GEOMETRIA
MAGNA
IN MINIMIS,

IN TRES PARTES DIVISA.

PARS I.

DE MINIMIS IN COMMVNI.

PARS II.

DE MINIMIS IN PLANO.

PARS III.

DE MINIMIS IN SOLIDO.

AVTHORE

R. A. P.

IOSEPHO ZARAGOZÁ

VALENTINO, SOCIETATIS IESV.

Prima Editio.

GEOMETRIAE
MAGNAE IN MINIMIS
PARS PRIMA.
PROBLEMA CATHOLICVM RESOLVIT.

CATHOLICO, ET MAXIMO

CAROLO II.

HISPANIARVM REGI SACRATVM.

AVTHORE
R. A. P. IOSEPHO ZARAGOZA VALENTINO, SOCIETATIS IESV,
In Suprema Hispaniarum Inquisitione propositionum Fidei Censori, olim Theologiæ Scholasticæ in Collegijs Balearico, Barcinonensi, & Valentino; nunc in Matritensi Academia Imperialis Collegij Matheseos Professore Regio.

Prima Editio.

TOLETI. Apud Franciscum Calvo, Typogr. Reg.
Anno Domini 1674.

Superiorum permissu.

CATHOLICO REGI
MAXIMO
CAROLO SECVNDO,
HISPANIARVM, AC INDIARVM
MONARCHAE POTENTISSIMO.

GEometriam, stylo, & obiecto Minimam, vt Magna fiat, pedibus V. Maiestatis subijcio, quos si vel semel liceat attingere, eò magnitudinis euecta erit, vt maiorem, nec assequi, nec sperare valeat, cùm in tãta Maiestate præter ætatem, nihil minimum, nihil esse possit non magnum. Meum non fuit opus hoc Regio nomini consecrare, cum tot nominibus ipsum Regi Catholico appareat devinctum. Hispanus Author, & in Acadæmia Regia Professor lucubrationes suas regijs & iussu, & sumptibus excussas, imò & tanti patrocinij spe conceptas, licet ingratitudinis reus audire vellet, sub alienis auspicijs evulgare non posset. Accedit hisce Geometriæ magnitudo, quæ terminorum impatiens tantæ Maiestatis vmbram, scilicet immensam exposcit analo-

gia

gia mirabili. Magna illa in Minimis, hæc verò in minima ætate Maxima. Hispanum Imperium vastissima sua mole in totum orbem difusum, Regio spiritu viuit: Heu quãtus hic erit, qui tanto corpori animando sufficiat! Martis alumni bellicum ardorem supra Martialem spiritum vaticinantur, Musarum Cultores præsidem Apollinem experiuntur, & Iouem alterum regno datum augurantur quotquot regias actiones animi candore conspicuas supra canitiem vident. Gemmant tenellæ arbores, vt in flores vernent, & autumnent in fructus: sed primo vere M. V. gemmas in flores, hos in fructus conuertit prudentiæ calore decoctos, spem scilicèt præuertente gaudio, floridum ver grauido Autumno. Restituta nobis aurea sæcula credimus, cùm in vnũ collectos auguramur Ferdinandos, Carolos, Philippos: illos regimine, ac virtute bellica; hos verò specie, prudentia, pietate, & magnitudine, quorum singulæ dotes ita in V. Maiestate singulares sese omnes ostendunt, vt quæuis ingenita credi, & in tanto Rege principem sibi locum velit, quem dum singulæ ambiunt, iam illum suo quæque iure sibi vẽdicant, & arrogant singulæ. Vix hæc Regia Maiestas duodennis sceptro manum extẽdit,

&

& ostendit negotiorum expeditioni faciem, cùm rerum facies mutata est; ac nouo splendore induta auguratur Hispania pristinum splendorem, quem à sæculo habuit instaurandum. Regius enim candor, indoles aurea, militum amor, & ardor in militarem gloriā propensus, cautus sine astu animus, secretorum auarus, tenax propositi, in munera profusus, & reliquæ animi dotes verè Regiæ spem non solùm faciunt. V. M. magnum futurum, sed verè Maximum esse prædicant, ac Heroes inter enumerādum: cùm puerum per prudentiam, vel prudentiam per puerum regnare summo Imperij bono, & gaudio videamus. Hoc ipsū testatur cœlum ipsum, si nobis stellarum caracteres interpretari liceat. Fortunatus Iuppiter fortunam hanc non volubilem, sed regno stabilem pollicetur. Esto, sileant tamen fortunata sydera, Empyreum miraculo conceptionis sat loquitur. Eo enim Patre genitus est M. V. fracto scilicet viribus, ætate, ac valetudine ingrauescentibus, vt nemo prudens in dubium verterit, quin donū hoc totum cœleste à Superis concessum fuerit Catholico Regno. Timendum igitur nobis nō est, neque sperandum hostibus, superum hoc munus ante diem euolaturum: vnum his timēdum, qui

ar-

armata manu tanti Regis fatum præstolantur, ne serò pœniteant, ni citò exarmentur. Heu quantum sibi comparant hostē, qui enermem aetu aggrediuntur! Moueant igitur arma, insultent si licet. Hispaniæ fortè causam agunt, dum illius perniciem moliuntur. Quiescentē Leonem exagitant, qui Hispanum Achillem è sinu Matris ad martialem arenā prouocant in sui ruinam. Quantum subitis in casibus est ingenium, tantum oppressa mansuetudo induit animū ad vindictam. Temporis, aut corporis quantitate metiri spiritum, error est, & quidem grauis. Magnus spiritus tenello corpusculo in ætate minima præpeditur, nec ideò magnus non est, imò illum excitabit, vt probet maximum emulatio. Hanc non vanam coniecturam, sed vaticinium credo experientia comprobandum. Huic vastissimo Imperio magnam spem facit M. V. amplificandæ gloriæ a Maioribus acceptæ, ac hæreditario iure possessæ, maiora tamen præstiturum spero, cū Aurora ascendens in perfectum diem profecerit. Proficiat vtinam, & ibi culminans sistat cursum, & lumen sæculo integro; imò & æternum perennet.

Iosephus Zaragoza.

OPE-

OPERIS RATIO LECTORI.

GEometria nostro hoc sæculo summum incrementum accepit à clarissimis Geometris, quorum opera æternitati sacrata nostra commendatione non indigent. Alij enim Antiquorum inventa, quæ temporis iniuria perierant, orbi literario restituta dedère, alij Geometriam nouis inventis amplificarunt, quos lubens hic ommitto, ne cui prælato alterius nomine iniuriã irrogare videar, cum inter subtilissima inventa, nec Apollo ipse huic præ alio facilè principem concedet locum: ingenuè tamen, ac religiosè profiteor, me omnes, qui aliqua saltèm noua propositione Geometriam auxerint, summa veneratione excipere, non semèl expertus quamplurima iucũdissima ex vno theoremate sæpius inferri.

Horum exemplo ad noui aliquid audendum excitatus duobus ab hinc annis Minimorum aggressus sum meditationem, qua fortè quarta propositio libri secundi, quem Apollonius de Locis planis, teste Pappo in præfatione libri septimi scripsit, non leuem incrementum accipiet: cùm ea, quæ de punctis in plano, & figuris eiusdem speciei demons-

monstravit Apollonius, ad qualibet puncta in solido utcumque disposita, & ad omnes figuras, vel species dissimiles in hoc opere extensa, & promota sint, ac communi Geometria, methodo scilicet omnibus nuda Elementorum cognitione instructis intelligibili, perspicuè demonstrata.

Primus labor totus fuit in determinando puncto, ex quo minima summa figurarum similium, vel dissimilium erat colligenda specier plana, vel solida à punctis constituta nulla facta commemoratione. Hoc punctum determinatum centrum minimum appellare libuit, quia ex eo minima summa colligitur, & centrum etiam est sphara cuius superficiens locus sit in quo inflexa recta, quarum species datam habeant rationem cuilibet spatio dato, conveniant.

Quo exantlato labore animum applicui ad considerandas proprietates ex centro minimo in determinatis planis ac solidis ortas. Geometria quidem Magna est, & ad summum fastigium ab antiquis, & recentioribus euecta, sed quia illius magnitudo in Minimis apparet etiam, ideò appellãdam censui Geometriam Magnam in Minimis.

Totum igitur opus in tres partes distribuo. Prima agit de Minimis, eorumque centro, & Problema resolvit, quod, cum universale sit, & Catho-

tholico Regi sacratum, Catholicum *dicitur. Secunda autem agit de Figuris planis, & plura de ordinatis non iniucunda concludit. Tertia vero Solida considerat, & ea perficit, quæ in nostro* Euclide Nov-antiquo *scienter ommissa sunt de solidis Regularibus. In fine cuiuslibet Partis problemata adducuntur seorsim, ne praxis speculationem confunderet.*

Hæc totius operis materia, & distributio est quingentis propositionibus demonstrata: harum ordo à principio in finem cuiuslibet partis continuata serie procedit, ne citationum varietas Lectori noctem offunderet. Primum ergo volumen 100. *Secundum* 200. *Tertium* 200. *etiam continet propositiones. Euclidis elementa, quæ passim intra parenthesim citata adducuntur, intelligenda sunt de nostro* Euclide Novo-antiquo, *fas enim esse duxi ad nostrum opus amandare Lectorem, cum potuerim aliorum exemplo communis Geometriæ citationem ommittere.*

Hæc sunt benigne Lector de quibus te monitũ volui, si paralogismum inveneris, illius demonstrationem expecto paratus, ubi primum monitus fuero palinodiam canere, ne errores pertinacia incrementum eccipiant. Si autem omnia ritè demonstrata sint, & opus Geometris non displicere videro ad alia me accingam, & propediem Sphæ-

b 2 *ram,*

ram, & Trigonometriam applicatam orbi literario sistam, quæ secuturæ Astronomiæ sternant viam, quibus accedet Trigonographia Datorum Euclidis non ignobile incrementum, nec manum è tabula amouebo, donec integrum Matheseos cursum Deo fauente perficiam. Vale.

FA-

FACVLTAS ORDINARII.

Imprimatur.

Lic. D. Ioannes de Zeballos, Vic. Tol.

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS

Toletanæ Prouinciæ Societatis Iesv.

Imprimatur. *Didacus de Valdès.*

CITATIONVM EXPLICATIO.

Elementa Geometriæ citãtur eadem prorsus ratione, ac in Euclide Novo-antiquo.
(3.*P.*) Tertium Proœmiale.
(4.*l.*2.) Quarta libri secundi.
(3.*p.*5.) Tertium probl. praxi. 5. Geom. Pract.

Propositiones huius citantur simpliciter, vel addita M. 1. vel M. 2.
(60.*p.*) Sexagesima eiusdem Partis.
(30. M. 1.) Trigesima Partis. 1. Minimorum.
(12. M. 2.) Duodecima Partis 2. Minimorum.

NO-

NOTARVM EXPLICATIO.

△. Triangulum quodlibet.
◺. Triangulum Rectangulum.
▭. vel ▯. Rectangulum quodlibet.
□. Quadratum.
▱. vel ◇. Rhombus.
⏢. vel ⏢. Trapezium.
⬠. Pentagonum quodlibet.
⬡. Hexagonum quodlibet.
+. Plus, vel summa.
—. Minus, vel differentia.
Centr. ff. Centrum figurarum.
Centr ff ff. Centrum figurarum similium.
Centr. ff. dd. Centrum figur. dissimilium.
æq. vel *æqu.* æquantur.

ERRO-

ERRORES IN LITERIS.

Pag.	Lin.	Error.	Corrige.
18.	15.	ABC.	AFG.
18.	19.	BN.	LN.
21.		ABC.	ABD.
23.	9.	BC.	EC.
27.	7.	GA.	GH.
	9.	trandum.	tratum.
32.	18.	(4.p.)	(4.P.)
40.	16.	PQR.	PQS.
48.		(33.p.)	(34.p.)
54.	6.	(18.p.)	(38.p.)
80.	24.	C.D.E.	C.D.
88.	20.	inter se.	inter.
94.	20.	BH.	GH.
	26.	LM.	L.
97.	25.	XZ.	XY.
101.	10.	cum.	cumque.

Pag.	Lin.	Error.	Corrige.
103.	15.	omibus.	omnibus.
105.	2.	FGH.	GH.
108.	15.	QR.	QS.
111.	26.	puncta.	ad puncta.
119.	22.	TT.	FT.
123.	12.	SX.	SZ.
128.	5.	*vb.*	*vn.*
	6.	*an.*	*ao.*
132.	12.	Fig.23.	Fig.36.
	24.	*uz.*	*u.*
134.	14.	Fig.24.	dele.
135.	11.	*ast.*	*st.*
137.	14.	26.&27.	28.&29.
138.	19.	Fig.24.	Fig.36.
	24.	Fig.25.	Fig.37.
140.	24.	GHN.	PQ.

ERRO-

Correcti sunt

ERRORES IN CARACTERIBVS.

Pag.	Lin.	Error.	Corrige.
8		⬠ABP+⬠.	2⬠ABP+2⬠.
34.	11.	−⬠EFH.	+⬠EFH.
117.		+4□SQ.	+□SQ.
132.	18.	⬡.	⬡T.
140.	22.	□Z.	□Y.
142.	22.	+○GM.	+○FM.
159.	18.	+△MP.	−△MP.

GEO-

GEOMETRIA MAGNA IN MINIMIS.

PARS PRIMA.

PROBLEMA CATHOLICUM RESOLVITUR.

CATHOLICO, ET MAXIMO CAROLO II. HISPANIARUM REGI SACRATUM.

******
***
*

CAPVT I.

DE FIGVRIS MINIMIS.

Nihil est in quantitate minimū, si vnum tollatur punctum indiuibisibile, quod dubium est an in magnitudine reperiatur. Reliqua omnia siue spatia, siue corpora sint, Minima dicuntur non absolute, sed respectiue: nempè quorum summa ex certo puncto, vel supra datam rectam, omnium possibilium, quæ iisdem similia efformari possunt, minima est.

Compendij, & claritatis gratia characteribus vtimur ad declarandas figuras iisdem similes, quæ sæpius nominanda occurrunt. △ *Triangulum quodcumque significat.* ◺ *Triangulum rectangulum.* □ *Quadratum.* ▭ *Rectangulum.* ▱ *Rhombum* ⏢ *Trapezium.* ⬠ *Pentagonū.* ⬡ *Hexagonum. Hæc + significat* Plus, *vel summam. Hæc* — Minus, *vt* △ *B* + □ *C. hoc est Triangulum B plus Quadratum C. vel summa Trianguli B & Quadrati C. Similiter* ▭ *D* — ⬠ *E. Rectangulum D, minus Pentagonum E: vel differentia Rectanguli D. & Pentagoni E.*

PROPOSITIO I.

SI recta ſit inæqualiter diuiſa, figuræ ſimiles ex tota recta, & differentia partium duplæ ſunt earum, quæ ex partibus inæqualibus fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt recta AD. inæqualiter diuiſa in B. & ſumatur BE. ipſi BD. æqualis, eritque AE. differentia partium. Dico quaslibet figuras ſimiles ſupra totam AD. & partium differentiam AE. duplas eſſe ſimilium ſupra inæquales partes AB. BD.

DEMONSTRATIO.

QVadrata totius AD. & differentiæ AE. dupla ſunt. Quadratorum ex partibus inæqualibus AB. BD. (2. l. 2.) ſed omnes figuræ ſimiles ſunt in eadem ratione quadratorum; nempè in duplicata ratione laterum homologorum (4. l. 6.) Ergo omnes figuræ ſimiles ſupra totam AD. & differentiam AE. duplæ ſunt ſimilium ſupra inæquales partes AB BD. (1. l. 5.) Hoc eſt $\square$ AD + $\square$ AE. æquãtur 2 $\square$ AB + 2 $\square$ BD. Quod erat demonſtrandum.

Hæc propoſitio eſt 10. *lib.* 2. *Elem.* ad omnes figuras ſimiles extenſa.

PROPOSITIO II.

SI recta sit æqualiter, & inæqualiter diuisa, figuræ similes ex partibus inæqualibus duplæ sunt earum quæ ex dimidia recta, & ex intersegmento fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt recta CF. diuisa æqualiter in G. & inæqualiter in H. Dico quaslibet figuras similes supra inæquales partes CH. HF. esse duplas earum quæ ex dimidia recta CG. & ex intersegmento HG. similes fiunt.

DEMONSTRATIO.

QVadrata ex partibus inæqualibus CH. HF. sunt duplicia quadratorum ex dimidia CG. & intersegmento HG. (3. l. 2.) Sed omnes figuræ similes sunt in ratione quadratorum; nempè in duplicata ratione laterum homologorum (4. l. 6.) Ergo omnes figuræ similes supra CH. HF. sunt duplæ earum, quæ ex CG. HG. fieri possunt (1. l. 5.) scilicèt □CH. + □HF. æquantur 2□CG. + 2□HG. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio est 9. *lib.* 2. *Elem.* ad omnes figuras similes extensa.

PROPOSITIO III.

IN quolibet rectilineo si duo similia inscribantur communi angulo, & æquali excessu.

1. *Maius superat medium gnomone minori, & duplici figura simili ex laterum differentia.*

2. *Maius superat Minus duplici gnomone minori, & duplici figura simili ex differentia.*

3. *Maior gnomon minorem superat, & complementa maiora etiam minora iisdem 2 figuris.*

4. *Complementa maiora superant gnomonem minorem vna simili figura ex differentia.*

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN rectilineo ⌂ ADG. inscripta sunt similia ⌂ ABO. & ⌂ AEQ. æquali basium excessu EB, BD. Dico 1. ⌂. ADG. superare ⌂ ABO. toto gnomone minori EPQI. + 2 ⌂ PYF. Dico 2. ⌂ ADG. superare ⌂ AEQ. in 2 EPQI. + 2 ⌂ PYF. Dico 3. Gnomonem BFOH. superare EPQI. in 2 ⌂ PYF. & similiter complementa DP + PGI. superare BL. + LOK. in 2 ⌂ PYF. Dico 4. complementa DP +. PGI. superare EPQI. toto ⌂. PYF..

DEMONSTRATIO.

1. CVm recta AD. sit inæqualiter diuisa in B. & AE. sit differentia, erunt ⌂ ADG + ⌂ AEQ. ex tota, & differētia, æqualia 2 ⌂ ABO +

2 PYF. hoc est 2 □ AB + 2 □ BD (1. p.) Ergo si vtrinque auferatur commune □ AEQ. erit □ ADG. æquale □ ABO + gnomoni EPQI. + 2 □ PYF. Ergo □ ADG. superat medium □ ABO. toto gnomone minori EPQI. + 2 □ PYF. ex laterum differẽtia PY. vel BD. quæ æquales sunt (7. l. 1.) Quod erat primum, &c.

2. Quia □ ADG. superat □ ABO in EPQI. + 2 □ PYF. sed □. ABO. superat □ AEQ. in EPQI. Ergo □ ABG. superat □ AEQ. duobus gnomonibus EPQI. + 2 □ PYF, &c.

3. Quia □ ADG, superat □ ABO. toto gnomone BFOH. etiam gnomone EPQI. + 2 □ PYF. ex *num*, 1. erit gnomon BFOH. æquale EPQI. + 2 □ PYF. Ergo etiam si ab vtroque gnomone EPQI & BFO. auferantur æqualia □ LP. & □ PF. remanebunt complementa DP + PGI. æqualia complementis BL + LOK. + 2 □ PYF. &c.

4. Ergo si tantum ex maiori gnomone BFOH. auferatur □ PYF. complementa DP + PGI. æqualia erunt gnomoni EPQI. + □ PYF. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Dato quodlibet rectilineo ſi alia duo ſimilia circa diagonium inſcribantur, & aliud fiat ex inſcriptorum baſium differentia: datum, & factum duplicia ſunt inſcriptorum.

2 *Si datum, & factum duplicia ſunt inſcriptorum, factum erit ex baſium differentia.*

EXPOSITIO. Fig. 2.

Si datum rectilineum ⬠ ADF. & circa diagonium AF. inſcripta ſimilia, nempè ⬠ ABP. & ⬠ PYF. cum ex inſcriptione omnia latera ſint parallela (4.l.6.) erunt PY. BD. æquales rectæ (7.l.1.) ſi ergo ſumatur BE. æqualis ipſi BD. vel PY. erit AE. differentia baſium AB. & BD. vel PY. & in *caſu* 1. cadet E. intra AB. & in *caſu* 2. cadet extra: ſi ergo fiat ſupra AE. ⬠ AEL. Dico ⬠ ADF + ⬠ AEL. æqualia eſſe 2 ⬠ ABP. + 2 ⬠ PYF.

DEMONSTRATIO.

In *caſu* 1. cum BD. BE. ſint æquales eſt AD. in- inæqualiter diuiſa in B. & AE. eſt differentia partiũ AB. BD. Ergo ⬠ ADF. + ⬠ AEL. æquãtur 2 ⬠ ABP + 2 ⬠ BD. vel PYF. (1.p.)

In *caſu* 2. cum BD. BE. ſint æquales eſt recta ED. æqualiter diuiſa in B & inæqualiter diuiſa in A. Ergo ⬠. ADF. + ⬠ AEL. partium inæqua-

æqua-

æqualium æquantur 2 ⌂ BD. vel PYF + 2 ⌂ ABP. nempè ex dimidia, & interſegmento (2. p.) Quod erat, &c.

Conuerſa patet. Sit ⌂ ADF + ⌂ Zz. æquale ⌂ ABP. + ⌂ PYF. Dico Zz. eſſe differētiam inter AB. & PY. vel BD. Sit enim differentia AE. Ergo ⌂ ADF. + ⌂ AE. æquantur ⌂ ABP + ⌂ PYF. vt demonſtratum eſt: ſed etiam ex hypotheſi ⌂ ADF + ⌂ Zz. æquātur inſcriptis ⌂ ABP. + ⌂ PYF. Ergo ⌂ Zz. æquatur ⌂ AE. Ergo cū figuræ ſint æquales, & ſimiles congruent (1. p.) & baſis Zz. erit æqualis AE. ſcilicet differentiæ baſium AB. PY. Quod erat demonſtrandū.

PROPOSITIO V.

ISdem poſitis, rectilineum quod ex baſium differentia ſit cum complementis eorum, quæ circa diagonium ſunt, æquantur eis quæ circa diagonium ſunt conſtituta: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN *caſu* 1. & 2. ſunt ⌂ ABP. & ⌂ PYF. circa diagonium AF. & ⌂ AEL. ſit ex differentia baſiū AB. & BD. vel PY. Dico ⌂ AEL. cum complementis DP. PH. æquari ⌂ ABP. + ⌂ PYF. circa diagonium.

DEMONSTRATIO.

QVoniam ⌂ ADF + AEL. æquantur 2 ⌂ AB P. +

P.+2 ⌂PYF. (4.p.) ſed ⌂ADF. componitur ex ⌂ABP+ ⌂PYF+ DP+PH. Ergo ⌂ ABP + ⌂PYF +DP+PH+ ⌂AEL. æquantur 2 ⌂ ABP+2 ⌂PYF. (3.p.) Ergo ſi ex vtraque parte ſemel auferantur ⌂ABP + ⌂ PYF. remanebunt ⌂AEL+complem. DP. PH. æqualia ⌂A BP+ ⌂PYF. Quod erat demonſtrandum.

Econuerſo ſi ⌂Z+DP+ PH. æqualia ſint ⌂ ABP+ ⌂PYF. erit Z. differentia inter AB. PY. Quod demonſtrabitur vt in præcedenti.

PROPOSITIO VI.

SI recta ſit in quaslibet duas figuràs diuiſa, habentes æqualia complementa cum æquali baſium exceſſu: & in ea licet continuata ſumatur quodlibet aliud punctum: figuræ datis ſimiles, quæ ex aſſumpto ad terminos rectæ collocantur ſuperant datas totidem ſimilibus ex interſegmẽto: & ècontra.

EXPOSITIO. Fig. 2.

SIt recta AC. diuiſa in B & ſupra AB ⌂ABO. & ſupra BC ▭BCZ. ſumatur præterea æquales exceſſus BE. BD. & circunſcribatur ſimile ⌂ADG & ſimile ▭CEX. Si complementa DP+PGI. æqualia ſint complementis ER+RX. erunt ⌂ABO. & ▭BCR. figuræ æqualium cõplementorum cum æquali baſium exceſſu.

Insuper in recta AC. licèt continuata sumatur quodlibet punctum E. quod in *casu* 1. est intra terminos AC. & in *casu* 2. extra. Tandem supra AE. fiat ⌂ AEQ & supra CE □ CEM. Dico ⌂ AEQ + □ CEM. superare figuras æqualium complementorum, nempè ⌂ ABO + □ BCZ. duabus figuris similibus ex intersegmēto EB. nempe vno ⌂ EB + □ EB & ècontra.

DEMONSTRATIO.

SVmatur BD. æqualis BE. & circunscribatur ⌂ ADG. eritque ⌂ AEQ. cum complementis DP + PGI. æquale ⌂ ABO + ⌂ PYF. circa diagonium (5. p.) sed complementa DP + PGI. sunt æqualia complementis ER + RX. ex hypothesi: Ergo ⌂ AEQ. + ER + RX. æqualia sunt ⌂ ABO + ⌂ PYF. Ergo si vtrique parti æquali addātur communia, nempe □ CBZ + □ NRM. erunt ex vna parte ⌂ AEQ + ER + RX + □ CBZ + □ NRM. æqualia ipsis ⌂ ABO + ⌂ PYF + □ CBZ + □ NRM. sed □ CEM. componitur ex □ CBZ + □ NRM + ER + RX. Ergo ⌂ AEQ + □ CEM. æquantur ⌂ ABO + ⌂ PYF + □ CBZ + □ NRM. Ergo ⌂ AEQ + □ CEM. superāt ⌂ ABO + □ CBZ. toto ⌂ PYF + □ NRM. sed ⌂ PYF. est supra basim PY. æqualem BD. (7. l. 1.) vel EB. ex cōstructione: tum □ NRM. est supra basim NR. æqualem etiam EB. Ergo

⌂ A

⬠AEQ+▭CEM. ſuperant ⬠ABO+▭CBZ. duabus figuris ſimilibus ex interſegmento EB. nempe ⬠EB+▭EB. Quod erat demonſtrandum.

