text{radio} < \text{cuerda BD} + \text{radio}$$

y, en consecuencia,

$$\text{cuerda BC} < \text{cuerda BD}$$

como se había afirmado.

*Recíprocamente: en dos circunferencias iguales, a cuerdas iguales corresponden arcos iguales*, siempre que éstos sean todos menores o todos mayores que la semicircunferencia.

Porque si los arcos no fuesen iguales, habría uno menor que otro y entonces ya no podrían ser iguales las cuerdas, contradiciendo lo que admitíamos.

27. **Secante** *es una cuerda prolongada.*

Según esto, la secante *corta* a la circunferencia en dos puntos, llamados de *intersección*. (Más adelante se demostrará que la secante sólo tiene esos dos puntos comunes con la circunferencia).

Cuando se habla del tamaño de una secante que parte de un punto exterior al círculo, se entiende limitada en dicho punto y en el más lejano de los de intersección.

Así, por secante que parte de A (fig. 3) se entendería el segmento AB. El otro segmento, AC, se llama *externo.*

28. **Tangente** *es la recta que sólo tiene con la circunferencia un punto común*, llamado de *contacto* o de *tangencia*. (AD: fig. 3).

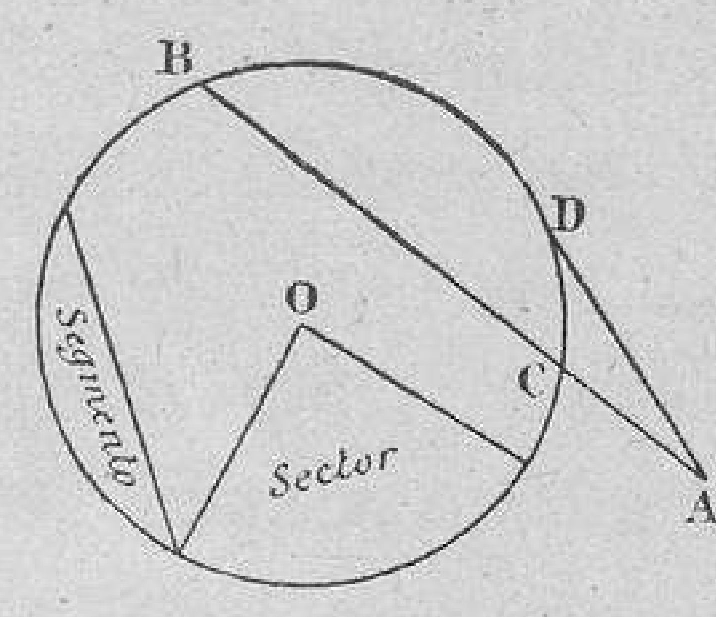

Fig. 3.

(Por ahora admitiremos la existencia de la tangente como hecho experimental, sin perjuicio de establecerla racionalmente más adelante).

Por tamaño de una tangente que parte de un punto exterior se entiende el del segmento comprendido entre este punto y el de contacto (AD).

29. **Segmento de círculo** *es la parte de él comprendida entre un arco y su cuerda*. (Fig. 3).

Si el arco es una semicircunferencia, el segmento es un *semicírculo* (mitad del círculo).

30. **Sector circular** *es la parte de círculo limitada por dos radios y el arco que une sus extremos*. (Fig. 3).

Si los radios forman un diámetro, el sector será un semicírculo.

31. **Angulos.—Angulo** *es la figura plana formada por dos semirrectas que parten de un punto*.

Este punto se llama *vértice*, y las semirrectas, *lados*.

Para precisar la definición de ángulo y adquirir idea de su magnitud, se supone que una de las semirrectas gira alrededor del vértice, sin salir del plano, desde la posición inicial que constituye uno de los lados, llamado *lado de origen*, hasta la final o *lado extremo*, en sentido determinado. (Fig. 4). El lado de origen es OA;

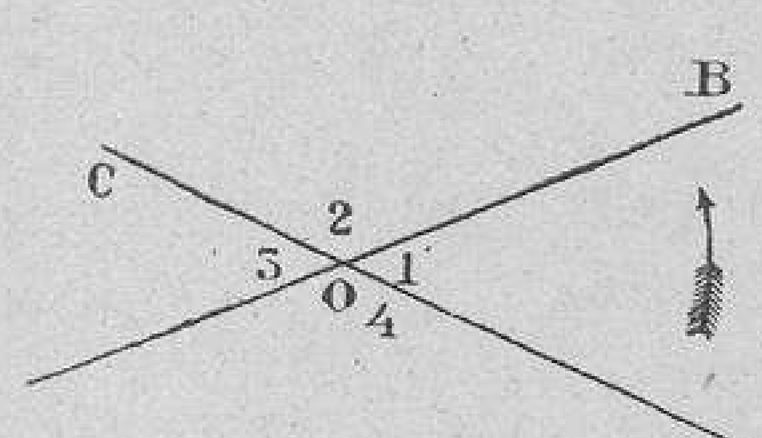

Fig. 4.

el extremo OB, y el sentido el que indica la flecha).

Concebido así el ángulo, es la porción de plano sobre la cual resbala la semirrecta móvil desde su posición inicial a la final.

32. *Angulos iguales* son aquellos en que, supuesto el mismo sentido de giro, pueden coincidir los lados de origen y los lados extremos.

*Región interior* de un ángulo es la que se supone recorrida por una semirrecta que lo engendrase. La otra región del plano es *exterior*.

Los puntos del plano son interiores o exteriores al ángulo según se hallen en la primera o en la segunda de las regiones dichas.

Si dos ángulos son del mismo sentido y se hacen coincidir sus lados de origen, será *menor* aquel de los ángulcs cuyo lado extremo quede en la región interior del otro.

33. **Angulo llano** *es el formado por una semirrecta que gira hasta colocarse sobre la semirrecta opuesta.* (AOC: fig. 4).

El ángulo llano tiene, pues, los dos lados formando una recta única, y por eso vulgarmente no suele llamarse ángulo; pero su admisión, (consecuencia del concepto ámplio que del ángulo hemos formado), facilita algunas proposiciones.

Según lo dicho, toda recta indefinida puede considerarse como un ángulo llano cuyo vértice sea un punto cualquiera de ella.

*Todos los ángulos llanos son iguales;* porque toda recta puede coincidir con otra.

*Angulo saliente* es el menor que un llano, y *entrante*, el mayor. Dos semirrectas que parten de un punto forman, en general, un ángulo saliente y otro entrante, pero nosotros, siguiendo el sentido corriente atribuído a la palabra ángulo, consideraremos siempre el ángulo *saliente*, mientras expresamente no se advierta lo contrario. (En la fig. 4 el que contiene la flecha).

34. Los lados de un ángulo deben considerarse como semirrectas, y son, por tanto, indefinidos, pero como en algunas figuras aparecen como segmentos limitados, debe tenerse en cuenta que, en este caso, *el mayor o menor tamaño de los lados para nada influye en el del ángulo, el cual depende únicamente de su abertura, apreciable por el giro efectuado para engendrarlo.*

35. Un ángulo se designa por tres letras, correspondientes una a cada lado y otra al vértice, enunciándose ésta en medio; v. gr.: ángulo AOB. (Fig. 4).

Puede también nombrarse por la letra del vértice, si no hay confusión, o por un número o letra minúscula colocados cerca del vértice.

Ejemplos: ángulo O, ángulo 1. (Fig. 4).

En la escritura se reemplaza la palabra ángulo por el signo $\wedge$ colocado sobre las letras o el número que designan el ángulo.

36. Supuesto el mismo sentido, se llaman *ángulos consecutivos* aquellos en que el lado extremo de uno es origen del siguiente. (AOB y BOC: fig. 4).

*Para sumar ángulos de igual sentido se colocan consecutivos, siendo la suma el ángulo formado por el lado de origen del primero y el extremo del último.*

Esta suma pudiera exceder no sólo de un ángulo llano, sino de un giro completo alrededor del vértice, por lo cual deben admitirse ángulos de una o varias vueltas, es decir, que se han engendrado por uno o varios giros completos y sucesivos alrededor del vértice.

*Para restar ángulos* (de igual sentido) *se procede como para sumarlos, pero invirtiendo el substraendo.*

Si el substraendo fuese mayor que el minuendo, la diferencia sería negativa, etc.; todo análogamente a lo que se dijo respecto de los segmentos y de los arcos.

No obstante lo dicho, nosotros haremos generalmente caso omiso del sentido de los ángulos, suponiendo que todos son del mismo.

37. **Bisectriz** *de un ángulo es la semirrecta que partiendo del vértice lo divide en dos partes iguales.*

(La existencia de esta recta la admitimos como noción experimental).

La bisectriz de un ángulo llano, se dice que es *perpendicular* o *normal* a la recta que forman los lados del ángulo (OC. Fig. 5).

38. **Angulo recto** *es la mitad de un ángulo llano* (AOC: fig. 5).

Como todos los ángulos llanos son iguales, *todos los ángulos rectos son iguales.*

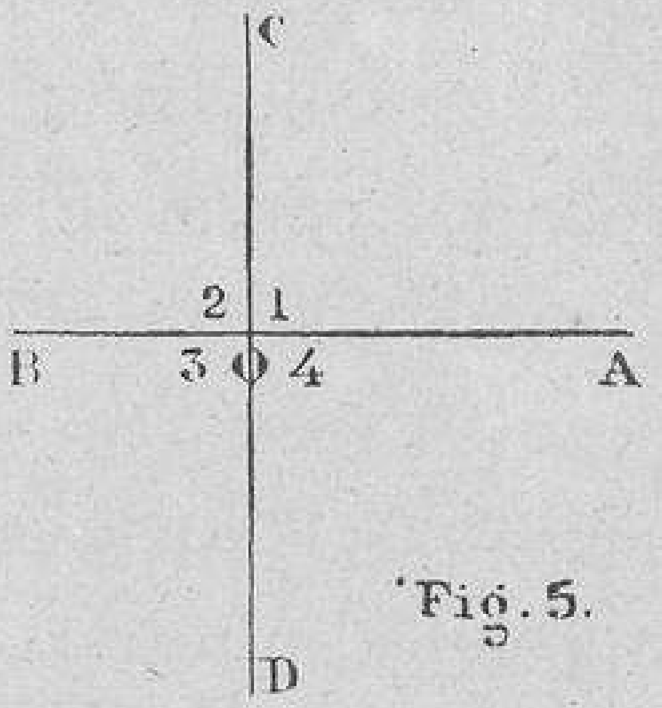

Fig. 5.

Siendo la perpendicular a una recta en un punto bisectriz del ángulo llano que puede suponerse formado en dicho punto, (33) podemos también decir:

*Una recta es perpendicular a otra, cuando forma con ella ángulo recto.*

Si las rectas son indefinidas forman al cortarse los cuatro ángulos 1, 2, 3 y 4 (fig. 5) pero si es recto el 1, lo será el 2, que forma con él un llano, y por serlo el 2 lo será el 3, que forma con él otro llano, etc., de modo que los cuatro ángulos serán rectos, y podrá afirmarse: *si una recta es perpendicular a otra, ésta lo es a la primera, y si una semirrecta (o segmento) es perpendicular a una recta, la prolongación de aquélla también lo es.*

39. *Por un punto puede trazarse una perpendicular a una recta: y es única.*

*a)* Si el punto está sobre la recta (como el O de la fig. 5) se puede considerar como vértice de un ángulo llano (AOB), y teniendo éste una bisectriz única (la OC), ésta será la única perpendicular a la recta dada.

*b)* Si el punto es exterior a la recta (como el P de la fig. 6), construyendo antes, como en el caso *a)* un ángulo recto AOB, y haciendo que uno de sus lados OA, resbale sobre la recta dada y el otro lado caiga hacia la región en que está el punto exterior P, habrá una posición en que dicho lado pase por el punto P (18-2.º), y, por consiguiente, existirá una perpendicular desde él a

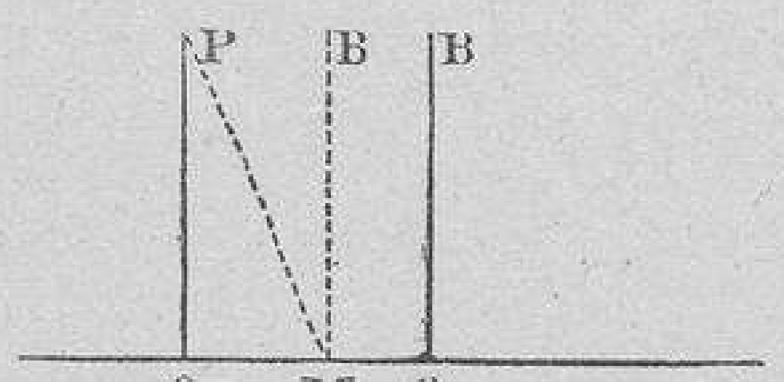

Fig. 6.

la recta. Además, el vértice O del ángulo móvil tomará entonces cierta posición, de tal suerte que cuando este vértice se coloque en otro punto de la recta dada el lado OB del ángulo recto no pasará por P (*) Esto impide que por P exista otra perpendi-

(*) Admitimos esto como axioma o postulado de índole experimental.

cular, pues si ésta fuese PM, haciendo coincidir el vértice O del ángulo móvil con M, MB no pasaría por P, y existirían por el punto M dos perpendiculares: MB y MP; (contradiciendo lo expuesto en el caso *a)*.

40. *Angulo agudo* es el menor que un recto; y *obtuso*, el mayor. Los lados de estos ángulos, y por extensión los ángulos mismos, se denominan *oblícuos*.

*Angulos complementarios* son aquellos cuya suma es un recto, y *suplementarios* aquellos cuya suma es un llano (2 rectos). Cada ángulo de éstos es, respectivamente, *complemento* o *suplemento* del otro, o de la suma de los otros (si son varios).

*Los ángulos que tienen el mismo complemento o suplemento son iguales:* porque les falta lo mismo para valer un recto o un llano.

41. **Angulos adyacentes** *son los consecutivos cuyos lados no comunes forman un llano, es decir, caen en línea recta.* Ejemplo: los 1 y 2. (Fig. 4).

Luego, *los ángulos adyacentes son suplementarios.* Pero dos ángulos pueden ser suplementarios sin ser adyacentes, bastando para ello que no sean consecutivos.

42. **Angulos opuestos por el vértice** *son aquellos en que los lados del uno son las semirrectas opuestas a los lados del otro.*

Ejemplo: los 1 y 3. (Fig. 4).

Cuando dos rectas se cortan, forman cuatro ángulos, de los cuales dos consecutivos (1 y 2, 2 y 3 ó 3 y 4— fig. 4) son adyacentes, y dos no consecutivos (1 y 3 ó 2 y 4) opuestos por el vértice.

*Los ángulos opuestos por el vértice son iguales;* porque tienen igual suplemento. El 1 y el 3 v gr.: tienen por suplementario su adyacente 2 ó 4. (Fig. 4).

43. EJERCICIOS.—Dado un ángulo, formar su adyacente. Dado un ángulo, formar su opuesto por el vértice.

44. Si son dos las rectas cortadas por otra, ésta se llama *secante* o *transversal*, y forma con aquéllas ocho ángulos (fig. 7), de los cuales cuatro tienen puntos interiores situados entre las rectas dadas y se llaman *internos*, (3, 4, 5 y 6), y los restantes, *externos*.

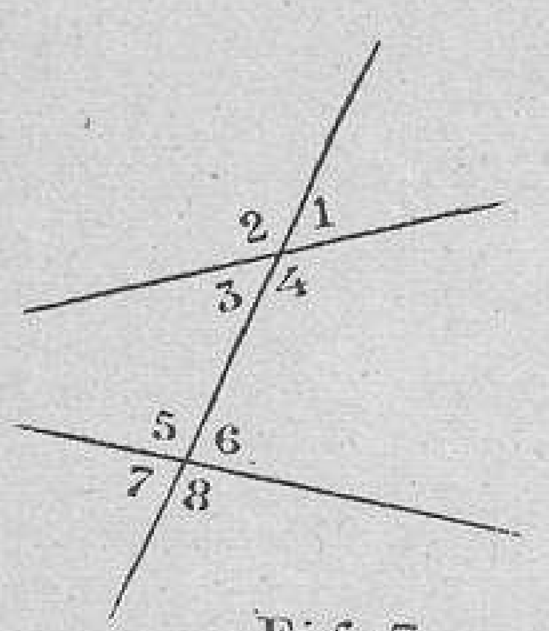

Fig. 7

Tanto los internos como los externos se llaman *alternos* cuando caen a *distinto lado* de la secante y no son adyacentes.

Así, son *alternos internos* el 3 y el 6 ó el 4 y el 5; y *alternos externos* el 1 y 7 ó 2 y 8.

*Angulos correspondientes* son los no adyacentes, del mismo lado de la secante y uno interno y otro externo: (1 y 6, 4 y 8, 2 y 5 ó 3 y 7).

A los demás ángulos no les daremos nombres especiales.

45. Con relación a un círculo puede un ángulo situado en el mismo plano ocupar las posiciones y recibir los nombres que siguen:

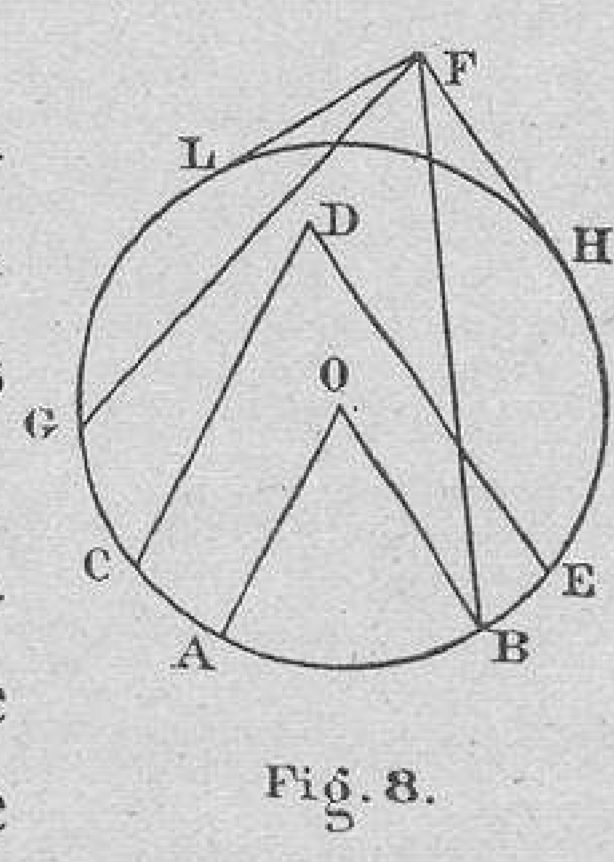

Fig. 8.

**Angulo central** *es aquel cuyo vértice está en el centro* (como el AOB de la fig. 8). El arco comprendido entre los lados (que serán radios o radios prolongados), se llama *arco correspondiente al ángulo* (como el AB del ángulo AOB).

**Angulo interior** *es el que tiene el vértice dentro del círculo.* Sus lados son secantes. Ejemplo: el CDE de la fig. 8.

**Angulo exterior** *es el que tiene el vértice fuera del círculo.* Sus lados pueden ser secantes (BFG, fig. 8) o una secante y una tangente (GFH) o dos tangentes (LFH). A este último se le llama también *circunscripto.*

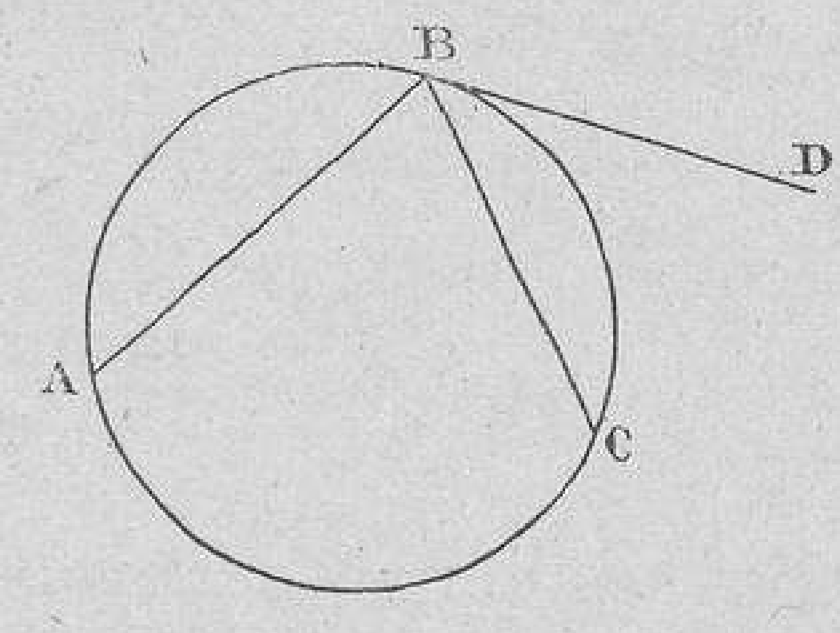


Fig. 9.

**Angulo inscripto** *es el que tiene el vértice en la circunferencia, y sus lados son cuerdas (o secantes, si se prolongan).* Ejemplo: ABC, fig. 9.

**Angulo semi-inscripto** *o del segmento es el que tiene el vértice en la circunferencia y por lados una cuerda y una tangente*; como el CBD, (fig. 9).

46. **Paralelas.**—*Dos rectas de un plano se dice que son* **paralelas,** *cuando no tienen ningún punto común.*

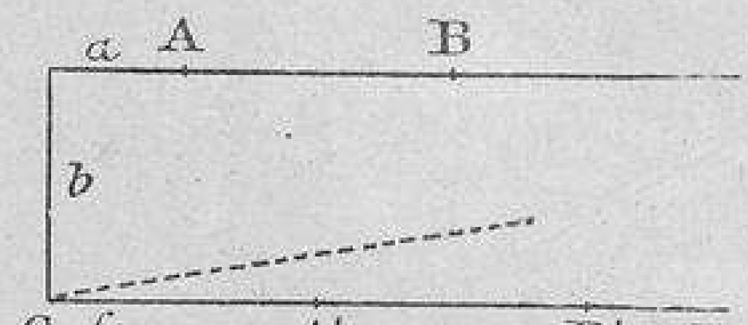


Fig. 10.

Dos segmentos cualesquiera de estas rectas se llaman también paralelos. (Fig. 10: AB y CD son rectas paralelas, y los segmentos AB y A'B' paralelos).

Un caso particular basta para confirmar la existencia de las paralelas, y entre ellos merece citarse el siguiente:

*Dos rectas perpendiculares (en puntos distintos) a otra, son paralelas*; esto es, no tienen punto común.

Porque si tuviesen punto común, habría desde él esas dos perpendiculares a la otra recta, cosa imposible. (39).

47. *Por un punto,* C, *se puede trazar una paralela*

*a una recta*, a, *del plano* (fig. 10). Porque desde C se pueden trazar, una perpendicular, *b*, a la recta *a*, y otra, *c*, a esta perpendicular *b*. De modo que *a* y *c* serán paralelas, como perpendiculares ambas a *b*.

Además, *por este método*, no se podría trazar más paralela que la *c*, puesto que ésta es la única perpendicular a *b* por el punto C; pero permanece en duda si una *oblicua* (la señalada de puntos) cortaría o no a la recta *a*. Admitiendo que sí la corta, y, de consiguiente, que no es paralela, *por un punto exterior a una recta no se le puede trazar más que una paralela*; proposición fundamental llamada *postulado de Euclides*.

48. **Polígonos.**—Se sabe (10) que la línea quebrada se compone de varios segmentos de recta, de modo que dos consecutivos no formen una recta única. Dichos segmentos se llaman *lados*, y los puntos en que cada uno enlaza con el siguiente, *vértices*. Las líneas quebradas son *convexas* cuando uno *cualquiera* de los lados, considerado como indefinido, deja a todo el resto de la línea a una sóla de las regiones en que dicho lado divide al plano (fig. 11-1.ª); *cóncavas*, si no ocurre esto para todos los lados (fig. 11-2.ª); *abiertas*, si el extremo del último lado no coincide con el origen del primero (1.ª); *cerradas*, si coinciden (2.ª); *cruzadas*, si los lados se cortan entre sí (3.ª), y *no cruzadas*, en caso contrario (4.ª).

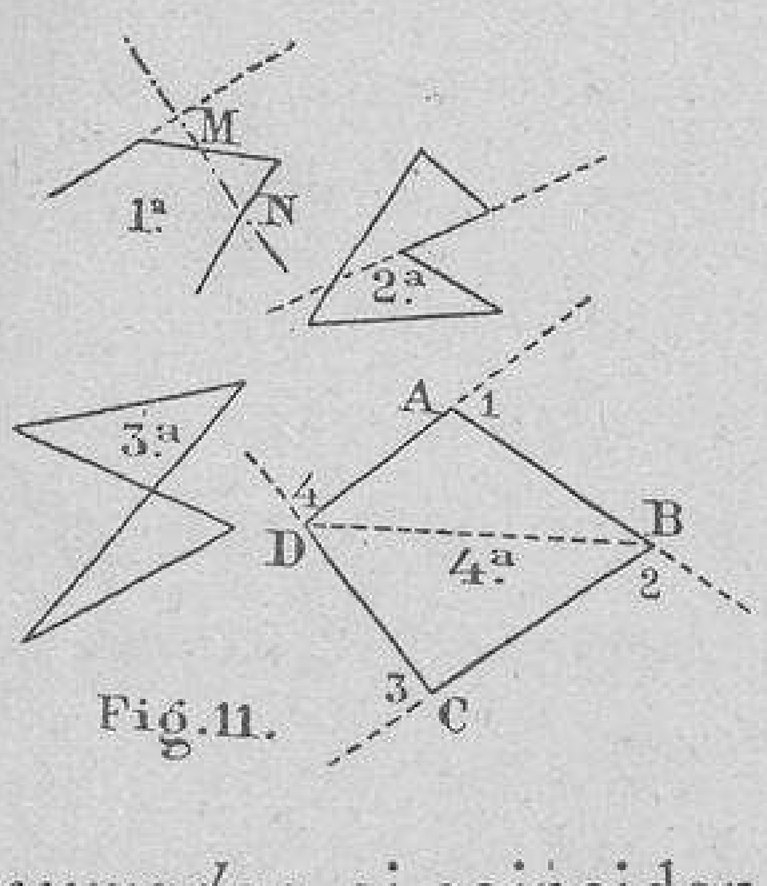

Fig. 11.

Las líneas *convexas* no pueden ser cortadas por una recta que no pase por un vértice más que en dos puntos (como M y N en la 1.ª), pues si lo fueran en tres, el lado que pasase por el de en medio no dejaría a los otros en una misma región.

Una línea cerrada y no cruzada determina en el plano dos regiones: la limitada por la línea, que se llama parte interior, y la indefinida que la rodea, que es la parte exterior.

49. **Polígono** *es la porción de plano comprendida en el interior de una línea quebrada no cruzada y cerrada.*

*Lados* y *vértices* del polígono son los de la línea que lo limita, la cual suele llamarse *contorno* del polígono, y, a veces, por extensión, también polígono.

Los polígonos son convexos o cóncavos, según sea una u otra cosa su contorno.

Nosotros hablaremos siempre de los polígonos convexos mientras no advirtamos lo contrario.

No obstante, mencionaremos con el nombre de *polígonos estrellados* ciertas figuras cuyo contorno se cruza. (Véanse en el cap. de polígonos regulares).

*Angulos interiores*, son los que forman cada dos lados consecutivos hacia la región interior del polígono; y siendo éste convexo son menores que un llano.

Por *ángulos externos* entenderemos los adyacentes a los internos, obtenidos al prolongar los lados recorriendo el contorno en un sentido constante (los numerados en la fig. 11-4.ª).

En un polígono hay igual número de lados que de vértices y de ángulos (internos o externos).

El polígono de tres lados se llama *triángulo*; el de cuatro, *cuadrángulo* o *cuadrilátero*; el de cinco, *pen-*

*tágono;* el de seis, *exágono;* el de diez, *decágono.* A los demás se les pueden dar nombres de análoga derivación o decir el número de lados que tienen. Todos los de un mismo número de lados constituyen un *género.*

50. **Diagonal** de un polígono es la recta que une dos vértices *no consecutivos.* (BD de la fig. 11-4.ª).

Desde un vértice se pueden trazar tantas diagonales como lados queden suprimiendo tres; puesto que aquel vértice no proporciona diagonal ni consigo mismo ni con los dos inmediatos.

Sabido el número de diagonales que parten de un vértice, se obtendrá el total de las que tiene el polígono multiplicando por el número de vértices o lados y dividiendo por 2, a causa de que la diagonal que une un vértice B con otro D, es la misma que une el D con el B, por lo cual todas se repiten.

Ejercicio.—Hallar el número de diagonales de un cuadrilátero, de un exágono... y en general de un polígono cuyo número de lados se represente por la letra *n.* Aplicar esta última expresión (que se llama *fórmula)* al caso de un triángulo, para ver que no tiene diagonales.

51.—Las diagonales que parten de un vértice de un polígono de más de tres lados, convexo, lo descomponen en *tantos triángulos como lados queden suprimiendo dos.* Pues si suponemos el polígono cortado por ellas, como un solo corte separa dos trozos; dos cortes, tres trozos, etcétera, habrá un triángulo más que diagonales, y siendo preciso para saber cuántas eran éstas suprimir *tres* lados, sólo habrá que suprimir *dos* para obtener el número de triángulos.

También puede descomponerse el polígono en triángulos tomando un punto interior y uniéndole con todos los vértices, con lo cual resultan *tantos triángulos como lados*.

EJERCICIO.—Decir en cuántos triángulos se descomponen los polígonos mencionados en el ejercicio precedente, ya se tome como centro de descomposición un vértice, un punto interior o un punto situado sobre un lado.

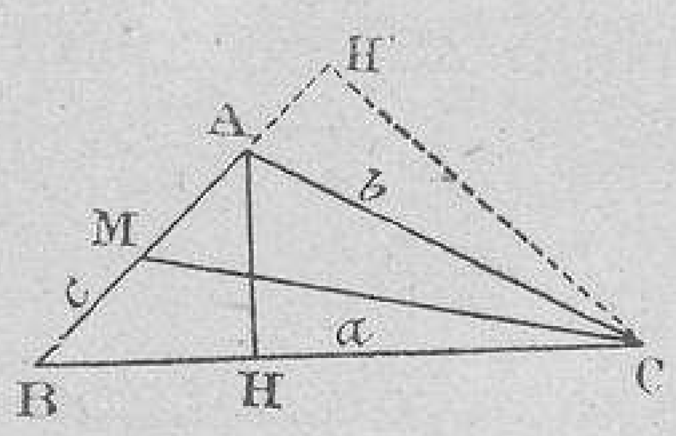

Fig. 12.

52. **Triángulos.**—Son los polígonos de mayor importancia. En ellos a cada ángulo *se opone* un lado, que es el que no pasa por su vértice; y a cada lado un ángulo, que es el que forman los otros dos. (Díganse en la fig. 12).

Por lo común designaremos con las letras A, B, C los ángulos cuyos vértices son estos puntos, y por *a*, *b*, *c* los lados respectivamente opuestos, en orden de tamaño *decreciente*.

*Bisectrices* de un triángulo son las de sus ángulos; *medianas*, las rectas como CM que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto; *alturas*, las perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto (como AH) o a su prolongación (como CH'); *base*, el lado sobre el cual cae la altura (CB si la altura es AH; BA si es CH').

Se verá que existen triángulos con los tres lados iguales y se les llama *equiláteros*, o con solo dos lados iguales, recibiendo entonces el triángulo la denominación de *isósceles*, y llamándose en él especialmente *base* el lado que no tiene igual, *vértice* el opuesto a este lado, y *altura* la que parte de este vértice.

Se verá, asimismo, que existen triángulos con un ángulo recto, los cuales se llaman triángulos rectángulos, siendo en ellos *hipotenusa* el lado opuesto al ángulo recto, y *catetos* los otros lados que lo forman.

53. **Cuadrángulos o cuadriláteros.** Son los polígonos de cuatro lados. Tienen dos diagonales. Recorriendo el contorno sin retroceso se llaman lados opuestos los que ocupan lugares no contiguos (1.° y 3.° o 2.° y 4.°)

Los cuadriláteros que no tienen lados paralelos se llaman *trapezoides;* los que tienen dos lados opuestos paralelos se denominan *trapecios,* (fig. 13) siendo sus *bases* los lados paralelos y *altura* la perpendicular desde un punto de una base a la otra. Un trapecio es *isósceles* si los lados no paralelos son iguales.

**Paralelogramo** *es el cuadrángulo que tiene paralelos sus dos pares de lados opuestos.*

Puede resumirse en el siguiente cuadro la clasificación de los cuadriláteros.

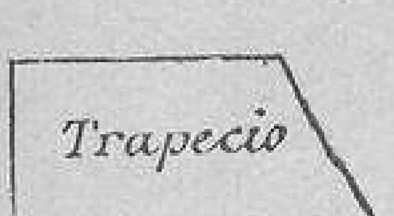

Fig. 13.

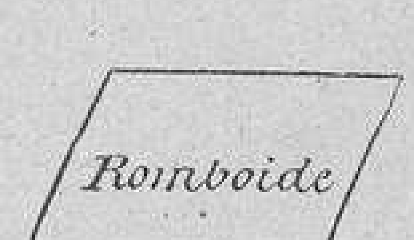

Fig. 14.

Fig. 15.

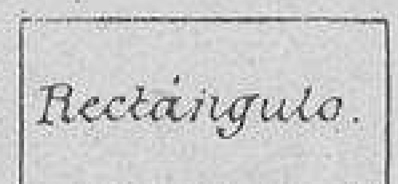

Fig. 16.

Fig. 17.

<table>
<tr><td rowspan="6">CUADRILÁTEROS</td><td colspan="4">Sin lados paralelos . . . . . . . . . . . .</td><td>Trapezoide</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Con un par de lados paralelos . . . . . . . .</td><td>Trapecio</td><td>(fig. 13)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Con los dos pares de lados opuestos paralelos: Paralelogramos</td><td rowspan="4">con dos lados inmediatos</td><td rowspan="2">oblicuos</td><td>desiguales</td><td>—Romboide</td><td>(fig. 14)</td></tr>
<tr><td>iguales</td><td>—Rombo</td><td>(fig. 15)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">perpendiculares</td><td>desiguales</td><td>—Rectángulo</td><td>(fig. 16)</td></tr>
<tr><td>iguales</td><td>—Cuadrado</td><td>(fig. 17)</td></tr>
</table>

54. **Curvas usuales.**—Además de la circunferencia de la cual se ha dicho algo en anteriores párrafos, conviene conocer algunas otras curvas, tales como las siguientes:

**Elipse.**—Se describe esta curva fijando los extremos de un hilo en dos puntos llamados *focos* y manteniéndolo tenso por medio de una punta (lápiz, clarión, etc.), que se mueve en cuanto lo consiente la condición de permanecer tirante el hilo. (Fig. 18).

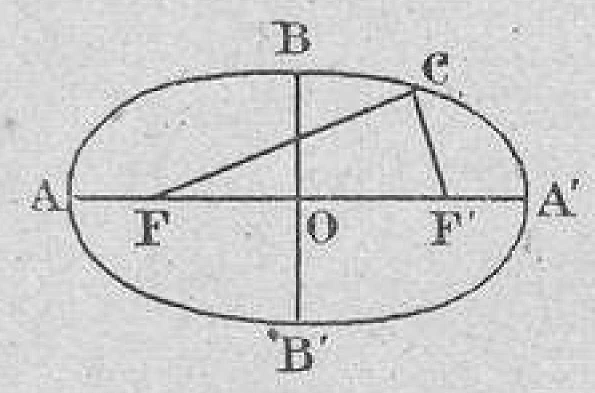

Fig. 18.

La recta determinada por los focos F y F' y limitada en la curva se llama *eje mayor*, su punto medio *centro*, la perpendicular en este punto limitada en los de intersección de la curva *eje menor*, y los extremos de los ejes *vértices*.

Las rectas que unen un punto de la curva con los focos son los *radios vectores*.

La propiedad característica de la curva, que puede servir para definirla es que *la suma de los dos radios vectores de un punto* (CF + CF') *es constante e igual al eje mayor*.

De la relación entre OF (semidistancia focal) y OA (semieje mayor) se deduce la *excentricidad* de la curva. Cuando los focos se reunen en el centro, la excentricidad es *cero*, y la elipse se convierte en circunferencia; pero si los focos están próximos a los extremos del eje mayor, la excentricidad es grande, y la elipse muy achatada.

Se puede construir una elipse por otro procedimiento cómodo, fundándose en que *si los extremos de un segmento fijo se apoyan constantemente sobre los lados de un ángulo recto, un punto determinado de aquel segmento describe parte de una elipse*. Con una banda de papel en que se tengan señalados los puntos fijos es fácil trazar la curva.

**Parábola.**—Es una curva de una sola rama que puede definirse como *lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta fija, llamada directriz, y de un punto fijo, denominado foco.*

*Eje* es la perpendicular a la directriz trazada desde el foco, y *vértice*, el punto de la curva situado en el eje.

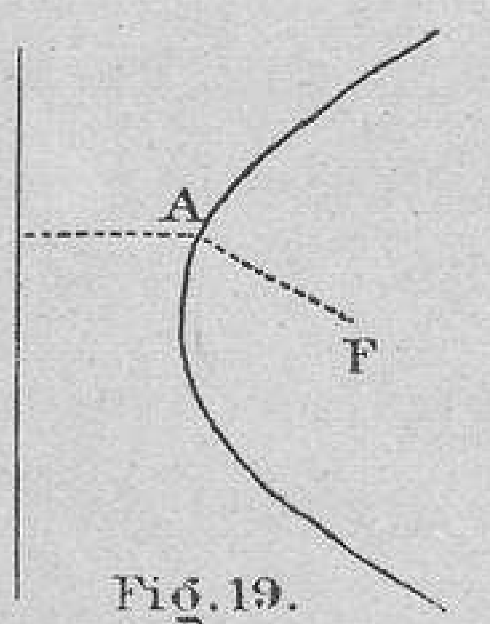

Fig. 19.

Para trazar un arco de parábola nos podemos valer de un triángulo rectángulo de madera, (escuadra o cartabón), uno de cuyos catetos se hace resbalar a lo largo de una regla coincidente con la directriz, mientras que, contra el borde del otro cateto, se mantiene tirante, con el lápiz, un hilo, sujeto al extremo de dicho cateto, y de longitud igual a él, que permanece fijo al foco por la otra punta. (Fig. 19).

**Hipérbola.**—*Es una curva tal, que la diferencia de las distancias de uno cualquiera de sus puntos a dos fijos (llamados focos), es constante.* (Fig. 20).

AB es el *eje principal;* su punto medio, el *centro*, y la perpendicular CD se considera como otro eje.

Las dos ramas de la hipérbola no tienen puntos comunes.

Se puede describir un arco de hipérbola con una regla que se fija por un extremo en un foco, y que lleve sujeto al otro un hilo cuya longitud se diferencie de la de la regla en la del eje mayor, y cuyo extremo libre se mantiene en el otro foco. Si a la vez que se hace girar la regla se sujeta contra su borde el hilo, de modo que quede tirante por medio de un lápiz, clarión, etcétera, la punta de éste describirá un arco de hipérbola. (Figura 20).

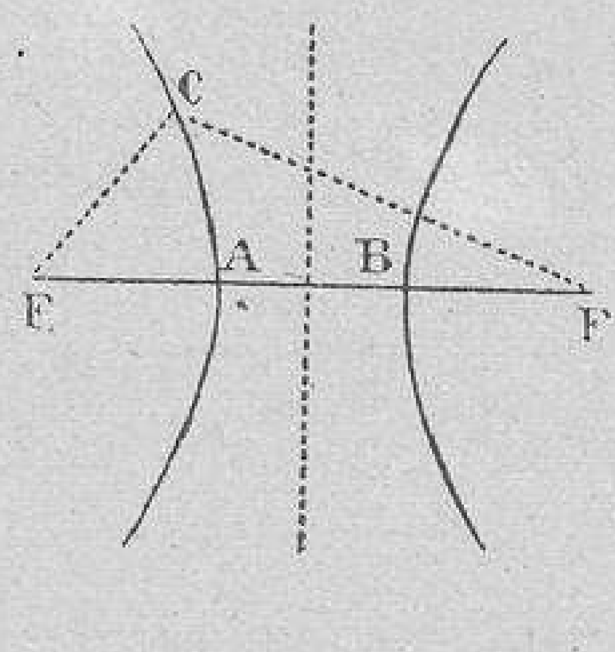

Fig. 20.

55. **Movimiento de las figuras.-Igualdad y simetría.**—Si consideramos una figura, v. g.: el triángulo ABC (fig. 21), y uniendo sus vértices con un punto, O, hacemos efectuar a la figura total un giro alrededor del punto O, sin salir del plano, (admitiendo como axioma que esto no la deforma), diremos que se ha ejecutado

un movimiento de rotación alrededor del *centro* O. La nueva figura A′B′C′ podría volver a coincidir con ABC invirtiendo la rotación efectuada.

Estas figuras que pueden coincidir, se dice que son *iguales*. Además observaremos que cuando se recorre el lado AB del triángulo ABC en el sentido que su enunciación expresa, el vértice C cae a la izquierda, y lo mismo acontece con el C' cuando se recorre el lado A′B′ desde A' a B′. Por esta causa se dice que los triángulos ABC y A′B′C′ son *directamente* iguales o que tienen igual *orientación* o *sentido*. Los puntos A y A′, B y B′, C y C′, que coinciden al hacerlo las figuras se llaman puntos *homólogos* (de igual lugar relativo). También son homólogos los segmentos AB y A'B', BC y B'C′, etc.

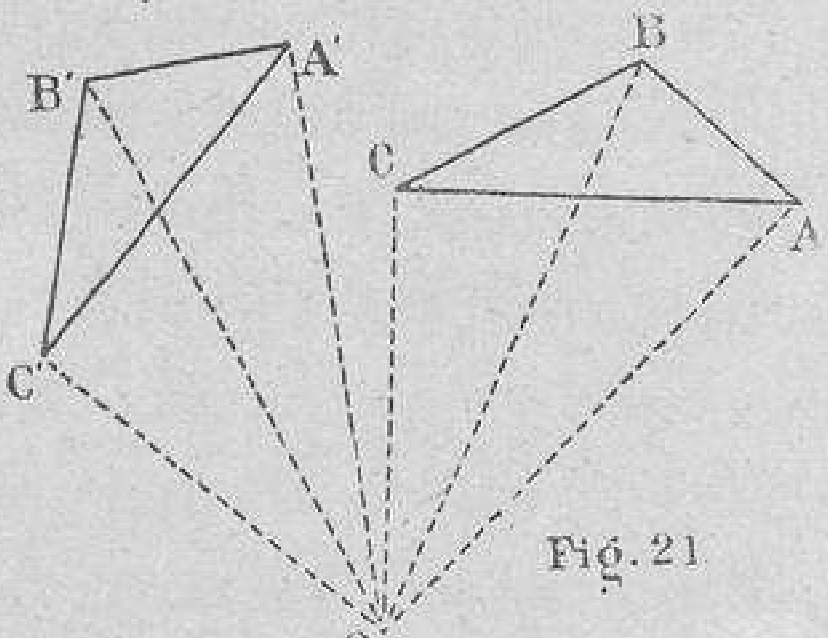

Fig. 21

Sin que nos detengamos ahora a demostrarlo, advertiremos que, inversamente, cuando se sepa que dos triángulos ABC y A'B'C' son directamente iguales, y estos triángulos estén sobre un mismo plano y no tengan sus lados paralelos puede encontrarse cierto punto O, que sirva de centro de rotación para llevar un triángulo sobre el otro.

56. *Simetría respecto a un centro*.—Dos puntos A y A′ se dicen simétricos respecto a un *centro* O, cuando éste es el punto medio del segmento AA′ (fig. 22). Es claro que imprimiendo al segmento OA′ una rotación alrededor de O, de modo que describa un ángulo llano, A′ caerá sobre A. Análogamente, si unimos los vértices

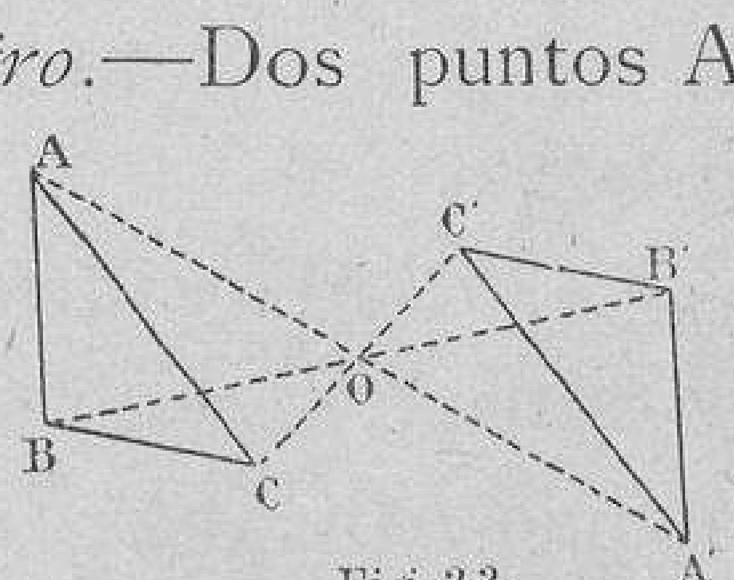

Fig. 22.

de un triángulo ABC, con O, y tomamos los puntos simétricos A', B', C', resulta, al unirlos en el orden en que se mencionan, otro triángulo que es el *simétrico* de ABC. Por un giro de un ángulo llano, al mismo tiempo que A coincide con A', cae B sobre B', etc., por lo cual los triángulos son *iguales;* y lo son *directamente*, porque los puntos C y C' caen a la misma mano (izquierda) de los segmentos AB y A'B', respectivamente, cuando éstos se recorren en el sentido expresado al enunciarlos.

Si el triángulo A'B'C' se arrancase de la posición que ocupa y, sin levantarlo del plano, se colocase en otra, seguiría siendo igual al ABC, pero no simétrico.

57. *Simetría respecto a un eje.—Dos puntos* A *y* A' (fig. 23) *son simétricos con respecto al eje* XY *cuando éste es perpendicular al segmento* AA' *en su punto medio.* De aquí que para obtener el punto A' bastaría trazar desde el A la perpendicular al eje y prolongarla en un segmento OA' = OA.

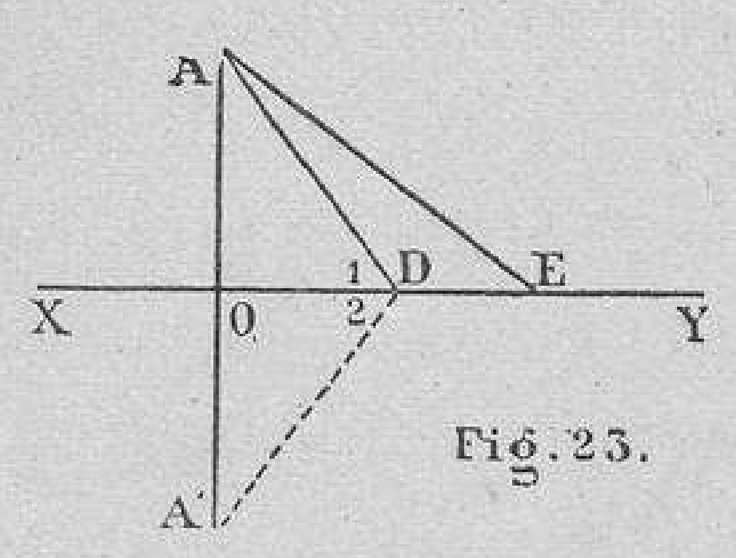

Fig. 23.

Si se doblase el plano por XY abatiendo la región superior sobre la inferior (rotación alrededor de XY) OA coincidiría en dirección con OA', porque el ángulo AOY es recto, y de no coincidir con el A'OY, que también lo es (38) y tiene con él el lado OY común, estos ángulos serían desiguales, cosa absurda.

Como además, en tamaño, OA = OA', el punto A caerá precisamente sobre el A'.

58. Podría esto enunciarse diciendo que al doblar el plano por el eje, todo segmento perpendicular al mis-

mo, situado en una de las regiones, coincide con su prolongación en la otra.

Y esto es propiedad característica de la perpendicular, porque otro segmento oblicuo, tal como el AD, toma, al doblar por el eje, la posición DA′ en que los ángulos 1 y 2 son iguales; y es imposible que el camino ADA′ sea rectilíneo puesto que entre los puntos A y A′ no puede haber recta distinta de la AA′.

59. *La distancia menor entre un punto* A *y una recta* XY, *es el segmento trazado desde el punto perpendicularmente a la recta, y terminado en el punto en que encuentra a ésta.* (A este punto y a los demás en que encuentren a la recta otros segmentos, se les llama *pie* de éstos).

Porque si se traza cualquier segmento oblicuo AD y se une D con A′, simétrico de A, el segmento de recta AA′, doble de AO, será menor que la línea quebrada ADA′, doble de AD; luego AO < AD.

Demostrado que el segmento AO es menor que cualquier segmento oblicuo, queda probado que es mínimo absoluto, puesto que AO es el *único* segmento perpendicular; y por eso *se llama distancia de un punto a una recta, la contada sobre el segmento perpendicular a la recta y comprendido entre ella y el punto.*

En cuanto a los segmentos oblicuos, tales como AD, AE, etc., *se observa* (y se confirmará más adelante) que son tanto mayores cuanto más se aleja su pie del de la perpendicular.

60. Si tenemos ahora el triángulo ABC (fig. 24) y tomamos los puntos A′, B′, C′, simétricos de sus vérti-

ces con respecto al eje XY, al unirlos en igual orden que lo están aquéllos se obtendrá el triángulo A'B'C' *simétrico* del ABC. Estos triángulos son iguales, puesto que coincidirían al doblar el plano por el eje, pero lo son *inversamente*, por estar orientados de distinto modo. Y, efectivamente, mientras el vértice B caería a *mano izquierda* de un observador que recorriese AC (de A a C) caería a *mano derecha* del que recorriese A′C′ (de A′ a C′). Si se sacase A′B′C′ de su posición, sin levantarlo del plano, ya no sería simétrico de ABC con respecto a XY, pero sí *inversamente igual*, necesitándose para la coincidencia de ambos *darle la vuelta* a alguno de ellos, de modo que, admitiéndoles dos caras, el derecho pasase a ser revés.

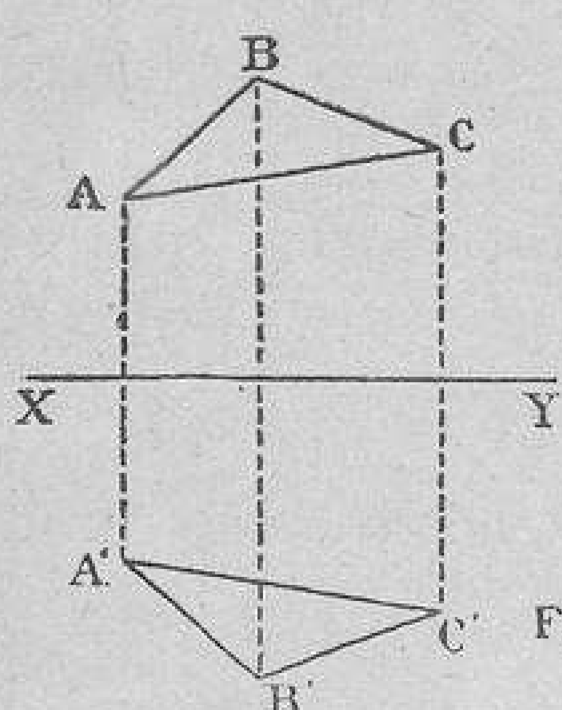

Fig. 24.

61. *Traslación rectilínea o paralela.*—Si consideramos el triángulo ABC (fig. 25) como unido *invariablemente* a la recta XY y le hacemos resbalar sobre el plano de modo que el vértice A corra a lo largo de la recta XY, *resbalando ésta sobre sí misma* (15), diremos que se imprime al triángulo un movimiento de *traslación rectilínea* dirigido por la recta XY. El triángulo A′B′C′ resultante de detener el movimiento cuando el vértice A llegue a A′, es *directamente igual* al ABC, pues coincidiría con él por la traslación inversa de la ejecutada.

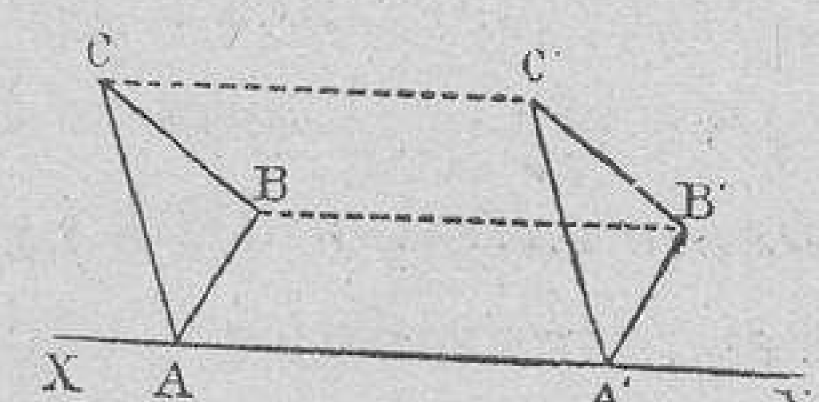

Fig. 25.

Advertiremos, sin demostrarlo por ahora, que en este movimiento los vértices A, B y C recorren segmentos paralelos e iguales, a causa de lo cual también se dice que se ha efectuado una traslación *paralela* a la recta XY.

62. OBSERVACIÓN.—En los párrafos anteriores, que tratan de los movimientos, igualdad y simetría de las figuras, nos hemos referido siempre al triángulo, por ser fácil extender las propiedades a las demás figuras planas considerándolas como conjuntos de triángulos. Así, por ejemplo, un polígono se determina por una serie de triángulos que teniendo por base común un lado del polígono tengan por tercer vértice cada uno de los restantes del polígono en cuestión.

63. **Los teoremas y las demostraciones.**—Los *teoremas* o proposiciones cuya evidencia no es inmediata, constan de dos partes: una, cuya verdad se admite o se supone, llamada *hipótesis*, y otra, que es necesario patentizar por medio de un raciocinio, y que recibe el nombre de *conclusión* o *tesis*. Si decimos v. gr.: *En una circunferencia, las cuerdas de arcos iguales, son iguales*, admitimos como hipótesis que existen varios arcos *iguales*, y deseamos probar, mediante un razonamiento lógico que constituye la demostración, que las cuerdas correspondientes a aquellos arcos han de ser *iguales*: ésta es la conclusión o tesis. Si afirmamos que *por un punto exterior a una recta se le puede trazar una perpendicular única*, la hipótesis es la existencia de la recta y el punto, y la conclusión la existencia de la perpendicular y su cualidad de ser única.

Poniendo los enunciados en forma condicional es como mejor se percibe la separación entre la hipótesis y la tesis; pues al decir, por ejemplo, *si dos ángulos* *son adyacentes, su suma es dos rectos,* se advierte con claridad que suponemos que los dos ángulos son adyacentes, y queremos demostrar que suman dos rectos; constituyendo lo primero la hipótesis y lo segundo la conclusión.

Para la *demostración* o raciocinio por el cual pasamos de la hipótesis a la tesis, conviene fijarse bien en dicha hipótesis y tenerla muy presente en el curso de la demostración, pues si algunas veces es tan sencilla que no exige ningún esfuerzo su comprensión y retención en la memoria, como acontece en los primeros ejemplos presentados antes, hay otras en que es útil sustituir conceptos o palabras cuya equivalencia resulta de las definiciones dadas o de principios establecidos, y estas sustituciones sirven de enlace a las premisas y las dirigen a la *conclusión.*

Para aclarar estas advertencias las aplicaremos al siguiente sencillo ejemplo:

Al querer demostrar que si dos ángulos son adyacentes suman dos rectos, debemos recordar, que *ángulos adyacentes son los consecutivos cuyos lados no comunes forman un llano,* pues sin este recuerdo la demostración del teorema carecería de sentido. Puede, además, convenirnos decir en vez de ángulo llano, dos rectos; y así se aclara la demostración, que sería:

*Hipótesis.*—Los dos ángulos dados son adyacentes —adyacentes significa que sus lados no comunes forman un llano—esto equivale a decir que los ángulos dados suman un llano—pero un llano son dos rectos—*luego* los ángulos dados suman dos rectos *(conclusión).*

Se ve, pues, que esta conclusión *nació* de la hipótesis, y la demostración ha consistido en *transformar* aquella verdad contenida en el supuesto, valiéndonos para ello de la definición de ángulos adyacentes, del concepto de suma de ángulos, de la equivalencia entre el llano y dos rectos, y de las reglas lógicas del discurso.

64. *Enlace entre proposiciones.*—Un teorema es *recíproco* de otro, llamado *directo*, cuando tiene por hipótesis la conclusión y por conclusión la hipótesis de éste, y *contrario*, cuando tiene la misma hipótesis y la misma conclusión del directo, pero *negadas*.

El teorema (abreviado): *si dos arcos son iguales, lo son las cuerdas*, tendría por *recíproco: si son iguales las cuerdas, lo son los arcos;* y por *contrario: si* **no** *son iguales las cuerdas,* **no** *lo son los arcos.*

Es principio de Lógica que una cosa no puede ser y *no* ser a un tiempo mismo, y en virtud de ello, entre los tres teoremas directo, recíproco y contrario, existe tal relación, que siendo ciertos el 1.º y el 2.º lo es el 3.º, y siendo verdaderos el 1.º y el 3.º, lo es el 2.º

Lo probaremos valiéndonos del anterior ejemplo.

Demos por cierto que:

(Directo) Si los arcos son iguales—las cuerdas son iguales

y

(Recíproco) Si las cuerdas son iguales—los arcos son iguales

El contrario

Si los arcos no son iguales—las cuerdas no son iguales

es cierto; porque si sucediese que las cuerdas fuesen iguales, como esto, según el recíproco, exige que los arcos sean iguales, dichos arcos deberán serlo (por el recíproco) y no serlo (por la hipótesis del contrario), cosa absurda.

Análogamente se probaría—(el lector debe intentarlo)—que la verdad del directo y el contrario entraña la del recíproco. Y que el recíproco del contrario o contrario del recíproco son también verdaderos.

De todo lo cual haremos uso frecuente.

65. *Cuando en un teorema se hacen todas las hipótesis posibles, y las conclusiones son distintas para cada una e incompatibles entre sí, los recíprocos correspondientes a esas varias hipótesis son ciertos.*

Supongamos, v. gr.: que las diversas hipótesis se representan por las letras A, B, C y las respectivas conclusiones por P, Q, R. De suerte que

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si se verifica | A, | se verificará | P |
| » | B, | » | Q |
| » | C, | » | R |

Los recíprocos,

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si se verifica | P | se verificará | A |
| » | Q | » | B |
| » | R | » | C |

serán ciertos. Porque si queremos v. gr.: probar el 1.º de estos recíprocos, diremos: Si se verifica P, se verificará A, porque si no, se verificaría una de las hipótesis (únicas posibles) B o C, y como entonces por los directos se sabe que se verificará Q o R, no se podrá verificar P, que es incompatible con ellas; lo cual se contradice con nuestra afirmación de que P se verificaba.

Esta advertencia es también de uso frecuente, y por eso proponemos el siguiente ejercicio: aplicar los razonamientos anteriores al teorema referente a la comparación entre arcos y cuerdas de una circunferencia. (Hipótesis: que un arco sea igual, mayor o menor que otro).

ADVERTENCIA.—En lo sucesivo, cuando sea necesario distinguir los teoremas directo, recíproco, etc., se designará el directo por la letra T, el recíproco por R, el contrario por C, y el recíproco del contrario por RC.

La demostración se señalará frecuentemente con la letra D, y lafigura con la F.

## CAPÍTULO II

# Medida de segmentos, arcos y ángulos

66. **Medir** un segmento de recta es compararle con otro tomado como unidad o módulo para averiguar la *longitud* de aquél, o *razón* que tiene con la unidad.

Dicha razón viene expresada por un número entero, fraccionario o inconmensurable.

Las unidades empleadas por nosotros son las del sistema métrico decimal, es decir, el metro, sus divisores y sus múltiplos. Pero a veces puede tomarse como unidad un segmento arbitrario, y, entonces, para medir otro se lleva aquél sobre éste (por medio de una cuerda o del compás) las veces que se pueda. Si al hacerlo quedase un trozo del segmento medido inferior al segmento-unidad, conviene hallar la *máxima medida común*, es decir, un segmento exactamente contenido en ambos, y que sea el mayor entre los que cumplan esta condición; lo cual se consigue por un procedimiento en todo análogo al que se emplea en Aritmética para hallar el máximo común divisor de dos números.

He aquí la regla: *se averigua las veces que el mayor segmento*, a, *contiene al* b, *llevando éste sobre aquél. Si lo contiene exactamente*, b *será la máxima medida común. Si queda un resto, se procede con* b *y con el resto como antes con* a *y* b, *y de igual modo se continúa hasta hallar, si es posible, un resto cero.* El último segmento con que se ha operado es la medida común buscada.

Si por ejemplo $a$ contiene a $b$ dos veces y sobra el resto $r$, será (hágase la figura)

$$a = 2\,b + r \quad (1).$$

Si $r$ está contenido en $b$ tres veces y sobra un resto $r'$, será

$$b = 3\,r + r' \quad (2).$$

Y si $r'$ estuviese contenido dos veces en $r$ y no hubiese ya resto, sería

$$r = 2\,r' \quad (3).$$

Poniendo ahora en la igualdad (2) el valor de $r$ que da la (3), sería

$$b = 3 \times 2\,r' + r' = 7\,r';$$

y si este valor de $b$ y el anterior de $r$ se substituyen en la (1)' saldrá

$$a = 2 \times 7\,r' + 2\,r' = 16\,r'.$$

Luego $r'$ es un segmento contenido 7 veces en $b$ y 16 veces en $a$, esto es, una unidad común, con la cual se evalúan en números enteros los segmentos dados.

Y como otro segmento contenido en $a$ y $b$ lo estaría en $r$, según se advierte fácilmente por la igualdad (1), y de estarlo en $b$ y en $r$ lo estaría en $r'$, no podrá exceder a éste; luego $r'$ es la medida común *máxima*.

La razón de dos cantidades, se aprecia, según la Aritmética enseña, por la razón o cociente de los números que expresan sus medidas hechas con una misma unidad, luego la razón de $a$ con $b$ será el cociente de 16 por 7, esto es:

$$\frac{a}{b} = \frac{16}{7}.$$

De donde se desprende que si se tomase $b$ por unidad, el número que indicaría la medida de $a$ sería $\frac{16}{7}$.

67. Se comprende que si al proceder como acaba de exponerse para hallar la medida común de $a$ y $b$ los restos sucesivos $r$, $r'$, etc., estuviesen siempre sometidos a cierta ley, v. g.: a la de que cada uno fuese mayor que el duplo y menor que el triplo del siguiente, no se alcanzaría jamás *teóricamente*, el resto cero, y por tanto $a$ y $b$ no tendrían medida común, y serían justamente llamados *inconmensurables*.

Entonces, al medir $a$ con $b$ no puede expresarse su razón exactamente por ningún número entero ni fraccionario; pero las relaciones existentes en la figura donde intervengan los segmentos dados, pueden permitirnos encontrar *expresiones numéricas* para dicha razón, como si, por ejemplo, cuando $b$ fuese 1 debiera ser $a = \sqrt{2}$. Entonces esta expresión, $\sqrt{2}$, se llama *número inconmensurable*, y se dice, aunque no muy propiamente, que expresa la medida de $a$ cuando se toma $b$ por unidad.

Y nótese que la imposibilidad de medir exactamente $a$ con $b$ se traduce, en el terreno numérico, por la imposibilidad de extraer exactamente la raíz cuadrada de 2. Las fracciones (generalmente decimales) como 1, 4; 1,41, etc., que expresan aproximadamente esta raíz, son, de igual modo, valores aproximados de la medida de $a$ con la unidad $b$,

Advertiremos, finalmente, que si la medida de $a$ con $b$ se hace *mecánicamente*, llevando unos segmentos sobre otros, la inconmensurabilidad no se manifiesta, porque bien pronto los restos adquieren un tamaño inapreciable, aun prescindiendo de los errores inherentes al uso de los sentidos y de los instrumentos más perfectos.

68. Es frecuente el problema de cambiar de unidad, es decir, de expresar la medida de un segmento, v. g.: en *varas* teniéndola conocida en *metros*, o viceversa.

Esto constituye un problema aritmético resoluble mediante una regla de tres, siempre que se conozca una relación entre las unidades propuestas.

Si, por ejemplo, se sabe que

$$5 \text{ m.} = 6 \text{ v.}$$

y el segmento conocido tuviese 12 m., diríamos:

5 m. equivalen a 6 v.
12 m. » $x$

y la evidente proporcionalidad directa existente entre estas cantidades daría:

$$x = 6 \text{ v.} \times \frac{12 \text{ m.}}{5 \text{ m.}} \text{ ó } x = \frac{6 \times 12}{5} \text{ de vara.}$$

Si las transformaciones que han de hacerse son varias, es preferible hallar el valor de la unidad, de este modo:

5 m. equivalen a 6 v.
1 m. » $x$

$$x = \frac{6}{5} \text{ de vara}$$

y luego

1 m. equivale a $\frac{6}{5}$ de vara
12 m. » $y$

$$y = \frac{6 \times 12}{5} \text{ varas.}$$

Resultado igual al de antes.

69. **Arcos.**—*Amplitud* de un arco de circunferencia es la razón de aquel arco a la circunferencia entera.

Para estimar la amplitud de un arco, se supone dividida la circunferencia en 360 partes (*) llamadas grados; cada grado en 60 partes que son *minutos*, y cada minuto en 60 *segundos*. Los grados suelen llevar como in-

(*) Esta división, que es aún la más frecuente, se llama sexagesimal. Hay otra, llamada centesimal, según la cual se divide la circunferencia en 400 grados; cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

dicación un pequeño cero, así: $37^{\circ}$; los minutos un acento, y los segundos dos, de este modo: $25'$, $36''$. Un arco viene, por tanto, expresado en general por un número complejo, que se puede reducir a incomplejo siguiendo las reglas de la Aritmética.

Ejemplo: $25^{\circ}, 15', 40''$, se leerá: 25 grados, 15 minutos y 40 segundos. Este arco vale, reducido a grados, $25^{\circ}$ y $\frac{940}{3600}$ de grado; en minutos, $1515\frac{40}{60}$, y en segundos, 90940.

La razón de las amplitudes de dos arcos se hallará como en la Aritmética se preceptúa, reduciéndolos ambos a unidades de la misma clase y dividiendo los números que expresan sus medidas.

Ejemplo: $\frac{2^{\circ}\,4'}{1^{\circ}\,12'} = \frac{124}{72}$.

70. El arco de $90^{\circ}$, que es la cuarta parte de la circunferencia se llama *cuadrante*, y el de $180^{\circ}$ *semicircunferencia*.

71 *Longitud de una circunferencia*, es su relación con la unidad rectilínea (metro, vara, etc.)

Pero como una recta no puede adaptarse a la circunferencia, la medida de ésta no se halla por aplicación sobre ella de la unidad de longitud. Si se trata de un objeto material (un tubo, por ejemplo), la medida de la circunferencia puede hacerse *aproximadamente* rodeándola de un hilo o cordel poco elástico, de manera que se amolde a ella con la mayor precisión posible, y determinando después la longitud de aquel hilo puesto tirante.

Pero si se trata de circunferencias dibujadas, la longitud de la circunferencia *se calcula* tomando como dato el diámetro o el radio.

Las fórmulas que para ello se emplean, son las siguientes:

$$C = \pi . d \text{ o bien } C = \pi . 2 . r$$

en las cuales C representa la longitud de la circunferencia, $d$ el diámetro, $r$ el radio y $\pi$ el número inconmensurable 3'14159..... del cual se toman por lo general como aproximados los valores 3'14, para circunferencias no muy grandes, y 3'1416 para las de diámetro considerable.

Con estas fórmulas podemos resolver los problemas que siguen:

1.° *Conociendo el radio de una circunferencia, hallar su longitud.* Ejemplo: radio, 3 dm. Diámetro, 6 dm.

$$C = 6 \times 3'14 = 18'84 \text{ (en dm.)}$$

2.° *Dada la longitud de una circunferencia, hallar su radio.* Ejemplo: C = 100 m.

De $C = \pi . d$ se obtiene dividiendo por $\pi$ los dos miembros de la igualdad,

$$\frac{C}{\pi} = d, \text{ o } d = \frac{C}{\pi}$$

luego, para el ejemplo

$$d = \frac{100}{3'14} = 31'8 \text{ y } r = 15'9$$

72. Si representamos por $l$ la longitud de un arco,

cuya *amplitud* sea de $n$ grados, por medio de la regla de tres

Longitud del arco de 180° . . . . . . . . . . $\pi . r$
Id. id. de $n°$ . . . . . . . . . . $l$

se obtendrían las fórmulas

$$l = \frac{\pi . r\, n^o}{180^o} \;,,\; n^o = \frac{180^o . l}{r . \pi} \;,,\; r = \frac{l . 180^o}{n^o . \pi}$$

que hacen conocer, respectivamente, la longitud, la amplitud y el radio.

Observación.—La amplitud del arco y la de la semicircunferencia han de expresarse en forma de incomplejos del mismo orden, es decir, ambas en grados, o ambas en minutos, etc.

Ejemplos: 1.° *¿Qué longitud tiene un arco de 2° y 4' en una circunferencia de 0'5 m. de radio?*

$$\left.\begin{array}{l} 2^o\,4' = 124' \\ 180^o = 10800' \end{array}\right\} l = \frac{0'5 \times 3'14 \times 124}{10800}$$

2.° *¿Cuál es el valor gradual de un arco de longitud igual al radio?*

$$l = r \;,,\; n = \frac{180^o . l}{r . \pi} = \frac{180^o}{\pi} = 57^o\,17'\,45''$$

73. Llamaremos **arco correspondiente a un ángulo,** al descrito desde su vértice como centro, con un radio cualquiera, e interceptado entre los lados del ángulo.

**Angulo central correspondiente a un arco,** es el que tiene su centro por vértice, y cuyos lados pasan por los extremos del arco. En la (fig. 26) se ven varios ángulos con sus arcos correspondientes.

Según esto, a un ángulo dado corresponden cuantos arcos se quiera, por ser arbitrario el radio; pero a un arco dado sólo le corresponde un ángulo central.

74. *Si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes, descritos con igual radio, son iguales.*

Sean los ángulos ABC y A'B'C' y sean AC y A'C' los arcos de igual radio que tienen por centros respectivos los vértices B y B'. (Figura 26.)

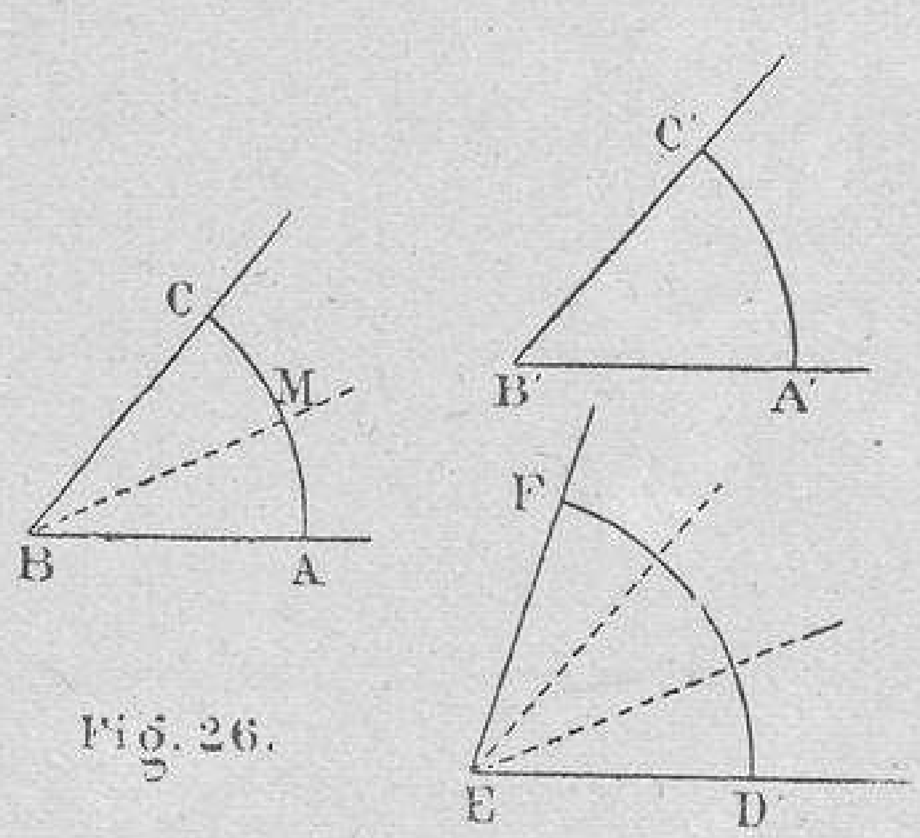

Fig. 26.

D.—Al hacer coincidir los ángulos coinciden los arcos correspondientes, que serán, por lo tanto, iguales.

Detalles.—Coloquemos el punto B' sobre el B y la semirrecta B'A' sobre la BA haciendo además que los otros lados B'C' y BC caigan a una misma región respecto a las semirrectas que hacemos coincidir. Entonces, por ser iguales los ángulos, la semirrecta B'C' se confundirá con la BC. Además, como las longitudes B'A' y BA que nos han servido de radios para trazar los arcos, son iguales, A' caerá sobre A; y, análogamente, por ser B'C' = BC, C' caerá sobre C. Luego los arcos A'C' y AC pertenecientes a circunferencias iguales, y que tienen los extremos confundidos, coincidirán, y serán iguales.

75. *La razón de dos ángulos es igual a la de sus arcos correspondientes de igual radio.*

Sean los ángulos ABC y DEF (fig. 26) y describamos desde sus vértices como centros los arcos de igual radio AC y DF.

D.—La razón de los ángulos y la de los arcos equivalen ambas a un mismo cociente o razón de números.

DETALLES.—Supongamos, en primer término, que dividiendo el ángulo ABC en partes iguales, 2, por ejemplo, una de ellas, que será el ángulo ABM, esté contenida un número exacto de veces, v. g.: 3, en el ángulo DEF. Tomando entonces por unidad común dicho ángulo ABM, el número que expresa la medida del ángulo ABC será 2, y el que expresa la de DEF será 3; luego

$$\frac{\mathrm{DEF}}{\mathrm{ABC}} = \frac{3}{2} \quad (a).$$

Por otra parte, a los dos ángulos iguales al ABM en que se dividió el ABC corresponden 2 arcos iguales al AM (74) y a los tres ángulos que contenía el DEF otros tres arcos todos iguales. Si pues se toma por módulo para los arcos el AM, podremos escribir:

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{2} \quad (b).$$

Comparando las igualdades *(a)* y *(b)* deducimos, de conformidad con el enunciado, que

$$\frac{\mathrm{DEF}}{\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}}$$

Si la razón de los ángulos no es conmensurable, al dividir el ángulo ABC, por ejemplo, en $n$ partes iguales, no podrá una de ellas estar contenida exactamente en el ángulo DEF; pero si éste contiene más de $m$ y menos de $m+1$, la razón $\frac{\mathrm{DEF}}{\mathrm{ABC}}$ estará comprendida entre las dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$, cuya diferencia, $\frac{1}{n}$, puede ser arbitrariamente pequeña para valores suficientemente grandes de $n$. La razón de los arcos $\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}}$ estará también comprendida entre las mismas fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ y como, según la Aritmética, cuando dos constantes están comprendidas entre unas mismas variables de diferencia arbitrariamente pequeña dichas constantes son iguales, se concluirá, como antes:

$$\frac{\mathrm{DEF}}{\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}}.$$

**Corolarios.**—1.° Se sabe que la medida de una cantidad es su razón con el módulo o unidad, la cual viene expresada por un número; luego en virtud del teorema precedente podremos decir que *un ángulo tiene la misma medida que el arco correspondiente descrito con cierto radio, siempre que se tome como unidad de arcos el correspondiente a la unidad de ángulos y descrito con aquel mismo radio.*

2.° *Todos los arcos correspondientes a un mismo ángulo tienen igual amplitud o valor gradual.*

Pues si se tomase como unidad de ángulos el ángulo de una vuelta, al que corresponde siempre como arco toda la circunferencia, es decir, 360°, y tuviéramos un ángulo A, al cual correspondiesen los arcos de distinto radio $a$ y $a'$, según el teorema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\text{áng. A}}{\text{áng. de una vuelta}} = \dfrac{a}{360^{\circ}} \\[2ex] \dfrac{\text{áng. A}}{\text{áng. de una vuelta}} = \dfrac{a'}{360^{\circ}} \end{array}\right\} \text{luego } \frac{a}{360^{\circ}} = \frac{a'}{360^{\circ}}$$

lo que exige que el valor gradual de $a$ sea el mismo que el de $a'$.

Observación.—La frase *ángulo de tantos grados* quiere decir que el arco correspondiente tiene ese mismo número de grados.

**Escolio.**—En vez de decirse que la razón de los ángulos es igual a la de los arcos correspondientes, de igual radio, puede decirse: *los ángulos son proporcionales a los arcos correspondientes.*

76. Al ángulo de una vuelta (36) le corresponde como arco toda la circunferencia, es decir 360°, al *llano* 180°, y al *recto* 90° (un cuadrante).

*Si un ángulo está medido en rectos y se quiere medir en grados, basta multiplicar por 90 el número que expresaba su medida en rectos e indicar que el resultado son grados.*

Ejemplo: El ángulo de $\frac{3}{5}$ de recto ¿cuántos grados tiene?

$$\frac{3}{5} \times 90 = \frac{3 \times 90}{5} = 3 \times 18 = 54 \text{ (en grados).}$$

Porque tomar los $\frac{3}{5}$ de un recto, esto es, de 90°, equivale a multiplicar 90° por $\frac{3}{5}$, o $\frac{3}{5}$ por 90 expresando en grados el producto.

*Para pasar de la medida en grados a la medida en rectos, se halla su razón con 90°*

Porque el recto tiene 90° y la razón de dos ángulos es igual a la de los arcos.

Ejemplos: 1.° ¿Qué fracción de recto es el ángulo de 30°?

$$\frac{30^{\circ}}{90^{\circ}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ (de recto)}$$

2.° Expresar en rectos el ángulo de 40° 30'.

$$\frac{40^{\circ}\ 30'}{90^{\circ}} = \frac{2430'}{5400'} = \frac{243}{540} \text{ (de recto)}$$

77. **Problemas.** 1.°—*Dibujar un ángulo igual a otro.*

Análisis.—A ángulos iguales corresponden arcos iguales (del mismo radio) y a éstos cuerdas iguales, luego:

Síntesis.—Se traza un arco AC correspondiente al ángulo (fig. 26). Haciendo centro en el origen de una semirrecta B'A' se describe un arco que manifiestamente sea mayor que el AC. Se toma con el compás la distancia AC (cuerda del arco AC) y se determina sobre el arco A'C' el punto C' distante de A' dicha longitud. Finalmente se traza la recta B'C' y el ángulo A'B'C' será igual al ABC, puesto que les corresponden arcos de iguales cuerdas y el mismo radio.

2.º—*Hallar la suma de varios ángulos.* Basta construir un ángulo igual a uno de los sumandos; consecutivo con él otro igual a otro sumando, etc.

3.º—*Hallar el suplemento de un ángulo* (menor que un llano). Basta prolongar, en sentido opuesto, una de las semirrectas que forman el ángulo dado para tener otro adyacente a él, y, por consecuencia, suplementario.

78. Para medir o dibujar ángulos se hace uso del *trasportador*, que generalmente consiste en un semicírculo construído de una substancia traslúcida cuya semicircunferencia va dividida en grados, medios grados, etc. Haciendo coincidir el centro del trasportador con el vértice del ángulo y el radio correspondiente a 0º con un lado del ángulo, la división por la cual pase el otro señalará la medida. Inversamente, si después de hacer coincidir el radio dicho con una semirrecta se une cierta división del trasportador con el origen de aquélla, se tendrá construído un ángulo de medida conocida. (Hágase prácticamente).

## CAPÍTULO III

### § I

# La mediatriz y el triángulo isósceles

79. **Mediatriz** *de un segmento es la perpendicular a él en su punto medio.*

T.—*Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo.*

F. 27.—Sean AB el segmento, M su punto medio, C un punto cualquiera de la mediatriz MC, y CA y CB las distancias a los extremos del segmento, distancias cuya igualdad se intenta probar.

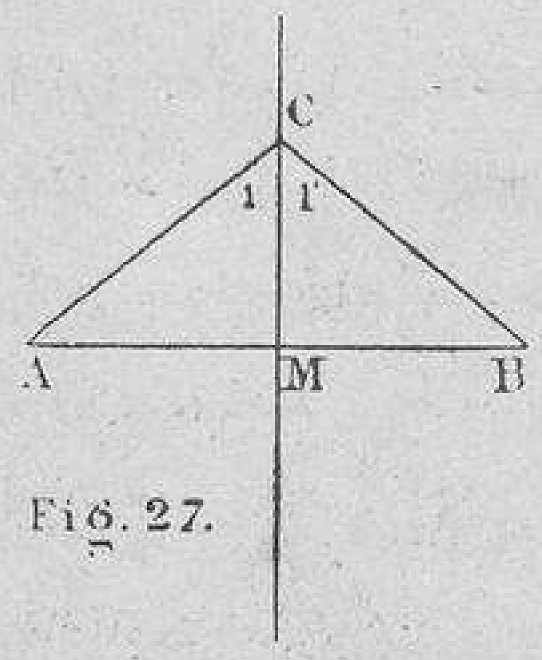

Fig. 27.

D.—Respecto del eje CM, son simétricos los puntos A y B; luego al doblar el plano por CM coinciden dichos puntos, y de consiguiente CA y CB, por lo cual son iguales.

80. **Corolarios.** 1.º—*Si dos oblicuas,* CA *y* CB, *tienen sus pies a igual distancia del de la perpendicular* M, *son iguales.*

D.—Puesto que por hipótesis MA = MB, será M punto medio de AB, y MC mediatriz; luego, según el teorema, CA = CB.

81. 2.º—*Las oblicuas cuyos pies equidistan del de la perpendicular a una recta forman ángulos iguales con la perpendicular, y también con la recta.*

Porque si las oblicuas CA y CB tienen sus pies equidistantes de M, coincidirán, según se ha visto, al doblar por el eje MC, y entonces coincidirán también el ángulo 1' con el 1 y el ángulo B con el A.

82. 3.º—*Si la altura de un triángulo es mediatriz de la base, el triángulo es isósceles; y en él, a lados iguales se oponen ángulos iguales, siendo además aquella altura bisectriz del ángulo del vértice.*

Sea el triángulo ABC, cuya altura CM es mediatriz de AB. Entonces serán MA = MB, y, por tanto, (1.º) CA = CB, lo que prueba que el triángulo es isósceles. Pero también se ha demostrado que los ángulos B y A son iguales (y se oponen a los lados iguales CA y CB), y que el ángulo 1' es igual al 1, lo que indica ser CM bisectriz de ACB.

83. C.—*Si un punto* **no** *está sobre la mediatriz de un segmento* **no** *equidista de los extremos de éste.*

F. 28.—Sean AB el segmento, MC su mediatriz y D un punto situado *a la derecha* de ella. Vamos a probar que las distancias DA y DB no son iguales.

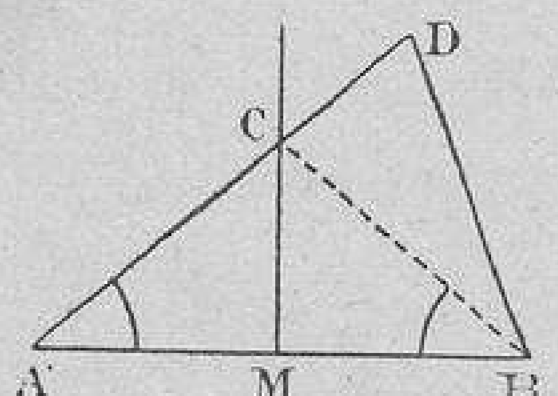

Fig. 28.

D.—Como DA cortará a la mediatriz en un punto C, y, por el teorema directo, CA = CB, basta ver que DB es menor que la quebrada DCB, pues ésta es igual a DA.

DETALLES.—DA corta a la mediatriz porque el punto D se había supuesto a la derecha y el A a la izquierda de la mediatriz. Además

Quebrada DCB = DC + CB, pero CB = CA, luego
» DCB = DC + CA = DA,

de conformidad con lo dicho.

DCB = DC + CB = DA
DCB = DC + CA = DA

Observación.—Adviértase que si D está, como se había supuesto, *a la derecha*, la distancia *menor* es la que hay al extremo de la derecha, y lo contrario ocurriría si D estuviese a la izquierda.

84. R.—*Un punto situado a igual distancia de otros dos, pertenece a la mediatriz del segmento formado al unir éstos.*

Habiéndose patentizado la certeza de los teoremas directo (79) y contrario (83) este recíproco es cierto (64).

85. **Corolarios.** 1.º—*Si un triángulo es isósceles, su vértice está sobre la mediatriz de la base*; puesto que las distancias del vértice a los extremos de la base serán iguales.

86. 2.º—*En el triángulo isósceles, la mediatriz de la base es altura y bisectriz del ángulo del vértice.*

87. 3.º—*Si dos oblicuas son iguales, sus pies están a igual distancia del de la perpendicular.*

Porque si CA = CB, el triángulo ACB será isósceles, y MC será mediatriz de AB, lo que indica que MA = MB.

Observaciones. 1.ª—No pueden existir más que dos oblicuas de tamaño dado, una a cada lado de la perpendicular; porque sólo hay dos puntos a distancia dada, de M, uno a cada lado.

2.ª—*Una recta no puede encontrar a una circunferencia en más de dos puntos.* Porque desde el centro a dicha recta sólo puede haber dos distancias iguales al radio.

88. R. C.—*Si un punto no está a igual distancia de los extremos de un segmento, no está en la mediatriz.*

Se sabe que este teorema es cierto, pues lo son el directo y el contrario (64).

89. **Corolarios.** 1.º—*Si en un triángulo hay dos lados desiguales, al mayor lado se opone mayor ángulo* (Fig. 28).

ABD es un triángulo. Si DB < DA, el punto D no está en la mediatriz, sino al mismo lado de ella en que se halle B (83. Observación y 88); luego el lado DA es cortado por la mediatriz en cierto punto C. Los ángulos A y B del triángulo isósceles ABC son iguales, y como C está entre A y D, y, por tanto, BC entre BA y BD, el ángulo DBA es *mayor* que CBA o que su igual A: como quería probarse.

90. 2.º—Resumen.—*En todo triángulo, a ángulos iguales se oponen lados iguales, y a mayor ángulo mayor lado.*

Repasando los corolarios precedentes, se verá que se ha demostrado que a lados iguales se oponen ángulos iguales (82), y a mayor lado, mayor ángulo (89), y como respecto al tamaño de los lados no pueden hacerse otras hipótesis, y las conclusiones son incompatibles, esta proposición recíproca es cierta (65).

91. *La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos.*

Porque se ha probado que todos los puntos de la mediatriz tienen esa propiedad de equidistancia (79), y que no hay otros que la posean (83), por lo cual es exclusiva, como requiere la definición de lugar geométrico (22).

§ II

# Propiedades de rectas y circunferencias

La mayor parte de las propiedades que van a exponerse se deducen de las estudiadas en el párrafo anterior, y por eso las colocamos en este lugar.

92. *El centro de una circunferencia que pase por dos puntos, se halla en la mediatriz de la cuerda que los une, y dicha mediatriz divide en dos partes iguales a cada uno de los arcos determinados por la cuerda.*

F. 29.—Sean A y B los dos puntos; O, el centro de la circunferencia; MN, la mediatriz de AB, y tracemos las cuerdas de unión de M y N con A y B.