Econuerſo. Si AEQ. CEM. ſuperant ABO. CBR. duabus ſimilibus ex EB. nempe ⬠EB+▭EB. dico ⬠ABO & ▭CBR. habere æqualia complementa. Sumatur enim BD. æqualis EB. & circunſcribatur ⬠ADG. Ex hypotheſi ⬠AEQ+▭CEX. æquantur ⬠ABO+CBZ+⬠EB+▭EB. ſed ▭CEX. æquatur ▭CBZ+RM. vel ▭EB+ER+RX. ex quibus componitur: ergo ⬠AEQ+▭CBZ+▭EB+ER+RX. æquantur ⬠ABO+▭CBZ+▭EB+⬠EB. Ergo ablatis vtrinque communibus ▭CBZ+▭EB. remanent ⬠AEQ+ER+RX. æqualia ⬠ABO+⬠EB. vel ⬠LP. ſed ⬠ABO. componitur ex ⬠AEQ+⬠LP+BL+LOK Ergo ⬠AEQ+ER+RX. æquantur ⬠AEQ+BL+LOK+2⬠LP. Ergo ablato communi ⬠AEQ. remanent complementa ER+RX. æqualia ipſis BL+LOK+2⬠LP. ſed etiam complementa DP+PGI. æquantur BL+LOK+2LP (3.p) Ergo complementa ER+RX. æquantur complementis DP+PGI. Ergo ⬠ABO. & ▭CBZ. habent æqualia complementa. Quod erat, &c.

PROPOSITIO VII.

SI ex eodem rectæ puncto vtrinque ſint conſtitutæ figuræ, vt ſumma ſummæ æqualia habeat complementa: ſimiles figuræ ex quolibet alio rectæ puncto ſuperabunt datas totidem figuris ſimilibus ex interſegmento: & ècontra.

EXPOSITIO. Fig. 3.

SIt recta GC. & in ea punctum B. & ad vnam partem ſupra BA. BG ſint conſtitutæ figuræ, & aliæ ſupra BK. BC. ita vt ſumma complemẽtorum figurarum BA. BG. æqualis ſit ſummæ complementorum figurarum BK. BC. & aſſumatur in recta quodlibet aliud punctum E. Dico figuras datis ſimiles ſupra EA EG. EK. EC. ſuperare datas ſupra BA. BG. BK. BC. totidem figuris ijſdem ſimilibus ex interſegmẽto BE.

Claritatis gratia diuidantur figuræ, & ſint ſupra BA. ſemi circulus: ſupra BG. triangulum æquilaterum: ſupra BK ſemi ellipſis: & ſupra BC. triãgulum rectangulum. Et ſimiliter ſupra EA. EG. EK EC. prout in figura apparet.

DEMONSTRATIO.

QVoniam △L. cum complemento F. æquatur △H + △I. circa diagonium (5. p.) & T + R. æquatur S + Z (5. p.) ſed complementa

F +

F+R. æqualia sunt N+Q. ex hypothesi: Ergo △L+T+N+Q. æquantur △H+I+S+Z: Ergo si vtrique parti addantur communia M +Y+P+V. erunt etiam L+T+N+Q+M +Y+P+V. æqualia ipsis H+I+S+Z+M+ Y+P+V. sed M+Y+N. componunt X. & P +Q+V. componũt O. Ergo L+T+X+O. æquantur H+I+S+Z+M+Y+P+V. Ergo L+T+X+O. superant H.M.S P. in quatuor figuris I.Y.Z.V. sed L.T.X.O. sunt figuræ datis similes ex EC. EK. EA. EG. & figuræ H. M. S. P. sunt ex BC. BA. BK. BG. & figuræ I. Y. Z. V. sunt omnes ex intersegmento BD. vel BE. Ergo figuræ ex puncto assumpto E. superant datas ex B totidem figuris similibus ex intersegmento EB. Quod erat demonstrandum.

Eadem est demonstratio licet plures sint in vna parte, quàm in alia.

Conuersa etiam ordine retrogrado demonstratur sicut in præcedenti, & ne actum agere videar demonstrationem ommitto.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Figuræ quæ cum æquali baſium exceſſu habent æqualia complementa, minimæ ſunt ex ſimilibus, quæ ad baſium terminos conſtitui poſſunt: idemque eſt de ſumma ad ſummam, & è conuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 2.

Sint ⌂ABO & ▭CBZ æqualium complementorum: & baſes in directum poſitæ habeant commune punctum B. Dico illas eſſe omniũ minimas, quæ ad terminos A. C. ipſis ſimiliũ conſtitui poſſunt.

DEMONSTRATIO.

SVmatur in AC. quodlibet punctum E. & ⌂AEQ + ▭CEX. ſuperabunt ⌂ABO + ▭CBZ vno ⌂EB + ▭EB (6. p.) Ergo ⌂ABO + ▭CBZ. ſunt omnium minima. Idem demonſtrabitur de ſumma ad ſummam, & de vna figura ad aliarum ſummam ex 7. p. Quod erat, &c.

E conuerſo ſi ⌂ABO, & ▭CBZ. ſunt omniũ minimæ, dico habere æqualia complementa: aliter habeant ⌂AEQ. & ▭CEX. æqualia cõplementa: Ergo ⌂ABO + ▭CBZ. ſuperarent ⌂AEQ + ▭CEX. duabus ſimilibus figuris ex interſegmento EB. (6. p.) Ergo ⌂ABO. & ▭CBZ. non eſſent minimæ cõtra Hypotheſim.

Ea-

Eadem est demonstratio de summa ad summam, &c.

PROPOSITIO IX.

Figura, vel summa quæ cum eadem tertia figura, vel summa sunt minima, etiam inter se minimæ sunt.

2. *Si duæ figuræ, vel summæ duabus alijs inter se minimis, seorsum minimæ sint, etiam inter se minimæ erunt omnes.*

EXPOSITIO.

Sint figuræ A. B. C. D. &c. si A. & B. sint ipsi C. minimæ dico esse inter se minimas. Tum si A. sit minima C. & B. sit minima D. & C. D. minimæ fuerint dico A. B. C. D. omnes esse inter se minimas.

DEMONSTRATIO.

Cum A. & B. sint minimæ C. habent cum illa æqualia complementa (8. p.) Ergo & inter se habent æqualia complementa (3. p.) Ergo sunt minimæ inter se (8. p.)

2. Cum C. D. supponantur minimæ, & A. sit minima C. erit etiam minima ipsi D. similiter B. & C. Ergo etiam A. & B. &c. Eadem est demonstratio de summa ad summam, vel de vna figura ad aliarum summam.

PRO-

PROPOSITIO X.

Triangula, vel parallelogramma æquè alta, habent æqualia complementa, & sunt minima, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 4.

Triangula ABC. BDE. habent æqualem altitudinem, nempè sunt vel possunt esse inter easdem parallelas (8. l. 1.) dico illa esse interse minima: & si sunt inter se minima, dico habere æqualem altitudinem. Idemque est de parallelo gammis.

DEMONSTRATIO.

Sumantur AI. DF. æquales excessus basium: & sint IK. FH. lateribus AC. DE. parallelæ: complemēta, vel parallelo gramma AL. DG. inter parallelas, & supra æquales bases AI. DF. sunt æqualia (8. l. 1.) Ergo triangula ABC. BD E. cùm habeant æqualia complementa sunt minima (8. p.) Idem est de parallelogrammis cum sint triangulorum dupla (8. l. 1.)

Cōuersa patet: quia si sunt minima habent æqualia complemēta (8. p.) quæ sunt parallelogramma cum æquali basi, vel excessu: Ergo habent æqualem altitudinem (8. l. 1.) &c.

PRO-

PROPOSITIO XI.

SI Triangulum habeat duplam parallelogrammi altitudinem, sunt inter se figuræ minimæ, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 5.

TRiangulum ABC. habeat duplam altitudinem parallelogrammi DF. dico esse figuras minimas: & si ABC minimum sit ▭ DF. dico triangulum ABC. habere duplam altitudinem parallelogrammi DF.

DEMONSTRATIO.

Sumantur DG. AM. æquales basium excessus: & sit BEI. diameter, & GI. IL. parallelæ ipsis DEK. FEH. & MP. parallela AC. Complementa GE. EL æquantur (4.l.6.) Sed ▭ AO. est duplum GE cùm habeat duplam altitudinẽ supra basim AM. æqualem DG (8.l.1.) Ergo complementum AO. æquatur complementis GE. EL. Ergo cum ABC. & DF. habeant æqualia complementa, erunt figuræ minimæ (8.p.) Quod, &c.

Econuerso. Si ABC minimũ sit DF. est AO. æquale LE+EG (8.p.) hoc est 2 EG. Ergo cùm bases sint æquales MA. DG. erit altitudo OA. dupla GE. (8.l.1.)

PROPOSITIO XII.

SI in quolibet Polygono diagonium cum basi, & latere faciat triangulare segmentum, cuius altitudo sit ad cuiusvis trianguli altitudinẽ, vt segmentum triangulare ad totum Pylogonum; hoc, & triangulum erunt inter se minima, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SIt ⌂ ABCDE. & diagonium ACN. faciens segmentum triangulare ABC. cuius altitudo sit TI. & sit quodlibet △AFG. cuius altitudo IH. Si altitudo IT. triangularis segmenti ABC. sit ad altitudinem IH. Trianguli AFG. vt segmentum ABC. ad ⌂ ABCDE. Dico △ ABC. & ⌂ ABCDE. esse figuras minimas supra basium summam FB.

DEMONSTRATIO.

SVmantur BL. & FK. æquales, & ductis parallelis BN. NQ. QR. erit circunscriptum ⌂ ALNQR. & similiter inscribatur ⌂ CMNOP. & ducatur KHS. parallela FG.

Complementum LC. ad summam complementorum LC+CQE. est vt segmentum ABC. ad Polygonum BCDE (4. l. 6.) vel ex constructione vt IT. ad IH. sed parallelogrammum FZ. ad FH. est vt altitudo IT. ad IH. (1. l. 6.)

6.) Ergo vt LC. ad LC+CQE ita FZ. ad FH. (1.l.5.) & alternando: vt LC. ad FZ. ita LC+CQE ad FH (4.l 5.) ſed parallelogramma LC. FZ. ſupra æquales baſes FK. BL. & inter parallelas IL. TM. æquantur (8.l.1.) Ergo etiam cõplementa LC+CQE. æquantur complemento FH (2.l.5.) Ergo △FAG. & ⌂ABCD. cum habeant æqualia complementa, ſunt inter ſe figuræ minimæ (8.p.) Quod, &c.

E conuerſo. Si △FAG. & ⌂ABCD. ſint minima, erit complementum FH. æquale complementis LC+CQE (8.p.) & FZ. æquale LC. vt FH. æquale LC+CQE. ſed vt IT. ad IH. ita FZ. ad FH (1.l.6.) Ergo vt IT. ad IH. ita LC. ad LC+CQE (2.l.5.) hoc eſt ita ſegmentum ABC. ad Polygonum ABCDE (4.l.6.) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

QVadrilaterum habens duo latera parallela eſt ad triangulare ſegmentum, vt ſumma eorundem laterum ad latus quod eſt in triangulo: & ſegmenta ſunt vt latera parallela: & è conuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 7.

IN ⌂ ABCD. ſi AD. BC. ſint latera parallela, & diagonium BD. vel AC. faciant triangularia ſegmenta. Dico totum ▭ ABCD. ad △ ABD. eſſe vt AD+BC. ad AD. latus △ ABD. vel ▭ ABCD. eſſe ad △ ABC. vt AD+BC. ad BC. latus △ ABC. Item ADB. ad BDC. eſſe vt AD. ad BC.

DEMONSTRATIO.

QVoniam △ ABD. & △ BCD. ſunt inter parallelas AD. BC. ſe habent vt baſes AD. BC. (1. l. 6.) Ergo etiam componendo ſumma △ BCD+△ BAD. erit ad △ DAB. vt ſumma laterum BC+DA. ad DA (4. l. 5.) & △ ADC+△ ABC. ad △ ABC. vt AD+BC. ad BC. Quod erat demonſtrandum.

E conuerſo Si ſegmentum ADB. ad BCD. ſe habet vt AD. ad BC. dico AD. & BC. eſſe latera parallela. Fiat enim BE. æqualis AD. & ducatur DE. BED. ad BCD. eſt vt BE. ad BC (1. l. 6.) hoc eſt vt AD. ad BC. ſed etiam ex hypotheſi triangulum ADB. ad BCD. eſt vt AD. ad BC. Ergo △ ADB. æquale eſt △ BDE (2. l. 5.) Ergo cum habeant æquales baſes AD. BE. erunt inter parallelas (8. l. 1.) Ergo AD. BE. ſunt parallelæ. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

IN quolibet Trapezio recta per angulum diagonio parallela ſecat latus continuatum in ratione Trapezij ad triangulare ſegmentum, & in ratione ſegmentorum inter ſe.

EXPOSITIO. Fig. 8.

SIt ⏢ ABCD. & diagonium BD. & ex angulo C. ducatur CE. ipſi BD. parallela, quæ occurrat lateri AD. continuato in E. Dico ſegmentum △ABC. ad △BDC. eſſe vt AD. ad DE. & etiam △ABC. ad ⏢ ABCD. eſſe vt AD. ad AE.

DEMONSTRATIO.

SIt recta AGH. perpendicularis vtrique parallelæ BD. CE. & erit GH. altitudo trianguli BDC. & GA. altitudo trianguli BDA. Ergo cum baſis BD. ſit communis △BDA. & △BDC. erit △BDA. ad △BDC. vt altitudo AG. ad altitudinem GH (1.l.6.) ſed AG. ad GH. eſt vt AD. ad DE (2.l.6.) Ergo △BDA. ad △BDC. eſt vt AD. ad DE (1.l.5.) Ergo componendo △BDA. ad △BDA + △BDC. hoc eſt ad ⏢ ABCD. erit vt AD. ad AD + DE (4.l.5. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

PEntagonum regulare est ad triangulare segmentum, vt summa laterum huius ad latus ipsius pentagoni.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SIt ⬠ABCDE. & diagonium CE. Dico ⬠ABCDE. ad segmentum △CDE. esse vt summā laterum △CDE. ad latus ⬠ABC. hoc est vt CD.+DE+EC ad CD.

DEMONSTRATIO.

DVcatur diagonium CA. & descripto arcu DF. iungatur EF. cum arcus DE. EA. sint æquales ex æqualibus chordis (2. l. 3.) etiam anguli DCE. ECA. sunt æquales (3. l. 3.) latera vel radij CD. CF. etiam æquantur: & CE. latus commune est △DCE. & △ECF. Ergo sunt triangula omninò æqualia (4. l. 1.) sed △AEC. ad △DCE. vel ad △FEC. est vt AC. ad FC (1. l. 6.) hoc est vt EC. ad DC. & △ABC. ad △DCE. est vt CB. ad DC. vel ED. ad DC. & etiam △DCE. ad △DCE. est vt DC. ad DC. Ergo componēdo △ABC+△ACE+△EDC. ad △EDC. est vt DE+EC+CD. ad DC (4 l. 5.) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

HExagonum regulare ad triangulare segmentum est in ratione sextupla.

DEMONSTRATIO. Fig. 10.

SIt ⬡ ABE. & diagonium CE. Dico totum ⬡ ABE. ad △ EDC. esse vt 6. ad 1.

Ductis enim AE. AC. tum ex centro GA. GE GC. & fient 6. triangula, quæ supra æquales bases AE. BC. CA. habent reliqua latera æqualia, ex ipsa Hexagoni constructione: Ergo omnia 6. triangula erunt æqualia (4. l. 1.) Ergo totum Hexagonum ABCDEF. ad △ EDC. erit vt 6. ad 1. vel sextuplum. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

LIcet ratio Pentagoni, vel Hexagoni ad suũ triangulare segmentum, vniuersaliter determinetur etiam pro omnibus Polygonis irregularibus in sequenti propositione: Determinationes istæ speciales omittendæ non fuere, quia in Minimorum praxi earum vsus, facilior, & expeditior est.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

IN quolibet Polygono si ex angulis continuentur diagonijs parallela in continuata latera, determinant segmentorum rationes; & rationem Polygoni ad triangulare segmentum.

EXPOSITIO. Fig. 11.

SIt Polygonum Heptagonum ABEG. & diagonia BD. BE. BF. BG. Ducatur CH. parallela BD. & HI. ipsi BE. & IK. ipsi BF. & KL. ipsi BG. Iterùm DR. parallela BE, &c. prout in figura apparet. Dico △BCD. ad △BDE. esse vt LM. ad MN. & △BDE. ad △BEF. esse vt MN. ad NO. &c. & Heptagonum ABEG. ad segmētum △ABG. esse vt tota AL. ad latus AG.

DEMONSTRATIO.

IN Trapezio BCDE. est △BCD. ad △BDE. vt DH. ad DE (14. p.) hoc est vt IR. ad RE. vel KQ ad QP. vel LM. ad MN. ex parallelismo (2. l. 6.)

Iterùm in trapezio BDEF. est △BDE. ad △BEF. vt RE. ad EF (14. p.) vel vt QP. ad PF. vel vt MN. ad NO (2. l. 6.)

Rursus in ⏢ BEFG. est △ BEF. ad △BFG. vt PF. ad FG (14. p.) vel vt NO. ad OG (2. l. 6.)

Tandem in Trapezio ABFG. est △BFG. ad △ABG. vt OG. ad GA (14. p.)

Ergo

Ergo componendo summa triangulorum, nempè △BCD+△BDE+△BEF+△BFG+△ABG. ad triangulum ABG. erit vt summa rectarum, nempè vt LM+MN+NO+OG+GA. ad ipsam GA (4. l. 5.) sed summa triãgulorum est totum Heptagonum, vel Polygonum ex ipsis compositum: & summa rectarũ est tota recta AL. ex ipsis composita: Ergo totum Polygonum Heptagonum ABCDEFG. ad triangulare segmentum ABG. est vt tota recta AL. ad latus AG (2. l. 5.) Quod erat, &c.

CONSECTARIA.

PAralielæ ex primo angulo C. nempe CH. HI. IK. KL. determinant Polygoni rationem seclusis alijs.

2. Cuiusvis trianguli ad quodlibet aliud ratio determinatur inter segmentis correspondentibus. Sic ratio △BDE ad △BFG. est vt MN. ad OG. &c.

PROPOSITIO XVIII.

SI Triangulum habeat æqualem altitudinem cum termino parallela determinantis rationem Polygoni ad triangulare segmentum, est Triangulum Polygono minimum.

2 Et si habeat æqualem basim erit Polygono æquale.

EXPOSITIO. Fig. 12.

SIt ⌂ ABCDE. & CF. FG. determinent rationem ⌂ ABCDE ad △ ABE. vt AG. ad AE (17. p.) Ducta GI. basi AB. parallela. Dico quodlibet triangulum inter AB. GI. constitutum, vel habens altitudinem perpendiculi GH. esse minimum Polygono ⌂ ABCDE.

Et si triangulum ABG. habeat eandem basim AB. vel æqualem, & sit inter præfatas parallelas ABGI. dico Triangulum esse Polygono etiam æquale.

DEMONSTRATIO.

SIt EO parallela BH, eritque OH. altitudo △ ABE. sed GH ad HO. est vt GA. ad EA (2 l 6.) scilicèt vt ⌂ ABCDE. ad △ ABE (17 p.) Ergo cum GH. altitudo trianguli HAG. ad HO. altitudinem segmenti △ ABE. sit vt ⌂ ABCDE. ad △ ABE. erit △ HAG. minimum ipsi ⌂ ABC DE (12. p.) Quod eadem ratione concluditur

de

de quolibet alio triangulo inter parallelas GI. HB. vel æquæ alto: Ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

2. Habeat Triangulum ABG. æqualem basim AB. vel eandẽ ipsius Polygoni: erit Triangulum ABG. ad Triangulare ſegmentum AB E. vt altitudo GA. ad altitudinem OH (1.l.6.) vel vt GA. ad EA. hoc eſt vt ⌂ ABCD. ad idem triangulum AB E. vt modo demonſtrandum eſt: Ergo cum Triangulum ABG. eandem habeat rationem ad triangulum ABE. quam Polygonum ABCD. ad idem triangulum ABE. erit Triangulum ABG. æquale Polygono A B CDE (2.l.5.) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

SI in eodem Polygono ex vtroque latere ſupra baſim parallela determinent rationẽ Polygoni, ſecabunt latera oppoſita in eadem altitudine: vel quæ iungit determinationes eſt baſi parallela.

EXPOSITIO. Fig. 12.

SIt ⌂ ABCDE. & ex A ſint diagonia AD. AC. eiſque parallelæ EQ. QS. tum ex B. ſint diagonia BD. BE. ipſiſque parallelæ CF. FG. Dico puncta G. S. eſſe æquè alta, & GS. parallelam eſſe baſi AB.

DEMONSTRATIO.

COntinuata vtrinque basi AB. ducantur ex G. & S. quælibet rectæ GH. SX. facientes triangula HAG. BXS. Ergo △HAG. cum habeat æqualem altitudinem cum pũcto G. est minimum ⬠ABCDE (18.p.) similiter △BSX. est minimum pentagono ABCDE. propter æqualem altitudinem cum puncto S. (18.p.) Ergo △HAG. & △BSX. sunt minima inter se (9.p.) Ergo sunt æque alta (10.p.) Ergo cum puncta G.S. habeant æqualem altitudinem supra HX. est GS. ipsi parallela. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XX.

SI termini parallelarum determinantium rationes Polygonorum, habeant æqualem altitudinem, erunt Polygona inter se minima, & èconuerso.

2 *Polygona minima sunt inter se vt bases.*

EXPOSITIO. Fig. 12.

SInt ⬠ABCDE. & ⏢ KLMN. & CFG. determinat rationem ⬠ABCDE. ad △ABE. vt AG. ad AE (17.p.) & NI. determinat rationem ⏢KLMN. ad △KLM (17.p.) Si puncta G. & I. sint æquè alta, hoc est perpendicula GH. IR. æqualia: Dico ⬠ABCDE. & ⏢KLMN esse inter se figuras minimas: & *èconuerso* si sint figuguræ minimæ, dico GH. IR. esse æqualia.

2 Dico Polygona inter se minima esse inter se vt bases.

DEMONSTRATIO.

CVm Triangulum HAG. habeat æqualem altitudinem cum terminis G. & I. minimũ est vtrique Polygono (18. p.) Ergo etiam Polygona ABCDE. & KLMN sunt inter se minima (9. p.) Quod erat, &c.

Econtra: ⬠ ABCDE. minimum est △HAG. & ▱ KLMN. minimum est △LRI (18. p.) Ergo si Polygona sunt minima etiam triangula (9. p.) Ergo vertices G. I. habent æqualem altitudinem (10. p.) Quod erat, &c.

2 Sint Polygona inter se minima ⬠ ABCDE. & ▱ KLMN. & termini rationum æque alti G. & I. ductisque rectis BG & KI. erit △ABG. æquale Polygono ABCDE. & △LKI. æquale Polygono KLMN (18. p.) Ergo Polygonũ ABCDE ad Polygonum KLMN erit vt triangulum ABG. ad triangulum LKI (2. l. 5.) sed triãgulum ABG. ad triangulum LKI. est vt basis AB. ad basim KL. eo quod habeant æqualem altitudinem inter parallelas (1. l. 6.) Ergo Polygonum ABCDE. ad Polygonum KLMN. est vt basis AB. ad basim KL (1. l. 5.) & cũ hoc perpetuo demonstretur de quibuslibet Polygonis

nis minimis, erunt Polygona minima inter se vt bases. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

SI Triangulum pluribus alijs triangulis simul æque altum sit, erit illud minimum ad aliorũ summam.

2 *Idem est de Parallelogrammis inter se.*

3 *Et etiam de vna summa ad aliam.*

4 *Et èconuerso etiam in omnibus.*

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Triangulum ABC. cuius altitudo æqualis sit altitudinum summæ aliorum, nempè △ GHI + IKL + LMN. quæ ita constituantur vt vnum supra alterius verticem sit, & bases habeant parallelas. Dico Triangulum ABC. minimum esse ad aliorum summam: *Et èconuerso* si aliorum summæ sit △ ABC. minimũ; eius altitudo æqualis erit altitudinum summæ, &c.

DEMONSTRATIO.

SVmantur æquales basium excessus BD. GZ. & sit DF. parallela lateri BC. & ZO. OP. PQ. parallelæ lateribus GI. IL. LN. Bases AB. GH. in eadem recta, & KR. MS. NC. ipsis parallelæ.

Opposita latera in parallelogrammis æqualia sunt BD. CE. tum ZG. OI. PL. QN (7. l. 1.) & cum

cum BD. GZ. sint ex constructione æqualia: omnia erunt æqualia inter se: Ergo ex æquali basi, & altitudine sunt parallelogrãma æqualia DR. GO. tum RS. OL. tum SC. LQ (8.l.1.) Ergo complementum DC. in △ABC. æquale est complementis GO + OL + LQ. triangulorum GHI. IKL. LMN. Ergo cum △ABC. habeat complementum æquale complementis aliorum erit △ABC. minimum ad summam △GHI + △IKL + △LMN (8.p.)

2 De Parallelogrammis eadem est omninò demonstratio ex complementis.

3 Si Triãgula ABR. FRC. tribus alijs æque alta sunt, erunt etiam complemẽta DR + RE. æqualia complementis GO + OL + LQ. Ergo summa summæ erit minima: & etiam in Parallelogrammis.

4 Si △ABC. minimum sit △GHI + IKL + LMN. erit complementum DC. æquale cõplementis GO + OL + LQ (8. p.) Ergo cum bases BD. ZG. sint æquales; erunt etiam altitudines æquales (8.l.1) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

SI plures figuræ fuerint singillatim minimæ cũ alijs figuris summa summæ erit minima.

2 *Figura quæ sit alicui summæ minima, etiã alteri summæ minima erit.*

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt △GHI. minimum □T. & △IKL. cum ⌂ V. & △LMN. cum ⬠X. Dico summam △ GHI + △IKL + △LMN. minimum esse □ T + ⌂V + ⬠X.

DEMONSTRATIO.

CVm △GHI. minimum sit □ T. erit complementum GO. æquale complementis □ T (8. p.) tum OL. æquabitur complementis ⌂ V. & LQ. complementis ⬠ X (8. p.) Ergo summa complementorum GO + OL + LQ. æquatur summæ complementorum □ T + ⌂ V + ⬠X (4. p.) Ergo summa △GHI + △IKL + △LMN. minima est summæ □ T + ⌂ V + ⬠X (8. p.)

2 Cũ summa △GHI + △IKL + △LMN. demonstrata sit minima summæ □ T + ⌂V + ⬠X. Si △ABC. vel quælibet alia figura minima sit priori summæ, etiam alteri minima erit (9. p.) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerint plura Polygona, & altitudo alicuius trianguli sit ad altitudinem triangulariũ segmentorum, vt summa Polygonorum ad segmentorum summam, erit Triangulum summa Polygonorum minimum, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SInt Polygona ▱ ABCD. & ⬠ EFH. eorum summa ad summam segmentorum ABD + EFI. est vt summa AE + EK. ad AD + EI (17. p.) Sit ergo altitudo △ LOR ad altitudines △ ABD + EFI. etiam vt AE + EK. ad AD + EI Dico △ LOR esse minimum summæ ▱ ABCD + ⬠ EFH *& ècontra.*

DEMONSTRATIO.

DVcantur quælibet EM. KN. & △ MAE. erit minimum ▱ ABCD. & △ NEK. ipsi ⬠ EFH (18. p) Ergo altitudo △ MAE. ad altitudinem △ ABD. erit vt AE. ad AD. & similiter altitudo △ NEK ad altitudinem △ EFI. vt EK. ad EI. nempè vt Polygona ad segmenta (12. p.) Ergo summa altitudinũ △ MAE + △ NEK ad summam altitudinum segmentorum nempè △ ABD + △ EFI. est vt sũma AE + EK. ad summam AD + EI (4 l. 5.) sed etiam altitudo △ LOR. ad altitudinem segmentorũ, nempe △

ABD + △EFI. est vt AE + EK. ad AD + EI. ex hypothesi. Ergo altitudo △LOR. æqualis est sūmæ altitudinum △MAE + △NEK. cum eidē eandem habeant rationem (2. l. 5.) Ergo △LOR. minimum erit summæ triangulorum MAE + NEK (21. p) Ergo cū △MAE. minimū sit ▱ ABCD. & △NEK. minimum ⬠EFH. erit △LOR. minimum summæ Polygonorum ▱ ABCD + ⬠EFH (22. p.) Quod erat, &c.

Econuerso. Si △LOR. minimum sit summæ ▱ ABCD + ⬠EFH. etiam erit minimum triāgulis NEK. MAE (22. p.) Ergo altitudo △LOR æqualis est altitudinum summæ △MAE + △NEK (21. p.) sed summa altitudinum △MAE + △NEK. ad summā △ABD + △EFI est vt AE + EK. ad AD + EI. vt antea: Ergo altitudo △LOR. ad summam altitudinum △ABD + △EFI. est vt summa AE + EK. ad summam AD + EI. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXIV.

SI Triangulum habeat æqualem altitudinem cum terminis parallelarum, quæ determinant Polygonorum rationes, erit summæ Polygonorum minimum, & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt △LOR. Polygona sint ▱ ABCD, & ⬠EFH alti-

altitudo △LOR. æqualis ſit ſummæ altitudinum punctorum E. & K. vbi determinantur Polygonorum rationes ex 17. p. vel ſint RK. LB. parallelæ. Dico △LOR. minimum eſſe ſumæ ▭ ABCD + ⌂EFH. *& ècontra.*

DEMONSTRATIO.

DVcantur quælibet KN. EM. & △LOR. minimum erit ſummæ △MAE + △NEK (21. p.) ſed △MAE. minimum eſt ▭ ABCD. & △NEK. ipſi ⌂EFH (18. p) Ergo △LOR. minimum erit ſummæ ▭ ABCD + ⌂EFH (22. p.) Quod erat, &c.

Econuerſo. Si ipſis minimum ſit etiam triãguli MAE. NEK. minimum erit (22. p.) Ergo & ipſis æquè altum (21. p.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXV.

SI terminus parallelæ determinantis rectilinei rationem: aliorum terminis æque altum ſit, erit rectilineum aliorum ſumma minimum, & èconuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt ▯ P. & ex alia parte ▭ ABCD. & ⌂EFH. & altitudo Q. æqualis ſit ſummæ altitudinum punctorum E. & K. Dico ▯ P. minimum eſſe ſummæ ▭ ABCD + ⌂EFH. & *èconuerſo* ſi ipſis minimum sit: dico altitudinem Q. æqualem esse E. & K.

DEMONSTRATIO.

SIt △LOR. vt altitudines R. & Q. æquales sint. Ergo etiã altitudo R. æqualis erit summæ altitudinum E. & K. sed □P. minimum est △LOR (18.p.) & △LOR. minimum summæ ⏢ABCD + ⌂EFH (24.p.) Ergo etiam □P. erit minimum summæ ⏢ABCD + ⌂EFH (9.p.) Quod, &c.

Si vero □P. minimum ipsis sit, etiam minimũ erit △LOR. & Q. æquè altum ipsi R. nempè summæ E. & K. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVI.

SI determinationes rationum in alterutra rectilineorum summa habeant æqualem altitudinem: erunt rectilineorum summa inter se minima, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SInt ex vna parte ⏢ABCD + ⌂EFH. & ex alia ⬡X + ▭Z. & summa altitudinum K. æqualis sit summæ altitudinum S. Dico summam ⏢ABCD + ⌂EFH. minimam esse summæ ⬡X + ▭Z. & si summa sit summæ minima dico altitudines K. & S. esse æquales.

DE-

DEMONSTRATIO.

SIt △LOR. æque altum puncto K. Ergo etiã puncto S. æque altum erit: Ergo erit △LOR. minimum vtrique summæ (24. p.) Ergo etiã summa erit alteri minima (9. p.) Quod erat &c.

Econuerso si summa sit summæ minima eidem △LOR. minima erit (9. p.) Ergo altitudo R. æqualis erit, & K. & S (24. p.) Ergo etiã altitudo K. erit altitudini S. æqualis (3. p.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVII.

IN rectilineis similibus, rationum altitudines, sunt eorum basibus, & altitudinibus proportionales: etiamsi complexe sumantur.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SInt ⌂ABH. & ⌂KLR. similia, determinationes rationum sint D. & N (17. p.) & earum altitudines DF. & NP. Dico DF. ad NP esse vt bases AB. ad KL. vel vt altitudines HG ad RQ. Et si ⌂T. & ⌂V. & ⌂X sint ipsis similia: etiam complexe summa DF+NP. ad altitudines rationum in T+V+X. esse vt summam basium AB+KL. ad summam basium T+V+X.

DEMONSTRATIO.

VT AB. ad BC. ita KL. ad LM (4. l. 6.) & BC. ad ad BD. vt LM. ad LN (17. p.) & BD. ad DF. vt LN. ad NP (2. l. 6.) Ergo ex æquo AB. ad DF. vt KL. ad NP (1. l. 5.) Ergo alternãdo vt basis AB. ad KL. ita altitudo DF. ad NP (4. l. 5.) Similiter demonstrabitur AB. ad KL. esse vt HG. ad RQ. ergo etiam vt HG. ad RQ. ita DF. ad NP. (1. l. 5.) Ergo etiam summa ad summam erit in eadem ratione (4. l. 5.) Quod fuerat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Figuræ similes si æqualem basim, vel altitudinem habeant, minima sunt inter se, & è converso.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SVpra æquales bases T. V. X. Z. sint constituta similia Parallelogrãma: vel sint T. V. X. Z. æquales altitudines similium trapeziorum. Dico figuras esse inter se minimas; vel *è contra* si ▭ T. & ▭ V. & ▭ X. & ▭ Z. similia sint, & minima, dico bases, vel altitudines T. V. X. Z. esse æquales.

DEMONSTRATIO.

CVm figuræ supponantur similes, erunt rationum altitudines, earum basibus, vel altitudinibus proportionales (27. p.) sed bases, vel altitudines T. V. X. Z. supponuntur æquales:

les: Ergo rationum altitudines erunt æquales (2.l.5.) Ergo figuræ erunt inter se minimæ (20.p.)

Econtra si figuræ sint minimæ, etiam rationum altitudines (20.p.) Ergo etiam bases, vel figurarum altitudines erunt æquales (27.p.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

SI Figurarum similium summa æqualem habeat summam basium: basi alteri, vel basium summæ; erit minima alteri figuræ simili, vel figurarum summæ, & ècontra. Idemque est de altitudine figurarum.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SVmma ▱T + ▱V + ▱X. & ▱Y + ▱Z. habeant æqualem basium, vel altitudinum summam dico summam summæ esse minimam: & *èconuerso.*

DEMONSTRATIO.

CVm figuræ similes sint: rationum altitudines etiam complexe erũt summæ basium, vel altitudinum proportionales (27.p.) Ergo cum summa basium T + V + X. supponatur æqualis summæ basium Y + Z. rationes habebunt suarum altitudinum summam æqualẽ (1.l.5.) Ergo summa figurarũ erit alteri summæ mæ, minima (20. p.) Similiter si basis Y. æqualis sit summæ T + V. erit ▱ Y. minimum ▱ T + ▱ V. &c.

Conuersa eadem ratione demonstratur, vt in præcedenti.

PROPOSITIO XXX.

Figuræ minimis licet dissimilibus similes, si ipsis proportionales fuerint, vel habuerint bases, aut altitudines proportionales minima sunt inter se, & è contra. Quod etiam dicitur de summa ad summam.

EXPOSITIO. Fig. 16.

Sit △ABC. minimum □ BD. & △PQS. simile △ABC. & □ QR. simile □ BD. si fuerint proportionales vt △ ABC. ad □ BD. ita △ PQR ad □ QR. vel vt basis AB. ad BD. ita PQ. ad QR. Idemque est de altitudinibus. Dico △ PQS. & □ QR. esse minima inter se: & *è contra*.

DEMONSTRATIO.

Cum △ABC. ad □ BD. sit ex Hypothesi vt △PQS. ad □ QR. erit etiam alternando △ ABC. ad △PQS. vt □ BD. ad □ QR. sed △ ABC. ad △ PQS. est in duplicata ratione AB. ad PQ. & □ BD. ad □ QR. est in duplicata ratione BD. ad QR (4. l. 6.) Ergo ratio duplicata AB. ad PQ. est vt duplicata ratio BD. ad QR.

(1.

(1.*l.*5.) Ergo etiam ratio simplex AB. ad PQ. ita BD. ad QR. (1.*l.*5.) Similiter altitudines proportionales erũt: *& ècontra* si altitudines proportionales sint, etiam bases figurarum similium erunt proportionales (4.*l.*6.)

Iam positis basibus proportionalibus in figuris similibus, etiam rationum altitudines proportionales erunt (27.*p.*) Ergo altitudo rationis △ABC. ad altitudinem rationis △PQS. ita altitudo rationis □BD. ad altitudinem rationis □QR. Ergo etiam alternando vt altitudo rationis △ABC. ad altitudinem rationis □BD. ita altitudo rationis △PQS. ad altitudinem rationis □QR (4 *l.* 5.) sed cum △ABC. & □BD. sint minima, habent rationum altitudines æquales (20.*p.*) Ergo etiã △PQS. & □QR. habent altitudines rationum æquales (2.*l.*5.) Ergo sunt minima (20.*p.*) Quod eadem ratione de summa ad summam concluditur: vt perspicuum est.

Econuerso. Si △ABC minimum sit □BD. & similia minima sint △PQS. & □QR. erunt figuræ, & bases proportionales: cum enim sint minimæ △ABC □BD. sunt rationum altitudines æquales (20.*p*) & etiam in △PQS. & □QR. Ergo altitudo rationis △ABC. ad altitudinem △PQS. est vt altitudo □BD. ad altitudinem □ QR (2.*l*. 5.) ſed rationum altitudines ſunt vt baſes (27.*p*.) Ergo vt Baſis AB. ad PQ. ita BD. ad QR (1.*l*.5.) Ergo etiam figuræ ſunt proportionales (4.*l*.6.) & alternando: baſes, & figuræ proportionales erunt (4.*l*.5.) Quod erat demonſtrandum.

CAPVT II.

DE CENTRO MINIMO.

CEntrum minimum, *dicitur punctum, ex quo prodeunt rectæ ad qualibet data puncta, vtcumque diſpoſita, ſupra quas figuræ conſtitutæ, licet inter ſe diſsimiles, datis tamen ſimiles, minimam omnium ſimilium ſummam efficiunt.*

Si Figuræ ſimiles eſſe debeant, dicetur Cẽtrum figurarum ſimiliũ: *& compendij gratia.* Centr. ff. ſſ. *Si figuræ diſſimiles fuerint, vocabitur* Centrum figurarum diſsimilium, *vel* Centr. ff. dd. *Si autem demonſtratio figuris ſimilibus, & diſsimilibus communis fuerit dicetur abſolutè* Centrum figurarum, *vel* Centr. ff.

Va-

Varie hoc figurarum centrum potest considerari, scilicet respectu eiusdem lineæ, vel plani, vel solidi: hoc vltimum est absolutè cētrum minimum. Ex primo tamen secundum infero, & ex secundo tertium, quod monitum velim, ne cui supponere videar id ipsum, quod probandum assumo.

PROPOSITIO XXXI.

SI recta coniungens duo puncta sit diuisa vnico puncto in figuras minimas, & sumatur in ea quodlibet aliud punctum, figuræ ex assumpto ad data superant minimas; totidem similibus ex intersegmento.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SInt data puncta A. & B. quæ coniungantur recta AB. & hæc diuisa sit in E. vt □ EA. & □ EB. minima sint: vel △EA. & ⬠EB. & sumatur in AB. quodlibet punctum F. Dico □FA + □ FB. superare □ EA + □ EB. in 2 □ EF. vel △FA. + ⬠FB. superare △EA + ⬠EB. in vno △EF. & vno ⬠EF.

DEMONSTRATIO.

CVm △EA. & ⬠ EB. sint minima, habebunt æqualia complementa (8. *p.*) sed assumpto quouis puncto F. summa △FA + ⬠FB. superat figuras æqualium complemētorum △ EA

+ ⬠EB. in vno △EF + ⬠EF (*6.p.*) Ergo △FA + ⬠FB. ſuperant figuras minimas duabus ſimilibus ex interſegmento. Quod erat demonſtrandum.

Eadem eſt demonſtratio ſi duæ, vel plures figuræ EA. minimæ ſint vni, vel pluribus EB.

PROPOSITIO XXXII.

Iſdem datis, ſi extra rectam in quolibet plano per illam tranſeunte ſumatur punctum aliud; figuræ ex aſſumpto ſuperant minimas totidem ſimilibus ex recta ab aſſumpto ad punctum minimarum ducta.

EXPOSITIO. Fig. 17.

Sint data puncta A. B. quæ iungātur recta AB. & hæc diuiſa ſit in E. vt △EA. & ⬠EB. ſint inter ſe minima: Trāſeat per AB. quodvis planum AGB. & in eo ſumatur quodlibet punctum G. Dico △GA + ⬠GB. datis ſimilia ſuperare △EA + ⬠EB. duobus ſimilibus ex EG. nempè △EG + ⬠EG. Idem quæ eſt de figuris ſimilibus inter ſe.

DEMONSTRATIO.

Sit GF. perpendicularis ipſi AB. cum GA. & GB. opponantur angulis rectis in F. erit △ GA. æquale △FA + △FG. & ⬠GB. æquale ⬠ GF + ⬠FB (*4.l.6.*) Ergo △GA + ⬠GB. æquātur

tur △FA + △FG + ⌂GF + ⌂FB. ſed △FA + ⌂FB. æquantur △EA + ⌂EB + △EF + ⌂EF (31 *p.*) Ergo △GA + ⌂GB. æquatur △EA + ⌂EB. & præterea △GF + △FE. tum ⌂GF + ⌂FE. ſed △GF + △FE. æquantur △GE. tum ⌂GF + ⌂FE. æquantur ⌂GE (4. *l.* 6.) cum GE. opponatur angulo recto F. Ergo △GA + ⌂GB æquãtur △EA + ⌂EB & præterea △GE + ⌂GE. Ergo △GA + ⌂GB. ſuperant figuras minimas, nempe △EA + ⌂EB. duabus ſimilibus ex EG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI recta coniungens duo puncta ſit diuiſa in figuras minimas: & inde in quouis plano per rectam deſcribatur circulus, vel abſolutè ſphæra quolibet radio: Figura ex quouis peripheria circularis, vel ſuperficiei ſphærica puncto ad data puncta, ſuperant figuras minimas, totidem ſimilibus ex radio factis: & ſumma ſemper eſt eadem.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SInt puncta A. B & recta AB diuiſa in figuras minimas, vt △EA. & ⌂EB. minima ſint: & per AB. tranſeat quodlibet planum ABG. in quo ex E. deſcribatur circulus GH. vel abſolutè ex E. deſcribatur ſphæra GH. Dico ex quolibet puncto G. circunferentiæ GH. vel ſu-

ſuperficiei ſphæricæ figuras △GA.& ⌂GB. ſuperare minimas △EA.& ⌂EB.duabus ſimilibus ex radio EG.

DEMONSTRATIO.

ASſumpto quolibet punto G. figuræ ex illo ſuperant minimas ex E. duabus ſimilibus ex recta ab aſſumpto G. ad E(32 p) ſed quodlibet punctum G. ſumatur in circunferentia, recta EG. erit radius: Ergo ex quouis circunferentiæ puncto figuræ ſuperabunt minimas duabus ſimilibus ex Radio,&c.

2 Deſcribatur ex E. ſphæra GH.& aſſumpto in ſuperficie quouis puncto G. erit in eodẽ plano cum A.B nempe in plano ABG. in quo eſt tota AEB.&GE (1.l.11.) Ergo △GA + ⌂ GB. ſuperant △EA + ⌂ EB.duabus ſimilibus figuris ex EG(32.p.) nempe ex radio ſphæræ. Quod erat,&c.

3 Summa ex G. ſemper eſt eadem : quia ſemper eſt æqualis minimæ ſummæ cum duabus ſimilibus figuris ex eodẽ radio, vel æquali:Ergo cum ſemper ijſdem æqualis ſit, ſemper erit æqualis, vel eadem. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

CEntrum absolutè minimum inter duo puncta, est quod diuidit rectam puncta coniungentem in figuras minimas, quod vnicum est, & ècontra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SInt puncta A. B. & recta AB. diuisa in E. in figuras minimas △EA. & ⌂EB. dico E. esse centrum absolute minimum ad puncta A. B. & esse vnicum, *& ècontra.*

DEMONSTRATIO.

SI extra E. sumatur quodlibet punctum G. erit in superficie alicuius sphæræ ex cētro E. radio EG. descriptæ: Ergo △GA + ⌂GB. susuperant △EA + ⌂EB. duobus similibus ex EG (33. *p.*) Ergo summa ex E. est omnium minima, & E. centrum absolute minimum: & vnicum est, quia ex quolibet alio fit maior summa. Quod erat, &c.

Conuersa patet, quia si E. non diuideret AB. in figuras minimas non esset centrum minimum contra hypothesim. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

SI punctum diuidat rectam æqualiter, erit cẽtrum ff. ſſ.

2 *Si inæqualiter, erit centrum* ff. dd. *nempè quadrati vnius partis, & rectanguli vtriuſque.*

3 *Si ſphæra, vel circulus deſcribatur, ſumma ſemper erit eadem iuxta centri qualitatem.*

EXPOSITIO. Fig. 17.

SI CB. diuidatur æqualiter, vel CD. inæqualiter in E. dico E. eſſe *centr. ff. ſſ.* ad C. & B. vel *centr. ff. dd.* nempe □ ED. & ▭ CED. &c.

DEMONSTRATIO.

CVm EC. EB. ſupponantur æquales, erunt minimæ quæcumque figuræ ſimiles inter ſe (28. *p.*) Ergo erit E. *centr. ff. ſſ.* ad C. B (33. p.)

2 Quoniam rectangulum CED. & quadratum ED. habent æqualem altitudinem ED. ſunt inter ſe minima (10. *p.*) Ergo erit E. centrum minimum *ff. dd.* quæ ſimiles ſint □ ED. & ▭ CED (33. *p.*)

3 Si ſphæra, vel circulus deſcribatur ex quolibet puncto G. ſumma *ff. ſſ.* GC GB. ſemper erit eadem: tum etiam ſumma ▭ GC. & □ GD. ſemper eadem (34 *p.*) &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

SI recta coniungens duo puncta diuidatur in quaslibet partes æquales, prima diuisio erit centrum minimum, totidem ff. ſſ. quarum vna ſit ex maiori parte, & reliquæ ex minori: & èconuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt recta KN, diuiſa in ſex partes vt KL. ſit quinta pars ipſius LN. dico L. eſſe *centrum* 6. *ff. ſſ.* quarum ſint 5. ex KL. & vna ex LN. *& èconuerſo* ſi L. ſit *centrum ff. ſſ.* quarum 5. ſint ex KL. & vna ex LN. dico KL. eſſe quintam partem ipſius LN.

DEMONSTRATIO.

CVm recta KL. ſit quinta pars ipſius LN. quinque baſes figurarum ex KL. æquales erunt baſi LN. Ergo ſumma quinque *ff. ſſ.* ex KL. minima erit ſimili figuræ ex LN (29. *p.*) Ergo cũ recta KN, diuiſa ſit in L. in figuras minimas erit L. *centr. ff. ſſ.* vel centrum minimũ (34. *p.*) Quod, &c.

Econuerſo. Si L. ſit *centr. ff. ſſ.* ad 5. KL. & 1. LN. erunt iſtæ minimæ: Ergo KL. erit quinta pars ipſius LN (29. *p.*) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

SI recta coniungens duo puncta diuidatur in quaslibet partes aquales, quodlibet diuisionis punctum erit cētrum minimum totidem ff. ſſ. ex vtraque parte, quot ſint partes in oppoſita, & èconuerſo.

EXPOSITIO.

SInt data duo puncta K.N. & recta KN. diuiſa in 6. partes æquales. Si ſumatur punctū M. Dico eſſe *centrum* 6. *ff.ſſ.* quarum quatuor ſint ex KM. quia pars oppoſita MN. continet 4. partes: & duæ ff. ſint ex MN. quia pars oppoſita KM. continet duas partes: *& èconuerſo.*

DEMONSTRATIO.

CVm KM. contineat duas ſextas partes : ſi quater ſumatur, erit ſumma baſium æqualis 8. partibus, & cum MN. contineat 4. partes ſi bis ſumatur, erit ſumma baſium æqualis 8. partibus: ergo cū baſium ſummæ ſint æquales, erit ſumma 4 *ff.ſſ.* KM. minima ſummæ 2. *ff.ſſ.* MN (29.*p.*) Ergo cum KN. diuiſa ſit in figuras minimas, erit M. *centr. ff.ſſ.* (34.*p.*) &c.

Conuerſa liquet, & demonſtrari poterit vt in præcedenti.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

SI in recta fuerint qualibet puncta, & uno puncto ita diuidatur, vt summa figurarum vnius partis minima sit ad summam alterius partis; figuræ ex quolibet alio rectæ puncto superabunt minimas totidem similibus ex interfegmento, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt data recta A B. & in ea sint puncta A. C. D. B. & punctum E. diuidat illam, vt △EA + ▭EC. minima sint cum □ ED + ⌂EB. si in recta assumatur quodlibet punctũ F. Dico summam *ff. dd.* nempe △FA + ▭FC + □ FD + ⌂ FB. superare minimam summam ex E. totidem figuris prædictarum similibus ex EF.

DEMONSTRATIO.

CVm △EA + ▭EC. minima supponantur □ ED + ⌂EB. erunt summæ æqualium complementorum (8. *p.*) Ergo figuræ ex F. superabunt figuras ex E. totidem similibus ex interfegmento EF (7. *p.*) Quod, &c.

Econtra si excessus talis fuerit, erunt figuræ ex E. æqualium complementorum (7. *p.*) Ergo Minimæ (8. *p.*) Quod, &c.

PROPOSITIO XXXIX.

SI in recta fuerint qualibet puncta, & ita vno puncto diuidatur, vt summa ff. summa sit minima: figura ex quolibet alio plani, vel solidi puncto superat minimam totidem figuris ex recta ab assumpto ad punctum minima summa: & ècontra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt data recta AB. & puncta A. C. D. B. & punctum E. diuidat rectam, vt summa △ EA + ▭ EC. minima sit summæ □ ED + ⬠ EB. Assumatur præterea extra rectã quodlibet plani, vel solidi punctum G. & iũgatur recta EG. Dico figuras datis similes ex G. superare minimam summam ex E. totidem similibus factis ex recta EG. *& èconuerso.*

DEMONSTRATIO.

DVctis GA. GB. erit idem planum AGB. (1. *l.* 11.) & cum in eo sit recta AB. etiam erunt in illo puncta A. C. E. D. B. ducatur igitur GF. perpendicularis ipsi AB. Ergo cum F. sit in recta AB. summa *ff.* ex F. superabit minimam ex E. totidem *ff.* EF. nempe △ FA + ▭ FC + □ FD + ⬠ FB. æqualia erunt △ EA + ▭ EC + □ ED + ⬠ EB. & præterea 4. *ff.* similibus ex EF (38. *p.*) Sed cum anguli ad F. sint recti △

GA

GA. æquatur △FA+△FG. & ▭GC. æquatur ▭FC+▭FG. & □GD. æquatur □FD+□FG. & ⬠GB æquatur ⬠FB+⬠FG (4. *l.*6.) Ergo summa ex G. nempe △GA+▭GC+□GD+⬠GB. æquatur minimæ summæ ex E. + 4. *ff.* similibus ex EF. & 4. ex FG. sed cum angulus GFE. rectus sit 4. *ff.* EF. & 4. *ff.* FG. æquantur 4. *ff.* EG. earundem similibus (4. *l.*6.) Ergo summa ex G. æquatur minimæ summæ ex E. + 4. *ff.* ex EG. Ergo superat minimam summam 4 *ff.* EG. quæ datis similes sint, licet inter se dissimiles. Quod erat demonstrandum.

Econuerso. Si ex quolibet puncto G. summa superet modo dicto summam ex E. ordine retrogrado demonstrabitur, punctum E. diuidere rectam AB. in figuras minimas. Præterea eadem est demonstratio, licet puncta plura fuerint in vna parte, quàm in alia.

PROPOSITIO XL.

SI in recta fuerint qualibet puncta; punctum diuidens illam in figuras minimas, erit centrum ff. absolutè minimum ad data puncta, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt recta AB. & puncta A. C. D. B. & E. diuidat illam in figuras minimas, vt in præcedenti.

Di-

Dico punctum E. esse *centrum ff.* absolutè minimum ad data puncta A.B.C.D. *& è contra.*

DEMONSTRATIO.

CVm E. diuidat AB. in figuras minimas, summa ex E. minor est, quàm summa ex quolibet puncto F. eiusdem rectæ (18. *p.*) & etiam minor, quàm ex quolibet pũcto G. plani, vel solidi (39. *p.*) Ergo cum summa ex E. minor sit, quàm ex quolibet alio excogitabili puncto, erit E. centrum absolutè minimum. Quod, &c.

Conuersa liquet. Si enim summa ex E. non esset omnium minima, non esset E. centtum minimum, quod est contra hypothesim: Ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

SI in recta fuerint qualibet puncta, & ex centro ff. minimo sphæra describatur in solido, vel circulus in quouis plano per centrum ff. transeunte: summa ex quolibet superficiei sphericæ, vel circunferentiæ circularis puncto, superabit minimam totidem ff. ex radio, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt E. *centrum ff.* ad A.C.D.B. ex quo describatur in solido sphæra GH. vel circulus in plano: dico summam ex quouis puncto G. vel

vel H. superficiei, vel circunferentiæ dictæ superare minimam ex E, totidem *ff.* ex radio EG. *&ècontra.*

DEMONSTRATIO.

RAdius EG. est distantia cētri à quouis puncto circunferentiæ, vel superficiei sphæricæ: sed ex quolibet puncto G. assumpto plani, vel solidi summa superat minimam totidem *ff.* distantiæ GE (39. *p.*) Ergo ex quolibet puncto circunferentiæ circularis in plano, vel superficiei sphæricæ in solido summa superat minimam totidem figuris ex radio EG. Quod erat demonstrandum.