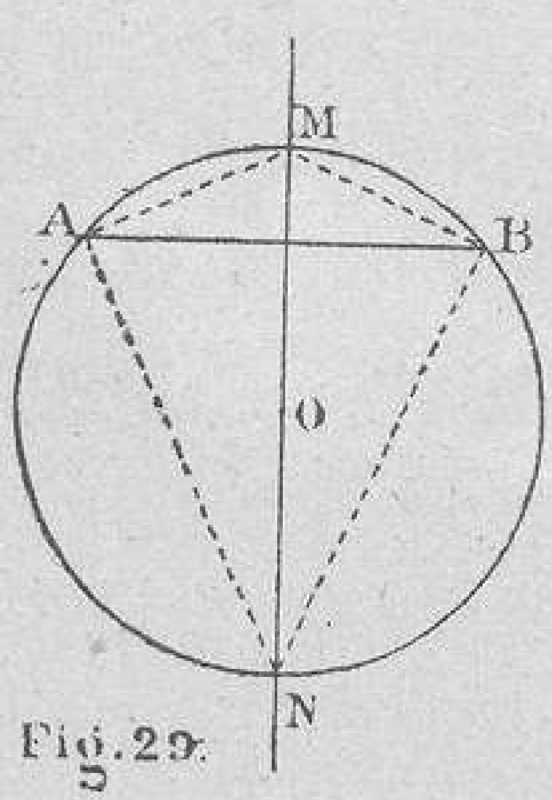

Fig. 29.

D.—El centro O equidista de A y B, luego está sobre la mediatriz MN (91). La parte de MN interior al círculo, es, pues, un diámetro.

Pero M y N, puntos de la mediatriz de AB, equidistan de A y B, luego las cuerdas MA y MB son iguales, y por tanto los arcos de igual nombre (26) así como las cuerdas y arcos NA y NB.

93. **Escolio.** La recta MN cumple con las cinco condiciones siguientes:

1.ª Pasa por el punto medio de AB.

2.ª Es perpendicular a AB.

3.ª Pasa por el centro.
4.ª Pasa por el punto medio del arco AMB.
5.ª Pasa por el punto medio del arco ANB.

Dos de estas condiciones bastan para determinar dicha recta, y según las que se elijan como hipótesis resultan hasta diez teoremas, fáciles de demostrar. En el que precede se han tomado por supuesto las dos primeras. Tomando la 2.ª y 3.ª, se tendría este enunciado: *El diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y a los arcos correspondientes en partes iguales.*

La demostración se hace viendo que el diámetro en cuestión es mediatriz de la cuerda, como altura del triángulo isósceles formado por AB y los radios que fuesen a los puntos A y B. Así se recae en el teorema anterior.

94. *Por tres puntos que no estén en línea recta, se puede hacer pasar una circunferencia única, cuyo centro es el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos que unirían los puntos dados.*

F. 30.—Sean: A, B y C los puntos dados, unidos entre sí, y *m*, *n*, *p* las mediatrices de los segmentos resultantes.

D.—*Suponiendo* que las mediatrices se cortan, como se demuestra en otro lugar, el punto en que lo hacen las *m* y *p* equidista de A, B y C y por él pasa la tercera mediatriz *n*. Como dicho centro es único, y el radio es la distancia de él a uno de los puntos fijos A, B o C, la circunferencia es *única*.

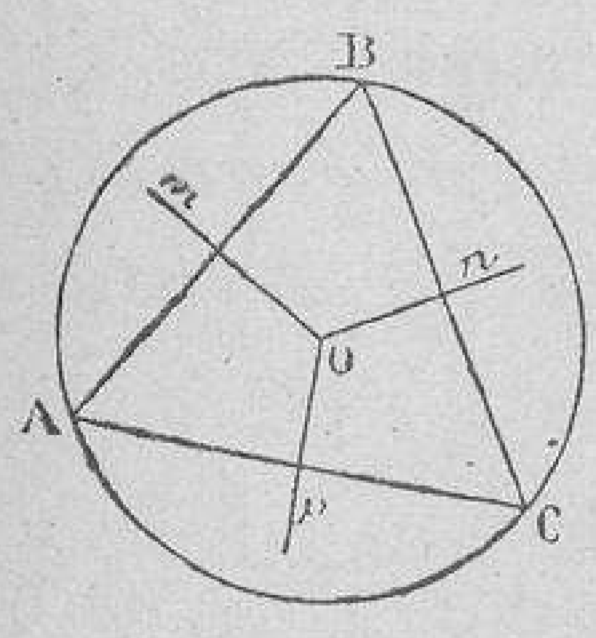

Fig. 30.

Detalles.—El punto en que se corten *m* y *p* equidista de A, B y C, porque estando en *m* equidista de A y B, y estando en *p* de A y C (79). Luego también equidista de B y C, y debe encontrarse, por ello, en la mediatriz *n*.

95. **Corolarios.** 1.° *El centro de una circunferencia o de un arco de ella, es el punto de concurso de las mediatrices de dos cuerdas contiguas trazadas en la circunferencia o en el arco.*

Porque dos de las mediatrices mencionadas en la demostración del teorema bastan para determinar el centro.

96. 2.° *Las tres mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto, centro de una circunferencia circunscripta al triángulo.* (Se le llama *circuncentro*).

Este corolario se identifica con el teorema sin más que observar que ABC es un triángulo.

97. 3.° *Dos circunferencias colocadas de modo que coincidan tres de sus puntos, se confunden.*

Porque, según lo dicho, tendrán igual centro e igual radio.

De aquí resulta que dos circunferencias distintas no pueden tener más de dos puntos comunes.

98. **Posiciones de dos circunferencias.** *Si dos circunferencias tienen un punto común fuera de la recta que une sus centros, tienen común también el simétrico de aquél con respecto a dicha recta.*

(Estas circunferencias se llaman *secantes*).

F. 31.—Sea M un punto común a dos circunferencias (no trazadas) de centros O y O', y M' su simétrico con relación al *eje* OO'.

D.—Los segmentos simétricos OM y OM′ son iguales, luego la circunferencia de centro O y radio OM pasa por M′. Y análogamente para la otra circunferencia.

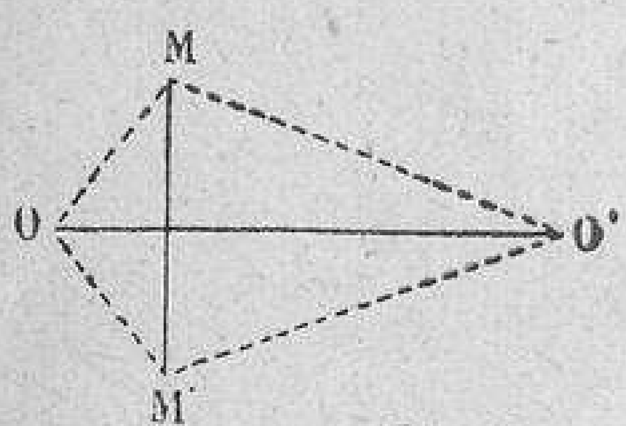

Fig. 31.

Observación — Fuera de los puntos citados no puede haber ninguno común a las circunferencias dadas; porque, si no, coincidirían (97).

99. **Corolario.** *La recta que une los centros de dos circunferencias secantes es mediatriz de la cuerda que une los puntos comunes.*

Consecuencia de la simetría de los puntos comunes respecto a la recta de centros.

100. *El segmento de recta que une los centros en dos circunferencias secantes, es menor que la suma de los radios de una y otra; pero mayor que la diferencia de los mismos.*

F. 31.—Únanse los centros O y O′ con uno de los puntos comunes, M, con lo cual OM será el radio de una de las circunferencias y O′M el de la otra.

D.—La primera parte, que se expresa por la desigualdad

$$OO' < OM + O'M$$

equivale al axioma de ser el segmento de recta la menor distancia entre dos puntos.

Por esta misma causa

$$OM < OO' + O'M$$

y disminuyendo en O′M los dos miembros de esta desigualdad

$$OM - O'M < OO'$$

o lo que es igual

$$OO' > OM - O'M$$

101. *Si dos circunferencias tienen un punto común sobre la recta de sus centros, no tienen más puntos comunes que el citado, y la distancia de los centros es igual a la suma o a la diferencia de los radios de ambas circunferencias según que el punto común esté, o no, entre los centros.*

El punto común se llama punto de *contacto* o de *tangencia*, y las circunferencias, *tangentes*, exterior o interiormente según caiga o no el punto común entre ambos centros.

F. 32 y 33.—Sea P el punto común situado en la recta OO′ ya sea entre O y O′ (fig. 32) o ya a un mismo lado de ambos (fig. 33).

D.—Fuera de la recta OO′ no puede haber otro

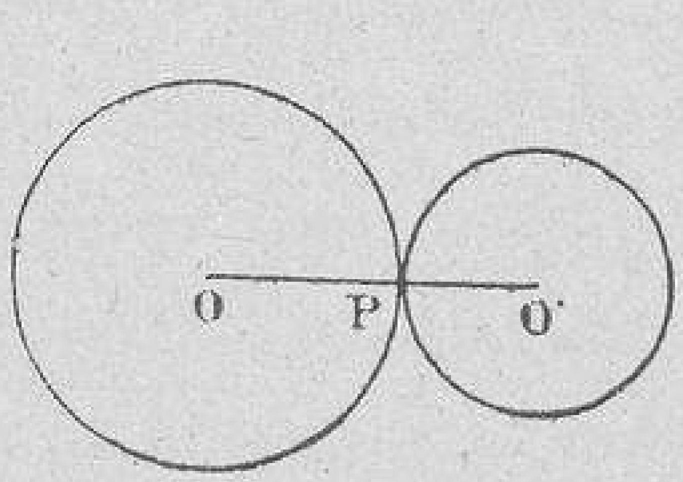


Fig. 32.

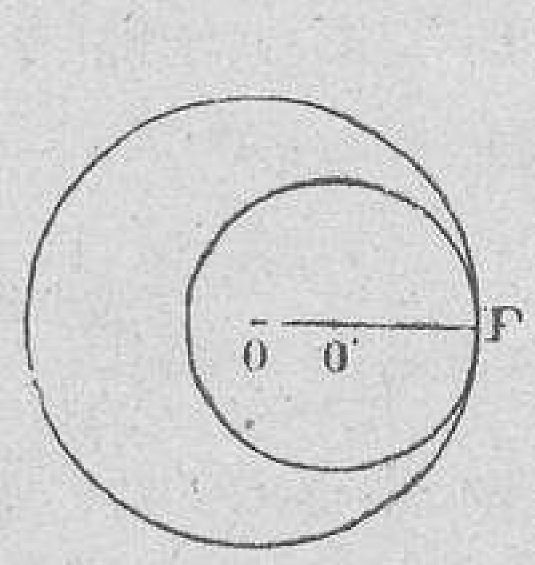


Fig. 33.

punto común, M, porque entonces sería también común el simétrico de éste, M′, y habría tres P, M y M′, cosa imposible (97).

También es imposible que haya otros puntos comunes sobre OO′; porque entonces esta recta cortaría a las circunferencias en más de dos puntos: absurdo (87-2.ª)

Mirando el punto P como extremo del radio OP, y origen del otro radio es evidente que (en la fig. 32)

$$OO' = OP + PO'$$

y (en la 33)

$$OO' = OP - O'P$$

lo que demuestra la última parte del teorema.

102. Las circunferencias que no sean secantes ni tangentes, no pueden tener ningún punto común. Si tampoco lo tienen sus círculos se dicen *exteriores* (una a otra), y si un círculo está incluso en el otro, *interiores* (figs. 34 y 35).

103. *En dos circunferencias exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios, y en dos interiores, menor que la diferencia.*

F. 34.—Sean: O y O′ las circunferencias OA y O′B sus radios, con lo cual AB será la distancia entre los extremos de estos radios.

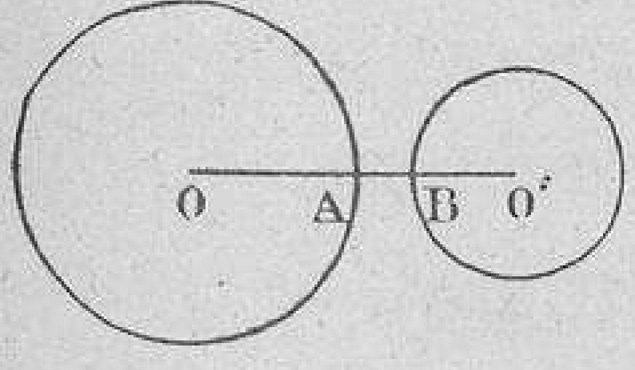

Fig. 34.

D.—1.° La distancia OO′ excede a la suma de los radios; en el trozo AB; luego

$$OO' > OA + O'B$$

F. 35.—2.° La diferencia de los radios se compone de la distancia OO′ aumentada en AB, luego

$$OO' < OA - O'B$$

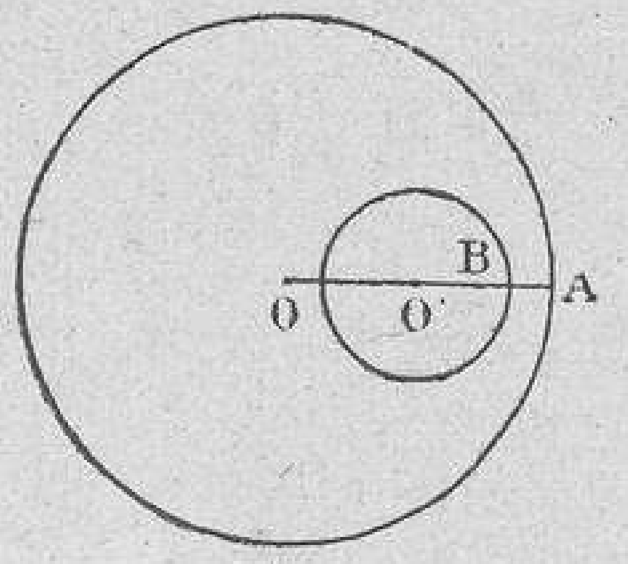

Fig. 35.

104. **Escolio-resumen.** Para recordar mejor las relaciones anteriores, conviene condensarlas en las siguientes *fórmulas* en que D expresa la distancia de los centros, R el radio de la circunferencia que lo tenga mayor, y $r$ el otro radio:

| POSICIONES | RELACIONES |
|---|---|
| Exteriores | $D > R + r$ |
| Tangentes exteriormente | $D = R + r$ |
| Secantes | $D \begin{matrix} < R + r \\ > R - r \end{matrix}$ |
| Tangentes interiormente | $D = R - r$ |
| Interiores | $D < R - r$ |

105. Por haberse hecho todas las hipótesis posibles en el teorema directo y ser incompatibles las conclusiones obtenidas, los recíprocos son ciertos (65), es decir, que si se verifica una de las relaciones consignadas a la derecha, las circunferencias tendrán la posición indicada enfrente a la izquierda.

Conviene fijarse en el siguiente caso particular.

*Si se hace centro en los extremos de un segmento y se trazan dos circunferencias de igual radio, cuando éste sea mayor que la mitad del segmento las circunferencias serán secantes.*

Porque la distancia de los centros, que es el segmento dado, será menor que la suma de los radios, que es el duplo de uno de ellos, y mayor que la diferencia, puesto que ésta es cero.

106. T.—*La perpendicular a un radio de una circunferencia en el extremo del mismo, sólo tiene común con la circunferencia este punto, es decir, es* **tangente.**

F. 36.—Sean: OA, el radio, y BC, la perpendicular en el extremo A.

D.—Entre las distancias del centro a los puntos de BC, la OA, que es la perpendicular, es la menor; por lo cual, excepto A, todos los puntos de BC son exteriores al círculo (21).

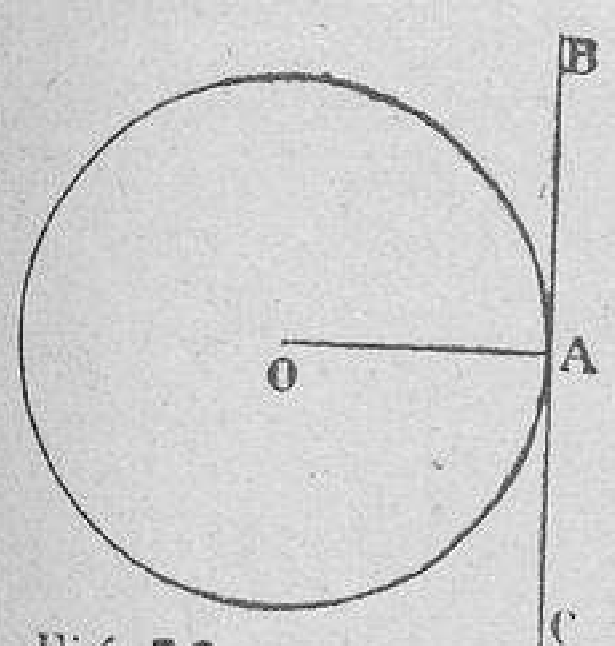

Fig. 36.

107. R.—*La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio del punto de contacto.*

Porque siendo el punto de contacto, A, el más próximo al centro (pues los demás son exteriores), el radio OA que le une con él será la distancia *mínima* entre el centro y la tangente, y, por tanto, perpendicular a ella (59).

108. **Escolios.** 1.º—Siendo cierto el directo y el recíproco, lo es el contrario: si una recta no es perpendicular a un radio en su extremo, o si siéndolo, no lo es en el extremo, no es tangente.

Luego, o es completamente exterior, o es secante.

109. 2.º—*Por un punto dado en una circunferencia existe una tangente única a ella.*

Porque existe una única perpendicular al radio que va a ese punto.

110 3.º—*La perpendicular a la recta de los centros de dos circunferencias tangentes (exterior o interiormente) en el punto de contacto, es una tangente común a las dos circunferencias.*

Porque el punto de contacto de éstas es extremo común de sus radios, a los cuales han de ser perpendiculares las tangentes.

111. *En una circunferencia (o en dos iguales) las cuerdas iguales están a igual distancia del centro.*

F. 37.—Sean AB y CD dos cuerdas iguales, y OM y ON las perpendiculares a ellas que miden sus distancias al centro.

D.—Se podría hacer coincidir las cuerdas, y como desde el centro no existe más que una perpendicular a la recta única que formarían aquéllas al confundirse, también se confundirán las perpendiculares OM y ON, y estos segmentos serán iguales.

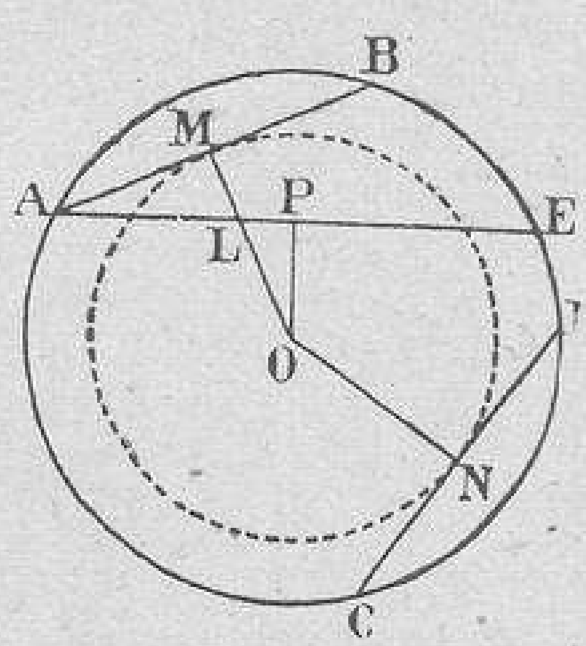

Fig. 37.

112. **Corolario.** *Todas las cuerdas iguales de una circunferencia son tangentes a la circunferencia concéntrica con la dada y cuyo radio sea la distancia del centro a una de las cuerdas.*

Porque una cuerda AB y el radio OM de la circunferencia mencionada determinado por el punto medio de dicha cuerda, son perpendiculares, (93) y (106).

**Escolio.** Podría enunciarse el corolario anterior:

*El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas iguales de una circunferencia es otra, concéntrica con ésta.*

113. *Si dos cuerdas de una circunferencia son desiguales, la mayor está más próxima al centro.*

F. 37.—Como para estimar su distancia al centro es indiferente la posición que la cuerda ocupe (Cor. anterior) tomemos las dos cuerdas a partir de un punto, y a un mismo lado del centro, y sean AB y AE.

D.—El extremo del arco correspondiente a la cuerda menor cae entre los del arco de la cuerda mayor, por ser el primer arco menor que el segundo, por lo cual el segmento OM cortará a la cuerda AC en un punto L, y el segmento perpendicular, OP, será menor que la parte OL de la distancia OM, y, por consiguiente, menor que toda esta distancia.

114. **Corolario.** Entre todas las cuerdas que pasan por un punto, la mayor es el diámetro que pasa por él, y la menor la perpendicular a dicho diámetro.

F. 38.—Sean: P el punto, AB el diámetro, CD la cuerda perpendicular y EF otra cualquiera. OP y OQ las distancias desde el centro a CD y EF.

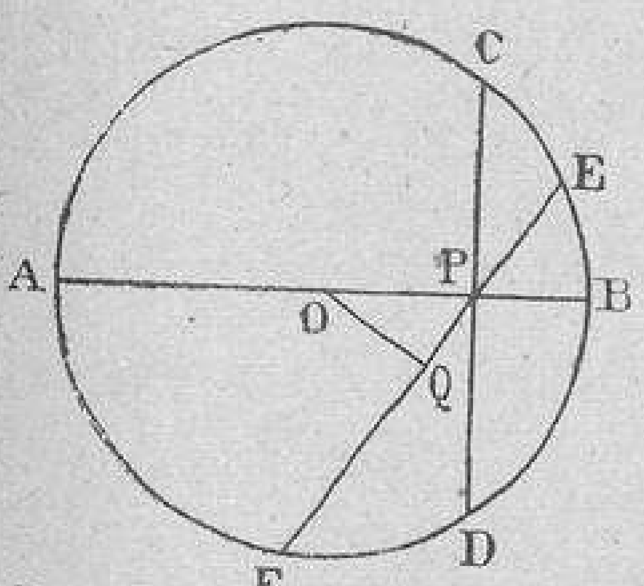

Fig. 38.

D.—Con respecto a EF, es OQ perpendicular mientras que OP es oblicua, luego $OQ < OP$ y según el teorema $EF > CD$.

Que el diámetro AB es mayor que otra cuerda, ya se sabe (25).

§ III

## Trazado de perpendiculares y tangentes

115. **Problema I.** *Trazar la mediatriz de un segmento.*—Fundamento.—Basta hallar dos puntos equidistantes de los extremos; puesto que habrán de pertenecer a la mediatriz (91) y la determinarán (13).

Solución.—Se toma un radio o abertura de compás manifiestamente mayor que la mitad del segmento, y haciendo centro en los extremos de éste, se trazan dos circunferencias, cuyos puntos de intersección equidistarán de los extremos del segmento, y determinarán la mediatriz. (Hágase como se indica).

Observaciones.—Las circunferencias serán secantes porque su radio excede a la mitad del segmento (105).

No es preciso trazar las circunferencias completas, sino la parte en que se presume que han de cortarse.

116. **Aplicaciones.** El problema resuelto permite resolver los siguientes, que se proponen como ejercicio para los alumnos:

*a)*—Hallar el punto medio de un segmento.

*b)*—Sobre una recta dada, considerada como diámetro, trazar una circunferencia.

*c)*—Dividir en dos partes iguales un arco de circunferencia.

*d)*—Trazar la bisectriz de un ángulo. (Trácese el arco correspondiente).

*e)*—Construir un triángulo isósceles, dadas la base y la altura.

*f)*—Describir una circunferencia que pase por dos puntos. (Indeterminado).

*g)*—Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados y tenga un radio conocido.

*h)*—Hacer pasar una circunferencia por tres puntos que no estén en línea recta.

*i)*—Hallar el centro de una circunferencia o de un arco.

*j)*—Inscribir un triángulo en una circunferencia.

*k)*—Hallar sobre una línea dada, un punto equidistante de otros dos fijos.

*l)*—Encontrar una circunferencia cuyo centro esté en una línea dada y que pase por dos puntos exteriores a ella.

*m)*—Hallar una circunferencia tangente a otra en un punto dado y que pase por otro punto. (Téngase presente que la recta de los centros pasa por el punto de tangencia).

117. **II.** *Trazar la perpendicular a una recta en un punto dado sobre ésta.*

Fundamento.—Haciendo que este punto sea el punto medio de un segmento, quedará el problema reducido a trazar la mediatriz.

Solución.—A uno y otro lado del punto dado, se marcan sobre la recta otros dos que equidisten de aquél, y se traza la mediatriz del segmento que determinan. (Dibújese como se expresa).

Observación.—Bastaría encontrar un punto de la mediatriz, exterior a la recta, pero, como comprobación, conviene hallar los dos que se obtienen como ya es sabido (115) y deben estar en línea recta con el punto dado.

118. *Aplicaciones.* Se hace uso del problema anterior, en los que siguen:

*a)*—Trazar una recta tangente a una circunferencia en un punto dado (106).

*b)*—Trazar una circunferencia tangente a una recta en un punto de ésta. (Indeterminado.—Enúnciese el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cumplen con la condición impuesta en el problema).

*c)*—El mismo problema anterior, conociendo el radio de la circunferencia.

*d)*—Trazar una circunferencia tangente a una recta en un punto y que pase por otro.

*e)*—Trazar una circunferencia tangente a una recta en un punto dado, y que también lo sea a otra circunferencia dada. (El centro de la circunferencia desconocida, dista del centro de la dada la suma o diferencia de los radios de ambas, mientras que de la recta dista el radio de la circunferencia desconocida. Con esta advertencia y suponiendo el problema resuelto, se podrá hallar la construcción).

119. **III.** *Desde un punto exterior a una recta, trazarle una perpendicular.*

Fundamento.—Buscando sobre la recta puntos equidistantes del dado, éste pertenecerá a la mediatriz del segmento determinado por aquéllos, y bastará determinar otro punto de esta mediatriz.

Solución.—Desde el punto dado, como centro, y tomando como radio cualquier oblicua limitada entre el punto y la recta, se describe un arco, que cortará a la recta en dos puntos equidistantes del propuesto. Hallando la mediatriz de la cuerda de este arco, estará resuelto el problema. (Hágase la figura).

120. Aplicaciones. *a)*—Hallar la distancia de un punto a una recta.

*b)*—Trazar las alturas de un triángulo.

*c)* —Construir la figura simétrica de otra con respecto a un eje dado.

*d)*—Dados dos puntos a un mismo lado de una recta, hallar sobre ésta el punto que unido a aquéllos proporcione el camino más corto para ir de uno a otro. (Se reemplaza uno de los puntos por su simétrico con relación a la recta).

121. *Método de los lugares geométricos para la resolución de problemas.*—En algunos de los problemas precedentes, y en otros muchos, la solución depende de la determinación de un punto que debe cumplir con varias condiciones. Suponiendo ahora que sólo sean dos, si prescindimos de una de ellas, el punto puede cumplir con la otra hallándose en el *lugar geométrico* caracterizado por ella.

Como lo mismo acontece respecto a la condición segunda, también debe hallarse el punto en otro lugar geométrico. Luego si ha de cumplir simultáneamente con ambas condiciones, a la vez ha de hallarse en los dos lugares, y será, de consiguiente, alguno de sus puntos de intersección.

Sea, para aclararlo, el siguiente ejemplo:

*Trazar una circunferencia de radio conocido, que pase por un punto dado, y sea tangente exteriormente a otra circunferencia.*

F. 39.—Sean A, el punto; *r*, el segmento que marca el tamaño del radio, y O, la circunferencia dada.

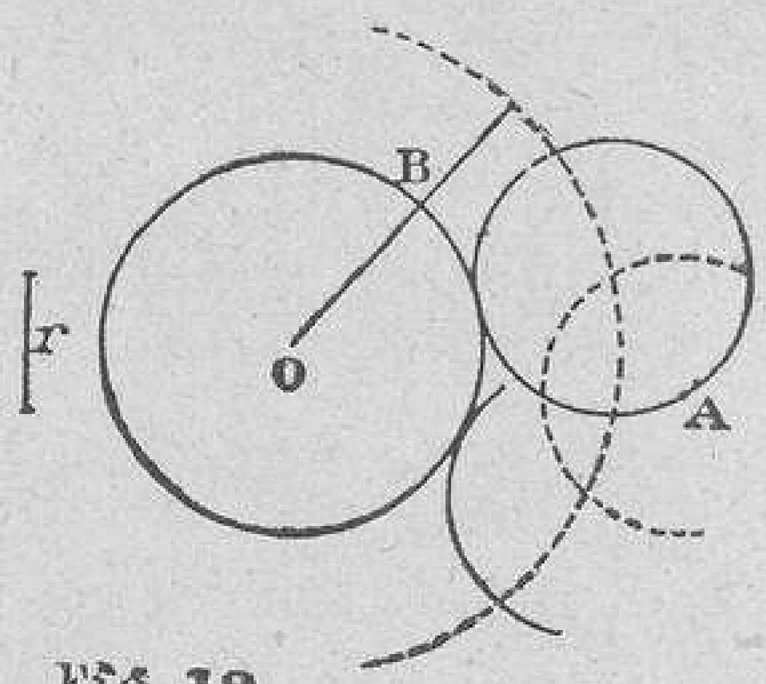


Fig. 39.

ANÁLISIS.—El centro de la circunferencia pedida debe cumplir dos condiciones:

1.ª—Estar a una distancia de A igual a *r*

2.ª—Estar a una distancia de O igual a la *suma* del radio de esta circunferencia y *r*.

Por la primera condición, el punto podrá ser cualquiera de los de la circunferencia de centro A y radio *r*, por ser ésta su lugar geométrico.

Por la condición segunda, el centro desconocido pertenecerá a la circunferencia de centro O, y cuyo radio sea la *suma* del de ésta con *r*; segundo lugar geométrico.

Luego si a la vez han de cumplirse las dos condiciones, el centro buscado estará sobre las dos circunferencias auxiliares; y podrá ser cualquiera de los que tengan comunes. De donde brota la

SÍNTESIS.—Con centro O y radio OB $+$ *r*, se traza una circunferencia, y otra con centro A y radio *r*.

Según dichas circunferencias se corten (en dos puntos), sean tangentes o no se corten, podrá haber dos, una o ninguna posiciones posibles para el centro buscado, y se podrán describir, con el radio dado, otras tantas circunferencias que cumplan con las condiciones impuestas en el enunciado.

*Discusión* del problema es el examen del número de soluciones y particularidades que presentan, según la posición, forma o magnitud de los datos.

Si en el problema anterior no se hubiera impuesto a la circunferencia buscada la condición de ser tangente *exteriormente* a la O, debiera examinarse, al *discutirlo*, el caso de tangencia interior; con lo cual pudiera haber hasta *cuatro* soluciones.

EJERCICIOS.—Resuélvanse por el método de lugares geométricos los problemas siguientes:

Trazar una circunferencia de radio conocido y tangente a otras dos dadas.

En una circunferencia dada, trazar una cuerda de tamaño conocido, y cuyo punto medio esté sobre otra cuerda dada. (112).

Construir un triángulo sobre una base fija, conociendo la mediana relativa a dicha base y uno de los ángulos básicos. (23 y 77).

122. Se llama *proyección ortogonal* de un punto sobre una recta de su plano (llamada *eje)*, el punto en que encuentra a ésta la perpendicular trazada desde aquél.

Proyección de un segmento sobre un eje es la parte de éste comprendida entre las proyecciones de los extremos del segmento.

EJERCICIO.—Proyectar sobre un eje varios puntos y segmentos, y, en particular, un segmento paralelo al eje, otro perpendicular, y otro que tenga un punto sobre el eje.

CAPÍTULO IV

§ I

# La bisectriz y sus aplicaciones

123. Recordando la definición de bisectriz de un ángulo y lo dicho acerca de las figuras simétricas, se puede establecer:

*Dos puntos,* A *y* A', (fig. 40) *situados uno en cada lado de un ángulo y a igual distancia del vértice, son simétricos con relación a la bisectriz del ángulo.*

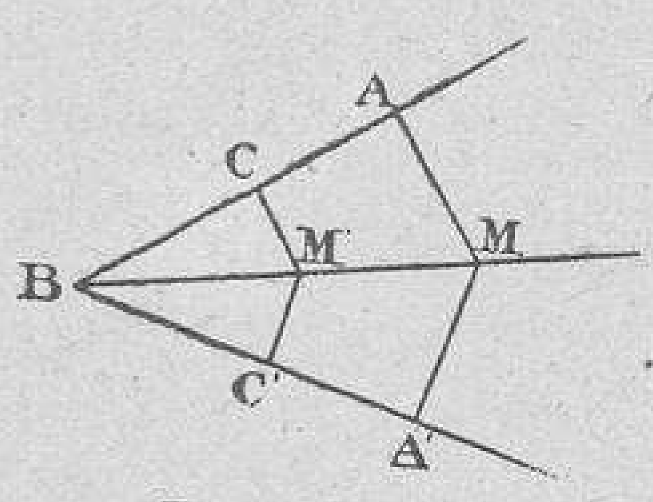

Fig. 40.

Doblando el plano por ella, los lados del ángulo coincidirán, y A caerá sobre A', porque están a igual distancia del vértice. Por otra parte, se sabe que al hacer el doblez dicho, A debe coincidir con su simétrico, y puesto que coincide con A′, es prueba de que A, es simétrico de A.

124. *Los lados de un ángulo son simétricos respecto de su bisectriz.* Porque, según lo que antecede, cualquier punto de un lado tiene su simétrico sobre el otro lado.

125. T.—*Todo punto de la bisectriz de un ángulo, está a igual distancia de los lados.*

F. 40.—Sean: ABA′, el ángulo, y M, un punto de la bisectriz BM. Los segmentos MA y MA′, perpendiculares a los lados, son las distancias cuya igualdad ha de establecerse.

D.—Doblando la figura por la bisectriz, coinciden los lados del ángulo, y también coincidirán MA y MA', puesto que por el punto M sólo se puede trazar una perpendicular a la recta que formarían los lados confundidos.

126. **Corolarios.**—1.º—*Un trozo de bisectriz, tomado a partir del vértice, tiene igual proyección ortogonal sobre los lados del ángulo.*

Puesto que cayendo A sobre A', BA = BA'.

OBSERVACIÓN.—Se verifica la propiedad aunque el segmento de bisectriz no se tome a partir del vértice, puesto que siendo M' otro punto, proyectado en C y C', se tendrá, por lo que antecede:

$$BA = BA'$$
$$BC = BC'$$

y, restando miembro a miembro las igualdades,

$$BA - BC = BA' - BC'$$

es decir,

$$CA = C'A'$$

127. 2.º—*La bisectriz de un ángulo lo es también del que forman las perpendiculares desde un punto de ella a los lados.*

Porque al doblar por la bisectriz, coinciden los ángulos BMA y BMA', lo que indica ser BM bisectriz de AMA'.

128. R.—*Si un punto interior a un ángulo está a igual distancia de los lados, pertenece a la bisectriz del ángulo.*

F. 41.—Sean: AOB, el ángulo; M, el punto, y MA y MB, las distancias, iguales, a los lados.

Unamos A con B, y tracemos OM, con la condición de ser mediatriz de AB.

D.—Los triángulos MAB y OAB son isósceles, luego la mediatriz de su base común pasa por los vértices O y M, y es bisectriz de los ángulos en O y en M. (86).

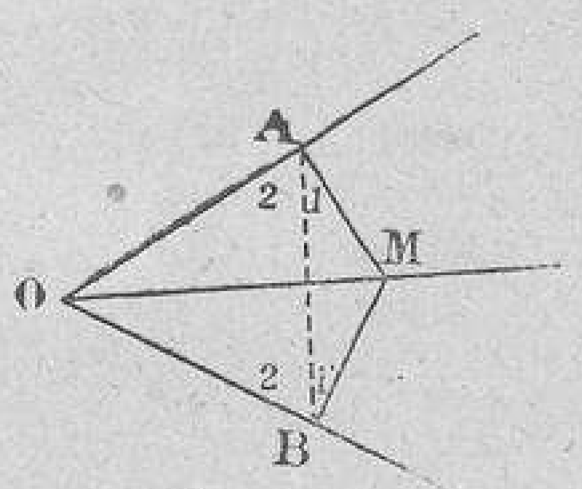

Fig. 41

Detalles.—El triángulo MAB es isósceles por hipótesis, puesto que MA = MB. Entonces los ángulos 1 y 1' serán iguales, y también sus complementos 2 y 2': luego también es isósceles el triángulo OAB.

129. **Corolario.** *Las proyecciones de un punto interior a un ángulo sobre los lados de éste, son puntos simétricos respecto a la bisectriz del ángulo.*

Porque se ha visto que OM es a la vez mediatriz de AB y bisectriz del ángulo.

130. C.—*Si un punto interior a un ángulo no está en la bisectriz, no equidista de los lados, y recíprocamente:*

Se sabe que estos teoremas son ciertos. (64).

131. **Escolios.**—1.° *La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos interiores al mismo que se hallan a igual distancia de los lados*

Porque los puntos de la bisectriz tienen esa propiedad, y los demás no la tienen.

132. 2.° *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a los lados de un ángulo e inscriptas en él, es la bisectriz de dicho ángulo.*

Porque, en virtud del escolio anterior, como los centros en cuestión han de hallarse a igual distancia de los lados, (por ser el radio la distancia del centro a la tangente) pertenecerán a la bisectriz dicha.

133. 3.° *Si tenemos una circunferencia inscripta en un ángulo, la recta que une el vértice de éste con el centro de aquélla es bisectriz del ángulo, mediatriz de la cuerda que une los puntos de contacto y bisectriz del ángulo de los rádios determinados por dichos puntos, y las tangentes contadas desde el vértice a los puntos de contacto son iguales.*

Todo lo cual no varía de lo demostrado en las proposiciones anteriores más que en la forma de enunciación. (Hágase la figura).

134. *Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares.*

Porque sumando dos rectos los ángulos adyacentes, la mitad del uno más la mitad del otro (que componen el ángulo de las bisectrices), sumarán un recto. (Si es necesario, hágase la figura).

135. *Las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice constituyen una sola recta.*

Pues la bisectriz de uno de los ángulos y la de su opuesto por el vértice deben ser ambas perpendiculares a la bisectriz de uno de los ángulos adyacentes a los dados; y por un punto sólo hay una perpendicular a una recta. (Véase en una figura).

136. **Escolios.**—*Las bisectrices de los cuatro ángulos formados por dos rectas que se cortan, constituyen dos solas rectas perpendiculares entre sí en el vértice, las cuales son el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de las rectas dadas, y el de los centros de las circunferencias tangentes a esas mismas rectas.*

137. *Las bisectrices de los ángulos interiores de un*

*triángulo se cortan en un punto (incentro) centro de la circunferencia inscripta en el triángulo, y cada bisectriz de un ángulo interior concurre con las de los exteriores adyacentes a los otros dos ángulos en un punto, centro de una circunferencia exinscripta* (*) *al triángulo.*

F. 42.—Sean: ABC el triángulo; AI, BI, CI las bisectrices de los ángulos interiores (las cuales se prolongan indefinidamente), y I'I'', I'I''', I''I''' las bisectrices de los ángulos exteriores.

D.—Que las bisectrices se cortan, se probará después. El punto en que se cortan las bisectrices interiores *m* y *n* equidista de los lados *b* y *c* por pertenecer a la primera, y de los *b* y *a* por pertenecer a la segunda, luego equidista de los tres lados, y pertenece a la bisectriz *p* porque ésta contiene todos los puntos equidistantes de *c* y *a*. Haciendo centro en dicho punto I, con un radio igual a la distancia de I a uno de los lados, se tendría la circunferencia inscripta.

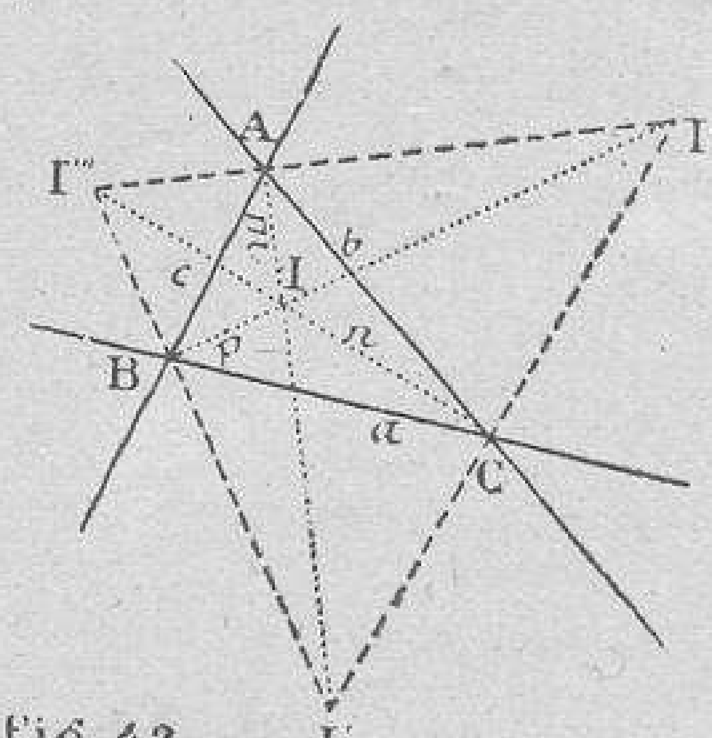

Fig. 42.

Análogamente se razona respecto a las exinscriptas teniendo en cuenta las prolongaciones de los lados.

Observación.—Los vértices del triángulo ABC están sobre los lados de I'I''I''' por lo cual se dice que éste es circunscripto a aquél.

(*) Tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.

§ II

## Trazado de bisectrices.-Aplicaciones

138. **Problemas.** *Trazar la bisectriz de un ángulo.*—Se traza un arco correspondiente al ángulo y se divide dicho arco, o su cuerda, en partes iguales.

O bien: se toman sobre los lados puntos a igual distancia del vértice, y se traza la mediatriz del segmento que los une. (Practíquese).

El primer método resulta de que dividiendo en dos partes iguales la cuerda de un arco, éste queda dividido también, y quedándolo el arco, lo queda el ángulo.

El segundo se deriva de lo dicho en el núm. (123).

139. *Trazar la bisectriz del ángulo que formarían dos rectas, no paralelas, pero que se encontrasen fuera de los límites del dibujo.*

Fundamento.—Es el teorema del núm. 137.

Solución.—Con las dos rectas dadas y una secante se forma parte de un triángulo, conociéndose dos ángulos interiores y sus adyacentes exteriores.

Trazando las bisectrices de estos ángulos se encontrarán en el incentro y en el centro de una de las circunferencias exinscriptas (la incluída en el ángulo que formarían las rectas dadas), y como estos dos puntos están sobre la bisectriz pedida, ésta será la recta que los une.

140. Aplicaciones del problema anterior (138) son los que siguen:

*a)*—Trazar una circunferencia tangente a los lados de un ángulo. (Indeterminado).

*b)*—Inscribir en un triángulo una circunferencia.

*c)*—Hallar todas las circunferencias tangentes a tres rectas indefinidas.

*d)*—Trazar una circunferencia tangente a dos rectas, siéndolo a una de ellas en un punto dado. (Téngase presente el problema *b)* del núm. 118).

*e)*—Trazar una circunferencia tangente a otra en un punto dado, y también a una recta. (Recuérdese que dos circunferencias tangentes tienen una recta tangente común en el punto de contacto).

## CAPÍTULO V

### § I

# Las paralelas

141. Se sabe que dos rectas de un plano son paralelas cuando no se cortan, esto es, cuando no tienen punto común. Pero por este carácter no se puede reconocer el paralelismo de dos rectas necesariamente limitadas, como son las que trazamos en un papel o en el tablero, y de aquí la sustitución de dicho carácter por otros. El teorema siguiente proporciona uno muy usado.

T.—*Si dos rectas cortadas por una secante forman ángulos alternos internos* (44) *iguales son paralelas.*

F. 43.—Sean: AB y CD las rectas, EF la secante y $1 = 1'$ y $2 = 2'$ los pares de ángulos alternos internos supuestos iguales. Tomemos además el punto O, medio de la parte EF de secante comprendida entre las rectas dadas.

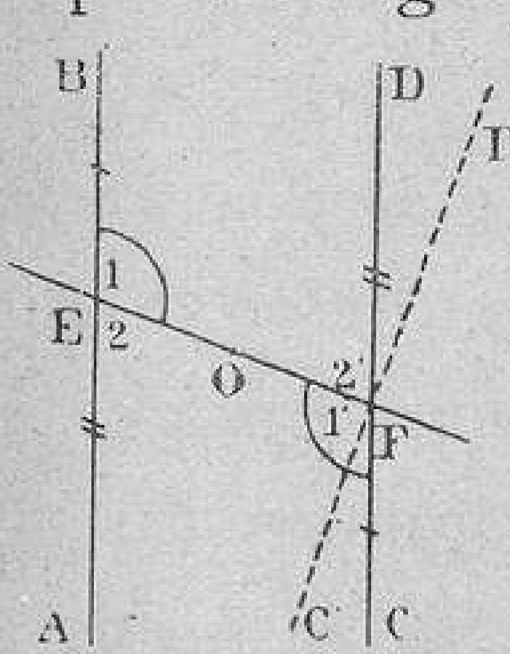

Fig. 43.

D.—Por rotación de un ángulo llano alrededor de O, las semirrectas EB y FD caen, respectivamente, sobre las FC y EA. Luego si las primeras se cortasen, también las segundas, y al revés; lo cual daría el absurdo de que las rectas dadas tenían *dos* puntos comunes, uno por encima y otro por debajo de EF.

Detalles.—Al hacer la rotación de un ángulo llano alrededor de O, el segmento OE coincide con su opuesto OF, y las semirrectas EB y FD que estaban en una región (con relación a EF) caerán en la otra, pero sin variar sus ángulos con EF. Así, la semirrecta *de arriba* EB, que forma el ángulo 1, caerá *hacia abajo* y formando un ángulo igual al 1: coincidirá, pues, con FC que forma el ángulo 1' igual al 1. Del mismo modo se ve que FD coincide con EA.

142. R.—*Si dos rectas son paralelas, forman ángulos alternos internos iguales con cualquier secante.*

Porque si el ángulo 1', por ejemplo, no fuese igual al 1, se podría trazar por F una recta C'D' que formase con EF un ángulo igual al 1. Entonces, según el directo, serían paralelas AB y C'D', y como por hipótesis lo son AB y CD, por el punto F se habrían trazado *dos* paralelas, CD y C'D', a la recta AB; lo que se opone al postulado de Euclides ya admitido (47).

143.—*Si dos rectas forman con otra ángulos alternos internos desiguales, no son paralelas (se cortan); y recíprocamente.*

Estos teoremas son ciertos (64).

144. Según lo que antecede: *para que dos rectas sean paralelas es necesario y suficiente que, cortadas por otra, formen con ella ángulos alternos internos iguales.*

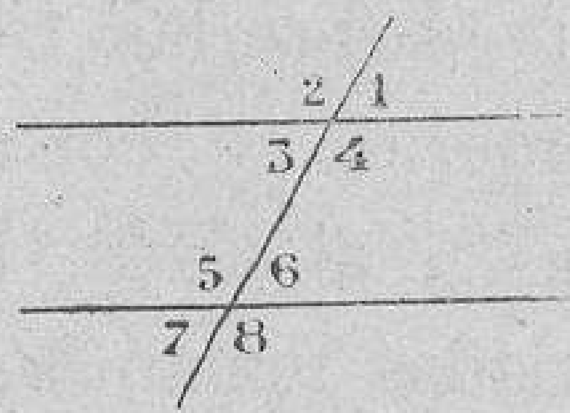

Fig. 44.

Pero como de ser iguales los ángulos alternos internos (3 y 6, de la fig. 44) se deduce que lo son sus opuestos por el vértice (1 y 7) y sus adyacentes (2, 4, 5 y 8) y viceversa, se pueden también tomar como caracteres de paralelismo los siguientes:

*Si son iguales los ángulos*

*alternos internos, alternos externos o correspondientes,*

*o si son suplementarios los*

*internos del mismo lado de la secante,* o los *externos del mismo lado de la secante,*

*las rectas son paralelas; y no lo son en caso contrario.*

En particular: *si dos rectas forman con otra ángulos agudos y de un mismo lado, se cortan.* Por esta razón se pudo afirmar que se cortaban las bisectrices de los ángulos de un triángulo, que como se verá al hablar de las propiedades de éste, forman con un lado ángulos agudos.

145. T.—*Dos rectas paralelas pueden coincidir por una traslación rectilínea.*

F. 43.—Sean AB y CD las paralelas y EF una secante.

D.—Imprimiendo al ángulo BEF la traslación en que el lado EF resbala sobre la recta indefinida de que forma parte, cuando el punto E llegue a la posición que actualmente tiene F, la recta EB coincidirá con la FD, puesto que los ángulos correspondientes, son iguales. (144).

146. C.—*Si dos rectas no son paralelas, no coinciden por traslación dirigida por una secante.*

D.—Puesto que entonces el ángulo 1 no es igual al correspondiente, EB no coincidirá con FD.

147. R.—*Si dos rectas coinciden por una traslación rectilínea dirigida por una secante, son paralelas.*

Se sabe que este teorema es cierto, puesto que se han demostrado el directo y el contrario. (64).

148. **Escolio.**—Despréndese de los teoremas directo y recíproco demostrados, que la definición dada para las rectas paralelas (46) puede sustituirse por esta otra: *dos rectas son paralelas cuando pueden coincidir por una traslación rectilínea* (dirigida por una secante).

149. T.—*Si una recta corta a una de dos paralelas, corta a la otra.*

F. 43.—Sean las paralelas AB y CD y la recta C'D' que se sabe que corta a CD pero se ignora si corta a AB.

D.—Si C'D' no cortase a AB, sería paralela con ella, pero como la CD también lo es, habría por el punto F dos paralelas a AB: la CD y la C'D', lo que se opone al postulado de Euclides.

150. El teorema recíproco de éste tiene el mismo enunciado puesto que es indiferente considerar que la paralela cortada es CD o que lo es AB; luego dicho recíproco es cierto. Y lo será también el siguiente

151. C.—*Si una recta no corta a una de dos paralelas no corta a la otra;* que también puede enunciarse: *si una recta es paralela a una de dos paralelas lo es a la otra, o dos rectas paralelas a otra lo son entre sí.*

152. *Si una recta es perpendicular a una de dos paralelas lo es a la otra.*

D.—Porque debiendo dicha recta formar con las paralelas ángulos correspondientes iguales, y siendo rectos los que forma con la paralela primera, lo serán los que forma con la segunda, es decir, será perpendicular a esta segunda.

153. T.—*Si dos rectas son paralelas, sus perpendi-*

*culares también lo son.* Porque llevando a coincidir las paralelas por una traslación dirigida por una de las perpendiculares, éstas lo serían a una sola recta, y serían paralelas (46) (Puede hacerse la figura para mayor claridad).

154. El recíproco coincide con el directo, puesto que si una recta es perpendicular a otra, ésta lo es a la primera, luego es cierto. Y lo será también el siguiente

155. C.—*Si dos rectas no son paralelas, sus perpendiculares tampoco lo son.* O bien: *si dos rectas se cortan, las perpendiculares a ellas también se cortan.*

Es, pues, cierto, según se anticipó, (94 y 96), que las mediatrices de dos lados de un triángulo se cortan.

156. T.—*Si dos rectas son paralelas, todos los puntos de una están a igual distancia de la otra.*

F. 45.—Sean: AB una recta, CD la paralela, P y Q dos puntos cualesquiera de ésta, y PP′ y QQ′ los segmentos perpendiculares a AB que expresan las distancias a ella de P y Q; distancias cuya igualdad desea establecerse. Por el punto medio, M, del segmento PQ tracemos la perpendicular MN a las paralelas.

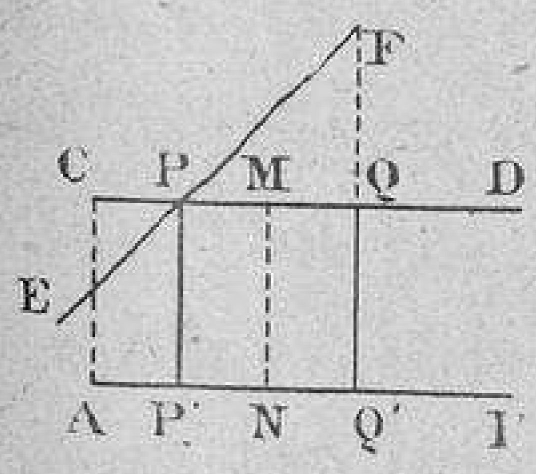

Fig. 45.

D.—Como P y Q son simétricos respecto de MN, coincidirán al doblar por esta recta el plano. Por otra parte la semirrecta NB coincidirá con su prolongación NA, y entonces el punto Q' caerá precisamente sobre P', porque de lo contrario QQ′ no coincidiría con PP′, y habría por el punto P (sobre el cual ha caído el Q) *dos* perpendiculares a AB, cosa absurda.

Observación.—Como PP' y QQ′ son a la vez perpendiculares a *las dos* paralelas (152), lo mismo expresan las distancias de P y Q a la paralela AB, que las de P′ y Q′ a la paralela CD, luego el teorema se verifica para ambas paralelas y por eso se dice que éstas son *equidistantes una de otra.*

157. C.—*Si dos rectas no son paralelas los puntos de una no equidistan de la otra.*

F. 45.—Sean AB y EF las rectas no paralelas. Por P tracemos la paralela a AB y sean E y F dos puntos de EF cuyas distancias a AB son EA y FQ′.

D.—Evidentemente EA < CA y QQ′ < FQ′, pero

$$CA = QQ' \text{ luego } EA < FQ'$$

como el enunciado expresaba.

158. R.—*Si dos rectas están equidistantes son paralelas.*

Este teorema es cierto, puesto que lo son el directo y el contrario (64).

159. **Escolios.** 1.° Según lo que precede, se pueden substituir las definiciones conocidas de paralelas, por esta otra: *dos rectas de un plano se llaman paralelas, cuando todos los puntos de una equidistan de la otra.*

160. 2.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano que se hallan a una distancia dada de una recta se compone de dos paralelas a ésta, trazadas a la distancia prefijada, una en cada una de las regiones que la recta determina en el plano.*

Porque los puntos de dichas paralelas cumplen con la condición de hallarse a la distancia dada de la recta, y los que no están sobre las paralelas no cumplen con dicha condición.

161. 3.° *Cuando un segmento de longitud dada*

*sufre una traslación rectilínea por la cual uno de sus extremos recorre una recta, el otro extremo describe una paralela a ésta.*

Porque se conserva a distancia fija de ella.

162. 4.° *Las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.*

F. 46.—Sean los segmentos AC y BD paralelos y comprendidos entre las paralelas AB y CD.

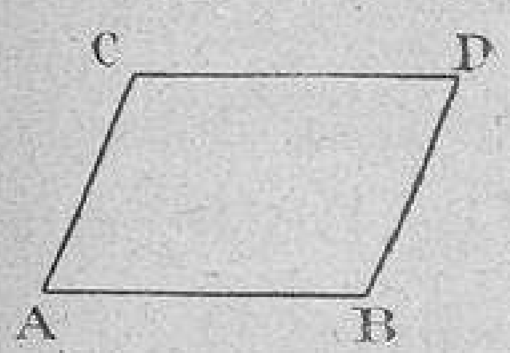

Fig. 46.

D.—Por una traslación a lo largo de AB, el segmento AC se conserva siempre paralelo a su posición inicial, y como C describe la paralela CD a AB (161) llegará AC a coincidir con BD, y serán iguales.

Lo mismo se probaría que AB coincide con CD por una traslación dirigida por AC o BD.

163. Observación.—La propiedad que acabamos de demostrar puede enunciarse de este otro modo: *los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.*

164. R.—*Si un cuadrilátero convexo tiene dos lados opuestos iguales y paralelos, también son paralelos los otros dos, y el cuadrilátero será paralelogramo.*

D.—Al llevar a coincidir AC con su paralela BD por una traslación a lo largo de AB, el punto C recorre un segmento paralelo a AB (161), el cual, teniendo por origen C y por extremo D, es el mismo CD de la figura: luego CD es paralelo a AB, según se deseaba probar. (*)

(*) Existe otro recíproco según el cual si un cuadrilátero convexo tiene los dos pares de lados opuestos iguales es paralelogramo. Esta proposición se justificará más adelante al ver que un paralelogramo se compone de dos triángulos iguales, y recíprocamente.

165. T.—*Dos ángulos de lados respectivamente paralelos, son iguales o suplementarios.*

F. 47.—Sea ABC uno de los ángulos, y por un punto B' del plano tracemos paralelas indefinidas a los lados del ángulo, las cuales formarán los ángulos 1 y 3 iguales entre sí, los 2 y 4 también iguales entre sí y suplementarios de los anteriores. Tracemos BB'.

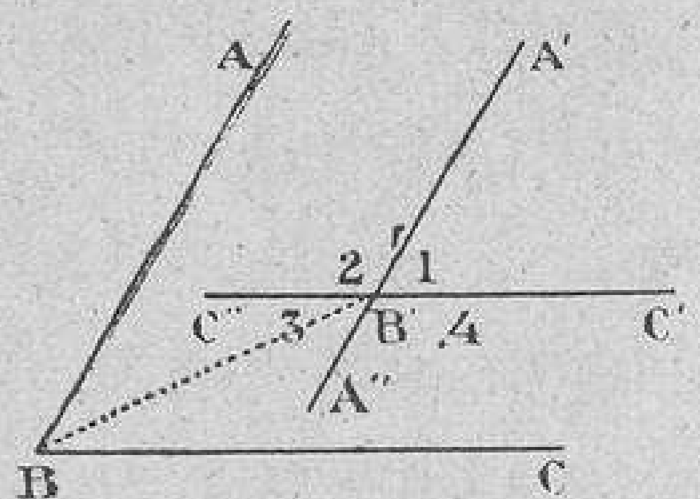


Fig. 47.

D.—Por traslación a lo largo de BB', cuando B llegue a B' se confundirá BA con su paralela B'A', y al mismo tiempo BC con B'C'. Luego, ABC = A'B'C'. Siendo, pues, ABC igual al ángulo 1, lo será al 3, y tendrá por suplemento el 2 ó el 4.

166. Observaciones.—Para distinguir el caso en que los ángulos de lados paralelos son iguales del caso en que son suplementarios pueden seguirse varios criterios. Desde luego si se reconoce que ambos son agudos o ambos obtusos ya no podrán ser suplementarios, y si fuesen rectos, serían a la vez iguales y suplementarios, pero también se observa que la igualdad acontece cuando, contando a partir del vértice, los lados paralelos son del mismo u opuesto sentido, mientras que si un par fuese del mismo sentido y el otro de contrario serían suplementarios los ángulos.

167. R (parcial).—*Si dos ángulos son iguales y se colocan de modo que un lado del uno quede paralelo a un lado del otro, los otros lados serán también paralelos.*

F. 47.—La hipótesis es que A'B'C' y ABC son iguales y que B'C' es paralelo a BC.

D.—La recta trazada por B′ paralelamente (y con el mismo sentido) a BA, ha de formar con B′C′, según el directo, un ángulo igual al ABC; y como es B′A′ la que lo forma, B′A′ es la paralela a BA.

168. **Corolarios.** 1.° *Dos ángulos de lados respectivamente perpendiculares, son iguales o suplementarios.* (Hágase la figura, o mejor, recórtese en papel).

D.—Imprimiendo a uno de los ángulos una rotación de 90° alrededor del vértice queda con los lados paralelos a los del otro, y se recae en el teorema precedente.

OBSERVACIÓN.—Es posible generalizar este corolario diciendo: dos ángulos tales que los lados del uno formen ángulos iguales (en magnitud y sentido) con los del otro, son iguales o suplementarios.

169. T.—*Si por los vértices de un polígono se trazan segmentos paralelos, iguales y del mismo sentido, y se unen sus extremos en igual orden en que se hallen unidos los vértices del polígono dado, se obtiene otro de lados y ángulos iguales a los del propuesto.*

F. 25.—Sea ABC el polígono (*) y AA′, BB′, CC′, los segmentos paralelos cuyos extremos dan el polígono A′B′C′.

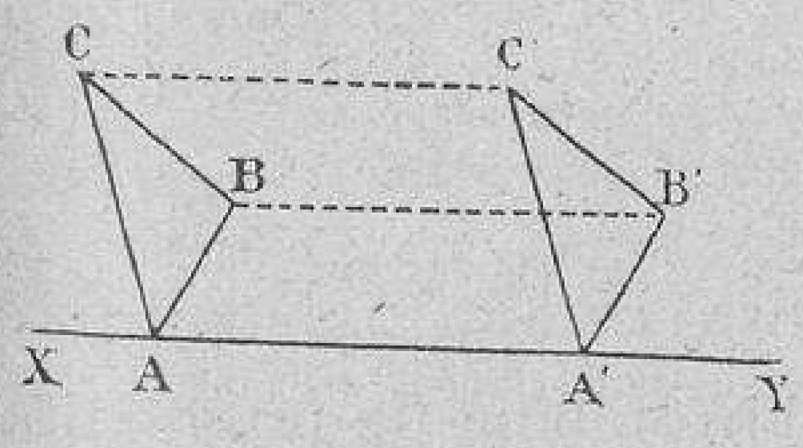

Fig. 25.

D.—Por ser AA′ igual y paralelo a BB′, y éste igual y paralelo a CC′..... son paralelogramos AA′ BB′, BB′CC′ etc. (164).

Luego A′B′ es igual y paralelo a AB; B′C′ igual y paralelo a BC.....etc. Los ángulos son iguales por tener los lados paralelos y del mismo sentido.

(*) No influye el número de lados.

170. R.—*Si dos polígonos tienen sus lados iguales, paralelos y del mismo sentido, los segmentos que unen vértices homólogos son iguales, paralelos y del mismo sentido y los polígonos podrán coincidir por traslación.*

F. 25.—Se supone que AB es igual y paralelo con A'B', BC con B'C', etc.

D.—Las figuras AA'BB', BB'CC', etc., serán paralelogramos, puesto que AB y A'B' son paralelos e iguales y lo mismo BC y B'C', etc. (164). Luego los segmentos BB', CC', etc., serán paralelos, iguales y del mismo sentido, y si se imprime al polígono ABC una traslación rectilínea que haga recorrer al vértice A el segmento AA', B recorrerá el BB', C el CC', etc., (161) y los polígonos se confundirán.

171 **Escolio**.—Lo dicho respecto a la traslación de polígonos podría aplicarse a figuras curvilíneas.

En particular: *Si por el centro de una circunferencia trazamos un segmento, y haciendo centro en su extremo describimos otra circunferencia igual, todo segmento que una extremos de radios paralelos será igual a la distancia de los centros, y las circunferencias coincidirán por una traslación.* (Figura 48).

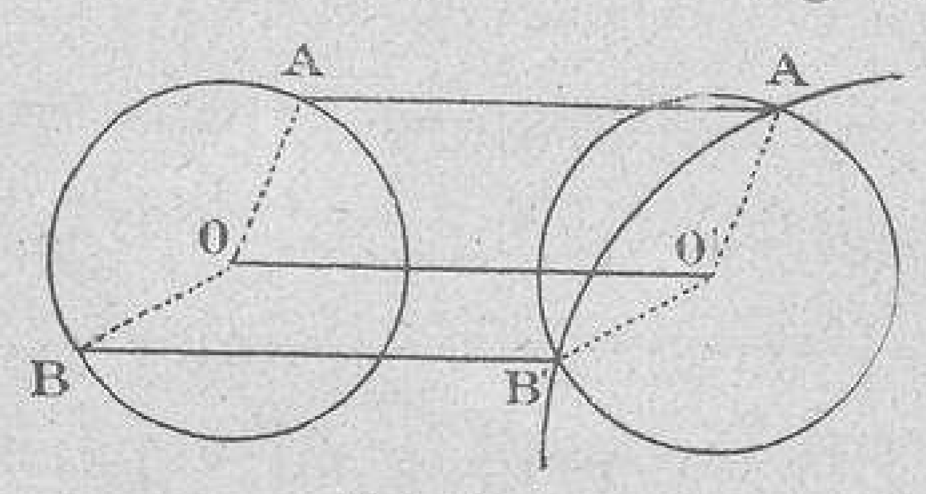

Fig. 48.

Se utiliza esta propiedad para resolver el problema de interceptar entre dos circunferencias dadas un segmento de longitud y dirección determinadas, para lo cual, basta trasladar una de ellas (la O de la fig. 48) en la longitud y dirección fijadas, y los puntos en que la nueva posición (O') corte a la otra circunferencia proporcionarán los extremos de los segmentos (AA' y BB') que resuelven el problema.

172. Igual método puede emplearse con otras líneas. (Apli-

quese al problema de interceptar entre los lados de un ángulo un segmento de tamaño conocido y paralelo a una recta dada).

173. T.—*Los arcos de una circunferencia comprendidos entre rectas paralelas son iguales.*

F 49.—Sea la circunferencia O; y consideremos en ella las tangentes en A y B y las secantes CD y EF, todas paralelas entre sí. Tracemos el diámetro AB perpendicular a ellas, el cual lo será a las tangentes en los puntos de contacto. (107).

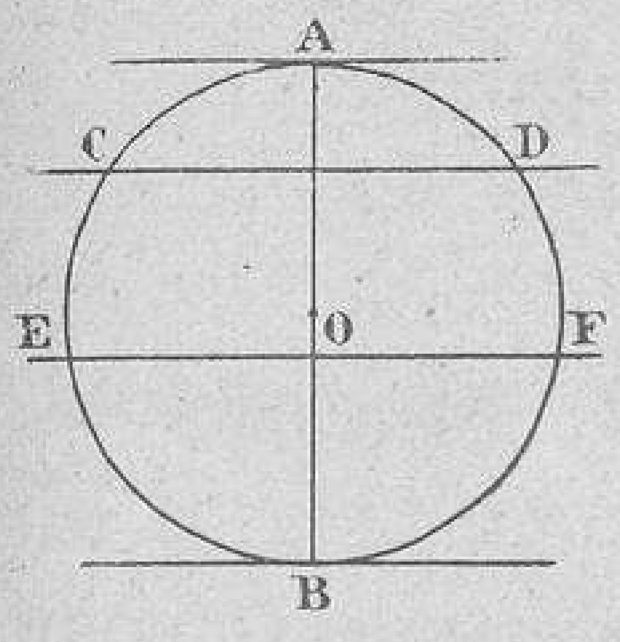

Fig. 49.

D.—Como el diámetro es perpendicular a las cuerdas en su punto medio (93), son simétricos con relación a él C y D, E y F, luego doblando por el diámetro dichos puntos coinciden, y como los A y B no se mueven, los arcos AC y AD; CE y DF; EB y FB coincidirán también, lo que prueba el teorema.

174. R. (condicional).—*Si dos secantes determinan en una circunferencia arcos iguales, y no se cortan dentro del círculo, tampoco fuera; es decir, son paralelas.*

F. 49.—Sean CE y DF los arcos iguales, determinados por las secantes CD y EF que no se cortan dentro del círculo.

D.—La paralela a EF trazada por C debe, según el directo, determinar, a contar de F, un arco igual al EC; pero dicho arco es el FD, luego la paralela pasa por D y se confunde, por tanto, con la CD.

Observación.—Se ha puesto la condición de que las secantes no se corten dentro del círculo, porque fácilmente se ve que uniendo E con D y C con F, sin dejar-se de cumplir la propiedad de ser iguales los arcos, las rectas no serían paralelas.

§ II

# Trazado de paralelas

175. **Problema.**—*Por un punto trazar la paralela a una recta.*

Fundamento 1.º—Sabiendo que las paralelas coinciden por traslación, se justifica el siguiente método, en que se emplean la regla y la escuadra o cartabón (que es un triángulo rectángulo de madera u otra substancia apropiada).

Contrucción 1.ª—Se coloca la escuadra de modo que la hipotenusa coincida con la recta, y se adapta a uno de los catetos una regla. Trasladando la escuadra a lo largo de la regla sin dejar de ajustarse a ella, cuando la hipotenusa llegue al punto dado tendrá una posición paralela a la primitiva, y se podrá trazar, resbalando por su borde, la recta pedida. (Practíquese en varias posiciones).

176. Fundamento 2.º—Las rectas que forman con una secante ángulos alternos internos iguales, son paralelas. Además, dos ángulos son iguales si lo son sus arcos correspondientes de igual radio: y los arcos lo serán si lo son las cuerdas. De aquí resulta la

CONSTRUCCIÓN 2.ª—(F. 50). Haciendo centro en el punto dado A, con radio manifiestamente mayor que su distancia a la recta, se describe un arco CD que corte a ésta y se prolongue hacia la región en que se halla el punto A. Con el mismo radio y tomando por centro el punto C de intersección de la recta con el arco primeramente trazado, se describe otro, BA, comprendido entre el punto y la recta. Tomando la cuerda de éste con el compás y llevándola sobre el otro arco se le limitará en D y uniendo los extremos de los dos arcos se obtendrá la paralela; porque imaginando la secante AC, los ángulos 1 y 1' son iguales.

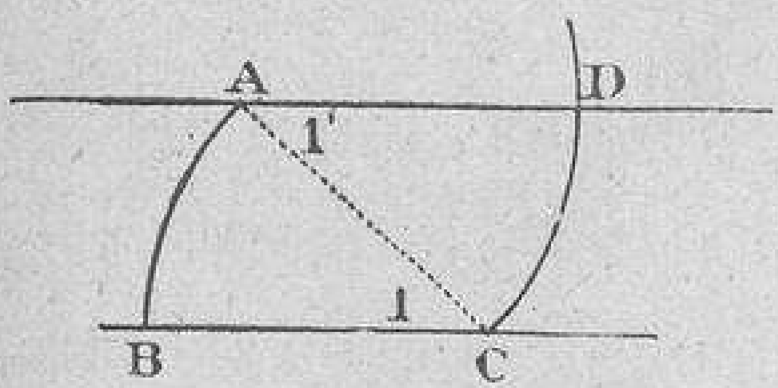

Fig. 50.

177. FUNDAMENTO 3.º—Lo constituye el teorema recíproco del número 174.

CONSTRUCCIÓN 3.ª—(F. 49). Trazando una circunferencia que pase por el punto dado, C, y corte a la recta, EF, se toma a partir de ésta el arco FD igual al EC comprendido entre el punto y la recta, y se unen los extremos de ambos arcos.

178. El problema anterior, los ya conocidos, y el lugar geométrico del núm. 160 permiten resolver los problemas que siguen:

*a)*—Por un punto exterior a una recta, trazar otra que forme con ella un ángulo dado. (Se comienza por formar un ángulo, igual al dado, en cualquier punto de la recta).

*b)*—Construir un triángulo sobre una base dada, conociendo, además, un ángulo básico y la altura (160).

*c)*—Sobre una base dada, construir un triángulo conociendo la mediana y la altura relativas a la base.

*d)*—En una circunferencia, trazar una tangente paralela a una recta dada.

*e)*—Trazar, a una circunferencia, una tangente que forme con una recta dada un ángulo conocido.

*f)*—En una circunferencia, trazar una cuerda de tamaño fijo y paralela a una recta (112).

*g)*—Trazar una circunferencia de radio conocido, que pase por un punto fijo y sea tangente a una recta dada (160).

*h)*—Trazar una circunferencia de radio conocido y tangente a dos rectas dadas.

*i)*—Trazar, con radio dado, una circunferencia tangente a otra y a una recta dadas.

CAPÍTULO VI

§ I

# Angulos en los polígonos y en el círculo

179.—*La suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano.*

F. 51.—Sea ABC el triángulo. Por un vértice A, tracemos la paralela al lado opuesto.

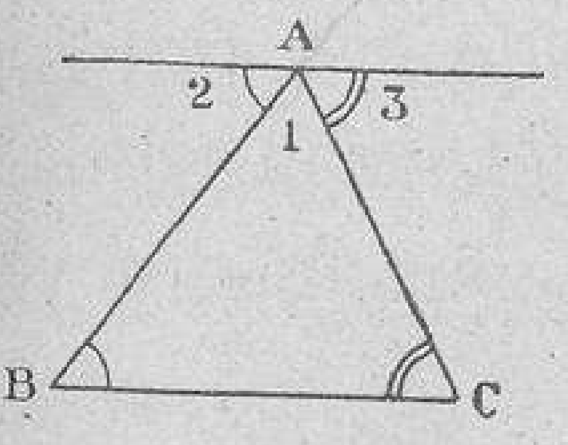


Fig. 51.

D.—

$\hat{1} = \hat{A}$ (evidente)

$\hat{2} = \hat{B}$ (alts. internos; secante. AB)

$\hat{3} = \hat{C}$ ( íd. íd. íd. AC)

$$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3} = \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$$

Pero la primera suma es un llano, luego también la segunda.

180. **Corolarios.** 1.º—*Los tres ángulos de un triángulo son suplementarios, o cada uno suplemento de de la suma de los otros dos.*

181. 2.º—*Conocidos dos ángulos de un triángulo, queda determinado el tercero.*

182. 3.º—*Dos triángulos tales que los lados del uno sean paralelos o perpendiculares a los del otro, tienen sus ángulos iguales.*

Porque los ángulos de lados paralelos o perpendiculares son iguales o suplementarios, (165 y 68); pero suplementarios no pueden ser ni los tres pares de ángulos ni tampoco dos pares, puesto que entonces la suma de los 6 ángulos (3 de cada triángulo) excedería de 2 llanos; luego habrá dos ángulos de un triángulo iguales a dos del otro, lo que exige que lo sean los terceros.

183. 4.º—*El triángulo rectángulo y el que tenga un ángulo obtuso, tienen los otros dos ángulos agudos.*

Observación.—La hipotenusa es mayor que los catetos y el lado opuesto al ángulo obtuso mayor que los opuestos a los otros lados; porque a mayor ángulo se opone mayor lado. (89).

184. 5.º—*Cada ángulo agudo de un triángulo rectángulo es complemento del otro.* Conocido uno de ellos, quedan determinados los tres ángulos del triángulo. Si éste fuera isósceles, cada uno de los ángulos agudos valdría 45º.

185. 6.º—*Dos rectas que forman con otra ángulos colaterales no suplementarios se cortan del lado en que la suma de dichos ángulos es inferior a dos rectos.*

En consecuencia: las bisectrices de dos ángulos interiores de un triángulo se cortan, y también las de los externos adyacentes a ellos, por ser perpendiculares a las interiores (155): como se había anticipado. (137).

186. 7.º—Si desde un punto de un lado de un ángulo agudo se traza una perpendicular al otro lado, cae en el interior del ángulo; y al contrario si fuese obtuso.

Por tanto, un triángulo de ángulos agudos tiene las tres alturas interiores, y si hay un ángulo obtuso, dos alturas son exteriores. (Conviene hacer la figura.)

187. 8.º—*De dos oblicuas trazadas desde un punto*

*a una recta, es mayor aquella cuyo pie esté más distante del pie de la perpendicular trazada desde aquel mismo punto.*

(F. 23). —Porque en el triángulo ADE el lado AE, opuesto al ángulo obtuso ADE es mayor que el lado AD que se opone a un ángulo agudo.

Observaciones.—Si se considerasen oblicuas a distinto lado de la perpendicular, se tomaría la simétrica de una de ellas, que le es igual por tener sus pies equidistantes del de la perpendicular, (80 ), y se recaería en el caso anterior.

El recíproco es cierto: porque si una oblicua mayor que otra no tuviese el pie más alejado del de la perpendicular, lo tendría a igual o a menor distancia, y debería ser igual (80) o menor, lo que contradice la hipótesis de ser mayor.

188. 9.º—*Un ángulo externo de un triángulo, es igual a la suma de los internos no adyacentes a aquél.*

F. 51.—Sea el externo ACD. (*) Los internos no adyacentes a él serán los A y B.

D.— $\left.\begin{array}{l} \widehat{ACD} + \widehat{C} = 1 \text{ llano} \\ (\widehat{A} + \widehat{B}) + \widehat{C} = 1 \text{ llano} \end{array}\right\}$ luego $\widehat{ACD} = \widehat{A} + \widehat{B}$

Observación.—El ángulo externo adyacente al del vértice de un triángulo isósceles es *doble* de uno de los básicos.

189. *La suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo es igual a dos llanos.* (4 rectos).

(*) Por errata en la figura no está en ella la letra D. Prolónguese BC y escríbase D en dicha prolongación.

Porque trazando una diagonal resultan dos triángulos cuyos ángulos componen los del cuadrilátero; y los de cada triángulo suman 1 llano.

190. **Corolario.**—Si un cuadrilátero tiene dos ángulos rectos, los otros dos son suplementarios.

191. *Los ángulos contiguos de un paralelogramo suman 1 llano.* Por colaterales internos entre paralelas. (La secante es el lado que une los vértices de los ángulos considerados). (F. 46-ángulos A y C).

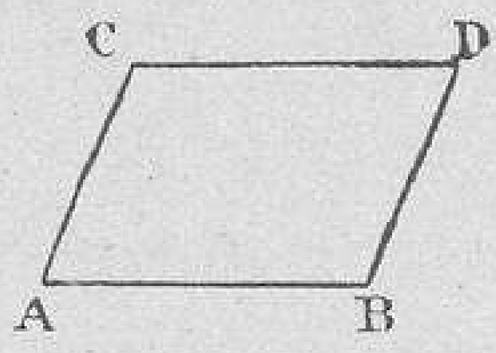

Fig. 46.

192. **Corolarios.**—1.º—Los ángulos *opuestos de un paralelogramo son iguales.* (F. 46). Porque lo mismo al uno, A, que al otro, D, le falta para un llano uno de los otros ángulos, por ejemplo: B.

193. **Escolio.**—Los ángulos opuestos de un paralelogramo no pueden ser suplementarios más que siendo rectos, es decir en el rectángulo y en el cuadrado.

194. R.—*Si los ángulos contiguos de un cuadrilátero convexo son suplementarios, el cuadrilátero es paralelogramo.*

Porque si los ángulos colaterales que forman dos rectas con una secante son suplementarios, aquéllas son paralelas.

195. **Corolario.**—*Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero convexo son iguales, el cuadrilátero es paralelogramo.*

F. 46.—Porque si los cuatro ángulos suman dos llanos, dos no opuestos, es decir, contiguos, A y C, sumarán 1 llano, y recaeremos en el teorema precedente.

196. *La suma de los ángulos de un polígono convexo, vale tantos llanos como lados queden al polígono suprimiéndole dos.*

Porque descompuesto el polígono en triángulos por medio de las diagonales que parten de un vértice, se sabe que resultan dos triángulos menos que lados, (51). Sus ángulos, que forman los del polígono, valdrán otros tantos llanos. (Hágase la figura).

OBSERVACIÓN.—Aunque la descomposición en triángulos se hiciese de otro modo, v. gr.: tomando un punto interior, se puede comprobar que la suma de ángulos sería la misma.

EJERCICIO.—Decir cuántos llanos y cuántos rectos suman los ángulos de un exágono, de un decágono y de un polígono de 15 lados.

Expresarlo por medio de una fórmula en que el número de lados se exprese por $n$.

197. *La suma de los ángulos externos* (49), *de un polígono convexo es siempre igual a dos llanos* (4 rectos).

Porque siendo cada externo adyacente de un interno, entre todos los internos y externos sumarán tantos llanos como lados tiene el polígono; pero a la suma de los internos le falta 2 llanos para llegar a esa misma cantidad, luego esos 2 llanos sumarán los externos.

198. **Escolios.**—No puede haber en un polígono convexo más de tres ángulos externos obtusos, y, por tanto, tampoco más de tres internos agudos.

El triángulo es el único polígono convexo cuyos ángulos pueden ser todos agudos.

§ II

# Angulos en el círculo

199. *El ángulo semi-inscripto tiene igual medida que la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Conviene distinguir tres casos: 1.° Que el ángulo sea recto. 2.° que sea agudo; y 3.° que sea obtuso.

F. 52.—En esta figura se tienen el ángulo recto ACD; el agudo ACE y el obtuso BCE, todos semi-inscriptos. Se ha trazado, además, el diámetro FF' perpendicular a CE.

D.—1.° Si el ángulo es recto, tendrá igual medida que el cuadrante (76) y como el cuadrante es mitad de la semicircunferencia CED comprendida entre los lados del ángulo, queda demostrado el teorema.

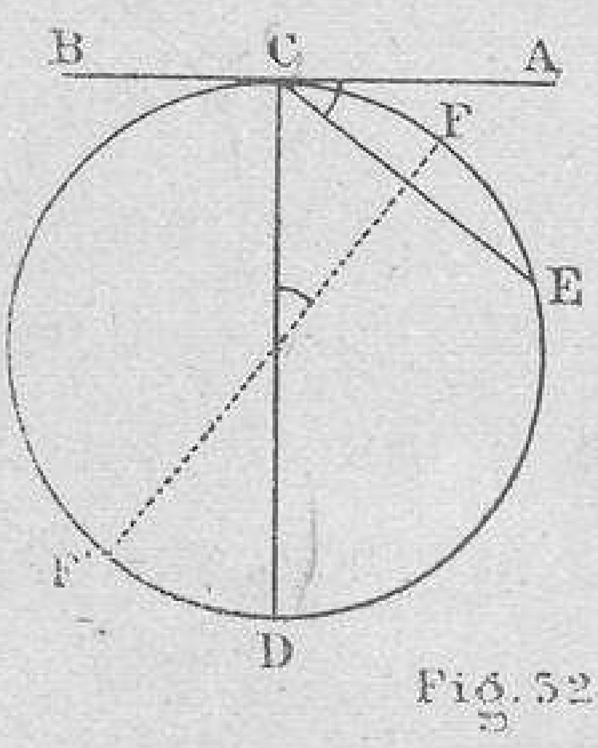

Fig. 52

2.° Un ángulo agudo ACE tiene la misma medida que su igual COF, y éste la misma que el arco CF, y como dicho arco es mitad del CE, queda demostrado el teorema.

Detalles.—ACE = COF por tener sus lados perpendiculares y ser ambos agudos. (El COF tiene que serlo por pertenecer a un triángulo rectángulo). El arco CF es mitad del CE porque el diámetro perpendicular a una cuerda divide a su arco en partes iguales.

3.° Si se trata del ángulo obtuso BCE se razonará como en el caso anterior, pero considerando el ángulo central COF'.

200. **Escolios.** 1.° Las dos tangentes trazadas en los extremos de una cuerda (hacia la misma región), forman con ella ángulos iguales. (Hágase la figura). Porque tienen igual medida.

2.° Del lado en que dichas tangentes se cortan, forman con la cuerda un triángulo isósceles. Es un nuevo enunciado del anterior.

3.° Ahora se comprueba que si desde un punto se tienen trazadas a una circunferencia dos tangentes, son iguales. (V. el núm. 133.)

201. *El ángulo inscripto tiene igual medida que la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

F. 53.—Sea el ángulo inscripto ABC, y tracemos por su vértice la semirrecta BD, tangente a la circunferencia.

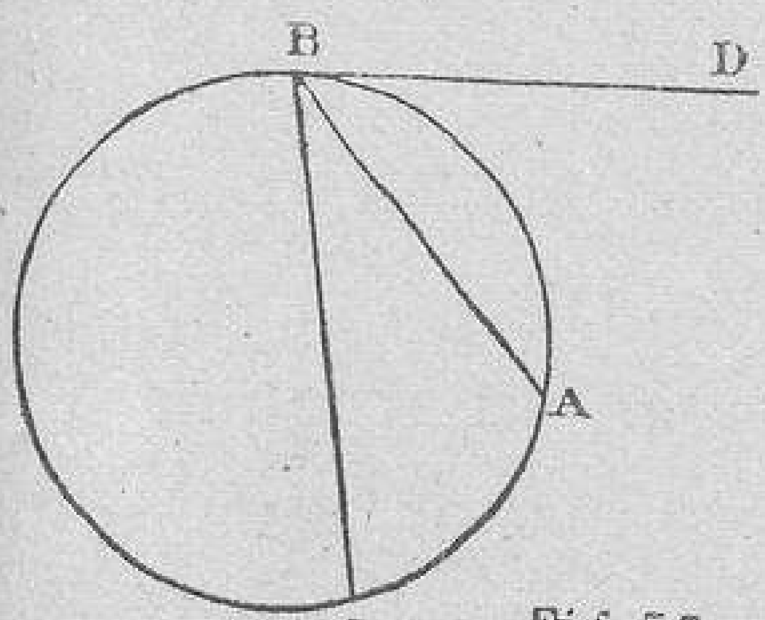

Fig. 53.

D.—

$$\widehat{ABC} = \widehat{DBC} - \widehat{DBA}$$

luego la medida del primero se obtendrá restando las de los segundos, que se conocen por ser semi-inscriptos (199).

Luego

$$\text{med. } ABC = \text{med.} \left( \frac{BC}{2} - \frac{BA}{2} \right) = \text{med. } \frac{AC}{2}.$$

202. **Corolarios.** 1.° *Todos los ángulos inscriptos cuyos lados pasen por los extremos de un mismo arco, son iguales.* Puesto que tienen igual medida.

203. 2.° *Todos los ángulos inscriptos en un mismo arco, es decir, que tienen su vértice en el arco y cuyos lados pasan por los extremos del mismo, son iguales.*

Porque tienen igual medida que el arco comprendido entre sus lados, el cual es lo que le falta al arco en que el ángulo está inscripto para completar la circunferencia. (Así el ángulo ABC, inscripto en el arco de igual nombre, tiene igual medida que el arco AC).

El arco en que puede inscribirse un ángulo se llama arco *capaz* de este ángulo.

204. 3.° *El ángulo formado uniendo los extremos de un diámetro con un punto de la circunferencia es recto.* Porque su medida es la de un cuadrante, (mitad de la semicircunferencia que comprenden los lados). (Véase haciendo la figura).

Puede enunciarse esto de otro modo: *el triángulo inscripto cuya base sea un diámetro, es rectángulo.* Se ve que en él, *la mediana que parte del vértice del ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.*

205 4.° Un ángulo inscripto en un arco es agudo, recto u obtuso, según sea el arco mayor, igual o menor que una semicircunferencia. Porque el arco comprendido entre los lados será, inversamente, menor, igual o mayor que una semicircunferencia, y su mitad menor, igual o mayor que un cuadrante.

El recíproco es cierto (64).

206. 5.° Los ángulos inscriptos en dos arcos que completen una circunferencia son suplementarios.

207. Se puede enunciar de otro modo: *los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscripto son suplementarios.*

208. *El ángulo interior tiene igual medida que la mitad de la suma de los arcos comprendidos por él y por su opuesto por el vértice.*

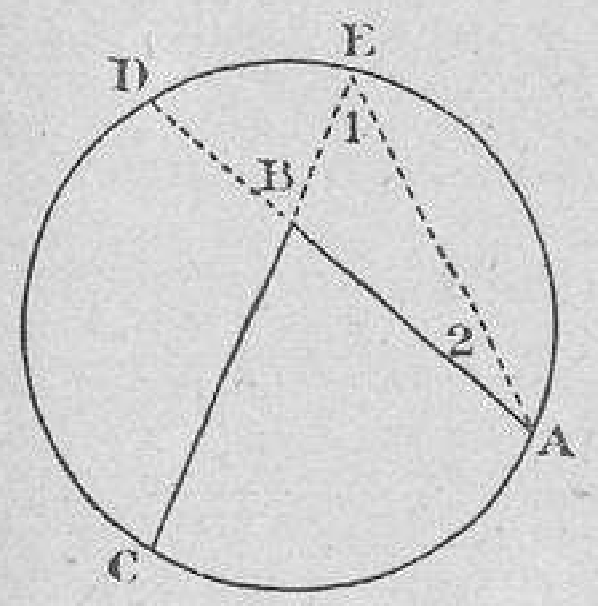


Fig. 54.

F. 54.—Sea ABC el ángulo, EBD su opuesto por el vértice, y 1 y 2 los ángulos del triángulo que se forma uniendo E con A, no adyacentes al dado.