2 Cum summa semper habeat eundem excessum eidem minimæ summæ, semper erit æqualis, vel eadem (3. *p.*)

3 *Et èconuerso* si ex quolibet puncto G. semper sit idem excessus, nēpe totidem *ff.* EG. punctum E. diuidet rectam AB. in figuras minimas (39. *p.*) Ergo erit E. *centrum ff.* absolutè minimum, Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

SI quælibet puncta fuerint in recta punctum efficiens distantias, quæ ad vnam partem sunt, æquales illis, quæ ad aliam, est centrum ff. ss. & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN eadem recta NR. sint puncta N. O. P. Q. R. & punctum F. eam diuidat vt distantiæ FN. FO. FP. æquales sint FQ. FR, nempe summa summæ. Dico F. esse *centrum ff. ss.* ad N. O. P. Q. R. *& èconitra* si F. sit *centrum ff. ss* dico distantias FN. FO. FP. æquales esse ipsis FQ. FR.

DEMONSTRATIO.

CVm summa basium figurarum similium FN+FO+FP, supponatur æqualis summæ basium figurarum inter se, & prioribus similium FQ+FR. erit vna summa alteri minima (29. *p.*) Ergo punctum F. diuidit rectam NR. in figuras minimas similes inter se: Ergo erit punctum F. *centr. ff. ss.* absolutè minimum ad N. O. P. Q. R (40. *p.*) Quod erat demonstrandum.

Econuerso. Si F. sit *centrum ff. ss.* absolutè minimum diuidit rectam NR in minimas figuras similes inter se (40. *p.*) Ergo cum summa *ff. ss.* FN + FO + FP, minima sit summæ *ff. ss.*

FQ

FQ + FR. erit summa basium alteri summæ æqualis (29. *p.*) Ergo F. *centrum ff. ss.* efficit distantias vnius partis, nempe FN. FO. FP. æquales distantijs alterius partis FQ. FR. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIII.

SI per qualibet data puncta in eadem recta ducantur quauis parallela, & alia per centrum ff. transiens secet ipsas, idem erit centrum ff. ad intersectiones, &ècontra.

2 *Si fuerit centrum ff. ss. sectiones vtriusque partis, aquales erunt, & ècontra.*

3 *Idem est de parallelarum segmentis.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN recta NR sint puncta N. O P. Q. R. per quæ transeant quæuis parallelæ NH. OI. PK QL. RM & sit F. *centrum ff.* ad N. O. P. Q. R. & per F. transeat HFM. secans parallelas in H. I. K L. M. Dico punctum F. esse *centrum ff.* (quæ prioribus similes sint, & inter se, vel similes, vel dissimiles iuxta cẽtri qualitatem) ad H. I. K. L. M. *& ècontra* si F. sit *centrum ff.* ad H. I. K. L. M. etiã esse centrum ad N. O P. Q R. Et si F. sit *centrum ff. ss.* ad N. O P Q. R. dico sectiones FH. FI. FK. æquales esse sectionibus FL. FM. *& ècontra* si

FH.FI.FK æquales sint FL.FM. dico F. esse centrum *ff.ss.* ad NOPQR.

DEMONSTRATIO.

CVm NH.OI.PK.QL.RM. sint parallelæ, secant N.R.&HM. in eadem ratione (2.*l*.6.) Ergo summa basium FH+FI+FK. ad summam FL+FM. est vt summa FN+FO+FP. ad summā FQ+FR (4.*l*.5.) sed cū F. sit *centrūff.* ad N.O.P.Q.R est *summa ff.* FN.FO.FP. minima *summæ ff.* FQ.FR (40.*p*) Ergo etiam *summa ff.* FH.FI.FK. minima erit *summæ ff.* FL. FM (30.*p*.) Ergo F. est centrum minimum ad H.I.K.L.M.

Econtra si F. centrum sit ad H.I.K L.M. eadem ratione demonstrabitur, esse centrum ad N.O P.Q.R. quia NR. secatur sicut HM.

2 Si F. sit *cētrum ff.ss.* ad N.O.P.&c. etiam erit *centrum ff.ss.* ad H.I.K.&c. Ergo distantiæ FH.FI.FK. æquales erunt distantijs FL.FM. (42.*p*.)

Econtrà si distantiæ FH FI.FK. æquales sint FL.FM. erit F. *centrum ff.ss.* ad H.I.K.L.M. (42 *p*.). Ergo etiam ad N.O.P.Q.R.&c. Quod erat demonstrandum.

3 Idem demonstrabitur, & eadem ratione de parallelarum segmentis.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

SI fuerint in plano qualibet puncta vt cumque disposita, & per eorum centrum minimum transeat quauis recta, ad quam demittantur ex punctis perpendicula, idem erit centrum minimũ ad intersectiones.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt data puncta in plano A. B. C D. E. & eorum centrum minimum F. per quod transeat recta H M. cui perpendiculares sint A H. BK. CI. DL. EM. Dico punctum F. esse centrũ minimum ad intersectiones H. I. K. L. M.

DEMONSTRATIO.

SVmatur in H M. quodlibet punctum G. Figuræ GA. GB. GC. GD. GE. superabunt minimas F A. FB. FC. FD. FE. aliter non esset F. centrum minimum: sed cum anguli H. I. K. LM. sint recti figuræ G A. GB. GC. GD. GE. æquantur GH. HA + GI. IC + GK. KB + GL. LD + GM. ME (4. *l*.6.) & figuræ FA. FB. FC. FD. FE. æquantur FH. HA + FI. IC + FK. KB + FL. LD + FM. ME (4. *l*.6.) Ergo ablatis communibus H A. I C KB. LD. M E. remanebit *summa ff*. GH. GI. GK. GL. GM. maior quam *summa ff*. FH. FI. FK. FL. FM (4 *P*.) Ergo cum hoc de quolibet puncto G. extra F. demonstretur, erit summa ex F. semper minor, & omniũ minima: Ergo cum F. diuidat rectam H M. in figuras minimas, erit *centrũ ff.* ad H. I. K L. M. (40. *p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLV.

SI fuerint in plano qualibet puncta, per qua ducantur qualibet recta parallela, & alia per centrum ff. vt cumque secet ipsas, idem etiam erit centrum ff. ad recta sectiones.

2 *Si fuerit centrum ff. ss summa segmentorum vtriusque partis aqualis erit, & èconuerso.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt puncta in eodem pla A. B. C. D. E. & corũ centrum minimum F. & sint quæuis A H. BK. CI. DL. EM. inter se parallelæ, transeat per F. recta N R. secans vtcumque parallelas in N. O. P. Q. R. Dico punctum F. esse centrum minimum ad sectiones rectæ N. O. P. Q. R

DEMONSTRATIO.

CVilibet parallelarum sit perpendicularis FH. & erit omnibus perpẽdicularis (13. *P.*) Ergo F. erit centrum minimum ad sectiones H. I. K. L. M (44. *p.*) Ergo cum NR. transeat per *centrum ff.* ad puncta rectæ H M. erit etiam F. centrum minimum ad sectiones N. O. P. Q. R. rectæ NR (43. *p.*) Quod erat demonstrandum.

2 Si

2 Si F. sit *centrum ff. ss.* ad A. B. C. D. E. etiã erit *centr. ff ss.* ad H. I. K. L. M (44. *p.*) Ergo etiã ad N. O. P. Q. R (43. *p.*) Ergo summa FN. FO. FP. æqualis erit summæ segmentorum FQ. FR (42. *p.*) Quod erat, &c.

E conuerso. Si F. faciat distantias FN. FO. FP. æquales ipsis FQ. FR. erit F. *centrum ff. ss.* ad N. O. P. Q. R (42. *p*) Ergo etiam erit *centr ff. ss.* ad puncta H. I. K. L. M (43. *p*) Ergo cum H. I. K. L. M. sint puncta perpendicularium: etiam F. erit *centrum ff. ss.* ad A. B. C. D. E (44 *p.*) Quia eiusdem naturæ sunt centra ex demonstratis. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLVI.

Datis quotcumque punctis in plano, si in eodem extra centrum ff. sumatur quodlibet punctum, figuræ datis similes superant minimas totidem similibus ex recta à centro ff. ad assumptum: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 18.

Sint data puncta A. B. C. D. E & eorum centrum minimum F. vt sit minima summa △ FA + ▱ FB + ▭ FC + □ FD + ◇ FE. & in eodem plano extra F. sumatur quodlibet punctum G. Dico figuras ex G. datis similes superare minimas totidem similibus ex FG. nempe ex-

excessum esse △FG + ⌂ FG + ▭FG + □ FG + ◇FG. quæ prioribus similia sint.

DEMONSTRATIO.

PEr F. & G. ducatur HM. vtrinque infinita, ad quam ex A. B. C. D. E. demittantur perpendicula AH. BK. CI. DL. EM. & erit F. *centrum ff.* datis similium ad H. I. K. L. M (44.*p.*) sed △GH. ▭GI. ⌂GK. □GL ◇GM. superant similes figuras FH. FI. FK. FL. FM. totidem similibus ex FG (39.*p.*) Ergo si vtrique parti addantur similes figuræ ex perpendicularibus AH. CI BK. DL. EM. *summa ff.* GH. HA + GI. IC + GK. KB + GL. LD + GM. ME. superabit summam FH. HA + FI. IC + FK. KB + FL. LD + FM. ME totidem similibus figuris ex FG (4.*P.*) Sed cum anguli ad H. I. K. L. M. sint recti figuræ △GH + △HA æquatur △GA (4.*l.*6.) & similiter △FH + △HA. æquantur △FA. & sic de reliquis: Ergo *summa ff.* ex G. nempe △GA + ⌂GB + ▭GC + □GD + ◇GE. superant similes ex F. nempe △FA + ⌂ FB. &c. totidem similibus ex FG. nempe △FG + ⌂FG + ▭FG + □FG + ◇FG. Quod erat, &c.

E conuerso si ex quolibet puncto G. extra F. figuræ ex G. superent figuras ex F. totidem *ff.* rectæ FG. erit F. *centrum minimum ff.* quia cũ summa ex illo sit qualibet alia minor, erit omnium minima. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLVII.

SI fuerint in plano qualibet puncta vtcumque, & in eo ex centro ff. describatur circulus: summa figurarũ ex quolibet circunferentiæ puncto superat minimam totidem figuris similibus ex radio: & semper erit eadem: & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt in plano puncta A. B. C. D. E. & in illo eorum centrum F. ex quo describatur quilibet circulus ZX. Dico summam ex quolibet puncto Z in circunferentia assumpto superare minimam ex F. totidem figuris ex radio FZ. *& è conuerso.*

DEMONSTRATIO.

CVm FZ. sit distantia centri à circunferentia: summa ex Z. superat summam ex F. totidem *ff.* ex FZ (*46.p.*) Ergo cum hoc de quolibet puncto demonstretur, constat veritas. Ergo cum summa semper habeat eundem excessum: semper erit æqualis, vel eadem (*3.P.*) Quod, &c.

Conuersa patet vt in præcedenti.

PRO-

PROPOSITIO XLVIII.

Datis quibuslibet punctis in plano, ſi extra illud ſupra, vel infra ſumatur quodcumque punctum: Figuræ ex aſſumpto ſuperant plani minimas totidem ff. ſimilibus ex recta ab aſſumpto ad centrum ff. plani.

EXPOSITIO. Fig. 18.

Sint pūcta A. B. C. D. E. & figurarum ſpecies △A. ▭B. ▭C. □D. ◇E. *centrum ff.* plani ſit F. & aſſumatur quodlibet punctum Z. ſupra planum eleuatum, vel depreſſum infra. Dico *ſummam ff.* datis ſimilium ex Z. ſuperare ſummam *ff.* ex F. totidem figuris ſimilibus ex recta FZ. quæ à centro ad aſſumptum ducitur.

DEMONSTRATIO.

Demitatur ZG. ipſi plano perpendicularis: & ex puncto ſectionis G. ducantur in plano rectæ ad data puncta. GA. GB. GC. GD. DE. quibus omnibus perpēdicularis erit ZG. & omnes anguli ZGA. ZGC. &c. erunt recti (23. *P.*) Ductis igitur ZA. ZB. ZC. ZD. ZE. opponentur angulis rectis: Ergo △ZA. ſuperat △GA. toto △GZ. & ▭ZC. ſuperat ▭GC. toto ▭GZ. &c. (4. *l.* 6.) Ergo *ſumma ff.* ex Z. ſuperat ſummam ex G. totidem *ff.* ex GZ. Sed *ſum-*

ma

ma ff. ex G. superat minimam ex F. totidem similibus ex recta FG (*45. p.*) Ergo *summa ff.* ex Z. superat minimam ex F. totidem figuris ex recta GZ & totidem ex recta FG. sed △ FG + △ GZ. æquantur △ FZ. quod angulo recto opponitur (*4. l. 6.*) & sic de reliquis: Ergo totidem *ff.* FG + totidem *ff.* GZ. æquātur totidem FZ. Ergo summa ex puncto Z. superat minimam ex centro plani F. totidem *ff.* rectæ FZ. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLIX.

Centrum in plano minimū ad quævis eiusdem plani puncta est absolutè minimum.

2 *Si ex eo describatur sphæra, summa ex quolibet superficiei puncto superat minimam totidem ff. similibus ex radio.*

3 *Summa ff. semper est eadem.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

Sint data in plano puncta A. B. C D. E. & plani *centrum ff.* F. dico esse absolute cētrum minimum etiam solidi: & summam ex superficie sphærica semper æqualem.

DEMONSTRATIO.

Si extra F. sumatur quodlibet punctum G. in plano: summa ex F. minor est (*46. p.*) Si punctum Z. extra planum sumatur etiam summa ex F. minor est (48. *p.*) Ergo cum summa ex F. sit qualibet alia minor, erit omnium absolute minima: & F. centrum absolute minimum, &c.

2 Si ex F. describatur sphæra, quodvis punctum superficiei distat à centro F. toto radio FZ. sed ex quolibet puncto extra centrum F. summa superat minimam totidem figuris distantiæ (46 & 48. *p.*) Ergo ex quolibet puncto Z. superficiei sphæricæ summa superabit minimam totidem figuris radij FZ. Quod erat, &c.

3 Cum summa semper excedat minimā eodem excessu, nempe totidem ff. datarum similibus, semper erit æqualis, vel eadē. Quod erat, &c.

PROPOSITIO L.

SI fuerint in plano qualibet puncta, ex quibus ducantur perpendiculares in ipsum planum, vel in aliud planum per centrum ff. transiens: idem etiam erit centrum ff. ad perpendiculorum sectiones in secundo plano.

EXPOSITIO. Fig. 19.

IN plano XZ. sint quælibet puncta A. B. C. D. E. quorum centrum minimum sit F. Trāseat per F. quodcumque planum RS. secans pri-

primum, & communis sectio sit PQ. Demittantur præterea rectæ AH. BI. CK. DL. EM. plano RS. perpendiculares, secantes ipsum in H. I. K. L. M. Dico punctum F. esse pariter *centrum ff.* ad H. I. K. L. M. quæ similes sint datis in A. B. C. D. E.

DEMONSTRATIO.

DVcantur ex F. rectæ FA. FB. FC. FD. FE. tũ FH. FI. FK. FM. FL. & in plano RS. sumatur extra F. quodlibet punctum G. ex quo ducantur etiam rectæ ad omnia puncta: cum anguli FHA. FIB. &c. tum GHA. GIB. &c. recti sint (23. *P.*) △FA. æquatur △FH + △HA. & □ FC. æquatur □FK + □KC. &c. (4. *l.* 6) Similiter △GA. æquatur △GH + △HA, &c. (4 *l.* 6.) Ergo summa *ff.* GA. GB. GC. GD. GE. æquatur summæ *ff.* GH. HA + GI. IB + GK. KC + GL. LD + GM. ME. & summa *ff.* FA. FB FC. FD. FE. æquatur summæ *ff.* FH. HA + FI. IB + FK. KC + FL LD + FM. ME.

Sed siue punctum G. sit in plano XZ siue extra, summa *ff.* ex G. superat summam *ff.* ex F. totidem figuris rectæ FG (46. vel 48. *p.*) Ergo figuræ GH. HA + GI. IB + GK. KC + GL. LD + GM. MD. superant figuras FH. HA + FI. IB + FK. KC + FL. LD + FM. ME totidem figuris rectæ FG. Ergo ablatis vtrinque communibus ff. HA. IB. KC. LD. ME. figuræ GH. GI. GK. GL. GM. ſuperabunt FH. FI. FK. FL. FM. totidem ff. rectæ FG. Ergo cum hoc de quolibet puncto G. demonſtretur, erunt figuræ ex F. omnium minimæ, & F. *centrum ff.* ad ſectiones perpendiculorum H. I. K. L. M. Quod erat &c.

Eadem eſt demonſtratio ſi perpendiculares primo plano ducantur.

PROPOSITIO LI.

SI fuerint in plano qualibet puncta, & per illa ducantur quævis parallelæ ſecantes ipſum, & quodlibet aliud planum tranſiens per centrum ff. vtcumque: idem etiam erit centrum ff. ad parallelarum ſectiones in ſecundo plano.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt in plano XZ. puncta A. B. C. D. E. & eorum *centrum ff.* F. per quod tranſeat planum TV. & per A. B. C. D. E. parallelæ ſecantes vtcumque vtrumque planum; dico F. eſſe centrum ad ſectiones parallelarum in plano TV.

DEMONSTRATIO.

SI parallelæ ſint perpēdiculares, vel plano XZ. vel plano TV. conſtat veritas ex (50. *p.*) Si neutro ſint perpendiculares: concipiatur per F. planum RS. parallelis perpendiculare: Ergo

erit

erit F. centrum ad sectiones plani RS (50. *p.*) Ergo cum ex punctis H. I. K L. M. sint perpendicula parallela, & planum T V. sit per centrũ F. erit F. *centruff.* ad sectiones plani TV (50. *p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LII.

SI fuerint in solido qualibet puncta, & per centrum ff. transeat planum, ad quod ex datis ducantur perpendicula: idem erit centrum ff. ad plani sectiones.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt puncta A. B. C. D. E in solido, & *centrum ff.* F. per quod transeat planum R S. cui sint perpendiculares AH BI. CK. DL. EM. dico F. esse *centrum ff* ad plani sectiones H. I. K. L. M.

DEMONSTRATIO.

ASsumatur in plano R S. quodlibet punctũ G. cum F. sit centrum minimum ad puncta solidi A. B. C. D. E. ex hypothesi figuræ ex G. superant *ff.* ex F. aliquo excessu: aliter F. non esset centrum minimum: sit ergo excessus □ Y. cum anguli in H. I. K. L. M. sint recti, figuræ GA. GB. &c æquantur *ff* GHA. GIB. &c. Tum figuræ FA. FB &c. æquantur *ff.* FHA. FIB. &c. (4. *l.* 6.) Ergo *ff.* GHA. GIB. &c. superant FHA. FIB. &c. toto □ Y. Ergo ablatis communibus

HA.

HA. IB, &c. figuræ GH. GI, &c. superant *ff.* FH. FI. &c. toto □ Y. Ergo F. est *centrum ff.* ad H. I. &c. sicut in 50. *p.* Quod, &c.

PROPOSITIO LIII.

SI fuerint in solido qualibet puncta, per quæ ducantur qualibet parallelæ secantes planũ transiens per centrum ff. vtcumque: idem erit cẽtrum ff. ad plani sectiones.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt A. B. C. D. E in solido *centrum ff.* F. per quod transeat planum TV. & quæuis parallelæ AH BI. &c. secent ipsum vtcumque. Dico F. esse *centrum ff.* ad plani, & parallelarum sectiones.

DEMONSTRATIO.

SI planum TV. sit parallelis perpendiculare, constat veritas ex 52 *p.* si non fuerit: concipiatur planum RS. parallelis A H. BI. &c. perpendiculare: Ergo erit F *centrum ff.* ad sectiones H. I. K L. M (52. *p*) ergo cum planum TV. transeat per F. *centrum ff.* plani RS & secet parallelas, erit F. *centrum ff.* ad sectiones plani TV (50 *p.*) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

SI qualibet puncta fuerint in solido, & extra centrum ff. sumatur quodlibet aliud; figuræ ex assumpto superant minimas totidem figuris rectæ ab assumpto ad centrum ff.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt A.B.C.D.E. in solido, & F. *centr. ff.* extra quod sumatur quodlibet punctum G. Dico figuras ex G. superare minimas ex F. totidem similibus rectæ FG.

DEMONSTRATIO.

PEr rectam FG. transeat planum RS. cui demittantur perpendicula AH. BI. &c. & erit F. *centr. ff.* ad H. I. K. L. M (52 *p.*) Ergo *ff* GH. GI. GK. GL. GM. superant *ff.* FH. FI. &c. totidem *ff.* FG (46. *p.*) Ergo additis vtrique parti *ff.* HA. IB. KC. LD. EM. figuræ GHA. GIB. &c. superabunt *ff.* FHA. FIB. &c. totidem *ff.* FG. sed figuræ GHA. GIB. &c. æquãtur *ff.* GA. GB. &c. angulo recto oppositis: & *ff.* FHA. FIB. &c. æquantur *ff.* FA. FB. &c. (4. *l.* 6.) Ergo Figuræ ex G. superant *ff.* ex F. totidem *ff.* FG. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LV.

SI fuerint in ſolido qualibet puncta, & ex cẽtro ff. deſcribatur ſphæra; vel in plano per centrum ff. tranſeunte circulus: ſumma ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ, vel circunferentiæ circularis puncto, ſuperabit minimam totidem ff. radij, & ſemper erit eadem ſumma.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt puncta A. B. C. D. E. in ſolido, & *cent ff.* F. ex quo deſcripta ſit ſphæra; vel in plano R S. tranſeunte per F. ſit deſcriptus circulus radio F G. dico ſummam ſemper eſſe eandem, & ſuperare minimam totidem *ff.* radij F G.

DEMONSTRATIO.

RAdius F G. eſt diſtantia centri à quolibet puncto ſuperficiei ſphæricæ, vel circunferentiæ circularis: ſed ex quolibet puncto G. ſumma ſuperat minimã totidem *ff.* diſtantiæ F G (54. *p.*) Ergo ſumma ex quolibet puncto ſuperficiei, vel circunferentiæ ſuperat minimam totidem *ff.* radij F G. & ſemper eſt eadem, quia ſemper eidem eundem habet exceſſum (23. *P.*) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LVI.

SI fuerint in plano, vel in solido qualibet puncta, & ex centro ff. ducatur perpendicularis cuilibet recta, vel plano: summa ex puncto sectionis minor erit qualibet alia totidem ff. distantia. Et sectio erit centrum ff. in recta, vel plano ad data puncta.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt B. *centr. ff* ad quælibet puncta plani, vel solidi: ex quo ducatur B C. perpendicularis cuilibet rectæ DF. vel plano KL. dico C. esse *centr. ff.* in recta DF. vel in plano KL. & summam ex C. minorem esse quam ex F. totidem *ff*. CF.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff*. ex quouis puncto F. superat minimam ex B. totidem *ff*. BF. & summa ex C. eãdem superat totidẽ *ff*. BC (46. vel 54. *p.*) sed cũ angulus C. rectus sit in recta, vel plano, figuræ BF. superant *ff*. BC. totidem *ff* CF (4 *l*. 6.) Ergo summa ex F. superat summam ex C. totidem *ff*. CF. Ergo cum summa ex C. semper sit minor, erit C. centrum *ff*. in recta DC. vel in plano KL. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LVII.

Iisdem positis, si ex perpendiculi sectione describatur circulus in plano: summa ex quouis circunferentiæ puncto, superabit plani minimam totidem ff. radij: & absolutè minimam totidem ff. ex latere coni recti, cuius vertex sit centrum minimum: & summa semper erit eadem.

EXPOSITIO. Fig. 20.

POsitis quæ in 56. *p.* sit ex C. descriptus circulus DEF. Dico summam ex quouis puncto D superare plani minimam ex C. totidem *ff.* CD. vel minimam absolutè ex B. totidem *ff.* lateris DB. coni recti DEFGB.

DEMONSTRATIO.

RAdius CD. est distantia centri C. à quolibet circũferẽtiæ puncto: Ergo summa ex quouis puncto D. vel E. &c. superat summam ex C. totidem *ff.* radij DC (56. *p.*)

Similiter latus BD. est distantia verticis B. à quolibet puncto basis DEFG. coni recti: Ergo summa ex quouis puncto D. vel E. superat omnium minimam ex B. totidem *ff.* lateris BD (46. vel 54. *p.*) Ergo semper erit eadẽ (3. *P.*) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LVIII.

SI per centrum ff. ad qualibet plani, vel solidi puncta transeat axis, licet continuata sphæræ, sphæroidis, Cilindri, Coni, vel Conoidis Hyperbolici, aut Parabolici, & in istis sumatur quilibet circulus, cuius centro sit axis perpendicularis: ex quolibet circunferentia puncto summa ff. erit semper eandem.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt B. *centrum ff.* ad quælibet puncta: & BC. axis prædicta DEFG. circulus dictus, cuius plano sit BC. perpendicularis in centro C. Dico summam ex circunferentia semper esse eadem.

DEMONSTRATIO.

SIue circulus DEFG. sit in sphæra vbicumque constitura, siue in sphæroide, &c. cum sit axi BC. perpendicularis in centro, poterit esse basis coni recti, cuius vertex sit *centrum ff.* B. Ergo ex quolibet circunferentiæ puncto, semper erit eadem summa *ff.* (57. *p*) Quod erat, &c.

Summa tamen circuli DGF. maior erit, quàm summa circuli PRS.

PROPOSITIO LIX.

SI recta licèt continuata per duo centra ff. sit cuilibet plano perpendicularis: descripto ex intersectione quolibet circulo summa ff. ad puncta unius centri ex quouis circunferentiæ puncto, semper erit in eadem ratione ad summam ff. alterius centri.

EXPOSITIO. Fig. 20.

SIt B. *centrum ff.* ad quælibet plani, vel solidi puncta: & X. centrum ad quælibet alia puncta: & recta BX. secet perpendiculariter quodlibet planum KL in C. descripto ex C. quouis circulo DEFG. dico summam ex circunferẽtia ad puncta centri B. semper habere eandem rationem ad summam ex eadem circunferentia ad puncta centri X.

DEMONSTRATIO.

SVmma ex quolibet puncto G. ad puncta cẽtri B. semper est eadem (57. *p.*) & semper eadem ad puncta centri X (57. *p.*) Ergo summa ad summam semper est in eadẽ ratione (2. *l.* 5.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LX.

SI extra centrum ff. ad qualibet puncta eiusdem recta, plani, vel solidi sumatur quodlibet punctum: summa ff. excedit minimam totidem ff distantia inter assumptum, & centrum ff. absolutè minimum; vel recta tantum, aut plani.