D.—Por ser ABC externo del triángulo EAB

$$\widehat{ABC} = \widehat{1} + \widehat{2} \text{ (188)}$$

luego la medida del primero se obtendrá sumando las de los últimos, que son inscriptos, es decir (201):

$$\text{med. ABC} = \text{med.}\left(\frac{AC}{2} + \frac{DE}{2}\right) = \text{med.}\ \frac{AC + DE}{2}.$$

209. *El ángulo exterior al círculo tiene igual medida que la mitad de la diferencia de los dos arcos comprendidos entre sus lados.*

F. 55.—Sean: ABC el ángulo, y 1 y 2 los no adyacentes a él del triángulo que se forma al unir D con C.

D.—Por ser el $\widehat{1}$ externo del triángulo DCB,

$$\widehat{1} = \widehat{B} + \widehat{2} \quad \text{(188)}$$

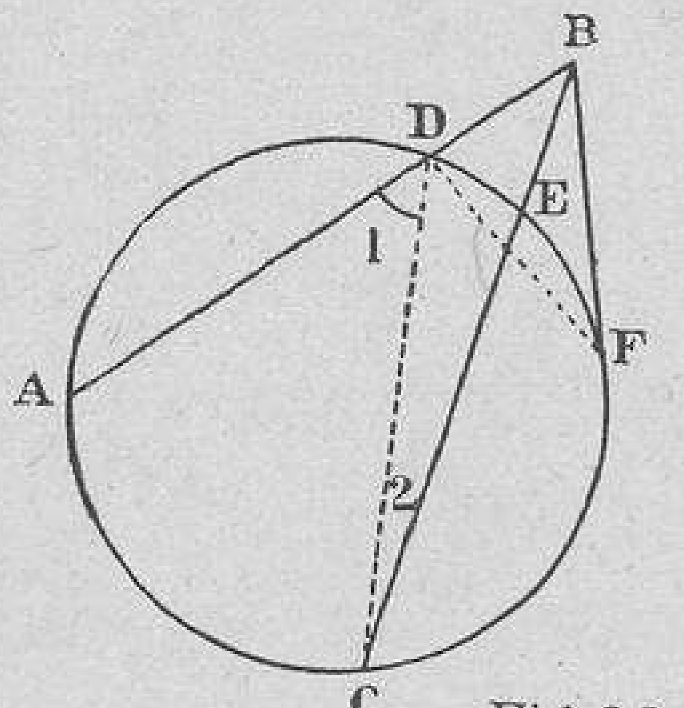


Fig. 55.

y disminuyendo los dos miembros de la igualdad en el ángulo 2,

$$\widehat{1} - \widehat{2} = \widehat{B}, \text{ o bien, } \widehat{B} = \widehat{1} - \widehat{2}$$

y como estos últimos son inscriptos, (201)

$$\text{med. } \widehat{B} = \text{med. } \left( \frac{AC}{2} - \frac{DE}{2} \right) = \text{med. } \frac{AC - DE}{2}.$$

**Escolio.** Si alguno de los lados del ángulo fuese tangente a la circunferencia, en vez de los ángulos inscriptos considerados habría otros semi-inscriptos, pero la demostración es en todo análoga.

Observación general.—Los teoremas anteriores suponen que se toma por unidad de arcos el correspondiente al ángulo que sirva de unidad de ángulos.

210. **Problemas.** 1.° *Dadas: la base de un triángulo y el valor del ángulo opuesto, hallar el lugar geométrico del vértice de este ángulo.*

F. 56.—Sean: A el ángulo dado, y BC la base fija.

Análisis.—Hay que buscar un arco, *capaz* del ángulo A, que tenga por extremos B y C, es decir, un arco perteneciente a una circunferencia que pase por B y C, y tal, que todo ángulo inscripto en él sea igual al A. El centro de esa circunferencia debe estar, por consiguiente, en la mediatriz de BC. Además, suponiendo ya resuelto el problema, la mitad del arco BMC, que cae a una de las regiones, tendría la misma medida que el ángulo A (201), o que otro cualquiera igual a él, como sucede con el semi-inscripto formado por BC y la tangente BD. Hay, pues, que trazar la circunferencia que pasa por BC

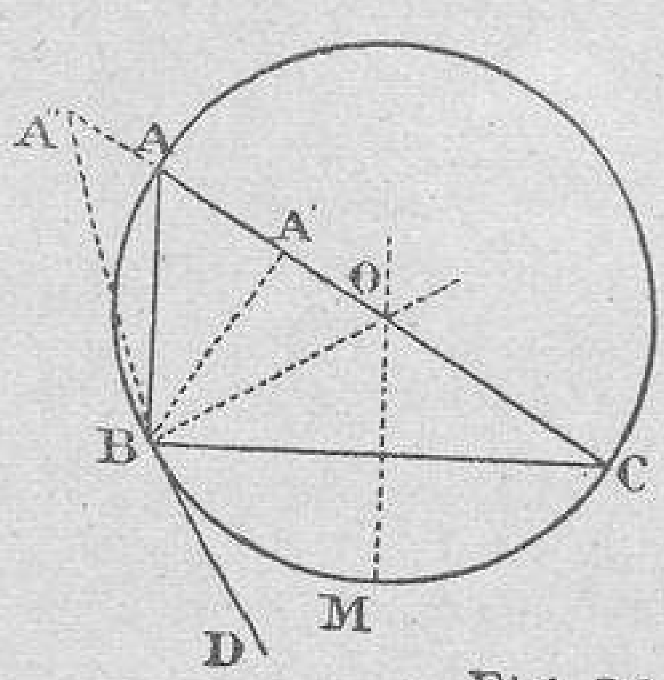

Fig. 56.

de modo que sea tangente a la recta BD en el punto B; por lo cual el centro se hallará sobre la perpendicular, en B, a BD. Luego

Síntesis—Hacia la región opuesta a aquella en que ha de caer el vértice A, construyamos el ángulo CBD igual al dado. Tracemos la mediatriz de BC, y la perpendicular a BD en su punto B, y el punto, O, de encuentro será el centro de una circunferencia de radio OB, cuyo arco BAC es capaz del ángulo dado.

Todo triángulo cuyo vértice esté sobre este arco tiene el ángulo A del tamaño pedido. Y todo triángulo cuyo vértice esté dentro o fuera (pero en igual región respecto a BC), como el A′ o el A″ no tendrá estos ángulos iguales al inscripto A (208 y 209), luego el arco BAC es el lugar geométrico pedido por una región (la superior) de las que determina BC. El arco simétrico constituirá el resto del lugar.

Observación.—El arco BMC y su simétrico constituyen el lugar geométrico del vértice de los triángulos que teniendo por base BC, tengan el ángulo opuesto *suplementario* del A (206).

211. Apoyándose en el anterior problema, se resuelven los siguientes:

*a)*—Construir un triángulo rectángulo conociendo su base. (Indeterminado).

*b)*—Construir un triángulo rectángulo *isósceles* conociendo su base. (El vértice está en la mediatriz de la base).

*c)*—Construir un triángulo isósceles conociendo la base y el ángulo opuesto.

*d)* — Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.

*e)*—*Trazar desde un punto exterior a una circunferencia tangentes a ella.* Basta construir el triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa la distancia del punto al centro de la circunferencia, y por cateto, que arranca del centro, el radio de la circunferencia dada (problema anterior). Hay dos soluciones, y, por tanto, dos tangentes, cuyas propiedades se pueden recordar leyendo el núm. 133.

*f)*—Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo, (formado, por consiguiente, en un extremo de la hipotenusa).

*g)*—Construir un triángulo dada la base, el ángulo opuesto y la altura. (Obsérvese que la altura expresa la distancia entre el vértice desconocido y la base, y recuérdese el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta). (160).

*h)*—Construir un triángulo dadas la base, el ángulo opuesto y la mediana correspondiente, (que expresa la distancia entre el vértice desconocido y el punto medio de la base).

*i)*—Trazar la perpendicular en el extremo de una semirrecta. (Constrúyase un triángulo rectángulo inscripto en una circunferencia que teniendo el centro fuera de la semirrecta, corte a ésta y pase por su extremo).

212. 2.º—*Trazar las tangentes comunes a dos circunferencias.* Supongamos resuelto el problema. Sean: T una tangente común exterior, y *t* una tangente común interior; O'A y OB los radios que van a los puntos de contacto de la primera, y O'C y OD los que terminan en los puntos de tangencia de la segunda.

ANÁLISIS.—En la figura se advierte que si se imprime a la tangente T una traslación paralela, tal que A venga a O', la nueva posición O'B' será tangente a una circunferencia concéntrica con O y cuyo radio, OB', sea la diferencia entre los de las circunferencias dadas.

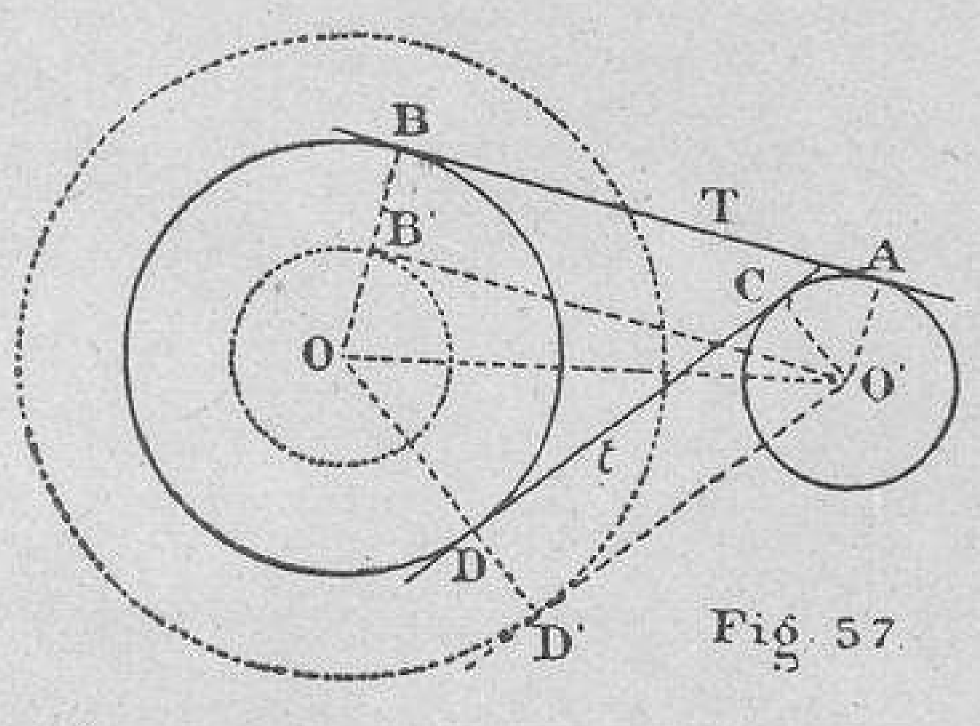


Fig. 57

Análogamente, por traslación paralela la tangente *t* tomará la posición O'D' en que toca a la circunferencia de radio OD' igual a la suma de los radios de las circunferencias dadas. Luego

SÍNTESIS.—Concéntricas con la circunferencia O, tárcense dos circunferencias auxiliares cuyos radios sean suma y diferencia de los de las circunferencias propuestas; y bastará trazar desde O' las tangentes a las circunferencias auxiliares para que los radios, OB', OD.... ,que van a los puntos de tangencia determinen sobre la circunferencia O los puntos en que la tocan las tangentes comunes, T, *t*, etc.

DISCUSIÓN.—Designando por R y $r$ los radios de las circunferencias dadas, los de las auxiliares serán $R+r$ y $R-r$, y si se indica por D la distancia entre los centros, resultará:

Si $D>R+r$, caso en que las circunferencias son exteriores (104) será, claro está, $D>R-r$, luego el punto O' estará a una distancia del O mayor que los radios de las circunferencias auxiliares, por lo cual se podrán trazar dos tangentes a cada una de éstas, (211, problema *e*) y habrá cuatro comunes a las dadas.

Si $D=R+r$, caso en que las circunferencias propuestas son tangentes exteriormente, estará O' sobre la circunferencia auxiliar mayor, y sólo existirá una tangente a ella, y, en consecuencia, otra común interior para las dadas; pero aún será $D>R-r$ y habrá dos tangentes comunes exteriores.

(Examine el lector por sí solo los casos en que $D<R+r$ pero $>R-r$; $D=R-r$, y, $D<R-r$; y forme un cuadro completo de la discusión.—Conviene hacer las figuras).

Teniendo en cuenta el problema anterior se pueden resolver los que siguen:

*a)* Dadas dos circunferencias trazar una secante que intercepte en cada una de ellas una cuerda de tamaño conocido. (Consúltese el número 112).

*b)* Dados dos círculos, a un mismo lado de una recta, hallar sobre ésta un punto tal que las tangentes trazadas por él a los círculos formen ángulos iguales con cada semirrecta de las que el punto determina. (Se toma el círculo simétrico de uno de los dados con relación a la recta).

CAPÍTULO VI

# Construcción e igualdad de polígonos

213. Para que pueda construirse un triángulo conociendo las longitudes de sus lados, es preciso que *la mayor de estas longitudes sea menor que la suma de las otras dos.*

Porque una vez construído dicho triángulo, tendría que ser el mayor lado, que es una recta, menor que la suma de los otros dos, que forman una línea quebrada.

Además si llamamos $a$, $b$ y $c$ a los lados siendo $a > b > c$ y se verifica que $a < b + c$, también será $b < a + c$, (puesto que $b < a$), y $c < a + b$ (por ser $c$ menor que $a$ y que $b$), es decir:

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

De la primera desigualdad se saca, disminuyendo en $b$ los dos miembros, $a - b < c$, o sea $c > a - b$; de la misma se obtiene, disminuyendo en $c$ ambos miembros, $a - c < b$ o sea $b > a - c$; y de la segunda desigualdad, restando $c$ de ambos miembros, $b - c < a$ o sea $a > b - c$; luego, en resumen, de ser ciertas las precedentes desigualdades se desprende que lo son éstas:

$$c > a - b$$
$$b > a - c$$
$$a > b - c$$

214. Y unas y otras nos dicen que: *en todo triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia;* pero, según se ha visto, de esto nos aseguramos con sólo cerciorarnos de que *el mayor* lado sea menor que la suma de los otros dos.

EJERCICIO.—Decir si podrá existir un triángulo cuyos lados tengan por medida, en metros, los números 8, 5 y 7; y otro en que sean 8, 5 y 3 u 8, 5 y 2.

215.—Para que se pueda construir un triángulo conociendo algunos de sus ángulos es preciso que éstos sumen menos de dos rectos (179).

216. *Construir un triángulo igual a otro dado; y construir un triángulo con ciertos elementos.*

Distinguiremos varios casos, según los elementos que tomemos para copiar el triángulo dado.

1.º *Utilizamos dos lados y el ángulo que forman.*

F. 58.—Sean: ABC el triángulo dado; *a*, *b*, *c*, sus lados y *b*, *c*, $\hat{A}$, los elementos que tomamos para la construcción.

Tracemos un segmento de igual tamaño que el *c*, y fijemos cuál de sus extremos ha de corresponder al A. Suponiendo que sea el de la izquierda (según miramos) señalémosle con la letra A′, y al otro con B′. Se dirá entonces que A′ es *homólogo* de A, B′ de B, y A′B′ de AB.

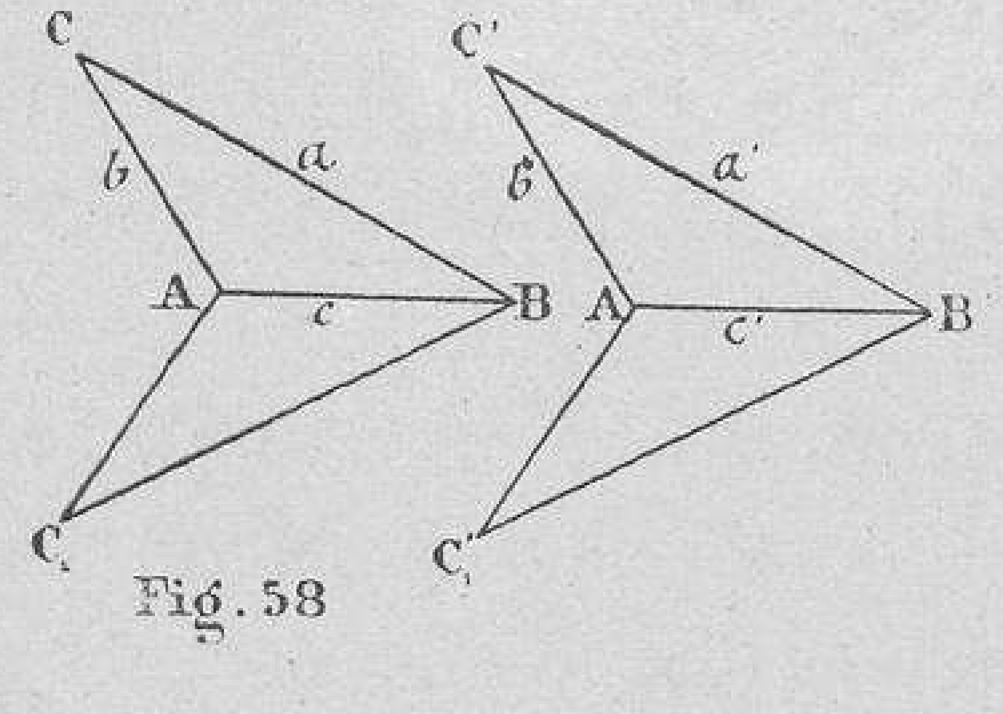

Fig. 58

Por A′ tracemos una semirrecta que forme con A′B′ un ángulo igual al A y que caiga a la misma mano de

A'B' que aquella a que cae C cuando se recorre AB desde A hacia B. Midamos sobre la semirrecta dicha un segmento igual a *b*, y obtendremos el lado A'C' homólogo del AC; con lo cual estarán fijados los tres vértices del triángulo A'B'C' y bastará, para acabarle, unir C' con B'.

El triángulo así construído es, indudablemente, reproducción exacta del ABC o *directamente igual* a él.

Pero si, después de comenzar del mismo modo, al construir el ángulo A se hace de manera que el tercer vértice C' caiga a distinta mano que aquella a que se encuentra C con relación a AB cuando este segmento se recorre de A hacia B, se obtendrá un triángulo A'B'C', que no será ya reproducción exacta del ABC, sino de su simétrico $ABC_1$. El $A'B'C'_1$ será pues, directamente igual al $ABC_1$ e inversamente igual al ABC.

Si en vez de dársenos el triángulo ABC para tomar directamente sobre él los lados *a*, *b* y *c* y el ángulo A, se nos diesen solamente estos elementos, es decir, dos segmentos separados, *b* y *c*, y, aparte, un ángulo A, al ir a construir el triángulo con estos datos, y una vez trazado el lado A'B', nos asaltará la duda de si el otro lado caía a la izquierda o a la derecha de éste, y podríamos, según la elección hiciésemos, obtener el triángulo A'B'C' o el $A'B'C'_1$.

Mas si consideramos éstos, no como distintos triángulos, sino sólo como diferentes posiciones de uno mismo, podremos decir que: dados dos lados de un triángulo y el ángulo que forman, se puede construir el triángulo y éste es *único*. Lo cual nos autoriza para establecer el siguiente:

PRIMER CASO DE IGUALDAD.—Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo formado por ellos. (*)

Porque ambos triángulos se podrían considerar como uno solo en dos distintas posiciones.

2.° *Se utilizan un lado y los ángulos formados en sus extremos por los otros lados.*

F. 58.—Sean: ABC el triángulo y *c*, A y B los elementos elegidos.

Tomemos un segmento igual al *c*, y fijemos en A' y B' los puntos homólogos o correspondientes de A y B. En A' construyamos un ángulo igual al A, y en B' otro igual B, y según hagamos esta construcción de modo que estos lados vayan a cortarse en un punto situado con respecto a A'B' a la misma o a distinta mano que aquella en que está C con relación a AB (recorriéndose A'B' de A' a B' y AB de A a B), obtendremos un triángulo A'B'C' directamente igual al ABC, u otro $A'B'C_1$ inversamente igual.

Cuando se dan aisladamente los elementos *c*, A y B, pero no el triángulo ABC, no sabremos cuál de los dos triángulos A'B'C' o $A'B'C'_1$ habrá de construirse, pero considerándolos como distintas posiciones de uno mismo, podremos decir:

SEGUNDO CASO DE IGUALDAD.—Dos triángulos son

(*) Entiéndese al decir *respectivamente*, que los dos lados de un triángulo sean iguales, uno por uno, a dos del otro, y el ángulo que forman los primeros igual al que forman los segundos.

iguales, si tienen respectivamente iguales un lado y dos ángulos.

Porque teniendo iguales dos ángulos cualesquiera, tienen iguales los tres, y, de consiguiente, los dos formados en los extremos del lado igual, y entonces todos los triángulos construidos con los elementos cuya igualdad se conoce podrían suponerse como diversas posiciones de un mismo triángulo.

3.° *Se utilizan dos lados y el ángulo opuesto* **al mayor.**

F. 59.—Sean: ABC el triángulo y A, *a* y *b* los elementos elegidos, suponiendo que el lado *a es mayor que b.*

En A' construyamos un ángulo igual al A y sobre uno de sus lados tomemos A'C' = *b* procediendo además de tal suerte que C' caiga a igual mano del otro lado A'X que C con relación a AB.

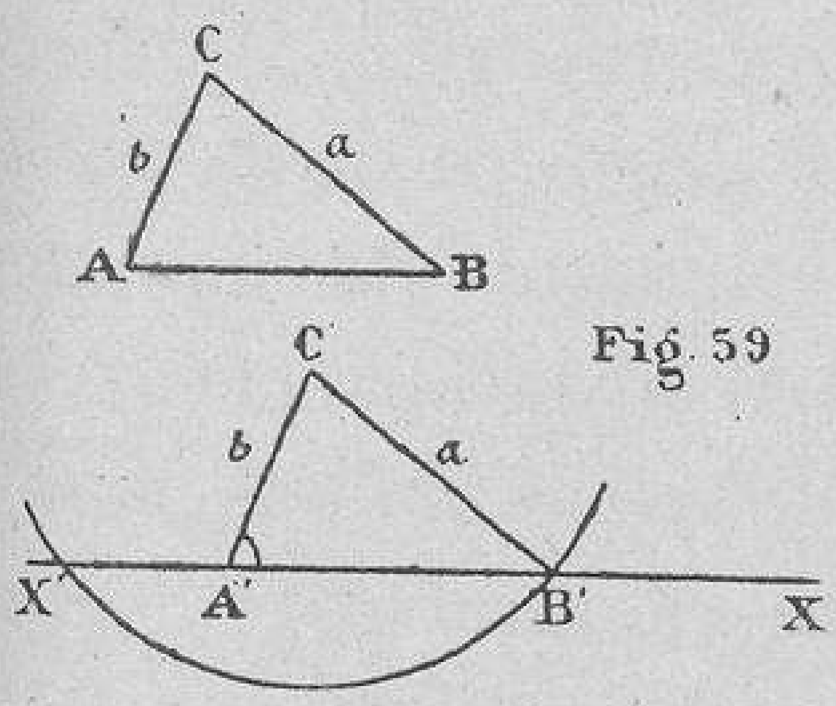

Fig. 59

Si en C' se hace ahora centro, y con el lado *a* por radio se describe un arco, cortará a la semirrecta A'X en un punto B' que es el tercer vértice del triángulo que se construye. Verdad es que el arco trazado corta, en general, en dos puntos a la recta indefinida XX', pero el de la izquierda de A' no proporciona solución, porque el ángulo del triángulo ha de ser el A', y no su adyacente. Además, en la hipótesis de ser $a > b$, el punto A' será *interior* a la circunferencia de radio *a*, y, por consiguiente, uno de los puntos de intersección (el B') caerá en la semirrecta A'X y el otro en la A'X'; mas habiéndose manifestado que éste no da solución, resulta, que, *en la región superior a* A'B', hay *un solo* triángulo igual al ABC.

Construyendo el ángulo A' en la región inferior de A'B' se obtendría, como en los casos anteriores un triángulo *inversamente* igual al ABC, pero si ambos se toman como dos distintas posiciones de un solo triángulo, podrá admitirse el

TERCER CASO DE IGUALDAD.—Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales dos lados y el ángulo opuesto *al mayor* de ellos.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE.—La restricción impuesta, de que el ángulo conocido sea el opuesto *al mayor* lado, es necesaria. Porque si aconteciese que $a<b$, al describir el círculo de centro C' y radio $a$, el punto A' sería *exterior* al mismo, y, por tanto, los puntos de intersección caerían ambos en una misma de las semirrectas AX' o A'X', y podría, respectivamente. haber *dos* soluciones o *ninguna*, según puede fácilmente comprobar el lector mediante diversas figuras en que A' sea agudo, recto u obtuso, y en que $a$ vaya disminuyendo hasta hacerse igual a $b$, menor que $b$, igual a la distancia de C' a XX', y menor que esta distancia. (Hágase, como ejercicio).

4.° *Se utilizan los tres lados.*

F. 58.—Sean ABC el triángulo y $a$, $b$, $c$ los datos.

Fijado el segmento A'B' como homólogo del AB, se describen haciendo centro en A' y B' con radios respectivamente iguales a $a$ y $b$ dos circunferencias, que se cortarán, y según se tome el punto de intersección que cae a la misma o a distinta mano de A'B' que la en que está C con relación a AB, se obtendrán, como siempre un triángulo directamente igual, y otro inversamente igual al ABC.

Cuando se dan aisladamente los lados *a*, *b*, *c* pero no el triángulo ABC es preciso cerciorarse por anticipado de que está satisfecha la condición de ser el mayor lado menor que la suma de los otros dos (213) pues de lo contrario, no existiría el triángulo. Además habrá duda sobre cuál de los triángulos A′B′C′ o A′B′$C'_1$ debe elegirse, pero considerándolos como uno solo en diversa situación se podrá afirmar el

Cuarto caso de igualdad —Dos triángulos cuyos lados sean respectivamente iguales, son iguales.

217. **Escolios.** 1.° No interviniendo más que lados y ángulos, los casos de construcción e igualdad mencionados son todos los posibles. La igualdad de los tres ángulos no entraña la de los triángulos porque se podría tomar el lado A'B' (fig. 58) de tamaño arbitrario y construir ángulos A′, B′, iguales a los A y B, con lo que también C' sería igual a C, no obstante ser distintos los triángulos.

Obsérvese, pues, que en todos los casos son *tres* condiciones las necesarias para la igualdad de dos triángulos, pero en ellas siempre ha de entrar *un lado*.

218. 2.° Para mejor recordarlos, reuniremos los casos de igualdad en la forma siguiente:

*Dos triángulos son iguales, si tienen respectivamente iguales:*

1.° *Un* lado y *dos* ángulos.

2.° *Dos* lados y *un* ángulo (el formado por ellos).

3.° *Dos* lados y *un* ángulo, opuesto al mayor.

4.° *Tres* lados.

OBSERVACIÓN.—En todos los casos, son ángulos *homólogos* los opuestos a lados homólogos, y viceversa.

219. *Dos triángulos* **rectángulos** *son iguales si tienen respectivamente iguales los elementos siguientes:*

1.° *La hipotenusa y un ángulo agudo.*—Porque el otro ángulo agudo es conocido también, como complemento de aquél, y nos hallamos en el primer caso general de igualdad (218).

2.° *Un cateto y un ángulo agudo.*—Por ser iguales los ángulos rectos estamos en el primer caso general (218).

3.° *Los dos catetos.*—Caso 2.° de los generales (218).

4.° *La hipotenusa y un cateto.*—Por ser la hipotenusa el lado mayor, estamos en el tercer caso del número 218.

OBSERVACIÓN.—Huelga el 4.° caso, pues para tener iguales los tres lados habrían de tener la hipotenusa y un cateto, o los dos catetos.

220. *Dos triángulos* **isósceles** *son iguales si tienen iguales respectivamente los elementos que siguen:*

1.° *La base y un ángulo básico.*—Porque conocido un ángulo básico se conoce el otro, que es igual, y caemos en el caso 1.° (218).

2.° *La base y el ángulo del vértice.*—Conocido el ángulo del vértice, lo es cada uno de los básicos como mitad del suplemento de aquél (180), luego este caso equivale al 1.° del núm. 218.

3.° *Uno de los lados iguales y ángulo del vértice.*—Caso 2.° (218).

4.° *Uno de los lados iguales y un ángulo básico.*— Se conoce el ángulo del vértice, suplemento de la suma de los básicos y se recaé en el caso anterior.

5.° *La base y otro lado.*—Se conocen los tres lados.

Todos estos casos pueden compendiarse en dos, siendo conocidos:

I.—*Un ángulo y un lado.*

II.—*La base y otro lado.*

*Dos triángulos equiláteros son iguales si tienen un lado igual*; porque tendrán los tres (4.° caso del número 218).

221. *Si dos triángulos tienen dos lados iguales, pero el ángulo comprendido no lo es, el tercer lado tampoco; siendo mayor en el triángulo que tenga mayor ángulo; y recíprocamente.*

F. 60.—Sean los triángulos ABC y A'B'C' en que se supone AB = A'B', AC = A'C' y ángulo BAC > > ángulo B'A'C'. Coloquemos A'B'C' de modo que un lado, por ejemplo el A'C', coincida con su igual, AC. Como el ángulo A' es menor que el A, el lado A'B' caerá en lo interior del ángulo A. Unamos B con B' y tracemos la mediatriz de BB'.

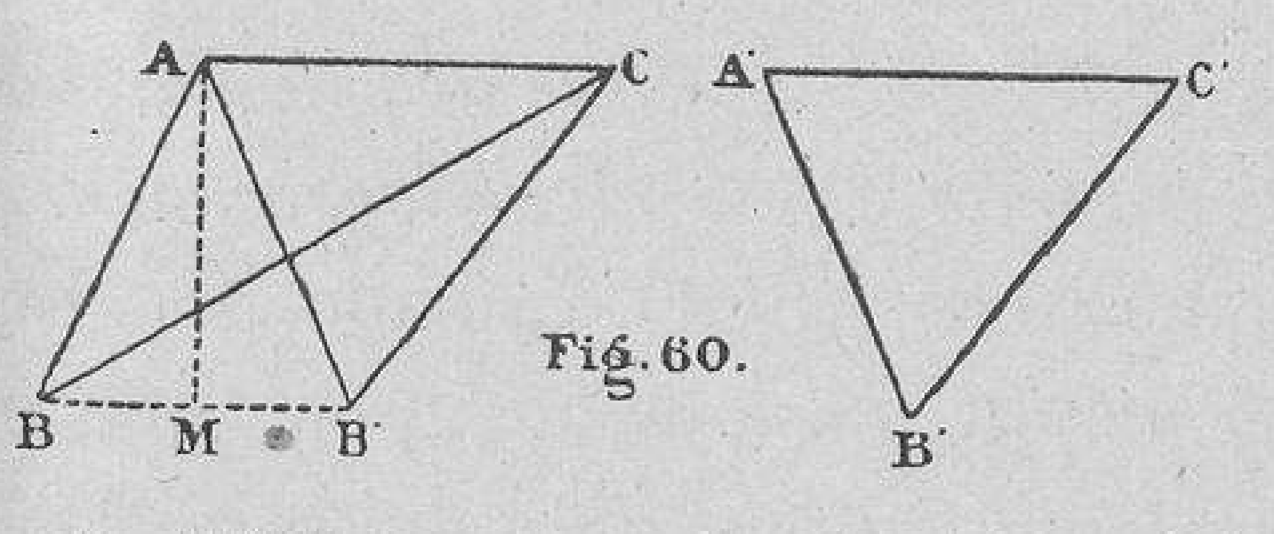

Fig. 60.

D.—La mediatriz de BB' pasará por el vértice A del triángulo BAB', que, según la hipótesis, es isósceles. Las rectas AC y AB' quedan a un lado de dicha mediatriz AM, y la AB al otro, luego igual sucede con los puntos C, B′ y B, y esto prueba que la distancia CB′ es menor que CB (83.-Obs.)

DETALLE.—Los ángulos CAB', CAM, CAB van en orden creciente de magnitud, y por eso quedan AC y AB' a un lado de AM y AB al otro.

222. T.—*Los dos triángulos en que un paralelogramo queda dividido por una de sus diagonales, son iguales.*

F. 61.—Sean el paralelogramo ABCD y la diagonal DB.

D.—Los triángulos ABD y DBC tienen iguales los tres lados, a saber: DB común DA = = CB y AB = DC por lados opuestos; luego son iguales.

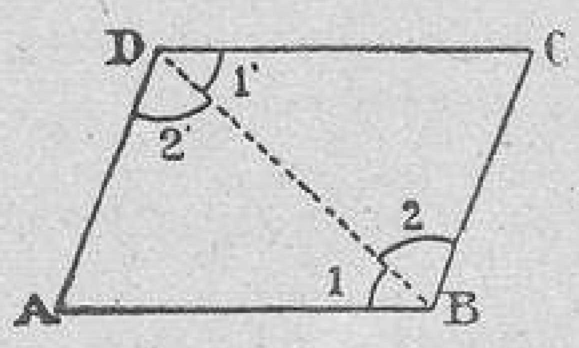

Fig. 61.

Obsérvese que son homólogos los ángulos 1 y 1', 2 y 2', lo que indica que el lado BD tiene por homólogo en el otro triángulo el DB, que es idéntico en magnitud, pero no en sentido.

223. R.—*Un cuadrilátero convexo, resultante de colocar dos triángulos iguales de modo que dos lados homólogos coincidan, pero invertidos, es paralelogramo.*

F. 61.—Sea el cuadrilátero ABCD formado por los triángulos iguales BDA y DBC en que se supone que el lado BD de uno ha coincidido con el DB del otro (*) y en que por consiguiente son homólogos los ángulos 1 y 1'.

D.—Como los ángulos iguales, 1 y 1′, ocupan la posición de alternos internos respecto de AB y DC corta-

(*) Puede aclararse más recortando en papel los triángulos.

das por DB, AB y DC son paralelas, y siendo además iguales ABCD es paralelogramo (164).

Observación.—*Si un cuadrilátero convexo tiene los dos pares de lados opuestos iguales, será paralelogramo,* pues esos lados y una diagonal forman triángulos iguales y viene a recaerse en el caso anterior. (*)

224. Resulta de lo expuesto que el paralelogramo ABCD (F. 61) podrá construirse si nos dan los elementos necesarios para construir uno de los triángulos tal como ABD, pues luego podrá construirse el otro.

**Ejercicios.**—1.º Construir un paralelogramo dados dos lados inmediatos, y el ángulo comprendido, o aquellos lados y la diagonal que une sus extremos.

2.º Proponer otros casos de construcción de paralelogramos a los que sea aplicable el procedimiento de que se habla en este número.

3.º Probar que dos paralelogramos son iguales si tienen respectivamente iguales los lados inmediatos y el ángulo comprendido.

225. **Construcción de polígonos.**—Para copiar un polígono, es decir, para construir otro igual a él, pueden construirse sucesiva y alternativamente segmentos y ángulos iguales a los lados y ángulos del propuesto, dando la vuelta al contorno en un orden determinado. Este método, llamado de *rodeo*, exige gran cuidado, pues casi nunca llega a coincidir el extremo del último lado con el origen del primero, esto es, a cerrarse el polígono.

Se puede también acudir al teorema del núm. (169) trazando los segmentos paralelos e iguales de que allí se habla.

---

(*) Veáse la nota del número 164.

Otro método consiste en la construcción del polígono simétrico del dado con respecto a un centro. (V. el número 56).

La simetría con respecto a un eje proporciona un polígono inversamente igual al propuesto (60); dándole la vuelta de modo que el anverso pase a ser reverso, (*) se tendrá uno directamente igual.

Finalmente, aunque existen todavía otros procedimientos, nos limitaremos a recomendar el siguiente: Elíjase un lado como base, y constrúyanse triángulos directamente iguales a los que resultan de unir con los extremos de esta base cada uno de los demás vértices del polígono. Uniendo los vértices de esos triángulos, se obtendrá el polígono deseado. (Método de intersecciones).

226. **Coincidencia de figuras iguales.**—Si dos polígonos son directamente iguales, y tienen los lados homólogos paralelos, sabemos que pueden coincidir por una traslación rectilínea guiada por la recta que une dos vértices homólogos (170).

Pero si los lados homólogos no son paralelos puede conseguirse que lo sean: Porque si los lados A'B' y AB, v. gr.: (figura 62) forman cierto ángulo, $\alpha$, e imprimimos al polígono A'B'C'..... una rotación alrededor de su vértice B' igual en magnitud y sentido al ángulo $\alpha$, el lado B'A' quedará en B'A'' paralelo al BA, pero como $\hat{A''}=\hat{A'}=\hat{A}$, el otro lado A''C'', también quedará paralelo a su homólogo AC (167) e igual acontecerá con todos.

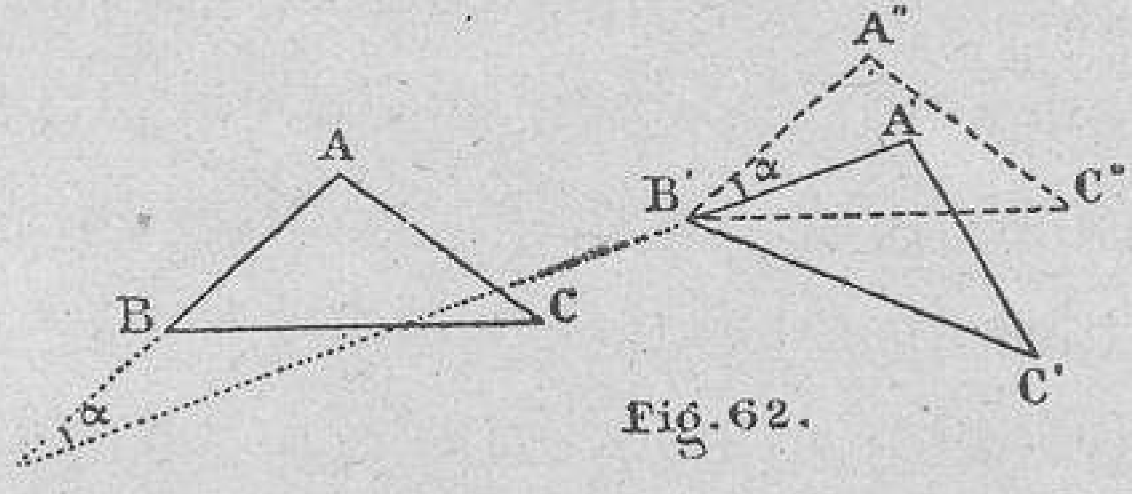

Fig. 62.

(*) Imaginando que el polígono se recortase en papel tendría dos caras: derecho y revés, o anverso y reverso.

Así, pues, para hacer coincidir los polígonos, nos valemos de una rotación y una traslación.

Si los polígonos fuesen inversamente iguales, se comenzaría por dar la vuelta a uno de ellos (de modo que el anverso pasase a ser reverso), y estaríamos en alguno de los casos anteriores.

Para que no exista duda respecto de cuáles son los elementos homólogos, y para que se extienda a toda clase de figuras planas lo que de los polígonos convexos se ha expuesto, conviene hacer algunas observaciones:

Fijados dos segmentos iguales AB y A'B' (F. 63) y supuestos homólogos los pares de puntos A y A', B y B', diremos que son también *homólogos*:

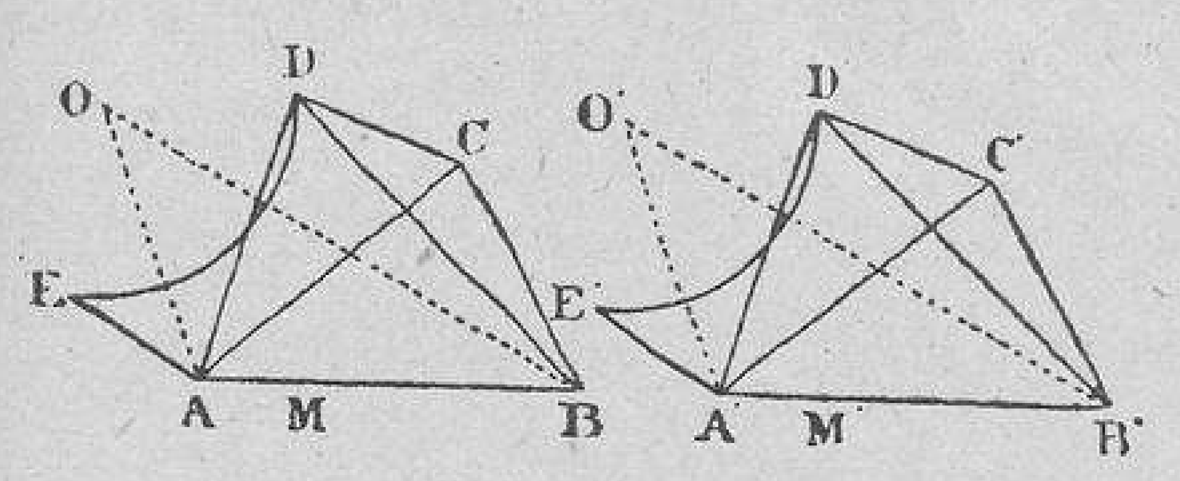

Fig. 63.

1.º Un punto de la recta AB (indefinida), tal como M, con otro, M', de A'B', siempre que MA==M'A' y MB=M'B'.

Un punto C exterior a AB, con otro C' exterior a A'B', cuando los triángulos ABC y A'B'C' sean directamente iguales.

3.º Un segmento CD, con otro C'D' cuando sean homólogos C con C' y D con D'.

4.º Una figura, o parte de ella cuando los puntos y segmentos de una son homólogos de los de la otra.

Es fácil ver que si hace coincidir A'B' con AB de modo que A' caiga en A, y B' en B, coinciden todos los puntos homólogos, y por tanto: los segmentos homólogos son iguales.

Recíprocamente: si se tuviesen dos figuras en coincidencia, se podrían descomponer, a la vez, en series de triángulos directamente iguales y con un lado fijo. Por lo cual la definición de igualdad antes dada: *figuras iguales son las que pueden coincidir*, se puede reemplazar por otra, más precisa: *figuras iguales son las que tienen todos sus elementos homólogos con relación a dos segmentos iguales,* AB *y* A'B', *considerados también como homólogos.*

La igualdad inversa se podría definir análogamente, pero preferiremos decir que dos figuras planas son *inversamente* iguales, cuando dando la vuelta a una de ellas (o bien tomando su simétrica respecto a un eje) queden *directamente* iguales.

CAPÍTULO VIII

# Polígonos inscriptos, circunscriptos y regulares

227. Se ha visto (96 y 137) que dado un triángulo existen: una circunferencia circunscripta, otra inscripta y tres ex-inscriptas, cuyos centros son el punto de concurso de las mediatrices (circuncentro) el de las bisectrices interiores (incentro) y el de una bisectriz interior y dos exteriores (ex-incentros).

Hé aquí ahora nuevas propiedades:

228. *La distancia de un vértice (de un triángulo) al punto de contacto del círculo exinscripto incluso en el ángulo de aquel vértice es el semiperímetro.*

F. 64.—Sean: ABC el triángulo, $I_1$ el círculo exinscripto correspondiente al ángulo A, que toca a los lados en T, S y U y AT o AU la distancia dicha. Supongamos trazado también el círculo inscripto I, que toca a los lados en los puntos P, Q, R.

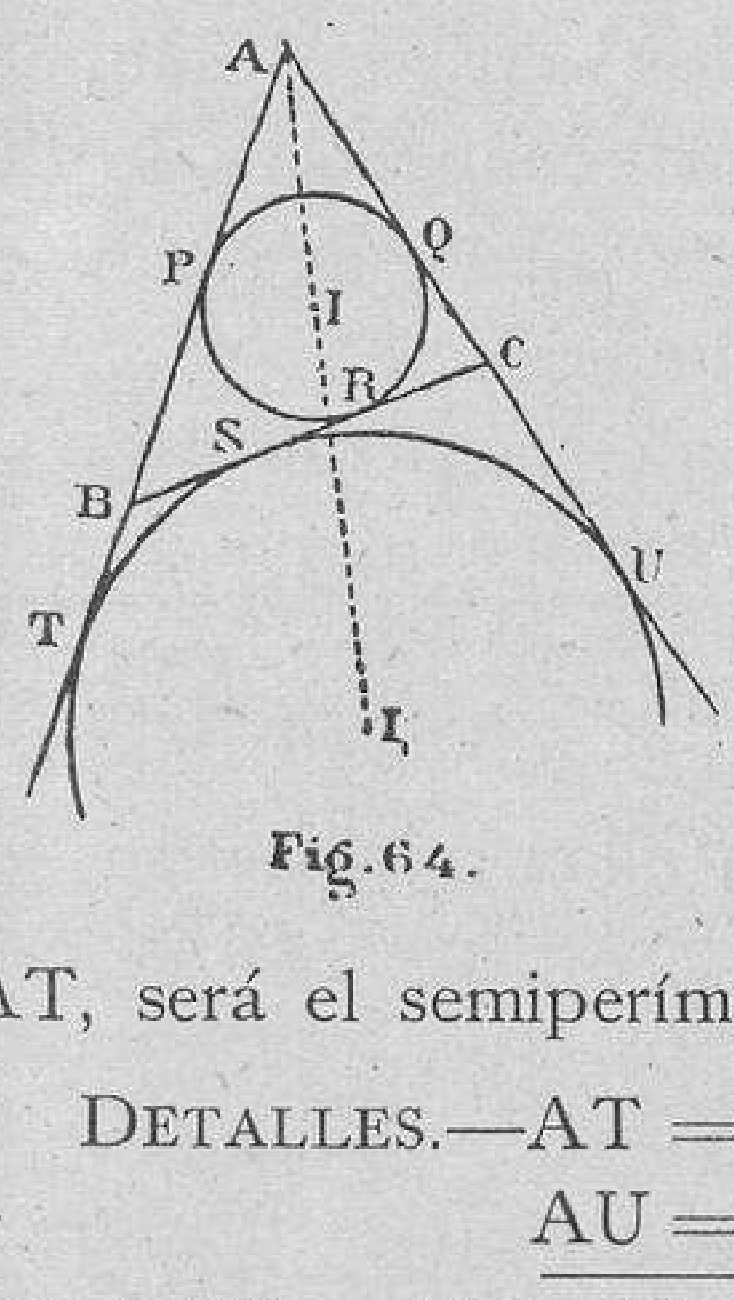

Fig. 64.

D.—Las distancias AT y AU son iguales (133) y si se reemplaza en ellas BT por su igual BS, y CU por su igual CS, se obtendrá, sumando, el perímetro, luego una de ellas, v. gr.: AT, será el semiperímetro.

DETALLES.—$AT = AB + BT = AB + BS$

$$\underline{AU = AC + CU = AC + CS}$$

$$AT+AU=2AT=AB+BS+CS+AC=AB+BC+AC=\text{Ptro.}$$

229. **Corolarios.** 1.º La distancia AP, entre un vértice y el punto de contacto del círculo inscripto, es igual al semiperímetro menos el lado $a$ opuesto al ángulo de aquel vértice.

Porque AP y AQ son iguales, y se obtienen restando de todo el perímetro BR y CR, que componen $a$, y BP y CQ que por ser iguales a las anteriores también dan $a$. Luego AP + + AQ = Perímetro — $2a$.

$$AP = \text{Semiperímetro} - a$$

Designando el semiperímetro por $p$, AP $= p - a$.

2.º Las distancias del vértice A a los puntos de contacto con los otros círculos exincriptos son $p - b$ y $p - c$.

(La demostración se propone como ejercicio).

230. *Si sobre un lado de un triángulo como diámetro se traza una semicircunferencia, hacia la región en que cae el triángulo, pasará por los pies de dos alturas.*

F. 65.—Sea el triángulo ABC, y A'B'C', los pies de las alturas que arrancan respectivamente de A, B y C.

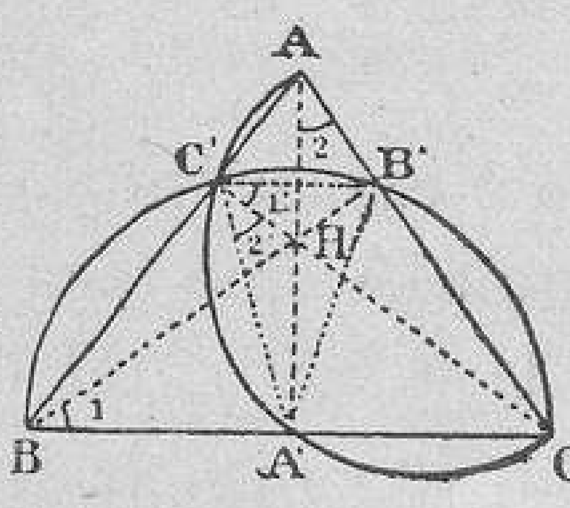

Fig. 65.

D.—Los triángulos rectángulos BB'C y CC'B tienen los vértices del ángulo recto sobre la semicircunferencia de diámetro BC (205). Y análogamente para los otras semicircunferencias.

**Escolio.** Cada dos de las tres circunferencias que así pueden trazarse, tienen un punto de intersección en el pie de una altura.

231. **Corolarios.** 1.º Los pies de las tres alturas forman un triángulo del cual son ellas mismas bisectrices.

D.—(Fig. 65). Porque, por ejemplo:

$\hat{1} = \hat{1'}$ por inscriptos en igual arco

$2 = \hat{2'}$ íd. íd.

pero como $\hat{1} = \hat{2}$ por tener sus lados perpendiculares,

$$\hat{1'} = \hat{2'}$$

lo que prueba ser C'C bisectriz del ángulo C'.

EJERCICIO.—Construir un triángulo conociendo los pies de las alturas (o el triángulo que forman).

232. Como las bisectrices del triángulo A'B'C' (fig. 65) concurren en su incentro, las alturas del ABC, que son las mismas, concurren en un punto, llamado *ortocentro*.

233. *Un cuadrilátero convexo inscripto tiene los ángulos opuestos suplementarios.*

Ya se ha demostrado (207).

234. R.—*Si un cuadrilátero convexo tiene sus ángulos opuestos suplementarios. es inscriptible en una circunferencia.*

F. 66.—Sea ABCD el cuadrilátero en que A+C=2 rectos, y B+D=2 rectos. Tracemos la circunferencia circunscripta al triángulo CAB.

D.—El arco de la circunferencia ABC que cae hacia la región inferior de AC, es el lugar geométrico dsnde se hallan los vértices de los triángulos de base AC y cuyo ángulo opuesto sea suplementario del B (y caiga hacia la región inferior de AC); luego el vértice D está en dicho arco.

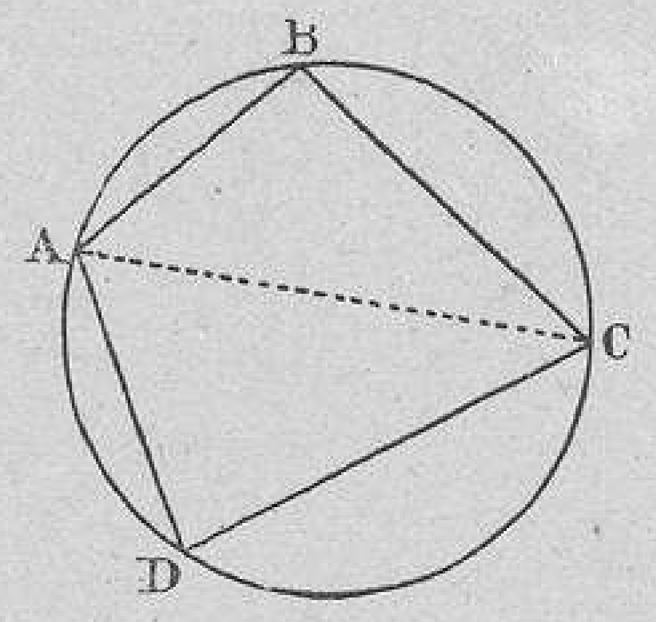

Fig. 66.

235. **Corolario.**—Son inscriptibles: el cuadro, el rectángulo, y en general los cuadriláteros en que dos ángulos opuestos sean rectos, puesto que para estos últimos los otros dos ángulos serán tambien suplementarios.

No son inscriptibles los paralelogramos no rectángulos, puesto que los ángulos opuestos, siendo iguales, no pueden ser suplementarios de no ser rectos.

236. Con ayuda de estas proposiciones se completan las antes establecidas para el triángulo. Así:

237. *Por el ortocentro de un triángulo pasan tres circunferencias, cada una de las cuales contiene el ortocentro, los piés de dos alturas y un vértice.*

Porque, refiriéndonos a la F. 65, vemos que los cuadriláteros tales como el A'CB'H tienen dos ángulos opuestos rectos, y son, por consiguiente, inscriptibles.

238. *Las cuatro circunferencias circunscriptas a los triángulos formados por cuatro rectas indefinidas que se cortan dos a dos* (cuadrilátero completo) *pasan por un mismo punto.*

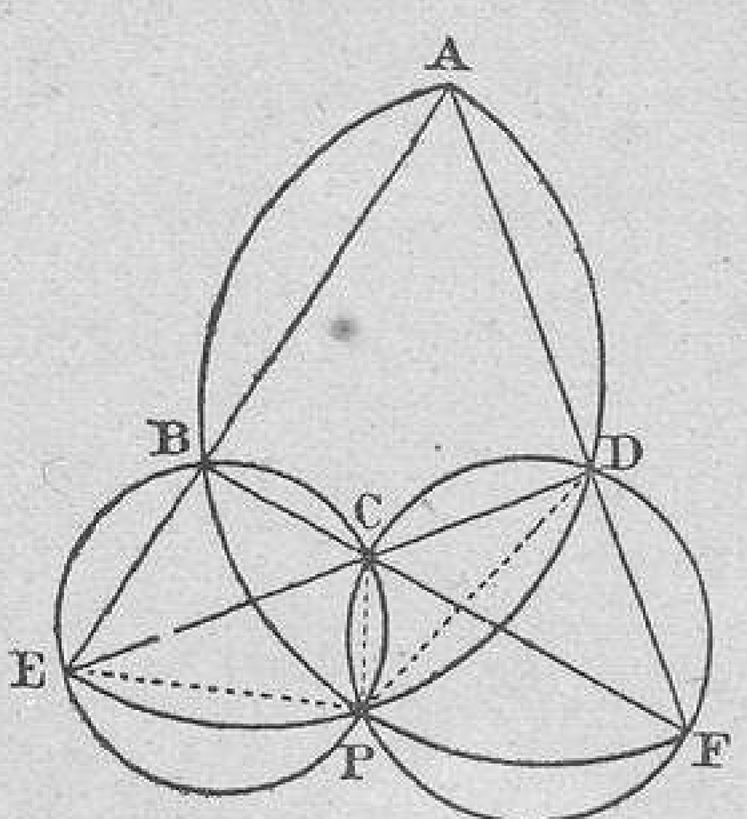

Fig. 67.

F. 67.—Sea la figura compuesta de las cuatro rectas AE, BF, ED y AF, en la cual se forman los triángulos AED, ABF, EBC y CDF. Tracemos las circunferencias circunscriptas a estos dos últimos, que se cortan en el punto C.

D.—Las circunferencias EBC y CDF que tienen común el punto C, exterior, en general, a la recta de los centros, tendrán común otro punto P, y entonces,

$$\left.\begin{aligned} \widehat{EPC} &= \text{Suplem.}^{\text{o}} \text{ de } EBC = FBA \\ \widehat{CPD} &= \qquad\qquad\qquad\quad = BFA \end{aligned}\right\} \text{sumando}$$

$$\widehat{EPD} = \qquad\qquad\qquad\quad = \text{Suplem.}^{\text{o}} \text{ de } A;$$

luego P está sobre la circunferencia EDA. Y análogamente para la otra circunferencia FBA.

Detalles.—EPC es suplemento de EBC por estar inscriptos en arcos que completan una circunferencia (206) y este suplemento es igual al ángulo adyacente de FBE, qne es el FBA.

CPD y BFA son iguales por inscriptos en igual arco de la circunferencia CFD. (*)

239. T.—*En un cuadrilátero convexo circunscripto, son iguales las sumas de los lados opuestos.*

F. 68.—Sea ABCD el cuadrilátero y llamemos $p$ a cualquiera de las dos tangentes iguales (133) que parten de A; $q$ a las que parten de B, etc.

D.—

$$\begin{array}{c} AD=p+s \\ BC=q+r \\ \hline AD+BC=p+q+r+s \end{array} \quad ,, \quad \begin{array}{c} AB=p+q \\ CD=r+s \\ \hline AB+CD=p+q+r+s \end{array}$$

luego $AD + BC = AB + CD$.

240. C.—*Si un cuadrilátero convexo no es circunscriptible, las sumas de los lados opuestos no son iguales.*

F. 68.—Si el cuadrilátero ABCD' no es circunscriptible, la circunferencia tangente a tres lados, AB, BC y CD', no tocará al cuarto. Tracemos entonces desde A la tangente AD, con lo que se formará un cuadrilátero circunscripto.

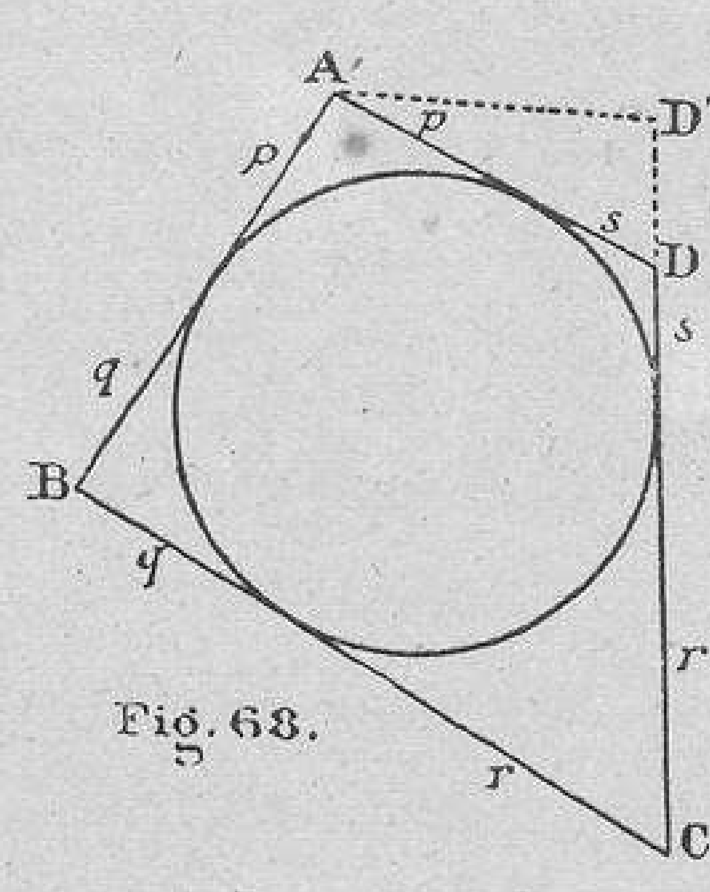

Fig. 68.

D.—

$$\begin{array}{c} AB + CD = BC + AD \\ DD' > AD' - AD \\ \hline AB + CD' > BC + AD' \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} A \\ A \end{array}}\right\} \text{sumando}$$

Detalles.—La primera igualdad se verifica por el teorema directo; la desigualdad escrita debajo por ser un lado de un triángulo mayor que la diferencia de los otros dos.

Al sumar, se ve en la figura que

$$CD + DD' = CD', \text{ y } AD - AD = 0.$$

(*) Si C estuviese sobre la recta de los centros $EBC = CDF = 90^{\circ}$ y EB sería paralela a FD.

241. **Escolio.**—El rombo y el cuadrado son circunscriptibles, puesto que todos sus lados son iguales, y los opuestos tendrán igual suma; pero los demás paralelogramos no son circunscriptibles.

242. 1.º—*Si se tiene una circunferencia dividida en* m *partes iguales y se une cada punto de división con el que le sigue*, (al dar la vuelta a la circunferencia en sentido constante) *se forma un polígono inscripto, de lados y ángulos iguales.* Este polígono se llama *regular* y de género *m* (49).

2.º *Si cada punto de división se une con el que se halla* p *lugares después, y* p *es un numero primo con* m, *se obtiene una figura de* m *lados al dar* p *vueltas a la circunferencia.*

Esta figura se denomina *polígono regular estrellado*, de género *m* y *especie* p.

1.º—F. 69.—Sea ABCDE el polígono resultante al dividir en 5 partes la circunferencia y unir de una en una las divisiones.

D — Los lados son iguales como cuerdas de arcos iguales, y los ángulos, porque cualquiera de ellos está inscripto en un arco de dos divisiones (203).

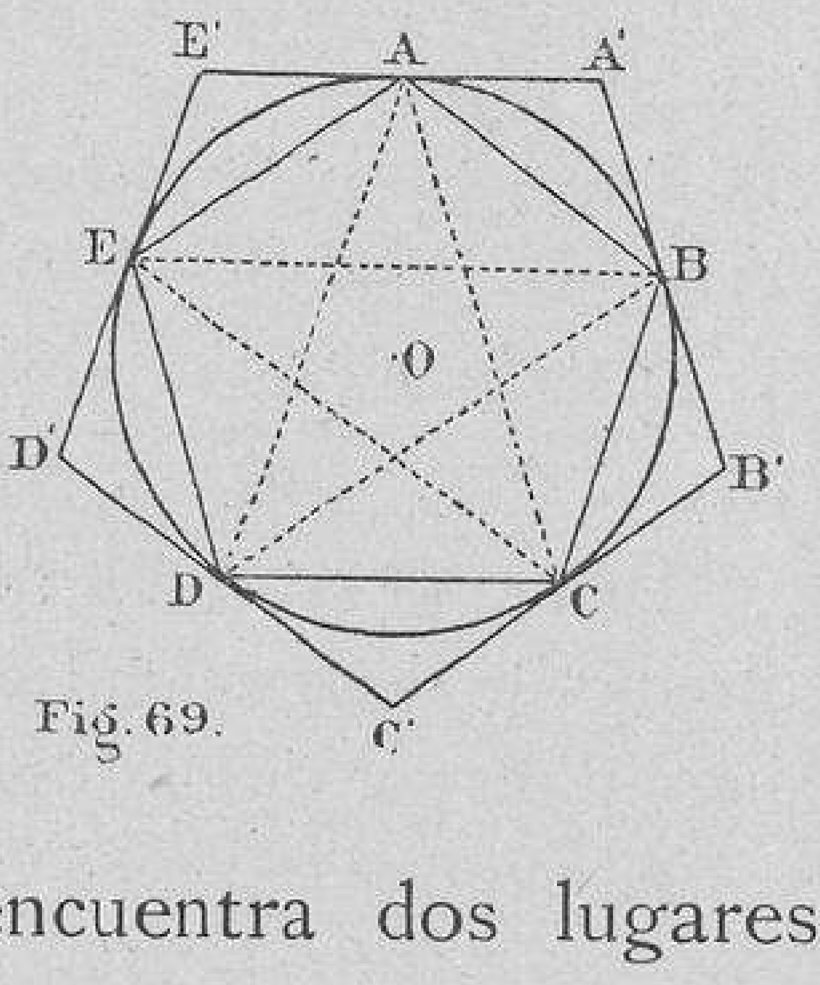

Fig. 69.

2.º—F. 69.—Sea la figura que forma la línea de puntos ACEBDA, obtenida al unir cada punto de división con el que se encuentra dos lugares después.

D.—Supongamos que cada división es de *a* grados, y así cada cuerda abarcará $p \, . \, a$ grados. Tomando este número $m$ veces (5 veces), se obtendrá un número de grados igual a $p \, . \, a \, . \, m$ o $p \, . \, (a \, . \, m)$, y como la circunferencia tiene $a \, . \, m$ grados, se habrá vuelto al punto de partida, después de recorrer $p$ circunferencias. Y se habrá vuelto *por primera vez*, porque siendo $m$ y $p$ primos entre sí, su mínimo común múltiplo es su producto $p \, . \, m$, y el de $a \, . \, p$ y $a \, . \, m$ será $p \, . \, a \, . \, m$.

Que los lados y ángulos son iguales se demuestra como en el caso anterior.

243. **Escolio.** Si dividida la circunferencia en 30 partes, se uniesen las divisiones de 6 en 6, por ser 6 *divisor* de 30 se podrían mirar cada 6 divisiones como una sola, y nos hallaríamos en igual situación que si se hubiesen hecho 5 (30 : 6) divisiones. Si se unieran de 8 en 8, observando que 30 y 8 tienen el máximo común divisor 2, se mirarían cada 2 divisiones como una sola, y estaríamos en igual caso que si no hubiera más que 15 (30 : 2) divisiones y se enlazasen de 4 en 4 (8 : 2).

Análogamente se razonará en otros ejemplos.

244. *Si teniendo una circunferencia dividida en partes iguales, se trazan tangentes por los puntos de división, limitándolas en sus mutuas intersecciones, se forma un polígono regular circunscripto.*

F. 69.—Sea A'B'C'D'E' el polígono formado como se ha dicho.

D.—Los ángulos del vértice de los triángulos AA'B, BB'C, etc., son iguales, porque lo son estos triángulos, que tienen iguales las bases y los ángulos básicos (199).

Consecuencia de esta misma igualdad de triángulos es que los segmentos A′B, BB′, B′C, etc., son todos iguales, y, por consiguiente, cada uno mitad de un lado del polígono, y éstos también iguales.

**Escolio.** Si, formado como antes el polígono inscripto ABC (fig. 70), se toma el punto medio de cada uno de os arcos iguales AB, BC, etc., se tendrá también dividida la circunferencia en partes iguales por los nuevos puntos, y si por ellos se trazan tangentes se formará un polígono regular circunscripto A′B′C′. Pero el radio OP, perpendicular a la cuerda AB, pasa por el punto de contacto de la tangente y es perpendicular a ella; por lo cual los lados del nuevo polígono son paralelos a los del inscripto (46). Además la recta A'O, que une un vértice del circunscripto con el centro, es bisectriz del ángulo A' y del POQ (133), luego pasa por A, punto medio de PQ; lo que equivale a decir que los vértices A y A' están sobre un mismo radio prolongado; y análogamente los demás.

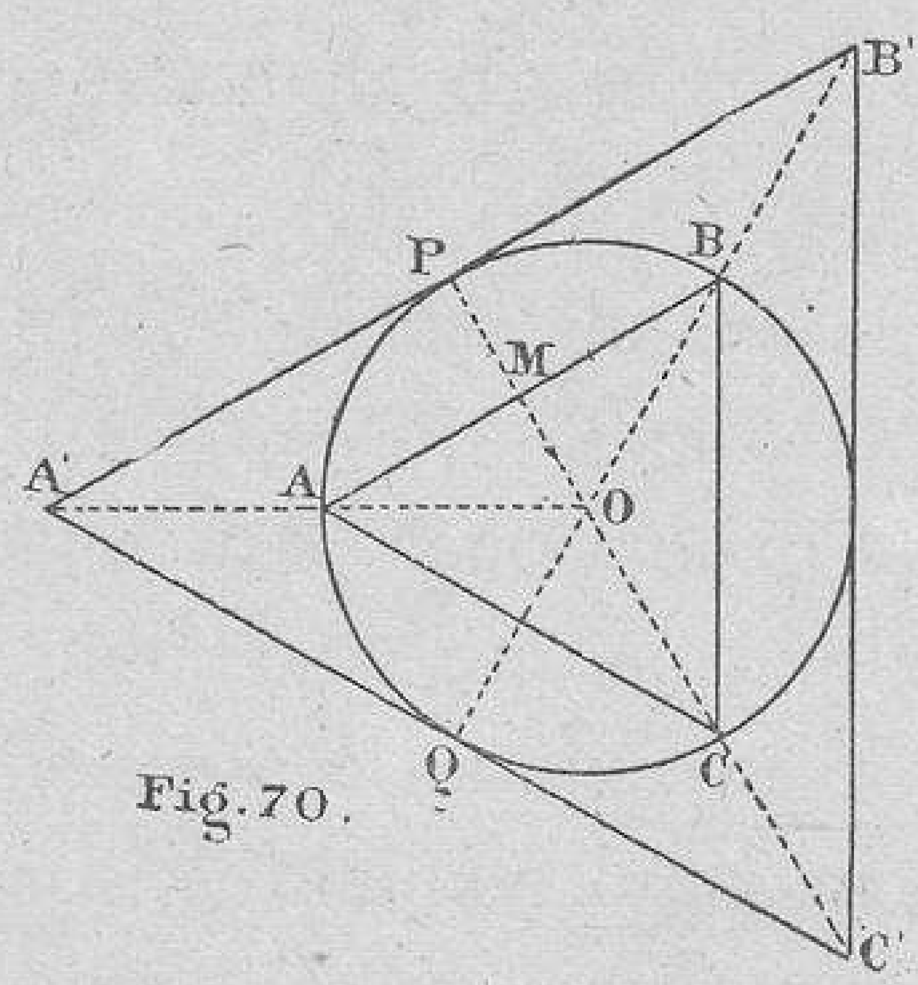

Fig. 70.

245. *Si un polígono es equilátero y equiángulo, es decir, regular, existen:* 1.° *una circunferencia que pasa por todos los vértices*, (circunscripta); 2.° *otra, tangente a todos los lados* (inscripta).

F. 71.—Sean: ABCD, una parte del contorno del polígono; O, el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices A, B, C, el cual estará sobre la mediatriz PO del lado BC. Unamos O con A y con D.

D.—1.°—El cuadrilátero PCDO y el PBAO son simétricos respecto de OP, y coinciden al doblar por esta recta; luego OD = OA, es decir, que la circunferencia de radio OA, que pasa por A, B y C, pasa también por D. Y lo mismo se demostraría que pasando por B, C y D pasaría por el vértice siguiente, etc. Luego pasa por todos.

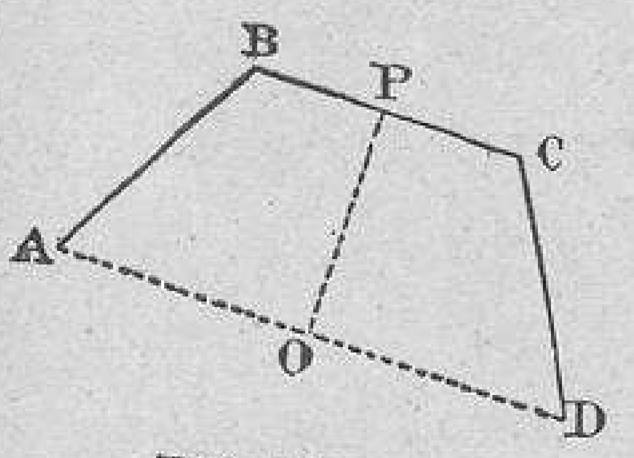

Fig. 71

Detalles.—Los puntos B y C son simétricos respecto de O P puesto que O P es mediatriz de BC. Al hacer coincidir, doblando, dichos puntos B y C, los ángulos iguales del mismo nombre coincidirán, luego CD caerá en la dirección de BA, y por ser de igual longitud, D caerá sobre A, según se había dicho.

2.°—Trazada la circunferencia circunscripta, los lados del polígono serían, en ella, cuerdas iguales, y, por tanto, habría una circunferencia tangente a todas ellas, o inscripta en el polígono (112).

246. Hemos visto que el problema de formar un polígono regular inscripto o circunscripto depende del de dividir la circunferencia en partes iguales. Esto es fácil de conseguir, con la regla y el compás, en unos casos, y no en otros.

Los más sencillos son los siguientes:

*Dividir una circunferencia en seis partes iguales.*

Basta tomar como cuerda de cada una de ellas la magnitud del radio.

F. 72.—Sea el arco AB una 6.ª parte de la circunferencia y unamos A y B con O.

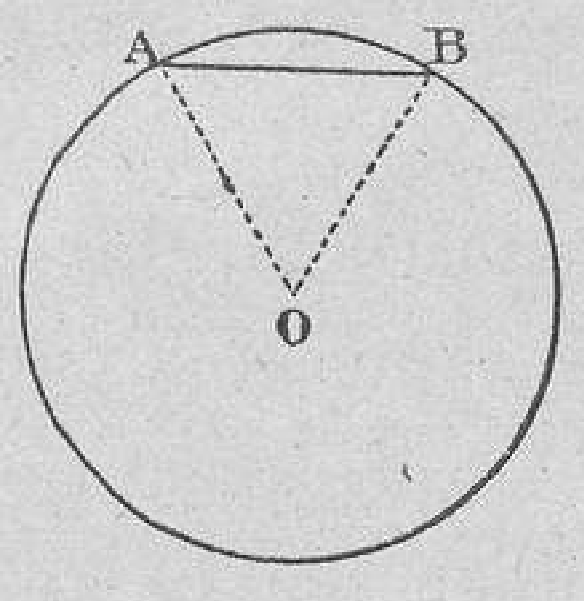


Fig. 72.

D.—med. $\hat{O}$ = med. arc. AB = $\frac{1}{6}$ de 360° = 60.°

Luego $\hat{A} + \hat{B} = 180° - 60° = 120°$.

Y por ser ambos ángulos iguales,

$$\hat{A} = 60°, \hat{B} = 60°$$

Los tres ángulos del triángulo AOB son, pues, iguales, luego este triángulo es equilátero y

$$AB = OA = \text{radio}.$$

Detalles.—El ángulo central tiene igual medida que su arco correspondiente (75 Cor.). $\hat{A} + \hat{B}$ es el suplemento de $\hat{O}$. Los ángulos A y B son iguales por oponerse a los radios iguales OB y OA. Y en fin el triángulo es equilátero, porque a ángulos iguales se oponen lados iguales.

247. **Escolio.**—Dividida la circunferencia en seis partes iguales, queda dividida en tres sin más que considerar cada dos consecutivas como una sola.

Las mediatrices de las cuerdas dividen a los arcos en dos partes iguales, luego se puede fácilmente duplicar el número de divisiones y obtener 12, 24, 48, etc.

Ejercicios.—Inscribir y circunscribir un polígono de 12 lados (dodecágono) y obtener todos los que se formen al unir las divisiones de todos los modos posibles.

248. *Dividir una circunferencia en 4 partes iguales.*

Se trazan dos diámetros perpendiculares que formarán cuatro ángulos rectos, a los que corresponderán cuatro arcos iguales (cuadrantes).

Por observaciones análogas a las del escolio anterior se sabría dividir fácilmente la circunferencia en 8, 16, 32, etc., partes iguales.

EJERCICIOS.—Inscribir el octógono (8 lados) y decir si hay octógonos estrellados.

249. *Aproximadamente* puede dividirse una circunferencia en partes iguales por la siguiente regla, que sólo como curiosidad insertamos: *Constrúyase con el diámetro un triángulo equilátero; divídase aquel diámetro en el número de partes deseado, y uniendo el vértice* C (F. 73) con la 2.ª división, se tendrá en AD una de las partes pedida. (En la F. 73 se vé que para el cuadrado la construcción es exacta).

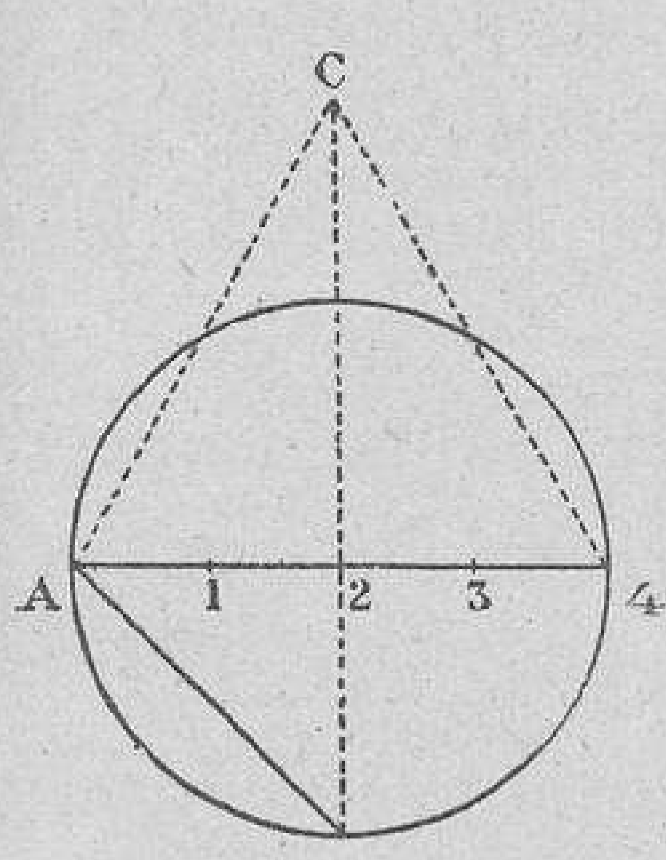

Fig. 73.

Generalmente nos valemos del trasportador, *calculando* el número de grados que corresponde a la parte alícuota deseada de la circunferencia, lo cual da, en la práctica, suficiente aproximación.

250. Son elementos importantes de los polígonos regulares, además de los lados y ángulos, los que siguen:

El *centro*, O (figs. 69 y 70), que es el mismo de las circunferencias inscripta o circunscripta. El *radio*, que es el mismo, OA, de la circunferencia circunscripta, o bien la distancia del centro a un vértice. La *apotema*, que es el radio de la circunferencia inscripta (OP para el polígono A′B′C′ de la F. 70), o bien la distancia del centro a un lado, o el segmento que une el centro con el punto medio de un lado (OP, F. 71). El ángulo central, AOB, (F. 70 y 72) formado por dos radios consecutivos o por dos apotemas (POQ, F. 70). Este ángulo vale la *enésima* parte de 360°, si el polígono tiene *n* lados, puesto que hay *n* de estos ángulos iguales alrededor del centro; y es suplementario del ángulo del polígono, porque suponiendo aquél formado por las apotemas OP y OQ (figura 70) se ve que tiene sus lados perpendiculares a los del A′ del polígono y, de no ser ambos rectos, son uno agudo y otro obtuso. (168).

251. *Los polígonos regulares de número par de lados, tienen ejes y centro de simetría.*

Son ejes: los diámetros perpendiculares a los lados opuestos, y los que pasan por vértices opuestos; y es centro, el del polígono.

F. 74.—Sea el *exágono* ABCDEF y los diámetros MN y AD; O el centro y PQ una recta limitada en el contorno.

D.—Doblando por MN, a causa de la igualdad de los arcos contados a derecha e izquierda a partir de M, (MA y MB, MF y MC, etc.) coincidirían los vértices A y B, F y C, etc. luego MN es eje de simetría. Lo mismo se prueba que lo es AD.

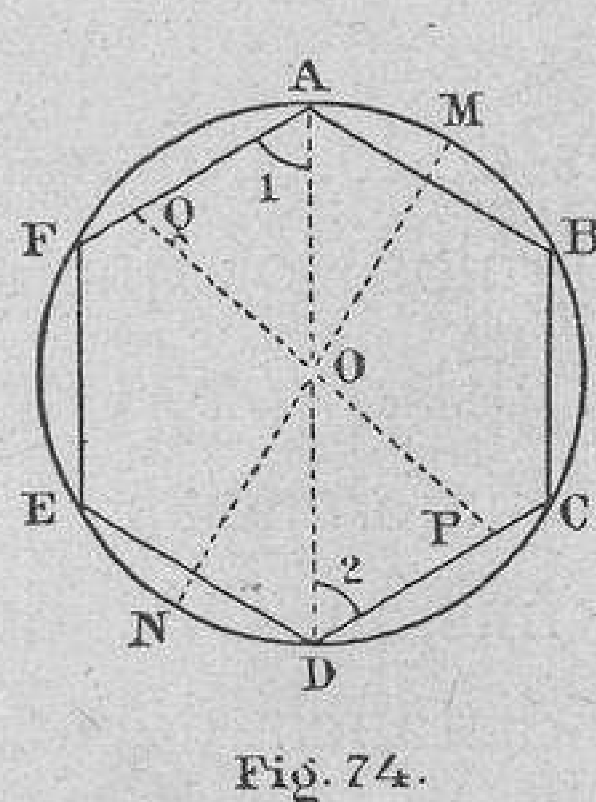

Fig. 74.

En cuanto al centro, O, desde luego los extremos de dos radios o de apotemas opuestas equidistan de él. Y cualquier recta, PQ, queda dividida por él en dos partes iguales, porque los triángulos AOQ y DOP son iguales por tener opuestos por el vértice los ángulos en O, iguales el $\hat{1}$ y el $\hat{2}$ por mitades de ángulos del polígono, y OA=OD por radios; luego OQ=OP.

252. Si el polígono tiene número impar de lados su centro no lo es de simetría, puesto que CO (F. 70) no es igual a OM; pero la recta CM, y sus análogas, son ejes de simetría.

253. Los cuadriláteros pueden tener elementos de simetría aunque no sean regulares; así:

*En todo paralelogramo, las diagonales se cortan en un punto que es centro de simetría.*

F. 75.—Sean ABCD un paralelogramo; O, el punto de intersección de las diagonales y PQ un segmento que pasa por O, limitado en el contorno.

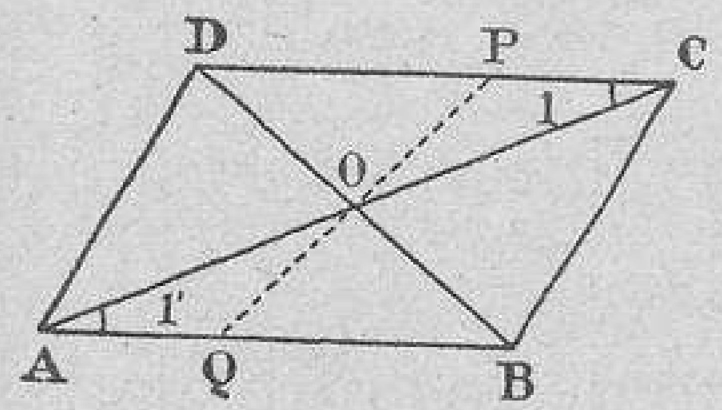

Fig. 75.

D.—En primer término: las diagonales quedan divididas en dos partes iguales por el punto O; porque de los triángulos iguales DOC y AOB se saca OD=OB y OC=OA.

Y en segundo lugar: OP=OQ, por ser iguales los triángulos POC y AOQ.

Detalles.—Los triángulos DOC y AOB son iguales por tener iguales los ángulos en O, que son opuestos por el vértice; los 1 y 1′ por alternos internos, y los lados DC y AB como opuestos en el paralelogramo. Además, por oponerse a los ángulos iguales son *homólogos* los lados OD y OB, OC y OA.

Los triángulos POC y AOQ son iguales porque según acaba de verse OC=OA, $\hat{1}=\hat{1}'$ y además los ángulos en O también son iguales por opuestos por el vértice. OP es homólogo de OQ por oponerse a ángulos iguales.

254. RECÍPROCO.— *Todo cuadrilátero convexo en que el punto de concurso de las diagonales sea centro de simetría, es paralelogramo.*

F. 75.—Sea el cuadrilátero ABCD, y O el punto de concurso de las diagonales.

D.—Según la hipótesis

$$OA = OC \text{ y } OB = OD$$

y, como los ángulos en O son iguales,

Triáng.º DOC = Triáng.º AOB (2.º caso igualdad)

Luego $1 = 1'$, y por ser alternos internos respecto a DC y AB, estas rectas son paralelas.

Lo mismo se prueba el paralelismo de los otros lados.

EJERCICIO.—Construir un paralelogramo dadas las diagonales y el ángulo que forman.

255. *El cuadrado tiene: dos ejes de simetría perpendiculares a los lados; otros dos, bisectrices de los ángulos opuestos; y un centro de simetría en que concurren todos.*

Además, considerando los ejes limitados en el contorno, los de una misma clase son iguales y perpendiculares entre sí. (Demuéstrese como ejercicio).

256. *El rectángulo tiene sólo dos ejes de simetría, perpendiculares y desiguales. Las diagonales no son ejes de simetría, pero son iguales y oblicuas; su punto de concurso es el centro de simetría.*

F. 76.—Sean: ABCD el rectángulo, PQ y RS los ejes.

D.—La simetría con relación a cualquiera eje es evidente, puesto que éste es mediatriz de los lados opuestos. Su desigualdad también, puesto que cada eje es igual a dos lados opuestos. Las diagonales son iguales por serlo los triángulos rectángulos ABC, BAD de que forman parte, los cuales tienen iguales los catetos.

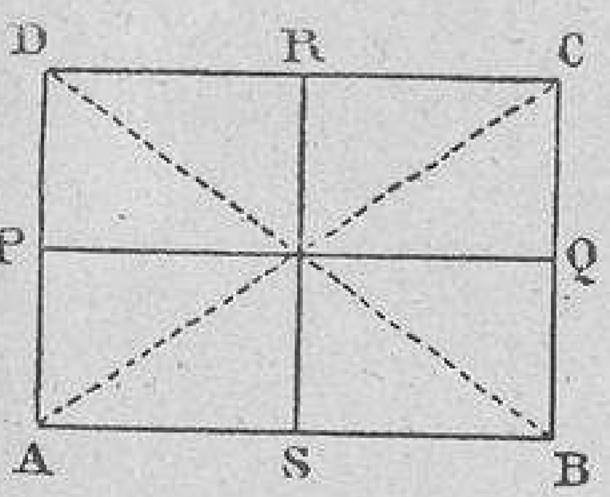

Fig. 76.

Y son oblicuas porque aunque AC pasa por el punto medio de BD, como A y C no equidistan de B y D no es AC mediatriz de BD.

257. *El rombo tiene por ejes de simetría sus diagonales, las cuales son desiguales, mediatriz una de otra y bisectriz, cada una, de los ángulos cuyos vértices une.*

F. 77.—Sea el rombo ACD.

D.—Basta tener en cuenta que los triángulos isósceles ABC y ABD son iguales y simétricos, y recordar las propiedades generales de dichos triángulos. (Detállese como ejercicio).

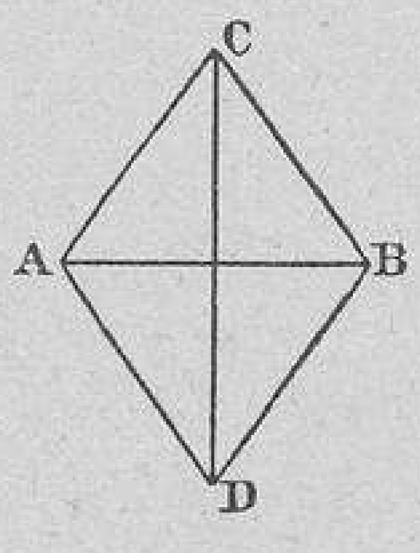

Fig. 77.

258. Recíprocamente.—Si se trazan dos segmentos que se corten en su punto medio, y se toman como diagonales del cuadrilátero convexo resultante de unir sus extremos, según sean dichos segmentos perpendiculares e iguales; iguales y oblícuos, o desiguales y perpendiculares, será el cuadrilátero cuadrado, rectángulo o rombo. (Detállese como ejercicio).

Y como, *contrariamente*, si los segmentos dichos no son iguales ni perpendiculares el cuadrilátero no será cuadrado, ni rectángulo, ni rombo, y ha de ser paralelogramo, será *romboide*.

Ejercicio.—Construir un cuadrado y un rombo, dadas las diagonales.

# SEGUNDA PARTE

## CAPÍTULO PRIMERO

## PRELIMINARES

259. Además de los *axiomas geométricos* ya admitidos en la primera parte (12 a 18) consideraremos como tales los que a continuación se enumeran, comprobables experimentalmente.

Antes diremos que cuando una línea se sujeta a un movimiento contínuo y regulado por cierta ley, de modo que en todas sus diversas posiciones se halle contenida por entero en cierta superficie, se supone ésta *engendrada* por aquella línea, la cual recibe, por esto, el nombre de *generatriz*. Si la ley del movimiento consiste en apoyarse constantemente en otra línea, ésta recibe el nombre de *directriz*.

260. *Una recta que gira alrededor de un punto apoyándose en otra recta fija, engendra un plano.* (*)

(*) El plano es indefinido, pero suele dibujarse en forma de paralelogramo, y se designa por una letra.

La generatriz es la recta móvil, y la directriz la fija. Como el plano engendrado es único, se dice que *una recta y un punto exterior a ella determinan un plano;* o que dos planos con una recta y un punto exterior comunes coinciden.

*Tres puntos, que no estén en línea recta,* fijan también la posición de un plano, porque dos de ellos determinan una recta a la cual es exterior el tercero.

*Dos rectas que se cortan* bastan, igualmente, para determinar un plano, puesto que lo determinan una de ellas y un punto de la otra, (que no sea el de intersección).

261. *Un plano puede girar alrededor de una recta situada en él, y en este movimiento recorre todo el espacio, pasando una vez por cada punto de éste.*

Dos planos que tengan una recta común se ponen en coincidencia haciendo que uno de ellos gire alrededor de la recta hasta que contenga un punto del otro plano.

262. *Dos planos con un punto común, tienen común toda una recta que pasa por ese punto.* Esta recta se llama de *intersección* o *traza* de un plano sobre el otro. Fuera de ella no pueden tener los planos ningún punto común si no coinciden.

263. *Una recta que sufre una traslación paralela o rectilínea a lo largo de otra, engendra un plano.* Por eso se dice que dos paralelas determinan un plano.

264. *Una recta perpendicular a otra y que gira alrededor de ésta, o bien un lado de un ángulo recto girando alrededor del otro, engendra un plano.* (Fig 78). Admitido esto se ve que puesto que las rectas BC, BD,

BE, etc., son diversas posiciones del lado móvil, la AB es perpendicular a todas ellas. Entonces se dice que AB es perpendicular al plano *p*, y éste perpendicular a AB. El punto B en que AB corta al plano, se llama *pie* de la perpendicular.

Como dos de las posiciones del lado móvil, BC y BE, por ejemplo, determinan el plano *p*, *se dice que una recta*, AB, *es perpendicular a un plano* p, *cuando lo es a dos rectas de éste que pasan por el pie*, B, *de aquélla*.

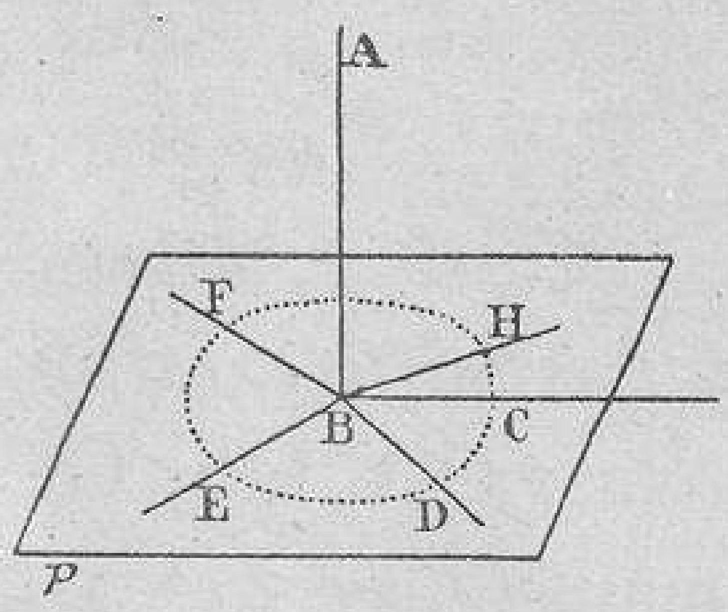

Fig. 78.

Luego: *por un punto*, B, *de una recta*, *se le puede trazar siempre un plano perpendicular*, p; ya sea haciendo girar alrededor de AB el ángulo recto de vértice B, (ABC) ya sea trazando en dos distintos planos que pasen por AB las dos perpendiculares BC y BE, que bastan para determinar el plano *p*.

Si cuando el ángulo recto ABC engendra el plano *p*, se toma BC como segmento limitado, su extremo recorrerá una circunferencia de centro B y radio BC, y de plano perpendicular a AB.

(En el dibujo, esta circunferencia se representa por la elipse que se ve en la figura).

EJERCICIO GENERAL.—Por medio de objetos materiales, compruébense experimentalmente los hechos apuntados. Para el último, puede servir una escuadra con un cateto sobre una mesa; una puerta que gira rozando con el suelo, etc.

265. **Superficie cónica** *es la engendrada por una*

*semirrecta que gira alrededor de su origen apoyándose en una línea directriz.* (*)

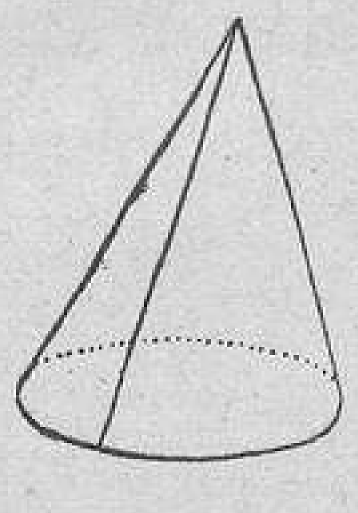

Fig. 79.

Cuando la directriz es una circunferencia, la superficie se llama *circular*, y será la única de que nosotros hablemos (fig. 79).

**Superficie piramidal** *es la que forman los ángulos determinados por varias semirrectas que unen los vértices de un polígono con un punto exterior a su plano* (fig. 80). Dichas semirrectas, OA, OB, OC, etc., se llaman *aristas*, su origen común, O, *vértice*, y los ángulos AOB, BOC, etc., *caras* de la superficie. Según esto, la superficie piramidal puede considerarse como caso particular de la superficie cónica, en la que la línea directriz es el contorno de un polígono, ABCD. Este contorno es la *sección* causada en la superficie por el plano del polígono, y puede ser cóncavo o convexo, aunque, por regla general, nos referimos a este último caso.

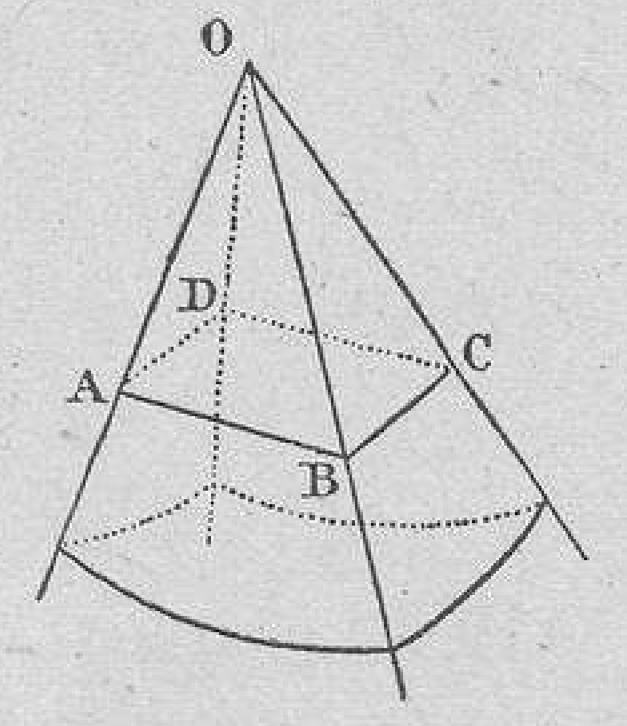


Fig. 80.

**Pirámide** *es el cuerpo limitado por la superficie piramidal y un polígono-sección.* De sus elementos se hablará después.

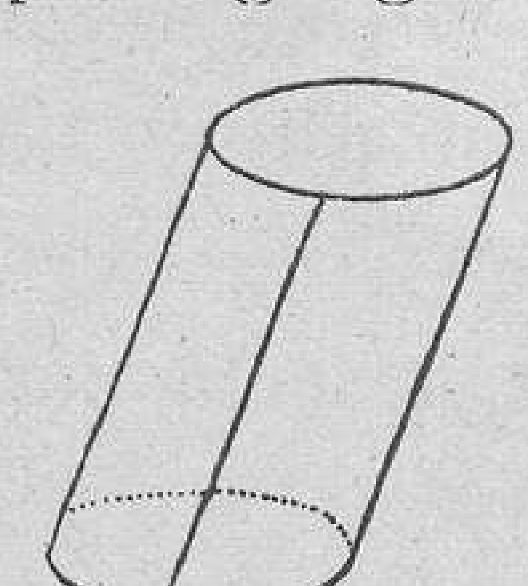

Fig. 81.

266. **Superficie cilíndrica** *es la engendrada por una recta que se conserva paralela a una posición inicial y se apoya en una línea directriz.* Cuando ésta es circunferencia,

(*) La línea móvil o generatriz pudiera ser indefinida; pero la consideramos como semirrecta, por evitar otras definiciones.

(único caso que estudiaremos), la superficie es circular (fig. 81).

**Superficie prismática** *es la que forman las zonas planas determinadas por rectas paralelas trazadas por los vértices de un polígono exteriormente a su plano.* (Fig. 82).

Esas rectas AE, BF, etc., son las *aristas;* y aquellas zonas ABFE, BCGF, etc., las *caras.*

La superficie prismática es el caso particular de la cilíndrica en que la directriz es el contorno de un polígono, ABCD.

Lo mismo la superficie cilíndrica que la prismática se miran a veces como superficies cónicas o piramidales *con el vértice alejado al infinito*, lo cual proviene de que al cortarse los lados de un ángulo muy lejos de un trozo determinado de ellos, en este trozo son *casi* paralelos.

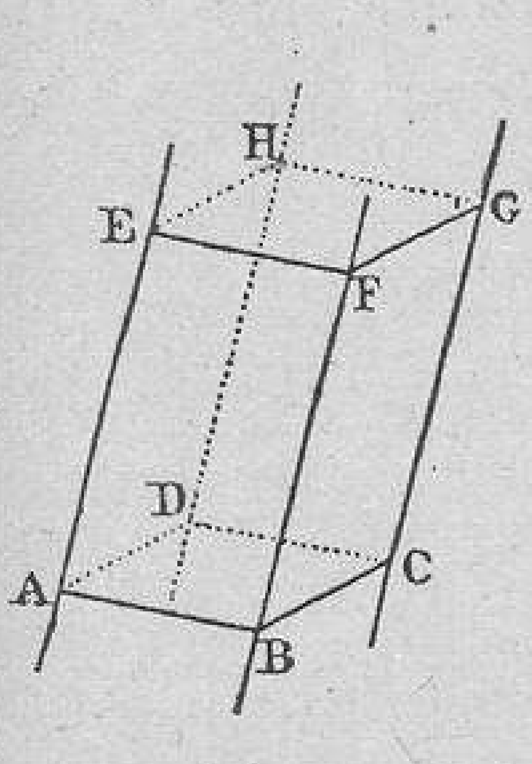


Fig. 82.

**Prisma** *es el cuerpo limitado por la superficie prismática y dos polígonos, secciones de ella, de planos paralelos.* (*) ABCDEFGH. (F.82)

267. Consideremos una recta XY (figura 83) y una *línea*, XABY, situadas en uno de los semiplanos que aquella determina sobre un plano. Desde un punto A de la línea tracemos la perpendicular AO a la recta. Si hacemos girar el ángulo recto XOA alrededor del lado XO, el punto A describe una circunferencia de plano perpendicular a XO

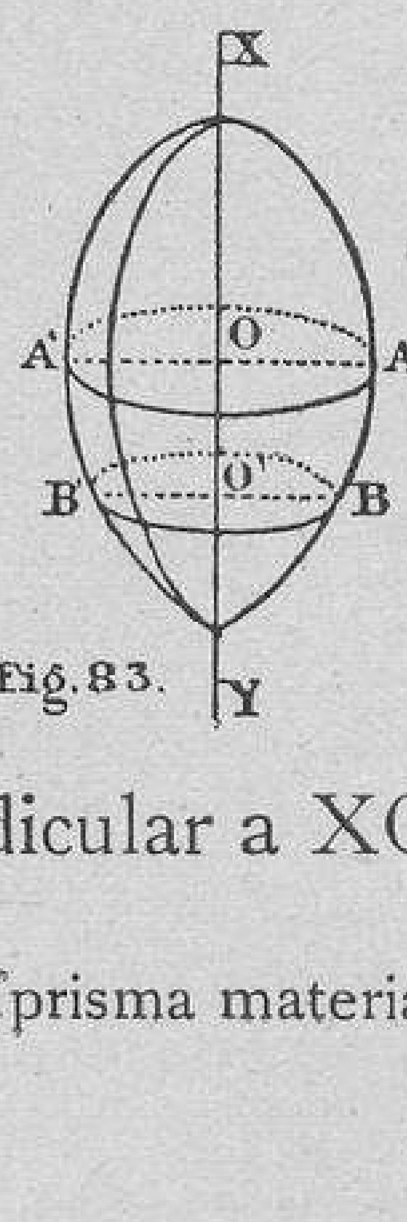


Fig. 83.

(*) Se hablará después de estos planos, pero con un prisma material puede el profesor anticipar la idea.

(264). Y lo mismo podría acontecer con el punto B, etc. Por ello se dice:

**Superficie de revolución** *es la engendrada por una línea que gira alrededor de una recta fija, de modo que los puntos de aquélla describan circunferencias de plano perpendicular a la recta.*

La recta fija se denomina *eje* y la línea móvil *generatriz*. Nosotros hemos supuesto que la generatriz y el eje estaban en un plano: entonces cada posición de la generatriz es la sección causada en la superficie por un semiplano que pasa por el eje, y en este sentido se llama *meridiano*, y *antimeridiano* la sección que produce el semiplano opuesto. (*)

Las circunferencias de plano perpendicular al eje descritas por los diversos puntos de la generatriz, se llaman *paralelos*, y si hay uno de mayor radio que todos los demás, *ecuador*. (En la figura, XABY es el meridiano, XA'B'Y el antimeridiano, y las circunferencias de radios OA y O'B, paralelos).

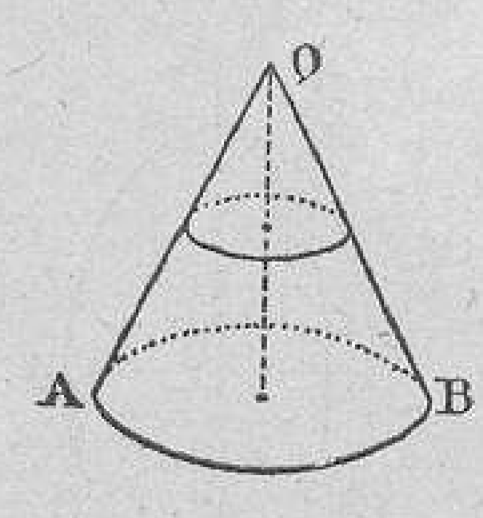

Fig. 84.

*Todos los meridianos son iguales*, puesto que uno de ellos coincide con los demás al ir engendrando la superficie.

268. **Superficie cónica de revolución** *es la engendrada por una semirrecta cuyo origen está sobre el eje.* (Fig. 84). *Vértice* es el origen de la generatriz; *lado*, cualquiera posición de ella; *ángulo cónico*, el que forma el lado con

---

(*) Identificamos la generatriz y el meridiano en atención a lo elemental de esta obra.

el eje. (*) Los paralelos crecen a medida que se alejan del vértice.

**Cono de revolución** *es el cuerpo limitado por la superficie cónica de revolución y el plano de un paralelo.* Se llama también *cono circular recto.*

269. **Superficie cilíndrica de revolución** *es la engendrada por una recta paralela al eje.* (Fig. 85).

La distancia entre la generatriz y el eje es constante, o, lo que es igual, todos los paralelos tienen el mismo radio.

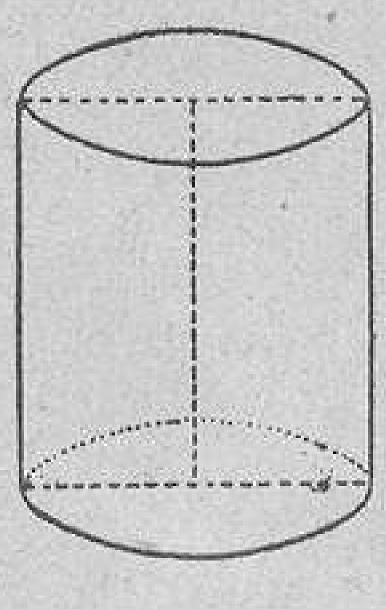

Fig. 85

**Cilindro** *de revolución es el cuerpo limitado por la superficie cilíndrica de revolución y los planos de dos paralelos.*

Se llama también circular recto.

270. **Superficie esférica** *es la producida por la revolución de una semicircunferencia alrededor de su diámetro.*

**Esfera** *es el cuerpo limitado por la superficie esférica.* (Fig. 86).

Como los puntos de la semicircunferencia generatriz equidistan de su centro, y no pierden esta cualidad durante la rotación que engendra la superficie, dedúcese que los puntos de la superficie esférica equidistan de otro interior, que es el *centro* de la semicircunferencia generatriz y también de la superficie esférica y de la esfera.

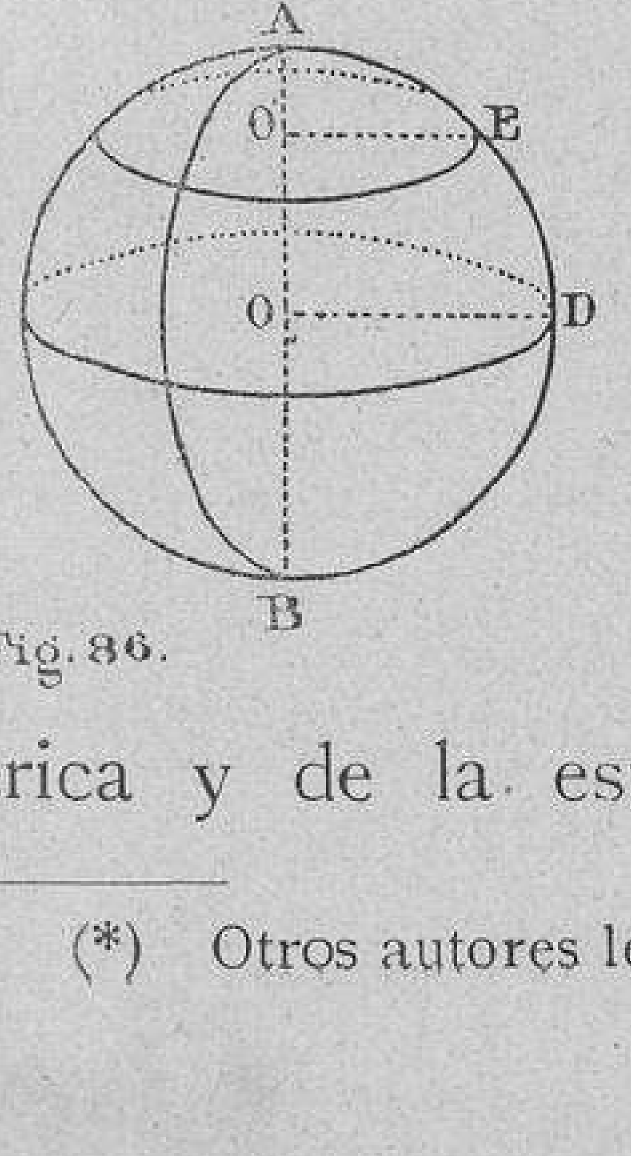


Fig. 86.

(*) Otros autores le llaman semiángulo cónico.

Fácilmente se advierte que los demás puntos del espacio distan menos o más del centro según sean interiores o exteriores a la superficie y, en consecuencia, puede decirse:

*La superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos del espacio que están a distancia determinada de otro.*

*Radio* de la superficie esférica y de la esfera es la distancia del centro a un punto de la superficie. Luego todos los radios son iguales. *Cuerda* es el segmento de recta que une dos puntos de la superficie. *Diámetro* es la cuerda que pasa por el centro. Todos los diámetros son iguales por ser cada uno suma de dos radios.

Si por un diámetro cualquiera se traza un semiplano, cortará a la superficie esférica en puntos equidistantes del centro, los cuales formarán, por tanto, una semicircunferencia, que podría considerarse como generatriz de la superficie.

Así, pues, *la superficie esférica tiene infinidad de ejes de revolución*, puesto que puede serlo cualquier diámetro.

271. *Un plano corta a la superficie esférica según una circunferencia.* Porque si se toma como eje de revolución el diámetro perpendicular al plano secante, la sección sería un *paralelo*.

Las circunferencias cuyos planos pasan por el centro tienen igual radio que la esfera, y se llaman circunferencias *máximas*. Las demás circunferencias, y sus círculos, se denominan *menores*.

La parte de superficie esférica limitada por un círculo se llama *casquete* (*) y el cuerpo cerrado por él *segmento esférico de una base.*

La parte de superficie esférica comprendida entre dos paralelos se llama *zona;* y el cuerpo que limitan la zona y los círculos de los paralelos, *segmento esférico de dos bases.*

Dos meridianos de un mismo diámetro incluyen una porción de la superficie que se llama *huso;* y el cuerpo correspondiente es una *cuña.*

EJERCICIO.—Explicar estas definiciones valiéndose de una esfera material, o de la figura 86.

Un círculo máximo es un plano diametral, esto es, que divide a la esfera (y a su superficie) en partes iguales llamadas *hemisferios;* lo que se prueba por la igualdad de los radios, como en la circunferencia. (25).

272. *Polo* de un círculo y del casquete correspondiente, es el extremo del diámetro perpendicular a aquél, contenido en el casquete.

Dos puntos situados sobre la superficie esférica, como los A y E, (F. 86), y el centro, O, determinan un plano cuya intersección con la superficie es una circunferencia máxima, EBCA, que pasa por aquellos puntos. Si éstos fueran extremos de un diámetro, el arco AE sería una semicircunferencia, pero en los demás casos entre A y E hay dos arcos: el AE y el ACBE, de los cuales consideraremos siempre el menor.

*Entenderemos por* **distancia esférica** *entre dos puntos*

(*) En rigor a un mismo círculo le corresponden dos casquetes, pero se toma siempre el menor, si no son iguales.

*el menor arco de circunferencia máxima comprendido entre ambos.* (*)

No debe confundirse la distancia *esférica* con la distancia absoluta, que se aprecia siempre por el segmento de recta que une los puntos.

273. *Radio esférico* de una circunferencia de la superficie esférica es la distancia *esférica* entre su polo y uno de sus puntos; y *distancia polar* la cuerda de dicho arco.

Los diversos radios esféricos de una misma circunferencia se pueden considerar como diferentes posiciones de uno solo que gira alrededor del polo, y son, por consecuencia, todos iguales.

El radio esférico de una circunferencia máxima es un cuadrante. (AD en la F. 86).

(*) Se demuestra, en obras más extensas, que este arco, además de ser *único*, es *la menor* de las líneas esféricas que van de un punto al otro; pero esta demostración requiere consideraciones de que prescindimos en atención al carácter muy elemental de este libro.

## CAPITULO II

# Diedros y ángulos esféricos

274. **Diedro** *o ánguio de dos planos, es la figura formada por dos semiplanos que parten de una recta común.*

Esta recta se llama *arista* y los semiplanos *caras*

Para designarlo se nombran las caras o bien se lee con cuatro letras, una por cada cara y dos por la arista, enunciando éstas en medio, v. gr.: diedro PQ o diedro PMNQ (F. 87).

Se precisa la definición, y se adquiere idea de la magnitud del diedro, suponiendo que uno de los planos gira alrededor de la arista desde una posición inicial (cara de origen) hasta otra final (cara extrema), en sentido determinado, análogamente a como se dijo al tratar de los ángulos rectilíneos. (31).

275. **Ángulo esférico** *es la figura esférica que forman dos arcos de circunferencia máxima que parten de un mismo punto.*

Este punto es el *vértice*, y los arcos los *lados*.

Se supone que el ángulo resulta del giro de uno de los lados alrededor del vértice; y, por consecuencia, son aplicables a estos ángulos las consideraciones hechas al hablar de los ángulos rectilíneos relativamente al sentido, a la magnitud, etc.

276. Llamaremos *arco correspondiente a un ángulo esférico*, al arco de circunferencia máxima descrito desde el vértice como centro y cuyo radio esférico sea un cuadrante.

277. Si consideramos un diedro PQ (F. 87) y en un punto de la arista trazamos a ésta dos perpendiculares AB y AC, una en cada cara, es claro que si *cerráramos* el diedro de modo que los dos semiplanos que lo forman se confundieran, las dos perpendiculares citadas se confundirían también. (39).

Y si ahora, inversamente, hiciéramos girar uno de los semiplanos alrededor de la arista, al mismo tiempo que esta cara iba formando con la otra diedros cada vez más grandes, la perpendicular AC situada en ella iría formando con la otra perpendicular AB diversos ángulos rectilíneos, correspondientes de un modo único a los diedros dichos.

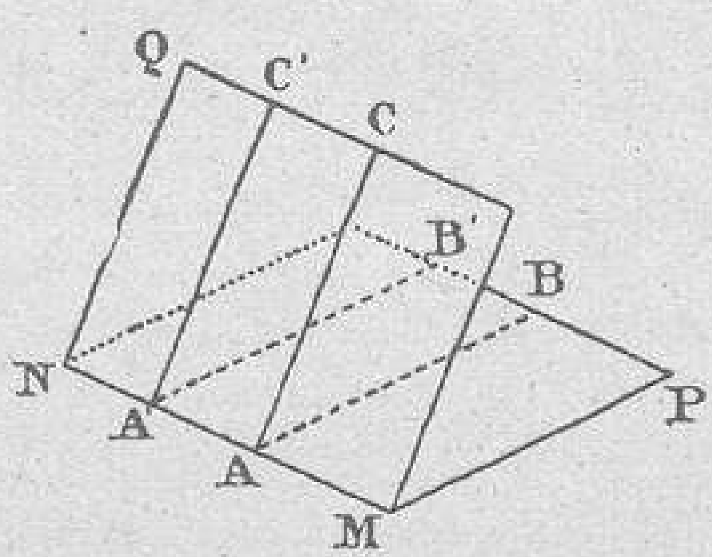

Fig. 87.

Por eso: *se llama ángulo rectilíneo correspondiente a un diedro, el formado por dos perpendiculares a la arista en un mismo punto, y situadas una en cada cara.*

El punto de la arista en que se han de trazar tales perpendiculares puede ser cualquiera, pues fácilmente se ve que si se formasen los rectilíneos correspondientes a dos puntos distintos como los ABC y A'B'C', estos ángulos podrán coincidir por una traslación rectilínea hecha simultáneamente con sus dos lados a lo largo de la arista del diedro.

278. Si tenemos ahora un diedro formado por los

semiplanos POA y POB (F. 88) y suponemos descrita una superficie esférica que tenga por centro cualquier punto, O, de la arista, las caras serán cortadas por la superficie esférica en arcos de circunferencia máxima PA, PB, con lo que resultará un ángulo esférico de vértice P. Tomemos sobre uno de sus lados el arco PA igual a un cuadrante, y unamos A con el centro O. Hecho esto, se advierte que *al mismo tiempo* que el arco PA girando alrededor de P hasta la posición PB engendra el ángulo esférico APB, el semiplano POA, engendra el diedro APOB; el radio OA engendra el ángulo rectilíneo AOB; y el punto A el arco de circunferencia máxima AB.

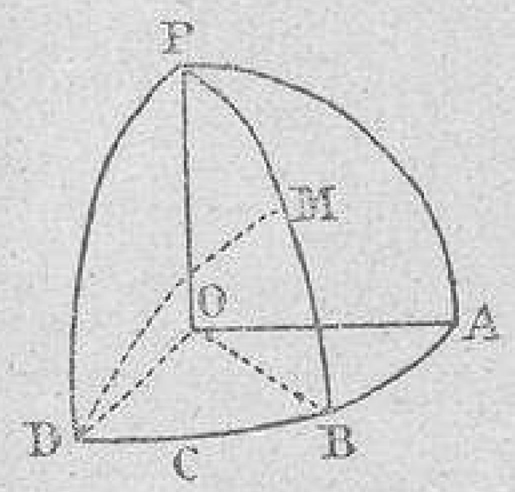

Fig. 88.

Si, pues, para todos los ángulos mencionados y para el arco tomásemos unidades *correspondientes*, el mismo número de veces que contuviese el ángulo esférico a la unidad de ángulos esféricos contendría el diedro a la unidad de diedros, el rectilíneo a la de rectilíneos y el arco a la de arcos, y, en consecuencia:

*La medida de un ángulo esférico, la del diedro que forman los planos de sus lados, la del rectilíneo de este diedro y la del arco correspondiente al ángulo esférico, son iguales, siempre que se correspondan las respectivas unidades.*

Así trazando, por P, 360 meridianos que formasen ángulos iguales, quedaría el espacio dividido en 360 diedros iguales por semiplanos que pasarían por PO; el plano del círculo ABC..... dividido en 360 ángulos rectilíneos y la circunferencia ABC..... en 360 partes iguales. Como cada una de éstas es un *grado,* se llama también ángulo de un *grado* cada uno de los esféricos, diedros o rectilíneos mencionados.

279. Como consecuencia pueden sentarse las siguientes definiciones y propiedades.

*Diedro llano es el que vale 180°.*—Sus caras forman un plano único.

*Angulo esférico llano es el que vale 180°.*—Sus lados caen sobre una misma circunferencia.

*Diedro recto es la mitad de un llano.*—Los planos que lo forman se dice que son *perpendiculares* entre sí.

*Ángulo esférico recto es la mitad de un llano.*—Los arcos que lo forman se llaman *perpendiculares.*

280. Las denominaciones y propiedades de los ángulos rectilíneos referentes a su posición o tamaño, tales como las de ángulos *consecutivos, adyacentes, suplementarios,* etc., se aplican fácilmente a los ángulos esféricos y a los diedros, sustituyendo, para éstos, las palabras *lados* por *caras, vértice* por *arista* y *recta* por *plano.* (V. los números 32 a 37 y 40 a 43) A la bisectriz del ángulo rectilíneo corresponde el *plano bisector* en el diedro, y el *arco bisector* en el ángulo esférico.

EJERCICIO.—Enunciar y demostrar las propiedades más sencillas de diedros y ángulos esféricos, por analogía con las correspondientes de ángulos rectilíneos.

CAPÍTULO III

# Perpendicularidad

281. *Por una recta se puede trazar un solo plano perpendicular a otro, excepto en el caso de ser la recta perpendicular al plano, pues entonces hay infinitos.*

Distinguiremos tres casos:

1.º F. 89.—Sea la recta *a* situada en el plano P.

D.—La recta *a* determina en P dos semiplanos que forman un ángulo llano. Como éste tendrá su plano bisector único, dicho plano bisector, Q, es el plano perpendicular al P, puesto que forma con él diedros rectos.

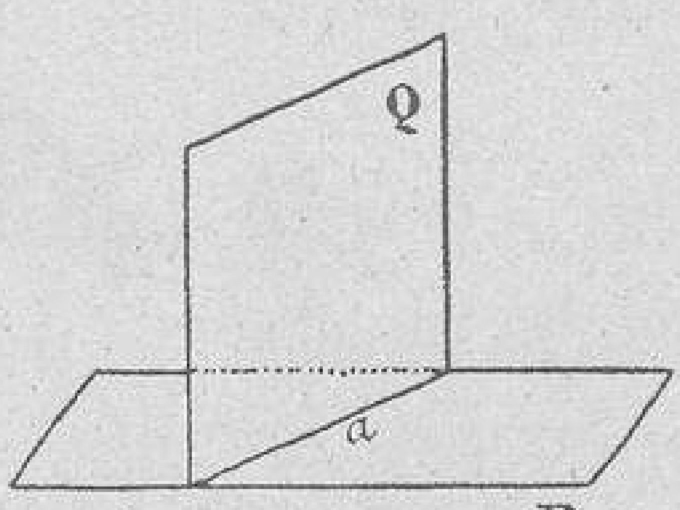

Fig. 89.

2.º F. 90.—Sea la recta *a*, no perpendicular al plano P. Y sea P'Q un diedro recto, construído aparte, por el procedimiento que permite el caso 1.º.

D.—Pongamos el diedro recto P'Q sobre el plano P de modo que coincida con éste la cara P'. Se podrá, sin abandonar esta coincidencia, hacer que el diedro se mueva hasta que Q pase por un punto de la recta *a*, y si no la contiene, se hará

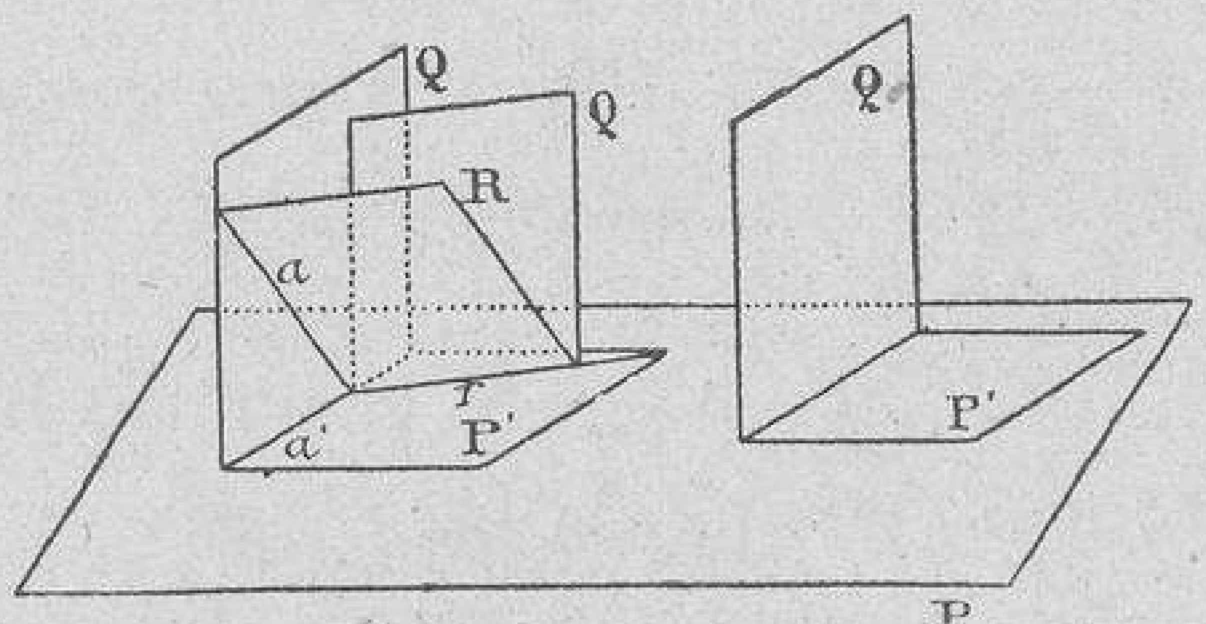

Fig. 90.

que gire hasta que la contenga. Entonces se tendrá, por *a*, el plano Q perpendicular al P.

Además, *observando* que en cuanto la traza *a'* de Q sobre P cambie de posición ya no pasará Q por la recta *a*, (*) se deduce que dicho plano es el único perpendicular. Porque si existiese otro, R, que pasando por *a* fuese perpendicular a P, al colocar el diedro recto P'Q de modo que su arista coincidiese con la traza, *r*, de R sobre P, como para esta posición no pasa Q por *a*, habría por *r* dos planos perpendiculares al P, a saber: el R y el Q; contra lo expuesto en el caso 1.º, luego R no es perpendicular a P.

3.º Sea *a* una recta perpendicular a P y P'Q el diedro recto del caso anterior. (Figura 91).

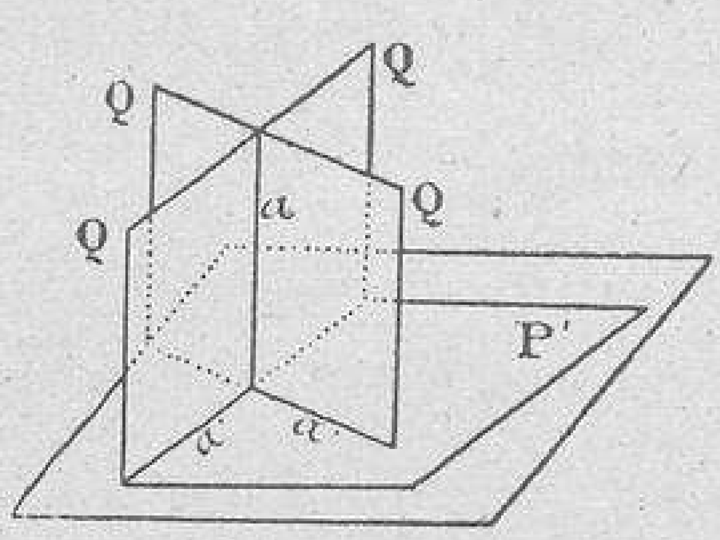

Fig 91.

D.—Al llevar, como antes, el plano Q a pasar por la recta *a*, se observa que puede girar sin dejar de contenerla puesto que *a* formaría con *a'* un ángulo recto cuyo lado *a'* engendraría el plano P.

Luego por *a* hay infinitos planos perpendiculares a P.

282. *Por un punto de una superficie esférica, que no sea polo de una circunferencia máxima, se le puede trazar a ésta un solo arco perpendicular, menor que un cuadrante.*

1.º F. 88.—Si el punto, B, está sobre la circunferencia máxima ABC..., será vértice de un ángulo esférico llano, cuyo arco bisector, BP, será perpendicular a ABC.

(*) Lo admitimos como postulado.

2.º F. 88.—Sean: M el punto dado exterior a la circunferencia máxima ABC; P el polo de ésta situado en el mismo hemisferio en que esté M, y PA un radio esférico de ABC, que será un cuadrante.

D.—Girando PA alrededor de P, recorrerá el hemisferio en que se halla M y llegará a pasar por este punto. Y como PA es perpendicular a ABC en todas sus posiciones (por ser recto el diedro de arista OA) también MB será perpendicular.

Además queda determinado el pie B del arco móvil de tal suerte, que cuando aquél cambie, éste no pasará por M. (*) Luego si existiese otro arco, MD, perpendicular, haciendo que PA tomase, al girar, la posición PD habría por el punto D dos arcos perpendiculares a la circunferencia dada: el DM y el DP, contra lo establecido en el primer caso.

283. Hemos admitido (264) que por *un punto de una recta se le puede trazar un plano perpendicular*. Desde luego, las rectas *contenidas* en el plano *p* (fig. 78) y que pasan por el pie B de la perpendicular, son perpendiculares a AB (264). *Recíprocamente:* toda perpendicular BH a AB en el punto B, está sobre el plano *p*. Porque, de lo contrario, siendo BC la traza, sobre *p*, del plano determinado por AB y BH, habría en este plano dos rectas perpendiculares a AB en un mismo punto, a saber: la BH, por hipótesis, y la BC por estar contenida en *p*; lo cual es absurdo (39)

De aquí se deduce que: *el plano perpendicular a una recta en un punto es el lugar geométrico donde se hallan*

(*) Se admite como postulado.

*contenidas todas las rectas perpendiculares a aquélla en dicho punto.*

Llamaremos plano *mediador* de un segmento de recta al perpendicular trazado por su punto medio.

*El plano mediador de un segmento es el lugar de los puntos del espacio equidistantes de los extremos de dicho segmento.* Porque es el lugar de todas las mediatrices del segmento en los infinitos planos que pasan por él, y estas mediatrices contienen todos los puntos equidistantes de los extremos (91).

284. *Por un punto existe un solo plano perpendicular a una recta.*

1.º Si el punto está sobre la recta, véase lo dicho en el número anterior.

2.º F. 92.—Sea M el punto exterior a la recta AB. Tracemos el plano P perpendicular a ésta en cualquiera de sus puntos.

D.—Moviendo el plano P a lo largo de AB sin que deje de ser perpendicular a ella, llegará a contener en alguna de sus posiciones el punto M, luego habrá por éste *un* plano perpendicular a AB.

Y solo uno, pues si hubiese otro, P', las trazas MN y MS de P y P' con el plano determinado por AB y M, serían *ambas* perpendiculares a AB, cosa imposible. (39).

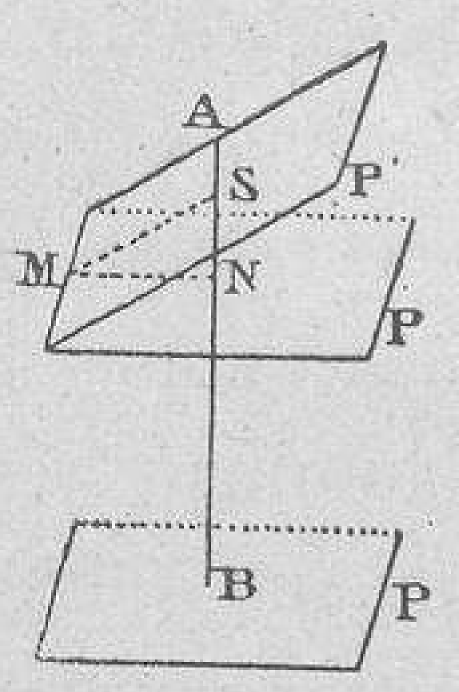

Fig. 92.

285. *Por un punto existe una sola recta perpendicular a un plano.*

F. 93. 1.º—Sea el punto M del plano P. Construyamos aparte el plano P' perpendicular a una recta *a*.

D.—Se podrá hacer que P' coincida con P y resbale luego sobre él hasta que el pie de *a* esté sobre M. Entonces habrá por este punto la perpendicular *a* al plano P. Y no habrá otra, tal como MA, porque entonces en el plano que ambas determinan existirían dos perpendiculares por un punto a la traza MB de dicho plano con el P; cosa imposible.

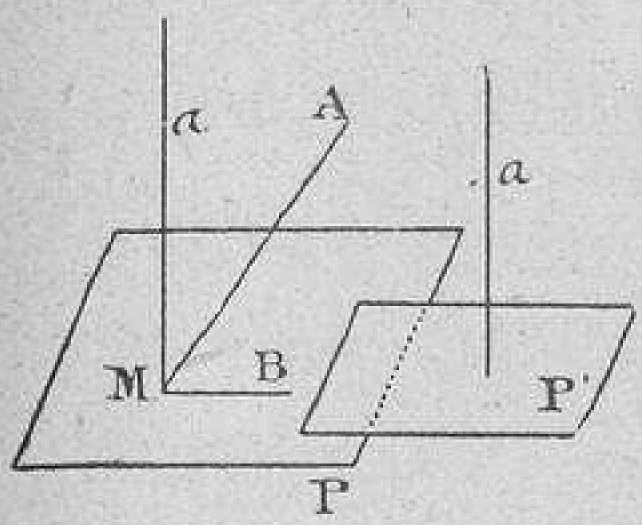

Fig. 93

2.° Si el punto M está fuera de P se hace la misma demostración en la fig. 94 cambiando la traza MB del caso anterior por la AC.

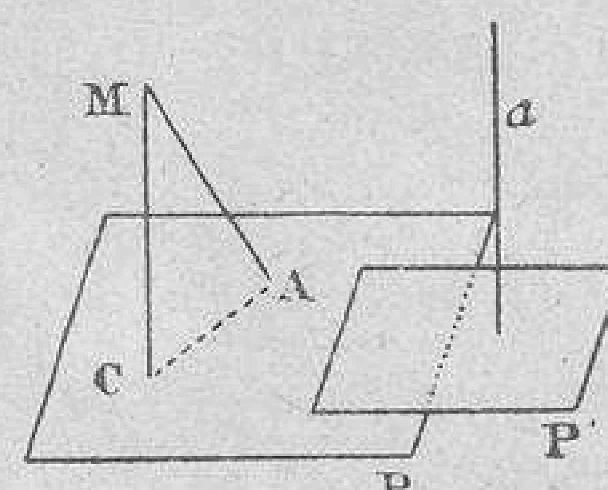

Fig. 94.

286. 1.°—*Si desde un punto se trazan a un plano una perpendicular y varias oblicuas (limitadas por el punto y sus respectivos pies) la perpendicular es menor que cualquier oblicua.*

D.—Porque la perpendicular AB (fig. 95) la oblicua AC, y el segmento que une sus pies están en un mismo plano, y en él ya se demostró la propiedad (59).

287. 2.°—*En la misma hipótesis, todas las oblicuas cuyos pies estén a igual distancia del pie de la perpendicular son iguales, y forman ángulos iguales con la perpendicular y con las rectas que unen sus pies al de la perpendicular.*

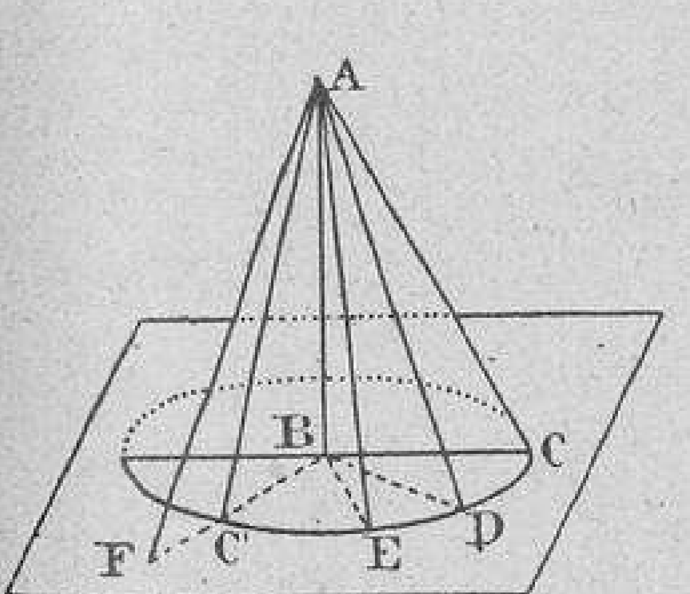

Fig. 95.

D.—Porque todas las oblicuas dichas AC, AD, AE, etc., pueden considerarse como diversas posiciones de la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC que forman la perpendicular, una oblicua y el segmento que une sus pies, al girar dicho triángulo alrededor de la perpendicular.

288. **Corolario.**—*Las porciones de generatriz de una superficie cónica de revolución comprendidas entre el vértice y un paralelo son iguales.*

*Uniendo todos los puntos de una circunferencia con uno de la perpendicular a su plano, por su centro, se forma parte de una superficie cónica de revolución.*

Estos corolarios no difieren de lo anterior sino en el enunciado.

289. 3.°—*Si se tienen (como antes) una perpendicular y dos oblicuas a un plano, la oblicua cuyo pie esté más distante del de la perpendicular es la mayor, y forma mayor ángulo con la perpendicular y menor con el segmento queune su pie al de la perpendicular.*

F. 95.—Sean: la perpendicular AB, y las oblícuas AC y AF tales que BF > BC.

D.—Llevando por rotación alrededor de AB, el triángulo ABC sobre el ABF quedará C entre B y F en posición tal como la C', y entonces por lo demostrado en la 1.ª parte (187) será AF mayor que AC' (o que su igual AC); ángulo BAF > BAC y ángulo AFB < ACB, por ser estos ángulos complementarios de los antes citados.

290. Los teoremas 1.°, 2.° y 3.° tienen sus recíprocos ciertos, (65), y en su virtud pueden enunciarse los siguientes:

*La menor distancia de un punto a un plano se mide* *por la perpendicular; las oblicuas iguales tienen sus pies en una circunferencia cuyo centro es el de la perpendicular, y la oblicua cuyo pie diste más que el de otra del de la perpendicular es mayor que aquélla.*

También podría decirse: *las oblicuas que forman ángulos iguales con la perpendicular, pertenecen a una superficie cónica de revolución cuyo eje sea la perpendicular y las que formen menor o mayor ángulo son interiores o exteriores a dicha superficie cónica; por lo cual ésta es el lugar geométrico de las rectas que forman con el eje un ángulo dado.*

291. Se llama *proyección ortogonal* de un punto sobre un plano, el pie de la perpendicular trazada desde aquel punto al plano. La perpendicular se llama proyectante, y el plano, *plano de proyección.*

Proyección de un segmento sobre un plano es la distancia entre las proyecciones de los extremos de aquél.

EJERCICIO.—Proyectar sobre un plano varios segmentos, y en particular uno que tenga su origen en el plano, y otro que le sea perpendicular.

Más en general, la proyección de una línea sobre un plano, es el lugar geométrico de las proyecciones de todos los puntos; el cual se obtiene por la intersección del plano de proyección con la superficie proyectante. Ésta es un plano perpendicular al de proyección cuando la línea proyectada es recta; pero si la línea fuese curva, la superficie proyectante sería cilíndrica (en el sentido general). (266).

292. *Angulo de una semirrecta que tiene su origen en un plano, con este plano, es el que forma aquella semirrecta con su proyección ortogonal sobre el plano.*

Se elige el citado entre los varios ángulos que la semirrecta forma con rectas situadas en el plano porque:

*El ángulo que una semirrecta forma con su proyección, es menor que el formado con otra cualquiera de las rectas que pasan por el origen de aquélla.*

F. 96.—Sea AB la semirrecta, A su origen, AX la proyección, y AC, AD, AE, etc., varias rectas del plano que pasan por A. Sea además B*b* la proyectante del punto B, y describamos, haciendo centro en A, la circunferencia de radio A*b*.

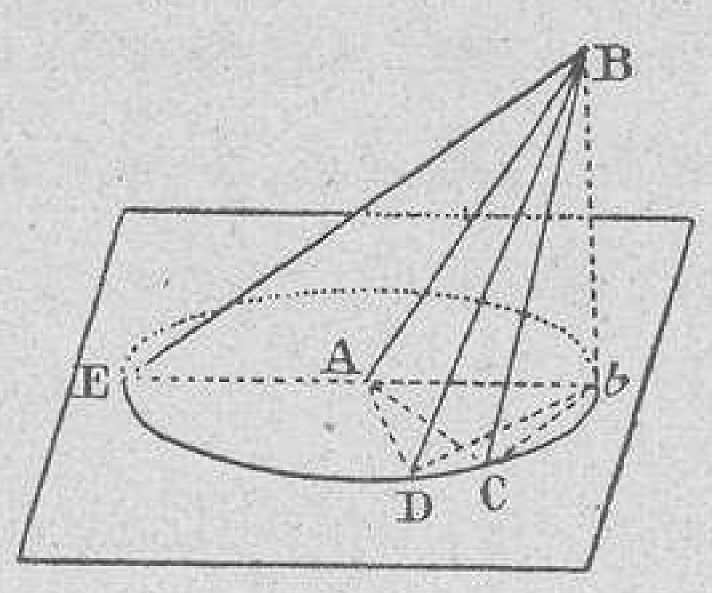

Fig. 96.

D.—Las cuerdas *b*C, *b*D..., van aumentando hasta la *b*E que es la mayor, luego las oblicuas BC, BD,... BE también, por lo cual en los triángulos ABC, ABD,... ABE que tienen común el lado AB e iguales los AC, AD, etc., a medida que crece el tercer lado, crecerá el ángulo opuesto a él (221). Luego BA*b* < BAC < ... < < BAE. Continuando el giro de la oblicua por la otra semicircunferencia, irían los ángulos disminuyendo hasta el BA*b*. Este es, pues, el menor; y su suplementario BAE el mayor.

293. *Si un triángulo rectángulo tiene un cateto perpendicular a un plano, y el otro perpendicular a una recta del plano, también la hipotenusa es perpendicular a esta recta.* (*)

F. 97.—Sea el triángulo ABC con el cateto AB per-

(*) Por ahora supondremos que la recta del plano pasa por el extremo del cateto. En virtud de la generalización del concepto de ángulo que luego ha de hacerse, desaparece esta restricción.

pendicular al plano P y el BC perpendicular a la recta DE. Tomemos a partir de C las distancias iguales CD y CE y unamos E y D con B y con A.

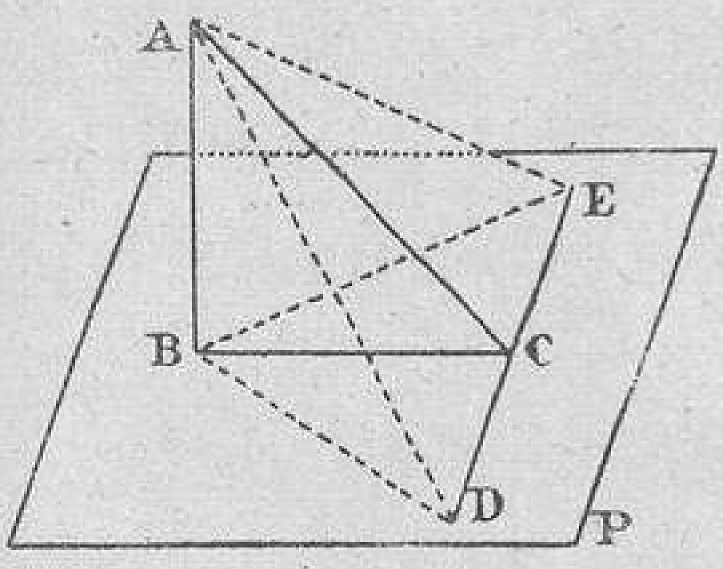

Fig 97

D.—CB es mediatriz de DE, luego BD = BE. Por esta causa son iguales las oblicuas AD y AE (287), luego A equidista de D y E, y como C es el punto medio de DE, CA es mediatriz de DE.

294. **Escolios.** 1.° La recta DE es perpendicular a CB y CA, luego lo es al plano del triángulo ABC.

295. 2.° El ángulo ACB es mayor que el ADB. Porque siendo BD (oblicua) mayor que BC (perpendicular) si se colocaran en un mismo plano (y a una misma región) los triángulos ABC y ABD, se tendría la fig. 98, en que el ángulo 1 es mayor que el 2 (188).

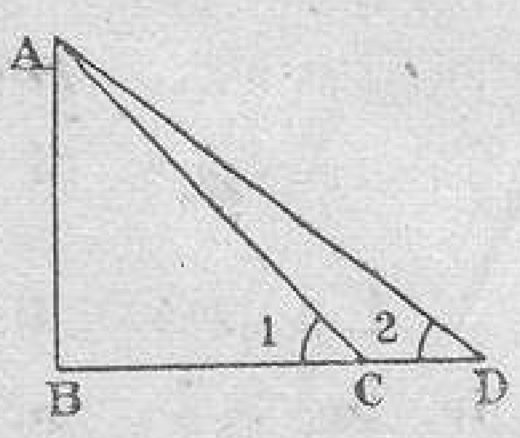

Fig. 98.

296. *Recta de máxima pendiente de una cara de un diedro con relación a la otra, es la perpendicular trazada a la arista por un punto de la primera cara.*

Así (F. 97): para el diedro que forman el plano del triángulo ADE con el P, la recta de máxima pendiente, entre las que pasan por A, es AC. La denominación se justifica, porque según el escolio anterior (295), el ángulo que forma AC con el plano P, es *mayor* que el que forma otra recta cualquiera, AD, oblicua a la arista DE del diedro.

297. T.—*Las perpendiculares a la arista de un*

*diedro recto situadas en una cara, son perpendiculares a la otra.*

F. 99. Sean: el diedro ABCD, AE la perpendicular a la arista situada en el plano Q. Tracemos ED perpendicular a la arista en E y situada en la cara P.

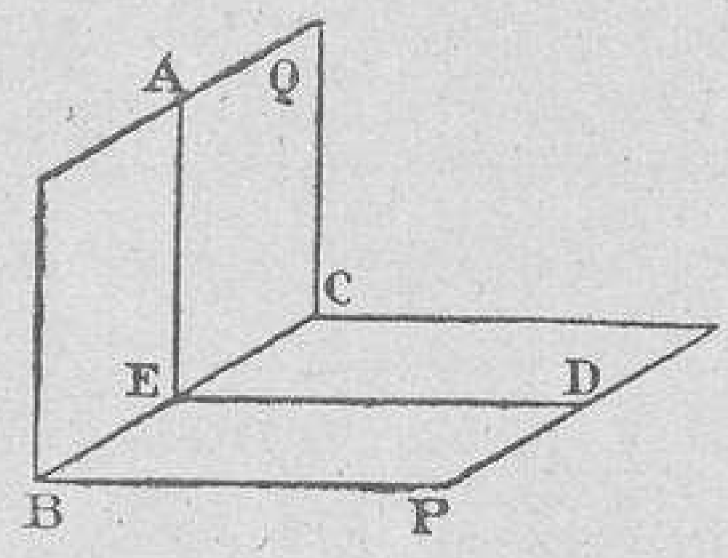

Fig. 99.

D.—AE es perpendicular a la arista BC (hipótesis) y aED puesto que el rectilíneo AED es recto como el diedro PQ. Luego AE es perpendicular a P. (264).

298. R.—*Las perpendiculares a una cara de un diedro recto trazadas por puntos de la arista, están en la otra cara.* F. 99.

La perpendicular EA a P, en el punto E, es perpendicular a la recta ED. Pero el lugar de las perpendiculares a ED en E, es el plano Q (283) puesto, que según el directo, la recta ED es perpendicular a Q, o éste a ella. Luego EA está en Q.

299. *Si la arista de un diedro es perpendicular a un plano, también lo son las caras.*

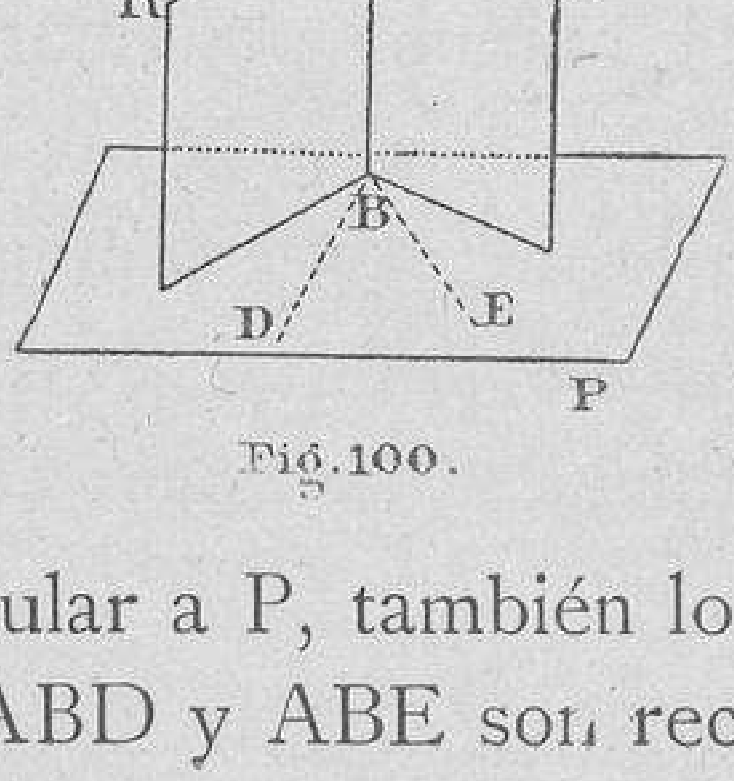

Fig. 100.

F. 100.—Sean: AB la arista perpendicular al plano P, y Q y R las caras del diedro. Formemos los rectilíneos de los diedros RP y QP trazando las rectas BE y BD.

D.—Como AB es perpendicular a P, también lo es a BD y BE, luego los rectilíneos ABD y ABE son rectos, y los correspondientes diedros

QP y RP también, es decir, que Q y R son perpendiculares a P.

300. R.—*Si un plano es perpendicular a otros, lo es a su intersección.*

Pues si por B trazamos la perpendicular a P, deberá estar contenida en R y en Q (298) y será, por ende, la intersección de estos planos.

CAPÍTULO IV

# Paralelismo

301. Se sabe que las rectas paralelas cumplen con dos condiciones: 1.ª estar en un plano, y 2.ª no tener ningún punto común. Tratándose de rectas del espacio pueden no tener punto común, pero no podrá afirmarse por eso sólo que hayan de ser paralelas, pues es preciso cerciorarse, además, de que se hallan en un mismo plano.

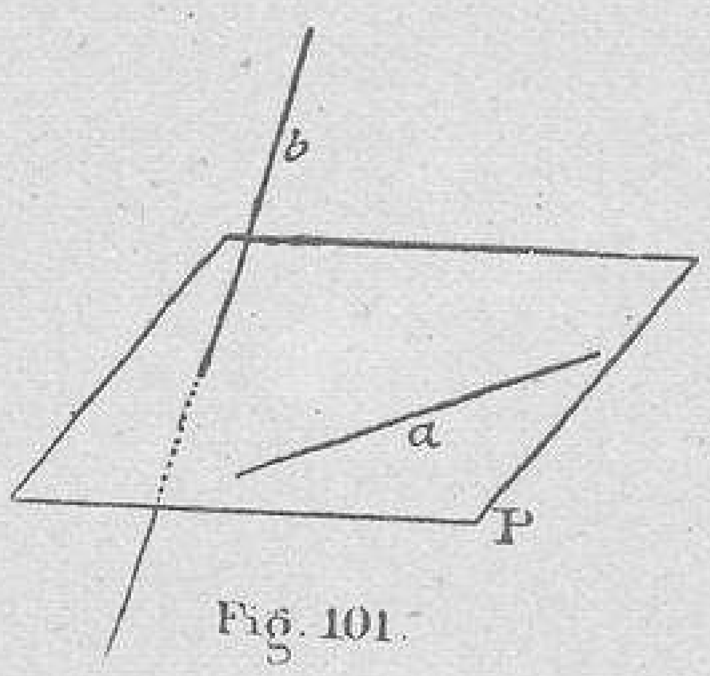

Fig. 101.

Así: la recta *a* (F. 101) situada en el plano P, no se encuentra con la *b*, que corta al plano en un punto que no es de *a*, y sin embargo ambas rectas no deben llamarse paralelas. De ellas se dice que *se cruzan*.

302. *Por un punto del espacio, sólo se puede trazar una paralela a una recta.*

Porque el punto y la recta determinan un plano, y en él sólo hay una paralela a la recta por aquel punto.

303. *Una recta y un plano, o dos planos, se dicen paralelos entre sí cuando no tienen punto común.*

304. *Dos planos perpendiculares a una recta* (en dos puntos distintos), *son paralelos.*

F. 102.—Sean P y Q perpendiculares a AB en A y B.

D.—Si P y Q se encontrasen, por cualquiera de los puntos de su traza habría dos planos perpendiculares a AB; cosa imposible. (284).

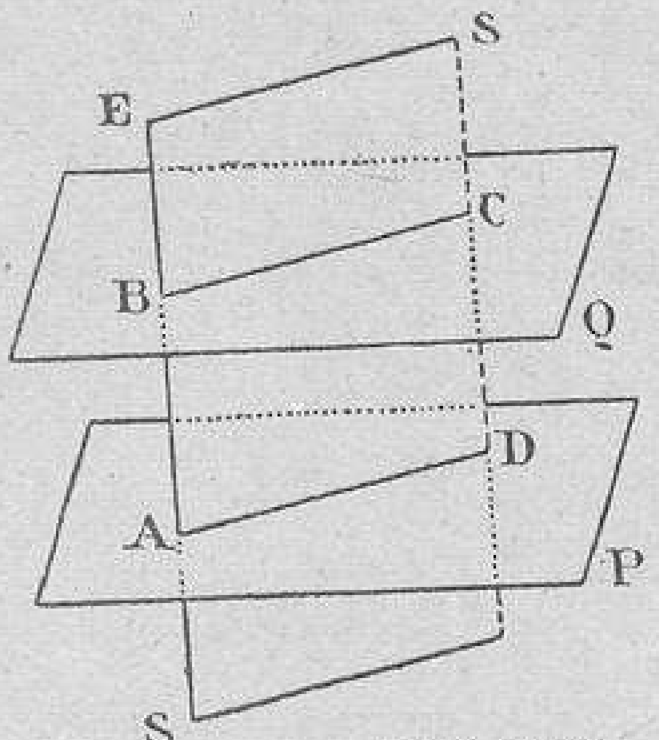

Fig. 102

305. Examinando la figura 102 en la cual las rectas EB, BC y AD están en un plano S, se comprueban fácilmente las siguientes propiedades.

306. 1.ª BC y AD son paralelas, puesto que están en un plano, S, y no tienen punto común, ya que tampoco lo tienen los planos Q y P en que se hallan. Lo cual se enuncia:

*Las intersecciones de dos planos paralelos* (P y Q) *con un tercero* (S), *son paralelas.*

307. 2.ª—Por no tener Q y P ningún punto común, tampoco lo tienen BC y P: luego son paralelos. O bien: *Toda recta situada en uno de dos planos paralelos es paralela al otro.*

308. 3.ª—BE, que corta a BC cortará (prolongada) a su paralela AD, y de consiguiente al plano P: es decir: *Si una recta corta a uno de dos planos paralelos, corta al otro.*

309. **Escolio.**—De estos dos últimos teoremas se desprende que *el plano* (Q), *paralelo a otro* (P), *y trazado por un punto* (B), *es el lugar geométrico de las paralelas trazadas al segundo plano por dicho punto.*

310. 4.ª—Un plano distinto de S y que pasara por BE, cortaría a BC y AD y, por consiguiente, a Q y a P. O dicho en general: *Si un plano corta a una de dos pa-*

*ralelas corta a la otra; y si corta a uno de dos planos paralelos corta al otro.*

**Escolio.**—Puesto que por un punto se puede trazar un plano paralelo a otro, y según el teorema precedente un plano que corte a uno de ellos corta a los dos, resulta que *por un punto sólo hay un plano paralelo a otro.*

311. 5.ª—Si se traza CD paralela á BA serán iguales, porque, siendo también paralelas BC y AD. la figura BADC es un paralelogramo. Esto se enuncia: *Las partes de paralelas comprendidas entre una recta y un plano o entre dos planos paralelos son iguales.*

312. 6.ª Siendo BA perpendicular a P, el diedro de los planos S y P será recto (281-3.º) y CD, perpendicular a la arista AD de este diedro, será también perpendicular a la cara P (297) Es decir: *si una recta es perpendicular a un plano, sus paralelas también lo son.*

313. Recíprocamente: si se admite que AB y CD son perpendiculares a P, CD lo será a AD y estará situada en el plano determinado por AB y D, porque dicho plano es perpendicular al P (281, 3.º y 298); luego será paralela a AB, por hallarse ambas en un plano y ser perpendiculares a una recta, AD. Lo que puede expresarse diciendo: *Si dos rectas son perpendiculares a un plano, son paralelas.*

314. **Escolios.** 1.º—*Dos rectas,* b *y* c, *paralelas a otra,* a, *son paralelas entre sí.* (Hágase la figura).

Porque si se trazase un plano al que fuese perpendicular *b*, lo sería su paralela *a* (312) y por serlo *a* lo sería su paralela *c*, luego, en resumen, *b* y *c* serían perpendiculares ambas a dicho plano, y, por ello, paralelas entre sí (313).

315. 2.º—*Los puntos de una recta o de un plano paralelos a otro, equidistan de él.*

Porque los segmentos que expresan las distancias, como perpendiculares al plano, son paralelos entre sí (313) y a consecuencia de ello son iguales (311).

316. El contrario de este teorema puede comprobarse con gran sencillez, y por tanto: *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un plano se compone de otros dos, paralelos a él y situados a distinta región.*

317. *Si un plano es paralelo a una de dos paralelas, lo es a la otra o la contiene.* Porque de cortar a ésta cortaría a aquélla (310).

318. *Si un plano es paralelo a uno de dos planos paralelos, lo es al otro o se confunde con él.* Pues si cortase a éste cortaría al primero (310).

319. *Si las caras de un diedro son paralelas a una recta, la arista también lo es.*

Sea *a* la arista del diedro y *r* la recta dada. Si por *r* trazamos el plano paralelo a una cara, cortará a la otra en una recta que llamaremos *b*, paralela a la *r* y también a la *a* (306); luego *a* y *r* son paralelas, por serlo ambas a *b* (314).

320. *Los ángulos de los lados paralelos son iguales o suplementarios.*

F. 103.—Sean BAC y B'A'C' dos ángulos agudos y con sus lados AB y A'B', AC y A'C' paralelos. Unamos A con A'.

D.—Por una traslación rectilínea, hecha simultáneamente con los dos lados AB y AC a lo largo de la arista AA′, coinciden, a un tiempo, AB con A′B′ y AC con A′C′, luego BAC = B′A′C′.

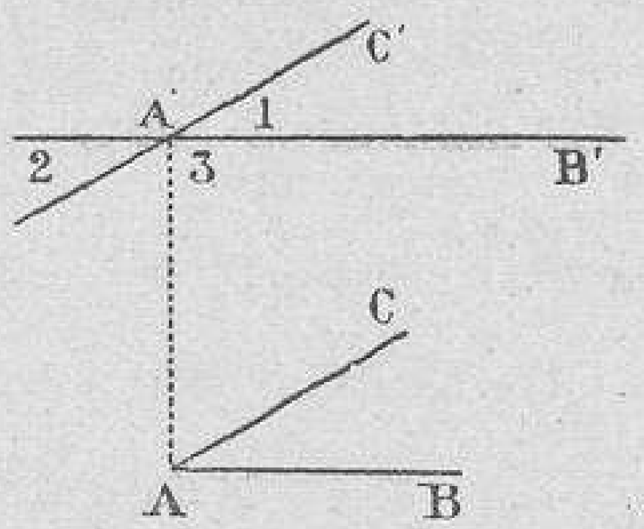

Fig. 103.

Observación.—Respecto al sentido de los lados se harán las mismas consideraciones que en el teorema análogo de la 1.ª Parte (166).

321. *Se llama ángulo de dos semirrectas cualesquiera del espacio el que formen otras dos semirrectas trazadas por un mismo punto, paralelamente a las primeras.*

Según el teorema precedente, el tamaño de este ángulo no depende de la posición del punto por el cual se tracen las paralelas dichas. Así; si las semirrectas dadas fueran las AB y DC (fig. 104) y eligiésemos dos puntos, O y O′ por los cuales trazásemos las paralelas $OB_1$ y $OC_1$, $O'B_2$ y $O'C_2$ a AB y DC, respectivamente, como los ángulos $B_1OC_1$ y $B_2O'C_2$ serían iguales, (320), cualquiera de ellos podría considerarse como ángulo de AB con DC.

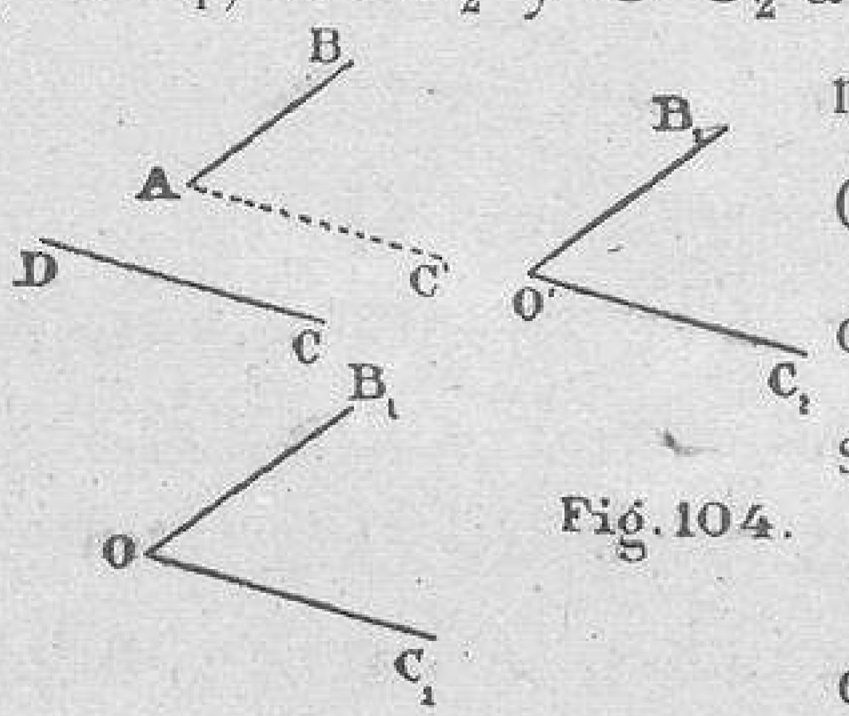

Fig. 104.

Lo más frecuente es apreciar el ángulo de dos semirrectas por el que forma una de ellas con la paralela a la otra trazada por el origen de la primera. El ángulo de AB con DC sería, según esto, el BAC′ que forma AB con AC′ paralela a DC.

322. La definición dada para el ángulo de rectas que se cruzan permite generalizar ciertos teoremas. Así

por ejemplo, puede decirse que la recta perpendicular a un plano lo es *a todas* las situadas en él, aunque no las encuentre, y también a todas las paralelas al plano. Porque a cualquiera de éstas se le podrá trazar una paralela por el pie de la perpendicular, la cual formará con ambas ángulo recto. (Conviene hacer la figura).

EJERCICIO.—Generalizar la definición de perpendicular a un plano, y el teorema 293, según se indica en la nota del mismo.

323. Dos planos paralelos cortados por otro secante forman con él 8 diedros que reciben iguales nombres y tienen iguales propiedades que los 8 ángulos que una secante forma con dos rectas paralelas. Así por ejemplo, *los ángulos correspondientes son iguales.*

F. 105. Sean los planos paralelos P y P′ cortados por el secante S en las rectas paralelas (306) *a* y *b*. Tracemos el plano R perpendicular a éstas.

D.—Las secciones que produce R en los diedros correspondientes, son sus rectilíneos; y como éstos son iguales, por correspondientes entre las paralelas *p* y *q* cortadas por la secante *r*, aquellos diedros son iguales.

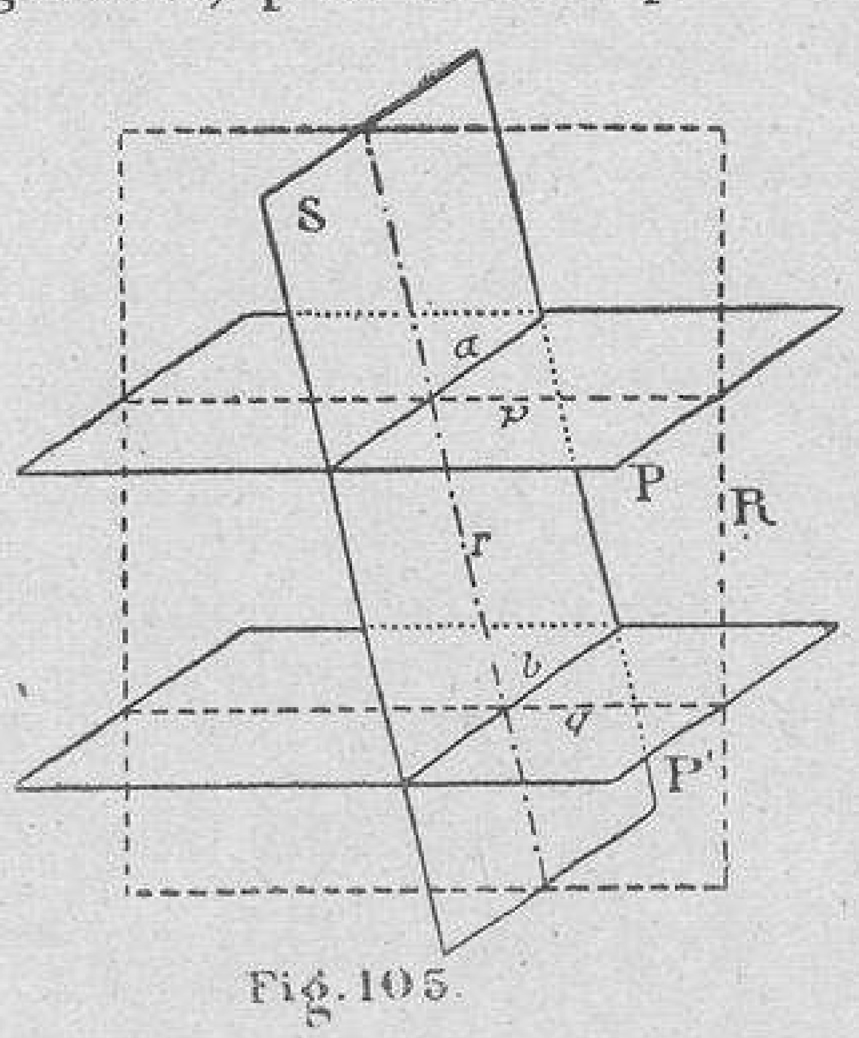

Fig. 105.

DETALLES.—*p* y *q* son paralelas por intersecciones de dos planos paralelos con un tercero (306). Como las rectas *a* y *b* son perpendiculares al plano R lo son a las rectas *r*, *p* y *q*, y por esto son los ángulos que éstas forman rectilíneos de los diedros.

324. Se podría llevar el plano P a coincidir con P′ haciendo que el plano S sufriese una traslación rectilínea tal, que *a* coincidiese con su paralela *b*, puesto que así el diedro SP venía a coincidir con su correspondiente SP′. El movimiento impreso a P se llama *traslación en el espacio, guiada por el plano* S.

325. **Escolio.**—El recíproco del teorema precedente sólo es cierto con la condición de que las trazas de los planos dados con el secante sean paralelas, es decir que: si dos planos cortados por otro dan diedros correspondientes iguales, y *además* tienen éstos sus aristas paralelas, los planos serían paralelos.

J. Vidal

CAPÍTULO V

# Triedros y triángulos esféricos

326. **Angulo poliédrico** es la porción de espacio comprendida dentro de una superficie piramidal. El vértice y las caras de ésta son también vértice y caras del ángulo poliédrico. Las rectas de intersección de las caras se llaman *aristas*, y *diedros*, los que forman cada dos caras consecutivas.

Se ve, pues, que el ángulo poliédrico está formado por la reunión de planos que se cortan en un punto, o por las semirrectas que partiendo de un punto, determinan, cada una con la siguiente, distintos ángulos planos, que son las caras del ángulo poliédrico; lo que podrá servir de definición.

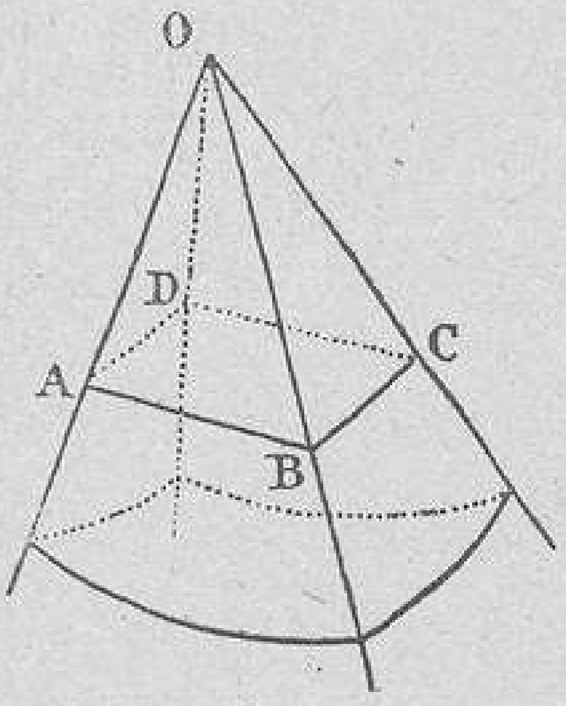

Fig. 80.

327. Si se cortan todas las aristas de un ángulo poliédrico por un plano, cada cara de aquél determinará sobre este plano un segmento de recta, y todos éstos formarán un polígono que llamaremos *sección* del ángulo poliédrico. (ABCD de la figura 80).

328. Si en vez de cortar el ángulo poliédrico por un plano, se cortase por una superficie esférica cuyo centro fuese el vértice de aquél, cada cara determinaría un arco de circunferencia máxima, y todos estos arcos encerrarían una porción de superficie esférica que se llama *polígono esférico* correspondiente al ángulo poliédrico. )Parte inferior de la fig. 80).

329. Estudiaremos únicamente los ángulos poliédricos cuyas secciones planas sean polígonos convexos.

Los ángulos que forman las caras del ángulo poliédrico se considerarán siempre menores que 180°, y los arcos que sobre la superficie esférica determinen serán también menores que 180°. Efectivamente, entre el ángulo poliédrico y su polígono esférico correspondiente existe una relación íntima, según la cual, las caras de aquél tienen igual medida que los lados de éste, y los diedros del ángulo poliédrico igual medida que los ángulos esféricos que forman los lados del polígono esférico.

Lo primero, porque las caras del ángulo poliédrico son ángulos centrales a los cuales corresponden, como arcos, los lados del polígono esférico; y lo segundo, en virtud de la relación entre el ángulo esférico y el diedro correspondiente (278).

330. **Triedro** *es el ángulo poliédrico de tres caras.* Tiene tres diedros, opuestos cada uno a una cara, y tres aristas. (F. 106).

331. **Triángulo esférico** *es el polígono esférico de tres lados.* Tiene elementos completamente análogos a los del triángulo rectilíneo, y correspondientes a los del triedro que se forma uniendo sus vértices con el centro de la superficie esférica. (F. 106).

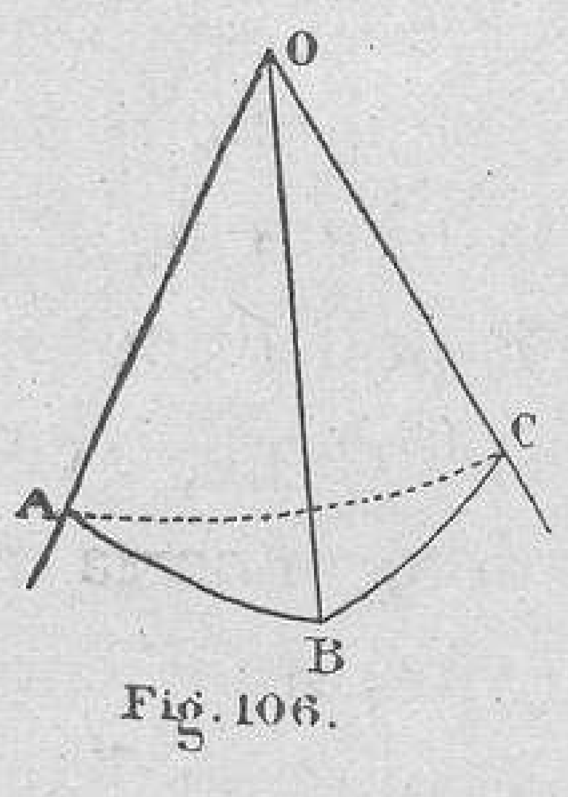

Fig. 106.

332. Triedros o triángulos esféricos iguales son los que pueden coincidir.

Claro es, que para que dos triángulos esféricos coin cidan, es preciso que estén sobre una misma superficie esférica, o sobre dos superponibles por tener el mismo radio.

333. Triángulos esféricos *simétricos con relación al centro de la superficie esférica* son aquellos cuyos vértices están diametralmente opuestos, como los ABC y A′B′C′. (Fig. 107).

334. Estos triángulos tienen sus elementos iguales. Dos lados, por ejemplo, AB y A'B', porque son los arcos correspondientes a los ángulos opuestos por el vértice AOB y A′OB′.

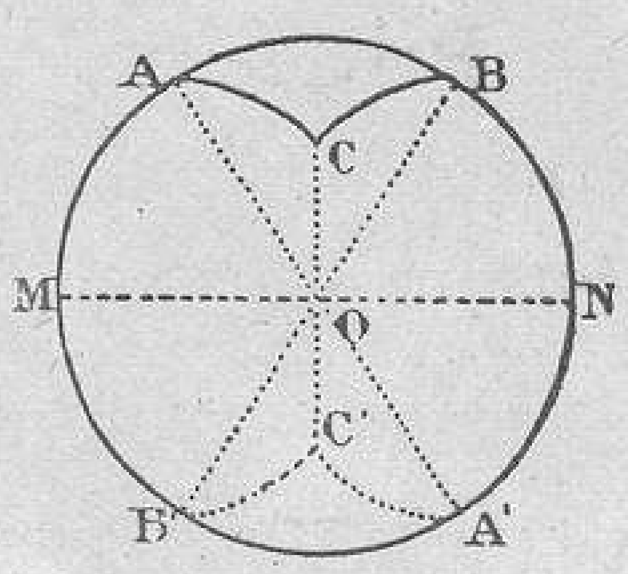

Fig. 107.

Dos ángulos, tales como el A y el A', porque este último es opuesto por el vértice del A' del huso ABA′CA, y es claro que dos ángulos de un mismo huso tienen igual medida (278).

335. *Dos triángulos esféricos, simétricos con relación al centro de la superficie esférica, pueden coincidir si tienen iguales entre sí dos ángulos; pero no en caso contrario.*

F. 107. Sean ABC y A′B′C′ los triángulos en que suponemos A = B y por tanto A' = B'. Tracemos el diámetro MN que une los puntos medios de AB′ y BA′ y supongamos que MABN fuese el meridiano que engendrara la superficie esférica al girar alrededor de MN.

D.—1.° Por giro alrededor de MN caerán A sobre B' y B sobre A′, y como estos ángulos son iguales, sus lados coincidirán y C caerá sobre C', luego los triángulos dados habrán coincidido.

Pero si A no fuese igual a B, tampoco lo será a B′ y la coincidencia no sería posible por este método.

2.° El arco AB podría coincidir con A′B′ resbalando sobre la circunferencia a que ambos pertenecen, pero como con relación a esta circunferencia caen C y C′ en distinto hemisferio, no pueden coincidir los triángulos.

336. **Corolarios**. 1.°—*Si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos son iguales.*

Porque si A=B se ha visto que ABC puede coincidir con A′B′C′ cayendo el lado BC sobre el A′C′, y como éste es igual al AC dedúcese que BC=AC.

Este triángulo que tiene dos ángulos y dos lados iguales se llama *isósceles*.

337. A los triángulos esféricos ABC y A′B′C′ les corresponden los triedros OABC y OA′B′C′ que se llaman *simétricos con relación al vértice*. Sus caras y sus diedros son iguales por serlo los lados y ángulos de los triángulos esféricos.

En consecuencia, puede decirse:

*Dos triedros que tengan iguales entre sí dos diedros, pueden coincidir; y en ellos, a los diedros iguales se oponen caras iguales.*

Tales triedros se denominan *isoedros*.

338. *Se llama triángulo polar de otro, el que tiene por vértices los polos de los lados del primero, elegidos de tal suerte, que el arco que une el polo de un lado con el vértice opuesto a éste, sea menor que un cuadrante.*

Ejemplo: Sea el triángulo ABC (F. 108) el arco

AB tendrá dos polos, pero elijamos aquél cuya distancia a C sea menor que un cuadrante, y llamémosle C'. Busquemos de igual manera los polos de BC y AC y sean, respectivamente, A' y B'. El triángulo A'B'C' es polar del ABC.

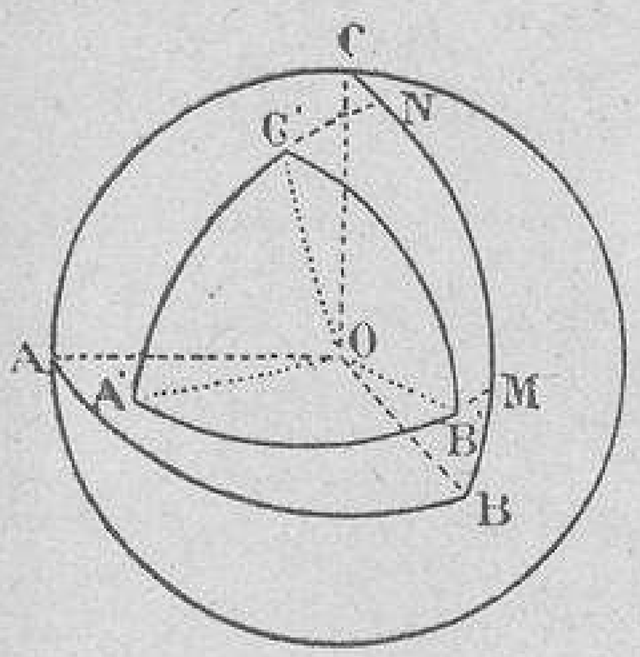


Fig. 108.