2 *Centrum ff. ad qualibet puncta recta, plani, vel solidi vnicum est, siue centrum ff sit recta tantum, siue plani, siue absolutè minimum.*

3 *Si ex centro ff. absolute minimo ad qualibet recta, plani, vel solidi puncta describatur sphæra, vel ex centro ff. plani circulus, summa ex quouis superficiei sphærica, vel circumferentia circularis puncto excedit minimam ex centro ff. totidem ff. radij, & semper est aqualis, vel eadem.*

DEMONSTRATIO.

PRimum constat ex 32. 39. 46. 48. 54. 56. *p.* quas omnes complectitur hæc propositio.

Secundum ex primo infertur. Quoniam si ex quocumque alio puncto summa est maior totidem *ff.* distantiæ: ex nullo alio puncto colligi poterit summa minima: ergo nullum aliud punctum poterit esse *centrum ff* respectu rectæ, plani, vel solidi: Ergo *centrum ff.* quomodocumque accipiatur, vnicum est.

Tertium continetur in 33. 41. 47. 49. 55. 57. *p.* quas

quas omnes complectitur hæc propositio: Ergo constat omnium veritas. Quod erat, &c.

Secunda propositionis pars necessaria fuit, reliqua in unam collecta sunt, ne pro centri ff. vel punctorum diuersitate singula propositiones in operis decursu passim adducenda sint.

PROPOSITIO LXI.

SI in plano, vel in solido fuerint qualibet puncta, & à centro ff. ducatur recta ad aliud nouum punctum, in ea erit centrum ff. ad omnia, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SInt data puncta A. B. C. D. in plano, vel in solido vtcumque; & *cētrum ff.* ad illa sit F. Præterea datum sit nouum aliud punctum E. vel in eodem plano, vel in solido: Ducta FE. dico *centrum ff.* ad omnia puncta A. B C. D. E. esse in recta FE. *Et è conuerso* si F. sit centrum ad A. B. C. D. E. & L. sit centrum ad A. B. C. D. E. dico rectam FL. transire per E. vel rectam EL. transire per F.

DEMONSTRATIO.

SVmatur extra rectam FE. quodlibet punctum H. & ducatur FH. & hoc radio describatur sphæra secans FE. in L. & ducatur EH. Cum puncta H. L. sint in superficie sphæræ ex centro *ff.* F. descriptæ, summa *ff.* □HA + △ HB + ▭HC + ⬠HD. æqualis est summæ *ff.* □ LA + △LB + ▭LC + ⬠LD (55.*p.*) sed ◇EH. maius est quàm ◇EL. quia in triangulo FHE. latera FH. HE. maiora sunt quàm FE (5.*l.*1.) & ablatis æqualibus radijs FH. FL. remanet HE. maior quàm LE. Ergo summa *ff.* HA. HB. HC. HD. HE. maior est summa *ff.* LA. LB. LC. LD. LE. Ergo cum hoc demonstretur de quolibet puncto H. extra rectam FL. assumpto; punctū minimæ summæ, vel *centrum ff.* nequit esse extra rectam FE. & sic erit in illa. Quod erat demonstrandum.

E conuerso si F. sit centrum ad A. B. C. D. & L. sit centrum ad A. B. C. D. E. recta FL. transibit per E. vel recta EL. transibit per F. quia cum recta FE. demonstrata sit eadem cum FL. vel cum EL. necessario FL. vel EL. transeunt per E. & L. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXII.

SI ex cognito centro ff. ad alia puncta plani, vel solidi, recta in aliud ducta ita diuidatur vt totidem figuræ iam positis similes ex parte centro proxima, sint minimæ ad nouam addendam ex alia parte: illud erit centrum ff. & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SInt data puncta A. B. C. D. & sit F. *centrum ff.* datis □. △. ▭. ⌂. similium collocanda est in nouo puncto E. figura ◇. Si FE. ita diuidatur in L. vt quatuor figuræ FL. datis similes (quia F. est cẽtrum quatuor punctorum A. B. C. D) minimæ sint ad nouam LE. scilicet vt □ LF + △ LF + ▭ LF + ⌂ LF. minimæ figuræ sint ◇ LE. Dico L. fore *centrum ff.* ad omnia puncta A. B. C. D. E. & sic de quibuslibet alijs, siue figuræ datæ similes inter se sint, siue dissimiles.

E conuerso si F. sit *centrum ff.* ad A. B. C. D. & L. ad A. B. C. D. E. Dico rectam FE. diuisam esse in L. vt 4 *ff.* FL. datis in A. B. C. D. similes, minimæ sint cum vltima figura LE.

DEMONSTRATIO.

CVm F. supponatur *centrum ff.* cognitum ad puncta A. B. C. D. E. & sit E. nouum punctum, ducta FE. in illa erit *centrum ff.* ad A. B. C. D. E (61. *p.*) sed assumpto in FE. quodlibet alio

alio puncto extra L. ſumma ff. □ RA + △RB + ▭RC + ⬠RD. æquatur minimæ ex F. nempe ff. FA. FB. FC. FD. + 4. ff. FR (60. *p.*) Ergo ſumma ex R. ad A. B. C. D. E. æquatur minimæ ex F. + 4. ff FR + ◇ LE. ſed eadem ratione ff. ex L. æquantur minimæ ſummæ ex F + 4 ff. FL + ◇FE. Ergo cum 4 ff FL + ◇ LE. ſupponantur minimæ, hoc eſt, minores quibuslibet alijs 4. ff FR + ◇RE. erit ſumma ex L. minor qualibet alia ex quolibet puncto R. Ergo erit L. *centrum ff* vel *centrum minimum* ad omnia puncta A. B. C. D. E. iuxta ſpecies figurarum datas. Quod erat, &c.

Eadem omninò eſt demonſtratio, ſiue *centrum ff.* prius cognitum ſit ad duo, tria, vel plura quælibet puncta, dum prædicta diuiſionis ratio obſeruata ſit.

E conuerſo ſi F. ſit *centrum ff* ad A. B. C. D. & L. ad A. B. C. D. E. ſumma ff. ex L. minor erit qualibet alia ex quouis puncto R. ſed ſumma ex L. æquatur minimæ ex F + 4 ff. FL + ◇LE. (60. *p.*) & ſumma ex R. ſimiliter æquatur minimæ ex F + 4 ff FR + ◇RE. Ergo ablata vtrinque minima ſumma ff. ex F. ad A. B. C. D. remanebunt 4. ff. FL + ◇FE. minores quam 4. ff FR + ◇RE. Et cum hoc ſemper demonſtretur de quolibet puncto R. extra L. erunt 4. ff. FL + ◇

FE. omnium minimæ: Ergo *centrum ff.* L. ad A.B.C.D.E diuidit rectam FE in figuras minimas. Quod erat, &c.

SCHOLIVM.

HOc theorema fusius explicandum fuit, quia *centri ff.* inventio tota in eo consistit, obseruatis figurarum speciebus iuxta qualitatem quæstionis. Theorematis etiam conuersio insignem habet in Geometria vsum, quod Auspice Deo in secunda huius operis parte manifestum omnibus fiet.

PROPOSITIO LXIII.

REcta coniungens duo centra ff. ad alia, & alia plani, vel solidi puncta transit per centrum ff. ad omnia simul, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt punctum F. *centrum ff.* ad A B. C. D. siue in plano, siue in solido sint, & E. *centrum ff.* ad G.N. vel ad plura eiusdem, vel alterius plani, vel solidi: & recta FE coniungat vtrumque *centrum ff.* Dico *centrum ff.* ad omnia simul A.B.C.D. G.N. &c. esse in recta FE. vel illam transire per *centrum ff.* Et è *conuerso*: Si F. sit centrum ad A. B. C.D. & R. ad A. B. C. D. G.N. & ducatur recta FR Dico transire per E. *centrum ff.* punctorum G.N. & si ducatur ER. tran-

transire per F. *centrum ff.* punctorum A.B.C.D.

DEMONSTRATIO.

SVmatur extra EF. quodlibet punctum H. & ducatur FH. HE. & radio FH. describatur sphæra secans FE. in L. In triangulo FHE. sunt FH. HE. maiores, quàm FE (5. *l.* 1.) & ablatis æqualibus radijs FH. FL. remanebit EH. maior quàm EL.

Summa *ff.* ex H. ad A. B. C. D. æquatur minimæ ex F + 4. *ff.* FH (60. *p.*) & summa ex H. ad G. N. æquatur minimæ ex E + 2. *ff.* HE (60. *p.*) Ergo summa *ff.* ex H. ad A. B. C. D. G. N. æquatur minimis ex F. & E + 4 *ff.* FH + 2. *ff.* HE. Similiter summa *ff.* ex L. ad A. B. C. D. G. N. est æqualis minimis ex F. & E + 4. *ff.* FL. vel FH. + 2. *ff.* LE. Ergo cùm reliqua omnia sint æqualia, & 2 *ff.* HE. maiores sint quàm 2. *ff.* LE. quia basis HE. demonstrata est maior, erit summa ex H. maior quàm summa ex L. Ergo nullum punctum H. extra rectam FE. potest esse *centrum ff.* ad omnia puncta A. B. C. D. G. N. Ergo *centrum ff.* ad omnia est in recta FE. Quod erat, &c.

E converso si recta FE. transit per omnium *centrum ff.* R. recta FR. transibit per E. vel ER. per F. quia FR. ER. EF. eadem recta sunt. Quod, &c.

PROPOSITIO LXIV.

SI recta coniungens duo centra ff. ad alia, & alia eiuſdem, vel diuerſi plani, vel ſolidi puncta, ita diuiſa ſit vt totidem figuræ vnius partis, quot ſua puncta, minimæ ſint totidem figuris alterius partis, quot ſua puncta: diuiſionis punctum erit centrum ff. ad omnia ſimul, & è conuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt punctum F. *centrum ff.* ad A. B. C. D. in plano, vel in ſolido: & E. *centrum ff.* ad G. N &c. recta F E. coniungens *centra ff.* F. E. diuiſa ſit in R. vt quatuor figuræ FR. ſimiles datis □ A. △ B. ▭ C. ⬠ D. minimæ ſint duabus figuris RE. datarum ſimilibus ▭ G. ○ N. Iuxta punctorũ cuius ibet cẽtri numerum, & figurarum ſpeciem. Dico R. eſſe *centrum ff.* ad omnia puncta ſimul A. B. C. D. G. N. *Et è conuerſo* ſi R. ſit *centrum ff.* ad A. B. C. D. G. N & F. ad A. B. C. D. & E ad G. N. Dico FE. diuiſam eſſe in R. vt 4 *ff.* FR. minimæ ſint ad 2. *ff.* RE.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff.* ex R. ad A. B. C. D. æquatur minimæ ex F + 4. *ff.* FR. & ſumma *ff.* ex R. ad G. N. æquatur minimæ ex E + 2. *ff.* RE (60. *p.*) Ergo ſumma *ff.* ex R. ad A. B. C. D. G. N. æquatur minimis ex F. & E. + 4. *ff* FR + 2. *ff.* R E. Similiter

con-

conuincitur summam ex quolibet alio puncto L. rectæ FE. æquari minimis ex F. & E + 4.*ff.* FL + 2.*ff.* LE. Ergo cum minimæ summæ ex F. & E. communes sint, & 4.*ff.* FR + 2.*ff.* RE. minores sint ex Hypothesi quã quælibet aliæ 4.*ff.* FL + 2.*ff.* LE. summa ex R. erit omnium minima, quæ ex quolibet puncto rectæ FE. colligi potest: Ergo cum *centrum ff.* sit in recta FE (63.*p.*) erit R. *centrum ff.* absolutè minimũ ad omnia puncta A. B. C. D. G. N. Quod erat demonstrandum.

E conuerso si R. sit *centrum ff.* ad omnia puncta ordine retrogrado conuincitur 4.*ff.* FR + 2. RE. minores esse quibuslibet 4.*ff.* FL + 2.*ff.* LE. prout in 62.*p.* Quod erat, &c.

CAPVT III.

PROBLEMA CATHOLICVM RESOLVITVR.

OMnia, quæ in primo, & secundo capite tradita sunt ad Problema Catholicum diriguntur, cui facilem sternet viam aliorum Problematũ resolutio ex præcedentibus orta, ac eodem ferè ordine demonstrata.

Theorematum vernantes flores, haud sterilem prædicunt annonam, qui omnes, ni frigoris, vel æstus insolentia tabescant, in decoctos autumnabunt problematum fructus. Præcoces alij, quos in hoc capite colligemus; alij verò Serotini diutius calore Solis decoquendi in secundam operis partem colligendi venient: quorum sapor, eo forte gratior, & iucundior erit, quo minus è minimo Geometriæ fundo, vel sperari potuit, vel saltem debuit.

PRO-

PROPOSITIO LXV.
Problema I.

DAto quolibet Triangulo, vel parallelogrammo aliud ipsi minimum, & alteri dato simile inuenire, vel inter parallelas constituere.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt datum Triangulum ABC. inueniendum est BED. quod ipsi minimum sit, vel inter easdem parallelas, simile tamen HIK.

Constructio 1. Continuetur basis ABE. infinita, & fiat CD. ipsi parallela infinita, & angulus EBD. æqualis H. & BDE. æqualis HKI. Dico factum.

DEMONSTRATIO.

TRiangulum enim BDE. est ex constructione inter parallelas cum ABC. Ergo sunt triãgula æque alta (8. *l.* 1.) Ergo ABC. BDE. sũt minima (10. *p.*) sed cum anguli B. & D. æquales sint H & K. reliquus E. æqualis est I. (3. *l.* 1.) Ergo BDE. HIK. cum sint æquiangula, habent latera proportionalia, & sunt similia (2. *l.* 6.) &c.

Construct. 2. Si datum sit parallelogrammum AF. & BG. simile debeat esse HL. ducatur diagonium KI. & fiat Triangulum BDE. simile HKI. vt antea, & sit EG. parallela BD.

criteritque parallelogrammum BG. minimum ipsi AF. quia sunt æquè alta (10.p.) & BG. simile HL. quia BDE. simile est HKI. & DGE. ipsi KIL. vt antea. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVI.

Problema 2.

SVpra datam rectam duo triangula constituere, quæ minima sint, vel inter parallelas, & duobus datis similia.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt data recta MO. & data triangula ABC. HIK. & supra MO. constituenda triangula MPN. NRO. quæ minima sint, vel inter parallelas, & similia datis ABC. HIK.

Construct. Fiat BDE. simile HIK. & minimum ipsi ABC (65.p.) Diuidatur postea recta MO. in N. vt AE. in B (2.p.3.) & fiat supra MN. triangulum MNP. simile ABC. & supra NO. triangulum NOR. simile BDE (3.p.7.) Dico MPN. NOR. esse minima, & inter se parallelas, & similia datis.

DEMONSTRATIO.

CVm enim A.B.C. BDE. sint minima ex constructione, & MO. sit diuisa in ratione rectæ AE. triangula MNP. NOR. similia ipsis ABC. BED. erunt etiam minima (30.p.) Ergo

MNP.

MNP. NOR. erunt triangula æque alta, vel inter duas parallelas (10. *p.*) Deinde MNP. simile est ABC. & NOR. simile BED. & BED. ipsi HIK. ex cõstructione: ergo NOR simile etiam est ipsi HIK (4. *l.* 6.) Quod, &c.

Si fuerint data duo parallelogramma AF. HL. fiat. BG. minimum ipsi AF. & simile HL. & diuisa MO. in N. vt AE. in B. fiant MQ. NS. similia ipsis AF. BG (3. *p.* 7.) & erunt MQ. NS. similia datis AF. BG. & minima inter se: quæ omnia demonstrantur vt antea.

PROPOSITIO LXVII.
Problema 3.

D*Ato triangulo, parallelogrammum efficere ipsi minimum, & alteri simile, vel e contra.*

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt datum triangulum ABC. & efficiendum parallelogrammum BF. ipsi minimum, & parallelogrammo IL. simile.

Construct. Ducatur CG. perpendicularis basi AB. & diuisa CG. bifariam in H. ducatur HF. basi AB. parallela, & continuata AB. infinitè, fiat angulus EBD. æqualis KIM, donec BD. secet HF. in D. præterea ducto diagonio MK. fiat angulus BDE. æqualis IMK. & ducatur EF. parallela BD. Dico parallelogrammum BF. esse minimum triangulo ABC. & simile dato IL.

DEMONSTRATIO.

CVm enim CG. sit altitudo Trianguli ABC. & HG. parallelogrammi BF. habet triangulum duplam parallelogrammi altitudinē ex constructione: Ergo △ABC. & ▭BF. sunt figuræ inter se minimæ (11. *p.*)

Deinde cum triangula BED. EDF. sint in omnibus æqualia (7. *l.* 1) sunt similia: cum etiam IKM. KLM. & BED. æquiangulum, & simile IMK. ex constructione, est parallelogrammum BF. simile dato IL. & minimum triangulo ABC. Quod erat demonstrandum.

Construct. 2. Eadem ratione si datum sit Parallelogrammum BF. & constituendum triangulum ABC. ipsi minimum, & simile dato NPQ. Continuata FDH. ex quolibet puncto H. demittatur perpendicularis HG. & HC. sumatur æqualis HG. & ducta CZ. basi BE. parallela, fiat angulus ABC. æqualis NPQ. & BCA. æqualis NQP. eritque N. æqualis CAB. (3. *l.* 1.) & triangulum ABC. æquiangulum & simile NPQ. & cum ABC. habeat duplam parallelogrammi BF. altitudinem, erunt ABC.

BF.

BF. figuræ minimæ (11. *p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXVIII.
Problema 4.

SVpra datam rectam constituere triangulum, & parallelogrammum datis similia, & inter se minima.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SIt data recta NO. supra quam consti tuenda sunt triangulum NPQ. & parallelogrammum PS. similia datis △ABC. & ▱IL. quæ sint inter se minima.

Construct. Fiat parallelogrammum BF. simile IL. & minimum ipsi ABC (97. *p.*) & diuisa NO. in P. vt AE. in B. (2. *p.* 3.) Supra NP. fiat triangulum NPQ. simile ABC. & supra PO. parallelogrammum PS. simile BF. vel IL. (3. *p.* 7.)

DEMONSTRATIO.

CVm NO. & AE. sint similiter diuisæ, & ABC. BF. sint figuræ minimæ, erunt etiam △NPQ. & PS. ▱ minima inter se (30 *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXIX.
Problema 5.

DAto quolibet rectilineo inuenire rationem ipsius ad triangulare segmentum, & efficere triangulum ipsi minimum alteri simile.

EXPOSITIO. Fig. 24.

DAto rectilineo ABCDE efficiendum est Triangulum BHI, ipsi minimum, & simile dato KLM.

Construct. Ducātur diagonia AD. AC. &c. & continuato latere CD sit EF. parallela diagonio AD. & FG. parallela diagonio AC (quod continuandum est, donec omnibus diagonijs ducantur parallelæ ad continuata latera) & erit ratio BG. ad BC. vt Polygonum ABCDE. ad triangulare segmentum ABC (17. *p.*) Ducantur ergo GI. parallela basi ABH. & fiat angulus HBI. æqualis K. & BIH. æqualis M. Dico triangulum BHI. ex constructione simile KLM. esse minimum Polygono ABCDE.

DEMONSTRATIO.

DEmittatur enim perpendicularis IN. & fiat CO. parallela basi AB. Quoniam GI. CPO. BN. sunt parallelæ, est vt BG. ad BC. ita BI. ad BP. & vt BI. ad BP. ita IN. ad ON (2. *l.* 6.) Ergo IN. ad ON. est vt BG. ad BC (1. *l.* 5.) nempe vt

to-

totum Polygonum ABCDE. ad segmentum ABC. sed IN. est altitudo trianguli BIH. & ON. altitudo triangularis segmenti ABC. Ergo altitudo trianguli BIH. ad altitudinem segmenti ABC. est vt totum Polygonũ ABCDE. ad triangulare segmentum ABC. Ergo Triãgulum BIH. minimum est Polygono ABCDE (12. *p.*) & ex constructione simile dato KLM. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXX.
Problema 6.

D*Ato Triangulo efficere rectilineum ipsi minimum, & dato simile.*

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt datum Triangulum QRS & constituendum est rectilineum AGHIKM. ipsi minimum, & simile dato ABCDEF.

Construct. Ductis diagonijs AE. AD. AC. inueniatur ratio rectilinei ABCDEF. ad triãgulare segmentum ABC. vt BN. ad BC (69. *p.*) & si bases AB. QR. sunt in eadem recta ducatur SO. parallela basibus AB. QR. secans BN. in O. & fiat BO. ad BP. vt BN ad BC (2. *p.* 7.) Si verò AB. QR. non sint in eadem recta: ducatur SY. perpendicularis, & in recta AB continuata sumatur quodlibet punctum X. & perpendidicularis XZ. æqualis YS. & ducatur ZO. parallela basi AB, & fiat vt antea vt BN. ad BC. ita BO. ad BP.

Deinde ducatur PH. parallela basi AB. secans diagonium in H. & fiant HG. HI. IK. KM. lateribus parallelæ, & erit rectilineum AGHIKM. simile ex parallelismo ipsi ABCDEF. (3.*p*.7.) Dico esse etiã minimũ triãgulo QRS.

DEMONSTRATIO.

PErpendiculum OT. est altitudo trianguli QRS. & VT. altitudo triangularis segmenti AGH. Est igitur TO. ad TV. sicut BO. ad BP. (2.*l*.6.) Sed in parallelogrãmo GP. sunt æquales GH. BP (7.*l*.1.) Ergo TO. ad TV. est vt BO. ad GH. vel BN. ad BC. ex constructione, hoc est, vt rectilineum ABCDEF. ad segmentum ABC (17.*p*.) sed etiam vt rectilineũ ABCDEF. ad triangulum ABC. ita rectilineum AGHIKM. ad triangulum AGH (4.*l*.6.) Ergo ratio BO. ad BP. vel BH. hoc est TO. ad TV. est ratio rectilinei AGHIKM. ad triangulare segmentum AGH (1.*l*.5.) Ergo TO. altitudo Trianguli QRS. est ad altitudinem TV. segmenti AGH. vt totum rectilineum AGHIKM. ad triangulare segmentum ABG. Ergo AGHIKLM & QRS. sũt figuræ minimæ (12.*p*.) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXI.
Problema 7.

SUpra datam rectam constituere triangulum, & rectilineum datis similia quæ inter se minima sint.

EXPOSITIO. Fig.25.

SIt data recta *fg*. & rectilineum ABCDEF. & Triangulum QRS. diuidenda est recta *fg*. in *y*. vt rectilineum supra *fy*. & triangulum supra *yg*. similia datis sint minima.

Construct. Fiat triangulum simile dato QRS. & minimũ rectilineo ABCDEF. ex 5. *p*. vel rectilineum AGHIKM. simile dato ABCDEF. & minimum triangulo QRS. ex 6. *p*. & diuidatur *fg*. in *y*. vt sit *fy*. ad *yg*. sicut AG. ad QR (2 *p*. 3.) & supra *fy*. fiat rectilineum simile AGHIKM. & supra *yg*. triangulum simile QRS. (3. *p*. 7.) Dico factum.

DEMONSTRATIO.

CVm enim AGHIKM. & QRS. sint figuræ minimæ ex cõstructione: & *fg*. sit diuisa in ratione basium AG. ad QR. erunt figuræ supra *fy*. *yg*. minimæ (30. *p*.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXII.
Problema 8.

Datis quibuſcumque triangulis, vel parallelogrammis aliud efficere omnium ſummæ minimum, & dato ſimile.

2 *Supra datam rectam triangula, vel parallelogramma conſtituere datis ſimilia, quorum vnum minimum ſit reliquorum ſumma.*

EXPOSITIO. Fig. 26.

Sint data Triangula ABC. DEF. HIK. quæritur PQS omnium ſummæ minimum, & ſimile dato MON.

Conſtruct. 1. Ducantur ex verticibus perpendiculares AB. DG. HL. & aſſumpto in recta infinita PQ. quolibet puncto P. ſit PR. ipſi perpendicularis, & æqualis ſummæ omnium perpendiculorum AB+DG+HL. & ducatur RS. infinita parallela PQ. Fiat deinde angulus QPS. æqualis M. & PSQ. æqualis O. eritque SQP. æqualis N (3.*l*.1) & triangulum PQS. æquiangulum, & ſimile MNO. eritque minimum datis ABC. DEF. HIK.

DEMONSTRATIO.

QVoniam ex conſtructione habet PQS. altitudinem PR. æqualem ſummæ altitudinum AB. DG. HL. eſt omnium ſummæ mini-

ni-

nimum (21.*p.*) Idemque est de Parallelogrammis. Quod erat demonstrandum.

EXPOSITIO 2.

2 Sit data recta TZ. supra quam constituenda sint quatuor triangula similia datis ABC. DEF. HIK. MNO. ita vt siminimile MNO. minimum sit ad summam similiũ ABC. DEF. HIK.

Construct. 2. Fiat primo triangulũ PQS. simile MNO. quod sit minimum reliquorum summæ ABC. DEF. HIK. vt antea. Deinde sumatur basium BC. EF. IK. PQ. summa: & fiat vt summa basium ad BC. ita TZ. ad TV. & iterum vt summa basium ad EF. ita TZ. ad VX. & iterum vt summæ basium ad IK. ita TZ. ad XY. (2.*p.* 7.) Constituatur deinde supra TV. triangulum simile ABC. & supra VX. triangulum simile DEF. & supra XY. triangulum simile HIK. & supra YZ. simile PQS. Dico triangulũ supra YZ. esse omnium summæ minimum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim recta TZ. sit diuisa ex constructione in ratione basium BC. EF. IK. PQ. & △ PQ. sit minimum ad triangula BC. EF. IK. erit △ YZ. minimũ triangulis TV. VX. XZ (30 *p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LXXIII.
Problema 9.

CVilibet rectilineo aliud minimum efficere alteri dato simile.

2 *Supra datam rectam duo rectilinea constituere minima, & datis similia.*

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt datum rectilineum ABCDE. cui minimum efficiendum est IVST. simile dato IKLM.

Constructio. Ratio rectilinei ABCDE. ad ABE. sit AG. ad AE. (17.*p.*) & GH. perpendicularis BAH. Præterea ratio IKLM. ad IKL. sit KN. ad KL. (17.*p.*) & NO. perpendicularis basi IKO. sumatur OP. æqualis HG. & fiat vt NK. ad KL. ita OP. ad OR (2.*p.*7.) & RS. parallela IK. secans diagonium in S. ductis ST SV. &c. parallelis erit IVST. simile IKLM (3.*p.*7.) Dico IVST minimum esse ipsi ABCDE.

DEMONSTRATIO.

REctilineum IKLM. ad segmentum IKL. est vt IVST. ad IVS (4.*l.*6.) sed IKLM. ad IKL. est vt KN. ad KL. hoc est vt PO. ad OR. Ergo IVST. ad IVS. est vt OP. ad OR. sed quodlibet triangulum nempe GHA. habens altitudinē GH. vel PO. est minimum ipsi ABCDE. quia

eius

eius altitudo GH ad altitudinem HQ. segmēti ABE. est vt ABCDE. ad ABE. & etiam est minimum rectilineo IVST. quia altitudo eius OP. ad altitudinem OR. segmenti IVS. est vt IVST. ad IVS (*12.p.*) Ergo etiam rectilinea ABED. IVST. sunt inter se minima (*9.p.*) Quod fuerat demonstrandum.