339. *Si un triángulo* A'B'C' *es polar de otro* ABC, *éste es polar de aquél.*

Porque para ser A' polo de BC, la distancia *esferica* A'C habrá de ser un cuadrante; y para serlo B' de AC también será B'C un cuadrante. Luego C dista un cuadrante de A' y de B', y es, por ende, polo de A'B'. Además el arco CC' o C'C es menor que un cuadrante.

Razonando igual para los otros vértices se ve que el triángulo ABC se derivaría del A'B'C' por la misma regla que sirvió para formar éste a partir de aquél.

340. *Los triángulos esféricos polares son suplementarios: lo cual quiere decir que cada ángulo de uno es suplemento de un lado del otro.* (*)

F. 108.—Sean ABC y A'B'C' dos triángulos polares en que A' es el polo de BC, y sean M y N los puntos de intersección de las prolongaciones de los lados de A' con BC.

D.—El ángulo A' tiene igual medida que su arco correspondiente MN. Si sumamos éste con BC, la suma podrá escribirse como sigue:

$$MN + BC = MN + (BM + MC) = (BM + MN) + \\ + MC = BN + MC.$$

(*) No se olvide que los ángulos y los lados, que son arcos, pueden medirse en grados.

Pero BN es 90°, por ser B polo del arco A'C' que pasa por N, y MC también 90° puesto que C es polo de A'B'M, luego la suma anterior vale 180°, es decir:

$$\text{ang, } A' + \text{arc. } BC = 180°.$$

341. A los triángulos polares o suplementarios corresponden *triedros* llamados *suplementarios*. En ellos cada arista del uno (OC' p. ej.) es perpendicular a una cara del otro (la AOB) y forma con la arista opuesta a esta cara (OC) un ángulo *agudo* (C'OC). Todo lo cual nace de las relaciones entre los elementos del triedro y los del triángulo esférico correspondiente.

Podemos, pues, enunciar el teorema.

*En dos triedros suplementarios, cada diedro del uno es suplemento de una cara del otro.*

342. **Escolios.**—1.° Si dos triángulos esféricos o dos triedos tienen algunos lados o caras iguales, los triángulos o triedros suplementarios tendrán iguales otros tantos ángulos o diedros; y al revés.

2.° Si se llaman A, B, C, los diedros de un triedro o los ángulos del triángulo esférico correspondiente, $a$, $b$, $c$, las caras o los lados respectivamente opuestos, y A', B', C', $a'$, $b'$, $c'$, los elementos análogos del triedro o triángulo esférico suplementarios, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} A + a' = 180° \\ B + b' = 180° \\ C + c' = 180° \end{array}\right\} (1), \text{ de donde } \left\{\begin{array}{l} a' = 180° - A \\ b' = 180° - B \\ c' = 180° - C \end{array}\right. \quad (2)$$

343. La suma de los ángulos de un triángulo esférico convexo es mayor que 180° y menor que 3 veces 180°.

F. 109.—Sea el triángulo ABC y designemos por $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, los husos de ángulos A, B y C, contando el $BB_1$ a partir del ángulo opuesto por el vértice del B del triángulo.

D.—Los tres husos citados cubren más de un hemisferio, luego sus ángulos A, B y C suman más de 180°, que sería el ángulo correspondiente a un huso igual al hemisferio.

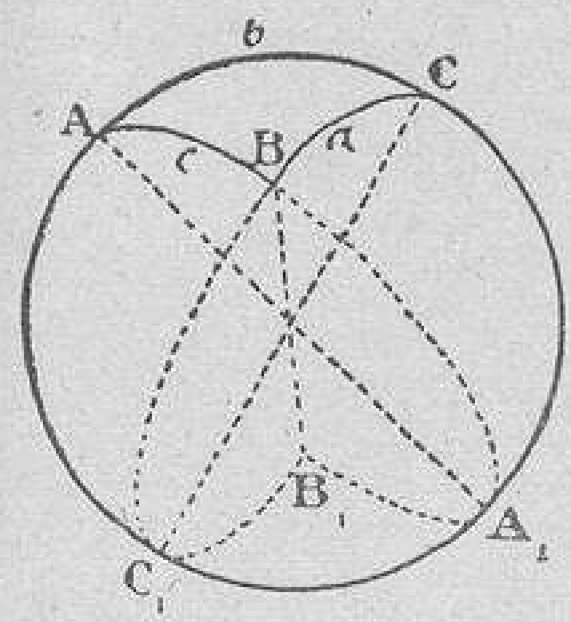

Fig. 109.

La suma es menor que tres veces 180°, porque cada ángulo es menor que 180°.

344. **Corolario.**—*La suma de los diedros de un triedro es mayor que un llano* (180°) *y menor que tres.*

345. *La suma de los* **lados** *de un triángulo esférico convexo es menor que 360°.*

D.—Sumando las igualdades (1) del número anterior, se tiene:

$$(A + B + C) + (a' + b' + c') = 3 \times 180^\circ$$

Pero la parte $(A + B + C)$ vale más de 180°, luego la $(a' + b' + c')$ vale menos de $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

Y como $a'$, $b'$, $c'$ son los lados de un triángulo indeterminado, puesto que también es indeterminado su polar ABC, queda demostrado el teorema.

346. **Corolario.** *La suma de las caras de un triedro es menor que 360°, o dos llanos.*

347. *En el triángulo esférico convexo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

Basta demostrar la primera parte para el mayor lado, pues luego se razonaría como para los triángulos rectilíneos (213).

F. 109.—Sea ABC el triángulo dado. Completemos el huso $AA_1$ y se formará el triángulo $BCA_1$ que tiene común con el propuesto el lado $a$ siendo los otros lados $(180° - b)$ y $(180° - c)$.

D.—En el triángulo $BCA_1$ se verifica (345)

$$a + (180° - b) + (180° - c) < 360°$$

y de aquí, disminuyendo ambos miembros en 360° y aumentándolos en $b$ y $c$, (hágase), sale

$$a < b + c$$

según queríamos probar.

348. **Corolario.** Aplicando esta propiedad al triángulo polar,

$$a' < b' + c'$$

y poniendo en vez de $a'$, $b'$, $c'$ los valores hallados antes (2)

$$180° - A < 180° - B + 180° - C$$

o bien

$$180° - A < 360° - (B + C)$$

De donde sumando $A + B + C$ y restando 180°, (hágase), sale

$$B + C < 180° + A$$

lo que expresa, que

*La suma de dos ángulos de un triángulo esférico es menor que el tercero aumentado en 180°.*

349. *Para los triedros*, en virtud de su relación con los triángulos esféricos, se verifica:

*Una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.*

*La suma de dos diedros es menor que el tercero aumentado en 180°.*

350. *En el triángulo esférico, a ángulos iguales se oponen lados iguales, y a mayor ángulo mayor lado.*

Lo primero ya se ha demostrado (336). Probemos lo segundo.

F. 110.—Sea el triángulo ABC en que el ángulo A se supone mayor que el B. En el interior de A se podrá formar el ángulo 1 igual al B.

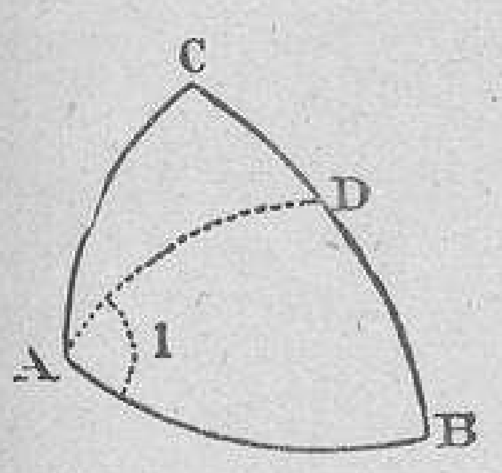
Fig. 110.

D.—Por ser $\widehat{1} = \widehat{B}$, es BD = AD; pero AC < AD + DC (347), luego también AC < BD + DC, o sea AC < BC.

351. Recíprocamente; *a lados iguales se oponen ángulos iguales, y a mayor lado mayor ángulo.*

Es cierto, por haberse hecho todas las hipótesis, etcétera. (65).

352. **Corolario.** *En un triedro, a diedros iguales se oponen caras iguales, y a mayor diedro mayor cara; y recíprocamente.*

353. **Escolio.** Resumiendo: para la existencia de un triángulo esférico convexo se precisa:

*a)*—Que los ángulos sumen más de 180°.

*b)*—Que cada ángulo y cada lado sea menor que 180°

*c)*—Que *el mayor* lado sea menor que la suma de los otros dos.

*d)*—Que la suma de los dos mayores ángulos sea menor que el tercero aumentado en 180°.

CAPÍTULO VI

# Construcciones sobre la superficie esférica

354. La superficie esférica tiene alguna semejanza con la superficie plana; pero también diferencias.

La semejanza nace principalmente de que una figura trazada sobre la superficie esférica puede moverse resbalando sobre ella sin sufrir deformación, y de que a los segmentos, ángulos y circunferencias de las figuras planas corresponden en la superficie esférica, respectivamente, arcos de circunferencia máxima, ángulos esféricos y circunferencias menores.

Pero hay una diferencia notable ente ambas superficies; y es que mientras el plano coincide consigo mismo invertido, y, de consiguiente, se puede dar la vuelta a una figura plana para que se amolde a la que llamamos su inversamente igual, en la superficie esférica no puede hacerse esto, a causa de su curvatura. En ella, pues, no se puede doblar por un arco de circunferencia máxima para que coincidan los puntos simétricos, etc.

Además, para las construcciones que ha yan de ejecutarse sobre la superficie esférica, requiérese tener en cuenta un elemento esencialísimo, a saber: el *radio* de aquélla.

Finalmente, conviene fijarse en que el radio esférico de una circunferencia, menor o máxima, es un arco, mientras que la distancia entre las puntas del compás que se emplea para trazarlo es un segmento: el llamado *distancia polar*.

En las clases, para los trazados sobre pizarras esféricas puede utilizarse un compás de piernas curvas o un hilo que no se adhiera mucho a la pizarra. En el primer caso, para describir una circunferencia habrá que hacer centro en el polo y dar al compás una abertura igual a la distancia polar; mientras que en el segundo, el hilo deberá tener una longitud igual a la del radio esférico rectificado.

Como fundamento de los problemas que en este capítulo han de resolverse, expondremos los teoremas que siguen:

355. T.—*Los puntos de la circunferencia máxima mediatriz* (*) *de un arco, equidistan esféricamente de los extremos de éste.*

F. 111.—Sea AB el arco, PC la circunferencia máxima mediatriz, M el punto de ésta cuyas distancias esféricas expresadas por los arcos MA y MB ha de probarse que son iguales; MA y MB las cuerdas de dichos arcos, y OD el radio perpendicular a la cuerda del arco AB, que pasará por el punto medio C de este arco.

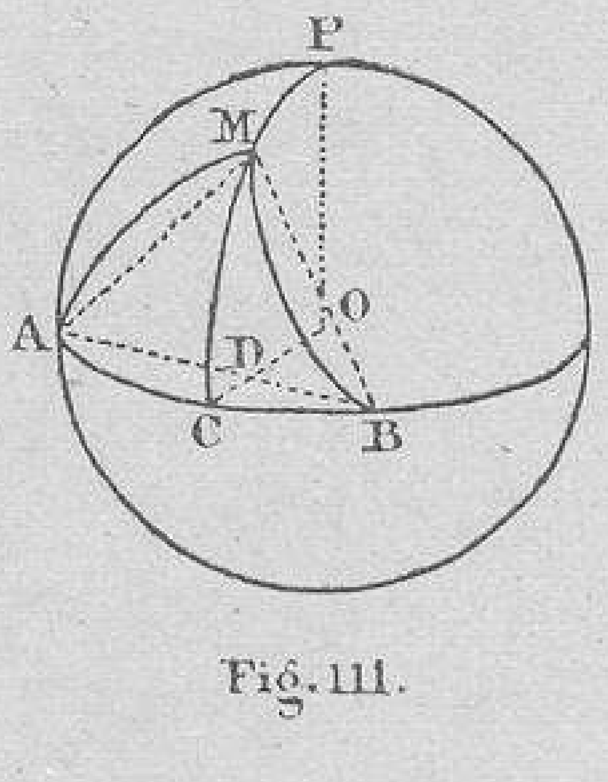

Fig. 111.

D.—El plano de la mediatriz PC es plano mediador de la cuerda AB. Luego las cuerdas MA y MB son iguales y también sus arcos.

Detalles.—PO es perpendicular al plano AOB, (por ser P el polo del arco AB) luego lo es a la recta AB, o ésta a OP, y como también lo es a OC, lo es al plano

(*) Perpendicular en el punto medio.

POC, o éste a ella. Pero dicho plano, que contiene a OC, pasa por el punto medio de AB, o es plano mediador; luego sus puntos equidistan de A y B (283).

356. R.—*Los puntos que equidistan esféricamente de los extremos de un arco, pertenecen a su mediatriz.*

D.—Si los arcos MA y MB son iguales, (hipótesis) las cuerdas MA y MB lo serán también, y M pertenecerá al plano mediador de AB. Pero este plano contiene la mediatriz DO de AB, y como ésta pasa por el punto medio, C, del arco AB, dicho plano mediador también pasa por C y corta a la superficie esférica según la circunferencia máxima PMC, mediatriz del arco AB.

357. **Escolios.** 1.º—*La mediatriz esférica del arco de circunferencia máxima que une dos puntos, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan esféricamente de aquéllos.*

358. 2.º—Siendo la propiedad demostrada para la mediatriz esférica de un arco igual a la que posee la mediatriz rectilínea de un segmento (91), son aplicables a las figuras esféricas las propiedades en que *únicamente* intervenga dicha propiedad: así v. gr.: podría decirse: Las oblicuas esféricas cuyos pies equidistan del de la perpendicular, son iguales, etc., pero para generalizar otras propiedades no debe olvidarse que la superposición por doblez no es aplicable a la superficie esférica, según ya hemos advertido.

EJERCICIO.—Decir qué propiedades de las contenidas en el Capítulo III de la 1.ª parte se podrán extender a la superficie esférica, y cuáles requieren nueva demostración.

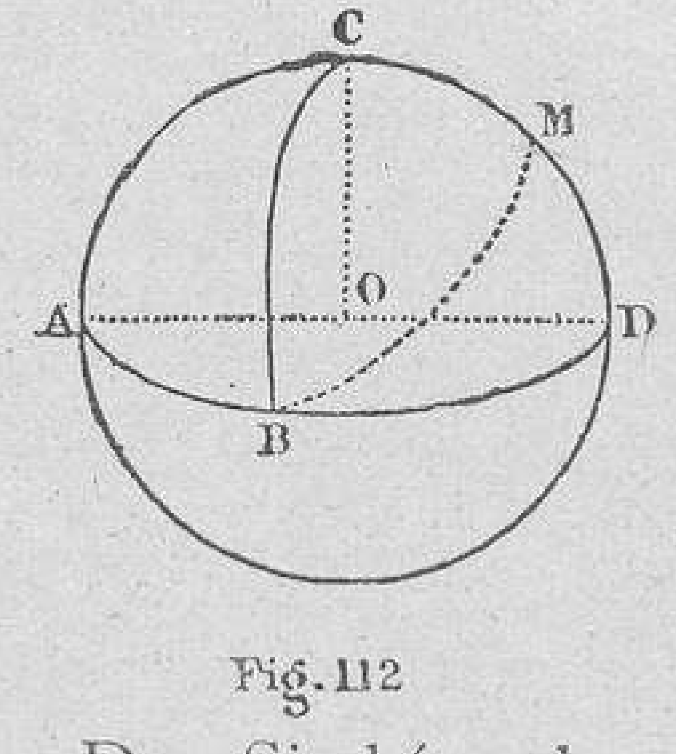


Fig. 112

359. *Cuando dos circunferencias máximas son perpendiculares, el polo de cada una está en la otra, y recíprocamente.*

F. 112.—Sean las circunferencias AB y CB.

D.—Si el ángulo esférico B es recto, su arco correspondiente, AC, será un cuadrante; luego B es el polo de AC y C el de AB.

Recíprocamente si AB y AC son cuadrantes, el ángulo esférico en B será recto.

360. **Escolio.** Puede resumirse diciendo que el triángulo ABC es *trirrectángulo* (con los tres ángulos rectos); sus tres lados son cuadrantes, y cada vértice el polo del lado opuesto.

361. *Una circunferencia de la superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos que equidistan esféricamente de su centro.*

Puesto que los puntos interiores o exteriores distan menos o más.

362. *La distancia esférica entre los polos de los lados de un ángulo esférico es igual a su arco correspondiente, siempre que para determinar dichos polos se cuenten, a partir de los lados, y sobre la circunferencia máxima perpendicular a ellos, dos cuadrantes en el mismo sentido.*

F. 113.—Sea APB, el ángulo, y A' y B', los polos de sus lados determinados contando sobre AB..., AA' = 90° y BB' = 90°.

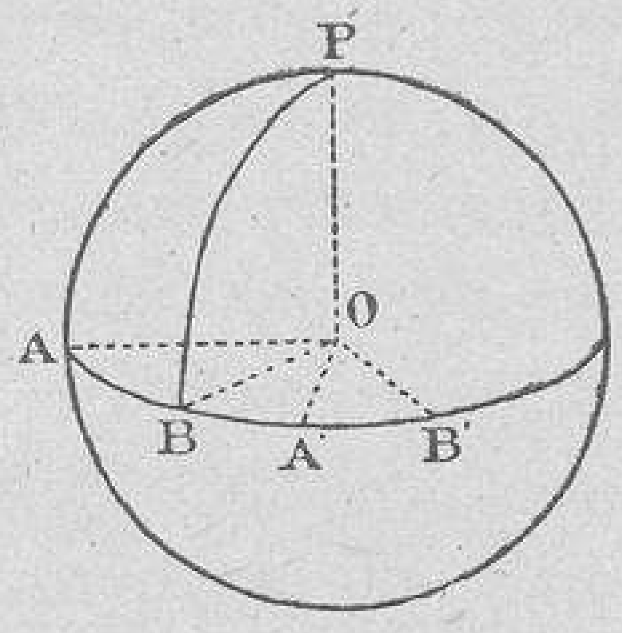

Fig. 113

D.—Si de AB' se resta AB queda BB' y si se resta A'B' queda AA' que es lo mismo, luego AB = A'B'.

363. **Problemas.** 1.° *Dados dos puntos sobre la superficie esférica, trazar la mediatriz esférica del arco de circunferencia máxima que uniría aquellos puntos.*

Construcción.—Completamente análoga a la del trazado de la mediatriz de un segmento rectilíneo; puesto que el fundamento es análogo (356).

364. 2.° *Hallar el radio de una superficie esférica.*

Solución.—Se marcan dos puntos, y se determinan *tres* de la circunferencia máxima mediatriz del arco que uniría aquéllos. Tomando con el compás esférico las distancias rectilíneas entre esos tres puntos, se construye con ellas un triángulo plano. La circunferencia circunscripta a éste es la circunferencia máxima; su radio el de la superficie esférica, y su cuadrante el radio esférico para trazar otra cualquiera circunferencia máxima.

Cuando no se dispone de compás esférico hay que valerse de otros artificios, como incluir la esfera entre dos planos paralelos cuya distancia nos dará el diámetro de aquélla, o rodear un cordón por la parte *más abultada* (esto es, suponiendo trazada ya una circunferencia máxima) y *calcular* después el radio de la circunferencia cuya longitud sea la que con el hilo se ha hallado, etc.

365. *Trazar una circunferencia máxima que pase por dos puntos dados.*

ANÁLISIS.—Conocido el radio esférico, que sería un cuadrante, basta conocer el polo, y como éste dista un cuadrante de cada uno de los puntos dados, se deduce la siguiente

SÍNTESIS.—Desde los puntos dados, con radio esférico de un cuadrante, se trazan dos arcos que se cortarán en el polo, y desde éste con igual radio se describe una circunferencia, que será la pedida, puesto que pasará por los puntos dados.

366. *Trazar, por un punto, una circunferencia máxima perpendicular a otra.*

PRIMER CASO.—F. 112.—Sea AB la circunferencia dada y A el punto, situado sobre ella.

FUNDAMENTO.—El polo de la circunferencia máxima pedida ha de estar sobre la dada (359) y distar de A un cuadrante; luego

SOLUCIÓN.—Se toma sobre AB y a partir de A un cuadrante, AB, y haciendo centro en B con radio esférico también de un cuadrante, se describe la circunferencia pedida, que será AC.

SEGUNDO CASO.—Sea ABD la circunferencia dada y M el punto *exterior* por donde ha de pasar la pedida.

FUNDAMENTO.—El polo de la circunferencia pedida ha de distar de M un cuadrante y ha de estar sobre ABD, luego

SOLUCIÓN.—Haciendo centro en M con radio de un cuadrante se corta la circunferencia dada en un punto B, y desde éste, con igual radio, se describe la circunferencia pedida, MD.

367. *Dibujar, con un vértice dado, un ángulo esférico igual a otro rectilíneo dado.*

F. 114.—Sea BOC el ángulo rectilíneo dado, y O la circunferencia máxima de la superficie esférica, que se habrá trazado previamente como ya se ha dicho (364).

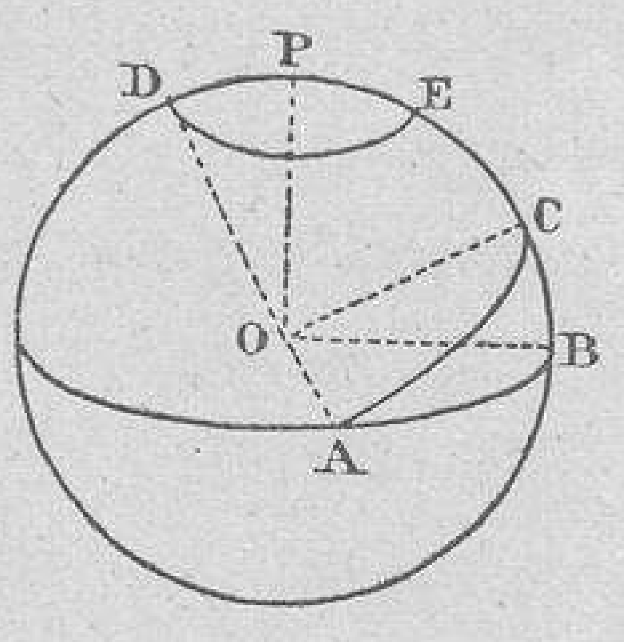


Fig. 114.

ANÁLISIS.—El arco BC es el correspondiente al rectilíneo, y el polo de un lado del ángulo pedido debe estar a una distancia esférica del polo del otro lado, igual a BC, (362).

SÍNTESIS.—Se traza una circunferencia máxima AB para que sirva de uno de los lados del ángulo. Haciendo centro en su polo, P, con un radio esférico igual a BC se describe una circunferencia menor DE, y desde el punto A, elegido como vértice del ángulo, y con radio de un cuadrante, se corta, trazando un arco, la circunferencia menor en un punto D que es el polo del otro lado AC, el cual se describirá, como siempre, con radio de un cuadrante.

368. **Escolios.** 1.º En vez del ángulo rectilíneo COB puede darse el arco BC; o, lo que es más frecuente, el número de grados del ángulo; pero fácilmente se comprende lo que hay que hacer en cada uno de estos casos para reducirlos al precedente.

2.º Si no diese el vértice, bastaría tomar como polos de los lados del ángulo, dos puntos que distasen un arco igual al BC.

369. *Construcción de ángulos esféricos.*—Consideraremos sólo los dos casos siguientes:

1.º Se utilizan dos lados y el ángulo comprendido.

2.º Se utilizan los tres lados.

Las construcciones se hacen lo mismo que las de los triángulos rectilíneos (216—1.º y 4.º)

Si se da el triángulo, y la construcción tiene por objeto copiarlo, se sabrá la disposición que han de tener los elementos. Adoptando la misma para los homólogos del triángulo que se construye, éste es *único*. Luego

370. 1.° *Dos triángulos esféricos son iguales si tienen respectivamente iguales e igualmente dispuestos dos lados y el ángulo comprendido.*

2.° *Dos triángulos esféricos son iguales si tienen respectivamente iguales e igualmente dispuestos los tres lados.*

Porque en ambos casos se puede considerar que los dos triángulos son dos diversas posiciones del mismo, ya que el uno es copia exacta del otro.

371. Si al construir un triángulo dados los lados y el ángulo que forman o los tres lados no se nos da triángulo que fije la disposición relativa de los elementos, cabrá combinar éstos de maneras distintas, pudiendo resultar triángulos que no coincidan, por ser *simétricos* y no poderse realizar la inversión en la esfera como en el plano, según se ha advertido (354).

Además, los elementos que se nos den habrán de ser tales que cumplan las condiciones necesarias para la existencia del triángulo. (353).

372. De los casos de construcción antes expuestos, salen estos otros dos:

3.° Construir un triángulo esférico dados dos ángulos y el lado comprendido (el que une sus vértices).

4.° Construir un triángulo esférico dados los tres ángulos.

Porque en ambos casos con los suplementos de los ángulos o lados conocidos se puede construir un triángulo, del cual es polar el que se busca.

373. Análogamente: De los dos casos de igualdad antes mencionados (370) se originan estos otros:

3.º *Dos triángulos esféricos son iguales si tienen respectivamente iguales e igualmente dispuestos dos ángulos y un lado*, o

4.º *Los tres ángulos.*

Advertencias.—En los 4 casos de igualdad (370 y 373) se requiere, además, que los triángulos pertenezcan a superficies esféricas de igual radio.

(Es muy conveniente ejecutar las construcciones sobre una pizarra esférica).

374. Como a triángulos esféricos iguales corresponden triedros iguales, pueden establecerse los siguientes casos de igualdad:

*Dos triedros son iguales si tienen respectivamente iguales e igualmente dispuestos los elementos que siguen:*

1.º *Dos caras y el diedro comprendido.*

2.º *Las tres caras.*

3.º *Dos diedros y la cara comprendida (que une sus aristas).*

4.º *Los tres diedros.*

375. **Escolio general.** En este capítulo se habrán notado ciertas analogías y ciertas diferencias entre las propiedades de los triángulos esféricos y las de los rectilíneos; y se habrá advertido también cómo de las propiedades de los triángulos esféricos se obtienen, sin necesidad de demostración directa, las de los triedros correspondientes.

Pero otras veces se sigue la marcha inversa: demostrar una propiedad de triedros y deducir de ella la de los triángulos esféricos. Pondremos un ejemplo aclaratorio: supongamos probado ya que en todo triedro una cara es menor que la suma de las otras dos y que a diedros iguales se oponen caras iguales, y tratemos ahora de demostrar que *a mayor diedro se opone mayor cara.*

Sea el triedro OABC (F. 115) en que se supone que el diedro de arista OA es mayor que el de arista OB y quiere demostrarse que la cara BOC es mayor que la AOC.

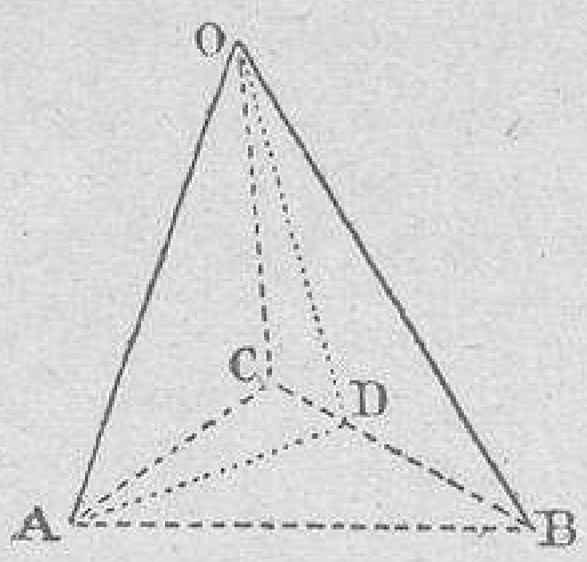

Fig. 115

En lo interior del diedro OA, se podrá trazar el plano AOD que forme un diedro igual al OB, con lo cual el triedro OABD será isoedro y tendrá iguales las caras DOA y DOB. Pero en el triedro OACD, AOC<AOD+DOC, o, en virtud de lo dicho, AOC<DOB+DOC es decir AOC<BOC.

Se ve que la demostración se facilita mucho gracias a la sección plana ABC. (Pruébese a hacer la demostración sin ella, y será necesario mayor esfuerzo imaginativo). La sección esférica conduciría a la figura 110 en que el teorema se demuestra sencillamente, como ya se ha hecho. (350).

376. De las propiedades de los triángulos esféricos o de los triedros se pasa a las de los polígonos esféricos o ángulos poliedros, así como de las de los triángulos planos se pasó a las de los polígonos.

Lo que más interesa para nuestro fin es que: dos ángulos poliédricos o dos polígonos esféricos son iguales cuando tienen iguales y en igual disposición una cara o lado y todos los triedros o triángulos que se forman uniendo las aristas o vértices de dicha cara o lado con las demás aristas o los demás vértices.

## CAPÍTULO VII

# Poliedros y cuerpos redondos

377. *Se llama poliedro el cuerpo limitado en todos sentidos por superficies planas*, que son sus *caras*. Estas caras se reunen en *vértices*, formando ángulos *poliédricos*. La intersección de dos caras constituye una *arista*.

El poliedro es *convexo* cuando lo son todos sus ángulos poliédricos. Sólo nos ocuparemos de poliedros convexos.

Un poliedro es *regular* cuando todas sus caras son iguales y todos sus ángulos poliédricos también lo son.

Estos poliedros tienen, claro es, todas las caras del mismo número de lados, y todos los ángulos poliédricos del mismo número de aristas.

378. Existen cinco poliedros convexos regulares, que son: el *tetráedro*, de cuatro caras (triángulos equiláteros); el *cubo* o *exaedro*, de seis caras cuadradas; el *octaedro*, de ocho caras (triángulos equiláteros); el *dodecaedro*, de doce caras (pentágonos regulares), y el *icosaedro*, de veinte caras (triángulos equiláteros).

La existencia de estos cuerpos, (que suelen llamarse sólidos geométricos) puede demostrarse racionalmente; pero nosotros preferimos hacerlo *experimentalmente*, esto es, construyéndolos mediante sus *desarrollos en un plano* que proporcionan las figuras 116 a 120, del siguiente modo:

1.° TETRAEDRO.—Si en el *desarrollo* de la fig. 116, compuesto de cuatro triángulos equiláteros iguales, se dobla el papel por los lados del triángulo central señalados con la letra *a*, y se reunen en un mismo punto los vértices designados con la letra *v*, se obtendrá el *tetraedro regular*.(*)

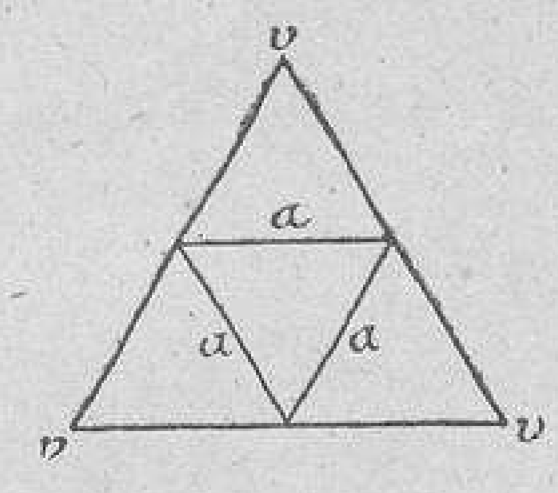


Fig. 116.

2.° CUBO.—Consta el desarrollo de los seis cuadrados iguales que se numeran en la fig. 117. Doblando por los lados del cuadrado 1 hasta que los planos de los cuadrados 2, 3, 4 y 5 queden perpendiculares a él, se tendrá una figura abierta, que se cerrará con la cara 6 al colocar el plano de ésta paralelo al de la cara 1.

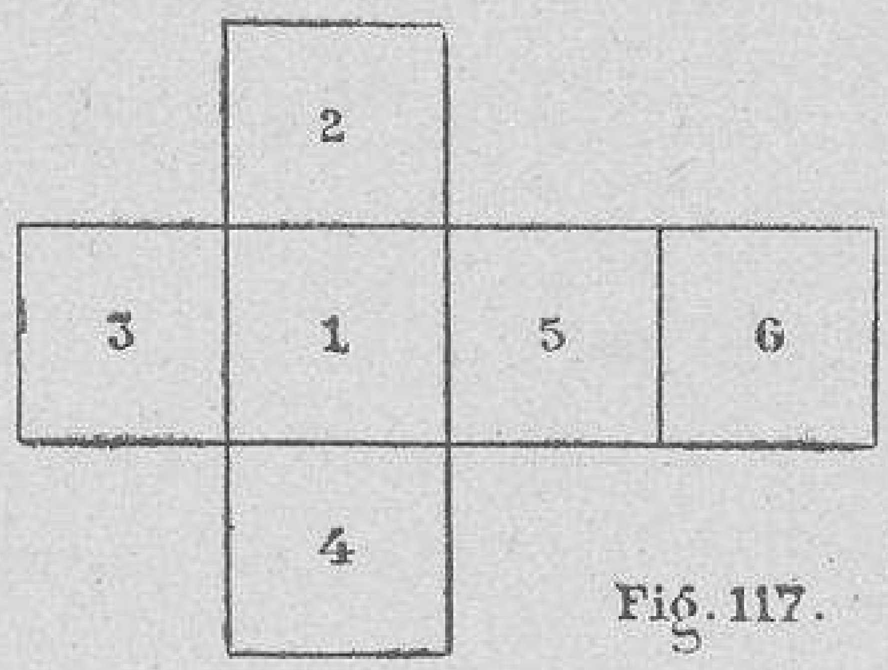


Fig. 117.

3.° OCTAEDRO.—Tiene el desarrollo los ocho triángulos equiláteros numerados en la fig. 118. Para construir el poliedro se dobla por las aristas comunes a dos triángulos consecutivos, reuniendo los triángulos 1, 2, 3 y 4 alrededor del punto *a*, con lo cual coincidirán los puntos *v*, y haciendo análogamente con los triángulos 5, 6, 7 y 8, que puestos alrededor de *b* proporcionan la coincidencia de los vérti-

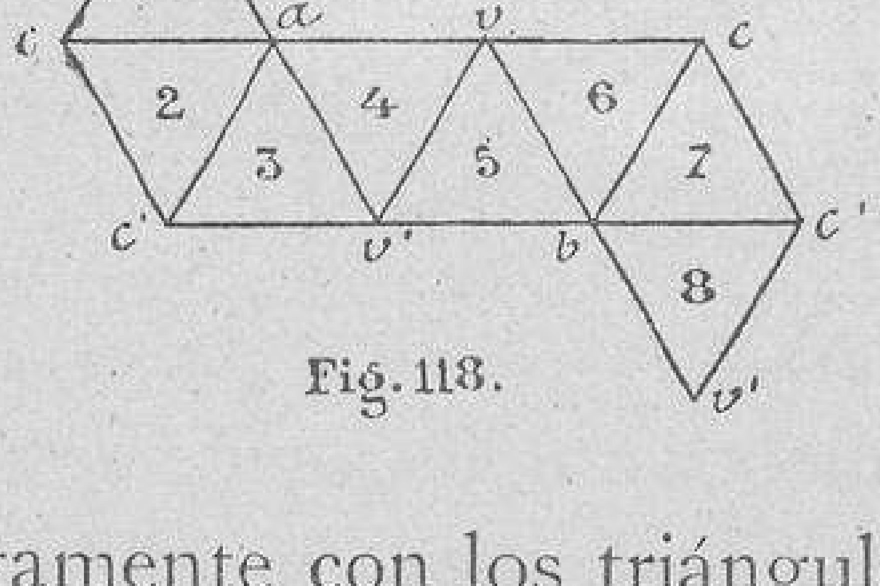


Fig. 118.

(*) Las aristas coincidentes se unen por medio de bandas de papel engomado.

ces $v'$. Para cerrar la figura se llevan a coincidir los vértices $c$ y $c'$ del triángulo 7 con los $c$ y $c'$ del 2.

4.° Dodecaedro.—En la fig. 119 se ve la mitad del desarrollo, compuesta de un pentágono regular central, 1, y otros cinco iguales que lo rodean. Doblando por los lados del primero hasta que coincidan las aristas $a$, $a$; $b$, $b$, etc., se obtiene la mitad del poliedro. Se construye después la otra mitad, y se colocan en la posición conveniente (fácil de ver) para que se cierre el cuerpo.

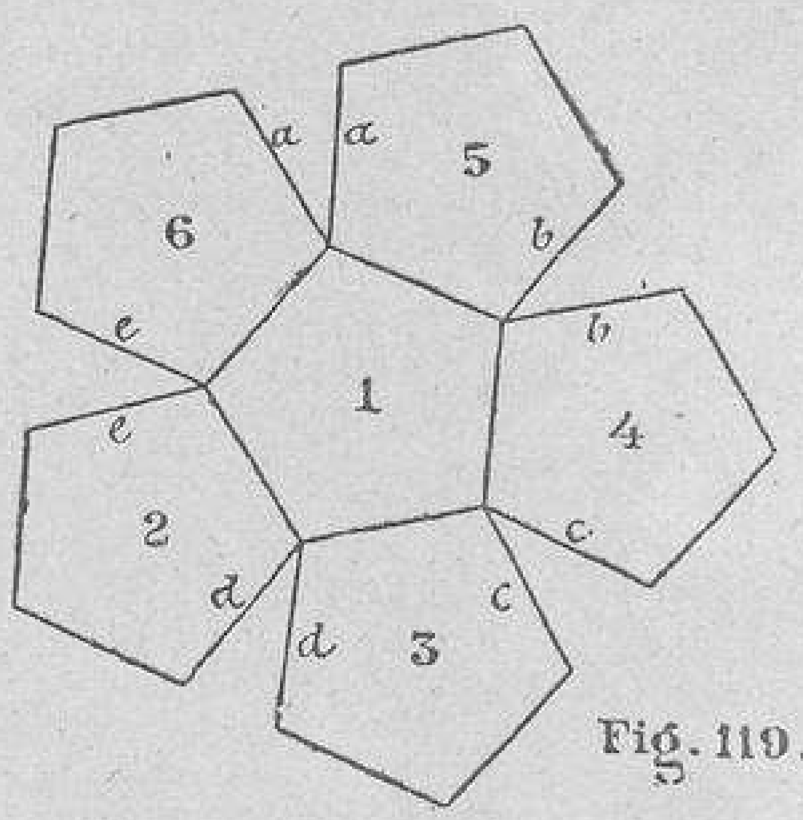


Fig. 119.

5.° Icosaedro.—Consta de los veinte triángulos que se advierten en la fig. 120. Reunidos los 1, 2, 3, 4, 5, de modo que se reunan los vértices señalados con $a$, y los 16, 17, 18, 19 y 20, de modo que coincidan los que llevan $b$, después de haber doblado por las demás aristas, se cierra el cuerpo al traer los vértices $c$ y $c'$ del triángulo 15 sobre los $c$ y $c'$ del 6.

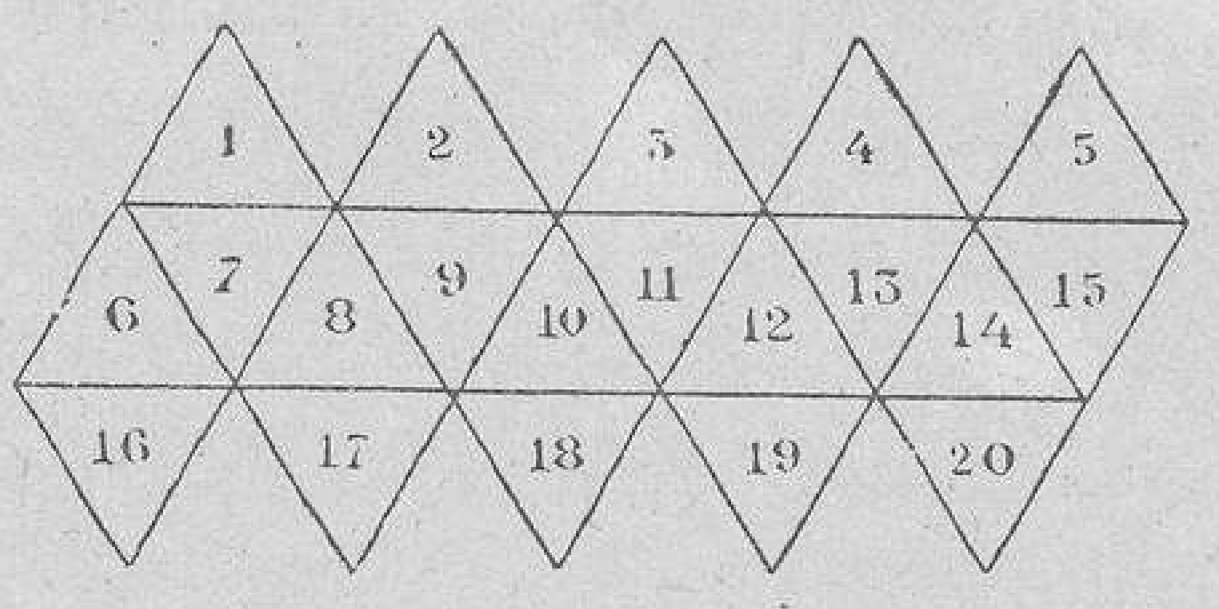


Fig. 120

379. No existen más poliedros regulares convexos que los cinco citados, porque con ángulos de polígonos regulares que no sean triángulos, cuadrados o pentágonos, o con estos ángulos empleados en número superior a 3, 4 ó 5 para los triángulos, o a 3 para los cuadrados

o pentágonos, no se pueden formar ángulos poliédricos convexos, a causa de que la suma de las caras de éstos no puede llegar a 360°.

Si, p. ej.: empleásemos exágonos regulares, como un ángulo vale $\frac{4 \text{ llanos}}{6} = \frac{4 \times 360}{6} = 240$ grados, con sólo tres que reuniésemos en un vértice, tendríamos $240 \times \times 3 = 720°$; cosa imposible, como acabamos de decir.

Si empleásemos v. g. 6 triángulos equiláteros, acontecería lo mismo, porque $6 \times 60 = 360$ grados.

380. En los poliedros anteriores se puede saber fácilmente el número de aristas y de vértices.

*Para hallar el número de aristas, basta multiplicar el número de caras por el de aristas que hay en cada una, y tomar la mitad*, puesto que cada arista está en dos caras.

Sabido ya el número de aristas, *para hallar el número de vértices se divide el duplo del número de aristas por el que indica cuántas concurren en un vértice.* (Téngase presente que cada arista une *dos* vértices).

EJERCICIO.—Decir el número de aristas y de vértices de cada uno de los poliedros regulares.

381. **Pirámides.**—*Pirámide es el poliedro cerrado por una superficie piramidal y un polígono cuyo plano corta a todas las aristas.* (*) El polígono dicho se llama *base.*

Aunque en la pirámide hay varios vértices, se llama

(*) Para la aclaración de estas definiciones muéstrense pirámides materiales, de madera, cartón, etc., y hágase lo mismo con los troncos, los prismas, conos, cilindros, etc. Este material no debe faltar en ninguna clase.

especialmente *vértice de la pirámide* al de la superficie piramidal, es decir, al del ángulo poliédrico opuesto a la base. La distancia entre el vértice y el plano de la base se llama *altura*, y se mide por una perpendicular cuyo pie puede ser interior o exterior al polígono de la base.

Excepto la base, las demás caras se llaman *laterales*, y son triángulos con un vértice común, que es el de la pirámide.

382. Si la base es un polígono regular, tendrá centro, y si este centro coincide con el pie de la altura, la pirámide se llama *regular* (aunque no lo sea considerada como poliedro en general). En la pirámide regular, las aristas laterales son, con respecto a la base, oblicuas iguales, luego las caras laterales serán triángulos isósceles iguales. La altura de una cara lateral se llama *apotema* de la pirámide, y une el vértice de ésta con el punto medio de un lado de la base. La altura de la pirámide, la apotema de ella correspondiente a cierto lado, y la apotema del polígono de la base que corresponda al mismo lado, forman un triángulo rectángulo. Las dos apotemas, (de la pirámide y de la base), bastan para construir este triángulo rectángulo, y, de consiguiente, para determinar la altura de la pirámide.

EJERCICIO.—Hallar la altura de una pirámide regular maciza.

383. **Tronco de pirámide** *es la porción de ella comprendida entre la base y el polígono producido por un plano secante.* Ambos polígonos son las *bases* del tronco; y *caras laterales*, todas menos las bases.

Si el plano secante fuera paralelo al de la base, el tronco sería *de bases paralelas*, y su *altura* la distancia entre ellas.

384. Si la pirámide es regular, el tronco de bases paralelas que de ella se obtenga será regular, y tendrá por caras laterales trapecios isósceles iguales.

La altura de uno de estos trapecios es la apotema del tronco, y puede trazarse uniendo los puntos medios de las bases de uno de los trapecios, por lo cual si se unen dichos puntos con los centros de las caras básicas del tronco, entre la apotema de éste, las dos de las bases y la altura del tronco, forman un trapecio rectángulo. Este trapecio puede construirse dadas las tres apotemas, porque con la diferencia de las de las bases como cateto y la del tronco como hipotenusa se puede construir un triángulo rectángulo cuyo otro cateto es la altura.

EJERCICIO. Hallar la altura de un tronco de pirámide regular, de bases paralelas, macizo.

385. Las caras laterales de una pirámide pueden suponerse situadas sobre un solo plano, como si se abriese la pirámide por una de las aristas laterales. Esto constituye el desarrollo de la superficie lateral de la pirámide, y, como se ve claramente en la figura 121, lo forman una serie de triángulos iguales a las caras y dispuestos en el mismo orden que éllas alrededor del vértice. Las bases de estos triángulos son los lados del polígono-base de la pirámide.

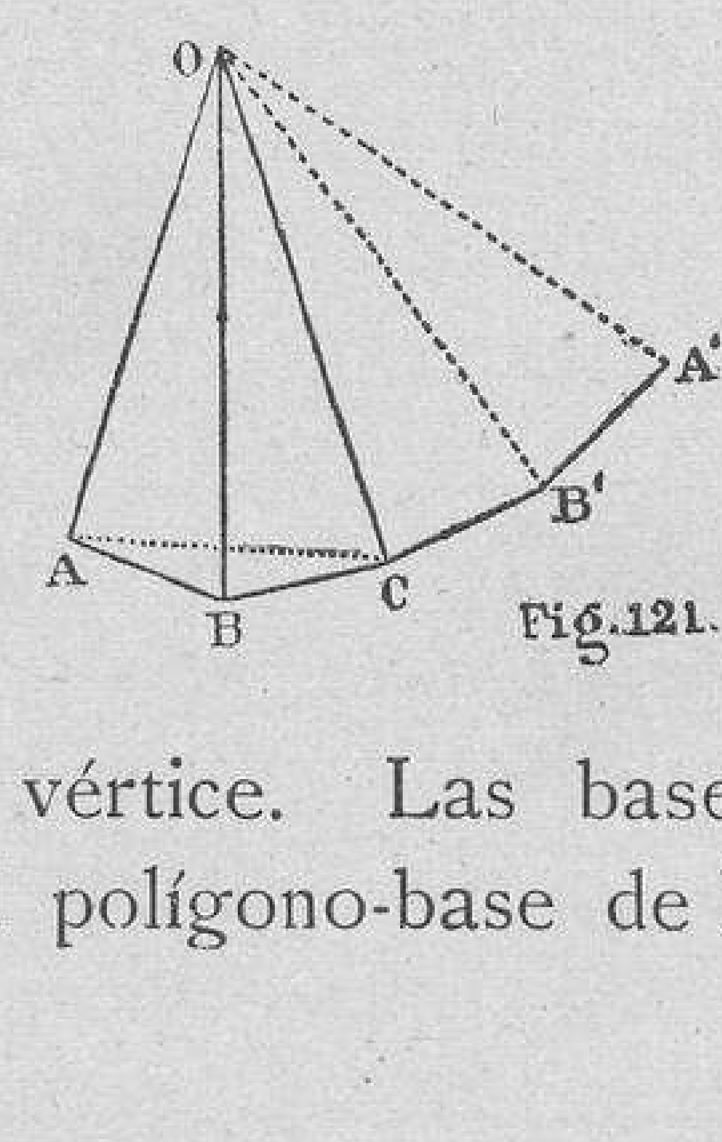

Fig.121.

Inversamente, del desarrollo de la pirámide (completado con el polígono de la base) se podría deducir ésta y construirla, como fácilmente se comprende.

386. Si la pirámide es regular, el desarrollo de su superficie lateral es un sector poligonal regular, esto es, cuyos lados no concurrentes en el vértice son iguales y forman entre sí iguales ángulos.

EJERCICIO. Construir una pirámide regular, teniendo dibujado su desarrollo.

387. **Cono de revolución** *es el cuerpo limitado por una superficie cónica de revolución y el círculo de uno de sus paralelos.*

Dicho círculo se llama *base*. *Vértice* del cono es el de la superficie. *Lado o apotema*, la parte de generatriz de la superficie comprendida entre el vértice y la base.

*Radio* del cono, el de la base *Altura*, la parte de eje de la superficie comprendida entre el vértice y la base, o lo que es igual, la perpendicular del vértice a la base, cuyo pie coincide con el centro de ésta.

388. La altura, el radio de la base y el lado que vaya al mismo extremo del radio forman un triángulo rectángulo, que podría construirse con dos de sus lados como datos. Este triángulo girando alrededor del cateto-altura, engendraría el cono.

389. Si en la base del cono se inscribe un polígono y se toma por base de una pirámide cuyo vértice sea el mismo del cono, esta pirámide se dirá que está *inscripta* en el cono, siendo sus aristas laterales diversas posiciones del lado del cono.

Cuantas más caras tenga la pirámide inscripta, más aristas caen sobre la superficie del cono, y más se parecen ambos cuerpos, de tal manera, que la superficie lateral del cono se considera como el *límite* al cual se va acercando la superficie lateral de la pirámide a medida que aumenta su número de caras. (*)

390. Abriendo por un lado el cono y extendiendo su superficie lateral sobre un plano, se obtiene el desarrollo, el cual es un sector circular, límite de los sectores poligonales que se obtendrían desarrollando pirámides (por ejemplo, regulares) inscriptas en el cono. Así se comprende que el arco de este sector es igual a la circunferencia de la base del cono; y el radio, al lado del mismo. (Fig. 122).

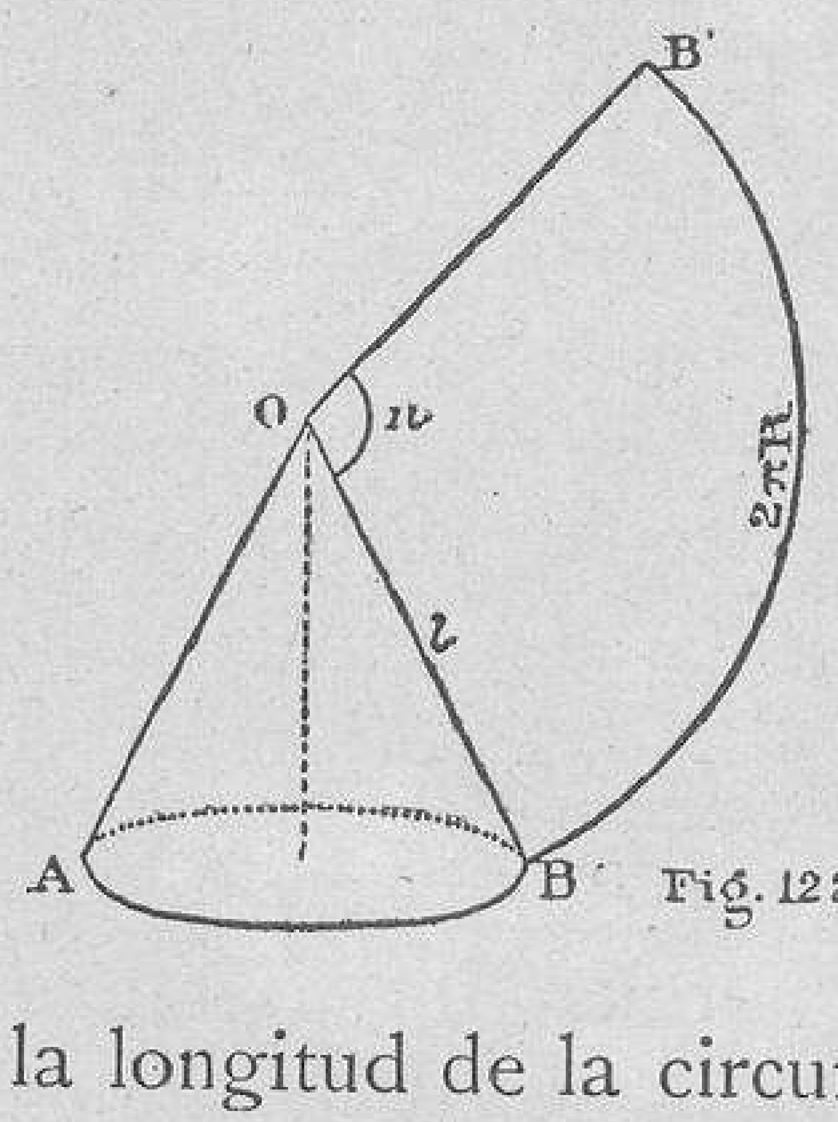

Fig. 122.

Puede, pues, calcularse el número de grados del sector empleando la fórmula

$$n^o = \frac{180^o \,.\, l}{r \,.\, \pi} \quad (72)$$

en la cual se pondrá en vez de $l$ la longitud de la circunferencia de la base del cono, que será (si llamamos R su radio) $2 \,.\, \pi \,.\, R$; y en vez de $r$ el lado del cono que llamaremos $l$, con lo cual la fórmula se transformaría en

$$n^o = \frac{180^o \,.\, 2 \,.\, \pi \,.\, R}{l \,.\, \pi} = \frac{360^o \,.\, R}{l}$$

(*) Debiera precisarse más esta definición; pero ¿añadirían las explicaciones, para los alumnos, claridad al concepto?

EJERCICIOS. 1.º Hallar la amplitud del sector correspondiente a un cono que cortado por un plano que pasase por el eje, diese como sección un triángulo equilátero. (Cono equilátero).

2.º Dado el desarrollo de un cono, construirlo.

391. Cortando un cono por un plano paralelo a la base se obtiene un tronco de cono de bases paralelas.

Altura es la distancia entre las bases. Si se traza esta altura por el centro de una base, su pie cae en el centro de la otra (porque la altura es parte del eje del cono) y con la altura, los radios de ambas bases y un lado o generatriz se puede formar un trapecio rectángulo, como ocurría en el tronco de pirámide.

EJERCICIOS. 1.º Dados el lado de un tronco de cono de revolución, de bases paralelas y los radios de éstas, hallar la altura del tronco.

2.º Decir cómo será el desarrollo de un tronco de cono de bases paralelas, y construir éste, dado aquél.

392. Si se traza un plano secante AOB (fig. 123) que pase por dos generatrices de la superficie lateral de un cono, cortará a la base según una recta secante AB, la cual, en unión del vértice, determina dicho plano. Pero si esta secante llegase a convertirse en la tangente BC por giro alrededor de uno de sus puntos de intersección, la tangente resultante y el vértice del cono determinarían un plano T que sólo tendría común con el

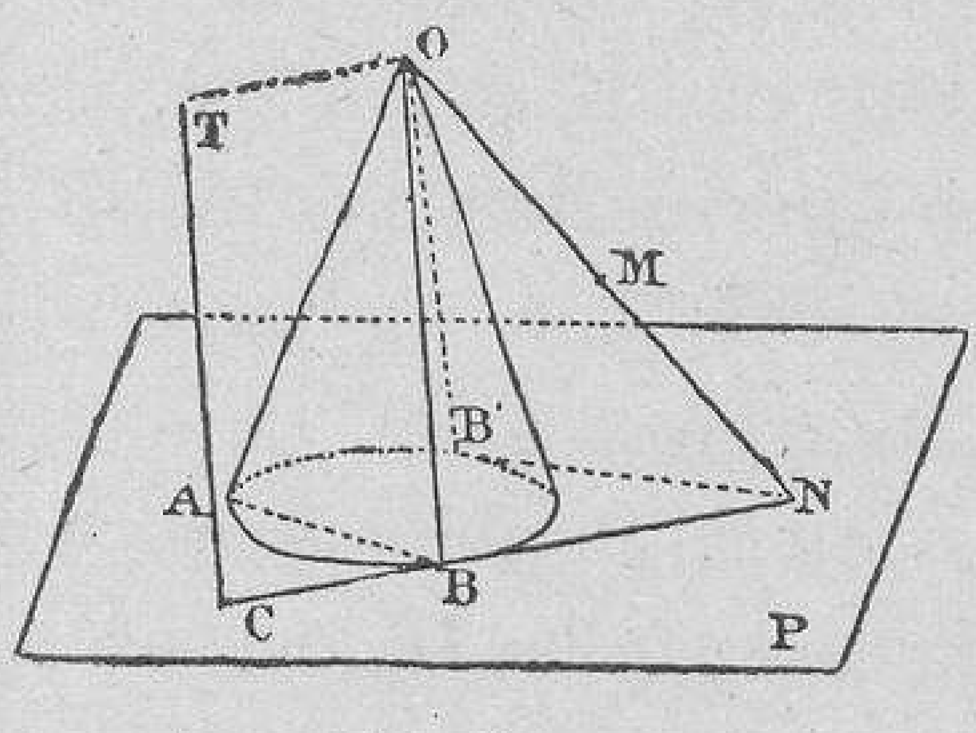

Fig. 123.

cono una generatriz OB. Este es el *plano tangente al cono* a lo largo *de dicha generatriz.*

Luego, *para trazar el plano tangente al cono en un punto de su superficie, se traza la generatriz que pasa por dicho punto y la tangente a la circunferencia de la base, por el pie de aquélla, y las dos rectas mencionadas determinan el plano tangente.*

*Para trazar planos tangentes por un punto exterior,* M, *se une éste con el vértice y se prolonga la recta resultante hasta que corte al plano de la base,* P; *por el punto en que lo hace se trazan tangentes* NB, NB′ *a la circunferencia de la base, las cuales, con el punto dado determinan* **dos** *planos tangentes al cono.*

393. **Prisma.**—*Se llama prisma el poliedro cerrado por una superficie prismática y dos planos paralelos que cortan a todas las generatrices.* (*)

Estos planos determinan polígonos iguales que se llaman *bases*, y su distancia, *altura.* (Fig. 124).

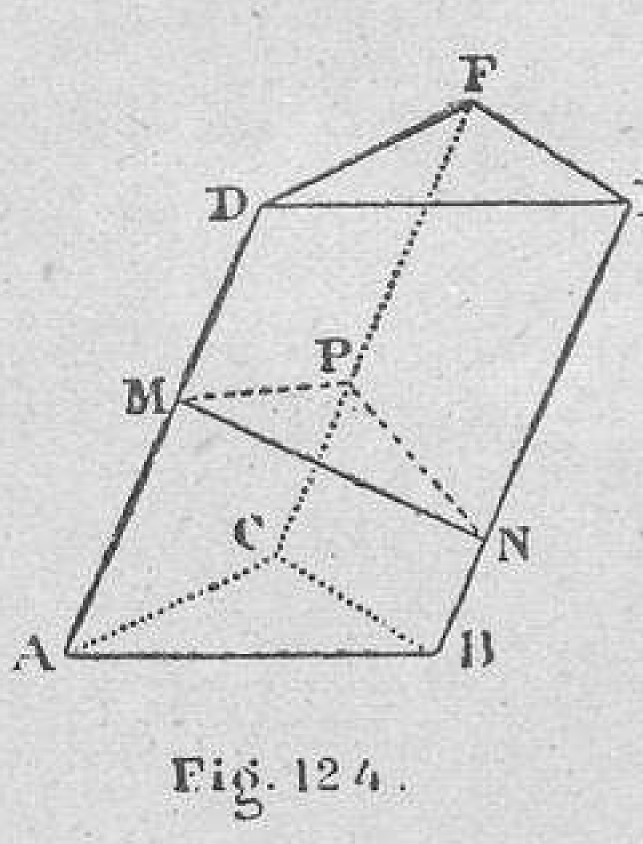

Fig. 124.

Los polígonos de las bases tienen sus lados paralelos (porque son intersecciones de dos planos paralelos con un tercero) y como las generatrices de la superficie lateral también son paralelas, las caras laterales, (todas excepto las bases) son paralelogramos.

(*) Véase la nota del número 381.

Si también las bases son paralelogramos el prisma se llama *paralelepípedo*. (Fig. 125).

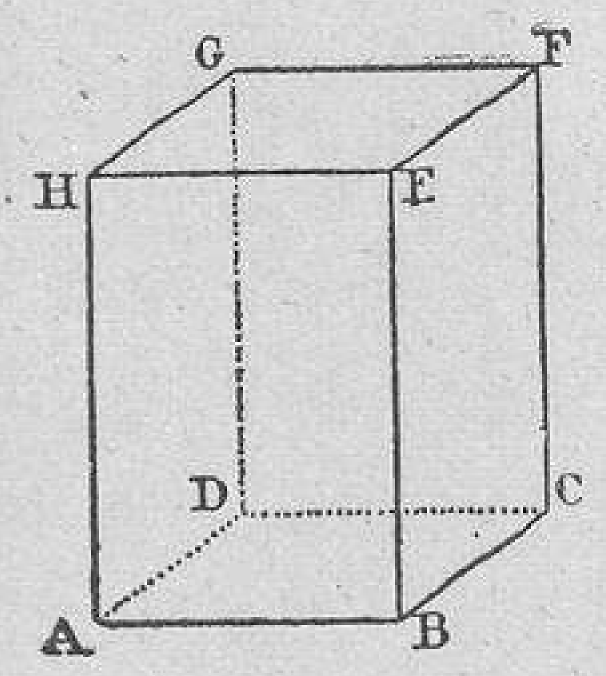

Fig. 125.

Cuando las caras laterales son rectángulos, el prisma se llama *recto*. (125).

Paralelepípedo *rectangular* es aquel cuyas caras, incluso las bases, son rectángulos. Si fuesen cuadrados, el paralelepípedo se denomina *cubo*, y es poliedro regular.

Los demás prismas no son regulares en cuanto poliedros, pero, no obstante, se llaman prismas regulares (en cuanto prismas) los que tienen caras laterales rectangulares y por bases polígonos regulares.

La altura de un prisma es igual a la arista lateral cuando el prisma es recto, pero menor si el prisma es oblicuo (no recto).

394. En un prisma oblícuo se llama *sección recta* la producida por un plano perpendicular a las aristas laterales. Los lados de esta sección son, claro es, perpendiculares a las aristas laterales, y expresan, por consiguiente, la distancia entre éstas o sea *la altura* de los paralelogramos que constituyen las caras laterales. (En el prisma de la figura 124 la sección recta es MNP).

395. No hay lugar a considerar troncos de prisma de bases paralelas, puesto que serían prismas (más pequeños); pero se llama *tronco* de un prisma a la parte de él comprendida entre la base y un plano no paralelo a ella. Las caras del tronco son trapecios.

Si el prisma fuese recto, los trapecios que forman las caras del tronco son rectangulares.

396. Si se construyen en un plano paralelogramos consecutivos, iguales a las caras laterales de un prisma y en el mismo orden que éstas, se tendrá el desarrollo de la superficie lateral. Si en el prisma se hubiese trazado la sección recta, como dos lados consecutivos de ésta son perpendiculares a una misma arista en un punto, al colocarlos en un plano caerán en una misma línea recta. Igual acontece con los lados de las bases cuando el prisma es recto, por lo cual su desarrollo es un rectángulo dividido en tantas fajas como caras, y que tiene por altura la del prisma y por base el perímetro de la base del prisma.

EJERCICIO.—Desarrollar un prisma, e inversamente, construirlo dado su desarrollo. Desarrollar un tronco de prisma.

397. **Cilindro.**—*Cilindro de revolución es el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica de revolución y los círculos de dos paralelos.*

Dichos círculos son las bases y su distancia la *altura*, que es igual al *lado* o generatriz de la superficie lateral. *Radio* del cilindro es el de sus bases. Con dos radios paralelos, uno de cada base, el lado que une sus extremos y la altura que une los centros de las bases, se forma un rectángulo que puede engendrar el cilindro girando alrededor del lado-altura.

398. Si en la base del cilindro se inscribe un polígono y se trazan las generatrices correspondientes a sus vértices, los extremos de estas generatrices situados en la otra base serán vértices de otro polígono igual al prime-

ro, formándose, con esos dos polígonos como bases, un prisma inscripto en el cilindro y tanto más parecido a él cuanto mayor sea el número de sus caras; por lo cual la superficie lateral del cilindro se considera como el *límite* a que tiende la superficie lateral del prisma inscripto cuando aumenta indefinidamente el número de caras.

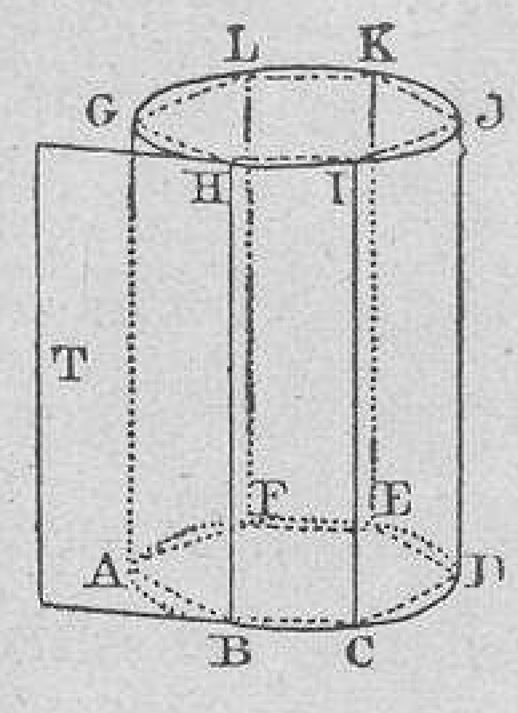

Fig. 126

399. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un rectángulo (fig. 127) que tiene por altura el lado y por bases rectas de igual longitud que las circunferencias de las bases del cilindro.

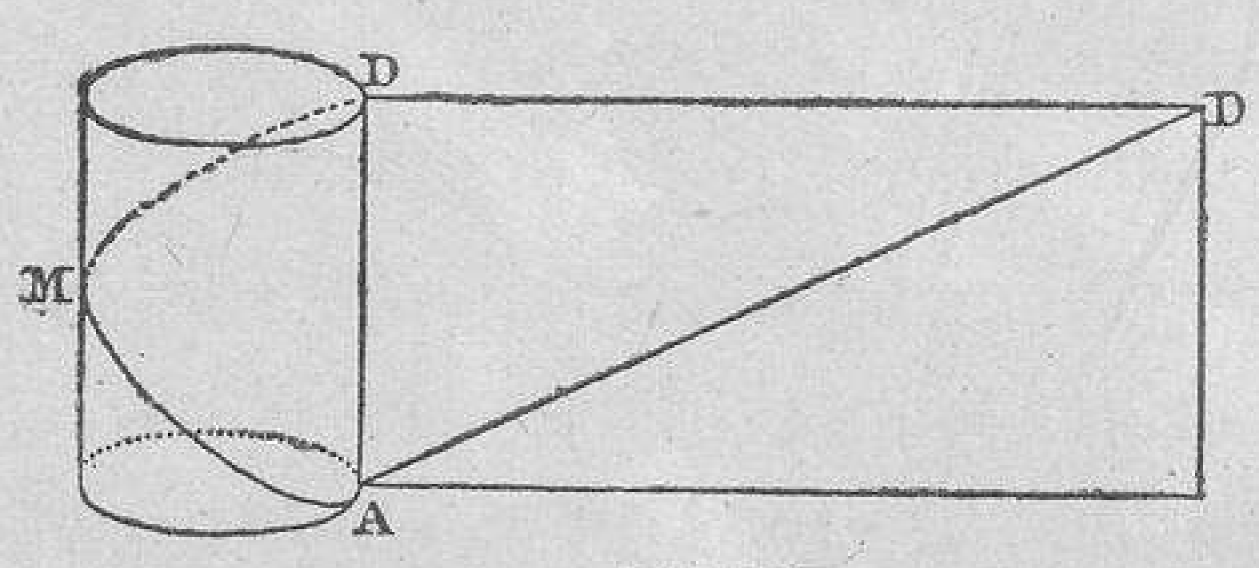

Fig. 127.

La diagonal AD del rectángulo dicho, forma, al aplicarse sobre el cilindro, el arco de AMD de una curva llamada *hélice*, cuya propiedad más notable es la de expresar la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie cilíndrica, que no estén en una misma generatriz.

400. Tronco de cilindro es la porción suya comprendida entre una base y un plano secante no paralelo.

401. Un plano secante que contengan dos generatrices de la superficie lateral del cono, como ABHG de la fig. 126, corta a las bases según secantes AB, GH, y cuando éstas, por giro del plano, se convierten en tangentes, el plano toma la posición T en la cual es

*tangente al cilindro* a lo largo de la generatriz HB.

EJERCICIOS.—Determinar planos tangentes al cilindro por un punto de su superficie o por una recta exterior y paralela al eje. (V. los planos tangentes al cono).

402. **Escolio general.** Se habrá notado sin esfuerzo que entre la pirámide y el cono de revolución existen estrechas relaciones, nacidas de las existentes entre los polígonos y el círculo; y asimismo se habrá echado de ver que existen analogías entre la pirámide y el prisma, el cono y el cilindro. Esto proviene de que un cono tiende a convertirse en cilindro por alejamiento del vértice, lo que da motivo a mirar al cilindro como un cono *con el vértice en el infinito*, y lo mismo pasa con el prisma respecto de la pirámide.

Conviene decir, aunque se omita la demostración, que las curvas llamadas elipse, hipérbola y parábola pueden resultar como *secciones cónicas*.

Para ello se considera la superficie del cono completada con otra igual que se forma prolongando al otro lado del vértice las generatrices (figura 128). Cada superficie cónica parcial se dice que es una *hoja* de la total.

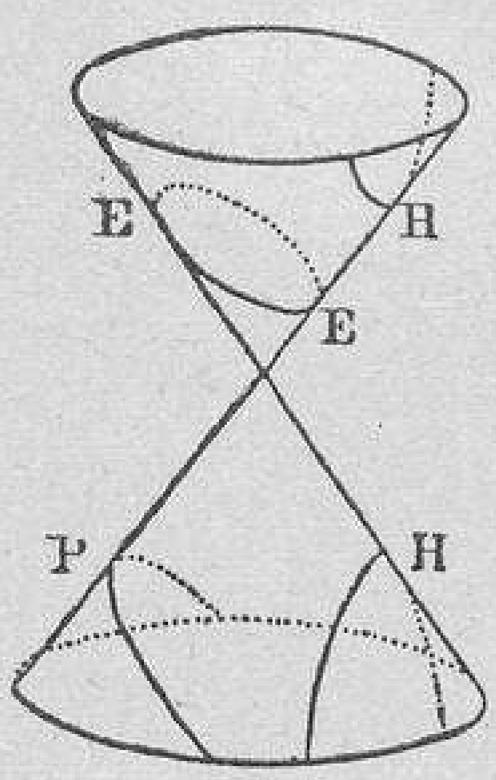

Fig. 128.

Esto supuesto, si se cortan por un plano oblicuo al eje todas las generatrices de una hoja, resulta como sección sobre la superficie la *elipse*, E. Si el plano secante es paralelo a dos generatrices, corta a las dos hojas y origina una curva de dos ramas que es la *hipérbola* HH′

y si es paralelo a una sola generatriz resulta la *parábola* P.

403. **Esfera.** *La esfera es el cuerpo limitado por la superficie esférica;* o bien el cuerpo engendrado por un semicírculo que gira alrededor de su diámetro (270).

Toda sección plana de la esfera es un círculo, máximo o menor, según el plano pase o no pase por el centro. (271).

404. El radio de un círculo menor, el de la esfera que termina en el mismo extremo y la perpendicular que mide la distancia entre el centro de la esfera y el plano del círculo dicho, forman un triángulo rectángulo. (Hágase la figura).

405. A las definiciones ya expuestas (271) agregaremos las que siguen:

*Pirámide esférica* es el cuerpo limitado por un polígono esférico y el ángulo poliédrico correspondiente.

*Sector esférico* es la parte de esfera engendrada por un sector circular al mismo tiempo que el arco de éste engendra una zona o casquete, que se llama *base* del sector.

406. Un plano o una recta se llaman *tangentes* a la esfera, cuando sólo tienen un punto común con la superficie de ella.

T.—*El plano perpendicular a un radio en su extremo es tangente a la esfera.*

F. 129.—Sean: OA el radio y P el plano perpendicular a él en A.

D.—Entre las distancias del centro a los puntos de P, la OA, que es perpendicular, es la menor: por lo cual, todos los puntos de P son exteriores a la esfera, excepto el A.

407. R.—*El plano tangente a una esfera es perpendicular al radio en el punto de contacto.*

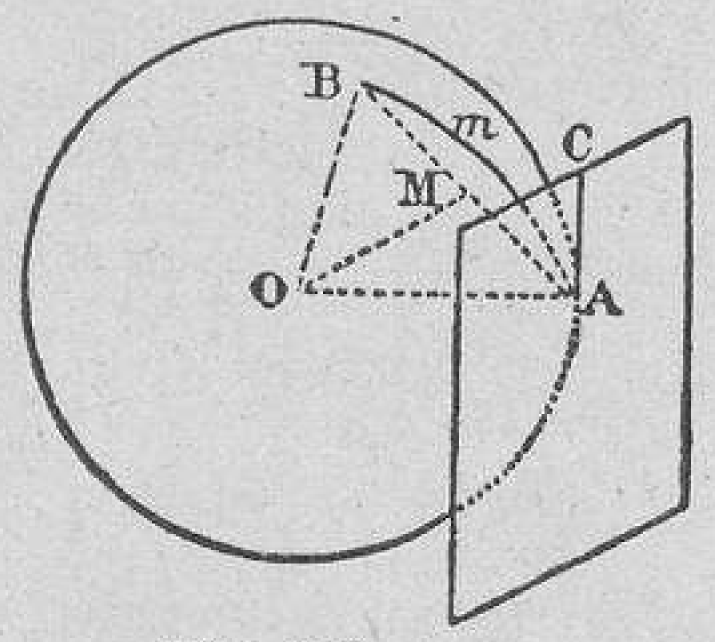

Fig. 129.

D.—Porque siendo el punto de contacto, A, el más próximo al centro, (puesto que los demás son exteriores), el radio OA es la *menor* distancia entre el centro y el plano, P, es decir, la perpendicular a éste.

408. **Corolario.** *El plano tangente a la esfera en un punto, contiene todas las tangentes en dicho punto a curvas situadas en la superficie esférica y que pasan por él.*

F. 129.—Sea una curva A*m*B y AB una secante a dicha curva. En el plano determinado por los radios OA y OB tracemos la perpendicular OM a la cuerda AB.

D.—Cuando la secante AB por giro alrededor de A llegue a convertirse en la tangente AC a la curva en dicho punto A, se habrán confundido en un solo radio OA, éste, el OB y OM. Y como este último segmento no ha dejado de ser perpendicular a AB, resulta ser el radio OA perpendicular a la tangente AC a la curva, y, de consiguiente, esa tangente estará en el plano P que es el lugar de las perpendiculares a OA en A. (283).

409. **Escolio.** *Por un punto de una esfera hay infinitas rectas tangentes contenidas en un solo plano tangente, que es el perpendicular al radio determinado por aquel punto.*

410. Para el estudio de las posiciones de dos esferas, y de propiedades que con ellas tienen relación, se suponen las esferas cortadas por un plano que pase por sus centros, el cual las corta según círculos máximos de cuyas propiedades se desprenden las que se querían establecer; o bien, inversamente, se consideran circunferencias situadas en un plano y se las hace girar alrededor de la recta de sus centros para engendrar superficies esféricas.

EJERCICIOS. Hallar, por el método que acaba de indicarse, la relación entre la distancia de los centros de dos esferas y sus radios, en las diferentes posiciones de ellas.

Investigar propiedades de la esfera por analogía con otras de la circunferencia. (Números 98 y siguientes).

411. *Las rectas tangentes a una esfera trazadas desde un punto exterior, o paralelamente a una recta dada, forman una superficie cónica o cilíndrica.*

EJERCICIO. Cerciorarse de la verdad del precedente teorema, y extenderlo a los planos y a las tangentes comunes a dos esferas.

412. *Por cuatro puntos no situados en el mismo plano pasa siempre una esfera única.*

F. 130. Sean los puntos A,B,C,D y dibujemos el diedro que tenga por arista AB y cuyas caras contengan respectivamente a C y D, diedro que no será llano, puesto que los cuatro puntos no están en un plano. Tracemos por CD el plano Q perpendicular a la arista AB. Sean ABC y ABD los círculos determinados por estos puntos y O y O′ sus centros.

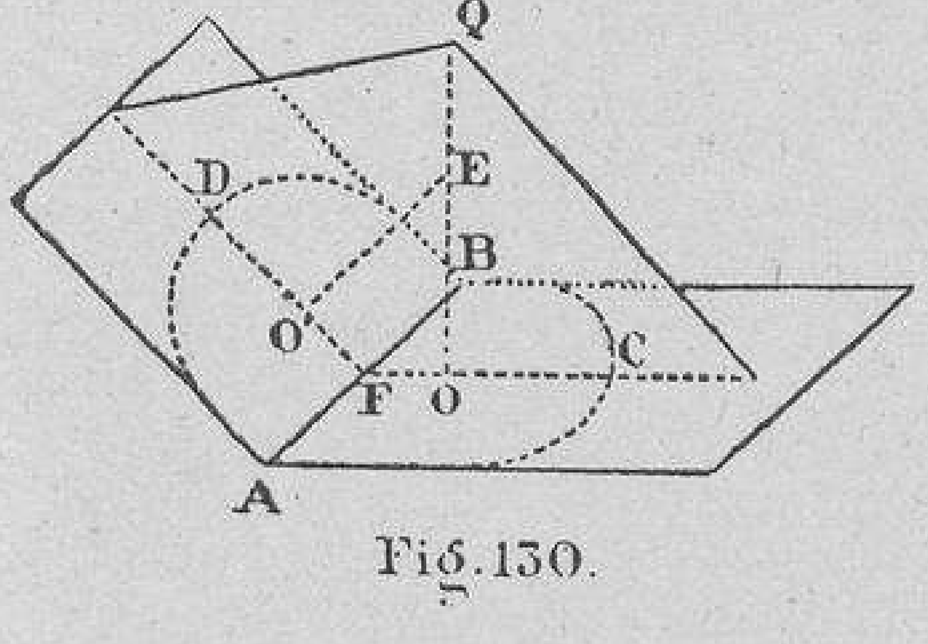


Fig. 130.

D.—El plano Q contiene las perpendiculares trazadas a los círculos por O y O', luego éstas se cortan, y el punto E en que lo hacen, equidista de los cuatro puntos A,B,C,D, y es centro de la superficie esférica que pasa por ellos y de la cual son círculos (en general menores, los ABC y ABD.

Detalles.—El plano Q perpendicular a la arista de un diedro lo es a sus caras (299), y las trazas CF y DF de este plano sobre los otros, son rectas que se cortan. El plano Q contiene las perpendiculares a las caras trazadas por puntos de CF y DF (298) luego contiene a OE y O'E, y éstas se cortan puesto que las CF y DF lo hacían.

El punto E equidista de todos los de las circunferencias ABC y ABD porque las rectas que le uniesen a ellos son oblicuas cuyos pies equidistan de O o de O'.

413. **Escolio.** Se determina una superficie esférica por cuatro puntos que no están en un plano, por dos círculos que se cortan y no están en un plano, por un círculo y un punto exterior a su plano, etc.

CAPÍTULO VIII

# Igualdad de figuras del espacio

414. **Tetraedros.**—Si se nos da un tetraedro ABCD (figura 131) y nos proponemos copiarlo, podremos hacerlo utilizando diversos elementos, lo que daría origen a varios casos de construcción y sus derivados de igualdad, como acontecía con los triángulos (216). Consideremos solamente uno de esos varios casos. Al efecto, sobre el plano P en que se halla la cara ABC construyamos un triángulo A′B′C′ directamente igual a él. Si trazamos ahora *hacia la misma región* en que se halle el cuarto vértice, D, con relación al plano P, otro plano, Q, que forme con él un diedro igual al de las caras ABC y ABD, y en Q construímos el triángulo A'B′D′ directamente igual al ABD, quedará *determinado* el punto D', que unido al C′, completa el tetraedro A′B′C′D', reproducción exacta de el ABCD.

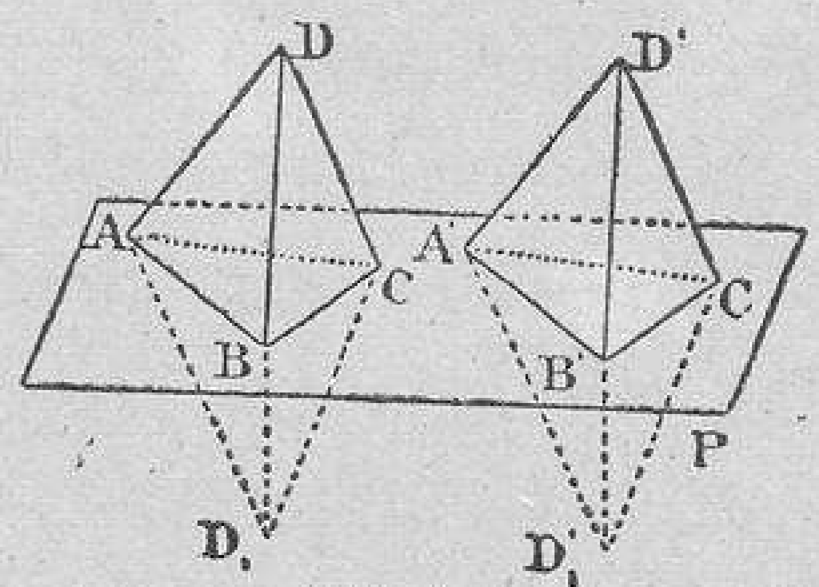


Fig. 131.

Pero si la construcción de A′B′C′D' se hubiese hecho de suerte que el cuarto vértice hubiera caído a distinto lado que D con relación a P, es decir, en la posición $D'_1$, el tetraedro $A'B'C'D'_1$ sería reproducción de 1

$ABCD_1$ y como éste, en general, no puede coincidir con el ABCD, tampoco el $A'B'C'D'_1$

Según esto: cuando se den aislamente como datos para construir un tetraedro *dos caras* y *el diedro comprendido*, se ignorará la disposición de estos elementos y podrán obtenerse, según la que se adopte, tetraedros no coincidentes; pero si se fija el sentido de los tetraedros con las condiciones impuestas antes, es decir, si una vez construído un tetraedro ABCD se advierte que otro cualquiera tenga una cara A'B'C' directamente igual a ABC y que colocadas estas caras en un plano el vértice D' caiga a igual región que el D con relación a dicho plano, los tetraedros construídos serán directamente iguales y podrán coincidir.

Observación.—Para conocer la igualdad de sentido de los tetraedros ABCD y A'B'C'D' puede seguirse también este criterio: Si nos suponemos tendidos sobre AB con la cabeza hacia B y mirando a la arista opuesta CD, veremos que para ir de C a D moveremos la vista de *derecha a izquierda*. Lo mismo acontece colocándonos en A'B' con la cabeza hacia B' y mirando a C'D', y por eso los tetraedros son del *mismo sentido*. En cambio, si estando sobre A'B' en la forma dicha se mirase hacia $D'_1$ el movimiento para ir de C' a $D'_1$ sería de *izquierda* a *derecha*, y por ello es este último tetraedro de *sentido contrario* al de los anteriores.

415. **Poliedros.**—Supongamos dos triángulos directamente iguales ABC y A'B'C' (fig. 132) en que son elementos homólogos los designados con iguales letras. Diremos que son también *homólogos:*

1.º Un punto D' del plano del triángulo A'B'C' con otro D del plano de ABC, en los mismos casos en que lo eran al hablar de las figuras planas (226).

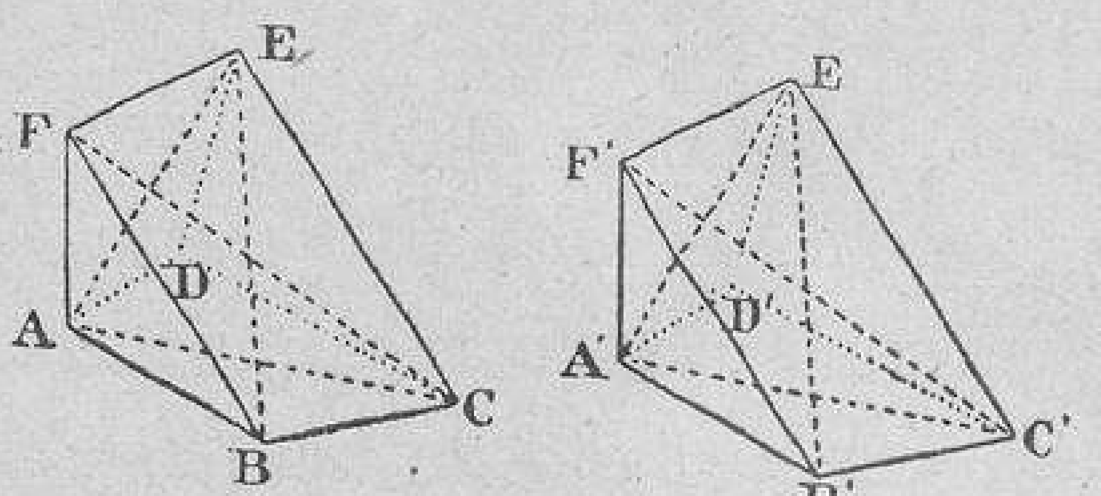

Fig. 132.

2.º Un punto E' exterior al plano A'B'C' con otro E exterior a ABC, siempre que los tetraedros A'B'C'E' y ABCE sean *directamente iguales*.

3.º Un segmento E'F' con otro EF, cuando sus extremos sean puntos homólogos.

4.º Una figura o parte de ella con otra, cuando todos los puntos de una sean homólogos de los de la otra.

Es fácil ver que si A'B'C' y ABC se hacen coincidir, coinciden los elementos homólogos, y, por tanto, las figuras de que forman parte.

Recíprocamente: Si se tuviesen dos figuras del espacio en coincidencia, se podrían descomponer simultáneamente en tetraedros directamente iguales y con una cara fija. Lo cual justifica la siguiente definición: *Dos figuras del espacio son iguales cuando tienen todos sus elementos homólogos, con relación a dos triángulos* (ABC y A'B'C') *directamente iguales y considerados también como homólogos*.

416. Además de estas ideas generales acerca de la igualdad, nos fijaremos en los siguientes casos particulares: *Dos pirámides coincidirán, si coinciden su base y su vértice*. Lo primero podrá conseguirse si las bases son directamente iguales. Para lo segundo es preciso que, puestas en coincidencia las bases, los vértices caigan a igual región del plano de aquéllas y queden *determina-*

*dos:* lo cual se puede conseguir, entre otras, por estas dos condiciones:

1.ª Que una cara lateral, DAB (fig. 133) sea directamente igual a otra D′A′B′ e iguales los diedros que forman con el plano de las bases.

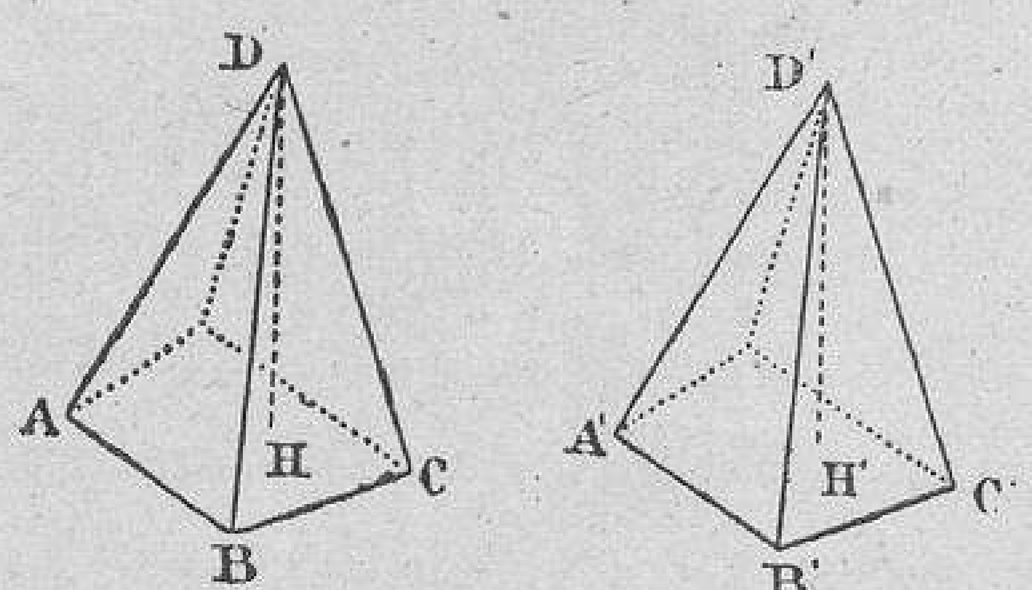


Fig. 133.

2.ª Que, al hacer coincidir las bases, coincidan los pies de las alturas y éstas sean iguales.

417. *Dos prismas coinciden cuando lo hacen sus bases y queda determinada en magnitud y posición una arista lateral.* Esta determinación puede quedar hecha por la igualdad de la cara lateral en que se halla y del diedro que dicha cara forma con la base.

Si el prisma es recto, la arista lateral está determinada en posición por ser perpendicular a la base, y bastará fijarla en magnitud.

418. *Dos conos o dos cilindros de revolución son iguales, si tienen iguales la altura y el radio de la base; y dos esferas, si tienen igual radio.*

## CAPÍTULO IX

# Simetría

419. Se sabe ya lo que son un centro y un eje de simetría en las figuras planas; que dos figuras de esta clase situadas en un plano son directamente iguales, e inversamente iguales si son simétricas respecto a un eje. También se ha hablado del centro y de los ejes de simetría de ciertos polígonos.

En las figuras del espacio, además de los centros y eje de simetría deben considerarse los planos.

*Dos puntos son simétricos con relación a un plano (plano de simetría) cuando el segmento que los une es perpendicular al plano y queda dividido por él en dos partes iguales.*

Tomando los puntos simétricos de los de una figura se obtiene otra *simétrica* de ella. (F. 134.—Los triángulos ABC y A'B'C son simétricos respecto del plano P).

Un objeto, y su imagen en un espejo plano, son figuras simétricas respecto de él, y aunque sus elementos son iguales, no podrían, en general, coincidir; porque lo que con relación al objeto está a su derecha, con relación a la imagen cae a la izquierda.

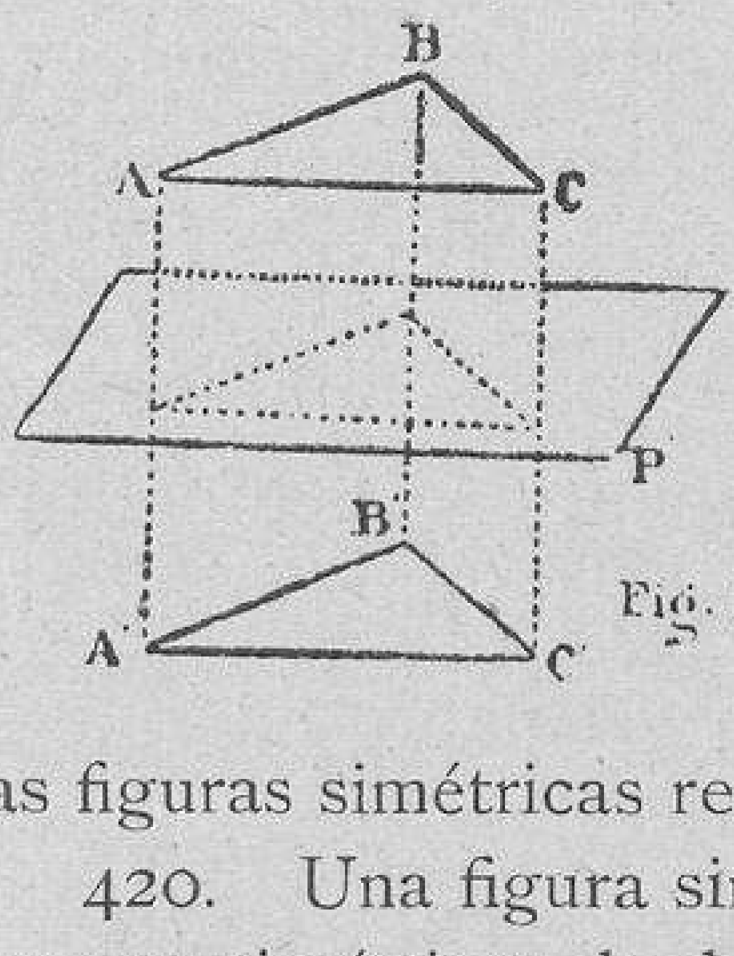

Fig. 134

Para las figuras del espacio, la simetría con respecto a un eje rectilíneo lleva consigo la coincidencia, pero no ocurre lo mismo con las figuras simétricas respecto de *un solo* centro o plano.

420. Una figura simétrica de sí misma, esto es, cuyos puntos son simétricos de dos en dos con relación a un plano, centro o eje, se dice que tiene ese plano, centro o eje de simetría.

Así, en nuestro cuerpo, podemos considerar aproximadamente un plano de simetría respecto del cual quedan a un lado y a otro y equidistantes de él los dos ojos, los dos brazos, las dos piernas, etc.

Una esfera tiene por centro de simetría el de la figura. En una superficie de revolución, el eje, es eje de simetría.

Cuando se habla simplemente de eje de simetría se entiende que es *binario*, lo cual significa que hay *dos* posiciones en que la figura nos presenta el mismo aspecto, deduciéndose una posición de la otra por un giro de $\frac{360^\circ}{2}$ alrededor del eje.

Pero hay figuras que pueden presentarnos tres, cuatro o más veces idéntico aspecto mediante giros de $\frac{360^\circ}{3}$, $\frac{360^\circ}{4}$ etc., alrededor de una recta, la cual se llama entonces *eje* de simetría *ternario, cuaternario*, etc.

421. *Las diagonales de un paralelepípedo se cortan todas en un punto, centro de simetría.*

F. 135.—Sea el paralelepípedo AG. Tracemos los planos ABGH y BFHD, cada uno de los cuales contiene dos aristas opuestas del paralelepípedo.

D.—Las dos diagonales del paralelogramo ABGH, se cortan en su punto medio O. Como el paralelogramo, BFHD, tiene común con el anterior la diagonal HB, la otra diagonal, FD, pasa también por O. E igualmente se demostraría que por O pasa la diagonal AG, considerando el plano en que se hallan AE y CG.

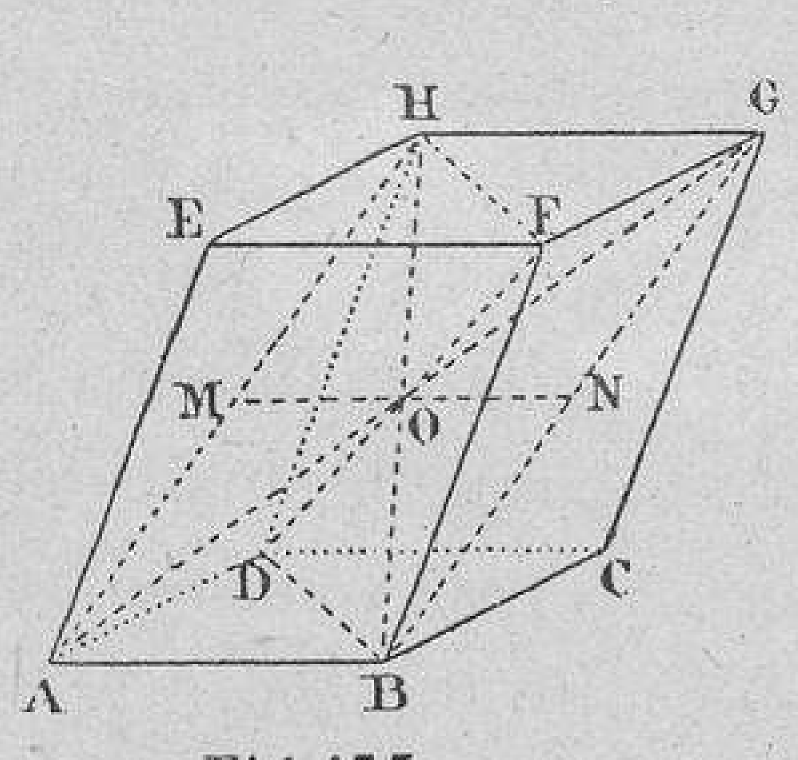

Fig. 135.

Detalles.—ABGH, BFHD etcétera, son paralelogramos, puesto que dos lados son aristas paralelas y los otros dos, BC y AH p. ej.: son diagonales de caras opuestas, es decir, intersecciones del plano secante con dos planos paralelos; luego son también paralelas. (306)

Complemento.—Siendo O punto medio de las diagonales lo será también de otro segmento MON que termine en las caras del paralelepípedo, porque es fácil probar que son iguales los triángulos OMA y ONG. (Sirva esto de ejercicio).

Luego O es centro de simetría del paralelepípedo.

422. **Simetría del cubo.** En el cubo hay, como en todo paralelepípedo, un centro de simetría, que es el punto de concurso de las diagonales.

Por él pasan tres ejes de simetría *cuaternarios* que unen los centros de cada dos caras opuestas; cuatro ejes *ternarios* que son las diagonales; y seis ejes *binarios* que unen puntos medios de aristas opuestas.

De lo cual resulta que se puede colocar el cubo en 24 posiciones distintas.

También pasan por el centro varios planos de simetría, a saber: los trazados por él perpendicularmente a los ejes cuaternarios o binarios; los primeros contienen los puntos medios de cuatro aristas paralelas, y los segundos, contienen cada uno dos aristas opuestas. El plano trazado por el centro perpendicularmente a una diagonal o eje ternario corta al cubo según un exágono regular que contiene los puntos medios de las aristas no concurrentes en los extremos de la diagonal, pero no es plano de simetría.

Ejercicio.—Comprobar experimentalmente las anteriores propiedades, valiéndose de un cubo material, que se hace girar alrededor de los ejes. (*).

---

(*) Creemos que esta demostración intuitiva es necesaria y más conveniente para los principiantes que la verdadera demostración racional.

423. **Simetría del octaedro.** El octaedro regular puede obtenerse uniendo los centros de las caras de un cubo, y éste uniendo los centros de las caras de aquél, y por eso tienen ambos los mismos elementos de simetría. Pero mientras en el cubo eran ejes cuaternarios los que unían centros de caras opuestas, en el octaedro son los que unen vértices opuestos, es decir, las diagonales; ternarios, los que unen centros de caras opuestas; y binarios, los que unen medios de aristas opuestas. (*)

424. **Simetría del tetraedro.** El tetraedro regular se puede obtener del cubo, formando un triángulo EBG (figura 136) con las diagonales de tres caras concurrentes en un mismo vértice, F, y uniendo los del triángulo con el opuesto, D, del paralelepípedo. Tiene, pues, dicho tetraedro, cuatro de los ocho vértices del cubo. Con los otros cuatro se forma otro tetraedro regular que se llama conjugado del primero.

El tetraedro tiene cuatro ejes ternarios, que son las rectas que unen cada vértice al centro de la cara opuesta y tres ejes binarios que unen los puntos medios de cada dos aristas opuestas.

Son planos de simetría los determinados por cada arista y el punto medio de la opuesta.

La intersección de dos de ellos pertenecientes a aristas opuestas da uno de los ejes binarios.

El tetraedro no tiene centro de simetría, pero se sue-

(*) Los sistemas *cristalinos* que se estudian en Mineralogía se clasifican atendiendo a los ejes de simetría, y por eso el cubo y el octaedro forman parte de un mismo sistema.

le llamar centro al punto medio de uno de los ejes binarios, porque este punto equidista de los cuatro vértices y sería centro de una esfera circunscripta al tetraedro. Para ver que es así, y probar, además, que las aristas opuestas del tetraedro se cruzan perpendicularmente y son perpendiculares al eje binario que une sus puntos medios, basta considerar la figura 136. En ella se advierte que las aristas opuestas EG y BD del tetraedro son diagonales de las caras opuestas del cubo; de modo que DB sería paralela a la otra diagonal (HF, no trazada) del cuadrado EFGH, y por consiguiente perpendicular a EG. Además, PQ, perpendicular a las caras del cubo, será mediatriz de EG y DB y el punto O, centro del cubo, equidistará según decíamos de los cuatro vértices E y G, D y B. (*)

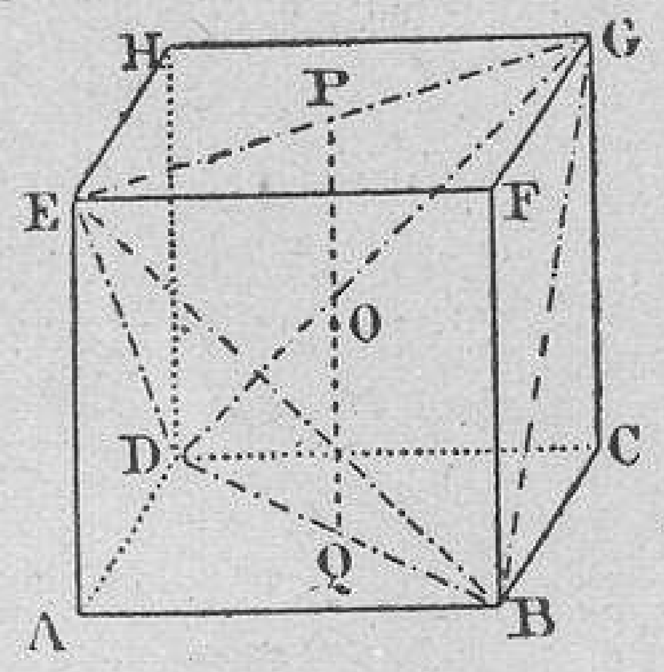

Fig. 136.

425. Ejercicio. Decir de qué clase son los ejes de simetría que se obtienen en el dodecaedro regular uniendo centros de de caras opuestas; vértices opuestos o puntos medios de aristas opuestas.

Buscar ejes de simetría en el icosaedro regular.

(*) Por ser los elementos de simetría del tetraedro la mitad de los del cubo del cual se deriva, se le llama en Cristalografía, forma *hemiédrica* del cubo.

# TERCERA PARTE

## CAPÍTULO PRIMERO

## Razones, productos y cuadrados de segmentos

426. ADVERTENCIAS IMPORTANTES.—Por producto o cociente de segmentos se entiende el producto o cociente de sus longitudes referidas a una misma unidad lineal. De modo que cuando digamos que multiplicamos o dividimos dos segmentos, o que hallamos el cuadrado de un segmento..., etc., se entenderá que estas operaciones se ejecutan con los *números* que expresan la medida de aquellos segmentos, referidos a una unidad convencional, pero la misma para todos los segmentos que se multipliquen o dividan. De aquí que podamos considerar las razones de segmentos como cocientes, y las proporciones como igualdades fraccionarias a las cuales les serán aplicables las propiedades demostradas en Aritmética, y, en particular, la fundamental de que *el producto de dos términos opuestos es igual al de los otros dos*, o, como

suele decirse: *producto de los medios, igual al de los extremos.*

427. Varios segmentos son proporcionales a otros tantos cuando la razón de uno de aquéllos con uno de éstos es la misma. Si por ejemplo se tiene:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{EF}{E'F'} \cdots$$

los segmentos *numeradores* AB, CD, EF..., son proporcionales a los denominadores A'B', C'D', E'F'..., y viceversa.

428. Si varios segmentos son iguales entre sí, y otros tantos también iguales entre sí, los primeros serán proporcionales a los segundos. Es decir, que si

$$AB = CD = EF ..., \text{ y } A'B' = C'D' = E'F'$$

será evidentemente

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{EF}{E'F'}.$$

429. Si se verifica entre los segmentos $a$, $b$, $x$ una de estas cuatro relaciones:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \;,, \; \frac{x}{a} = \frac{b}{x} \;,, \; x^2 = ab \;,, \; x = \sqrt{a \cdot b}$$

(cuya compatibilidad establece la Aritmética), se dirá que $x$ es *medio proporcional* entre $a$ y $b$.

430. Si se verifica una de las siguientes relaciones, (también compatibles)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \;,, \; x = \frac{b \cdot c}{a}$$

se dirá que $x$ es *cuarto* proporcional a $a$, $b$ y $c$ (en este orden).

431. Y si

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \text{ o } x = \frac{b^2}{a}$$

$x$ es *tercero* proporcional a $a$ y $b$.

No es preciso que los cuatro segmentos que forman una proporción estén medidos con igual unidad, pero sí deberán estarlo los dos que entren en una misma razón.

432. T.—*Dado un segmento sobre una recta indefinida, existen en ella dos puntos, uno dentro y otro fuera del segmento, tales que la razón de sus distancias a los extremos de éste tiene igual valor.*

F. 137.—Sea AB el segmento de la recta XY; M un punto interior y M' otro exterior cuyas posiciones quieren fijarse de tal modo que $\frac{MA}{MB}$ y $\frac{M'A}{M'B}$ tengan un mismo valor, v. gr.: $\frac{3}{4}$.

Fig. 137.

D.—1.º Para que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$$

basta hacer MA = 3, MB = 4 y por tanto MA + MB = = AB = 7.

Si, pues, imaginamos a AB dividido en 7 partes, M será el punto, *único* dentro del segmento, que diste de A tres de esas partes, o de B las cuatro restantes.

Análogamente, para que

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{4}$$

bastará tomar el punto M' *a la izquierda* de A de modo que

$$M'A = 3, M'B = 4 \text{ y } M'B - M'A = AB = 1.$$

esto es de modo que M'A sea tres veces AB (o M'B, 4 veces AB), punto que será *único*.

A la derecha de B no existe punto M'' tal que

$$\frac{M''A}{M''B} = \frac{3}{4}$$

porque la primera razón es mayor que 1, y la segunda menor.

En general, puesto que las consideraciones que anteceden no dependen del ejemplo, si $\frac{m}{n}$ es una fracción *menor que 1* existen dos únicos puntos M y M', uno entre A y B y otro *a la izquierda* de A tales que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n} \text{ y } \frac{M'A}{M'B} = \frac{m}{n}$$

y por tanto

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B}$$

2.º Si la fracción $\frac{m}{n}$ es *mayor que 1* se demuestra análogamente que existen dos puntos uno entre A y B y otro *a la derecha* de B, cuyas razones de distancias a A y B son iguales. (Dejamos esta demostración como ejercicio).

3.º Si $\frac{m}{n} = 1$, esto es, si

$$\frac{MA}{MB} = 1$$

claro es que el punto M será el medio del segmento. Fuera de éste no existe, propiamente hablando, punto M' para el cual puede verificarse

$$\frac{M'A}{M'B} = 1$$

puesto que si M' está a la izquierda de A será $M'A < M'B$ y si a la derecha, inversamente.

Pero el error cometido tomando como igual a 1 la razón $\frac{M'A}{M'B}$ sería la diferencia

$$1 - \frac{M'A}{M'B} = \frac{M'B - M'A}{M'B} = \frac{AB}{M'B}$$

y como esta diferencia disminuirá indefinidamente a medida que su denominador M'B crezca por alejamiento del punto M', se dice que la razón $\frac{M'A}{M'B}$ *tiene por límite 1* cuando M' *se aleja al infinito*, locución que abreviadamente expresa lo que antecede.

E igualmente para el punto M'', a la derecha de B,

$$\lim. \frac{M''A}{M''B} = 1, \text{ para M'' alejado al infinito.}$$

4.º Como un número entero admite la forma fraccionaria, y uno inconmensurable se aprecia, tan aproximadamente como se desee, por una fracción, aunque $\frac{m}{n}$ tuviese un valor entero o inconmensurable, siempre pueden determinarse, con exactitud o con aproximación suficiente, dos puntos M y M' tales que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{m}{n}$$

Los puntos M y M' se llaman *conjugados armónicos* de los A y B, y se distinguen entre sí diciendo que el M divide al segmento AB *interior* o *aditivamente* en la razón $\frac{m}{n}$; y el M' *exterior* o *substractivamente* en igual razón.

Todo lo cual justifica la definición que sigue:

433. **Puntos conjugados armónicos de otros dos,** A *y* B, *son aquellos que dividen al segmento* AB *en una misma razón: el uno, aditivamente, y el otro substrativamente.*

Para determinar *gráficamente* puntos conjugados armónicos existen construcciones, alguna de las cuales se mencionará después.

434. *Si a contar del vértice de un ángulo se toman sobre un lado partes iguales, y por los puntos de división se trazan rectas paralelas entre sí, que corten al otro lado, éste quedará dividido en otros tantos segmentos iguales entre sí; y la última de las paralelas contendrá a la primera tantas veces como divisiones hubiere.*

F. 138.—Sean: el ángulo O, y OA, AB, BC, CD... las partes iguales tomadas sobre un lado. Tracemos las rectas AA′, BB' CC′... paralelas entre sí y sean OA′, A′B′, B′C′... los segmentos que determinan sobre el otro lado, cuya igualdad ha de probarse.

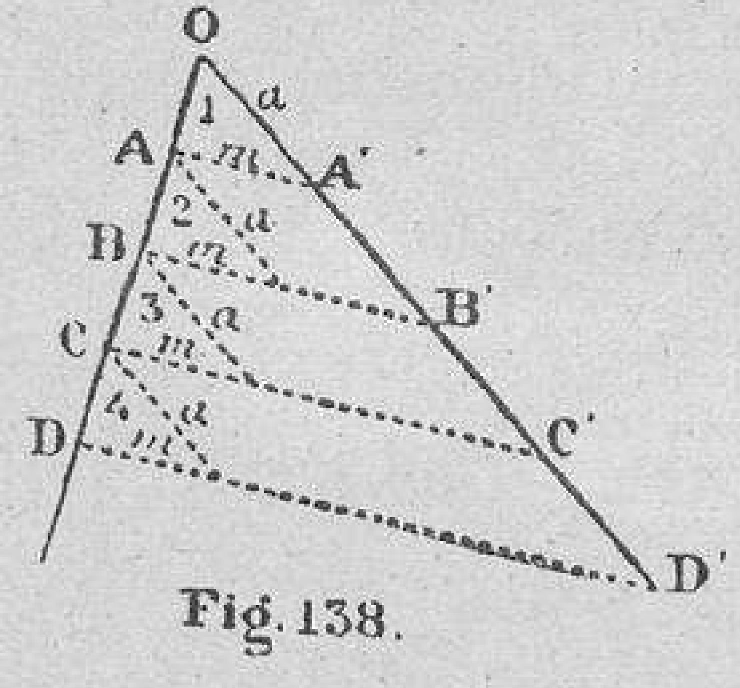

Fig. 138.

D.— Por una traslación rectilínea a lo largo de OD, el triángulo OAA', tomará las posiciones sucesivas 1, 2, 3, 4 y los segmentos OA'= $=a$ y AA′ $=m$ las demás señaladas con iguales letras. Entonces, evidentemente,

$$a=\text{OA}' \quad » \quad \text{AA}'=m$$

y además, por ser iguales los segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas,

$$a=\text{A}'\text{B}' \quad » \quad \text{BB}'=m+\text{AA}'=m+m=2m$$
$$a=\text{B}'\text{C}' \quad » \quad \text{CC}'=m+\text{BB}'=3m$$
$$a=\text{C}'\text{D}' \quad » \quad \text{DD}'=m+\text{CC}'=4m$$

de donde resulta

$$OA' = A'B' = B'C' = C'D' \dots$$

y $$4.^{a} \text{ paralela} = 4\,m$$

conforme al enunciado.

Detalles.—Cuando por la traslación O venga a A y A a B, AA′ caerá sobre BB′, porque en la traslación los segmentos conservan su paralelismo (149) y por B no hay otra paralela a AA′ que la BB′

435. **Problema.**—*Dividir un segmento en partes iguales.*

F. 138.—Sea el segmento OD′ que quiere dividirse en cuatro partes iguales.

Construcción.—Se funda inmediatamente en el teorema anterior, y, por tanto, es la siguiente: Por el extremo O del segmento tracemos una recta indefinida OD; (conviene que el ángulo de esta recta con la OD′ sea como de 45°), llevemos sobre ella a partir de O los segmentos iguales entre sí OA, AB, BC y CD; unamos el extremo D del último con el D′ del segmento dado y por los otros tres puntos A, B, C tracemos paralelas a DD′. El segmento OD′ quedará así dividido en cuatro partes iguales entre sí.

436. T.—*Si se cortan los lados de un ángulo o los de dos ángulos opuestos por el vértice por dos paralelas, los triángulos que se forman tienen sus lados proporcionales.*

F. 139.—Sea el ángulo A cortado por las paralelas DE y BC.

D.—Supongamos que AB es igual a 9 veces el segmento AU, y AD igual a 5 veces el mismo segmento.

Por el teorema anterior,

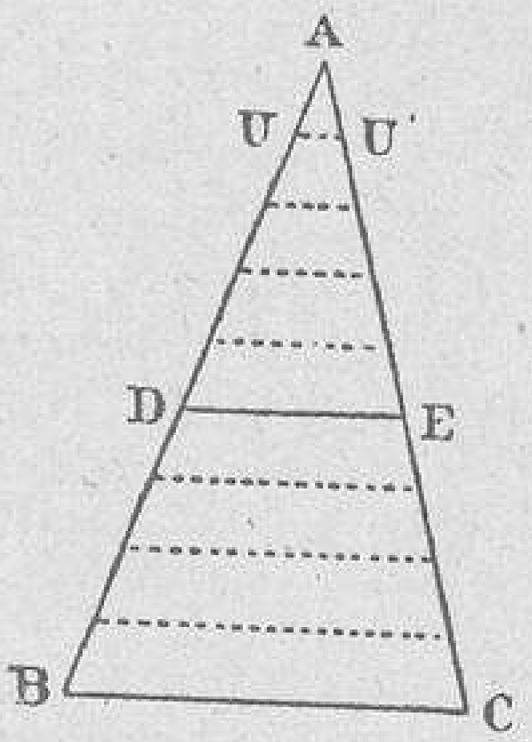


Fig. 139.

$$\left.\begin{array}{l} AB = 9\ AU \\ AC = 9\ AU' \\ BC = 9\ UU' \end{array}\right\} \text{ y } \left\{\begin{array}{l} AD = 5\ AU \\ AE = 5\ AU' \\ DE = 5\ UU' \end{array}\right.$$

luego

$$\frac{AB}{AD} = \frac{9}{5}, \quad \frac{AC}{AE} = \frac{9}{5}, \quad \frac{BC}{DE} = \frac{9}{5} \text{ o bien}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

razones que expresan la proporcionalidad entre los lados del triángulo ABC con los del ADE.

En el caso de que la razón de los lados AB y AD no pudiese representarse exactamente por una fracción, por ser inconmensurables dichos segmentos, la mencionada razón, $\frac{AB}{AD}$, podría siempre encerrarse entre dos fracciones de diferencia arbitrariamente pequeña, y como las otras razones quedarían comprendidas también entre las mismas fracciones, serían aún iguales como constantes comprendidas entre variables cuya diferencia tiende a cero. (*)

Si los ángulos cortados por paralelas son opuestos por el vértice, se reduce el caso al anterior, por rotación de 180° alrededor del vértice.

437. **Problemas.**—*Hallar el cuarto proporcional a tres segmentos dados.*

F. 140.—Sean *a*, *b*, *c*, los segmentos dados y llamemos *x* al cuarto proporcional.

(*) Proposición de Aritmética.

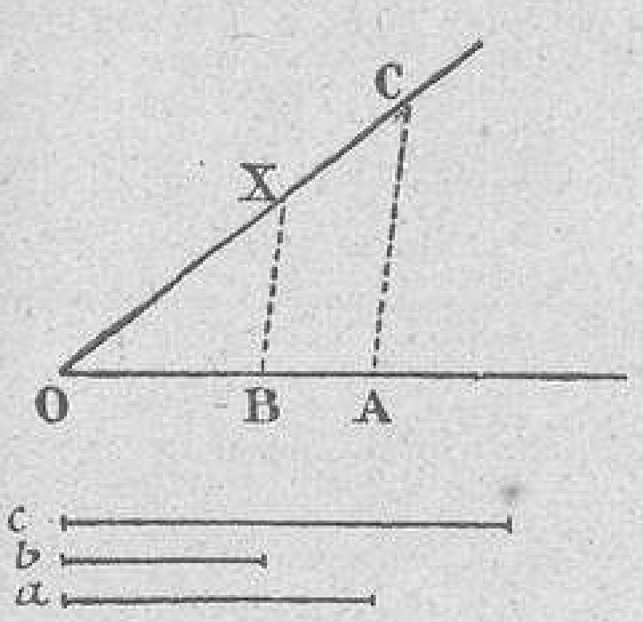


Fig. 140

CONSTRUCCIÓN.—Sobre los lados de un ángulo llevemos OA = *a* y OB = *b*, en uno de ellos, y OC = *c* en el otro.

Uniendo C con el extremo A del primero, y trazando por el B del segundo una paralela a CA, el segmento OX será el pedido; puesto que, según el teorema:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OX} \text{ o bien } \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \text{ (430).}$$

438. 2.° *Hallar el tercero proporcional a los segmentos* a *y* b.

Se procede como en el caso anterior, repitiendo el segmento *b*. (431).

439. 3.° *Dividir, aditiva o substractivamente, un segmento dado en la razón en que estén otros dos segmentos o dos números conocidos.*

F. 141.—Sean *m* y *n* los segmentos en cuya razón, $\frac{m}{n}$, se ha de dividir el segmento propuesto AB.

CONSTRUCCIÓN.- Por A y B tracemos paralelas. Tomemos en una AM = *m*, y en la otra BN y BN′ (a distinta región) iguales a *n*. Uniendo los extremos M y N se obtiene el punto D que da la división aditiva, y uniendo M y N' el D′ que da la substractiva. Puesto que, según el teorema, (436)

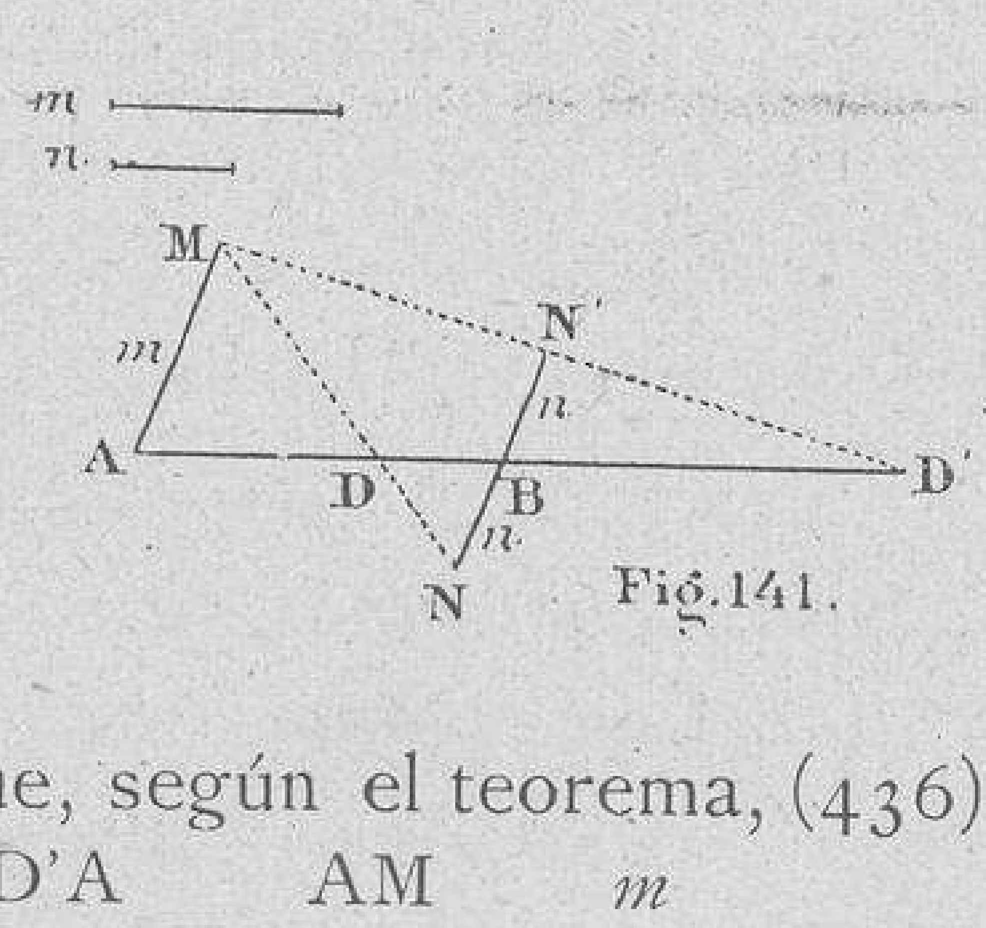


Fig. 141.

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AM}{BN} = \frac{m}{n} \text{ y } \frac{D'A}{D'B} = \frac{AM}{BN'} = \frac{m}{n}$$

Observación.—D y D′ son conjugados armónicos de A y B.

En el caso de ser la razón dada por números, v. gr: $\frac{3}{5}$ se toma un segmento *m* igual a 3 veces una unidad arbitraria, y otro *n* igual a 5 veces la misma unidad, y se recae en el caso anterior.

440. R.—*Si sobre dos lados de un triángulo se toman puntos (uno en cada lado), que los dividan, aditivamente ambos o ambos substractivamente, en igual razón, la recta que une aquellos puntos es paralela al tercer lado.*

F. 139.—Sean D y E los puntos que dividen a los lados AB y AC en la razón $\frac{5}{9}$.

D.—Si por D se traza la paralela a BC, debe encontrar a AC en un punto tal que divida a este lado en la razón $\frac{5}{9}$, (por el teorema directo) (436); pero ese punto es el E (por la hipótesis) luego la paralela pasa por E, es decir, es la recta DE

(Análogamente si la división fuese substractiva).

441. **Corolarios.** 1.º *La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado e igual a su mitad.*

Ejercicio.— Detallar la demostración de este corolario.

442. 2.º *Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto (baricentro) situado a la 3.ª parte de su longitud contada a partir del pie de la mediana.*

F. 142.—Sea ABC el triángulo y A′, B′, C′, los puntos medios de los lados opuestos.

D.—Las medianas BB′ y CC′ se cortan por formar con BC ángulos que no son suplementarios.

C'B' es paralela a BC e igual a su mitad, según el corolario anterior, luego GC′ será mitad de GC (436) o sea 3.ª parte de CC′ y GB′ 3.ª parte de BB′: lo que demuestra el teorema para estas dos medianas. Pero la tercera mediana AA' (no trazada en la figura) debiera cortar a una de las anteriores, por ejemplo, a la BB', en un punto situado a la tercera parte de BB′ contando desde B′, y como ese punto es el G, por G pasará AA′.

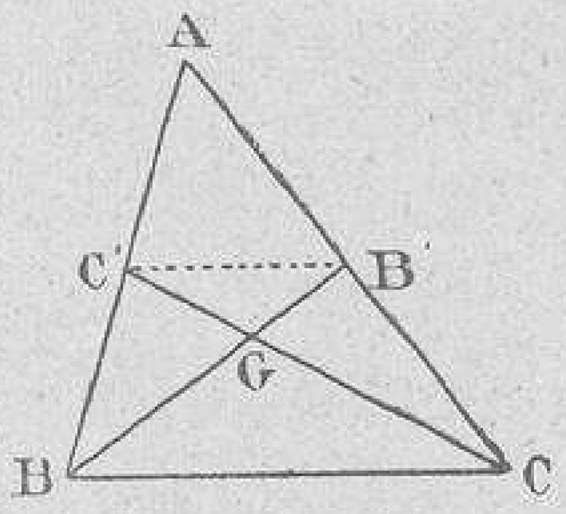

Fig. 142.

443. Se llama *haz de rectas* el conjunto de varias rectas que pasan por un punto (vértice) y están en un plano.

Las rectas del haz se llaman *rayos* del mismo.

*Radiación* de rectas es el conjunto de varias rectas que pasan por un punto (vértice), pero no están en un plano.

Las rectas se denominan *rayos*.

444. T.—*Si se cortan los rayos de un haz por dos paralelas quedan todos ellos divididos en igual razón, y las partes de paralelas interceptadas entre unos mismos rayos tienen igual razón que las distancias al vértice de los puntos en que encuentran a cualquier rayo.*

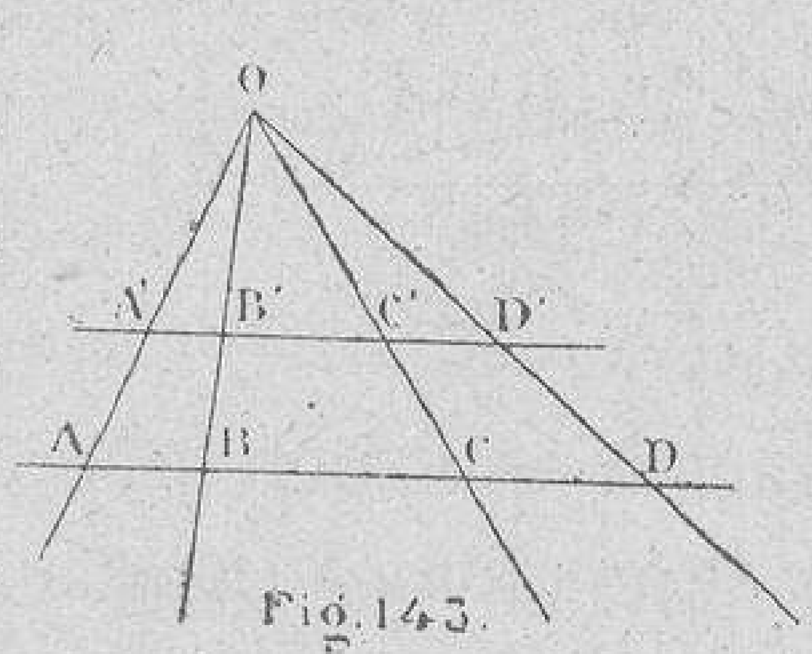

Fig. 143.

F. 143.—Sean AD y A′D′ las paralelas que cortan al haz de rayos de vértice O. Las razones en que quedan divididos los rayos serán $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$, $\frac{OC}{OC'}$ y $\frac{OD}{OD'}$; y las que tienen las partes de paralelas interceptadas entre los rayos serán $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{BC}{B'C'}$, $\frac{CD}{C'D'}$; debiendo demostrarse que todas las razones mencionadas son iguales.

D.—Basta aplicar un teorema precedente (436) a cada par de triángulos tales como OAB y OA'B', OBC y OB'C', etc.

EJERCICIO.—Detallar la anterior demostración.

445. T.—*Si se cortan los rayos de una radiación de rectas por dos planos paralelos, los rayos quedan divididos todos en una misma razón, y las rectas que unen los pies* (con relación a los planos) *de dos rayos tienen entre sí igual razón que la distancia de dichos pies al vértice.*

F. 144.—Sean P y Q dos planos paralelos que cortan a la radiación de vértice O en los puntos ABCH A'B'C'H'.

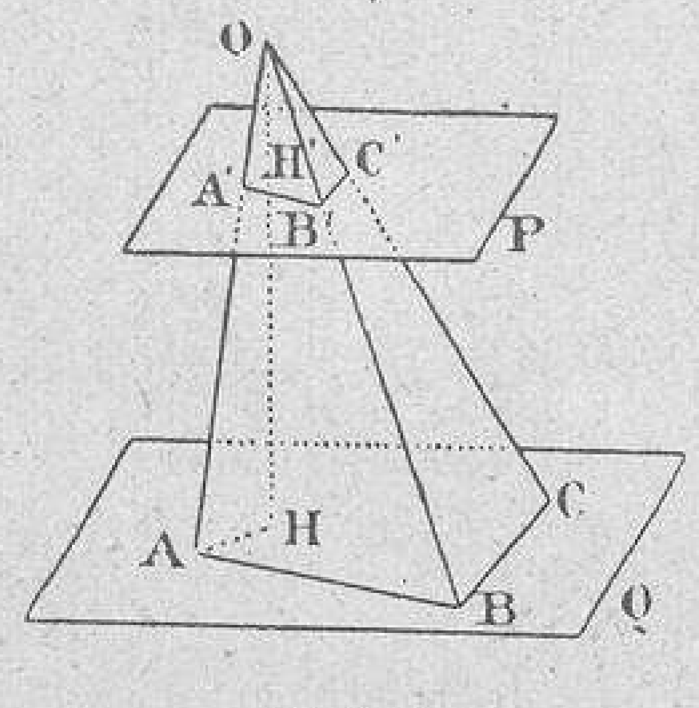


Fig. 144

D.—Las rectas AB y A'B'; BC y B'C', etc., son paralelas como intersección de los planos paralelos P y Q con otros planos, AOB, BOC, etcétera. Por lo cual se puede dar de este teorema la misma demostración que del precedente.

EJERCICIO.—Detallar esta demostración.

446. **Corolario.**—*Si se traza un plano paralelo a la base de una pirámide, las aristas, la altura, y, en gene-*

*ral, cualquier recta que una el vértice con un punto de la base, quedan divididas en una misma razón, y en esta razón están también cada dos lados del polígono de la base y del de la sección situados en una misma cara.*

Este corolario no difiere del teorema más que en el enunciado.

EJERCICIOS. 1.º—Examinar lo que acontece cuando por el punto medio de una arista de una pirámide se traza un plano paralelo a la base.

2.º—Aplicar el teorema a un cono de revolución cortado por un plano paralelo a la base.

447. R. 1.º—*Si sobre los rayos de un haz, limitados en una recta que los corte, se marcan puntos que los dividan siempre aditiva o siempre substractivamente en una misma razón, estos puntos están sobre otra recta paralela a la primera.*

F. 143.—Sea el haz OABCD, cuyos rayos están cortados por la recta AD, y sean A'B'C'D' los puntos marcados sobre ellos con la condición de que

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'}$$

D.—El segmento A'B' debe ser paralelo al AB, y B'C' al BC (440), y como AB y BC son partes de una sola recta, y por B' no hay más que una paralela a esta recta, A'B' y B'C' son prolongación uno de otro.

R. (del 445).—*Si sobre los rayos de una radiación de rectas, limitados por un plano que los corta, se marcan puntos que los dividan siempre aditiva o siempre substractivamente en una misma razón, estos puntos caen sobre un plano paralelo al primero.*

EJERCICIOS. 1.º—Demostrar este teorema teniendo presente el anterior y sabiendo que dos paralelas a un plano, por un punto, determinan un plano paralelo al primero.

2.º—Enunciar este mismo teorema como propiedad de la pirámide o del cono.

448. R. 2.º—*Si sobre dos rectas paralelas existen segmentos consecutivos proporcionales, las rectas que unen los extremos de esos segmentos forman un haz, es decir, concurren en un mismo punto.*

F. 143.—Sean AB, BC, CD, segmentos consecutivos de una recta, y A′B′, B′C′, C′D′, los correspondientes de otra recta paralela, de tal modo, que $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=$ $=\frac{CD}{C'D'}$. Unamos los extremos A y A′, B y B′, etc.

D.—Si las rectas AA′ y BB′ se cortan en O, se verificará, por el teorema directo (444):

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{BC}{B'C'}$$

Pero la recta CC′ encontrará a la BB′ en cierto punto tal que la divida (aditiva o sustractivamente) en una razón igual a $\frac{BC}{B'C'}$, y como el punto O es el único que cumple con esta condición (432), CC′ pasará por O. E igual pasa DD′.

**Escolio.** Si AA′ y BB′ fuesen paralelas, también lo serían a ellas las demás, CC′, DD′, ....., lo cual acontece cuando los segmentos AB y A′B′, BC y B′C′, etc., son iguales.

R. (2.º del 445).—Si los segmentos AB, BC, etc., no formasen una recta, sino una línea quebrada, pero los

A'B', B'C', etc., siguiesen siéndoles paralelos y proporcionales, las rectas AA', BB', etc., concurrirían en O y formarían una radiación, en vez de un haz. (F. 144).

449. **Generalizaciones.** — En el teorema fundamental de esta teoría, expuesto en el número 434, se supuso que se dividía en partes iguales un lado de un ángulo, *a contar del vértice*, y se demostró que el otro quedaba dividido también en partes iguales entre sí.

Pero es fácil extender el teorema al caso en que la división en partes iguales se haga, no a contar desde el vértice, sino desde cualquier punto A (fig. 145); es decir, que si AB se divide en partes iguales y se trazan paralelas a AA', quedará dividido A'B' en partes iguales también (entre sí). Porque las paralelas dichas dividirán en partes iguales a la recta AB'' paralela a A'B'

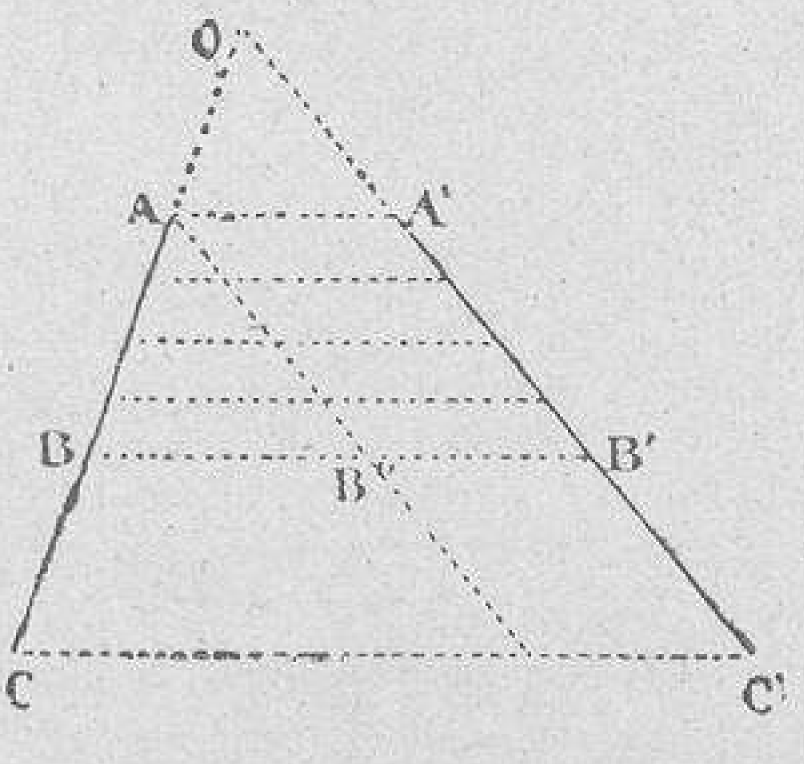

Fig. 145.

De aquí se desprendería por razonamientos muy parecidos a los del número (436), que los segmentos contados sobre una de las rectas son proporcionales a los contados sobre la otra, es decir,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \text{ y también } \frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'} \text{ » } \frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'} \text{ etc.}$$

(Detállese la demostración, como ejercicio, midiendo los segmentos de una misma recta con una unidad común).

450. Podemos, pues, afirmar, que *varias paralelas que cortan a dos rectas las dividen en partes proporcionales.*

En el espacio existe el teorema análogo: *varios planos paralelos que cortan a dos rectas, las dividen en partes proporcionales.*

451. El caso particular más importante es el que sigue:

1.º Si por el punto medio de uno de los lados no paralelos de un trapecio, se traza una paralela a las bases, pasa por el punto medio del lado opuesto.

F. 146. Sea el trapecio ABCD y MN la recta paralela a las bases trazada por M, punto medio de AD.

D.—La razón $\frac{MD}{MA}$ es igual a 1, luego la $\frac{NC}{NB}$ igual a aquélla, será también 1, y por tanto NC=NB, es decir, N punto medio de CB.

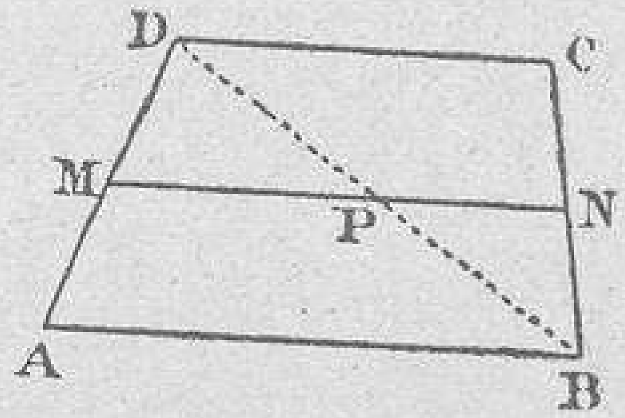

Fig. 146.

452. Recíprocamente: puesto que la paralela a las bases desde M pasa por N, podemos decir: *la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es paralela a las bases.*

453. Se demuestra también que *dicha paralela media, es la semisuma de las bases.*

Porque (441)

$$\left.\begin{array}{l} MP=\frac{1}{2}AB \\ PN=\frac{1}{2}DC \end{array}\right\} \text{y, sumando: } MN=\frac{1}{2}(AB+DC).$$

454. Ejercicio.—Decir qué ocurrirá con las aristas o generatrices de un tronco de pirámide o de cono de bases paralelas, al trazar un plano paralelo a éstas por el punto medio de una arista o generatriz, y qué será el perímetro o circunferencia de la sección.

455. **Problema.**—*Calcular el valor de una paralela cualquiera a las bases de un trapecio (comprendida entre ellas), conociendo dichas bases y la razón en que la paralela divide a los otros lados.*

F. 147.—Sea el trapecio AA'CC' y BB' la paralela. Designemos por $a$ la longitud de AA', por $c$ la de BB' (que es la que ha de calcularse), por $b$ la de CC' y por $m$ y $n$ las de AB y BC.

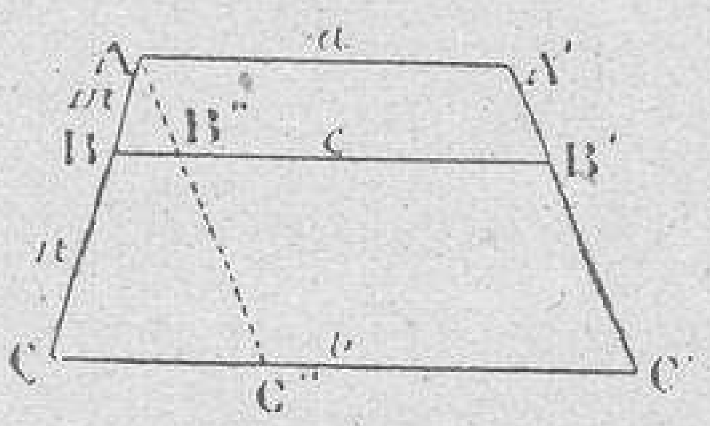


Fig. 147

Traslademos A'C' a la posición AC'', y se tendrá en los triángulos ABB'' y ACC'' (436).

$$\frac{m}{m+n}=\frac{c-a}{b-a}$$

*fórmula* que permite calcular $c$.

Ejercicios. 1.º—Hacer una aplicación numérica de la fórmula anterior, suponiendo, vg.: $m=2$, $n=5$, $a=2$, $b=16$.

Solución.—$c=6$.

2.º—Aplicar la fórmula general que precede al caso particular de la paralela media en el cual $m=n$.

Solución.—$c=\frac{a+b}{2}$.

456. **Problema.**—*Dividir un segmento en partes proporcionales a otros segmentos, o a números dados.*

Fundamento.—Lo es el teorema según el cual varias paralelas dividen a dos rectas en partes proporcionales (450).

Construcción.—Si AB (F. 148) es el segmento que ha de dividirse en partes proporcionales a otros, $a$, $b$, $c$, se toman éstos unos a continuación de otros sobre la recta AX que forma con AB un ángulo agudo; se une el extremo del último segmento con B, y por los otros se trazan paralelas a la recta de unión, que determinarán en AB las partes $a'$, $b'$, $c'$, tales que

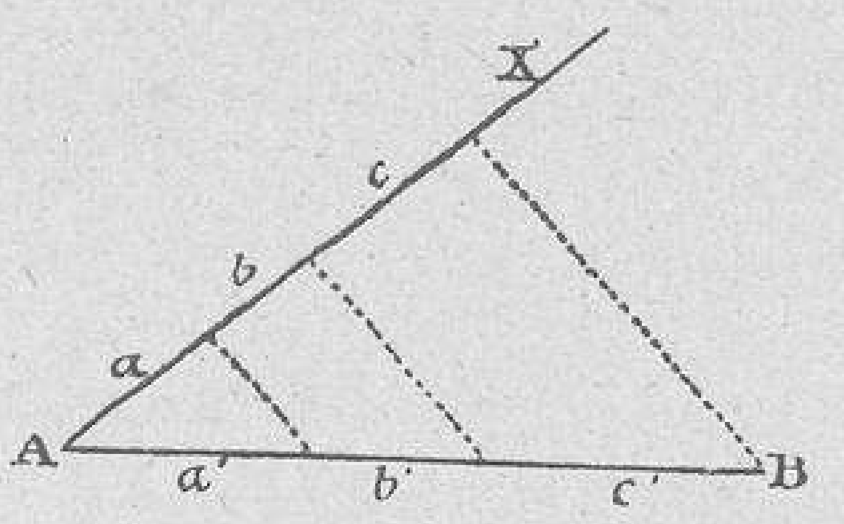

Fig. 148.

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c},$$ como se quería.

457. **Antiparalelas.**—*Dos rectas son antiparalelas con relación a los lados de un ángulo, cuando una de ellas forma con un lado un ángulo igual al que la otra forma con el otro lado.*

Ejemplo.—Las rectas AB y CD (F. 149) serán antiparalelas con relación al ángulo O, si el ángulo 1 (OAB) es igual al 1'.

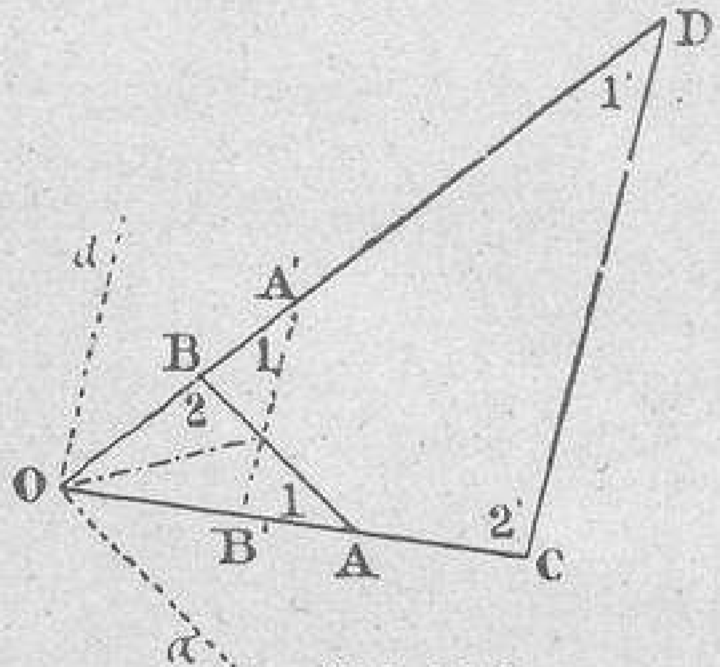

Fig. 149.

Obsérvese, además, que los ángulos 2 y 2' son también iguales, puesto que el 2 es suplemento de $\hat{o}+\hat{1}$ y el 2' suplemento de la suma igual $\hat{o}+\hat{1'}$

458. **Consecuencias.**—1.ª—Si, por un giro alrededor de la bisectriz de O, se coloca el triángulo OAB invertido en la posición OA'B', el ángulo 1 vendrá a ser *correspondiente* del 1' (con respecto a las rectas B'A' y DC cortadas por la secante OD), y como se sabía que

dichos ángulos eran iguales, las rectas B'A' y CD serán paralelas; luego: las rectas antiparalelas se convierten en paralelas haciendo que una de ellas gire alrededor de la bisectriz del ángulo dado, hasta tomar la posición simétrica con respecto a dicha bisectriz.

459. 2.ª—Si las antiparalelas se trazan por el mismo vértice del ángulo, se llaman *isogonales*, por formar ángulos iguales con los lados. (Las O*a* y O*d* de la fig. 149).

Las rectas isogonales son simétricas respecto a la bisectriz, puesto que forman con ella ángulos iguales, y coincidirían si se doblase el plano por dicha bisectriz.

Dos antiparalelas cualesquiera, como las AB y CD, se convierten en las isogonales O*a* y O*d* por traslación rectilínea, puesto que son paralelas a las isogonales dichas.

460. 3.ª—*Si dos rectas,* AB y CD, *son antiparalelas de otras dos,* OD y OC (que forman el ángulo O), *éstas son antiparalelas de aquéllas.*

Porque si se trasladan las AB y CD a las posiciones O*a* y O*d*, los ángulos que forman con OD y OC, son los mismos que forman éstas con aquéllas.

461. 4.ª—*Los segmentos de antiparalelas comprendidos entre los lados de un ángulo forman con ellos un cuadrilátero inscriptible en una circunferencia.*

D.—Si el cuadrilátero es convexo, como el ABDCde la fig. 150, es inscriptible por tener sus ángulos opuestos suplementarios; y si no lo es, como ocurre en la fig. 151, aún existe una circunferencia que pasa por A, C, B y D, porque el arco capaz del ángulo 1 descrito sobre AD, debe contener el vértice del ángulo igual 1'.

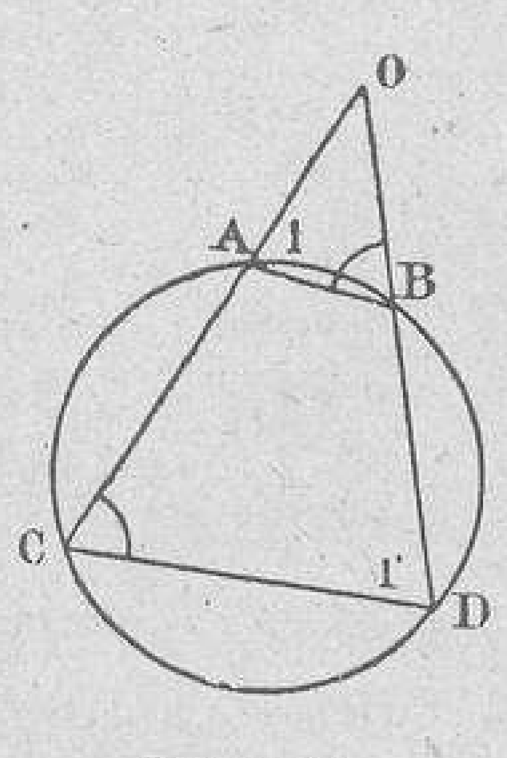

Fig. 150.

DETALLES.—En la fig. 150 se ve que $\widehat{1'} = \widehat{1} = 180^\circ$—

—BAC; luego $\widehat{1'}$ + BAC = 180°. Recuérdense además los números (189 y 203).

462.—5.ª—R.—*Dos lados opuestos de un cuadrilátero inscriptible son antiparalelos con relación al ángulo que forman los otros dos* (prolongados, si es preciso).

D.—Porque si el ángulo 1′ es suplemento del BAC, será igual al adyacente de éste, 1 (F. 150).

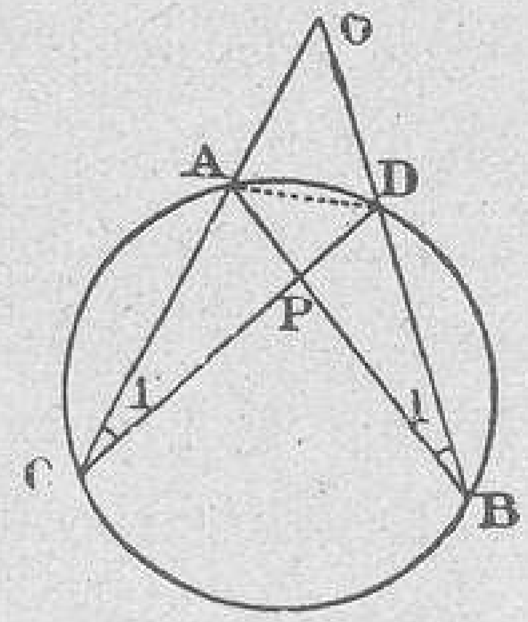

Fig. 151

En el caso de la fig. 151, los ángulos 1 y 1′ son iguales por inscriptos en igual arco.

463.—6.ª—*Dos secantes y las cuerdas que unen sus puntos de intersección con la circunferencia, son rectas antiparalelas.*

Porque dichos pares de rectas determinan un cuadrilátero inscripto. (El ABDC de la fig. 150 o el del mismo nombre, pero cruzado, de la 151).

464. T.—*El producto de las distancias del vértice de un ángulo a los puntos en que un lado es cortado por dos antiparalelas, es igual al de las distancias contadas sobre el otro lado.*

Ejemplo: En la fig. 149 se quiere probar que OA × × OC = OB × OD.

D.—Por ser B′A′ paralela a CD (458) se tiene:

$$\frac{OB'}{OC} = \frac{OA'}{OD} \quad (436)$$

y puesto que OB′ = OB y OA′ = OA,

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD}; \text{ luego } OA \times OC = OB \times OD.$$

465. **Corolario.** *Si varias secantes a una circunferencia arrancan de un mismo punto, el producto de una secante por su segmento externo es* **constante** (o igual al de otra secante por su segmento externo). Es decir: OA × OC = OB × OD (fig. 150).

*Si dos cuerdas se cortan en un punto, el producto de los dos segmentos de cada cuerda es constante* (o igual al de los dos segmentos de otra cuerda). Es decir: PA × × PB = PC × PD (fig. 151).

Porque las secantes, o las cuerdas (que prolongadas son también secantes) y las rectas que unen sus puntos de intersección con la circunferencia, son antiparalelas (463).

466. **Potencia** *de un punto exterior a un círculo, con relación a él, es el producto de cualquiera secante, que parta de aquel punto, por su segmento externo.*

*Potencia de un punto interior a un círculo, con relación a él, es el producto de los dos segmentos que el punto determina en cualquiera cuerda que pase por él.*

Ejemplos. La potencia de O con respecto al círculo cuya circunferencia pasa por A, B, C, D (fig. 150), será OA × OC, o también OB × OD (puesto que estos productos son iguales).

La potencia de P (fig. 151) será PA × PB o PC × × PD (porque ambos productos tienen igual valor).

467. R. (del 464).—*Si sobre cada lado de un ángulo, a partir del vértice, se cuentan segmentos que tengan igual producto, las rectas que unen los extremos de estos segmentos son antiparalelas, y los cuatro extremos mencionados caen sobre una misma circunferencia.*

D.—La circunferencia que pasa por los tres puntos A, B, D (fig. 150) debe cortar al lado OA, según el teorema directo, en un punto tal que

$$OA \times \text{distancia de O al punto} = OB \times OD$$

pero, por hipótesis

$$OA \times OC = OB \times OD$$

luego el punto dicho es C. Los cuatro puntos A, B, D, C caen, pues, en una circunferencia, y entonces ya se sabe (462) que las rectas AB y CD son antiparalelas.

468.—*Si dos antiparalelas con relación a un ángulo concurren en un punto de uno de los lados, el cuadrado de la distancia del vértice a este punto es igual al producto de las distancias a los de intersección de las antiparalelas con el otro lado.*

Ejemplo: Si las antiparalelas son AB y AC (fig. 152) se ha de probar que $OA^2 = OB \times OC$. Consideramos DC antiparalela con AB.

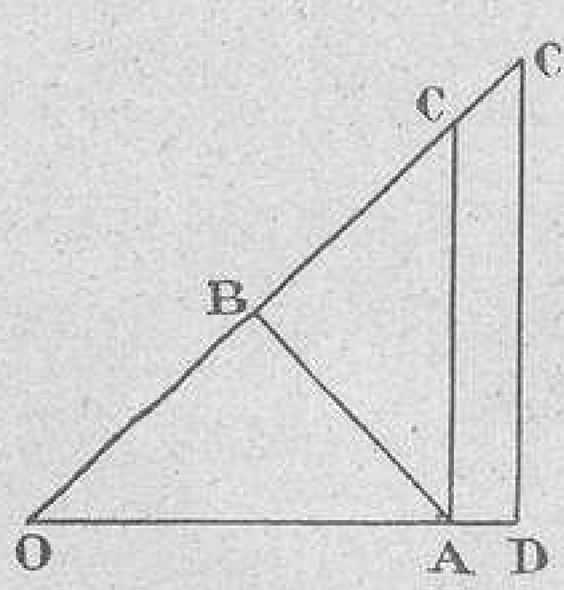

Fig. 152

D.—Si la antiparalela DC se traslada, sin perder su condición de tal, hasta que D se confunda con A, el producto $OA \times OD$ se convertirá en $OA \times OA$ o bien en $OA^2$, luego (464)

$$OA^2 = OB \times OC$$

469. T.—*Si desde un punto exterior a un círculo se trazan una secante y una tangente, las cuerdas que unen los puntos de intersección de la secante con el de contacto de la tangente son antiparalelas.*

F. 153.—Sean OAB la secante, OT la tangente y AT, BT las cuerdas.

D.—El ángulo semi-inscripto 1, y el inscripto 1′ tienen igual medida (la misma que la mitad del arco AT (201) luego AT y TB son antiparalelas.

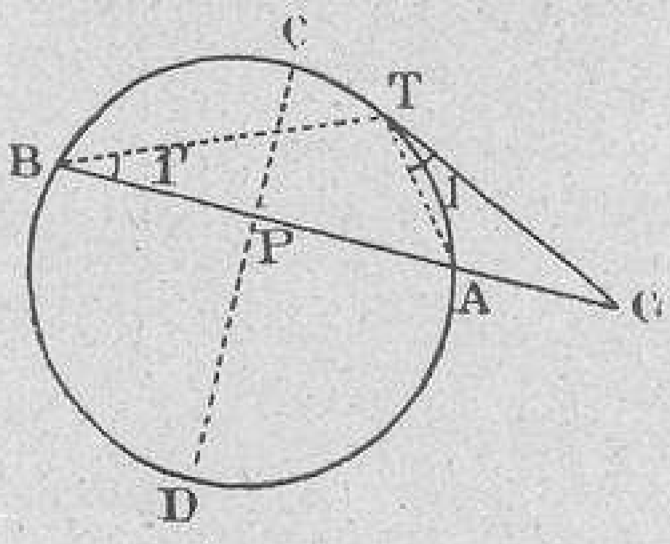


Fig. 153.

470. **Corolario** 1.º *La potencia de un punto exterior a un círculo, con relación a él, es igual al cuadrado de la tangente trazada desde dicho punto.*

D. Porque de ser AT y BT antiparalelas se desprende (468)

$$OT^2 = OA \times OB = \text{Potencia de O}.$$

471. **Escolio.** 1.º Puede enunciarse el anterior corolario diciendo: *Si desde un punto exterior a un círculo se trazan una secante y una tangente, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.*

472. **Corolario** 2.º *La potencia de un punto interior es igual al cuadrado de la semicuerda perpendicular al diámetro que pasa por dicho punto.*

D.—Porque siendo el diámetro CD perpendicular a la cuerda AB (fig. 153) la divide en partes iguales, y

$$\text{Potencia de P} = PA \times PB = PA \times PA = PA^2.$$

473. **Escolio** 2.º *Una semicuerda perpendicular a un diámetro es media proporcional entre los segmentos que determina sobre él.*

D.—Se ha visto en el corolario que

$$\text{Potencia de P} = PA^2$$

pero también

$$\text{Potencia de } P = PC \times PD$$

luego

$$PA^2 = PC \times PD$$

474. Observación.—Los puntos situados sobre la circunferencia tienen potencia nula.

475. Ejercicio.—Enunciar y demostrar (por analogía con el razonamiento núm. 467) el recíproco del teorema del número 468.

476. *El lugar geométrico de los puntos de igual potencia oon relación a dos circunferencias secantes, es la recta que determinan sus puntos de intersección.*

F. 154.—Sean O y O' las circunferencias secantes en A y B.

D.—Los puntos A y B por estar en ambas circunferencias tienen igual potencia, a saber: potencia cero (474).

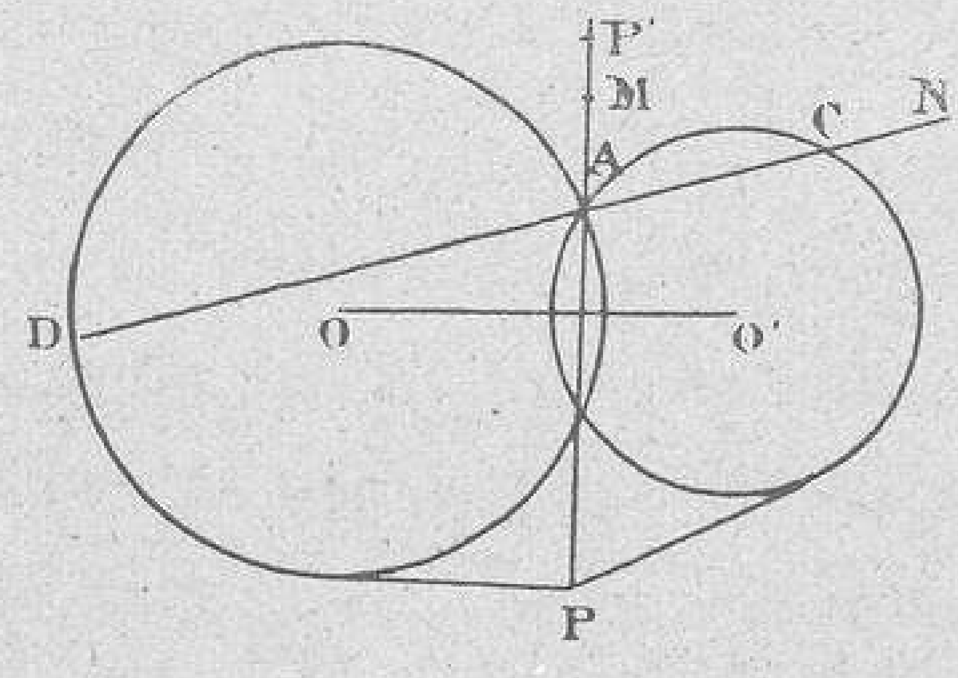

Fig. 154

Otro punto cualquiera de la recta AB, por ejemplo, M, tiene por potencia $MA \times MB$ lo mismo para el círculo O que para el O'.

Un punto N, que no esté sobre AB, unido con A, dará una recta NA que cortará a las circunferencias en puntos distintos C y D; luego

$$NC \times NA \text{ desigual a } NA \times ND$$

puesto que NC no es igual a ND. Y como los productos $NC \times NA$ y $NA \times ND$ expresan las potencias de N con respecto a O' y a O, estas potencias son desiguales.

Luego *únicamente* los puntos de la recta indefinida AB tienen la propiedad de ser iguales sus potencias con relación a ambos círculos, y por eso la recta AB es el *lugar geométrico* que se había dicho.

Este lugar, es decir, la recta AB, se llama *eje radical* de los círculos O y O'.

477. **Corolarios.** 1.º *Las tangentes trazadas a dos círculos desde cualquier punto del eje radical, son iguales.* (Figura 154).

Puesto que lo son las potencias de aquel punto, P, que se pueden expresar por los cuadrados de las tangentes, PT y PT'.

OBSERVACIÓN.—El eje radical pasa por el punto medio de una tangente común a los dos círculos.

478. 2.º *El eje radical de dos círculos cualesquiera es perpendicular a la recta que une sus centros.*

Si los círculos son secantes, ya se sabe, puesto que el eje radical es la cuerda común (476).

Si no son secantes, un punto P, del eje radical tendrá de todos modos igual potencia respecto a los dos círculos, y se podrán trazar desde él tangentes iguales; pero las tangentes trazadas desde el punto P' simétrico de aquél con relación a la recta de los centros serán también iguales, luego ese punto P' pertenece al eje radical, y estando dos puntos simétricos colocados siempre sobre una perpendicular al eje de simetría, el eje radical y la recta de los centros serán, en efecto, perpendiculares.

479. *Los ejes radicales de tres círculos, uno de los cuales corte a los otros dos, pasan por un mismo punto llamado centro radical.*

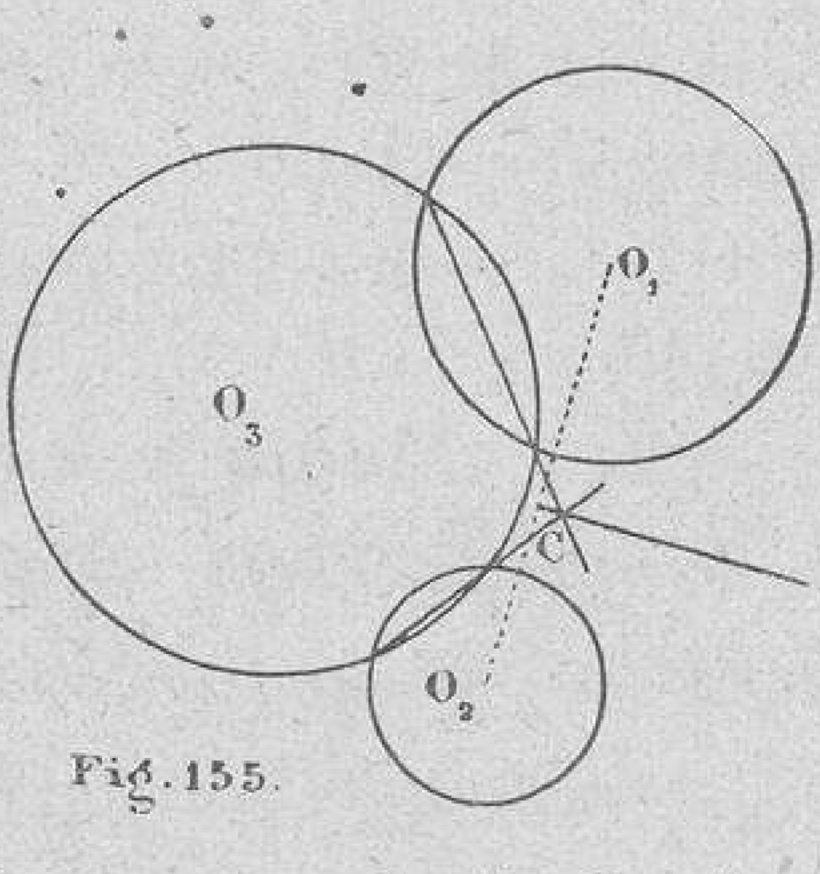


Fig. 155.

F. 155.—Sean $O_1$ $O_2$ y $O_3$ los círculos, tales que $O_3$ corta a los otros dos.

D.—El punto C, en que se cortan los ejes radicales de $O_1$ y $O_3$ y de $O_2$ y $O_3$, tiene igual potencia respecto de los tres círculos; luego por él pasará el eje radical de $O_1$ y $O_2$, el cual queda determinado, porque desde C sólo se puede trazar una perpendicular a la recta $O_1$ $O_2$.

480. **Problema.** *Trazar el eje radical de dos círculos.*

CONSTRUCCIÓN.—Si son secantes, el eje radical es su cuerda común (prolongada). Si no son secantes, se traza un tercer círculo que corte a los dados, y determinado el centro radical de los tres, se traza desde él la perpendicular a la recta de centros de los círculos propuestos.

481. **Escolio.** Aplicando la construcción anterior al caso en que los círculos dados $O_1$ y $O_2$ sean tangentes (fig. 156) y tomando como tercer círculo auxiliar $O_3$ uno que pase por el punto de contacto, C, se comprueba que *el eje radical de dos círculos tangentes, es la tangente común que se les puede trazar por el punto de contacto.*

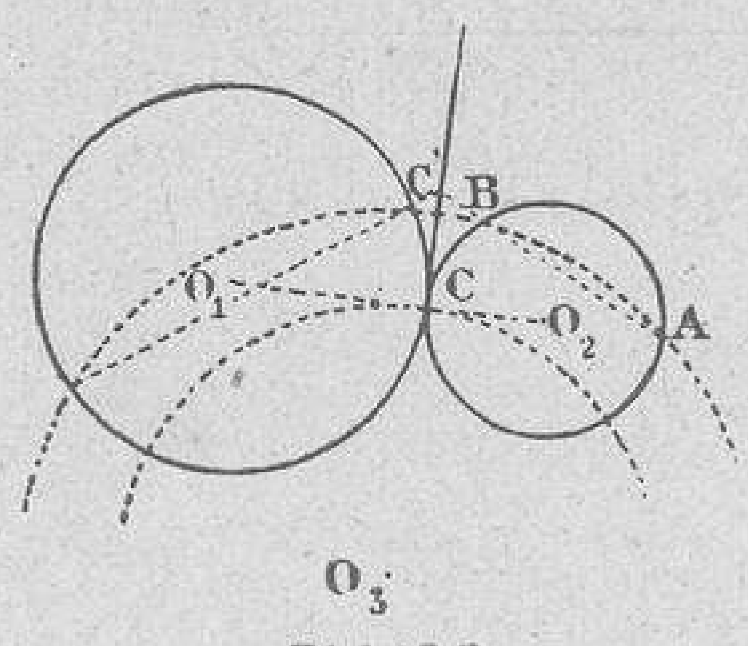

Fig. 156

482. **Problema de aplicación.** *Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados y sea tangente a otra circunferencia dada.*

CONSTRUCCIÓN.—Se determina el centro radical, C' de la circunferencia dada $O_1$ de otra auxiliar que pase por los puntos dados A y B (fig. 156) y de la desconocida $O_2$ lo cual puede hacerse sin trazar ésta, porque ella y la auxiliar tienen por cuerda común AB. Una tangente trazada desde C' a la circunferencia dada, será eje radical de ésta y la desconocida, (porque como han de ser tangentes han de tener por eje radical una tangente común) y por tanto se conocerá el punto en que la circunferencia pedida toca a la O. La buscada, pasa, pues, por los tres puntos A, B y C. (Dígase si habrá más soluciones).

483. **Media y extrema razón.** *Diremos que un segmento de recta está dividido aditiva o substractivamente en media y extrema razón, cuando existen dos puntos, uno dentro del segmento y otro en su prolongación, tales que la diferencia de sus distancias al extremo del segmento que cae entre ellos sea igual al segmento, y el*

*producto de las mismas distancias igual al cuadrado del segmento.*

Ejemplo: Si AB es el segmento dado (fig. 157) y C' y D' los puntos que lo dividen aditiva y substractivamente en media y extrema razón, lo que ha de verificarse es que

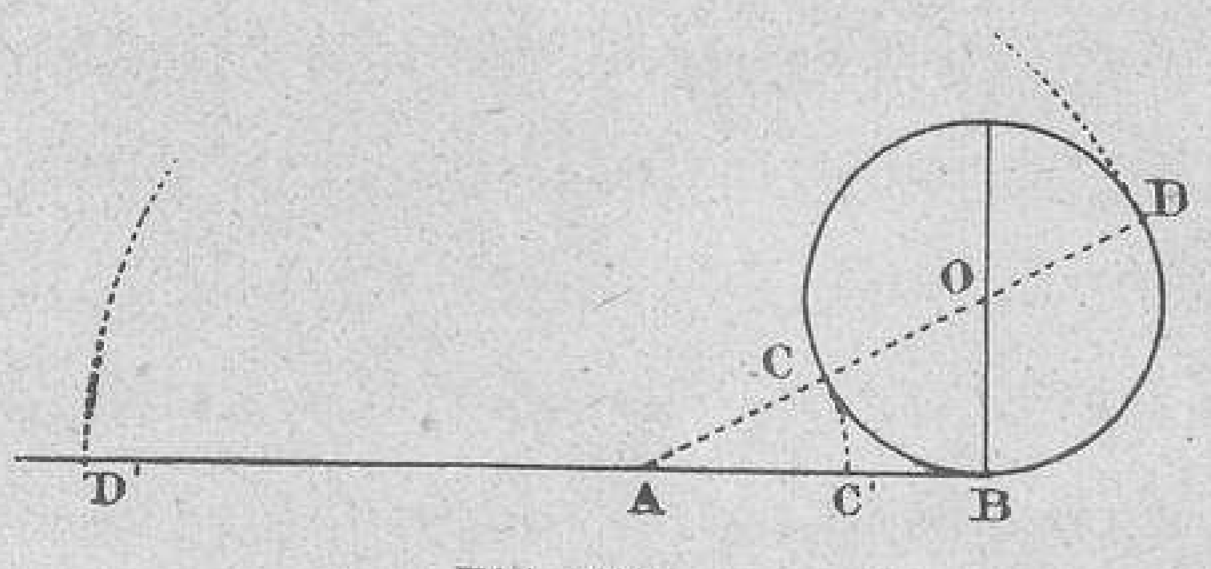


Fig. 157.

$$D'A - C'A = AB \text{ y } D'A \times C'A = AB^2$$

o bien designando los segmentos por letras, para tener una *fórmula* y siendo AB = $a$, C'A = $x$, D'A = $x'$,

$$x' - x = a \text{ y } x' \,.\, x = a^2$$

484. **Problema.** *Dividir un segmento* AB, *aditiva y substractivamente en media y extrema razón.*

Construcción analizada. —Si a una circunferencia O cuyo diámetro sea igual a AB se le traza la tangente BA de esta misma longitud y por su extremo una secante AD que pase por el centro, por ser la tangente media proporcional entre la secante y su segmento externo (471), se tendrá:

$$AD \times AC = AB^2$$

y como, por hipótesis,

$$AD - AC = \text{diámetro} = AB$$

bastará trasladar (por rotación) AC sobre AC' y AD sobre AD' para tener los puntos C' y D' pedidos, puesto que

$$AD' - AC' = AB \text{ y } AD' \times AC' = AB^2.$$

485. APLICACIONES.—Si se divide una circunferencia en diez partes iguales y se une cada punto de división con el siguiente, resulta un decágono regular convexo, mientras que uniendo de tres en tres resulta el decágono estrellado de 3.ª especie. Esto supuesto, puede demostrarse el teorema siguiente:

486. *Los lados de los decágonos convexo y estrellado son, respectivamente, el mayor segmento aditivo y el menor substractivo resultantes de dividir el radio en media y extrema razón.*

F. 158.—Sea AB el lado del decágono convexo, AD el del estrellado y unamos A, B y D con el centro O, siendo L el punto en que se cortan OB y AD. Llamemos al radio R.

D.—Los triángulos rayados son isósceles, luego

$AB=AL$ y $LD=R$, o bien

$AD-AL=LD=R$. (1).

LO y DO son antiparalelas con respecto al ángulo OAD, y concurrentes en O, por lo cual (    ).

$AD \times AL=AO^2=R^2$ (2).

Las igualdades (1) y (2) prueban el enunciado, según la definición dada para la división en media y extrema razón.

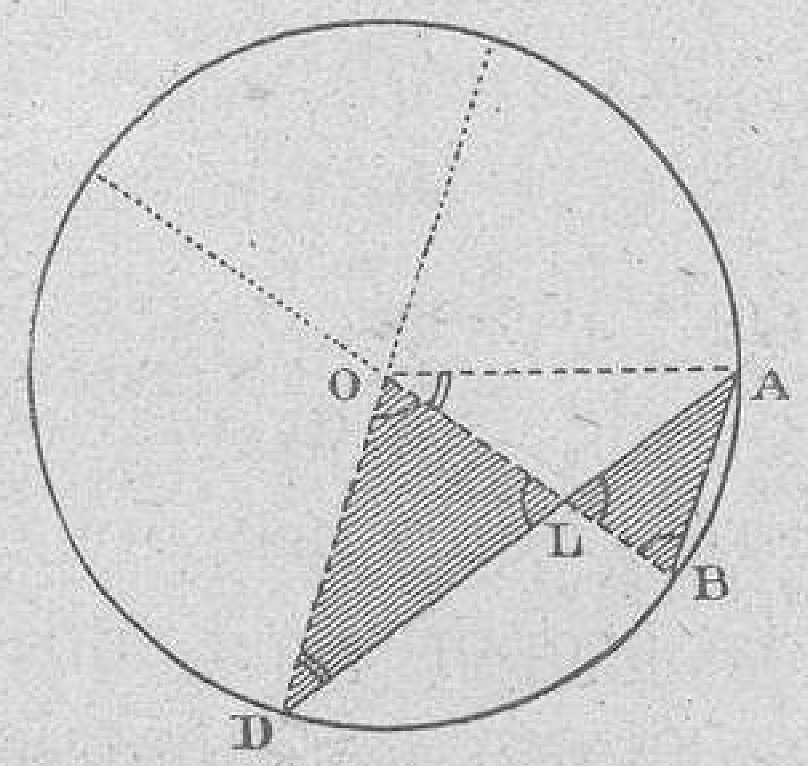

Fig. 158

DETALLES.—Que los triángulos rayados son isósceles se comprueba examinando las medidas de sus ángulos en B, L y O por el número de divisiones que interceptan sus lados sobre la circunferencia (201 y 208). Que LO y DO son antiparalelas resulta de la definición de éstas, teniendo en cuenta las igualdades de los ángulos BOA y ODA.

(El esclarecimiento total de estos detalles queda como ejercicio).

487. **Relaciones métricas en el triángulo.** *En un triángulo rectángulo, la altura que parte del vértice del ángulo recto es media proporcional entre los dos segmentos que determina sobre la hipotenusa.*

F. 159. Sea el triángulo BAC, rectángulo en A, la altura AD, $a$ la hipotenusa, y $m$ y $n$ los segmentos DB y DC.

Tracemos sobre la hipotenusa como diámetro una semicircunferencia, que pasará por el vértice del ángulo recto. (204).

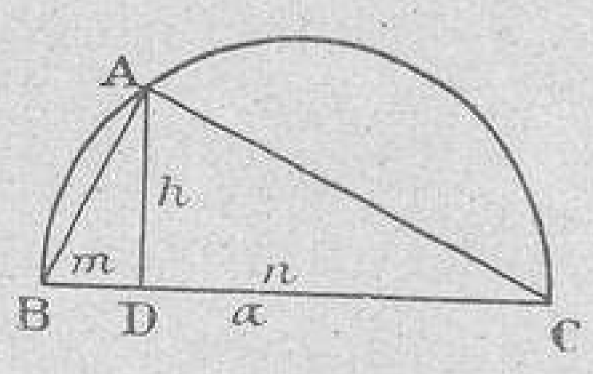

Fig. 159.

D.—Es la misma dada para probar que una semicuerda perpendicular a un diámetro es media proporcional entre los segmentos que determina sobre él (473). Por tanto se tiene la *fórmula*:

$$h^2 = m \cdot n \ (1).$$

488. **Problema.** *Construir el segmento medio proporcional entre otros dos*, m, n.

Construcción.—Según el teorema que precede, basta hallar la altura de un triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa (considerada como base) la suma $m + n$ de los segmentos dados; o bien construir sobre $m + n$ como diámetro una semicircunferencia, y trazar la perpendicular a la recta en que se hallan sumados los segmentos, por el extremo común de éstos. (Fig. 159).

489. *Un cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y la proyección sobre ella* (la del cateto sobre la hipotenusa).