CONSTRVCT. 2. ET DEMONST.

2 Sint data rectilinea ABCD. IVST. & recta XZ. supra quam duo alia ipsis similia collocanda sunt, & inter se minima.

Fiat IVST. minimum ipsi ABCDE. & simile IKLM. vt antea deinde diuidatur XZ. in Y. vt XY. ad YZ. sit vt AB ad IV. vel vt summa AB + IV. ad AB. ita XZ. ad XY (*2.p.7.*) & fiat supra XY. rectilineū simile ABCD. & supra YZ. aliud simile IVTS (*3.p.7.*) & erunt inter se minima, quia XZ. diuisa est in ratione basium AB. IV. (*30.p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXIV.

Problema 10.

Datis quibuslibet rectilineis alia ſimilia inter ſe minima efficere.

2 *Datam rectam diuidere in qualibet rectilinea minima datis ſimilia.*

EXPOSITIO. Fig. 28.

Sint data rectilinea A. B. C. D. E. efficienda ſunt alia ſimilia, vt omnia ſint inter ſe minima.

Construct. 1. Fiat F. ſimile B. & minimum Triangulo A. (70. *p.*) Item G. ſimile C. & minimum ipſi A. Item H. ſimile D. & minimum eidem A. Item M. ſimile E. & minimum eidē A. (70. *p.*) vel ſi A. non ſit triangulum (73. *p.*) Dico A. F. G. H. M. eſſe minima inter ſe.

DEMONSTRATIO.

Cvm enim omnia minima ſint ex constructione ipſi A. erunt inter ſe minima (9. *p.*) Quod erat, &c.

CONSTRVCT. 2. ET DEMONST.

2 Sit data recta XZ. diuidenda in figuras minimas ſimiles A. B. C. D. E. Fiant minimæ A. F. G. H. M. vt antea, & poſtea fiat vt ſumma baſium A. F. G. H. M. ad baſim A ita XZ. ad XP. & ſupra XP. fiat rectilineum ſimile A. Deinde vt ſum-

summa basium A. F. G. H. M. ad basim F. ita XZ. ad PQ. & fiat supra PQ. rectilineum simile F. (3. *p.* 7.) Quod continuabitur donec expleãtur rectilinea: eritque XZ. diuisa in ratione basium figurarum minimarum: Ergo figuræ supra partes rectæ XZ. constitutæ datis similes erunt interse minimæ (30. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXV.

Problema 11.

Datam rectam diuidere in quotcum figuras minimas similes inter se.

2 *Datam rectam diuidere in duas partes, vt figura vnius minima sit ad quotcumque similes alterius partis.*

3 *Datam rectam diuidere in duas partes, vt quotcumque figura vnius minima sint ad quotcumque similes alterius.*

CONSTRVCT. ET DEMONST. Fig. 29.

Sit data recta AB. diuidatur in tot partes æquales, quot figuræ similes desiderantur: nempe bifariam in F. & erunt AF. FB figuræ minimæ, vel trifariam in E. G. & runt AE. EG. GB. minimæ, vel quadrifariam in I. F. M. &c. Semper enim figuræ similes habebunt æqualem basim, ex æquali diuisione: Ergo erunt interse minimæ (28 *p.*)

CONS-

CONSTRVCT. ET DEMONST. 2.

2 Sit diuidenda AB in duas partes vt figura vnius minima ſit duabus alterius, vel tribus, &c. Diuidatur in tot partes æquales, quot ſunt omnes figuræ, & primum punctum diuiſionis eſt quæſitum: nempè ſi figura vnius minima eſſe debeat duabus alterius, quia ſũt tres figuræ, diuidetur in tres partes AE. EG. GB. & figura EB. minima erit duabus AE. Si vna debeat eſſe minima quinque alijs diuidetur in 6. partes AD. DE. EF. FG. GH. HB. & figura DB. minima erit 5. AD. Ratio omnium eſt, quia ſemper maior pars eſt minoris multiplex: Ergo figura ex parte maiori, minima erit totidem figuris ſimilibus ex minori, quoties hæc continetur in maiori, quia eius baſis ſummæ baſium eſt æqualis (29. *p.*) Quod, &c.

CONSTRVCT. ET DEMONST. 3.

3 Sit AB. diuidenda vt quinque figuræ vnius partis minimæ ſint ad ſeptem alterius: vel in quacumque alia ratione. Diuidatur tota recta in tot partes æquales, quot ſunt omnes figuræ, nempe in 12. & ſumatur AK continens quinque partes, & KB. ſeptem. Dico 7. figuras ex AK. minimas eſſe 5. figuris ex KB. & ſic de quacumque alia diuiſione.

Ratio eſt, quia cum 5. AC, conſtituant AK. &

& 7. AC. constituant KB. communis mensura AC. continetur quinquies in AK. & septies in KB. Ergo 7. figuræ AK. & 5. *ff*. KB continent æqualem basium summã: Ergo 7. AK. minimæ erũt 5. figuris partis oppositæ KB (*29 p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVI.
Problema 12.

Datis quibuscumque rectilineis aliud efficere alteri dato simile, quod minimum sit omnium antecedentium summa.

EXPOSITIO. Fig. 30.

Sint Rectilinea ABCD. GHIKL. OPQ. ST. VX. & efficiendum est *bdf*. simile STVX. & reliquiquis omibus minimum.

Construct. Inueniãtur omnium rationes ad Triangularia segmenta (*69. p.*) & demissis perpendicularibus FE. MN. QR. YZ. sumatur seorsum quælibet *bg* infinita, & fiat vt YZ. ad summam perpendicularium FE + MN + QR. ita basis ST. ad nouam basim *bd* (*2 p. 7.*) & supra *bd*. fiat rectilineum *bfl*. simile SVX (*3 p. 7.*) Dico rectilineum *bfl*. minimum esse reliquorum summæ ABCD + GHIKL + OPQ.

DEMONSTRATIO.

Fiat enim vt TV. ad TY. ita *df*. ad *dq*. & demittatatur *gg.* perpēdicularis. Cum ex similitudine figurarum sint anguli YTZ. *qdg.* æquales anguli, & Z. *g.* recti erunt Y. *q.* æquales (3. *l.* 1.) Ergo proportionales sunt, vt ST. ad TV. ita *bd.* ad *df.* & (2. *l.* 6.) & vt TV. ad TY. ita *df* ad *dq.* ex ex constructione; & vt TY. ad YZ. ita *dq.* ad *qg.* (2. *l.* 6.) Ergo vt composita ratio ST. ad YZ. ita *bd.* ad *qg.* (1. *l.* 5.) & alternando vt ST. ad *bd.* ita YZ. ad *qg.* sed ST. ad *bd.* ex constructione est vt YZ. ad summam perpendiculorum FE + MN + QR. Ergo YZ. ad *qg.* est vt YZ ad summam perpendiculorum FE + MN + QR (1. *l.* 5.) Ergo *qg.* æqualis est summæ FE + MN + QR (2. *l.* 5.) Ergo *bdfl.* minimum est summæ reliquorum ABCD + GHIKL + OPQ (25. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVII.
Problema 13.

DAtis quotcumque rectilineis alia similia efficere in eadem, vel in qualibet aliā ratione, vt istorum summa minima sit aliorum summa.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SInt data rectilinea ABCD. GHKL. OPQ. ST VX. *bdfl.* alia similia datis STVX. *bdfl.* efficienda sunt in eadem basium ratione, quorū

sum-

ſumma minima ſit trium priorũ ſummæ AB CD+FGHKI+OPQ.

Construct. Inueniantur rectilineorum rationes ad ſua triangularia ſegmenta (*69 p.*) & demiſsis perpendicularibus FE.MN.QR. tum YZ.*qg.* ſit *mn.* ſumma trium FE.MN.QR. & ſit *rp.* ſumma duarum YZ+*qg.* nempe *rk.* æqualis YZ. & *kp.* ipſi *qg.* diuidatur *mn.* in *y.* ſicut *rp.* in k. (*2.p.3.*) & fiat ſicut *rk.* vel YZ. ad ST. ita *my.* ad *x.* & iterum ſicut *kp.* vel *qg.* ad *bd.* ita *yn.* ad *z.* (*3 p.7.*) Tandem ſupra *x.* fiat rectilineum ſimile STVX. & ſupra *z.* aliud ſimile *bdfl.* Dico horum ſummam minimam eſſe ſummæ rectilineorum ABCD+GHIK+OPQ.

DEMONSTRATIO.

CVm enim ex constructione ſit *my.* ad baſim *x* vt YZ. ad baſim ST. & *yn* ad baſim *z.* vt *qg.* ad baſim *bd.* erunt *my. yn.* altitudines figurarum *x. z.* ſimiles iſis YZ. *qg.* (*4 l.6.*) ſed *mn.* eſt ſumma altitudinum FE+MN+QR. Ergo altitudines in figuris *x. z.* æquantur altitudinibus in figuris ABCD. FGHK. OPQ. Ergo ſumma figurarum *x. z.* minima eſt ſummæ figurarum ABCD+GHK+OPQ (*26.p.*) Quod erat demonſtr. &c.

Construct. 2. Similiter ſi ratio data baſiũ homologarum ipſis ST. *bd.* ſit *a* ad *c.* diuidatur

O ſum-

ſumma altitudinum *mn.* in *y.* vt *my* ad *yn.* ſit vt *a* ad *c.* & reliqua eodem modo perficientur vt antea. Quod ſpeciali demonſtratione non indiget. Si verò nulla ratio determinata ſit, poteſt liberè ſumi quodlibet punctum *y.* in ſumma altitudinum *mn.* & ſemper figuræ ſupra inuentæ *x. z.* prioribus erunt minimæ. Vnde patet infinitas figuras datis STX. *bdl.* ſimiles inueniri poſſe, quarum ſumma ſit ſummæ trium antecedentium minima.

PROPOSITIO LXXVIII.
Problema 14.

DAtam rectam vno puncto diuidere vt rectilineum vnius partis dato ſimile minimum ſit ad ſummam duorum, trium, &c. alterius partis, alijs etiam datis ſimilium.

EXPOSITIO. Fig. 31.

SInt data rectilinea A.B.C.D.E. & recta LM. diuidenda eſt in N. vt rectilineũ ſupra NM. ſimile dato E. minimum ſit ad ſummam rectilineorum ſupra LN. quæ ſimilia ſint datis A.B.C.D.

Conſtruct. Sumantur quatuor rectæ F. G. H. I. æquales, quæcumque ſint: & ſupra F. fiat rectilineum ſimile A. & ſupra G. ſimile B. & ſupra H. ſimile C. & ſupra I. ſimile D. &c. Inueueniatur deinde rectilineum simile E. quod sit minimum factorum summæ F.G.H.I (*76.p.*) & sit eius basis K. Fiat præterea vt summa basium F+K. ad basim K. ita LM. ad NM (*2.p.7.*) & supra LN. fiant quatuor rectilinea similia datis A.B.C.D. vel F.G.H.I. & supra NM. aliud simile E. vel K. Dico rectilineum NM. esse minimum illorum quatuor summæ supra LN.

DEMONSTRATIO.

RECta enim LM. diuisa est in N. in ratione basium F. vel G. vel H. vel I. quæ omnes æquales sunt, & K. ex constructione: Ergo sicut K. minimum est ad summam F.G.H.I. ita NM. minimum erit ad summam 4 LN. factis F.G.H.I. similium, vel datis A.B.C.D. (*30.p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXIX.
Problema 15.

DAtam rectã vno puncto diuidere vt summa rectilineorum datis similium vnius partis, minima sit summa rectilineorum datis similium alterius partis, licet omnia sint inter se dissimilia.

EXPOSITIO. Fig. 32.

SInt data rectilinea A. B. C. D. E. F. & recta QR. diuidenda in S. vt tria rectilinea supra

QS. similia datis A. B C. minima sint duobus, vel tribus, vel pluribus supra SR. quæ datis D.E.F.&c. similia sint.

Constract. Primo assumpta pro basi quacumque recta G. fiant supra ipsam, vel supra æquales G.H.I. rectilinea similia datis A. B. C. & supra eandem, vel alias quascumque inter se æquales K. L M. rectilinea datis D.E.F. similia. Deinde fiant rectilinea N O. P. similia factis K.L.M(77 *p.*) quæ minima sint factorum summæ G.H.I.& erunt bases N. O.P. æquales sicut K.L.M(13.*p.*)

Diuidatur præterea QR. in S. vt QR ad QS. sit veluti summa basium G + N. ad G. & fiant supra QR. tria rectilinea similia G. H I. vel A. B. C. & supra SR. alia similia N. O. P. vel K.L M. vel DEF. Dico summam rectilineorum Q S. similium datis A. B. C. minimam esse summæ rectilineorum S R. similium D.E.F.

DEMONSTRATIO.

CVm enim QR. diuisa sit in S. in ratione G. ad N. & tres figuræ supra G similes A. B. C. minimæ sint ex constructione tribus supra N. similibus D.E.F. erit Q.R. diuisa in ratione basium figurarum minimarum: Ergo tres figuræ supra QS. similes datis A.B.C. minimæ etiã

erunt

erunt tribus supra SR. similibus D.E.F. (30.*p.*) Quod erat demonstrandum.

Eadem omninò est constructio, & demonstratio, licet in vna parte plures sint figuræ quā in alia, dum prius omnes vnius partis reducātur ad eandem basim, & similiter alterius. Si in vna parte aliquot figuræ similes fuerint, instituitur operatio omninò, ac si essent dissimiles.

PROPOSITIO LXXX.

Problema 16.

DAtis quibuslibet punctis in plano, vel in solido inuenire centrum figurarum similium.

EXPOSITIO. Fig. 33.

SInt data puncta vtcumque disposita A. B. C. D. E F. inueniendum est centrum *ff. ss.* L. ex quo ductis rectis ad A.B.C.D.E.F. summa figurarum similium inter se sit omnium minima, minor scilicèt quàm summa ex quocumque alio puncto plani, vel solidi.

CONSTRVCT. ET DEMONST.

SI puncta data sint tantum duo A.B. iungantur recta AB. & erunt A. & B. in eadem recta AB. diuidatur hæc bifariam in G. & erit G. cētrum *ff. ss.* ad duo puncta A.B (35.*p.*)

Si

Si puncta fuerint tria A. B. C. ex centro G. duorum A.B. ducatur recta ad tertium punctum C. & diuidatur trifariam, vel sumatur tertia ipsius pars GH. & erunt 2 *ff.* GH. minimæ HC (37.*p.*) Ergo H. est *centr. ff. ss.* ad A.B. C (62.*p.*)

Si puncta fuerint quatuor A. B. C. D. inueniatur prius centrum H. trium punctorum A.B. C. & ex H. ducatur recta ad quartũ punctum D. & diuidatur quadrifariam, vel sumatur HI. quarta pars totius H D. & erit I. *centr. ff. ss.* ad A.B.C. D (37. & 62 *p.*)

Si ex I. ducatur recta I F. ad quintum punctum F. & I K. sit quinta pars ipsius IF. erit K. centrum punctorum A. B. C. D. F (37. & 62. *p.*)

Si ex K. ducatur recta KE. ad sextum punctũ E. & sumatur KL. sexta pars totius KE. erit L. *centr. ff. ss.* ad 6. puncta A. B. C. D. F. E. & ita infinite continuabitur, quovsque expleãtur omnia puncta. Hæc praxis fusius explicanda fuit in gratiam Tyronum.

SCHOLIVM.

CVm centrum *ff. ss.* sit vnicum (60.*p.*) poterit punctum L. multiplici modo inueniri, sicut enim prima operatio facta est in punctis A. B. fieri potuit in A C. vel A. E. vel F. D. &c.

In secunda etiam operatione sumi potuit

quod-

quodlibet punctum ex reliquis, & in tertia quodlibet etiam ex reliquis, &c. Semper vltima operatio finietur in L. quæ fæcunditas erit forte operanti iucunda, & mihi quidem mirabilis est.

PROPOSITIO LXXXI.
Problema 17.

DAtis quibuscumque punctis vtcumque dispositis in plano, vel in solido, inuenire minimam summam figurarum similium inter se, quæ ex quouis spatij imaginarij puncto ad data colligi potest.

CONSTRVCTIO. Fig. 34.

SInt data puncta A. B. C. D. inueniatur centrũ minimum E *ff. ss.* (80. *p.*) & ducantur rectæ EA. EB. EC. ED. quæ erunt bases figurarum similium efficientium minimam summam.

Fiat præterea angulus rectus HGF. & sumatur GH. æqualis EA. & GF. æqualis EB. & ducta FH. sit HI. ipsi perpendicularis æqualis EC. & ducta FI. sit ipsi perpendicularis IK. æqualis ED. & iungatur FK. & ita continuè fiet donec expleantur omnia data puncta. Dico FK. esse basim similis figuræ, quæ est minima summa omniũ quæ ex quolibet plani, vel solidi puncto assumi potest puncta A. B. C. D.

DE-

DEMONSTRATIO.

QVoniam punctum E. est *centrum ff. ſſ.* ad A.B.C.D (80.*p.*) ſumma figurarum ex EA. EB. EC. ED. erit omnium minima: ſed figura ex FK facta æqualis eſt ſummæ omnium FG. GH. HI. IK. vel EB. EA. EC. ED (6.*p.*2.) Ergo figura ſimilis ex FK. erit ſumma omnium minima. Quod erat demonſtrandum.

MONITVM.

OMnes rectæ, quæ ex *centro ff. ſſ* ad data puncta ducuntur, eſſe debent latera homologa figurarum quæ ex ipſis fiunt, aliter res non ſuccederet: vt ſi figuræ ſimiles ſint trapezio LMNO. & ſupra AE. fiat figura ſimilis vt AE. ſit latus homologum LM. omnes rectæ EB. EC. ED. & etiam FK. minimæ ſummæ debent eſſe latera homologa ipſi LM. Idem erit ſi AE. fiat latus homologum MN. etiam EB. EC. ED. & FK. &c.

Præterea minima ſumma inuenta FK. reducenda ſæpius eſt ad ſpeciem dati ſpatij, vel ad quadratum, aut rectangulum, quod fiet quando opus fuerit ex probl. 6. praxi. 7. noſtræ Geometriæ Practicæ.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII.
Problema 18.

Datis quotcumque punctis in plano, vel in solido vtcumque, inuenire centrum ff. ss. in quouis plano dato, & minimam plani summam.

EXPOSITIO. Fig. 35.

Sint data quæcumque puncta A. B. C. D. in plano, vel in solido, & datum planum GH. in quo non sunt puncta saltem omnia. Quæritur in eo punctum F. ex quo eliciatur minima omnium figurarũ similium summa, quæ ex quolibet eiusdem plani puncto elici potest.

CONSTRVCT. ET DEMONST.

Inueniatur primo punctum E. *centrum ff. ss.* (80 *p.*) Secundo ex E ducatur EF. perpendicularis plano GH. secans planum in F. Dico F. esse *centrum ff. ss.* plani GH.

Demonstratio constat ex 56. p.

Tandem ex centro F. ducantur rectæ ad data puncta A. B. C. D. & inueniatur summa figurarum omninò, vt in præcedenti (81. *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXIII.
Problema 19.

Datis quotcumque punctis in plano, vel in solido vtcumque, describere in dato plano circulum, vt ex quolibet circunferentiæ puncto summa figurarum similium æqualis sit cuicumque dato spatio.

EXPOSITIO. Fig. 35.

Sint data puncta A. B. C. D. in plano, vel in solido: & datum planum G H. in quo describi debet circulus T V. vt ex quolibet circunferētiæ puncto T. summa figurarum similium K. quæ fieri possunt ex rectis T A. T B. T C. T D. æqualis sit spatio dato P.

Construct. Primo inueniatur E. *centrum ff. ss.* (80. *p.*) & ex E. ducatur EF. plano dato H G. perpendicularis, & erit F. *centrum ff. ss.* in plano G H (82. *p.*) Deinde inueniatur minima summa figurarum ex F. (81. *p.*) & basis summæ homologa basi L M. sit N O. Præterea conuertatur P. in figuram similem ipsi K (6. *p.* 7.) & sit Q R. basis homologa basi L M. Diuisa Q R. bifariam, fiat semicirculus Q S R. & R S. æqualis minimæ summæ N O. & ducatur S Q.

Insuper addatur ipsi Q S, pars denominata à numero punctorum, nempè si puncta data sint

sint duo erit SX. dimidium SQ. si puncta sint tria, erit SX. tertia pars ipsius SQ. vel quarta pars si puncta fuerint quatuor, vt in præsenti, & ita infinite.

Tandem diuisa XQ. bifariam, describatur semicirculus XZQ. secans SR. in Z. Dico SZ. esse radium quæsiti circuli, & si sumatur FT. æquali SZ. & eo radio describatur circulus TV. & ex quolibet circunferentiæ puncto T. ducantur rectæ ad data puncta A. B C. D. summa figurarum similium datæ K. erit æqualis dato spatio P.

DEMONSTRATIO.

Angulus QSR. in semicirculo est rectus (3. *l.* 3.) Ergo ▱ QR. æquale est ▱ RS + ▱ SQ. similibus (4. *l.* 6.) sed ▱ QR. æquale est ex constructione ⬠P. Ergo ⬠ P. æquale est ▱ RS + ▱ SQ.

Deinde cum XZQ. sit semicirculus, & ZS. perpendicularis diametro XQ. est SZ. media inter XS. SQ. & sunt continuæ XS. SZ. SQ. (6. *l.* 6) Sed ▱ SZ. ad ▱ SQ. est in duplicata ratione SZ. ad SQ (4 *l.* 6) Ergo est vt XS. ad SQ. Ergo cũ XS. sit quarta pars SQ. erit ▱ SZ. quarta pars ▱ SQ. Ergo cum ⬠P. æquetur ▱ RS + ▱ SQ. etiam ⬠P. æquabitur ▱ RS + 4 ▱ SZ. vel 4 ▱ FT. sed etiam summa similium figurarum ex quolibet circunferentiæ puncto T. æquatur minimæ ſummæ, nempe □ NO. vel □ SR + 4 □ FT (60.*p.*) Ergo figuræ ſimiles, vel □ □. ex T. ad A B.C.D. æquantur ⬠ P. Quod erat demonſtrandum.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

SPatium datum P. maius eſſe debet minima ſumma RS. aliter nullus circulus poſſet deſcribi, vt ex ipſa conſtructione manifeſtum eſt.

Si planum datum HG. tranſeat per *centrum ff.ſſ.* abſolutè minimum, nulla perpendicularis EF. duci poteſt, quia *centrum* E. in ipſo plano eſt. Tunc ex E. ſumetur minima ſumma NO (81.*p.*) & inuenta vt antea SZ. fiat etiam E. *centrum* circuli TV. Eadem enim eſt omninò & conſtructio, & demonſtratio.

PROPOSITIO LXXXIV.

Problema 20.

DAtis quotcumque punctis in plano, vel in ſolido vtcumque diſpoſitis ſphæram deſcribere, vt ex quolibet ſuperficiei puncto ſumma ff.ſſ. quæ datis ſimiles ſint, æqualis ſit cuicumquè dato ſpatio.

EXPOSITIO. Fig. 35.

SInt data puncta A.B.C.D. Quæritur ſphæra TV.

TV. prout in theſi. Figuræ debeant eſſe ſimiles □ LM. & omnium ſumma æqualis ſpatio ⌂ P.

Conſtruct. Primo inueniatur *centrum ff. ſſ.* (80. *p.*) Deinde minima ſumma RS (81. *p.*) Tertio reducatur ⌂ P. ad figuram ſimilem □ LM (6. *p.* 7.) & ſit QR. baſis homologa LM. & ſemicirculus QSR. & in illo accomodetur RS. & ducta QSX. ſit SX. quarta pars ipſius SQ. quia data ſunt quatuor puncta A. B. C. D. & ſemicirculus XZQ. determinat radium SZ. quo deſcribetur ſphæra TV. ex E. *centro ff. ſſ.* factūque erit quod petitur.

DEMONSTRATIO.

EX quolibet puncto ſuperficiei ſumma elicitur æqualis minimæ ſummæ RS + 4 □ radij ET. vel SZ (60. *p.*) ſed 4 □ SZ. æquantur □ SQ. prout in 83, *p.* Ergo ſumma ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ puncto æquatur minimæ ſummæ + 4 □ SQ. hoc eſt æquatur □ RS + 4 □ SQ. ſed etiam □ QR. vel ⌂ P. æquatur □ RS + 4 □ SQ (4. *l.* 6.) Ergo ſumma ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ puncto æquatur ⌂ P. Quod erat demonſtrandum.

MONITUM.

QVotieſcumque in quæſtione proponitur inueniēda ſphæra, deſcribi debet ex ipſo cen-

centro absolute minimo *ff. ss.* Circulus verò describi potest, vel ex ipso *centro* absolute minimo *ff. ss.* vel ex *centro* cuiuscumque plani non transeuntis per *centr. ff. ss.* vt constat ex 60. *p.*

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

SPatium datum in hoc, & præcedenti problemate, debet esse maius minima summa. Quia si reducto ⌂P. ad ▱QR. esset ▱QR. æquale, vel minus ▱SR. etiam basis QR. æqualis esset, vel minor, quàm SR. & descripto semicirculo QSR. non posset in eo accomodari basis RS. saltem vt remaneret differentia SQ. cuius figuræ submultiplex fieri posset figura similis SZ. vnde nec sphæra, nec circulus describi posset deficiente radio. Quæ omnia satis perspicua sunt, nec vlteriore indigēt demonstratione.

PROPOSITIO LXXXV.

Problema 21.

DAtis quotcumque punctis vtcũque, sphæram describere ex centro ff. ss. vel circulum in quolibet plano, vt summa figurarum datæ similiũ, datam habeat rationē cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 35.

SInt data puncta A. B. C. D. describenda est sphæ-

sphæra TV. vel circulus in plano HG. vt summa figurarum similium datæ K. ad spatium etiam datum P. habeat datam rationem *ab*. ad *cd*.

Construct. Inueniatur primo *centrum* E. *ff. ff.* 80. *p*. vel F. in plano HG (82. *p*.) & minima summa sit NO. Reducatur ⬠ P. ad figurā similem □ K. & sit eius basis *fl*. (6. *p*. 7.) fiat insuper vt *cd*. ad *ab*. ita *fl*. ad *qg* (2. *p*. 7.) & inter *fl*. & *qg*. inueniatur media *py*. (2. *p*. 5.)

Rursus sumatur QR, æqualis mediæ inuentæ *py*. & RS. æqualis minimæ summæ NO, reliqua perficientur vt in 83. vel 84. *p*. & describatur circulus radio SZ. ex centro F. plani HG. vel sphæra ex *centro* absolute minimo *ff. ff.* E. Dico satisfactum esse quæstioni.