F. 160.—Sea el triángulo BAC, y sea $b$ el cateto

CA, y $m$ su proyección sobre la hipotenusa. Tracemos sobre $c$, como diámetro, una circunferencia, que pasará por el pie D de la altura, puesto que el ángulo ADB es recto (204), y a la cual será tangente el otro cateto,

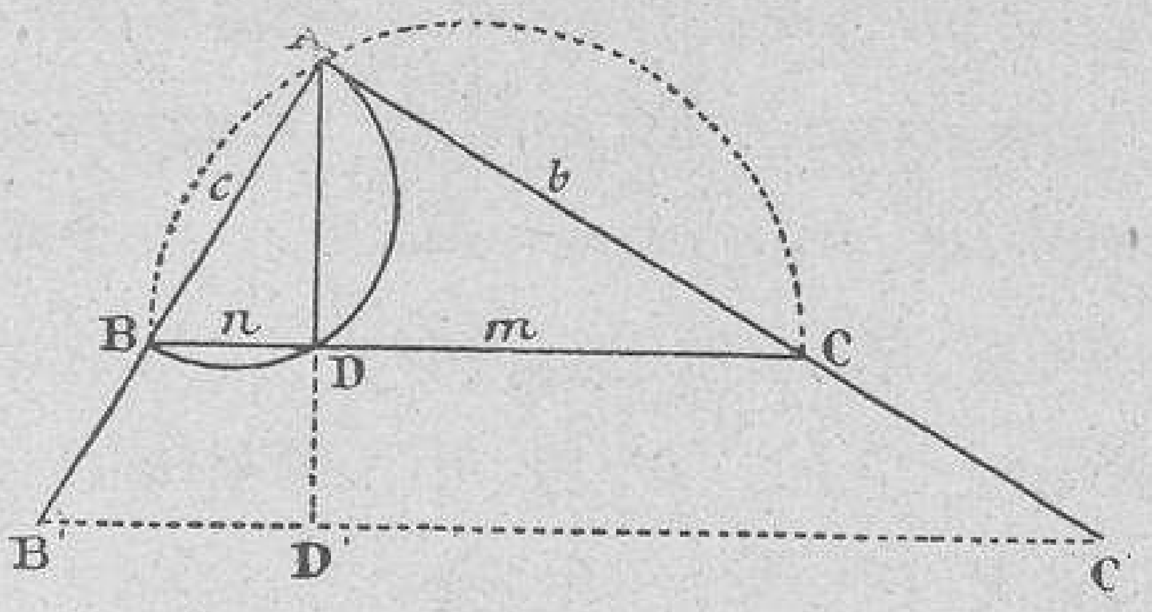

Fig. 160.

$b$, como perpendicular al diámetro BA. (106).

D.—La potencia de C con relación a la circunferencia trazada, lo mismo puede expresarse por $b^2$ (cuadrado de la tangente) que por $a \, . \, m$ (producto de una secante por su segmento externo) (466 y 470), luego

$$b^2 = a \, . \, m \; (2), \text{ y análogamente, } c^2 = a \, . \, n \; (3)$$

490. **Escolios.**—1.º—El teorema precedente sirve también para hallar la media proporcional entre dos segmentos, $a$ y $m$, pues bastará describir sobre el mayor, como diámetro, una circunferencia, tomar sobre dicho diámetro, a contar de un extremo, el segmento menor, $m$; por el punto en que termina, trazarle una perpendicular, DA, y unir el punto A en que ésta corta a la circunferencia con el extremo común de los segmentos, C. (Fig. 160).

2.º—Puede enunciarse el teorema, diciendo: *la cuerda que une un punto de la circunferencia con el extremo de un diámetro, es media proporcional entre éste y la proyección de aquélla sobre él.* Puesto que la cuerda dicha, CA, y la que une el mismo punto de la circunferencia con el otro extremo B del diámetro forman, con éste, un triángulo rectángulo BAC.

491. **Corolario.**—*Los cuadrados de los catetos son proporcionales a sus proyecciones sobre la hipotenusa.*

D.—Basta dividir miembro a miembro las fórmulas (2) y (3), puesto que así se obtendría:

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{m}{n}$$

492. APLICACIÓN.—**Problema.**—*Hallar un segmento cuyo cuadrado esté con el de otro segmento dado, en razón conocida* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$.

CONSTRUCCIÓN. — Súmense $m$ y $n$ y constrúyase sobre $m+n$ como diámetro la semicircunferencia BAC (fig. 160). Trazando la perpendicular DA se tendrá el triángulo rectángulo BAC. Sobre el lado contiguo al segmento $n$ (denominador) tómese la magnitud AB' del segmento que se nos daba, y por B' trácese B'C', paralela a BC, con lo cual AC' será el segmento pedido.

Porque, según el corolario anterior, en el triángulo rectángulo C'AB', se tendrá:

$$\frac{\mathrm{AC'}^2}{\mathrm{AB'}^2}=\frac{\mathrm{C'D'}}{\mathrm{D'B'}};\text{ pero (444), }\frac{\mathrm{C'D'}}{\mathrm{D'B'}}=\frac{m}{n},\text{ luego }\frac{\mathrm{AC'}^2}{\mathrm{AB'}^2}=\frac{m}{n}.$$

493. OBSERVACIÓN.--Las fórmulas (2) y (3) pueden escribirse:

$$m=\frac{b^2}{a},\text{ y }n=\frac{c^2}{a}$$

y así expresan que: *la proyección de cada cateto sobre la hipotenusa es tercera proporcional entre ambos* (431).

Fundándose en ella, se puede resolver el siguiente

EJERCICIO.—*Hallar la tercera proporcional a dos segmentos,* b *y* a.

494. **Teorema de Pitágoras.** *La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

D.—Las fórmulas (2) y (3) del núm. 489, dan los cuadrados de los catetos, luego sumándolas se obtendrá: $b^2+c^2=a\,.\,m+a\,.\,n=a\,.\,(m+n)=a\,.\,a=a^2$, es decir, $b^2+c^2=a^2$.

Esta importantísima relación entre los lados de un triángulo rectángulo se aprovecha para calcular uno de ellos conociendo los otros dos, pues según reglas de la Aritmética se obtienen las *fórmulas:*

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{o bien} \quad a = \sqrt{b^2 - c^2}$$
$$b^2 = a^2 - c^2 \quad » \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$c^2 = a^2 - b^2 \quad » \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Ejercicio.—Enunciar, como reglas, las anteriores fórmulas, y aplicarlas a ejemplos numéricos.

495. **Aplicaciones.** Las del teorema de Pitágoras son muy numerosas. Por la frecuencia de su uso consignaremos las que siguen:

1.ª *Calcular el lado de un cuadrado inscripto en una circunferencia de radio* R.

F. 161.—Sea AB un lado del cuadrado, y tracemos los radios OA, OB, con lo cual se formará el triángulo rectángulo isósceles AOB. Designemos por $r$ el radio, y por $l$ el lado AB.

D.—Según el teorema de Pitágoras

$$l = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{r^2 \times 2} = r \,.\, \sqrt{2} \quad \text{(Enúnciese)}$$

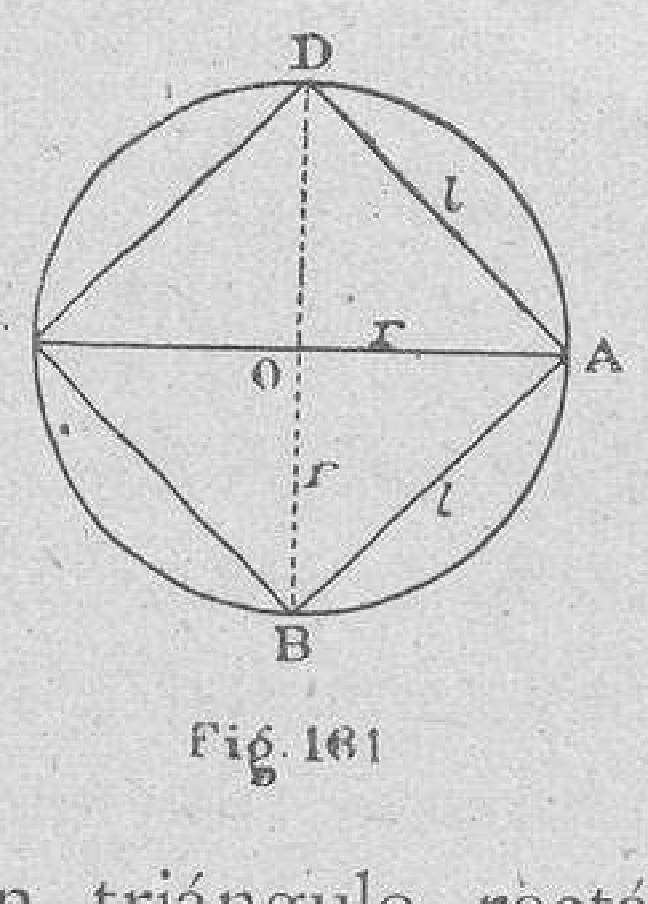

Fig. 161

496. 2.ª *Calcular la diagonal de un cuadrado conociendo el lado.*

F. 161. Sea el cuadrado ABCD cuya diagonal, que llamaremos $d$, forma con dos lados un triángulo rectángulo isósceles BAD.

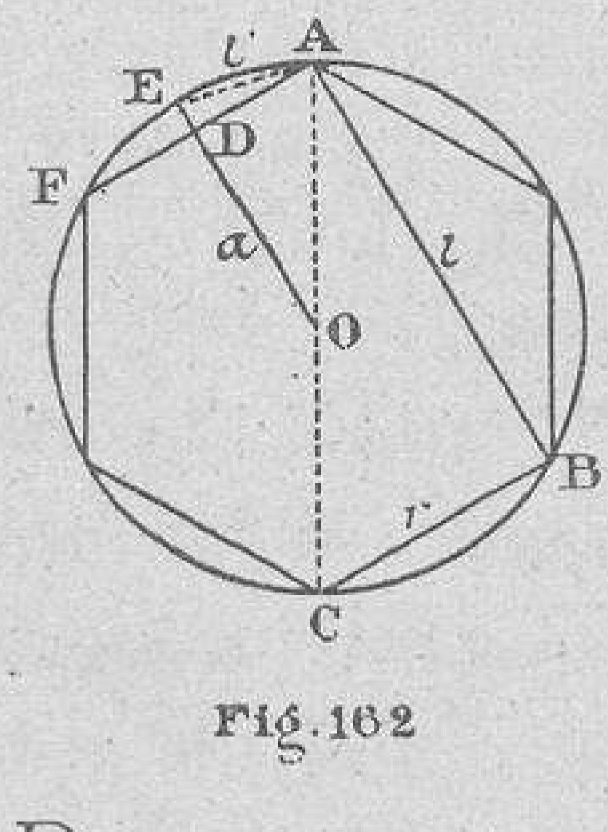

Fig. 162

D.—Como antes,

$d=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{l^2 \times 2}=l \cdot \sqrt{2}$ (Enúnciese y hállese la razón de la diagonal con el lado o viceversa).

497. 3.ª *Calcular el lado de un triángulo equilátero inscripto en un círculo de radio conocido.*

F. 162. Sea AB $= l$ un lado del triángulo, tracemos el diámetro AC $= 2r$ y la cuerda BC, que será lado de un exágono regular, igual, por tanto, a $r$ (246).

D.—

$l = \sqrt{(2 \cdot r)^2 - r^2} = \sqrt{4 \cdot r^2 - r^2} = \sqrt{r^2 \cdot 3} = r \cdot \sqrt{3}$ (Enúnciese).

498.—4.ª—*Calcular la potencia de un punto, con relación a un círculo, sabiendo la distancia del punto al centro del círculo y el radio de éste.*

Sean $d$ la distancia, $r$ el radio y P la potencia pedida.

D.—Si el punto es exterior, la potencia es igual al cuadrado de la tangente (470), y como ésta, la distancia al centro y el radio forman un triángulo rectángulo, (hágase la figura)
P$=$tangente$^2 = d^2 - r^2$. (Enúnciese).

Si el punto es interior, la potencia es el cuadrado de la semicuerda (472), y
P$=$semicuerda$^2 = r^2 - d^2$. (Enúnciese).

499. 5.ª—*Calcular la apotema de un polígono regular, conociendo el lado y el radio.* (F. 162).

D.—El radio, $r$, la apotema $a$ y el semilado $\frac{l}{2}$, forman un triángulo rectángulo, en el cual

$$a = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4r^2 - l^2}{4}} = \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2}$$

EJERCICIOS.—Enunciar la fórmula que precede y aplicarla para hallar la apotema de un cuadrado o la de un triángulo equilátero.

**Escolio.**—Si en la fig. 162 es AF el lado de un polígono regular, inscripto, será AE el de otro inscripto de doble número de lados, y como ED es la proyección de AE sobre el diámetro que pasa por E, y OD la apotema del primer polígono,

$$EA^2 = 2\, r \times ED, \text{ o bien, } l'^2 = 2 \,.\, r \,.\, (r - a),$$

fórmula que daría a conocer $l'$, puesto que $a$ se sabe calcular.

500. 6.ª—*Calcular el mayor segmento aditivo resultante de dividir un segmeuto,* r, *en media y extrema razón.*

En el triángulo rectángulo AOB (fig. 157) en que $AB = r$ y $OB = \frac{r}{2}$, se tendrá:

$$AO = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\,r^2 + r^2}{4}} = \sqrt{\frac{r^2 \times 5}{4}} = \frac{r \,.\, \sqrt{5}}{2}$$

y como $OC = \frac{r}{2}$, el valor de AC o de su igual AC' es

$$AC' = \frac{r \,.\, \sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2} = \frac{r \,.\, (\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

501. **Escolios.**—Si se llama $r$ al radio de un círculo en que esté inscripto un decágono regular convexo, el lado de éste resulta de dividir el radio en media y extrema razón (486), luego, designándole por $l$,

$$l = \frac{r \,.\, (\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

El lado del decágono estrellado es el menor segmento substractivo, que, en valor absoluto, es igual a $AO + \frac{r}{2}$, esto es:

$$l' = \frac{r \,.\, \sqrt{5}}{2} + \frac{r}{2} = \frac{r \,.\, (\sqrt{5} + 1)}{2}.$$

El lado del pentágono regular formado al unir de dos en dos los vértices del decágono convexo, forma un triángulo rectángulo con el diámetro y con el lado del decágono estrellado, (hágase la figura) luego:

$$l = \sqrt{(2\,r)^2 - \left[\frac{r \,.\, (\sqrt{5} + 1)}{2}\right]^2} \quad \text{»} \quad (\alpha)$$

Pero $\left[\frac{r(\sqrt{5}+1)}{2}\right]^2=\frac{r^2.(\sqrt{5}+1)^2}{4}=\frac{r^2(5+1+2\sqrt{5})^2}{4}=\frac{r^2(6+2\sqrt{5})}{4}$

luego poniendo este valor en $(\alpha)$,

$$l=\sqrt{4.r^2-\frac{r^2(6+2\sqrt{5})}{4}}=\sqrt{\frac{16.r^2-r^2(6+2\sqrt{5})}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{r^2[16-(6+2\sqrt{5})]}{4}}=\frac{r.\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

502. 7.ª—*Calcular la altura de un triángulo equilátero conociendo el lado.* (Hágase la figura).

D.—En el triángulo rectángulo que forman dicha altura, $h$, un lado, $l$, y la mitad, $\frac{l}{2}$, de otro,

$$h=\sqrt{l^2-\frac{l^2}{4}}=\sqrt{\frac{4l^2-l^2}{4}}=\sqrt{\frac{l^2\times 3}{4}}=\frac{l.\sqrt{3}}{2}.$$ (Enúnciese).

503. 8.ª *Calcular la altura de un trapecio en que uno de los lados no paralelos sea perpendicular a las bases, conociendo éstas y el lado oblicuo.*

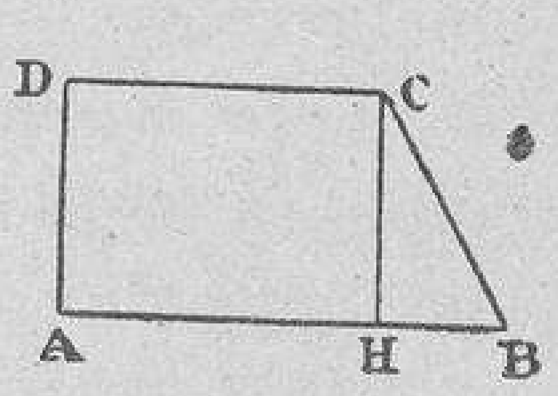

Fig. 163.

F. 163.—Sea el trapecio ABCD y supongamos *trasladado* AD a HC.

D.—

$$CH=\sqrt{BC^2-HB^2}$$

formula en que HB es igual a AB—AH, ¡o bien, a AB—DC, esto es, a la diferencia de las bases.

Observación.—Se procede análogamente para calcular la altura de ciertos cuerpos, v. gr.: la de un tronco de cono de bases paralelas cuando se dan los radios y el lado. (Practíquese).

504. *El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos aumentada o disminuída*

*en el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, según el ángulo opuesto al lado que se calcula sea obtuso o agudo.*

Sean: ABC un triángulo, $a$, $b$, $c$ sus lados, y el ángulo A agudo (fig. 164) u obtuso (fig. 165), Proyectemos B en D, con lo cual será AD la proyección de $c$ sobre $b$.

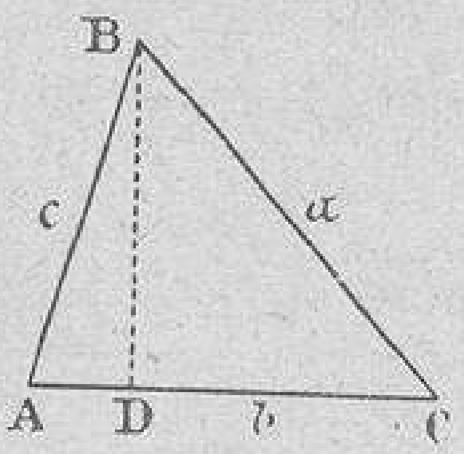

Fig. 164

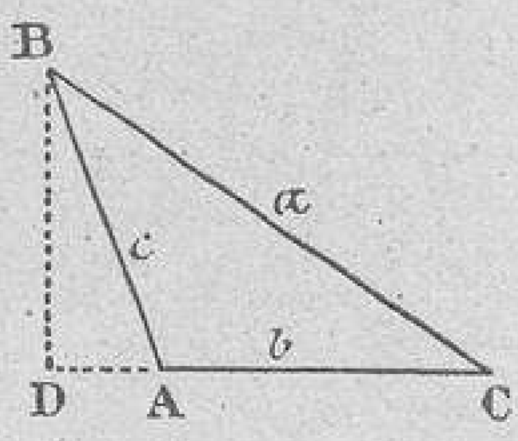

Fig. 165.

D.—Sea A agudo u obtuso, siempre, por el teorema de Pitágoras,

$$a^2 = CD^2 + BD^2.$$

Pero si A es agudo $\begin{cases} BD^2 = c^2 - AD^2 \\ CD^2 = (b - AD)^2 = b^2 - 2 \,.\, b \,.\, AD + AD^2 \end{cases}$

y sumando, $a^2 = c^2 + b^2 - 2 \,.\, b \,.\, AD.$

Y si A es obtuso $\begin{cases} BD^2 = c^2 - AD^2 \\ CD^2 = (b + AD)^2 = b^2 + 2 \,.\, b \,.\, AD + AD^2 \end{cases}$

y sumando, $a^2 = c^2 + b^2 + 2 \,.\, b \,.\, AD.$

EJERCICIO.—Observando que, por este teorema y el de Pitágoras, según el ángulo opuesto a un lado sea obtuso, recto u agudo es el cuadrado de aquel lado mayor, igual o menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, decir si serán ciertos los recíprocos, y determinar si un triángulo es obtusángulo, rectángulo o acutángulo conociendo las longitudes de sus lados, v. gr.: 8, 5 y 4.

505. *La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados contiguos a ellos.*

F. 166. Sea ABC un triángulo; AD la bisectriz del ángulo A, que determina en el lado opuesto los segmentos DB y DC cuya proporcionalidad con AB y AC ha de probarse. Tracemos por C la paralela CA′ al lado AB hasta que corte en A′ a la bisectriz.

D.—

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{A'C} \text{ (436).}$$

Pero el triángulo ACA′ es isósceles y A′C=AC luego

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

DETALLES.—El triángulo ACA′ es isósceles porque los ángulos 2 y 3 son ambos iguales al 1: el 2 por ser AD bisectriz, y el 3 por alterno-interno entre las paralelas cortadas por AA′.

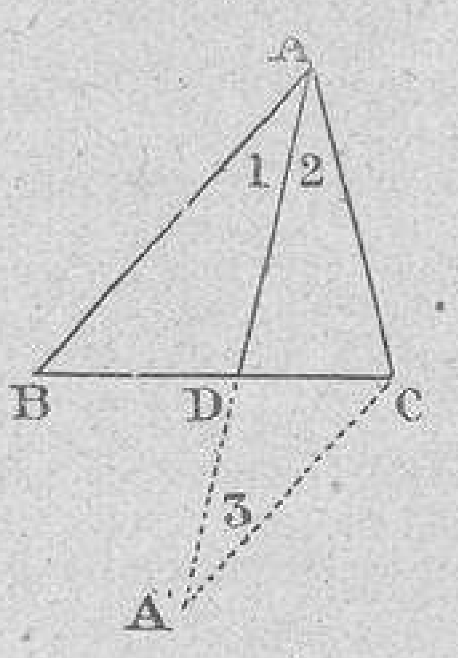

Fig. 166.

EJERCICIOS.--Demostrar, análogamente, que la bisectriz del ángulo externo adyacente al A, cortaría al lado BC en un punto D' tal que

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}.$$

Comparar las proporciones obtenidas en los dos casos, y decir qué son los puntos D y D' respecto de los B y C.

Examinar el caso particular en que el triángulo fuese isósceles y BC su base.

506. *El producto de dos lados de un triángulo es igual al de dos segmentos isogonales que partiendo del vértice del ángulo terminen uno en el lado opuesto, y otro en la circunferencia circunscripta al triángulo.*

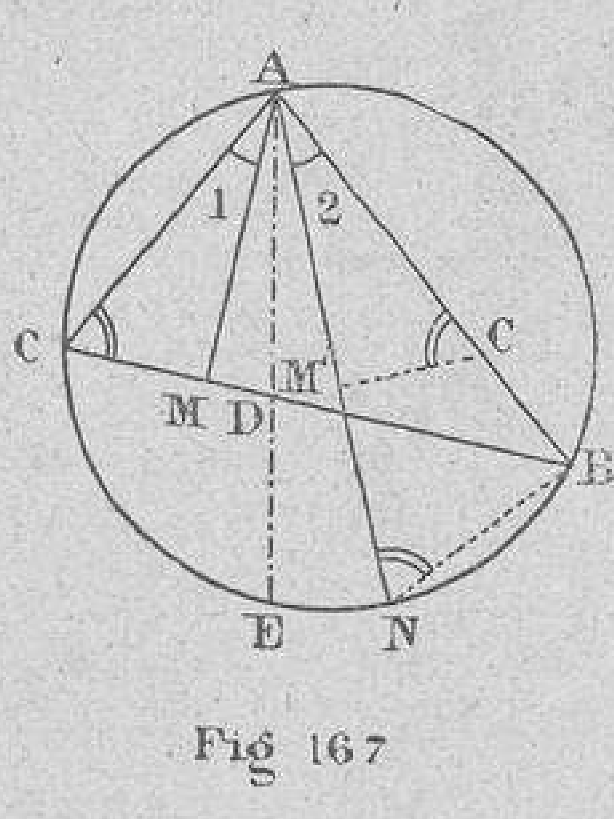

Fig 167

F. 167.--Sea ABC el triángulo, AM y AN dos segmentos isogonales, esto es, tales que ángulo 1=ángulo 2, terminando dichos segmentos en M y N como expresa el enunciado. Unamos N con B.

D.—Los ángulos C y N son iguales como inscriptos de igual medida, luego si, por giro alrededor de la bisectriz de A, se coloca AC en la posición AC', CM tomará la posición C'M' antiparalela de BN, luego

$$AB \times AC' = AM' \times AN$$

y como AC' es AC y AM' es AM,

$$AB \times AC = AM \times AN$$

507. **Corolarios.** 1.º *El producto de dos lados de un triángulo es igual a la bisectriz de su ángulo multiplicado por esa misma bisectriz prolongada hasta la circunferencia circunscripta.*

Ejemplo.—En la fig. 167 $AB \times AC = AD \times AE$.

Porque la bisectriz es isogonal de sí misma.

508. 2.º *El producto de dos lados de un triángulo es igual a la altura que parte de su vértice por el diámetro de la circunfe rencia circunscripta.*

Ejemplo.—En la fig. 167 $AB \times AC = AM \times AN$.

Porque como los ángulos inscriptos C y N son iguales, sus complementarios 1 y 2 también lo son, y de consiguiente la altura y el diámetro son isogonales.

509. **Cálculo de los principales elementos de un triángulo.** *a)—Cálculo de una altura, conociendo los lados.*

F. 168.—Sea $h$ la altura, $a$ la base, $m$ la proyección de $b$ sobre $a$.

PROCEDIMIENTO.—En el triángulo rayado se conoce la hipotenusa, y el cateto $m$ se puede calcular por la fórmula que da el cuadrado de $c$, a saber:

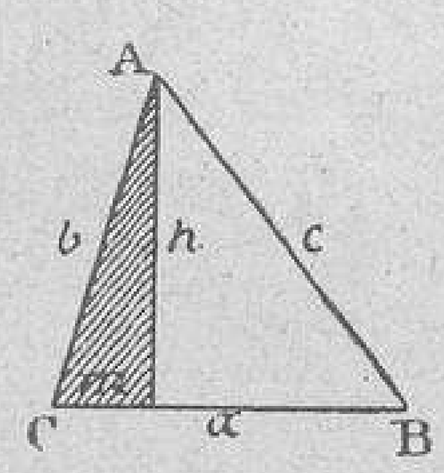

Fig. 168.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot m$$

Una vez conocido $m$, se tendrá: (teorema de Pitágoras)

$$h = \sqrt{b^2 - m^2}.$$

EJERCICIO.—Aplicar el cálculo anterior a un ejemplo numérico.

510. *b)—Cálculo de una mediana, conocidos los lados.*

F. 169.—Sea $m$ la mediana correspondiente a la base $a$, y $n$ su proyección sobre ella, $b$ y $c$ los otros lados.

PROCEDIMIENTO.—Las expresiones que dan el cuadrado de $m$ en cada uno de los triángulos en que entra, son:

$$m^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right) \times n$$

$$m^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right) \times n$$

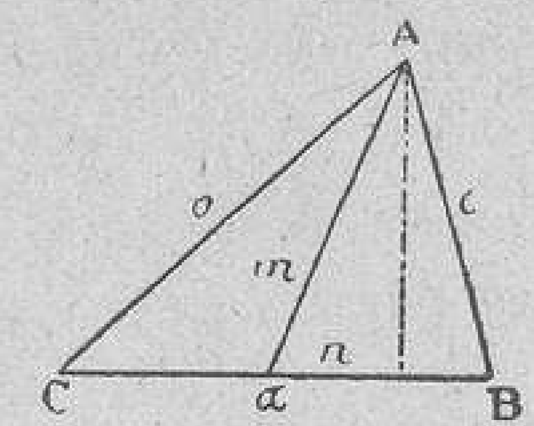

Fig. 169

Sumándolas, se obtiene el valor de $2m^2$, del cual se sacaría el de $m$ dividiendo por 2 y extrayendo la raíz cuadrada.

EJERCICIO.—Aplicar el procedimiento anterior a un ejemplo numérico.

511. *c)—Cálculo de una bisectriz, conociendo los lados.*

F. 167.—Sea $\beta$ (*) la bisectriz AD, $p$ el segmento DE que le falta para llegar hasta la circunferencia, $n$ y $m$ los segmentos DC y DB que determina sobre $a$, y $b$ y $c$ los otros lados.

PROCEDIMIENTO.—Según el núm. (407) se sabe que

$$b \cdot c = \beta(\beta + p) = \beta^2 + \beta \cdot p$$

Pero $\beta \cdot p$ expresa la potencia del punto D, que también es igual a $m \cdot n$, luego

$$b \cdot c = \beta^2 + m \cdot n$$

Estos segmentos $m$ y $n$ se calculan por el teorema de la bisectriz que da (505)

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{c} \text{ o bien } \frac{m+n}{n} = \frac{b+c}{c}, \text{ es decir } \frac{a}{n} = \frac{b+c}{c}$$

de donde se puede sacar el valor de $n$, y

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{c} \text{ o bien } \frac{m+n}{m} = \frac{b+c}{b}, \text{ es decir, } \frac{a}{m} = \frac{b+c}{b}$$

que sirve para hallar $m$.

EJERCICIO.—Siguiendo el procedimiento anterior, calcular la bisectriz en un ejemplo numérico.

(*) Letra griega llamada *beta*, equivalente a nuestra $b$.

512. *d) Calcular el diámetro del círculo circunscripto conociendo dos lados y la altura que parte del vértice en que concurren.*

F. 167. Sean $b$ y $c$ los lados, $h$ la altura AM, y $d$ el diámetro AN.

PROCEDIMIENTO.—Puesto que según el número 508 se tiene

$$b \cdot c = h \cdot d$$

se desprende que

$$d = \frac{b \cdot c}{h}$$

OBSERVACIÓN.—Si en vez de la altura se conociese el tercer lado $a$, se calcularía primero la altura $h$.

EJERCICIO.—Hacer aplicación a un ejemplo numérico, del anterior procedimiento.

CAPÍTULO II

# Semejanza y homotecia

513. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y los lados opuestos a ellos proporcionales.*

Para ver que estas dos condiciones son compatibles, recordemos que si se cortan los lados de un ángulo, o los de dos ángulos opuestos por el vértice, por dos paralelas, los triángulos que se forman tienen sus lados proporcionales; (436) y sólo hará falta ver que los ángulos opuestos a ellos son iguales. Efectivamente, en los triángulos ABC y ADE (figura 170) el ángulo A es común y los B y D iguales por correspondientes entre paralelas, así como también los C y E. En la figura 170 2.ª, los ángulos A son opuestos por el vértice, y los otros, B y D, C y E, iguales por alterno-internos entre paralelas.

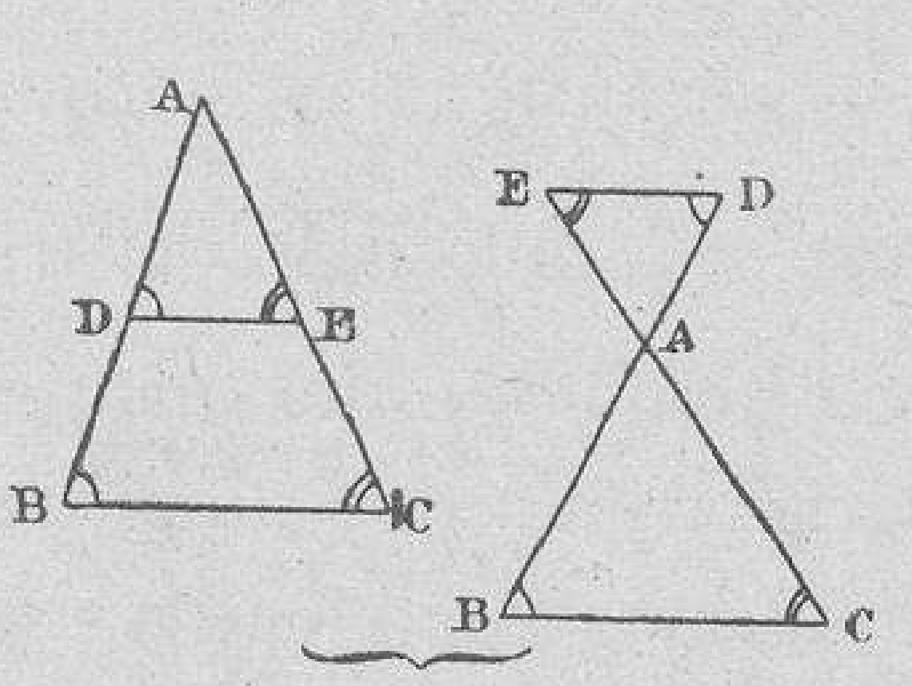

Fig 170

Así, pues, los triángulos ABC y ADE, (de ambas figuras) son semejantes. Los ángulos iguales se llaman *homólogos*, y los lados opuestos a ellos también homólogos.

Son homólogos: A, de sí mismo, (o de su opuesto por el vértice), B de D, y C de E; el lado BC del DE, el AC del AE, y el AB del AD. Y se verificará

$$A=A,\ B=D,\ C=E,\ y\ \frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}. \quad (1)$$

Los triángulos pueden ser directa o inversamente semejantes según sean del mismo u opuesto sentido, definiéndose éste como en la igualdad. (55).

514. *Se llama* **razón de semejanza** *(de dos triángulos semejantes) la razón constante que existe entre un lado de uno de los triángulos y el lado homólogo del otro.*

En los triángulos ABC y ADE, la razón de semejanza es $\frac{BC}{DE}$, o $\frac{AC}{AE}$ o $\frac{AB}{AD}$ puesto que las tres tienen igual valor.

Los triángulos semejantes tienen *igual forma*, aunque distinto tamaño según la razón de semejanza.

Si ésta fuese 1, los triángulos serían iguales, porque tendrían iguales sus lados; si fuese $\frac{1}{2}$, cada lado del triángulo menor sería mitad del lado homólogo del otro; si fuese 3, cada lado del mayor sería triple que uno del menor, etc., por lo cual uno de los triángulos viene a ser *copia* reducida o ampliada del otro.

Cuando se considera así, la razón de semejanza se llama *escala* de la copia, y para expresarla se toma en una de las figuras el segmento que sirve de unidad y se compara con su homólogo de la otra figura, por lo cual la escala es una fracción cuyo numerador es 1, o un número entero.

Si AD (fig. 170) fuese mitad de AB y se tomase aquel segmento por unidad, la escala sería $\frac{1}{2}$ ó 2 según se mirase ADE como copia reducida de ABC o éste como copia ampliada de aquél.

515. **Casos de semejanza.**—Dos triángulos son semejantes si tienen:

1.° *Dos ángulos iguales.*

2.° *Dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman.*

3.° *Dos lados proporcionales e igual el ángulo opuesto al mayor.*

4.° *Los tres lados proporcionales.* (*)

F. 171. Sean los triángulos ABC y $A'B_1C_1$. Tomememos sobre $A'B_1$ el segmento $c'$ igual al $c$, y por su extremo $B'$ tracemos la paralela a $B_1C_1$.

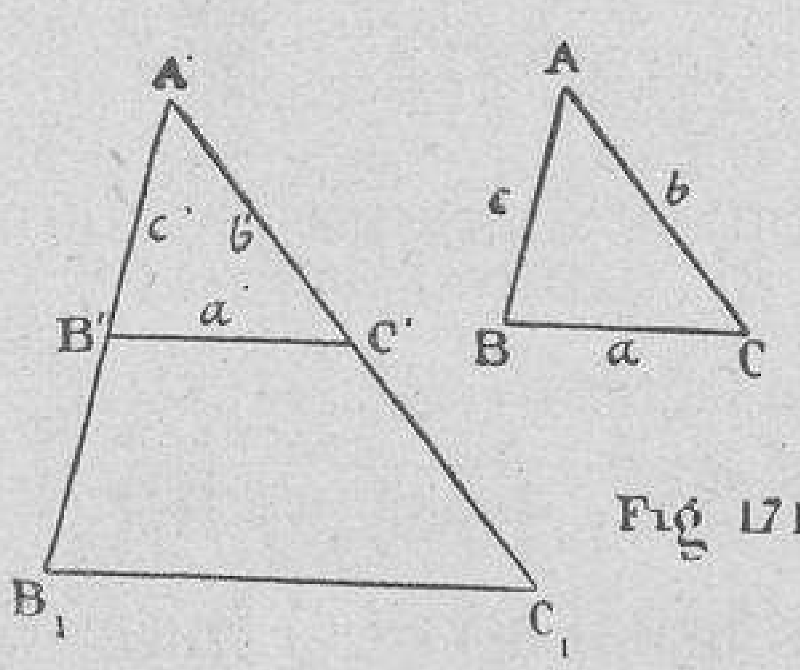

Fig 171

D.—El triángulo $A'B'C'$ es semejante al $A'B_1C_1$ (413) y, por ello, además de tener sus ángulos iguales, se verificará, designando por $r$ la razón de semejanza:

$$\frac{c'}{A'B_1} = r \ (1), \ \frac{b'}{A'C_1} = r \ (2), \ \frac{a'}{B_1C_1} = r \ (3).$$

Esto sabido, para demostrar cualquiera de los casos, basta ver que el triángulo ABC es igual al A'B'C' (por el caso de igualdad análogo al de semejanza de que se

(*) Entiéndese al decir dos o tres lados proporcionales, que dos o tres lados de uno de los triángulos tengan con sus homólogos del otro triángulo una misma razón.

trate), pues así, siendo $A'B'C'$ semejante a $A'B_1C_1$, tanbién lo será ABC.

DETALLES.—PRIMER CASO.—Sea la hipótesis $A = A'$ y $B = B_1$.

Por ser $B_1 = B'$ los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen dos ángulos iguales, a saber: $A = A'$ y $B = B'$. Además, el lado $c'$ es, por construcción, igual al $c$, luego en efecto: los triángulos dichos son iguales (218.—1.°).

SEGUNDO CASO.—La hipótesis es $\frac{c}{A'B_1} = \frac{b}{A'C_1}$ y $A = A'$.

Por haber tomado $c' = c$, la razón $\frac{c}{A'B_1}$ es igual a la (1), y, por consiguiente, su valor es $r$. Luego también $\frac{b}{A'C_1} = r$, igualdad que comparada con la (2) exige que $b'$ sea igual a $b$. Luego $c' = c$, $b' = b$ y $A' = A$, y esto prueba la igualdad de $A'B'C'$ y ABC (218.—2.°).

TERCER CASO.—La demostración es análoga, fundándola en el tercer caso de igualdad.

CUARTO CASO.—La hipótesis es $\frac{c}{A'B_1} = \frac{b}{A'C_1} = \frac{a}{B_1C_1}$.

La primera de estas razones es igual a la (1) (por ser $c' = c$) y vale $r$, luego también

$$\frac{b}{A'C_1} = r \text{ y } \frac{a}{B_1C_1} = r$$

Comparando éstas con la (2) y (3) se deduce $b' = b$ y $a' = a$, y como $c' = c$, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales (218.—4.°).

516. **Corolario.** Así como de los casos generales de igualdad se derivaron los particulares referentes a triángulos rectángulos, isósceles, etc., también de los de

semejanza antes expuestos se derivan los siguientes:

Dos triángulos **rectángulos** son semejantes si tienen:

1.º *Un ángulo agudo igual.*

2.º *Los catetos proporcionales.*

3.º *La hipotenusa y un cateto proporcionales* (a los del otro).

Dos triángulos **isósceles** son semejantes si tienen:

1.º *Un ángulo igual.*

2.º *La base y otro lado proporcionales* (a los del segundo triángulo).

Dos triángulos **equiláteros** son siempre semejantes.

517. *Dos triángulos con los lados paralelos o perpendiculares son semejantes.* Por tener iguales sus ángulos (182). Son lados homólogos los paralelos o perpendiculares.

518. **Problema.**—*Construcción de un triángulo sesemejante a otro.* Distinguiremos dos casos:

*a)*—Se conoce la razón de semejanza o escala en que se ha de hacer la copia.

Supongamos que se va a reducir el triángulo ABC (fig. 172) en la escala de $\frac{1}{3}$, lo cual significa que cada lado del triángulo que queremos construir ha de ser la tercera parte de su homólogo.

CONSTRUCCIÓN.—Tomemos sobre AB su tercera parte AD, y tracemos DE paralela a BC. El triángulo ADE será *una* solución.

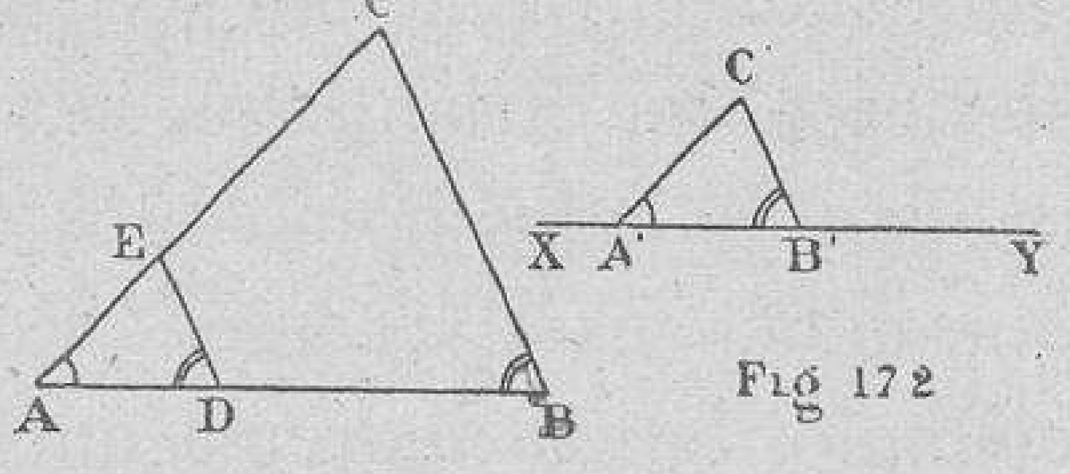

Fig 172

Cuando se fija la posición que ha de tener el lado homólogo de uno de los del triángulo ABC, v. gr.: del AB, es decir, si se quiere construir el triángulo sobre una recta dada, XY, tomaremos en ella $A'B' = \frac{1}{3}$ de AB, y sobre A′B′ se construirá un triángulo igual al ADE.

No hace falta para ello dibujar éste, pues basta construir en A' y B' ángulos respectivamente iguales al A y al B. En efecto: por ser el ángulo B igual al D el triángulo A′B′C′ es igual al ADE, y, de consiguiente, semejante al ABC.

*b)*—Si no se conoce la escala o razón de semejanza se fija arbitrariamente.

Observación.—Si la razón de semejanza fuese de la forma $\frac{a}{b}$ se escribiría en esta otra $\frac{1}{b:a}$ para expresarla, según es costumbre, como escala de numerador 1.

519. **Escolio.** La semejanza de triángulos sirve para demostrar la proporcionalidad de algunos segmentos mediante el conocimiento de la igualdad de algunos ángulos, o viceversa. Así, muchos de los teoremas demostrados ya por otras consideraciones, podrían haberse justificado por la semejanza de triángulos, como son los que hacen referencia a rectas antiparalelas, relaciones métricas en el triángulo rectángulo, etc., pues en las figuras con cuyo auxilio se han probado dichas relaciones, se descubren triángulos semejantes, y de la proporcionalidad de lados homólogos se deducen las igualdades que deben establecerse. Pondremos, para norma, un ejemplo: Sea el teorema que dice: *en un triángulo rectángulo cada cateto es medio proporcional entre la hi-*

*potenusa y su proyección sobre ella* (núm. 489). Observando que los triángulos rectángulos CAB y CAD (fig. 160) son semejantes por tener común el ángulo agudo, C, la proporcionalidad de sus lados homólogos (opuestos a ángulos iguales) daría

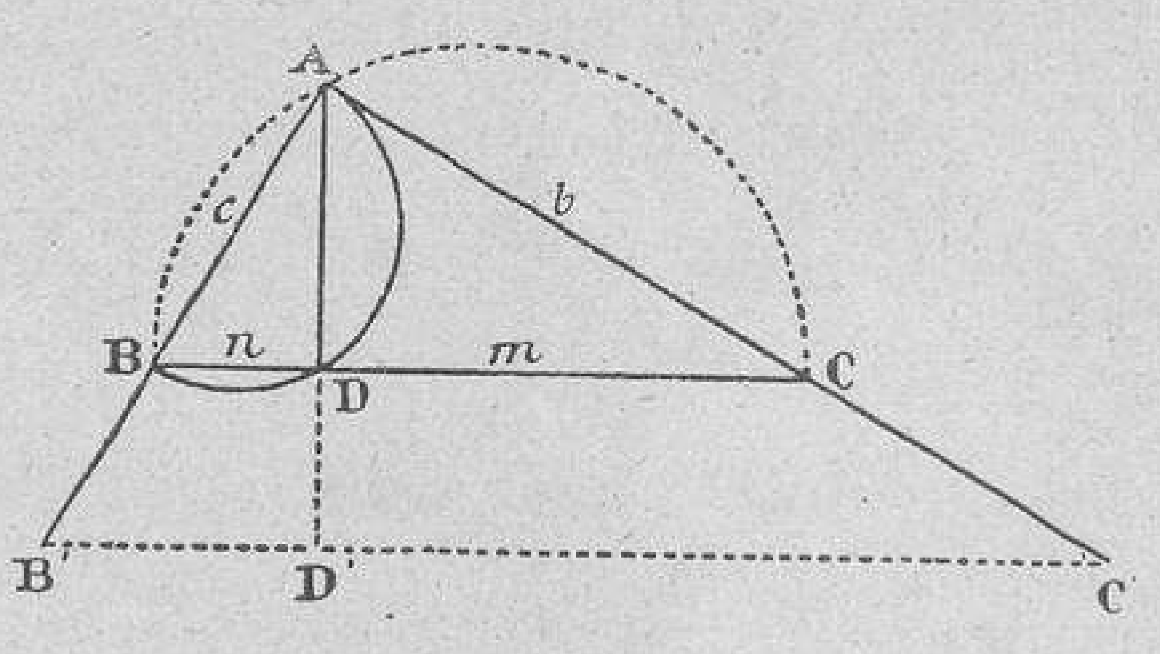

Fig. 160.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{m} \text{ de la cual } b^2 = a \,.\, m.$$

520. Ejercicios.—Probar por la semejanza de los triángulos OAB y OCD (fig. 149) el teorema del núm. 464 sobre antiparalelas.

Probar por la semejanza de los triángulos BAD y DAC (fig. 159) el teorema del núm. 487 relativo a la altura del triángulo rectángulo.

Conocidos el lado y el radio de un polígono regular inscripto, calcular el lado del polígono regular circunscripto de lados paralelos a los del inscripto (244) teniendo en cuenta el cálculo de la apotema (499).

521.—*Las alturas de dos triángulos semejantes están en la razón de semejanza.*

Fig. 173.—Sean los triángulos ABC y A'B'C' y las alturas AD y A'D'.

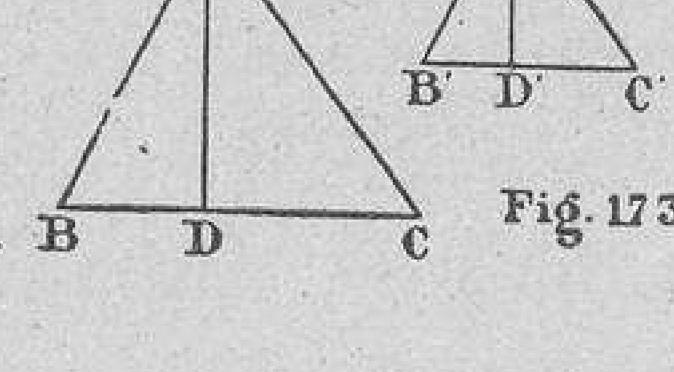

Fig. 173

D.—Los triángulos rectángulos ABD y A'B'D' que tienen $\widehat{B} = \widehat{B'}$ son semejantes, luego

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'} = \text{razón de semejanza}$$

522. **Semejanza de polígonos.** (*) F. 174.—Sean dos segmentos AB y A'B' situados en un plano, en que supondremos *homólogos* los pares de puntos A y A', B y B'. Esto sentado, diremos que son también homólogos:

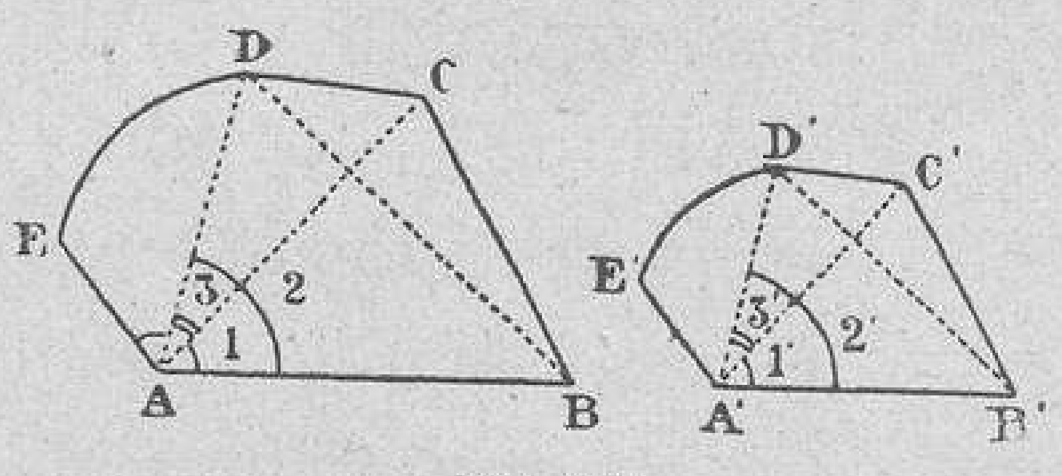

Fig. 174

1.º Un punto de la recta (indefinida) AB tal como M, con otro M' de A'B', siempre que $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A'}{M'B'}$ y además las dos divisiones aditivas o las dos substractivas.

2.º Un punto C, exterior a AB, con otro C' exterior a A'B' siempre que los triángulos ABC y A'B'C' sean *directamente semejantes*.

3.º Un segmento CD con otro C'D' cuando sus extremos sean puntos homólogos.

4.º Una figura o parte de ella con otra, cuando todos los puntos de una sean homólogos de los de la otra.

523. *La razón de dos segmentos homólogos cualesquiera es igual a la razón de los* AB *y* A'B', *esto es,* $\frac{AB}{A'B'}$ *que se llama razón de semejanza*, y será designada por $r$.

F. 174. Sean CD y C'D' dos segmentos homólogos, es decir, que unen los puntos homólogos C y C', D y D'.

D.—Por ser semejantes los triángulos CAB y C'A'B' (por hipótesis)

$$\hat{1} = \hat{1}' \text{ y, además, } \frac{AC}{A'C'} = r.$$

(*) Léase antes de estudiar este párrafo el del núm. 226.

Y por ser semejantes los triángulos DAB y D'A'B' (hipótesis).

$$\hat{2} = \hat{2}' \text{ y, además, } \frac{AD}{A'D'} = r.$$

De donde se desprende que $\hat{2} - \hat{1} = \hat{2}' - \hat{1}'$, esto es:

$$\hat{3} = \hat{3}' \text{ y, además, } \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = r.$$

Los triángulos ACD y A'C'D' tienen, pues, un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman, luego son semejantes, y la razón de los terceros lados $\frac{CD}{C'D'}$ es la misma $r$.

524. Lo dicho autoriza la definición siguiente: *dos figuras planas se llaman semejantes cuando fijados como homólogos dos segmentos, todos los demás puntos son homólogos, por formar, con los extremos de aquéllos, triángulos semejantes.*

En dichas figuras los segmentos homólogos son proporcionales, es decir, tienen una razón constante, $r$, llamada razón de semejanza.

525. **Homotecia.**—*Dos figuras son homotéticas cuando, además de ser semejantes, tienen sus segmentos homólogos paralelos.*

*Entonces, las rectas que unen cada dos puntos homotéticos forman un haz, y los rayos de éste quedan divididos por aquellos puntos en una razón constante, llamada de semejanza o de homotecia.* El vértice del haz se llama centro de homotecia o de semejanza.

F. 175. Sean las figuras semejantes ABCD y $A_1B'C'D'$, en que los puntos y segmentos homólogos se designan por las mismas letras.

D.—Por giro alrededor de $A_1$ coloquemos $A_1B'$ en la posición $A_1B_1$ paralela a AB. Entonces, como $B'C'$ forma con $A_1B'$ un ángulo igual al ABC, quedará $B'C'$ en la posición $B_1C_1$ paralela a BC (167). Y lo mismo acontecerá con los otros segmentos.

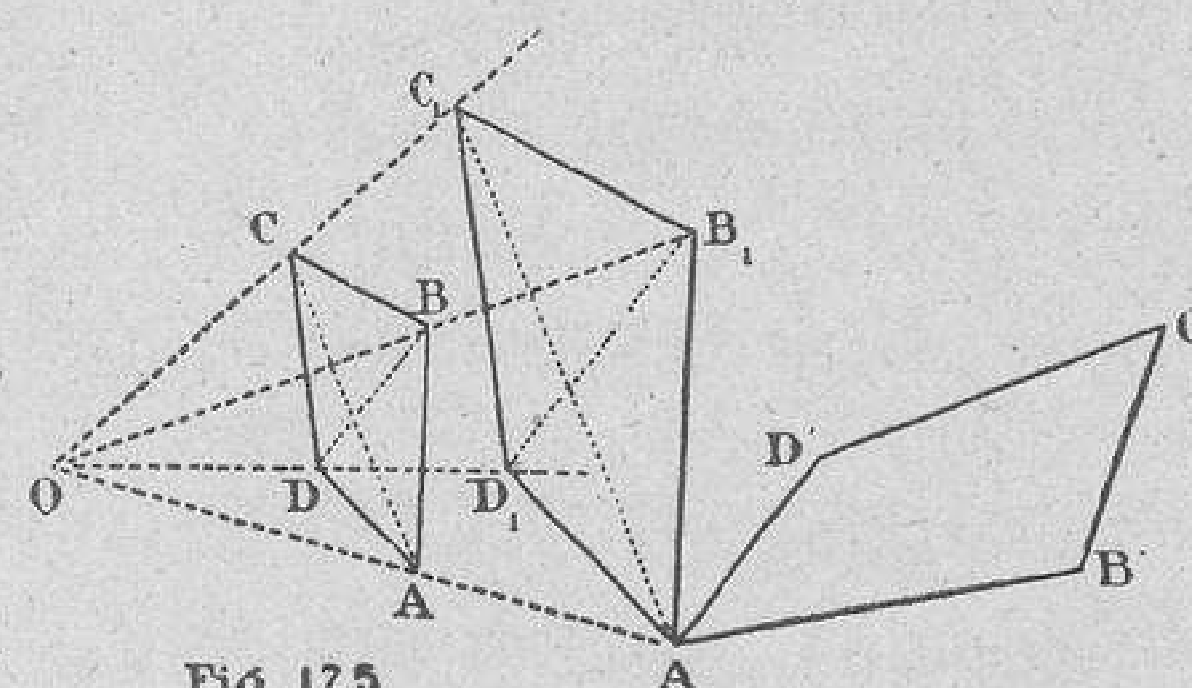


Fig 175

Ahora, si las rectas $A_1A$ y $B_1B$ se cortan en un punto O, las razones $\frac{OA}{OA_1}$ y $\frac{OB}{OB_1}$ serán iguales a la razón de semejanza $\frac{AB}{A_1\,B_1} = r$, y la recta que une otros dos puntos homólogos, C y $C_1$, pasará por O, porque debe encontrar a la $BB_1$ en un punto que divida al segmento $BB_1$ en la razón de semejanza $\frac{BC}{B_1C_1} = r$, y sólo el punto O cumple con esta condición.

526. Observaciones. 1.ª Hemos supuesto implícitamente que las figuras eran directamente semejantes, por serlo también directamente los triángulos parciales ABC y $A'B'C'$, ABD y $A'B'D'$, etc. (Fig. 174).

Si estos triángulos hubiesen sido inversamente semejantes, la semejanza de las figuras sería también *inversa*, y lo mismo la homotecia. Los teoremas subsisten excepto en lo que al sentido de los elementos se refiere; y así, mientras en las figuras homotéticas directas el centro de homotecia divide substractivamente en la razón de semejanza a los segmentos $AA_1$ $BB_1$, etc., (fig. 175) dejando, por consiguiente, las dos figuras a un mismo lado, cuando la homotecia es inversa las figuras quedan a distinto lado del centro, y éste divide aditivamente a $AA_1$ $BB_1$, etc., en la razón de homotecia. Pero esta variación no es *esencial*, porque sin más que imprimir una rotación de 180° a una de las figuras, la homotecia inversa se convierte en directa o viceversa; todo lo cual se comprueba sin esfuerzo con sólo dibujar las figuras adecuadas.

527. 2.ª Cuando dos figuras planas semejantes se colocan con los lados paralelos, pero no en el mismo plano sino en planos paralelos también, se demuestra parecidamente que las rectas que unen puntos homólogos son concurrentes en un punto, y forman, por tanto, una radiación (de rectas).

528. R.—*Si sobre los rayos de un haz o de una radiación de rectas tomamos pares de puntos* A *y* $A_1$, B *y* $B_1$, *etc., llamados* **homólogos** *que los dividan* (siempre aditiva o siempre substractivamente) *en una razón constante, las figuras formadas por aquellos puntos son semejantes y tienen los segmentos homólogos paralelos, por lo cual se llaman* **homotéticas.**

(F. 175).—D.—Por ser, según la hipótesis, $\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}$, es $A_1B_1$ paralela a AB (447) y el triángulo $OA_1B_1$ semejante al OAB. Como análogamente sucede con los demás, los segmentos de la figura $A_1B_1C_1D_1$ son paralelos a los de la ABCD y tienen con ellos una razón constante.

Luego si la primera de estas figuras se descompusiera en triángulos de base $A_1B_1$ y la segunda en otros de base AB, todos estos triángulos serían semejantes, y también las figuras mismas.

529. Observación.—Al arrancar la figura $A_1B_1C_1D_1$ de su posición, y colocarla en otra como la $A_1B'C'D'$ ya no será homotética, pero sí semejante con ABCD.

530. Dedúcense de todas las consideraciones precedentes, las conclusiones que siguen:

*Dos figuras semejantes tienen los segmentos homólogos proporcionales y los ángulos iguales; y se convierten en figuras homotéticas cuando se colocan paralelos dos lados homólogos.*

*Dos figuras cuyos puntos se corresponden de modo que cada par de ellos caigan sobre rayos de un haz o radiación y los dividan en razón constante, son homotéticas; y se convierten en semejantes separando una de ellas de la posición particular que ocupa.*

531. *Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.*

Porque el valor de un ángulo depende sólo del número de lados; (250) luego los ángulos serán iguales. Y los lados son proporcionales á causa de la igualdad de todos los de un mismo polígono (428).

Es fácil ver que en estos polígonos son homólogos (con relación a dos lados también homólogos) 1.° los centros; 2.° los puntos medios de los lados; 3.° los radios; 4.° las apotemas; 5.° los contornos. (Demuéstrese todo como ejercicio).

Y, por tanto:

532. *Los lados, radios, apotemas y perímetros de dos polígonos regulares semejantes son proporcionales, es decir, tienen una razón constante que es la razón de semejanza.*

533. *Dos círculos de un mismo plano o de planos paralelos, son homotéticos, y por consiguiente, semejantes.*

F. 176.—Sean O y O′ los círculos y OA y OA′, OB y OB′, etc., radios paralelos de igual sentido. Una-

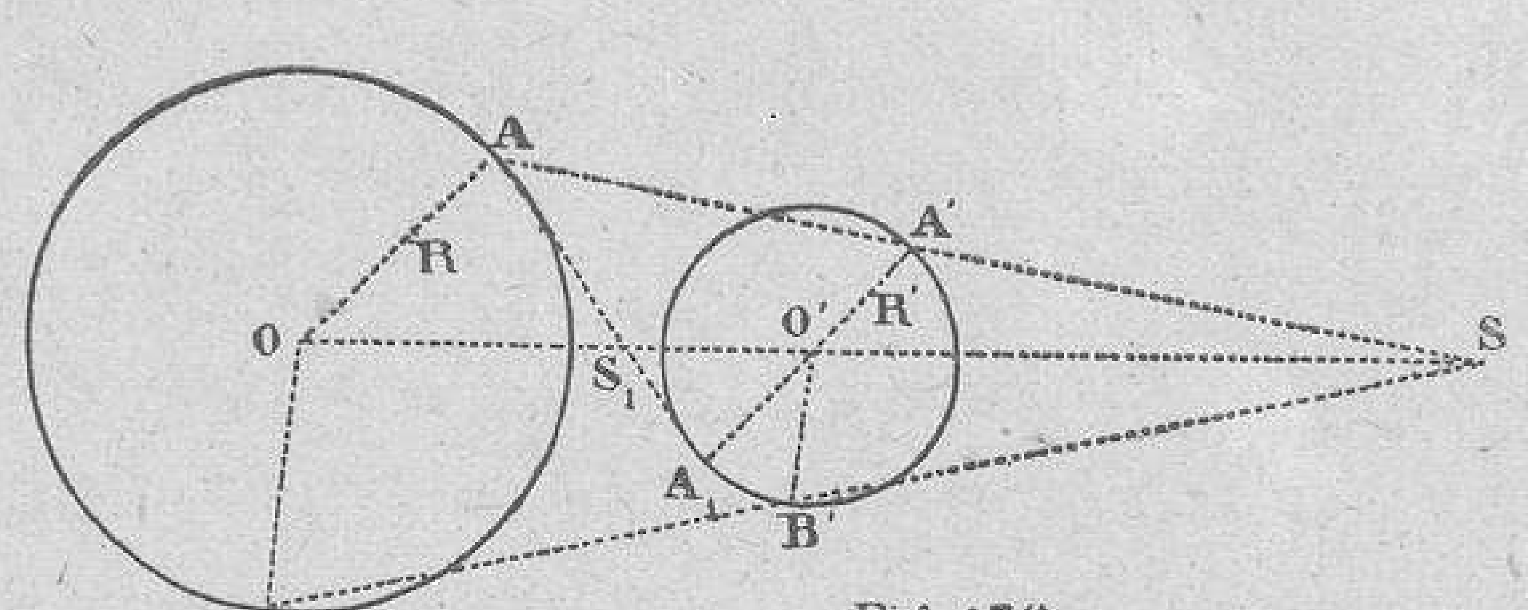


Fig 176

mos A con A′, B con B′, etc., y sea S el punto en que una de estas rectas, por ejemplo, AA′ corta a la recta de centros OO′. Sean R y R′ los radios de O y O′.

D.—El punto S divide substractivamente a OO′ en una razón igual a la $\frac{OA}{OA'}$ es decir $\frac{R}{R'}$. Y como BB′ debe cortar a OO′ en un punto tal que la divida también en la razón $\frac{OB}{OB'} = \frac{R}{R'}$ BB′ pasa por S, y este punto es un centro de homotecia directa de O y O′.

Observación.—Si se trazasen radios paralelos de sentido contrario como OA y $OA_1$ se obtendría por la intersección de $AA_1$ con OO′ un centro $S_1$ de homotecia inversa.

EJERCICIOS.—1.º Probar que por S o por $S_1$ pasan las tangentes comunes a las dos circunferencias, a las cuales son perpendiculares los radios.

2.º Ver que S y $S_1$ son conjugados armónicos de O y O' (433).

534. **Escolio.** *Las circunferencias son proporcionales a sus radios y diámetros.*

Porque en la semejanza de dos círculos, las circunferencias son líneas homólogas, y también los radios y los diámetros.

Luego si C y C′ son dos circunferencias, R y R′ sus radios, y D y D′ sus diámetros,

$$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'} \text{ y } \frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$$

luego $\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}$ $\frac{C}{D}=\frac{C'}{D'}$ proporciones que expresan que *la razón de cada circunferencia con su radio o con su diámetro es siempre la misma.*

Se designa por la letra griega $\pi$ la razón constante $\frac{C}{D}$, y en consecuencia se tiene la igualdad:

$$\frac{C}{D}=\pi, \text{ de la cual salen: } C=D\,.\,\pi, \text{ y } D=\frac{C}{\pi}$$

El número $\pi$, calculado por procedimientos diversos, se expresa *aproximadamente* por la fracción decimal 3'1415926..... o por la ordinaria $\frac{22}{7}$ (*). Y decimos apro-

(*) Valor de Arquímedes.

ximadamente porque se ha demostrado que $\pi$ es un número inconmensurable.

(Léase de nuevo el número 71).

535. *Las secciones producidas en una pirámide o en un cono por planos paralelos son semejantes.*

Porque son homotéticas. La razón de semejanza u homotecia es la misma en que quedan divididas por los planos secantes, las aristas, las alturas, y en general, todas las rectas que parten del vértice (436).

536. **Homotecia y semejanza de cuerpos.**

Si sobre los rayos de una radiación se toman pares de puntos homólogos, A y $A_1$, B y $B_1$, C y $C_1$, etc., (figura 175) se podrá, uniendo los puntos A, B, C, etc., formar un tetraedro, o un poliedro, o, en general, un cuerpo, y con los $A_1$, $B_1$, $C_1$, etc., se formará otro cuerpo. Estos cuerpos así obtenidos son homotéticos y tienen todos los segmentos homólogos proporcionales y paralelos. De este paralelismo se deduce la igualdad de los ángulos planos y diedros y de ésta la de los ángulos poliédricos. Separando uno de los cuerpos de la posición particular que ocupa, ya no es homotético con el otro, pero sí semejante.

Esta brevísima indicación basta para comprender cómo se extienden a las figuras del espacio las propiedades de semejanza y homotecia análogas a las de las figuras planas, sobre lo cual no entramos en detalles.

Advertiremos, no obstante, que si bien hemos obtenido cuerpos semejantes partiendo de cuerpos homotéticos, podríamos haber invertido este orden, comenzando por establecer casos de semejanza de tetraedros, v. gr.: éste: *dos tetraedros son semejantes si tienen semejante una cara e iguales los diedros que forman con ella las otras tres.* En seguida hubiéramos considerado dos triángulos semejantes ABC y $A_1B_1C_1$ y hubiéramos definido puntos homólogos con relación a dichos triángulos, que en general son aquellos puntos tales como D y $D_1$ que unidos con ABC y $A_1B_1C_1$ forman tetraedros semejantes DABC y $D_1A_1B_1C_1$. Así, por procedimiento parecido al empleado en el núm. 522, se habrían definido los cuerpos semejantes y probado la proporcionalidad de sus segmentos homólogos; y, finalmente, colocando dos de estos cuerpos semejantes de modo que sus lados y caras fuesen paralelos, se vería que las rectas que uniesen puntos homólogos formaban una radiación, con lo cual estarían los cuerpos situados en la posición de *homotéticos.*

537. *Los conos o cilindros de revolución son semejantes cuando lo son el triángulo rectángulo o el paralelogramo rectángulo con que se pueden suponer engendrados.*

*Las esferas son siempre semejantes. En los primeros, son elementos homólogos las alturas y los radios, y en las segundas, los radios o diámetros, por lo cual dichos elementos son proporcionales, siendo su razón la de semejanza.*

Porque los conos se colocan en posición de homotecia haciendo coincidir los ejes; los cilindros se consideran como conos de vértice infinitamente alejado en la dirección del eje, y para las esferas se halla un centro de homotecia directa o inversa uniendo extremos de radios paralelos de igual u opuesto sentido.

538. **Figuras inversas.** Así como contando sobre los rayos de un haz o radiación segmentos que estén en *razón constante* se forman al unir los extremos de dichos segmentos

figuras homotéticas. tomando sobre aquellos rayos segmentos OA, OA', OB, OB' etc., (fig. 176 bis) *cuyo producto sea constante*, se obtiene con los puntos A,B,C A'B'C'..... figuras que se denominan *inversas*. No haremos el estudio de ellas, limitándonos a esta definición y a la enunciación de las siguientes propiedades: Dos segmentos homólogos AB, A'B' son *antiparalelos* con relación al ángulo AOB. 2.ª El ángulo de dos rectas es igual al de sus homólogas. 3.ª La figura inversa de una circunferencia que pasa por el origen o vértice O es una recta, y recíprocamente. La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el origen es otra circunferencia.

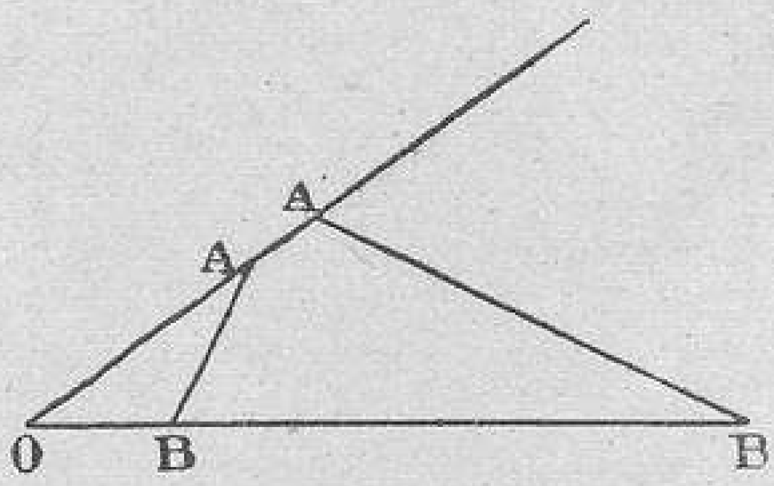

Fig. 176 bis

# CUARTA PARTE

## CAPÍTULO PRIMERO

## Longitudes, áreas y volúmenes

539. **Longitudes.** Ya se indicó como se halla la longitud de un segmento de recta, o la razón de dos (66).

Respecto a la longitud de una curva se ha admitido implícitamente, en algunos párrafos, la definición que sigue: *Longitud de una curva es el límite a que tiende el perímetro de una línea quebrada inscripta en dicha curva cuando el número de lados de dicha quebrada aumenta indefinidamente y, por consecuencia, tiende a cero la longitud de cada uno de ellos.*

Claro es que para justificar esta definición se requiere probar de antemano que el perímetro de la línea quebrada se acerca constantemente a un límite fijo; porque como al aumentar el número de lados ellos disminuyen, se ignora a primera vista si el perímetro crece o si decrece, y aun suponiendo que aumente no se sabe si lo hace con arreglo a una ley que le haga aproximarse a un número fijo que sería, si existe, el que expresara la longitud de la curva.

Pero la demostración rigurosa de la existencia de ese límite y de su independencia de la particular manera de inscribir la quebrada, envuelve consideraciones cuyo lugar adecuado es el cálculo infinitesimal y, no nos parecen pertinentes en libro tan elemental como éste.

No daremos, pues, una demostración del aserto incluso en la definición precedente; pero el alumno *presentirá* la verdad del mismo con sólo notar que cuantos más puntos tiene la quebrada comunes con la curva en que está inscripta, más se le asemeja, y menos diferencia existirá entre sus respectivos tamaños; por lo cual, el de la quebrada se puede tomar como valor aproximado del de la curva, con tanto menor error cuantos más lados tenga aquélla.

Asi es como la circunferencia puede mirarse, respecto a su longitud, como límite del perímetro de un polígono regular inscripto variable.

Por lo que toca a la manera práctica de cálcular la longitud de la circunferencia ya se dijo (71) que se empleaba la fórmula $C = D \, . \, \pi$, y ya se vió también (534) que esta fórmula nacía de la proporcionalidad o razón constante existente entre las circunferencias y sus diámetros o radios.

540. Lo que conviene añadir aquí, es alguno de los procedimientos gráficos empleados para *rectificar* la circunferencia, esto es, para hallar una recta de longitud aproximadamente igual a la de la curva.

He aquí dos métodos:

1.º Se divide el diámetro en 7 partes iguales y se toman sobre una recta 22 de estas partes. Porque de ser $C = D \cdot \pi$ se deduce dando a $\pi$ el valor $\frac{22}{7}$, $C = D \cdot \frac{22}{7}$ luego la circunferencia es igual a $\frac{22}{7}$ del diámetro, que es la cantidad que habíamos tomado.

2.º F. 177.—Se traza la cuerda AB igual al radio, el diámetro CD perpendicular a ella y la tangente en C.

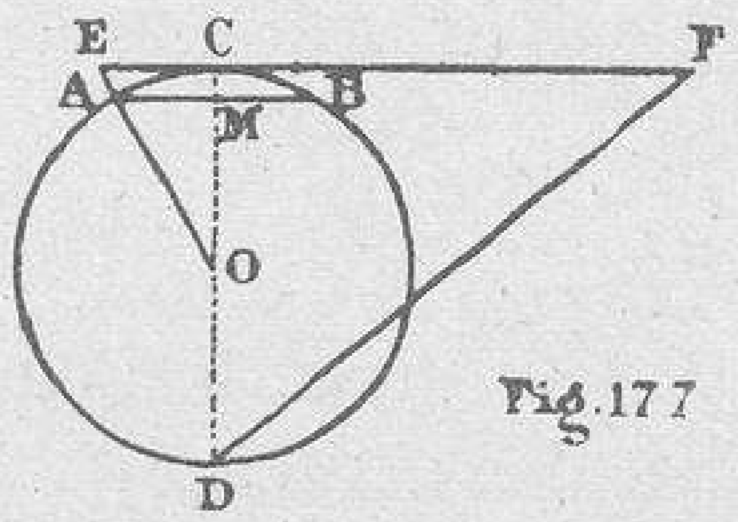

Fig. 177

Limitando ésta en el punto E, en que la corta el radio OA, se mide a partir de E la longitud EF igual a 3 radios, y la recta FD tiene próximamente la longitud de la semicircunferencia.

La demostración se haría calculando OM, apotema del exágono regular, por el teorema de Pitágoras; después EC por la semejanza del triángulo OEC con el OAM; enseguida FC como diferencia entre EF (conocido) y EC, y finalmente FD por el teorema de Pitágoras. (Puede servir de ejercicio esta demostración).

541. **Areas.** *Se llama* **área** *la razón entre una superficie y otra tomada como unidad.* Nosotros tomaremos siempre por unidad superficial *el cuadrado que tenga por lado la unidad de longitud;* es decir, que cuando la unidad de longitud sea el metro, la de superficie será el metro cuadrado; si aquélla fuese el decímetro, la de superficie sería el decímetro cuadrado, etc.

542. *Figuras equivalentes son las de igual área,*

aunque tengan distinta forma. Si dos figuras se componen de partes iguales, o de una parte común y otras iguales, serán equivalentes.

543. *El área de un cuadrado es igual al cuadrado o segunda potencia de su lado.*

Se sobreentiende, al hablar así, que midiendo el lado en metros, decímetros, centímetros..., etc., y elevando al cuadrado *el número* que expresa tal medida, se obtiene *el número* que indica el área, referida respectivamente al metro, decímetro o centímetro *cuadrados.*

Observaciones análogas son aplicables a los demás enunciados de esta teoría..

Fig. 178.—Sea el cuadrado ABCD.

D.—Suponiendo los lados AB y AD divididos cada uno v. gr.: en 5 partes iguales, si por los puntos E, F, G, H, trazamos perpendiculares a AB, quedará el cuadrado dividido en 5 bandas o fajas rectangulares que se comprueba fácilmente que son iguales. Pero si por los puntos L, M, N y P trazamos perpendiculares al lado AD, cada una de aquellas bandas queda dividida en cinco cuadrados iguales al rayado. Luego habrá $5 \times 5$ ó $5^2$ cuadrados como éste, el cual sería la unidad de superficie, puesto que su lado AE se había tomado por unidad de longitud (541).

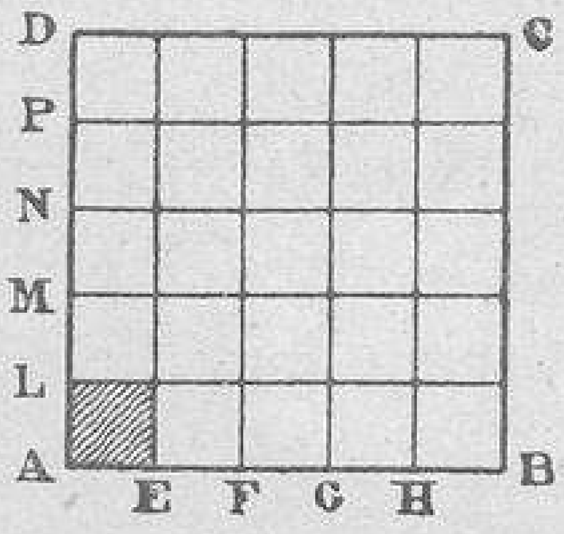

Fig. 178.

Si pues AE es un metro, decímetro..., milímetro, el área del cuadrado será $5^2$ metros, decímetros..., milímetros *cuadrados*, según se intentaba probar.

**Escolio.** Si A es el área de un cuadrado cuyo lado tenga por longitud $l$, y A′ el área de otro cuyo lado sea $l'$, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} A = l^2 \\ A' = l'^2 \end{array}\right\} \text{ y dividiendo } \frac{A}{A'} = \frac{l^2}{l'^2} \ (1)$$

Esta proporción puede enunciarse diciendo: *las áreas de dos cuadrados son proporcionales a los cuadrados* (segundas potencias) *de sus lados;* y sirve para determinar uno de los cuatro números A, A', $l$, $l'$ conociendo los otros tres. V. gr.:

$$l^2 = \frac{A \times l'^2}{A'} \text{ y } l = \sqrt{\frac{A \times l'^2}{A'}} = l' \cdot \sqrt{\frac{A}{A'}}$$

Ejercicios.—1.º Hacer aplicaciones numéricas de la proporción (1).

2.º Hallar el lado de un cuadrado doble de otro.

3.º Para que un cuadrado sea 25 veces menor que otro ¿cómo ha de ser el lado?

544. *El área de un rectángulo es igual al producto de su largo por su ancho (base por altura).*

Léase la observación del núm. 543.

Ejercicio.—Demostrar este teorema por un procedimiento que sólo difiere del empleado para el anterior en ser distinto el número de divisiones que se toman sobre los lados contiguos.

Observación.—Podría acontecer que la base del rectángulo fuese inconmensurable con su altura, pero en cuestiones *prácticas*, como la presente, esto importa poco, puesto que tomando una unidad suficientemente pequeña, por ejemplo, el milímetro, el error cometido sería suficientemente pequeño también, y, por tanto, despreciable.

Designando por A, $b$ y $a$, A′, $b'$ y $a'$ los números que expresan las áreas, bases y alturas de dos rectángulos será: $A = b \cdot a$ y $A' = b' \cdot a'$ (2).

EJERCICIOS.—1.º De las igualdades (2) deducir, por división, las siguientes propiedades. Las áreas de dos rectángulos son proporcionales a los productos de sus bases por sus alturas, o a las bases si las alturas son iguales, o a las alturas si son iguales las bases. Los rectángulos de igual área tienen sus bases inversamente proporcionales a sus alturas.

2.º Hacer aplicaciones numéricas de las proporciones que se habrán obtenido al resolver el ejercicio anterior.

545. *Un paralelogramo cualquiera es equivalente a un rectángulo de la misma base e igual altura.*

Fig. 179.—Sea el paralelogramo ABCD y ABEF el rectángulo de base AB y la altura BE igual a la del paralelogramo.

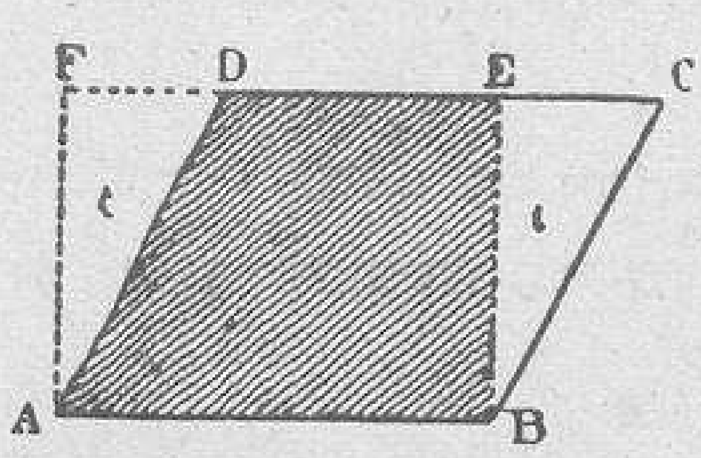

Fig 179

D.—La parte rayada es común, y los triángulos $t$ y $t'$ iguales, luego el paralelogramo y el rectángulo son equivalentes (542).

DETALLES.—Demuéstrese, como ejercicio, la igualdad de los triángulos $t$ y $t'$.

546. **Corolario.** *El área de cualquier paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.*

Consecuencia inmediata del teorema.

EJERCICIOS.—¿A quién son proporcionales las áreas de dos paralelogramos? ¿Y si tienen igual base? ¿Y si es igual la altura? ¿Qué relación guardan las dimensiones de paralelogramos equivalentes? Razónense las respuestas.

547. *El área de un triángulo es igual a la mitad*

*del producto de su base por su altura* (o a la base por la mitad de la altura, o á la altura por la mitad de la base).

D.—Basta considerar que un triángulo es mitad de un paralelogramo de igual base y altura, puesto que éste quedaría dividido por una diagonal en dos triángulos iguales.

Hágase la figura y fíjense los detalles.

548. **Escolios.** 1.º *El área de un triángulo rectángulo es igual á la mitad del producto de los catetos.*

2.º *El área de un triángulo equilátero es igual a la cuarta parte del cuadrado de su lado por* $\sqrt{3}$

Porque si $l$ es el lado, la altura es $\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}$ (502) y el área

$$A = \frac{l}{2} \times \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

3.º Las áreas de dos triángulos son proporcionales a los productos de sus bases por sus alturas, o a las bases si las alturas son iguales, o a éstas si lo son aquéllas, etc.

4.º *Los triángulos con un vértice común y las bases en línea recta son proporcionales a éstas.* Porque tienen igual altura. (Hágase la figura y compruébese).

5.º *Los triángulos de la misma base y los vértices sobre una paralela a la base son equivalentes.* Porque tienen igual altura (Véase en una figura). Esto puede enunciarse diciendo: *si se conserva la base de un triángulo, y se traslada el vértice paralelamente a la base, el área no cambia.*

6.º *Todo polígono puede transformarse en otro equivalente que tenga un lado menos*

F. 180. Sea el pentágono ABCDE. Tracemos la diagonal EC y traslademos el vértice D paralelamente, hasta ponerlo en H sobre la prolongación del lado BC.

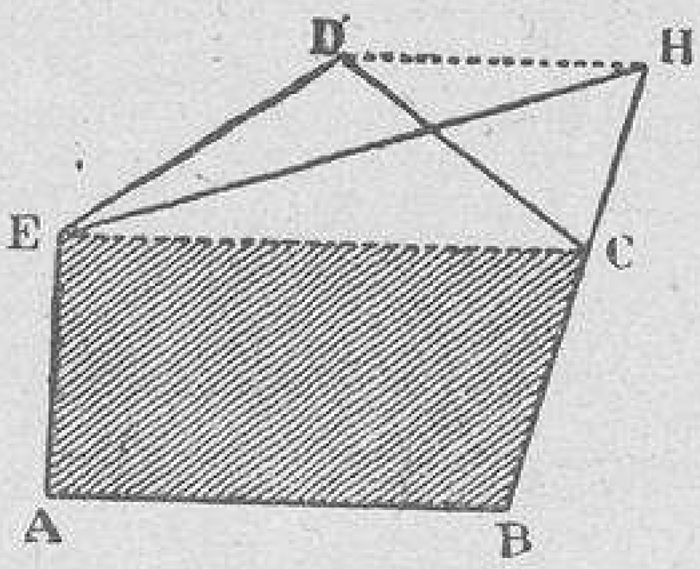

Fig 180

D.--Los triángulos EDC y EHC son equivalentes (caso anterior) y la parte rayada común, luego el pentágono ABCDE equivale al cuadrilátero ABHE.

7.º Haciendo varias veces la transformación que precede se podrá *convertir cualquier polígono en triángulo equivalente.*

8.º Representando las longitudes de los lados de un triángulo por las letras $a$, $b$, $c$, y por $p$ el semiperímetro $\frac{1}{2}(a+b+c)$ y procediendo como se dijo al calcular la altura (509) se obtendría para el área una *fórmula*, que por no exigir otro conocimiento que el de los lados interesa saber, y es la siguiente:

$$A = \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$$

EJERCICIO.—Hacer una aplicación numérica de esta fórmula.

549. *El área de un trapecio es igual a la semisuma (mitad de la suma) de las bases por la altura; o a la paralela media por la altura.*

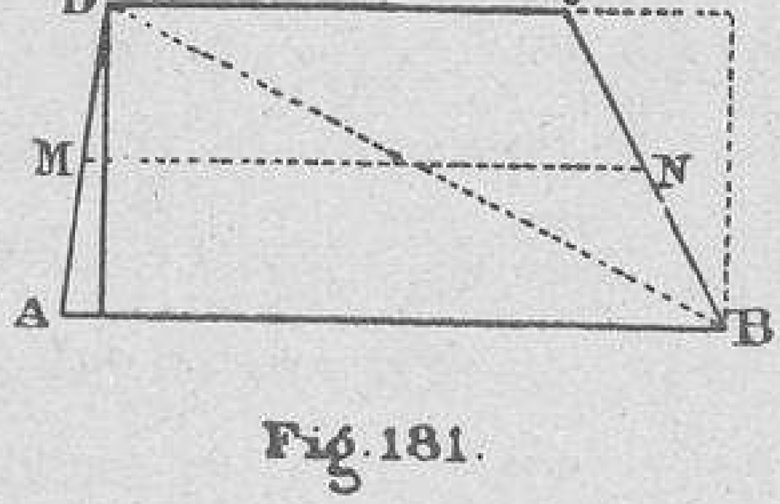

Fig. 181.

F. 181.--Sea el trapecio ABCD; tracemos la diagonal DB que lo descompone en dos triángulos.

D.—En los triángulos ABD y DBC se pueden tomar como bases las AB y CD del trapecio, y como la altura es igual a la de éste, la suma de las áreas, que da el área del paralelogramo, será:

$$\frac{AB}{2} \times \text{alt.}^a + \frac{DC}{2} \times \text{alt.}^a = \frac{AB+DC}{2} \times \text{alt.}^a$$

La paralela media, MN, es igual a $\frac{AB+DC}{2}$ y esto justifica la segunda parte del enunciado.

550. **Área de un polígono.**—Cuando el polígono es irregular, no puede en general expresarse el área por una fórmula, y es preciso proceder en cada caso particular del modo más conveniente para descomponer el polígono en partes cuya área sepa calcularse. Suele ser cómoda la descomposición obtenida proyectando todos los vértices sobre la mayor diagonal. A veces se procede por diferencia, calculando el área de un rectángulo circunscripto al polígono y restando de ella las de las porciones que quedan entre el polígono y el rectángulo, o se convierte el polígono en triángulo equivalente y se halla el área de éste.

551. *El área de un polígono regular es igual al semiperímetro por la apotema.*

D.—Porque para calcularla se podría hallar el área de un triángulo obtenido uniendo el centro del polígono con los extremos de un lado, y tomarla tantas veces como lados hay. El área del triángulo dicho sería:

$$\frac{1}{2} \text{ lado} \times \text{apotema}$$

y la de todos, $\frac{1}{2}$ perímetro $\times$ apotema. (Practíquese).

**Escolios.** 1.º Si el polígono fuese circunscriptible sirve la misma fórmula, aunque no sea regular.

2.º El valor de la apotema depende del valor del lado y el del radio, y puede calcularse si se conocen éstos.

Tomando como ejemplo el pentágono, que es bastante complicado, de la fórmula del lado

$$l = \frac{r \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \quad (501)$$

se halla el valor del radio

$$r = \frac{2\,l}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

y como la apotema es

$$a = \frac{\sqrt{4r^2 - l^2}}{2} \quad (499)$$ se tiene sucesivamente:

$$r^2 = \frac{4\,l^2}{10 - 2\sqrt{5}} \;,, \quad 4\,r^2 = \frac{16\,l^2}{10 - 2\sqrt{5}} \;,,$$

$$4\,r^2 - l^2 = \frac{16\,l^2}{10 - 2\sqrt{5}} - l^2 = \frac{16\,l^2 - 10\,l^2 + 2\,l^2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{l^2\,(6 + 2\sqrt{5})}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{l^2\,(3 + \sqrt{5})}{5 - \sqrt{5}}$$

valor que substituido en el de $a$, proporciona

$$a = \frac{l\sqrt{\dfrac{(3 + \sqrt{5})}{5 - \sqrt{5}}}}{2}$$

Pero el área es semiperímetro $\times$ apotema, luego:

$$\mathrm{A} = \frac{5\,l}{2} \times a = \frac{5\,l^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}.$$

552. *El área de un círculo es igual a $\pi$ por el cua-*

*drado del radio; o a* $\frac{1}{\pi}$ *por el cuadrado de la semicircunferencia.*

D.—Por ser la circunferencia límite del perímetro de un polígono variable, que puede ser regular, inscripto en ella (539) se considera el área del círculo como límite de dicho polígono. Pero la apotema de éste tiene por límite el radio, luego de la fórmula

$$\text{Polígono} = \frac{1}{2} \text{ perímetro} \times \text{apotema.}$$

se obtiene al pasar al límite

$$\text{Círculo} = \frac{1}{2} \text{ circunferencia} \times \text{radio (1)}$$

Pero la mitad de la longitud de la circunferencia es $\pi \times$ radio, luego

$$\text{Círculo} = \pi \times \text{radio} \times \text{radio} = \pi \times (\text{radio})^2 = \pi \,.\, R^2$$

si, como es costumbre, se designa el radio por R.