DEMONSTRATIO.

CVm tres rectæ *qg*. *py*. *fl*. sint continuæ, erit □ *py*. ad □ *fl*. vt *qg*. ad *fl*. (4. *l*. 6.) hoc est vt *ab*. ad *cd*. ex constructione: sed □ *py*. æquatur ex constructione □ QR. vel □ RS + □ SQ (4. *l*. 6.) hoc est □ RS + 4 □ SZ. vel TT. ex demonst. 19. *p*. Ergo minima summa, nempe □ RS. vel □ NO + 4 □ FT. sunt ad □ *fl*. vt *ab*. ad *cd*. (1. *l*. 5.) Sed ex constructione □ *fl*. æquatur ⬠ P. Ergo minima summa □ NO + 4 □ FT. se habent ad ⬠ P. vt *ab*. ad *cd*. (2. *l*. 5.) sed summa *ff. ff.* ex quolibet

libet puncto circunferentiæ, vel superficiei sphæricæ æquatur minimæ summæ □NO + 4□ radij FT (60.*p*.) Ergo summa *ff*.*ss*. ex quolibet circunferentiæ circulis, vel superficiei sphæricæ puncto ad spatium datum ⬠P. datam habet rationem *ab*. ad *cd*. Quod faciendum, & demonstrandum erat.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio data *ab*. ad *cd*. maior esse debet, quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum, nempe quam ratio □NO. ad □*fl*. vel ⬠P.

Demonstratio perspicua est. Cum enim si ex *centro ff ss*. describatur sphæra, vel circulus, summa ex quolibet superficiei sphæricæ, vel circunferētiæ circularis puncto maior sit minima summa totidem figuris similibus radij (60.*p*.) ratio summæ ex quolibet puncto maior erit quàm ratio minimæ summæ ad quodcumque spatium datum (3.*l*.5.) Quarè si inueniatur ratio minimæ summæ ad spatium datum (6.*p*.7.) determinatum erit an problema possibile, vel impossibile sit. Si ratio sit eadē, minima summa erit quæsita, sed nulla sphæra, nec circulus describi poterit.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI.
Problema 22.

Datis quibuslibet punctis in plano, vel in solido vtcumque dispositis, sphæram describere, vel in quouis dato plano circulum: vt si summæ ff. ss. ex quolibet superficiei sphæricæ, vel circunferentiæ circularis puncto addantur, vel subtrahantur quotcumque figuræ ex radio sphæræ, vel circuli, inter se, & prioribus similes: aggregatum, vel residuum datam habeat rationem cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 35.

Sint data puncta 4. nempe A. B. C. D. Quæritur sphæra TV. ex *centro* E. vel in dato plano GH. quæritur circulus TV. ex *centro* plani F. vt si ex quolibet puncto T. colligatur *summa ff. ss.* ⌂ K. illique addantur, vel subtrahantur 2. *ff. ss.* vel plures factæ ex radio ET. vel FT. aggregatum, vel residuum sit ad spatium datum ⌂P. in data ratione *ab.* ad *cd.* Et quoniam varij casus additionis, & subtractionis possunt contingere, singillatim omnes explicandi sunt.

Constructio. Primo inueniatur *cētrum ff. ss.* E. (80. *p.*) & si datum sit planum GH. *centrum* F. (82. *p.*) 2. Colligatur minima summa ex E.

vel F. (81.*p.*) & sit ▭ NO. 3. Reducatur ⬠ P. ad figuram similem ipsi ▭ K. cuius basis sit *fl.* (6.*p.* 7.) 4. Fiat vt *cd.* ad *ab.* ita *fl.* ad *qg.* (2.*p.*7.) & inter *fl.* & *qg.* inueniatur media proportionalis *py.* (2 *p.* 5.) 5. Sumatur QR. æqualis *py.* si hæc maior fuerit quā NO. & in semicirculo QSR. accomodetur RS. æqualis NO. vel *è contra* si NO. fuerit maior, ipsi fiat æqualis QR. & RS. ipsi *py.* & ducatur QSX. hæc communia sunt.

Casus 1. Numero dato punctorum A. B. C. D nempe 4. si figuræ ex radio addendæ sint. addatur numerus figurarum: quæ in nostro exemplo sunt 2 *ff.ss.* ex radio: & fiunt 6. Sumatur ergo SX. sexta pars ipsius QS. & descripto semicirculo XZQ. erit SZ. radius sphæræ ex E. describendæ, vel circuli ex F.

Casus 2. Si figuræ ex radio subtrahendæ sint, & numerus figurarum fuerit minor punctorum numero: ille subtrahatur ab isto, nempe 2 *ff.* à 4. punctis, residuum erit 2. Fiat igitur SX. secunda pars, vel dimidium ipsius QS. & descripto semicirculo, erit SZ. radius sphæræ, vel circuli.

Casus 3. Si numerus figurarum subtrahendus æqualis sit punctorum numero, quælibet sphæra ex E. vel circulus ex F. quæstioni satisfaciet.

Ca-

Casus 4. Si numerus figurarum subtrahendus nempe 7 *ff.* maior sit punctorum numero 4. auferatur *è conuerso* 4. ex 7. residuum erit 3. Tunc fiet QR. æqualis NO. & RS. æqualis *py.* & SX. erit tertia pars ipsius QS. iuxta numerum residuum 3. & SZ. erit radius quæsitus.

DEMONSTRATIO.

CVm E. sit centrum *ff. ff.* summa ex quolibet puncto T. æquatur minimæ + 4 *ff. ff.* ex ET. (60. *p.*) Ergo additis pro *casu* 1. 2 *ff.* ET (vel ablatis pro *casu* 2.) aggregatum erit æquale minimæ summæ + 6 *ff.* ET. vel SX. sed cum QS. sit sextupla SX. & SZ. media (6. *l.* 6.) □ QS. æquatur 6 □ SZ (4. *l.* 6.) Ergo aggregatum erit æquale minimæ summæ □ RS + □ QS. hoc est □ QR. vel □ *py.* sed □ *py.* ad □ *fl.* vel ○ P. est vt *qg.* ad *fl.* (4 *l.* 6) vel ex constructione, vt *ab.* ad *cd.* Ergo aggregatum, vel summa ex T + 2 *ff.* ET. est ad ○ P. datum in data ratione *ab.* ad *cd.* & eadem est demonstratio de residuo pro *casu* 2.

In *casu* 3. Cum in qualibet sphæra summa ex T. æqualis sit minimæ + 4 *ff.* ET. ablatis 4 *ff.* ET. semper remanet minima summa: Ergo omnis sphæra quæstioni satisfacit si minima summa sit ad spatium datum in data ratione; aliter nulla.

In *casu* 4. Summa ex T. æquatur minimæ + 4. *ff*. ET. ergo ablatis 7 *ff*. ET. erit residuum æquale minimæ summæ − 3 *ff*. ET. vel SZ. hoc est æquale □ QR − □ SQ ex constructione: Ergo residuum æquale erit □ SR. (4. *l*. 6.) vel □ *py*. sed □ *py*. ad □ *fl*. vel □ P. est vt *qg*. ad *fl*. vel *ab*. ad *cd*. ex constructione: Ergo residuum erit ad spatium datum □ P. in ratione data *ab*, ad *cd*. Quod erat, &c.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio data in *casu* 1. & 2. maior esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum, in 3. eadem, & in 4 minor. Quæ omnia ex constructionis demonstratione satis manifesta sunt.

PROPOSITIO LXXXVII.

Problema 23.

DAtis quotcumque punctis in plano, vel in solido, vtcumque dispositis inuenire centrũ absolute minimum ff. dd. vel centrum in dato plano.

EXPOSITIO. Fig. 36.

SInt in eodem plano, vel in diuersis, nempe in solido puncta A. B. C. D. E. Quæritur punctum O. *centrum* figurarum dissimilium, vt ductis OA. OB. OC. OD. OE. figura △ O A. simimilis debeat esse △P. & □ OB. similis □ Q. & ▭ OC. similis ▭ R. & ⬠ OD. similis ⬠ S. & ⬡ OE. similis ⬡ T. & summa ex O. sit omnium minima. Inuentio huius *cẽtri ff. dd.* operosior est, quàm inuentio *centri ff. ss.* ea tamen sic perficietur.

Construct. Primo ad confusionem, & æquiuocationem vitandam, singulis punctis apponantur figuræ datis similes iuxta quæstionis tenorem, prout apparet.

Deinde assumantur quæcumque duo puncta, vel AE. vel BD. &c. assumo igitur A. & B. & ducta recta AB. diuidatur in F. vt △ FA. simile △P. sit minimum □ FB. simile □ Q. (73. *p.*) & erit *centr. ff. dd.* ad A. & B. Ex inuento centro F. ducatur recta ad tertiũ punctum quodlibet E. vel D. vel C. Sit ergo recta FC. quæ diuidatur in G ita vt ▭ GC. simile dato ▭ R. minimum sit △GF. & □ GF. nempe duabus figuris ex GF. quæ similes sint datis △ P. & □ Q. (78. *p.*) & erit G. *centr. ff. dd.* ad A. B. C.

Iterùm ex inuento centro G. ducatur recta ad quodlibet punctum ex reliquis; & sit GD. quæ diuidatur in H. vt ⬠ HD. simile ⬠ S. minimum sit ad tres figuras HG similes iam positis △P. □ Q ▭ R. hoc est vt ⬠ HD. minimum sit ad summam △HG + □ HG + ▭ HG (78. *p.*)

De-

Denique ex H. ducatur recta ad quintum punctum E. & diuidatur HE. in O. vt ⬠OE. simile dato ⬠T. minimum ad summam quatuor figurarum supra OH. similium datis △P. □Q. ▭R. ⌂S. nempe ⬠OE. minimum sit △OH + □OH + ▭OH + ⌂OH. & ita infinitè continuabitur donec omnia expleantur puncta. Dico vltimum punctum inuentum O. esse *centrum ff dd.* ad data puncta A.B.C.D.E.

DEMONSTRATIO.

CVm AB. diuisa sit in figuras minimas △FA & □FB. est F. centrum ad A. & B (*34 p.*) & cum FC. sit à centro F. ad tertium punctum, & ▭GC. minimum sit △GF + □GF. est G. centrum ad A.B.C. (*62. p.*) & cum ex centro G. sit GD. ad quartum punctum & ⌂HD. minimũ ▭HG + □HG + △HG. est H. cẽtrum ad A. B. C.D. (*62. p.*) & similiter O. ad A.B.C.D.E. & ita infinite. Quod erat efficiendum, & demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVIII.
Problema 24.

Datis quibuslibet punctis vtcumque inuenire minimam summam figurarum datis similium, & inter se dissimilium.

2 *Inuentam summam, & singulas figuras ad quadratum reducere.*

EXPOSITIO. Fig. 36.

Sint data puncta A. B. C. D. E. in plano, vel in solido: & sit O. *centrum ff. dd.* quæ similes sint datis △P. □Q. ▭R. ⌂S. & ○T. Quæritur minima summa △OA + □OB + ▭OC + ⌂OD + ○OE. & simul Quadratum inuentæ summæ æquale; & singula quadrata singulis figuris æqualia.

Construct. Assumatur ad libitum quælibet recta IK. supra quam fiat rectangulum I*v*. æquale △OA (ex 6. *p.* 6.) & supra L*v*. fiat rectangulum L*a*. æquale □OB. & supra M*a*. fiat rectangulum M*b*. æquale ▭OC. & supra N*b*. fiat rectangulum N*c*. æquale ⌂OD. & supra V*c*. fiat rectangulum V*d*. æquale ○OE. Dico esse I*d*. summam omnium, vel minimam summam.

Ad Quadrata facile reducentur hac arte: Fiat *dl*. æqualis *d*K. & *ch*. æqualis *cd*. & *bg*. æqualis

lis *bc*. & *ax*. æqualis *ab*. & *vf*. æqualis *va*. & K*e*. æqualis K*v*. & deſcribantur ſemicirculi ſupra I*e*. L*f*. M*x*. N*g*. V*h*. *rl*. fiant ſemicirculi ſecantes K*y*. in *m*. *n*. *o*. *p*. *q*. *y*. Dico Quadratum K*m*. eſſe æquale △ O A. & Quadratum *vb*. æquale □ OB. & Quadratum *an*. æquale ▭ O C. & Quadratum *bp*. æquale ⬠ O D. & Quadratum *cq*. æquale ⬡ OE. & Quadratum *dy*. æquale minimæ ſummæ I*d*.

DEMONSTRATIO.

PPrimo ex conſtructione rectangula I*v*. L*a*. M*b*. N*c*. V*d*. æqualia ſũt △OA. □OB. ▭OC. ⬠OD. ⬡OE. Ergo cum I*d*. æquale ſit rectangulis I*v*. L*a*. M*b*. N*c*. V*d*. (1. *l*. 2.) erit I*d*. ſumma omnium minima, æqualis ſcilicet △ O A + □ OB + ▭ OC + ⬠ OD + ⬡ OE. &c.

Secundo *dy*. media eſt inter *rd*. *dl*. vel *d*K. (6. *l* 6.) Ergo Quadratum *dy*. æquale eſt ▭ I*d*. (1. *l*. 6.) nempe minimæ ſummæ. Similiter K*m*. media eſt inter IK. K*e*. vel K*v*. & *vn*. media inter L*v*. *vf*. vel *va*. & *ao*. media inter M*a*. & *ax*. vel *ab*. & *bp*. media inter N*b*. *bg*. vel *bc*. & *cq*. media inter V*c*. *ch*. vel *cd*. (ex 6. *l*. 6.) Ergo □ K*m*. æquale eſt rectangulo IK*e*. vel I*v*. vel △OA. (1. *l*. 6.) & ſic de reliquis. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXIX.
Problema 25.

Datis quibuscumque figuris rectam inuenire, supra quam totidem figuræ dd. datis similes constitutæ, æquales sint quadrato, vel cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 36.

Datæ sint figuræ △P. □Q. ▭R. ⬠S. ⬡T. quæritur recta Z. supra quam △Z. □Z. ▭Z. ⬠Z. ⬡Z. æquales sint quadrato dato, nẽpe □Y. vel cuicumque spatio cui □Y. sit æquale.

Construct. Assumpta qualibet recta X. fiant supra ipsam △X. □X. ▭X. &c. datis △P. □Q. &c. similia. Deinde inueniatur summa △X + □X + ▭X + ⬠X + ⬡X (88. *p.*) & sit I*d.* quæ reducatur ad quadratum *dy.* vt in præcedenti.

Præterea fiat vt inuenta *dy.* ad assumptam X. ita data Y. ad quartam Z. (2. *p.* 7. Dico rectam Z esse quæsitam, & △Z + □Z + ▭Z + ⬠Z + ⬡Z. æquari □Y.

DEMONSTRATIO.

Quoniam sunt proportionales vt *dy.* ad X. ita Y. ad Z. ex constructione, etiam alternando proportionales erunt, vt *dy.* ad Y. ita X ad Z. (4. *l.* 5.) Ergo etiã figuræ similes descriptæ, proportionales erunt (4. *l.* 6.) nempe vt □ *dy.* ad □ Y. ita △ X + □ X + ▭ X + ⬠ X + ○ X. ad △ Z + □ Z + ▭ Z + ⬠ Z + ○ Z. Ergo etiam alternando vt □ *dy.* ad △ X + □ X + ▭ X + ⬠ X + ○ X. ita □ Y. ad △ Z + □ Z + ▭ Z + ⬠ Z + ○ Z (4. *l.* 5.) sed □ *dy.* æquatur △ X + □ X + ▭ X + ⬠ X + ○ X. ex constructione: Ergo etiam □ Y. æquatur △ Z + □ Z + ▭ Z + ⬠ Z + ○ Z. Quod efficiendum, & demonstrandum erat.

Si autem spatium datum non fuerit quadratum, reducetur ad quadratum ex 88. *p.* & sit □ Y. æquale spatio dato. Quo posito instituetur operatio omninò vt antea, & eadem erit demonstratio. Quod in sequentibus sæpissimè obseruandum erit.

PROPOSITIO XC.

Problema 26.

REctam inuenire supra quam figuræ datis similes constitutæ: & aliæ alijs datis etiam similes, datam habeant differentiam, æqualem scilicet cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 36.

DAtæ sint species figurarum △ P. □ Q. ▭ R. ⬠ S. ○ T. Quæritur recta Z vt summa △ Z + □ Z + ▭ Z. datis similium; & summa ⬠ Z + ○ Z.

○Z. differant dato spatio □Y. vel vt differentia vtriusque summæ sit æqualis □Y.

Construct. Assumpta quælibet recta X. fiāt supra ipsam △X □X ▭X. & inueniatur eorum summa, nempè □ *at*. (88. *p*.) similiter supra eandem X. fiant ⌂X. ○X. & inueniatur eorum summa, scilicèt □ *ts*. (88. *p*.) Descripto supra *at*. semicirculo *ast*. ipsi accomodetur *ts*. & ducatur *as*. Præterea fiat vt inuenta *as*. ad assumptam X. ita data Y. ad quartam Z. (2. *p*. 7.) Dico rectam Z. esse quæsitam, & satisfacere quæstioni.

DEMONSTRATIO.

QVoniam sunt ex constructione proportionales, vt *as*. ad X. ita Y. ad Z. & alternando vt *as*. ad Y. ita X. ad Z (4. *l*. 5.) etiam figuræ similes erunt proportionales (4. *l*. 6.) vt □ *as*. ad □Y. ita △X + □X + ▭X − ⌂X − ○X. ad △Z + □Z + ▭Z − ⌂Z − ○Z. Ergo etiam alternando vt □ *as*. ad △X + □X + ▭X − ⌂X − ○X. ita □Y. ad △Z + □Z + ▭Z − ⌂Z − ○Z. (4. *l*. 5.) sed □ *as* est differentia quadratorum, nēpè □ *at* − □ *ts*. (4. *l*. 6.) quia angulus in semicirculo rectus est (3. *l*. 3.) & □ *at* − □ *ts*. ex constructione æquale est △X + □X + ▭X − ⌂X − ○X. Ergo □Y. erit etiam æquale △Z + □Z + ▭Z − ⌂Z − ○Z. Ergo summa △Z +

□Z + ▭Z. & summa ⬠Z + ◯Z. habent differentiam datam, æqualem scilicet □Y. Quod erat demonstrandum.

Si spatium datum non fuerit quadratum reducetur ad illud, sicut in præcedenti.

PROPOSITIO XCI.
Problema 27.

Rectam inuenire supra quam alia, & alia figuræ constitutæ datis similes, summam efficiant, vel differentiam habeant in data ratione cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 23.

Species figurarum datæ sint △P. □Q. ▭R. ⬠S. ◯T. Quæritur recta Z. vt summa omnium figurarum, nempe △Z + □Z + ▭Z + ⬠Z + ◯Z. ad spatium datum □Y. sit in ratione data IL ad LN. vel quæritur Z vt differentia similium △P. □Q. ▭R. & similium ⬠S. ◯T. ad spatium datum □Y. sit in data ratione IL. ad LN. hoc est vt △Z + □Z + ▭Z − ⬠Z − ◯Z. sit ad □Y. vt IL. ad LN.

Construct. Primo inueniatur LM. media inter IL. & LN. (*2.p.5.*) Deinde fiat vt LM. ad ad IL. ita Y. ad *nz*. (*2.p.7.*) & si quæritur Z. vt omnium summa sit in data ratione: inueniatur Z. vt summa △Z + □Z + ▭Z + ⬠Z + ◯Z.

æqua-

æqualis sit □*u*. ex 89.*p*. & recta Z. erit quæsita.

Secundo si quæratur Z. vt differētia vtriusque summæ, &c. inueniatur Z. vt △Z + □Z + ▭ − ⬠Z − ⬡Z. æqualis sit □*u*. ex 90.*p*. & recta Z quæstioni satisfaciet.

DEMONSTRATIO.

QVoniam ex constructione, tā summa △Z + □Z + ▭Z + ⬠Z + ⬡Z. quam summarum differentia supra Z. nempe △Z + □Z + ▭Z − ⬠Z − ⬡Z. æquales sunt □*u*. sed □*u*. ad □Y. est in duplicata ratione *u*. ad Y (4.*l*.6.) vel ex constructione in ratione duplicata IL. ad LM. hoc est vt IL. ad LN. cum sint continuæ ex constructione IL. LM. LN. Ergo tam summa supra Z. ex 89.*p*. inuenta, quam differentia supra Z. ex 90.*p*. inuenta erit ad datum spatiū □Y. in ratione data IL. ad LN (1.*l*.5.) Quod faciendum, & demonstrandum fuerat.

Problema omnem rationem admittere potest, dum summa affirmata signo + maior sit negatiua signo −, nec aliam determinationem requirit.

PRO-

PROPOSITIO XCII.
Problema 28.

Datis quibuslibet punctis vtcumque dispositis ex eorum centro ff. dd. spheram describere, vt summa figurarum datis quibuscumque similium, & inter se dissimilium, ex quolibet superficiei puncto sit aequalis cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 36.

SInt data pūcta A. B. C. D. E. Figuræ datæ △P. □Q. ▭R. ⌂S. ⬠T. quæritur *centrum* O. & radius sphæræ ex *centro* O. describendæ, vt ex quolibet superficiei puncto summa figurarum similium △P. □Q. &c. æqualis sit ▭ *z*. in *fig.* 24.

Construct. Primo ▭ *z*. reducatur ad □ *at*. (ex 88. *p.*) & diuisa basi *at*. bifariam, fiat semicirculus *ast*..

Deinde inueniatur O. *centr. am ff. dd.* (87. *p.*) & minima figurarum summa datis similium I*d*. quæ reducatur etiam ad quadratum *dy*. (88. *p.*)

Præterea fiat *ts*. æqualis *dy*. & ducatur *sa*.

Tandem inueniatur recta F*f*. vt quinque figuræ datis similes supra ipsam, nempe △F*f* + □F*f* + ▭F*f* + ⌂F*f* + ⬠F*f*. æquales sint □ *as*.

Di-

Dico rectam Ff. esse radium sphæræ, quæ si eo radio describatur ex O. satisfaciet quæstioni.

DEMONSTRATIO.

QVoniam O. est *centrum ff. dd.* ex constructione, descripta ex eo sphæra radio Ff. summa ex quolibet puncto superficiei superabit minimam totidem figuris similibus ex eodem radio (60. *p.*) nempe △Ff + □ Ff. &c. Ergo cum □ *st.* sit ex constructione minima summa, summa ex sphærica superficie superabit □ *st.* 5. *ff.* ex radio Ff. nempe △Ff + □Ff + ▭Ff. &c. sed 5 *ff.* ex Ff. nempe △ Ff + □ Ff. &c. æquantur ex constructione □ *as.* Ergo summa ex sphærica superficie superat minimam, scilicet □ *st.* toto □ *as.* sed ▭ z. hoc est □ *at.* superat □ *st.* minimam summam toto □ *as.* (4. *l.* 6) cũ angulus E. sit in semicirculo rectus (3. *l.* 3.) Ergo summa figurarum datis similiũ ex quocumque superficiei sphæricæ punto ex *centro* O. descriptæ radio Ff. æquatur ▭ z. dato. Quod erat efficiendum, & demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.
Problema 29.

Datis quibuslibet punctis vtcumque circulum describere in dato quolibet plano, vt summa figurarum datis similium ex quouis circunferentiæ puncto æqualis sit cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

Sint data puncta A.B.C.D.E. in plano, vel in solido. Datum planum quodlibet XZ vtcũque, siue in eo sint aliqua puncta, siue nullum: datum spatium sit □K. Quæritur circulus HI. in plano XZ. vt ex quolibet circunferentiæ puncto ducantur rectæ ad data puncta A.B. C.D.E. summa figurarum datis similium, & inter se dissimilium, æqualis sit □K dato.

Construct. Primo reducatur □K ad □L. Secundo inueniatur *centrum ff.da.* F. ad data puncta A.B.C D.E (87.*p.*) Tertio ducatur ex F. recta FG. plano XZ. perpendicularis. Quarto inueniatur summa figurarum datis similiũ ex G ad A.B.C.D.E. & sit □M. (88.*p.*) Quinto sit □L. æquale □M + □N (6.*p.* 2.) Inueniatur recta O. vt 5 *ff.* ex O. factæ, similes datis æquales sint □N (89.*p.*) Dico O. esse radium quæsiti circuli. Si ergo ex G. radio GH. ipsi O. æqua-

æquali deſcribatur circulus HI. in plano XZ. quæſtioni ſatisfaciet.

DEMONSTRATIO.

CVm enim ſit F *centrum* abſolute minimū ad A.B.C.D.E. ex conſtructione, & FG. plano perpendicularis, erit G *centrum* plani XZ. ad eadem puncta (56. *p.*) & deſcripto circulo HI. ſumma *ff.* ex quouis puncto ſuperabit minimam ex G. quinque *ff.* GH (60. *p.*) hoc eſt, ſuperabit □ M. quinque *ff.* O. Ergo ſūma æquabitur □ M + □ N. hoc eſt, æquabitur □ L. vel □ K. ex conſtructione. Quod fuerat demonſtrandum.

DETERMINATIO PROBL. 26. & 27.

SPatium datum maius eſſe debet, quàm ſumma ex centro ſphæræ deſcribēdæ in 92 *p.* vel circuli in 93. *p.* Cum enim ſumma ex quolibet puncto ſuperficiei, vel circunferētiæ maior ſit quàm ſumma ex centro totidem figuris ex radio: vt illa poſsit ſpatio dato æqualis eſſe debet hoc ſummam ex centro excedere, aliter erit quæſtio omninò impoſsibilis.

PROPOSITIO XCIV.
Problema 30.

Datis quibuslibet punctis vtcumque ex eorum centro ſphæram deſcribere, vel in quouis plano circulum, vt ex quolibet ſuperficiei, vel circunferentiæ puncto, ſumma ſſ.dd. datis ſimilium, datam habeat rationem cuilibet ſpatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

Sint data puncta A. B. C. D. E. eorum *centrum* F. (87.*p.*) ſpatium datum △K. Ratio data R ad S. Quæritur radius ſphæræ FP. vt ſumma *ſſ.dd.* datis ſimilium ad △K. datam habeat rationem R. ad S.

Conſtruct. Primo reducatur △K. ad □V. & fiat vt S. ad R. ita V. ad T. (2.*p.*7.) & ſit Y. media inter V. & T. (2.*p.*5.) Inueniatur minima ſumma ex F. ad A. B. C. D. E (88.*p.*) & ſit □ M. Præterea in fig. 24. BC. æqualis Y. & deſcripto ſemicirculo BEC. ſit CE. æqualis M. & ducatur BE. Inueniatur poſtea F. vt 5 *ſſ.dd.* datis ſimiles æquales ſint □ BE. Dico F. eſſe radium ſphæræ: deſcripta ergo hoc radio ſphæra FP. in fig. 25. ſatisfaciet quæſtioni.