También podríamos haber sustituído en la expresión (1) el radio por su valor, que designando por C la circunferencia sería:

$$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{\pi}$$

y entonces resultaría:

$$\text{Círculo} = \frac{C}{2} \times \frac{C}{2} \times \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \times \left(\frac{C}{2}\right)^2$$

según el enunciado dice en su segunda parte.

**Escolios.** 1.° Se emplea respectivamente una u otra de las fórmulas

$$A = \pi \,.\, R^2 \text{ o } A = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{C}{2}\right)^2$$

para hallar el área, A, del círculo, según sea más fácil medir el radio o la circunferencia.

2.° De dichas fórmulas se pueden, inversamente, obtener los valores de R o de $\frac{C}{2}$ (y por tanto el de C) cuando sea conocido el de A, resultando, sucesivamente:

$$R^2 = \frac{A}{\pi} = A \cdot \frac{1}{\pi}, \text{ y } R = \sqrt{A \cdot \frac{1}{\pi}}$$

$$\left(\frac{C}{2}\right)^2 = \pi \cdot A, \text{ y } \frac{C}{2} = \sqrt{\pi \cdot A.}$$

(Háganse aplicaciones numéricas).

3.° El área de un sector circular (O$A$$n$B; fig. 182) se obtiene de la del círculo de que forma parte mediante una regla de tres, por ser los sectores proporcionales a las amplitudes de los arcos y poderse considerar el círculo como un sector cuyo arco fuese de 360°. Así, si se designa por $n$ la amplitud del arco del sector

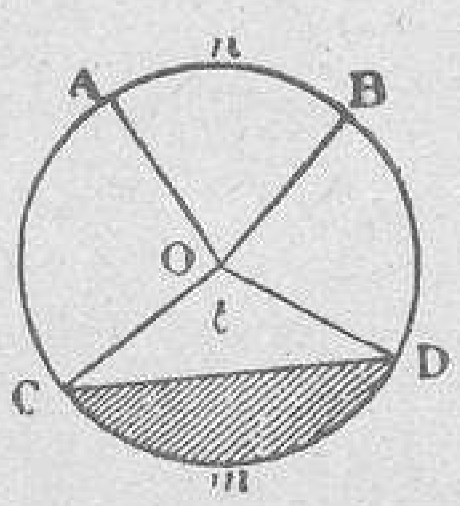

Fig 182

$$\frac{\text{sector}}{\text{círculo}} = \frac{n}{360^\circ} \text{ luego: sector} = \text{círculo} \times \frac{n}{360^\circ}$$

(Háganse ejercicios numéricos teniendo en cuenta que para hallar la razón de $n$ con 360° es preciso que estén reducidos a incomplejos del mismo orden).

4.° El área de un segmento de círculo (C $m$ D; figura 182) se obtiene uniendo los extremos de su arco con el centro, con lo que se tendrán un sector (COD$m$) y un triángulo (COD) que restados o sumados darán el área del segmento.

(Háganse aplicaciones numéricas).

El área de la parte de círculo comprendida entre dos rectas paralelas, *(zona o faja)*, la de la porción comprendida entre dos circunferencias concéntricas *(corona)*, y las de otras figuras en cuya composición entren partes de círculo, se obtienen por suma o resta de áreas de las figuras de que se compongan o de cuya diferencia resulten. En algunos casos pueden obtenerse fórmulas sencillas.

EJERCICIOS.—Hallar el área de las partes rayadas en las figuras 183 a 187.

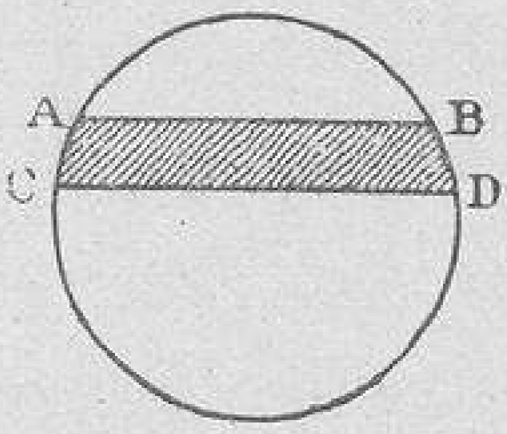

Fig 183

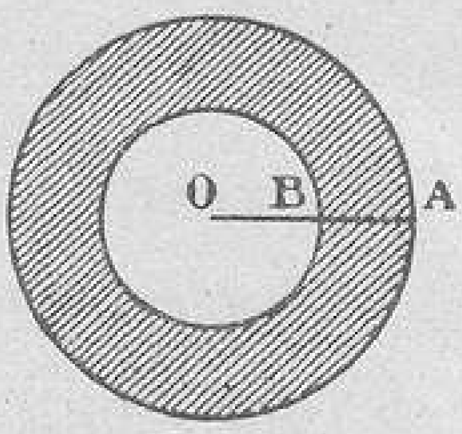

Fig.184

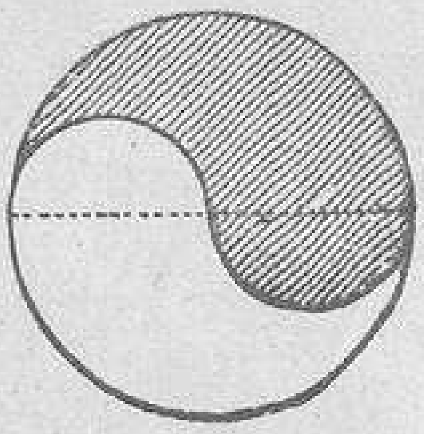
Fig.185.

El mismo método general se sigue para hallar las áreas de figuras de contorno mixtilíneo.

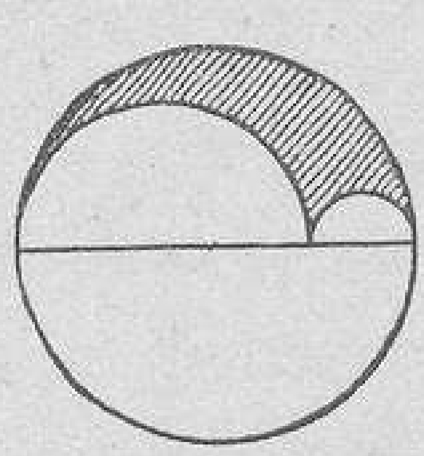
Fig 186

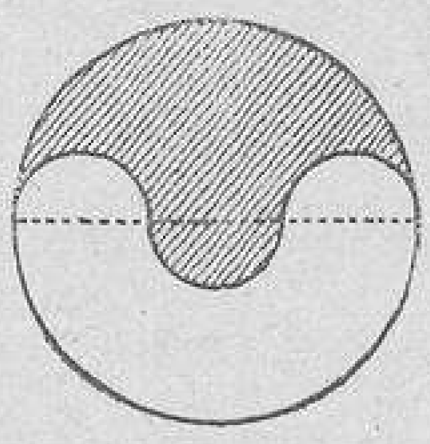
Fig.187.

Para la parte de plano comprendida entre una curva convexa, (fig. 188), su proyección sobre un eje, y las proyectantes extremas, se trazan otras proyectantes intermedias llamadas *ordenadas* $(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_7)$, cuya distancia sea constante, y uniendo sus extremos para formar trapecios inscriptos o trazando tangentes que formen con las ordenadas prolongadas otros trapecios circunscriptos, se obtienen varias fórmulas en que interviene la distancia $d$ entre las ordenadas y las longitudes de éstas. Tal es, v. gr.: la siguiente, de Poncelet:

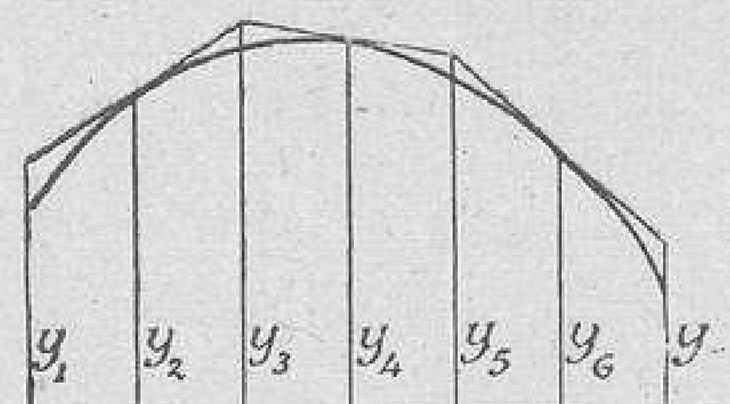

Fig. 188.

$$\text{Area} = d\left(2\,P + \frac{E - E'}{4}\right)$$

siendo P la suma de ordenadas pares $(y_2+y_4+y_6)$, E la de las extremas $(y_1+y_7)$ y E' la de las contiguas a las extremas $(y_2+y_6)$.

El error que esta fórmula da es inferior a $d \cdot \dfrac{E - E'}{4}$, lo que permitirá saber de antemano la exactitud con que se cuenta.

554. *El área de la superficie lateral de una pirámide regular es igual al semiperímetro de su base por la apotema; y la de un cono de revolución a la semicircunferencia de su base por la apotema o lado.*

*El área lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas, es igual a la semisuma de los perímetros de las bases por la apotema; y la de un tronco de cono de revolución (también de bases paralelas) a la semisuma de las circunferencias de las bases por el lado.*

D.—Para la pirámide y su tronco se halla el área de una cara, que es un triángulo o trapecio, y se multiplica por el número de ellas. (Hágase). Para el cono y su tronco, se substituyen los elementos que figuran en las anteriores por sus límites, considerando al cono como límite de las pirámides inscriptas (regulares), cuyo número de lados aumenta indefinidamente; y por eso, en vez de perímetros, se tienen circunferencias, y en vez de apotemas, lados.

Ejercicios.—Aplicar a ejemplos las expresiones anteriores y comprobarlas por medio de los desarrollos en un plano de las superficies laterales de los cuerpos considerados. (385).

555. Observación.—En vez del semiperímetro o semicircunferencia de la base de una pirámide o cono se puede poner el perímetro o circunferencia de la sección media, esto es, trazada por el punto medio de la arista o lado, (446); y análogamente, en vez de la semisuma de los perímetros o semicircunferencias de las bases de los troncos puede ponerse el perímetro o circunferencia de la sección o base media, (equidistante de las bases).

556. *El área lateral de un prisma es igual a la arista lateral por el perímetro de la sección recta.* (394).

D.—Se hallan las áreas de todas las caras, que son paralelogramos que tienen por base la arista lateral y por alturas los diversos lados de la sección recta, (394) y se saca por factor común la arista lateral.

*El área lateral de un prisma regular es igual a la altura por el perímetro de la base; y la de un cilindro de revolución a la altura o lado por la circunferencia de la base.*

D.—Para el prisma se considera la arista lateral como altura y la base como sección recta, y se recae en el enunciado anterior; y para el cilindro se considera su superficie como límite de la de un prisma regular inscripto cuyo número de caras aumente indefinidamente.

Ejercicios.—Detallar las demostraciones; poner ejemplos numéricos y comprobar por medio de los desarrollos.

557. **Escolio general.** Las áreas totales de los cuerpos mencionados se obtienen agregando a las laterales las áreas de las bases (polígonos o círculos).

Si se quiere obtener *fórmulas*, es conveniente sacar los factores comunes que sea posible. Por ejemplo: el área lateral de un cono de revolución de radio $r$ y lado $l$ tiene por fórmula $\pi \,.\, r \,.\, l$, y el área de su base es $\pi \,.\, r^2$, luego el área total será

$$A = \pi \,.\, r \,.\, l + \pi \,.\, r^2 = \pi \,.\, r\, (l + r),$$

(Véase el cuadro de fórmulas inserto después).

558. *El área de una zona esférica es igual a su altura por la circunferencia máxima de la misma esfera.*

D.—Para demostrar este teorema se considera la zona engendrada por el arco AB que gira alrededor del diámetro CD. (Fig. 189). Pero a su vez el arco se mira como límite de la quebrada regular inscripta AEFB cuando el número de lados de esta aumentase indefinidamente. Debemos, pues, hallar el área engendrada por dicha quebrada cuando gira alrededor de CD; y vamos a demostrar que dicha área es igual *al producto de la proyección* A'B' *de la línea sobre el eje* CD, *por la circunferencia cuyo radio es la apotema* OP.

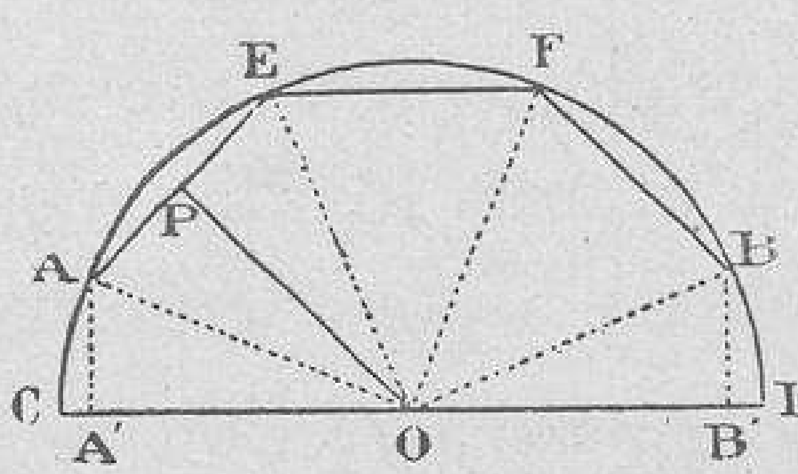

Fig. 189

Para mayor claridad, consideremos aparte uno de los triángulos AOE (fig. 190) y busquemos el área que engendra su base AE girando alrededor de CD. Distinguiremos varios casos:

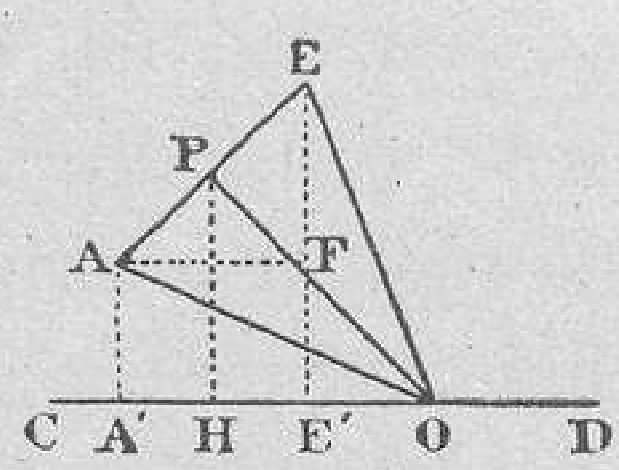

Fig. 190

*a)*—AE no es paralela a CD pero llega a cortarla.

AE engendra un tronco de cono de revolución de bases paralelas y cuya sección o base media es la circunferencia de radio PH, luego su área será (554 y 55)

$$\pi \,.\, 2 \,.\, PH \times AE \quad (1)$$

Pero si se traza AF paralela e igual a A'E' resulta el triángulo EAF de lados perpendiculares a los del PHO por lo cual son semejantes y (*)

$$\frac{PH}{AF}=\frac{OP}{AE} \text{ o bien } \frac{PH}{A'E'}=\frac{OP}{AE}$$

de donde sale

$$PH \times AE = OP \times A'E'$$

por lo cual, substituyendo en la igualdad (1) se obtiene para expresión del área buscada

$$\pi \cdot 2 \cdot PO \times A'E'$$

es decir

circunferencia de radio OP $\times$ proyección de AE.

*b)*—Si AE fuese paralela al eje CD (fig. 191) AE engendraría un cilindro cuya área sería:

$$\pi\ 2 \cdot OP \times AE = \pi \cdot 2 \cdot OP \times A'E'$$

es decir

circunf.ª de radio OP $\times$ proyección de AE

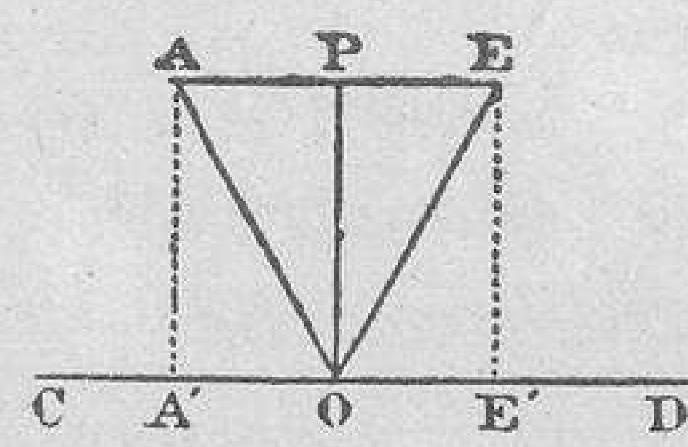

Fig. 191

como antes.

*c)*—Si A estuviese sobre el eje AE (fig. 192) engendraría un cono; PH sería el radio de la sección media, AE' la proyección de AE y los triángulos EAE' y PHO semejantes por lo cual imitando la demostración del primer caso (hágase como ejercicio) saldría para el área buscada

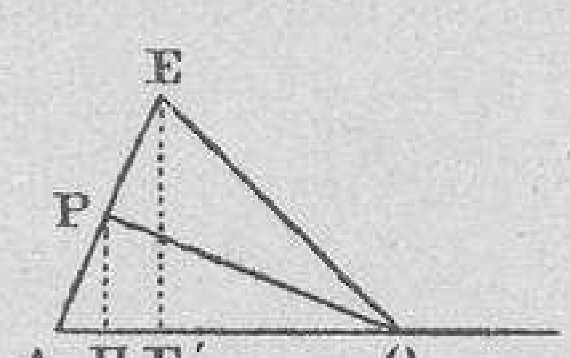

Fig. 192.

$$\pi \cdot 2 \cdot OP \times AE'$$

esto es

circunf.ª de radio OP $\times$ proyección de AE

lo mismo que en los casos anteriores

En todos los casos resulta, pues, que el área engen-

(*) Son homólogos los lados perpendiculares.

drada por un lado de la quebrada AEFB (fig. 189) es igual a la proyección del lado sobre el eje por la circunferencia cuyo radio es la apotema OP; y este mismo enunciado corresponde al área que engendra toda la línea quebrada, puesto que la proyección de ella es suma de las proyecciones parciales de los lados y la apotema es constante.

El área de la zona engendrada por el arco AB es límite de la engendrada por la quebrada AEFB y se obtiene sustituyendo la apotema, OP, por el radio de la circunferencia a que pertenece el arco AB, y teniendo en cuenta que la proyección A′B′ es la altura de la zona. Así, pues,

$$\text{Ar . zona} = \text{circunferencia máxima} \times \text{altura}$$

559.—*El área de la superficie esférica es igual a π por el cuadrado del diámetro; o a cuatro veces la de su círculo máximo.*

D.—La superficie esférica puede considerarse como si fuese una zona esférica que tuviese por altura el diámetro; luego según el teorema anterior su área será:

$$(\pi \,.\, d) \,.\, d = \pi \,.\, d^2.$$

Pero también, por ser $d = 2 \,.\, r$, se puede escribir

$$\pi \,.\, d^2 = \pi \,.\, (2\,r)^2 = \pi \,.\, 4 \,.\, r^2 = 4\,(\pi \,.\, r^2) = 4\,(\text{circ.}^{\text{o}}\ \text{máx.}^{\text{o}})$$

560. *El área de un huso esférico es igual a tantos 360-avos de la superficie esférica, como grados tenga su ángulo.*

D.—Porque la superficie esférica podrá dividirse en 360 husos iguales y el ángulo de uno de estos será de 1.°

Ejercicio.—Decir qué parte de la superficie esférica es un huso cuyo ángulo sea dado en grados o rectos, y hallar su superficie en $m^2$ sabiendo el número de metros del radio de la esfera.

561. *El área de un triángulo esférico es igual a la mitad de la suma de los husos correspondientes a sus ángulos disminuída en un hemisferio.*

F. 193.—Sea el triángulo ABC y $A_1B_1C_1$ su opuesto. Completemos los husos $AA_1$ $BB_1$ y $CC_1$ y contemos éste a partir del ángulo C opuesto por el vértice al C triángulo.

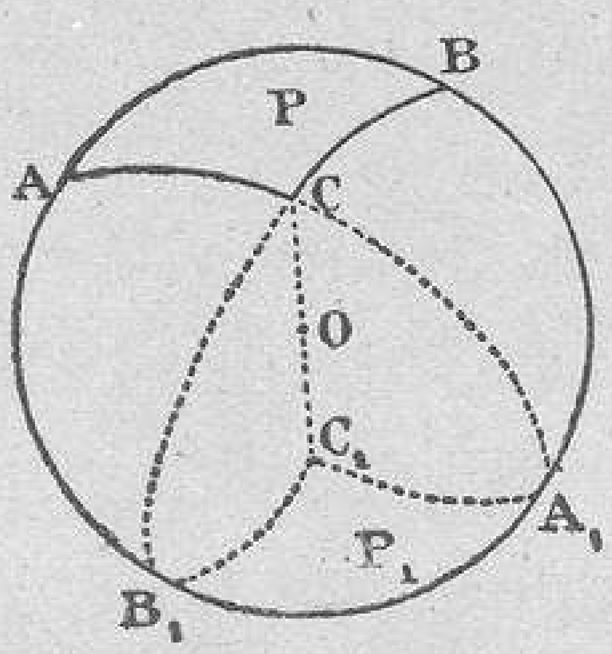

Fig. 193.

D.

$$\text{Huso } AA_1 = ABC + BCA_1$$
$$\text{Huso } BB_1 = ABC + CAB_1$$
$$\text{Huso } CC_1 = CB_1A_1 + A_1B_1C_1$$

Pero los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ aunque en general no son superponibles tienen igual área, porque se pueden descomponer en triángulos iguales tomando como centro de descomponición los polos P y $P_1$ de las circunferencias menores que pasasen por los vértices, luego si en vez de $A_1B_1C_1$ ponemos ABC en la última igualdad, y sumamos todas,

$$\text{Huso } AA_1 + \text{Huso } BB_1 + \text{Huso } CC_1 = 2\,ABC + \text{Hemisferio}$$

luego $ABC = \frac{1}{2}$ (Suma de husos—hemisferio).

DETALLES.—En la figura 194 se ve cómo el triángulo ABC quedaría descompuesto en tres triángulos PAB, PBC, PAC, que, por ser P polo del círculo menor ABC, tienen iguales los lados PA, PB, PC. Estos triángulos *isósceles* pueden coincidir con sus opuestos, ($P_1$ $A_1$ $B_1$ etc.) (335 y 36) luego los triángulos ABC y $A_1$ $B_1$ $C_1$ tienen igual área por componerse de partes iguales.

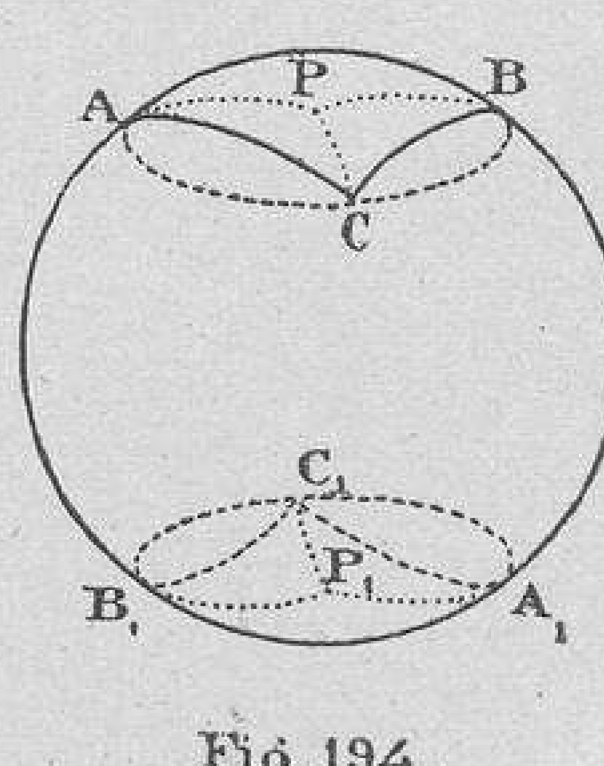

Fig. 194.

**Escolio.**—En virtud de los dos teoremas precedentes, el área del triángulo ABC tendrá por expresión, estando los ángulos A, B y C, valuados en grados, la siguiente:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{360}+\frac{B}{360}+\frac{C}{360}-\frac{180}{360}\right] \text{ de supf.}^{e} \text{ esférica,}$$

o bien

$$\text{Area} = \frac{(A+B+C)-180}{720} \text{ de superficie esférica.}$$

Podría, pues, darse como *regla práctica* para hallar el área de un triángulo esférico la siguiente: Exprésense los ángulos en grados (o grados y fracción de ellos) réstese de su suma 180°, y dividiendo la diferencia por 720 se averiguará qué parte de la superficie esférica es el triángulo.

EJERCICIOS.—Hallar áreas de husos o triángulos esféricos cuyos ángulos se conozcan, en partes de superficie esférica.

Hallar las mismas áreas en metros cuadrados conociendo el radio de la esfera expresado en metros.

## CUADRO DE FÓRMULAS

| FIGURAS | FÓRMULAS DE LAS AREAS |
|---|---|
| Cuadrado | $A = l^2$ |
| Rectángulo<br>Paralelogramo | $A = b \times a$ |
| Triángulo | $A = \frac{1}{2} b \times a$ ,, $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ |
| Trapecio | $A = \frac{1}{2}(B + b) \times a$ |
| Polígono regular | $A = p \times a$ ($p$=semiperímetro, $a$=apotema) |
| Círculo | $A = \pi \cdot R^2$ ,, $A = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{C}{2}\right)^2$ ,, $A = \frac{1}{2} C \cdot R$ |
| Sector de $n$ grados | $A = \pi \cdot R^2 \times \frac{n^o}{360^o}$ |
| Pirámide regular | lateral $A = p \times a$ ($a$= apotema pirámide)<br>total $A = p \cdot (a + a')$ ($a'$=apot. de la base) |
| Cono revolución | lateral $A = \pi \cdot R \cdot l$<br>total $A = \pi \cdot R\,(l + R)$ |
| Tronco de cono | lateral $A = \pi\,(R + r) \times l$<br>total $A = \pi\,[R\,(l + R) + r\,(l + r)]$ |
| Prisma regular | lateral $A = 2p \times a$<br>total $A = 2p\,(a + a')$ |
| Cldro. revolución | lateral $A = \pi \cdot d \cdot l$ ($d$ = diámetro)<br>total $A = \pi \cdot d\,(l + r)$ ,, |
| Zona esférica | $A = \pi \cdot d \cdot a$ |
| Superficie esferica | $A = \pi \cdot d^2$ ,, $A = 4\pi \cdot R^2$ |
| Huso esférico | $S = \frac{A}{360}$ de sup. esf.ª ,, $S = \frac{A \cdot \pi d^2}{360}$ |
| Triáng.º esférico | $S = \frac{(A+B+C) - 180}{720}$ de sup. esf.ª, o de $\pi \cdot d^2$ |

## § II

# Relaciones entre áreas

562. **Cuadraturas.** Según se manifiesta en el cuadro de fórmulas que antecede, el área de una figura plana viene generalmente expresada por un producto en que entran dos factores capaces de ser representados por segmentos de recta. Así, el área del paralelogramo es $b \cdot a$, la del triángulo $(\frac{1}{2} b) \cdot a$; la del círculo $(\frac{1}{2} \mathrm{C}) \cdot \mathrm{R}$, en que $\frac{1}{2}$ C puede reemplazarse por un segmento igual a la semicircunferencia *rectificada* (540), etc. Llamando $x$ al segmento medio proporcional entre dichos dos factores, el producto de éstos sería igual a $x^2$ (429), y como $x^2$ representa también el área de un cuadrado cuyo lado sea $x$, dedúcese que, en general:

*Para hallar el lado de un cuadrado equivalente a una figura plana cuya área venga expresada por un producto de dos factores que se representan por segmentos, se halla el medio proporcional entre éstos.*

Por ejemplo: para hacer la *cuadratura* de un trapecio, esto es, para hallar un cuadrado que le sea equivalente, se hallará el medio proporcional *entre la paralela media y la altura* (549) y se construirá un cuadrado cuyo lado sea el medio proporcional dicho.

Ejercicios—Hacer la cuadratura de un paralelogramo, triángulo, trapecio, polígono regular o círculo.

OBSERVACIÓN.—Para la cuadratura de un polígono irregular, se transforma en triángulo (548-7.º) y se hace la cuadratura de éste.

563. **Áreas de figuras semejantes.** *Las áreas de dos figuras semejantes son proporcionales a los cuadrados de dos líneas homólogas.*

Aunque este teorema es general, restringiremos su demostración al caso en que, como hemos dicho, se trate de figuras cuya área se exprese por el producto de dos factores, es decir, que sea de la forma

$$A = m \cdot n$$

Otra figura semejante tendrá por área

$$A' = m' \cdot n'$$

siendo $m'$ y $n'$ líneas homólogas de $m$ y $n$, por lo cual

$$\frac{A}{A'} = \frac{m \cdot n}{m' \cdot n'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{n}{n'}$$

Pero por ser semejantes las figuras, las líneas homólogas están en una razón constante (la de semejanza), es decir $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$ luego sustituyendo en vez de $\frac{n}{n'}$ su igual,

$$\frac{A}{A'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{m}{m'} = \frac{m^2}{m'^2}$$

como quería demostrarse.

Enunciaremos los siguientes casos particulares:

*Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus lados homólogos, y si son regulares también a los cuadrados de los radios, apotemas y perímetros* (531 y siguientes).

*Las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de los diámetros, radios y circunferencias.*

*Las áreas de los polígonos resultantes de cortar una pirámide por planos paralelos; o las áreas de los círculos obtenidos al cortar del mismo modo un cono, son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice.*

Porque dichas distancias tienen igual razón que la de semejanza de los polígonos o círculos mencionados (535).

Observación. —Si dos pirámides o dos conos de bases equivalentes e igual altura se cortan por planos paralelos a las bases trazados a igual distancia de los vértices respectivos, las secciones serán equivalentes. Porque siendo B y B′ las bases, $a$ la altura, $s$ y $s'$ las secciones, y $d$ la distancia al vértice.

$$\frac{s}{B} = \frac{d^2}{a^2} \text{ y } \frac{s'}{B'} = \frac{d^2}{a^2}$$

luego

$$\frac{s}{B} = \frac{s'}{B'}$$

y como *en área* B = B′, será *en área* $s = s'$.

Ejercicios.—Si un cuadrado tiene doble lado que otro ¿cómo es respecto a éste?—Si un círculo tiene por radio la 5.ª parte del otro, ¿qué parte suya es?

564. **Problema.** *Dada una figura plana, construir otra semejante y que esté con aquélla en la razón dada* $\frac{m}{n}$.

Si designamos por $a$ y $a'$ segmentos homólogos de la figura dada y de la pedida, será

$$\frac{\text{Ar. de la fig. pedida}}{\text{Ar. de la fig. dada}} = \frac{a'^2}{a^2} = \frac{m}{n}$$

Basta, pues, hallar un segmento, $a'$, cuyo cuadrado tenga con el del segmento conocido, $a$, una razón igual a $\frac{m}{n}$; problema ya resuelto en el número 492.

EJERCICIOS.—Hallar un cuadrado que sea los $\frac{3}{4}$ de otro conocido, y un círculo que sea $\frac{1}{5}$ de otro dado.

OBSERVACIÓN.—*Numéricamente* es fácil también hallar $a'$ puesto que de

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{m}{n} \text{ sale } a'^2 = a^2 \cdot \frac{m}{n}, \text{ o bien } a' = a \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}$$

EJERCICIO.—Calcular el radio de un círculo igual a $\frac{1}{4}$ de otro dado.

565.—**Problema.** *Dadas dos figuras planas semejantes, hallar otra igual a su suma.*

F. 195.—Sean los círculos B y C de diámetros $b$ y $c$.

CONSTRUCCIÓN.—Con $b$ y $c$ como catetos construyamos un triángulo rectángulo. Su hipotenusa $a$ será el diámetro del círculo pedido A, igual a la suma de B y C.

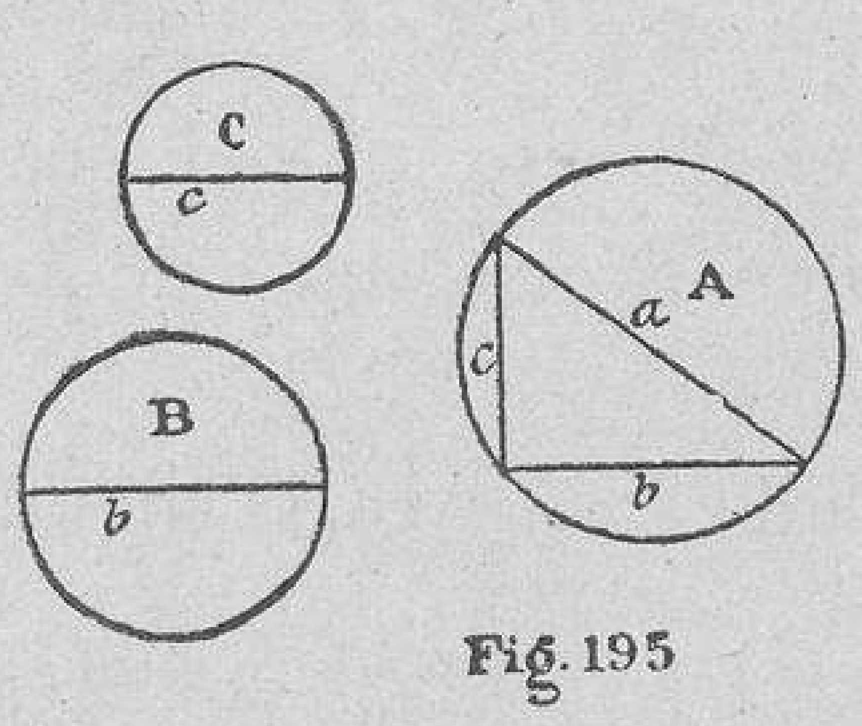

Fig. 195

D.—Por ser los círculos proporcionales a los cuadrados de los diámetros, tendremos: *

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}$$

* A, B, C, $a$, $b$, $c$, representan los *números* resultantes de las medidas de las áreas y de los segmentos en unidades correspondientes.

De donde, según la Aritmética, se puede sacar

$$\frac{A}{a^2}=\frac{B+C}{b^2+c^2}$$

pero por el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$, luego $A = B + C$, como se deseaba.

EJERCICIOS.—Hallar un cuadrado que sea la *diferencia* de otros dos.

Construir un triángulo equilátero *doble* de otro dado.

Demostrar que la suma de las áreas de las partes rayadas *(lúnulas de Hipócrates)* en la figura 196 es igual a la del triángulo ABC. (Se han trazado semicírculos sobre los lados).

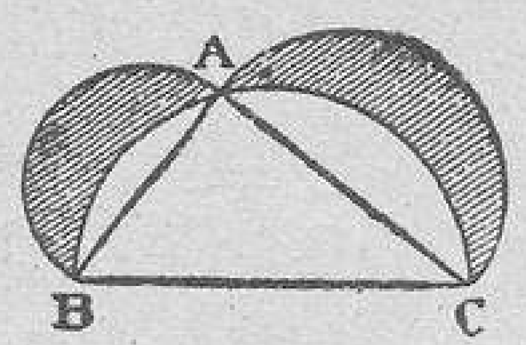

Fig. 196.

566. **Nuevo enunciado del teorema de Pitágoras.**—*El cuadrado* **construído** *sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo* **equivale** *a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.*

Porque si *la longitud* de la hipotenusa es $a$ y las de los catetos $b$ y $c$, los números $a^2$, $b^2$, $c^2$, representarán *las áreas* de los cuadrados construídos sobre los lados, y ya se sabe que $a^2 = b^2 + c^2$.

Pero puede comprobarse materialmente que el cuadrado construído sobre la hipotenusa es suma de los otros dos, del siguiente modo:

Constrúyase un cuadrado de lado $b+c$, ABCD (figura 197).

Restando de él los cuatro triángulos iguales 1, 2, 3, 4, queda el cuadrado $a^2$ rayado (1.ª). Pero si aquellos triángulos se disponen como indica la segunda figura, al restarlos del cuadrado total quedan los cuadrados rayados $b^2$ y $c^2$, luego en efecto: $a^2 = b^2 + c^2$.

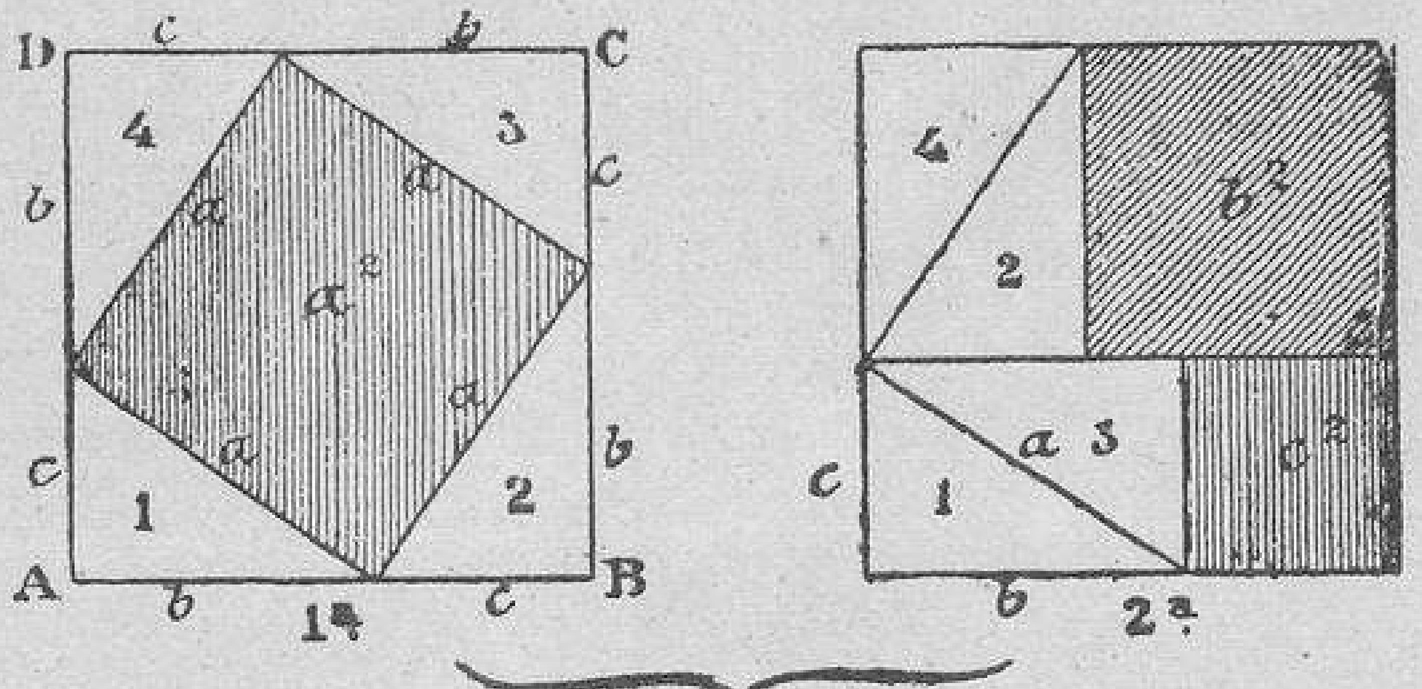

Fig. 197.

567. **División de superficies.—Problema.**—*Dividir un triángulo en partes proporcionales a números o segmentos dados,* m, n, *por paralelas a un lado.*

F. 198.—Sea el triángulo ABC, que quiere dividirse en partes proporcionales a 2 y 3, por paralelas a BC.

CONSTRUCCIÓN.—Dividamos el lado AC en partes proporcionales a 2 y 3 por el punto M. (Lo que, según sabemos, se hace con auxilio de la recta AX (456)). Por M tracemos la perpendicular MN, y entonces, por ser los cuadrados de las cuerdas que parten de los extremos de un diámetro proporcionales a sus proyecciones sobre él (491), será:

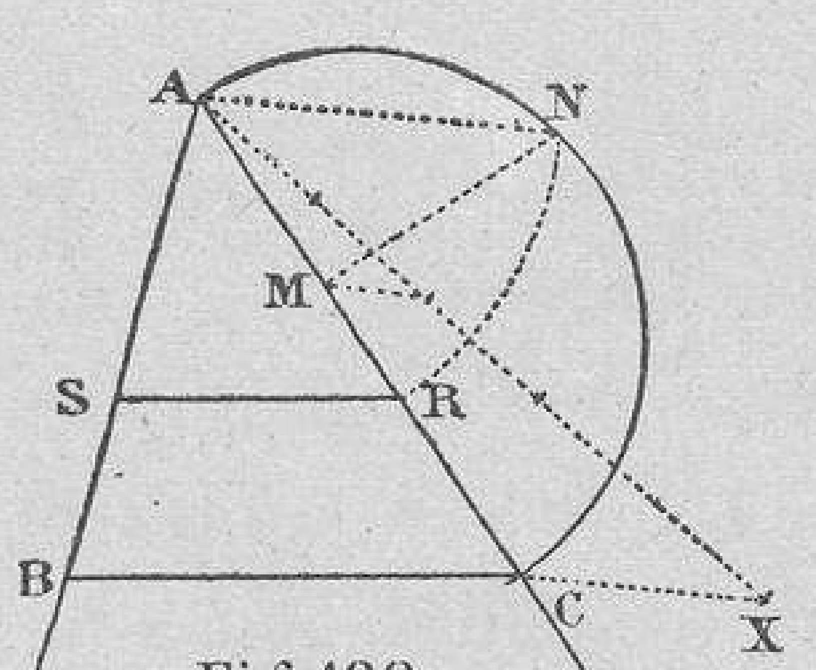

Fig. 198.

$$\frac{AN^2}{AC^2} = \frac{AM}{AC} = \frac{2}{5}.$$

Si, pues, llevamos AN sobre AC en AR, se tendrá:

$$\frac{AR^2}{AC^2} = \frac{2}{5}.$$

Pero, por semejanza de los triángulos ASR y ABC,

$$\frac{\text{ár. ASR}}{\text{ár. ABC}} = \frac{AR^2}{AC^2}, \text{ es decir, } \frac{\text{ár. ASR}}{\text{ár. ABC}} = \frac{2}{5},$$

y de aquí, según reglas de Aritmética,

$$\frac{\text{ár. ABC—ár. ASR}}{\text{ár. ASR}} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2},$$

luego:

$$\frac{\text{ár. trap. SRCB}}{\text{ár. triáng. ASR}} = \frac{3}{2}.$$

568. **Volúmenes.**—*Se llama* **volumen** *la razón entre el tamaño de un cuerpo y el de otro tomado por unidad.* Nosotros tomaremos siempre por unidad de volumen el cubo que tenga por arista la unidad de lon gitud; y así cuando la unidad de longitud sea el metro, la de volúmen será el metro cúbico; si aquélla fuese el decímetro, la de volumen sería el decímetro cúbico, etc.

569. *Cuerpos equivalentes son los de igual volumen aunque su forma sea distinta;* y es claro que si dos cuerpos se componen de partes iguales o de una parte común y otras iguales serán equivalentes. También lo serán si son límites de sumas de infinidad de sumandos equivalentes uno a uno.

570. *El volumen de un cubo es igual al cubo o tercera potencia de su arista.*

Se sobreentiende que midiendo la arista en metros, decímetros, etc., y elevando al cubo *el número* resultante de tal medida se obtiene *el número* que expresa el volumen, referido, respectivamente, a metros o decímetros *cúbicos*.

Observaciones análogas se aplican á los demás enunciados de esta teoría.

F. 199.—Sea el cubo ABCDEFGH y supongamos cada una de las aristas AB, AD, AE dividida en 3 partes iguales.

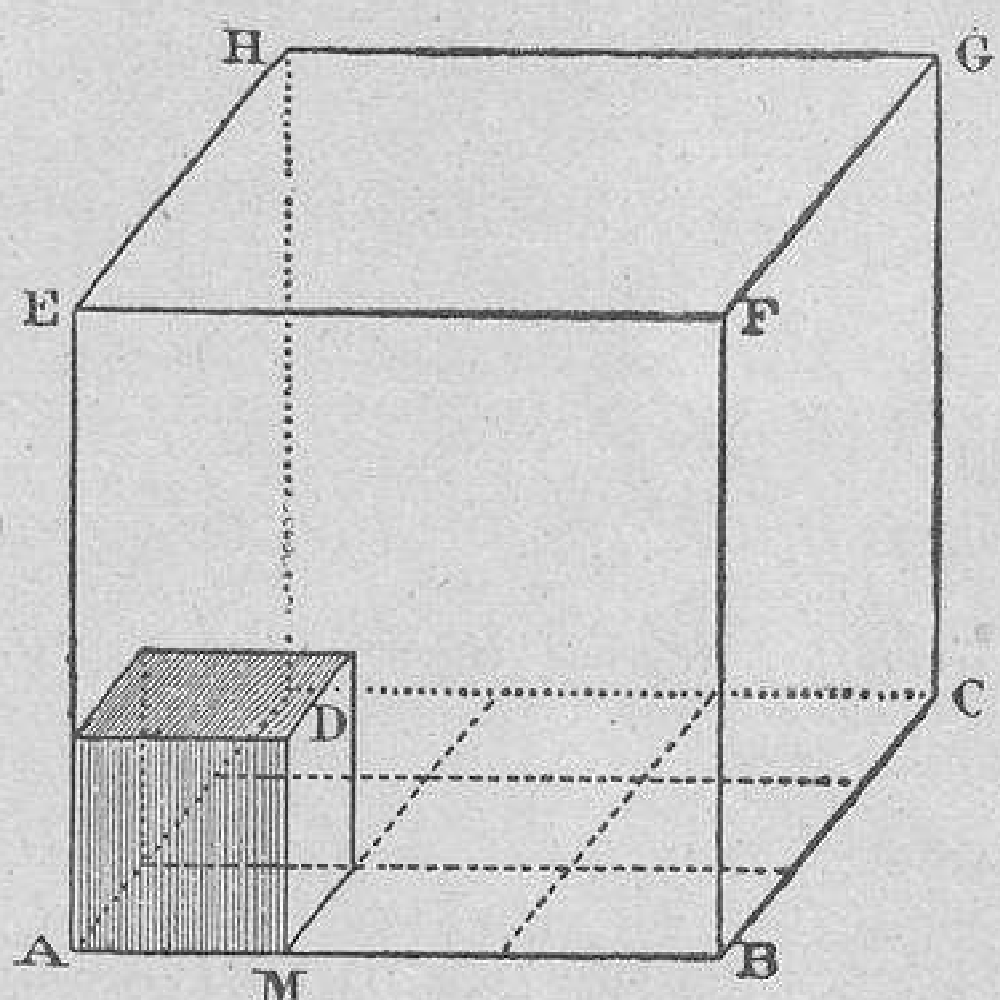

Fig. 199.

D.—El cuadrado ABCD que sirve de base al cubo, quedaría divido (por paralelas a AB y AD trazadas por los puntos de división) en $3^2$ cuadrados iguales (543). Y como por estar AE dividida en 3 partes, sobre cada uno de aquellos cuadrados podrían ponerse 3 cubos como el rayado, el número de los que habría como éste sería $3^2 \times 3 = 3^3$.

Si pues AM fuese un metro, decímetro..., milímetro, el volumen del cubo propuesto sería $3^3$ metros, decímetros..., milímetros cúbicos respectivamente, según se intentaba probar.

**Escolio.** Si V es el volumen de un cubo cuya arista tenga la longitud $l$, y V' el de otro de arista $l'$,

$$\left.\begin{array}{l} V = l^3 \\ V' = l'^3 \end{array}\right\} \text{luego } \frac{V}{V'} = \frac{l^3}{l'^3} \ (1)$$

es decir: *los volúmenes de dos cubos son proporcionales a los cubos (terceras potencias) de sus aristas.*

De la anterior proporción podría obtenerse un término conociendo los otros tres. Así:

$$l^3 = \frac{V \cdot l'^3}{V'} \text{ y } l = \sqrt[3]{\frac{V \cdot l'^3}{V'}} = l' \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{V'}}$$

EJERCICIOS.—1.º Hacer aplicaciones numéricas de la proporción (1).

2.º Hallar la arista de un cubo 64 veces menor que otro.

571. *El volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto de su longitud por su anchura y por su altura* (o de las tres dimensiones).

Léase la observación del número 570.

EJERCICIO.—Demostrar este teorema por un procedimiento que sólo difiere del empleado para el anterior en ser distinto el número de divisiones que se toman en las tres aristas concurrentes.

OBSERVACIÓN.--Aunque las aristas fuesen inconmensurables no traería esto inconvenientes *prácticos*, puesto que el error de la medida puede disminuirse cuanto se quiera tomando una unidad de longitud suficientemente pequeña.

572. **Nuevo enunciado.**—El producto de la longitud por la anchura dá el área del rectángulo que puede servir de base al paralelepípedo, y en consecuencia: *el volumen del paralelepípedo rectangular es igual al producto del área de la base por la altura.*

573. EJERCICIOS.—Probar que los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos son proporcionales a los productos de sus tres dimensiones; o a las bases si tienen igual altura, o a las alturas si tienen igual base, etc. (Véanse los ejercicicios análogos de las áreas).

574. *Un paralelepípedo recto cuya base sea un pa-*

*ralelogramo no rectangular es equivalente a otro paralelepípedo rectangular de igual altura y base equivalente.*

Fig. 200.—Sea el paralelepípedo AG, cuya base es el paralelogramo ABCD. Tracemos la perpendicular BL a CD y construyamos el paralelepípedo rectangular de dimensiones AB, BL y BF que será el AP. Con ello se formarán los prismas triangulares de bases rayadas a derecha e izquierda del cuerpo intermedio ABLPHD.

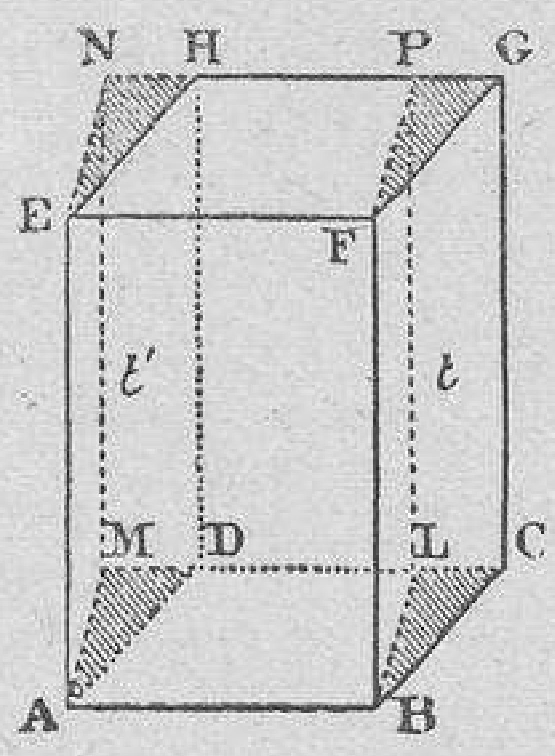

Fig. 200

D.—Los paralelepípedos AG y AP tienen la parte intermedia común, y los prismas triangulares *t* y *t'* son iguales, luego ambos paralelepípedos son equivalentes (569).

La altura BF es la misma, y las bases ABCD y ABLM se sabe que son equivalentes (545).

El volumen viene, pues, dado para ambos paralelepípedos por el producto AB . BL . BF.

Detalles.—La igualdad de los prismas triangulares *t* y *t'* es fácil de establecer, porque las bases BCL y ADM son iguales, y las alturas BF y AE también, por lo cual dichos prismas podrían coincidir.

**Corolario.**—*El volumen de un paralelepípedo recto es igual al producto del área de su base por su altura.*

En la figura se advierte, en efecto, que AB . BL representa el área de la base (546) y BF es la altura.

Ejercicios.—Relaciones de proporcionalidad entre los volúmenes de paralelepípedos rectos.

575. *Cualquier prisma oblicuo es equivalente a otro*

*recto que tenga por base la sección recta del oblicuo, y por altura la arista lateral de este último.*

F. 201.—Sea el prisma oblicuo AF y PQR su sección recta, que le divide en dos troncos, superior e inferior PF y AR.

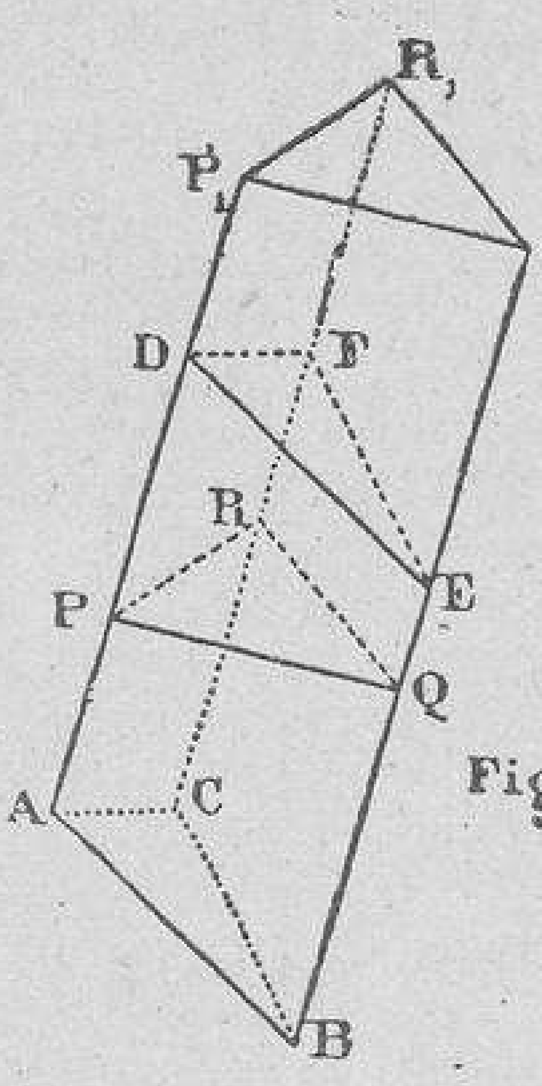



Fig. 201

D.—La inclinación de la arista AP sobre la base ABC, es la misma que la de su prolongación, $DP_1$, sobre la base DEF, paralela a ABC; y lo mismo puede decirse de las demás aristas. Si pues a las aristas del tronco inferior se les imprimiese una traslación rectilínea, hasta que la base ABC coincidiese con DEF, el plano de la sección recta tomaría la posición $P_1 Q_1 R_1$, paralela a la PQR, y se habría formado con los dos troncos del prisma oblícuo el prisma recto equivalente $PR_1$, que cumple con las condiciones del enunciado.

576. **Corolarios.**—*El volumen de un paralelepípedo oblicuo es igual al producto del área de su base por su altura.*

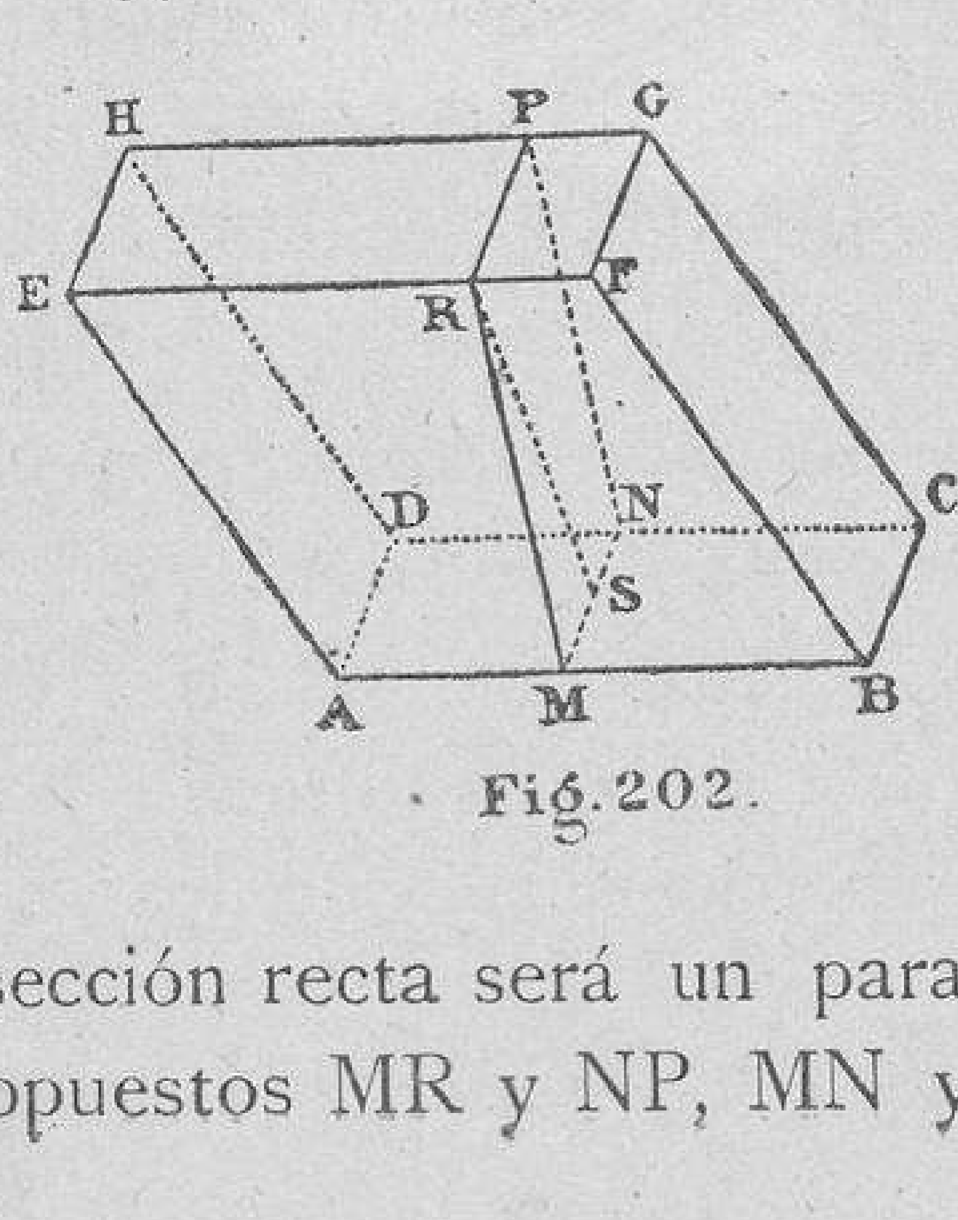



Fig. 202.

F. 202.—Sea el paralelepípedo oblicuo AG, MP la sección recta, y RS la altura de dicha sección.

D.—En primer lugar, la sección recta será un paralelogramo, porque sus lados opuestos MR y NP, MN y RP, son paralelos como intersecciones de las caras paralelas en que se hallan con el plano de la sección recta (306).

La altura RS, además de ser perpendicular a MN lo es a AB, (puesto que inversamente, AB es perpendicular al plano de la sección recta) luego RS es perpendicular a la base ABCD del cuerpo, y, por tanto, altura del mismo.

Considerando ahora provisionalmente como bases del paralelepípedo las BG y AH, dicho paralelepípedo equivale a otro recto de altura AB y base MP (575) el cual tendrá por volumen

$$AB \times \text{área de } MNPR, \text{ o bien } AB \,.\, (MN \,.\, RS),$$

que puede escribirse

$$V = (AB \,.\, MN) \,.\, RS,$$

y como AB . MN expresa el área de la base ABCD, y RS la altura del paralelepípedo dado, el volumen de éste será:

$$V = \text{Area base} \times \text{altura}.$$

577. *Un prisma triangular equivale a la mitad de un paralelepípedo de base doble e igual altura.*

F. 203.—Sea el prisma ABCDEF. Construyamos el paralelepípedo que tiene por aristas AB, BC y BE que será BH, y sean MNPQ la sección recta de éste y MNP la del prisma.

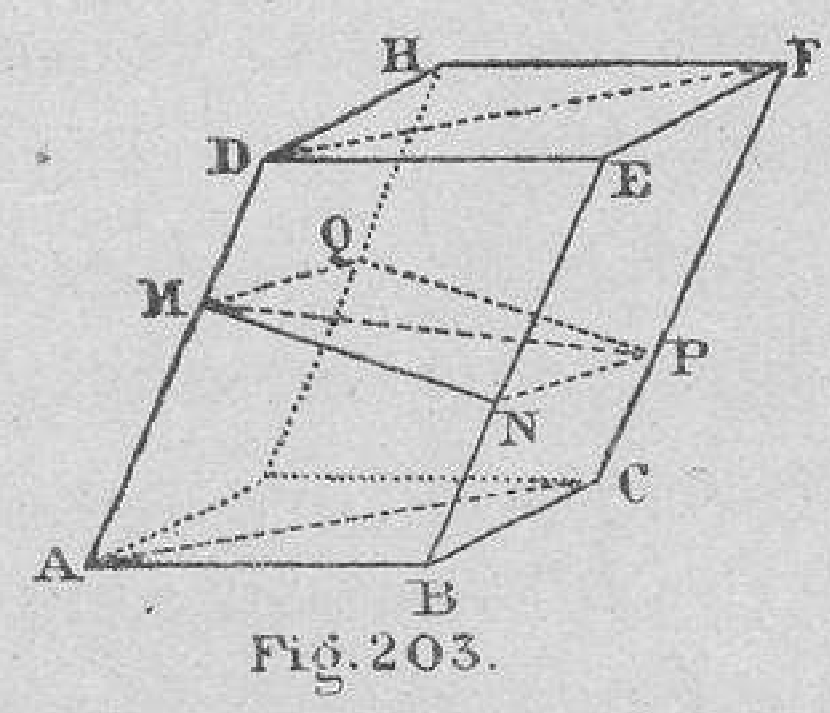

Fig. 203.

D.—El prisma oblicuo equivale a uno recto de base MNP y altura AD; y el paralelepípedo oblicuo BH equivale a otro recto de base MNPQ y altura BE. Pero MNP es mitad de MNPQ luego el prisma recto es mitad del paralelepípedo recto, y, por tanto también el prisma oblicuo es mitad del paralelepído oblicuo. Mas la base de éste es doble de ABC, y la altura de ámbos la distancia entre los planos de las bases; con lo cual se justifica el enunciado.

578. **Corolario**. *El volumen de un prisma triangular es igual al producto del área de su base por la altura.*

Porque el paralelepípedo doble del prisma, tiene también base doble (y la misma altura), luego en ambos se obtiene igual expresión para el volumen, a saber: la que indica el enunciado.

579. *Un prisma cualquiera equivale a una suma de suma de prismas triangulares todos de igual altura que el propuesto y cuyas bases son los triángulos en que pueden descomponerse los polígonos que sirven de bases a aquél.*

(Basta hacer la figura para verlo).

580. *El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto del área de su base por su altura.*

D.—Basta sumar los volúmenes de los prismas triangulares parciales y sacar de factor común la altura. (Detállese).

581. *El volumen de un cilindro es igual al área de su base por la altura; y si es de revolución tendrá por fórmula* $\pi \cdot R^2 \cdot a$, *siendo* R *el radio y* a *la altura.*

D.—Porque se considera el volumen de un cilindro como límite del de un prisma inscripto en él cuando aumenta indefinidamente el número de caras de éste.

La fórmula se desprende de que la base de un cilindro de revolución es un círculo, cuya área está expresada por $\pi \, . \, R^2$.

582. *Una pirámide triangular es el límite de una infinidad de prismas triangulares que tienen por bases las secciones producidas en aquélla por planos paralelos a la base y equidistantes entre sí.*

F. 204.—Sea la pirámide OABC. Tracemos las secciones DEF GHI por los puntos D y G resultantes

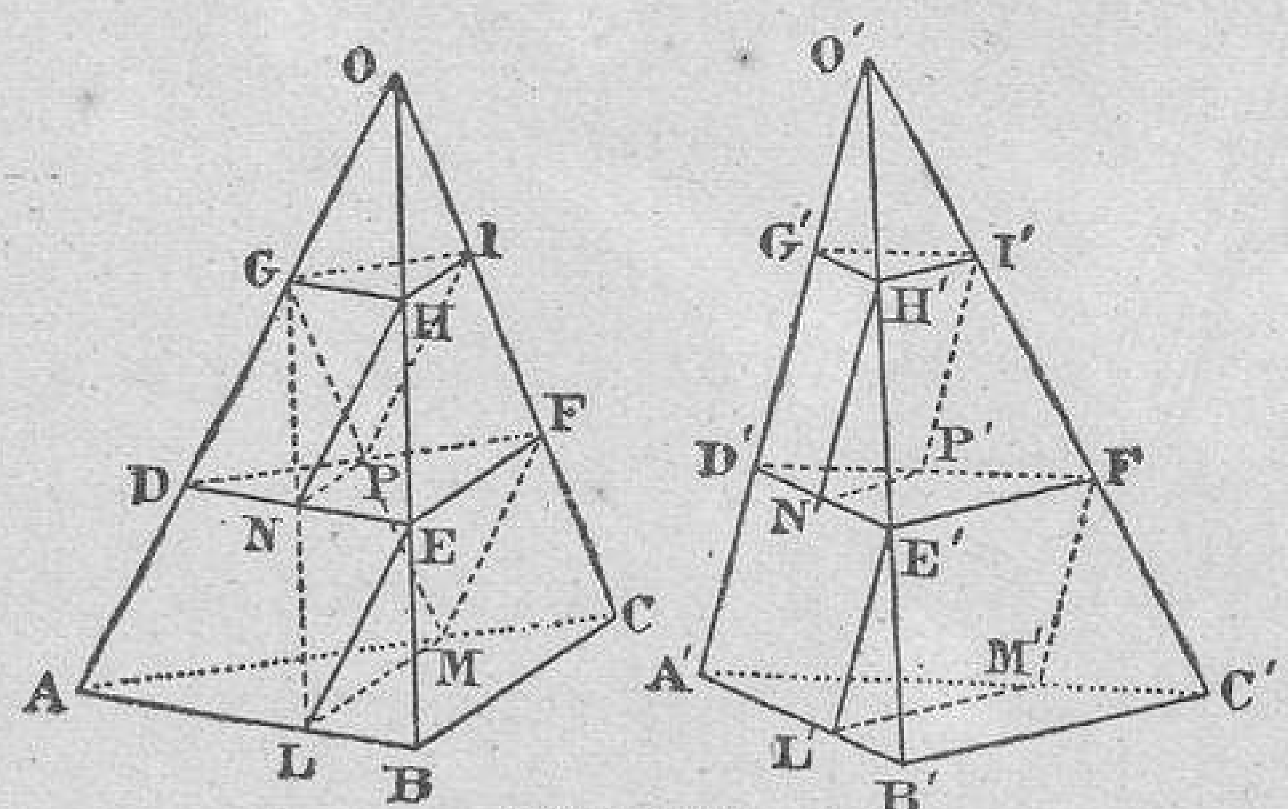


Fig. 204.

de dividir la arista OA en tres partes iguales, y construyamos prismas que tengan por bases superiores dichas secciones y por aristas laterales DA y GD.

D.—Es fácil ver que los puntos G, N, L caen en una paralela a OB, y los G, P, M, en otra paralela a OC.

Los tetraedros AOBC y AGLM tienen, pues, las bases OBC y GLM paralelas, y tanto más próximas una a otra cuanto menor sea la división GO. Luego se puede mirar al primero como límite del segundo cuando GO tienda hacia cero, lo que ocurrirá si se aumenta indefinidamente el número de divisiones hechas en la arista AO. Pero el tetraedro AGLM es evidentemente menor que la suma de los prismas antes construidos, puesto que éstos tienen parte fuera del mencionado tetraedro. En cambio, la suma de los prismas es menor que la pirámide propuesta OABC, luego llamando S a la suma de los prismas, T al tetraedro AGLM, y P a la pirámide propuesta:

$$T < S < P$$

Y como la diferencia entre P y T tiende a cero al aumentar el número de divisiones, la diferencia P—S también, lo que equivale a decir que

$$P = \text{límite de } S.$$

**Detalles.** Que G, N y L caen en una paralela a OB se prueba viendo que GH, NE y LB son segmentos iguales y paralelos lo que exige que los cuadriláteros GHNE y NELB sean paralelogramos, y, por tanto, GN y NL paralelas a OB que formarán la *única* paralela que se puede trazar a OB por el punto N.

583. *Dos pirámides triangulares de bases equivalentes e igual altura son equivalentes.*

F. 204. Sean OABC y O′A′B′C′ dos pirámides de bases equivalentes e igual altura. Si se colocan las bases en un plano y se trazan otros paralelos a él quedarán trazadas a la vez en ambas pirámides los secciones DEF y D′E′F′; GHI y G′H′I′. Formemos como antes los prismas que tienen por bases dichas secciones.

D.—Las secciones DEF y D′E′F′ etc., son equivaentes, porque estarán a igual distancia de los vértices O y O′; (563) luego los prismas formados en una y otra pirámide tendrán bases equivalentes e igual altura, y serán, asimismo, equivalentes. Y como las pirámides son límites de las sumas de los prismas, habrán de ser equivalentes también (569).

584. *Una pirámide triangular es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

F. 205. Sea DABC la pirámide. Construyamos el prisma triangular de aristas BA, BD y BC, que será el AF.

D.—El prisma AF se compone de la pirámide dada y de otra cuadrangular cuyo vértice puede ser D y la base el paralelogramo EACF. Trazando en esta última el plano EDC, se descompone en dos pirámides triangulares equivalentes entre sí, puesto que teniendo el mismo vértice D, y por bases los dos triángulos EFC y ECA, situados en un mismo plano, tienen igual altura y bases equivalentes. Pero en la pirámide DEFC puede tomarse por vértice C y por base EDF, con lo cual tendrá base y altura iguales a las de DABC. Las tres pirámides mencionadas son, pues, equivalentes, y cada una tercera parte del prisma.

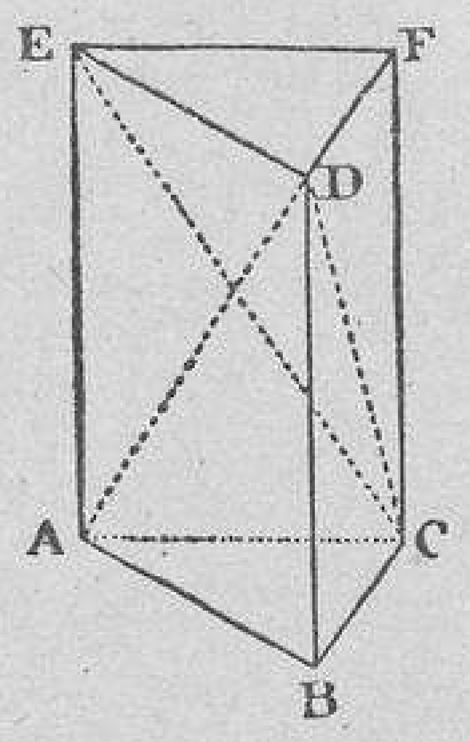

Fig. 205

585. **Corolarios.** 1.° *El volumen de una pirámide es la tercera parte del producto del área de su base por su altura.*

D.—Si la pirámide es triangular, su volumen será el expresado, por ser la pirámide tercera parte del prisma.

Si la pirámide no es triangular puede descomponerse en pirámides triangulares de la misma altura y cuyas bases sean triángulos en que se descomponga la base poli gonal; y bastará sumar los volúmenes de las pirámides parciales y sacar factor común el tercio de la altura para tener el volumen total. Detállese.

EJERCICIOS.—Demostrar que si el vértice de una pirámide se traslada por una recta paralela a la base, el volumen no cambia.

586. **Escolio.** Si tenemos un tronco de piramide de bases paralelas y conocidas, así como su altura, se puede calcular la altura de las pirámides total y parcial cuya diferencia constituye el tronco. En efecto: sean L y $l$ dos lados paralelos de las bases del tronco; $h$ la altura de éste, H la de la pirámide total y $h'$ la de la parcial (fig. 206), con lo cual $h = H - h'$. Se sabe (446) que

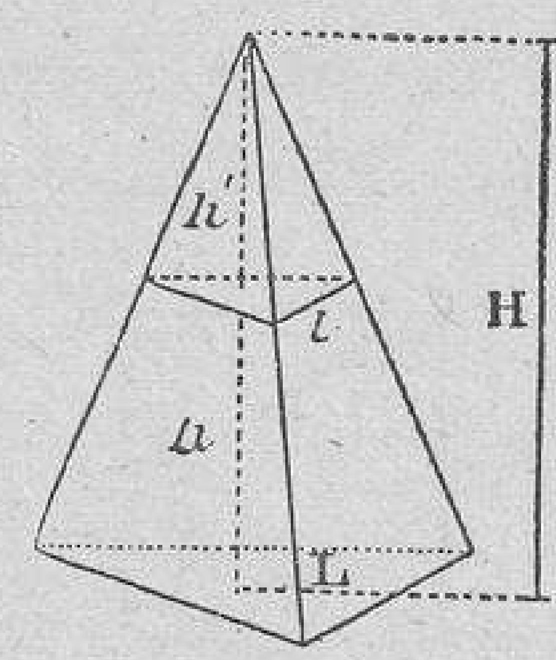

Fig. 206.

$$\frac{H}{h'} = \frac{L}{l} \text{ o bien } \frac{H - h'}{H} = \frac{L - l}{L} \text{ es decir } \frac{h}{H} = \frac{L - l}{L}$$

proporción de la cual se saca el valor de H.

Y es claro que entonces se conoce el de $h'$ puesto que $h' = H - h$.

Luego se puede calcular el volumen de las pirámides total y parcial, y por tanto el del tronco, que es su diferencia.

EJERCICIOS.—Hallar, con datos númericos, volúmenes de pirámides o troncos.

587. *El volumen de un cono es igual al tercio del área de su base por su altura; y tiene por fórmula* $\frac{1}{3} . \pi . r^2 . a$, *siendo* r *el radio y* a *la altura.*

D.—Porque se considera el cono como límite de pi rámides regulares inscriptas al aumentar indefinidamente el número de caras de ellas, y para tomar dicho límite se pondrá en vez del área del polígono que sirve de base a cada una de aquéllas, el área del círculo, siendo la altura la misma.

588. **Escolio.** El volumen del tronco de cono de bases paralelas se halla como diferencia de los volúmenes del cono total y el deficiente, calculando previamente las alturas, para lo cual se emplean las fórmulas

$$\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R} \text{ y } h' = H - h$$

que sólo difieren de las obtenidas para el tronco de pirámide (586), en la substitución de los lados L y $l$ por los radios R y $r$ que son, como aquéllos, proporcionales a las distancias al vértice, de la base y de la sección.

589. *El volumen del sector esférico* (405) *es igual al área de la zona correspondiente, por el tercio del radio.*

D.—Para demostrarlo se considera el sector circular que engendra al sector esférico como límite de un sector poligonal regular ABC, (fig. 207) cuando el número de lados de la quedrada inscripta aumenta indefinidamente. Y para mayor claridad en la determinación del volumen engendrado por el mencionado sector poligonal consideraremos aparte los triángulos que lo constituyen y veremos qué volumen engendran al girar alrededor de AE.

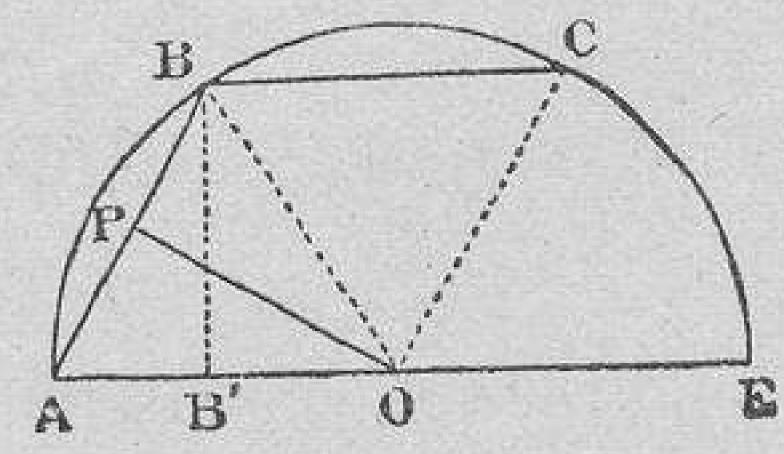

Fig. 207.

*a)* F. 207.—Sea el triángulo ABO con el lado AO sobre el eje de giro. Tracemos la perpendicular BB' y la altura OP que es la apotema del sector poligonal.

Cada uno de los triángulos ABB' y BB'O engendra un cono, y los volúmenes de éstos conos son:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot BB'^2 \cdot AB' \\ \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot BB'^2 \cdot B'O\end{array}\right\} \text{cuya suma es: } \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot BB'^2 \cdot AO$$

Pero esta suma puede escribirse:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot BB' \cdot (BB' \cdot AO)$$

y como el producto encerrado en el paréntesis representa el doble del área del triángulo ABO, que también puede expresarse por AB . OP, substituyendo saldría:

$$\frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot BB' \cdot AB) \cdot OP.$$

Pero en esta forma se advierte que lo comprendido en el paréntesis es el área lateral de la superficie cónica que engendraría el segmento AB, luego, en fin,

$$V = \frac{1}{3} \text{ (área que engendra AB)} \times \text{apotema.}$$

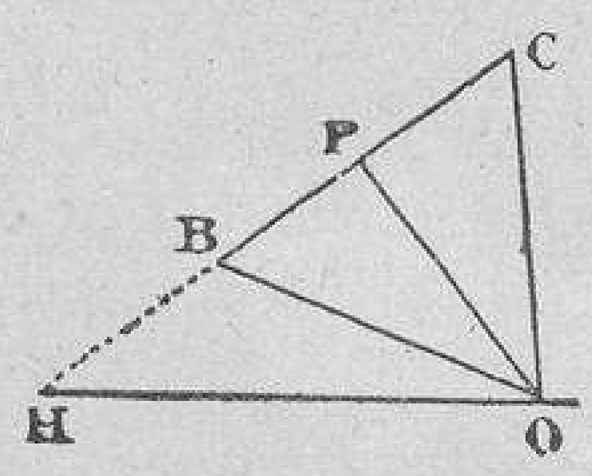

Fig. 208.

*b)* F. 208.—Si fuese el triángulo BOC cuyo lado BC no es paralelo al eje, prolongando hasta H, por el caso anterior

$$\text{Vol. que eng. CHO} = \frac{1}{3} \text{ (ár. que eng. HC)} \times \text{apotema}$$

$$\text{Vol. que eng. BHO} = \frac{1}{3} \text{ (ár. que eng. HB)} \times \text{apotema}$$

y restando

$$V = \frac{1}{3} \text{ (área que engendra BC)} \times \text{apotema}$$

*c)* Sea el triángulo CDO de lado CD paralelo al eje, (figura 209). Entonces

$$\text{Vol. cilindro que eng. CDD'C'} = \pi \,.\, OP^2 \times CD$$

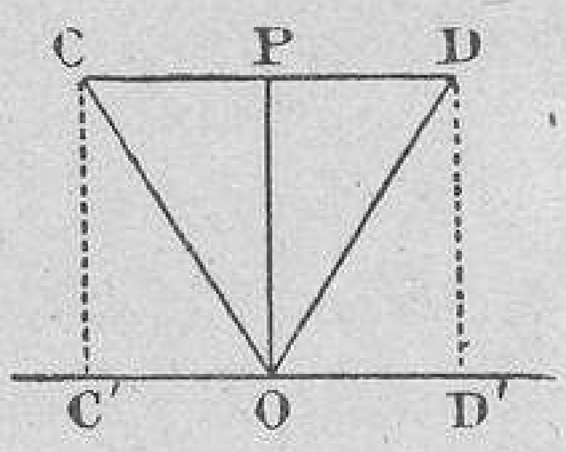


Fig. 209.

Si restamos de este volumen los conos que engendran los triángulos ODD' y OCC' saldrá el volumen pedido.

Pero por ser DD'=CC'=OP y C'D'= = CD los volúmenes de los conos mencionados son:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{3}\,\pi\, OP^2 \times OD' \\[2ex] \dfrac{1}{3}\,\pi\, OP^2 \times OC' \end{array}\right| \text{ y su suma } \frac{1}{3}\,\pi\, OP^2 \times CD.$$

Luego la diferencia buscada es

$$\pi\, OP^2 \times CD - \frac{1}{3}\,\pi\, OP^2 \,.\, CD = \frac{2}{3}\,\pi\, OP^2 \times CD.$$

Lo cual puede escribirse:

$$\frac{1}{3}\,(2\,\pi\, OP \times CD) \times OP$$

y como el paréntesis representa el área del cilindro que engendra CD, como siempre;

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\,(\text{área que engendra CD}) \times \text{apotema}.$$

Consecuencia final.—El volumen que engendra cada uno de los triángulos que componen el sector poligonal OABC (fig. 207) es igual: *al tercio del área que engendra su base por la apotema.*

Al considerar el límite del sector poligonal hay que reemplazar la quebrada ABC por el arco del sector circular, el cual engendra la zona, y la apotema por el radio, luego

$$\text{Vol. sector esférico} = \frac{1}{3}\,(\text{área zona}) \times R.$$

590.—*El volumen de la esfera es igual al área de su superficie por el tercio del radio, siendo su fórmula* $\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3$, *en que* d *representa el diámetro.*

D.—Basta considerar la esfera como sector esférico engendrado por un semicírculo, pues entonces la zona correspondiente sería toda la superficie esférica, y saldría:

$$V\,.\,\text{esfera} = \frac{1}{3}\,(\text{área sup. esférica}) \times R.$$

Pero el área de la superficie esférica es $\pi \cdot d^2$ y $R = \frac{d}{2}$, luego, substituyendo:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3$$

591. **Escolio.**—De la fórmula anterior se saca para valor del diámetro cuando el volumen se conoce:

$$6V = \pi \cdot d^3 \;\text{»}\; d^3 = \frac{6 \cdot V}{\pi} \;\text{»}\; d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$$

EJERCICIOS.—Hacer aplicaciones numéricas de las fórmulas anteriores.

592. **Otros volúmenes.**—El sector esférico engendrado por el circular AOB girando alrededor de AO (figura 210) se compone del cono COB y del *segmento de esfera* separado de ella por el círculo BC. Para hallar el volumen de tal segmento, bastaría, por consiguiente, restar del volumen del sector el del cono.

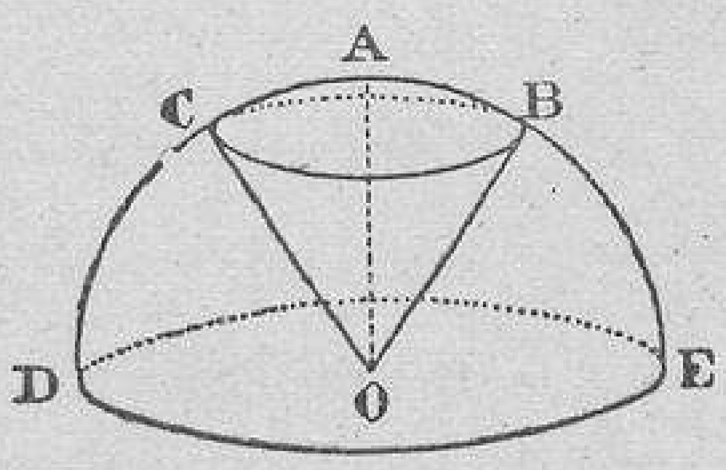

Fig. 210.

Para el *segmento esférico de dos bases,* comprendido entre los círculos BC y DE se hallará el volumen del segmento de una base determinado por DE y se restará de él el otro segmento de base BC.

El volumen de la *cuña o gajo* ABA'B' (fig. 211) se halla por comparación con el de la esfera entera viendo cuántas veces está el ángulo A del huso ABA'B' contenido en 360.º

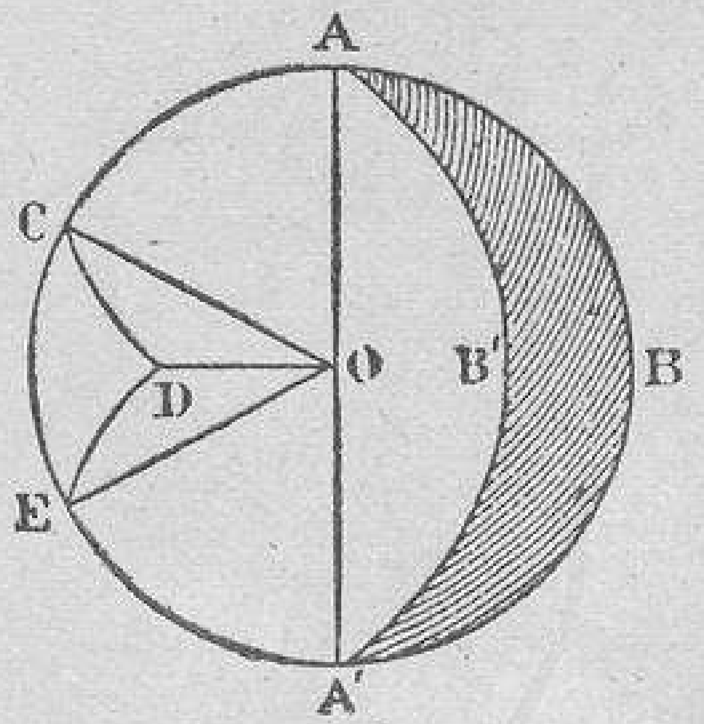

Fig. 211

El volumen de una *pirámide esférica* OCDE, es el tercio del área del triángulo esférico que le sirve de base, por el radio de la esfera.

El volumen de un cuerpo irregular cuya densidad (peso específico) se conozca, se halla, expresado en dm.$^3$, dividiendo el peso del cuerpo, expresado en kgs., por dicha densidad.

593. **Comparación de volúmenes.** *Los volúmenes de figuras semejantes son proporcionales a los cubos de los segmentos homólogos.*

Limitando la demostración a las figuras cuyos volúmenes se expresan por el producto de tres factores (distintos o iguales) que llamaremos $m$ $n$ y $p$ y siendo $m'$ $n'$ y $p'$ los homólogos de la otra figura, la relación de los volúmenes sería

$$\frac{V}{V'} = \frac{m \cdot n \cdot p}{m' \cdot n' \cdot p'}$$

pero como, por la semejanza, $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}$

$$\frac{V}{V'} = \frac{m^3}{m'^3}$$

En particular: *Los volúmenes de dos esferas son proporcionales a los cubos de los diámetros o de los radios.*

EJERCICIOS.—Una esfera de doble diámetro que otra, ¿cuántas veces la contiene? Para que una esfera sea la 27.ª parte de otra, ¿cómo ha de ser su radio respecto del de ésta?

FIN

# INDICE



## PRIMERA PARTE

### CAPÍTULO PRIMERO



### CAPÍTULO II



### CAPÍTULO III



### CAPÍTULO IV



### CAPÍTULO V

CAPÍTULO VI



CAPÍTULO VII



CAPÍTULO VIII



## SEGUNDA PARTE

CAPÍTULO PRIMERO



CAPÍTULO II



CAPÍTULO III



CAPÍTULO IV



CAPÍTULO V



CAPÍTULO VI



CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VIII



CAPÍTULO IX



## TERCERA PARTE

CAPÍTULO PRIMERO



CAPÍTULO II



## CUARTA PARTE

CAPÍTULO ÚNICO