DEMONSTRATIO.

Cum ſint cōtinuæ ex conſtructione T. Y. V. erit

erit □Y. ad □V. ſicut T. ad V (4. *l*. 6.) hoc eſt ex conſtructione vt R. ad S. ſed □Y. eſt □ BC. ex conſtructione: hoc eſt □CE + □EB. (4. *l*. 6.) hoc eſt minima ſumma □M + ſff. *dd*. ex F. datis ſimiles ex conſtructione: Ergo minima ſumma nempe □M + ſff. *dd*. FP. radij datis tamen ſimiles ſunt ad □V. vel △K. in data ratione R. ad S (1. *l*. 5.) ſed ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ puncto ſumma æquatur minimæ ſummæ, ſcilicet □M + ſff. *dd*. radij FP. quæ ſint datis ſimiles (60. *p*.) Ergo ſumma ex quouis ſuperficiei ſphæricæ puncto eſt ad △K. in data ratione R. ad S. Quod erat demonſtrandum, &c.

Si in dato plano XZ. licet in eo nullum ſit punctum, quæratur circulus HI. quæſtioni ſatisfaciens, ducatur ex F. recta FG. plano perpendicularis: & inueniatur minima ſumma ex G. in reliquis eadem eſt omninò conſtructio, & demonſtratio.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio data R. ad S maior eſſe debet quàm ratio minimæ ſummæ ad ſpatium datum, nempe maior quàm ratio □M. ad □V. aliter quæſtio erit impoſsibilis. Huius demonſtratio eadem eſt, ac propoſita in 85. *p*.

PROPOSITIO XCV.

Problema 31.

Datis quibuslibet punctis vtcumque, & qualibet recta, vel curva etiam vtcumque totidem rectas ex datis punctis inflectere ad idem rectæ, vel curvæ datæ punctum concurrentes, vt summa ff. datis similium, siue inter se similes, siue dissimiles sint, datam habeat rationem cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

Sint data puncta A. B. C. D. E. in plano, vel in solido, & data quæuis recta, vel curva PQ. vel IH. *in* quouis plano XZ. quæritur vt ad idem punctum P. vel H. rectæ, vel curvæ datæ inflectantur ex datis punctis rectæ AP. BP. &c. vt summa *ff. dd.* quæ datis dissimilibus, vel similibus inter se, similes sint datam habeat rationẽ ad quodlibet spatium datum ▭ K. nempè vt R. ad S.

Construct. Primo inueniatur *centrum ff. ss.* vel *dd.* F. ex 80. vel 87. *p.* Secundo reducatur ▭ K. ad ▭ Y. & inueniatur minima summa ex F. (81. vel 82. *p.*). Tertio inueniatur sphæra GHN. vt ex quolibet puncto superficiei summa *ff. ss.* vel *dd.* datis similium datam habeat rationem R. ad S. ex 85. vel 94. *p.* quæ secet datam

cur-

curvam, vel rectam PQ. in P. & Q. Dico puncta P. Q. rectæ, vel curvæ PQ. satisfacere quæstioni.

Si verò recta, vel curva data sit IH. in plano dato XZ. ex eius *centro ff. ʃʃ.* vel *dd.* G. iuxta quæstionem inuento ex 82. *p.* vel 87. *p.* & describatur circulus ex *centro* G. iuxta quæstionem ex 83. *p.* vel 93. *p.* qui secet rectam, vel curvam datam in H. & I Dico pũcta H & I. quæstioni satisfacere.

DEMONSTRATIO.

PVncta inuenta P. Q. sunt in superficie sphærica, cum ibi recta, vel curva secent illam: Ergo *summa ff.* datis similium erit ad □ K. in data ratione R. ad S (ex 85. vel 94. *p.*)

Similiter cùm puncta H. I. sint in circumferentia circuli IH. *summa ff.* datis similium erit ad □ K. in data ratione R. ad S (ex 85. vel 94. *p.*) Quod erat demonstrandum.

Ratio data non debet esse minor, quàm ratio summæ ex superficie sphærica tangẽte rectam, vel curvam datam: hoc est, non debet esse minor quàm ratio minimæ summæ + tot *ff.* datis similium ex breuissima distantia à cẽtro in rectam, vel curvam ad spatium datum, aliter sphæra nec secaret, nec tangeret rectam, nec curvam, & esset quæstio impossibilis.

PRO-

PROPOSITIO XCVI.
Problema 32.

Datis quibuslibet punctis vtcumque totidem rectas inflectere ad idẽ cuiuslibet plani dati punctum, vt summa aliquarum figurarum datis similium datam habeat rationem cuilibet spatio dato, & omnium summa, vel aliarum summa quibuscumque alijs etiam datis similium, datam aliam rationem habeat cuilibet alteri spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 38.

Sint data puncta A.B.C.D.E.F.G.H. in vno, vel in diuersis planis: in vno, vel in diuersis solidis. Planum datum PQ. licet in eo nullum sit punctum datum: sint data spatia □ X. & □ Y. datæ rationes R. ad S. & T. ad V. Quæritur vt ad idem punctum M. plani PQ. inflectãtur ex datis pũctis rectæ AM. BM. &c. vt summa *ff. dd.* □BM + □CM + ⬠EM. datis □. □. ⬠. similium ad □X. sint vt R. ad S. & summa reliquarum *ff. dd.* △AM + ⏢DM + ◺HM + ▭GM + ○FM datis △. ⏢. ◺. ▭. ○. similiũ ad □Y. datam aliam habeat rationem T. ad V.

Construct. Primo inueniatur *centrum* ad assignata ex vna parte puncta B.C.E. quod sit L. (87. *p.*) Ex quo ad planum PQ. ducatur perpenpendicularis LO. & ex O. describatur circulus MN. vt ex quolibet circunferentiæ puncto summa *ff. dd.* datis ⬠. □. ⬠. similiũ sit ad □X. vt R. ad S. (94.*p.*)

Secundo inueniatur *centrum ff. dd.* ad assignata puncta ex alia parte A. D. H. G. F (87.*p.*) & sit pũctum I. Ex quo ducatur plano PQ. perpendicularis IK. & ex K. describatur circulus MN. vt ex quolibet circunferentiæ puncto summa *ff. dd.* datis △. ▭. △. ▭. ○. similium ad spatium datum □Y. datam habeat rationem T. ad V. (94.*p.*) Si circuli se intersecant in M. & N. Dico vtrumque punctum M. vel N. quæstioni propositæ satisfacere.

DEMONSTRATIO.

CVm puncta M. & N sint vtrique circunferentiæ communia vbi circuli se mutuo secant summa *ff. dd.* nempe ⬠BD + □CM + ⬠EM. est ad spatium datum □X. vt R. ad S. (ex 94.*p.*) vel ex constructione: similiter summa *ff. dd.* △AM + ▭DM + △HM + ▭GM + ○FM. ad □Y. est vt T. ad V. (ex 94.*p.*) vel ex constructione: Ergo Punctum M. quæstioni satisfacit: Idemque est de puncto N. Quod efficiendum, & demonstrandum erat.

Eadem omninò est constructio, & demonstratio si in secunda parte assumenda sint omnia

nia puncta A.B.C.D.E.F.G.H. dum inueniatur ad omnia *centrum ff dd.* I. & in reliquo operatio instituatur vt antea.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

EX ipsa constructione patet determinatio problematis: si enim descripti circuli se nõ intersecant, vel tangunt, erit quæstio impossibilis. Vnde summa radiorũ nequit esse minor, quàm distantia centrorum K & O. dati plani PQ. Præterea quælibet ratio data maior esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum. Quæ omnia satis ex præcedentibus constant.

PROPOSITIO XCVII.
Problema 33.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque, totidẽ rectas inflectere ad idem plani dati punctum, vt summa aliquarum figurarum datis similium, datam habeat rationem cuilibet spatio dato; & omnium, vel reliquarum summa datis etiam similium aliam datam habeat rationem priori summa.

EXPOSITIO. Fig. 38.

SInt data puncta A.B.C.D.E.F.G.H. Planum datum PQ. Spatium datum □X. rationes datæ R. ad S. & *cd*, ad *gi*. species datæ quæ in pũ-
ctis

ctis A B.C.&c. appositæ sunt. Quæritur punctum M vel N. ad quod inflectantur rectæ ex A.B.&c. ita vt suma ▱B+□C+⬠E. ad □X. sit vt R. ad S. & omnium summa, nempe △A +▱B+□C+⏢D+⬠E+⬡F+▭G+△H. ad priorem summam ▱B+□C+⬠E. sit in data ratione *cd*. ad *gi*.

Construct. Primo inueniatur *mn*. media inter R.&S.& fiat vt *mn*. ad R. ita X. ad *ab*. Itē vt *gi*. ad *cd*. ita *ab*. ad *xz*. & inueniatur *pq*. media inter *ab*. *xz*. Omnia ex 7. probl. nostræ Geometriæ practicæ.

Secundo inueniatur *centrum ff. dd*. ad puncta asignata ex vna parte B. C. E (87. *p*.) & sit L.& LO. sit plano PQ. perpendicularis. Deinde inueniatur *centrum ff. dd*. ad puncta asignata ex alia parte, siue sint omnia, siue reliqua tantum: sint modo omnia A. B. C. D. E. F. G. H. & sit *centrum* I. (87. *p*.) & IK. perpendicularis plano PQ.

Tertio ex O. describatur circulus OMN. vt ex quolibet circunferentiæ puncto summa *ff. dd*. ad B. C. E. æqualis sit □ *ab*. (93. *p*.) Similiter ex K. describatur circulus KMN vt ex quouis circunferētiæ puncto summa ad A. B. C. &c. æqualis sit □ *pq*. (93. *p*.) Dico quodlibet punctum intersectionis circulorum, scilicet

M. vel N. quæſtioni ſatisfacere: & ſummam □ BO + □ CO + ⬠ EO. ad □ X. eſſe vt R. ad S. & ſummam △ AK + □ BK + □ CK + ▱ DK + ⬡ EK + ○ FK + ▭ GK + △ HK. ad ſummam □ BO + □ CO + ⬠ EO. eſſe in ratione data *cd.* ad *gi.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam ſumma ex O. ad B. C. E. æquatur □ *ab.* ex conſtructione, & *ab.* ad X. eſt vt R. ad *mn.* ex cõſtructione: ex qua etiã ſũt continuæ R. *mn.* S. erit ſumma ex O. ad B. C. E. vel □ *ab.* ad □ X. in duplicata ratione R. ad *mn.* hoc eſt vt R. ad S (4. *l.* 6.) Quod erat primò demonſtrandum.

Deinde cũ ſumma ex K. ad A. B. C. &c. æqualis ſit ex conſtructione □ *pq.* & ſumma ex O. ad B. C. E ſit æqualis □ *ab.* erit illa ſumma ad iſtã, vt □ *pq.* ad □ *ab.* hoc eſt vt *xz.* ad *ab.* (4. *l.* 6.) cũ ſint continuæ *xz. pq. ab.* ex conſtructione: ſed vt *xz.* ad *ab* ita *cd.* ad *gi.* ex conſtructione: Ergo ſumma △ AK + □ BK + □ CK. &c. ad ſummam □ BO + □ CO + ⬠ EO. eſt vt *cd.* ad *gi.* Quod ſecundo erat demonſtrandum.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio pro prima parte data maior eſſe debet quàm ratio minimæ ſummæ ad ſpatiũ datum prout in 94. *p.* Ratio verò pro ſecunda

par-

parte maior esse debet, quàm ratio minimæ summæ ex assignatis punctis ad □ *ab*. vel summa radiorum maior esse debet quàm distantia *centrorum* plani K.O. vt ex ipsa constructione liquet.

PROPOSITIO XCVIII.
Problema 34.

Datis quibuslibet punctis vtcumque, planũ inuenire, & in eo circulum describere vt ex quouis circunferentiæ puncto summa ff. dd. datis similium, datam habeat rationem cuilibet spatio dato: & iterum alia summa ff. dd. ex ijsdem rectis similium etiam alijs datis aliam habeat rationem, eidem, vel cuilibet alteri spatio dato; vel priori summæ.

EXPOSITIO. Fig. 39.

Sint data puncta A.B.C.D. in plano, vel in solido. Inueniendum est planum IK. in quo posit describi, & describatur circulus LNMO. vt ex quolibet circunferentiæ puncto summa *ff. dd.* ex rectis ad A. B. C. D. similium datis △. □ □. ⌂. sit ad □ T in ratione data R. ad S. & iterum summa *ff. dd.* ex eisdem rectis ad A. B. C. D. similium datis ▭. ⌂. ○. △. sit ad idẽ □ T. vel ad aliud □ Y. vel ad priorem summam in data ratione X. ad Z.

Construct. Primo inueniatur *centrum ff.dd.* ad puncta A.B C.D. quæ datis △. ▱. □. ⬠. similes sint (87.*p.*) & sit E. Deinde inueniatur etiam *cētrum ff.dd.* ad eadem puncta A.B.C.D. quæ datis ▭. ▱. ○. △. similes sint (87.*p.*) & sit F.

Secundo ducatur EF. vtrinque infinita, & transeat per ipsam quodcumque planum GH.

Tertio in plano GH. ex *centro* E. describatur circulus LPM. vt summa *ff.dd.* datis △. ▱. □. ⬠. similium ad □ T. sit vt R. ad S (94.*p.*) Et similiter ex *centro* F. in eodem plano GH. describatur circulus LQM. vt summa *ff.dd.* datis ▭. ▱. ○. △. similium sit ad idem □ T. vel ad □ Y. vt X. ad Z (94.*p.*) vel ad priorem summam (97 *p.*)

Quarto per circulorũ intersectiones L. M. ducatur in plano GH. infinita LM. & per rectam LM. ducatur planum I K. rectæ EF. vel priori plano GH perpendiculare: & radio LV. describatur in eo circulus LNMO. Dico planum IK. esse quæsitum, & circulum LNMO. satisfacere quæstioni propositæ.

DEMONSTRATIO.

CVm recta EF. coniungat *centra* circulorũ LPM. LQM. secat bifariam, communem chordam LM (5. *l.*3.) Ergo circulus LNMO.

ra-

radio V L. deſcriptus tranſit per M. cũ V L. V M. ſint æquales: ſed ex conſtructione EV. & FV. ſunt plano IK. perpendiculares ad idem punctum V. quia ſunt eadem recta EF. Ergo erit V. *centrum* plani IK (56. *p.*) Ergo ex quolibet puncto circunferentiæ ſumma ſemper erit eadem (60 *p.*) ſed ex puncto L. quod eſt in circulo LPM. ſumma *ff. dd.* datis △. ▭. □. ⬠. ſimiliũ eſt ad □ T. vt R. ad S. ex conſtructione: & ex eodem pũcto L. quod eſt in circulo LQM. ſumma *ff dd.* datis ▭. ⌂. ○. △. ſimilium ad □ T. vel ad □ Y. vel ad priorem ſummam eſt vt X. ad Z. ex conſtructione: Ergo cum etiam punctum L. ſit in circulo LNMO. plani IK ex quolibet circunferentiæ puncto erit ſumma *ff. dd.* datis △. ▭. □. ⬠. ſimilium ad □ T. in ratione data R. ad S. & ſumma *ff. dd.* datis ▭. ⌂. ○. △. ſimilium ad □ T. vel ad □ Y. vel ad priorem ſummam, iuxta conſtructionem, in alia ratione data X. ad Z. Quod erat, &c.

ALIA CONSTRVCT. ET DEMONST.

EX primo inuentis *centris* E. & F. deſcribantur duæ ſphæræ iuxta quæſtionis tenorem (94 *p.*) ſint ſphæræ LPM. LQM. earum communis ſectio erit planum circuli LNMO. cuius diameter LM. & cum tota periphæria LN MO. ſit in ſuperficie vtriuſque ſphæræ LPM.

LQ

LQM. summa ex quolibet circunferētiæ puncto eadē erit quæ ex quouis superficiei sphæricæ puncto: Ergo cùm sphæræ supponantur descriptæ iuxta quæstionis tenorē, quodlibet punctū circunferētiæ LNMO. quæstioni propositæ satisfaciet. Quod erat demonstrandū.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

SI summa radiorum, tam sphærarum, quàm circulorum plani GH. non sit maior distantia *centrorum* E. F. vel vnus radius sit maior quā summa alterius, & distantiæ *centrorum*, erit quæstio impossibilis, quia in neutro casu dabitur circulorum, vel sphærarum intersectio, vt ex ipsa constructione clarissime liquet.

PROPOSITIO XCIX.
Problema 35.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque, sphæram describere, vel circulum in dato plano, vt summa ff. datis similium ex quolibet superficiei, vel circunferentiæ puncto + vel − quotcumque figuris ex radio datis similibus, datam habeat rationem cuilibet spatio dato: vel ex datis punctis ad datam rectam, vel curvam totidē rectas inflectere sub eadem conditione.

EXPOSITIO. Fig. 40.

DAta puncta in plano, vel in solido vtcūque sint

ſint A. B C. D. E. F. G. ſpecies figurarum datæ ad illa terminādæ △*a*. ◺*b*. ▭*c*. ▯*d*. □*e*. ▱*f*. ⬠*g*. Quæritur ſphæra H. vel in plano dato MN. quæritur circulus O. vt ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ H. puncto, vel circunferentiæ circularis O. ſumma *ff*. datis *a b*. &c. ſimilium ſi ab illa prius auferantur quotcumque figuræ ex radio Z. datis alijs ſimiles; vel addantur illi ſcilicet in noſtro exemplo: ſi addantur, vel auferantur tres figuræ ex radio ſimiles ▭ K. ⬠ *m*. ○ *n* ſumma, vel reſiduum ad ſpatium datum □ Y. ſit in data ratione R. ad S.

Conſtructio. Primo inueniatur *centrum* abſolute minimum H. vel *centrum* O. in plano MN (87. *p*.) Deinde inueniatur minima ſumma ex H. vel O. & reducatur ad Quadratum LK (88. *p*.) Inſuper inueniatur T. media inter R. & S (2. *p*. 5.) & fiat vt T. ad R. ita Y. ad IK (2. *p*. 7.) & ſupra illam fiat ſemicirculus, cui accomodetur minima ſumma KL. & iungatur I L. Præterea inueniatur Z. vt ſumma *ff*. ſimilium datis *a b*. *c*. *d*. *e*. *f*. *g*. + K. *m*. *n*. ſit æqualis □ IL (ex 89. *p*.) ſi figuræ ſimiles K *m*. *n* addendæ ſunt: vel ſi fuerint auferēdæ inueniatur Z. vt ſumma *ff*. ſimilium *a*. *b*. *c*. *d*. *e*. *f*. *g*. — ſumma *ff*. ſimilium K. *m*. *n*. æqualis ſit □ IL (ex 90. *p*.) Dico rectā Z. eſſe radium ſphæræ ex *cētro* minimo H deſcribenbendæ, vel circuli ex *centro* O. & ſatisfacere quæſtioni.

Hæc conſtructio quatuor etiam caſus admittit prout in figuris ſimilibus obſeruatū eſt (86.*p.*) Quod præmonuiſſe ſufficiat, ne ſingulos cōſtructionis caſus cogamur repetere: hic tamen non attendendum eſt ad numerum figurarum ſubtrahendum, ſed ad illarum ſummā, an ſcilicet maior, æqualis, vel minor ſit ſūma figurarum ex radio iuxta punctorum numerum, & qualitatem: cùm enim figuræ diſſimiles ſint, poteſt vna figura maior eſſe pluribus alijs diſsimilibus ex eadē recta deſcriptis.

DEMONSTRATIO.

CVm H. ſit *centrum* minimum, & ſphæra ſit radio Z. ex H. deſcripta, vel circulus ex O. ſumma ex quolibet circunferentiæ puncto ad A. B. C. D. &c. æquatur minimæ ſummæ ex H. vel O + totidem *ff.* ſimilibus radij Z (60.*p.*) Ergo ſi addantur tres *ff.* △Z + ⬠Z + ○Z. datis K. *m. n.* ſimiles: erit ſumma æqualis minimæ + totidē *ff.* radij + △Z + ⬠Z + ○Z. vel *ècontr.*

Si auferantur tres *ff.* △Z. ⬠Z. ○Z. erit ſumma æqualis minimæ ſūmæ − △Z − ⬠Z − ○. ſed minima ſumma æquatur □ KL. ex conſtructione: & 7 *ff.* ex Z. ſimilibus *a. b. c. d. e f. g.* + vel − 3 *ff.* Z. ſimilibus K. *m. n.* ex cōſtructione

iux-

iuxta quæstionis tenorem, æquantur □ IL. Ergo summa ex quolibet superficiei sphæricæ, vel circunferẽtiæ circularis puncto æquatur □ LK + □ LI hoc est □ IK. (4. *l*. 6.) sed □ IK. ad □ Y. est in duplicata ratione IK ad Y. (4. *l*. 6.) vel in duplicata ratione R. ad T (1. *l*. 5.) hoc est vt R. ad S. quæ est ratio duplicata R. ad T. cùm sint continuæ R. T. S. ex constructione: Ergo summa ex quolibet puncto superficiei sphæricæ, vel circunferentiæ circularis + vel — 3 *ff*. radij Z. similibus K. *m*. *n*. est ad spatium datum □ Y. in ratione data R. ad S. Quod efficiẽdum, & demonstrandum erat.

Si quæratur punctum in recta, vel curva data, ad quod inflectendæ sunt rectæ. Dico esse punctum in quo sphæra tangit, vel secat rectam, vel curvã: aliter impossibilis erit quæstio prout in 95. *p*.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

EAdem est quæ in 86. *p*. Si enim figuræ ex radio addendæ sint, vel substrahendæ, & earũ summa minor quàm summa figurarum ex radio punctorum numero correspondentium, ratio data maior esse debet, quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum: Si summa auferenda æqualis sit alteri summæ ex radio erit ratio data ipsa ratio minimæ summæ ad spatium.

tium datum, & quælibet sphæra satisfacit. Tandem si summa auferenda maior fuerit, ratio data minor esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum: quæ omnia ex constructione, & ex 86. *p.* clarissimè inferuntur.

PROPOSITIO C.

PROBLEMA CATHOLICVM XXXVI.

DAtis quibuslibet punctis in plano, vel in solido vtcumque dispositis, circulũ describere, vt si ex quouis circumferentiæ puncto summæ figurarum datis similium ad omnia puncta, vel ad aliqua eorum determinata addantur, vel substrahantur quotcumque figuræ ex recta à circumferentia in centrum minimum, quæ datis alijs similes sint: summarum summa, vel differentia datam quamlibet rationem habeat cuilibet spatio dato.

Et iterum si summæ figurarum alijs etiam datis similium ad eadem omnia puncta, vel ad eorum aliqua, vel ad qualibet alia addantur, vel substrahantur quotcumque figuræ ex recta à circumferentia in secũdum centrum minimum, quæ alijs etiam datis similes sint, summarum summa, vel differentia quamlibet aliam datam rationẽ habeat, eidem spatio, vel cuilibet alteri dato; vel priori summarum summæ, vel differentiæ.

EXPOSITIO. Fig. 41.

SInt data puncta A. B. C. D. E. F. G. H. I. K. in plano, vel in solido vtcũque disposita: Quæriritur circulus radio LP. descriptus, vt ex quolibet circunferentiæ puncto si primo ducatur rectæ ad A. B. C D. quorum *centrum* O. summa figurarum similium △*a*. □*b*. ▭*c*. ◇*d* cum 2*ff*. ex recta OP. quæ similes sin datis ⏢*e*. ◇*f*. sumarum summa, vel omnium summa: sit ad □ X. in data ratione R. ad S. hoc est si punctum assumptum sit P. summa *ff*. △PA + □ PB + ▭ PC + ◇PD addita sũma ⏢ OP + ◇OP. vtraque simul sit ad □ X. vt R. ad S.

Iterum ex quolibet eiusdem circunferẽtiæ puncto si ducantur rectæ ad puncta B. C G. H. I. K. quorum *centrum* M. summa *ff*. similiũ datis ⏢ *e*. △*a*. △*g*. ⬠*h*. ▭*i* ○K. ablatis prius 3 *ff*. ex recta MP. quæ similes sint datis △*l*. □*m*. ⊿ *n* scilicet vtriusque summæ differentia sit : ad idem spatium □X. vel ad aliud spatium datũ □Z. vel si lubet ad priorem summam △PA + □PB + ▭PC + ◇PD + ⏢ PO. + ◇PO. in qualibet alia ratione data T. ad V.

Eadem ratione in prima quæstionis parte potuerunt assumi plura puncta, vel omnia simul; & figuræ omnes inter se similes, vel aliquæ similes, & aliæ dissimiles, vel omnes dissimiles: & sicut iubetur addi 2*ff*. rectæ OP. potuerunt addi, vel substrahi quotcumque aliæ, quibuslibet similes, &c.

Et

Et in secunda quæstionis parte sicut ex prima fuere assumpta puncta B. & C. variatis figuris, potuere etiam omnia simul assumi: & figuræ pertinentes ad secundam partem etiã omnes similes inter se, vel aliquæ similes, & aliæ dissimiles; vel omnes dissimiles: & vt præcipiũtur substrahi 3 *ff.* rectæ MP. similes *l. m. n.* plures aliæ similes, vel dissimiles substrahi, vel addi potuere: Idem de spatijs X. & Z. & rationibus datis intelligendum est. Quibus ritè intellectis accedamus ad constructionem.

CONSTRVCTIO.

PRimo claritati, & facilitati consulendum est intercluso æquiuocationi aditu, quæ facile in tanta punctorum, & figurarum diuersitate subrepere posset. Ponãtur ergo seorsum in compendium redacta, quæ vtraque pars quæstionis præscribit, hoc ordine.

Prima pars. △A. □B. ▭C. ◇D. + 2 *ff.* OP. similes △ *e* ◇ *f* ad □ X. vt R. ad S.

Secunda pars △B. △C. △G. ⌂H. ▷I. ○K. + 3 *ff.* MP. similes △ *l.* □ *m.* ◁ *n.* ad X vel Z. vel ad priorem summam vt T. ad V.

Secundo inueniatur *centrũ ff.* ad A. B. C. D. (87. *p.*) & sit O. & similiter *centrum ff.* ad B. C. G. H. I K. & sit M. & iungatur MO.

Tertio ducatur per rectam MO. quodlibet

bet planũ: in quo describatur circulus QNP. primæ quæstionis parti satisfaciens (99.*p.*)

Quarto si in secunda quæstionis parte datum sit spatium □ Z. describatur in eodẽ plano ex *centro* M. circulus QYP. satisfaciens secundæ quæstionis parti (99.*p.*) & intersecans primum circulum in P. & Q.

Quinto ducta recta PQ. per ipsam transeat planum perpendiculare rectæ YM. & in illo cũ radio LP. describatur circulus P*p*Q*q*. Dico circulum istum esse quæsitum, & satisfacere quæstioni omninò.

Sexto si ratio data T. ad V. debeat esse ad priorem summam: fiat prius vt S. ad R. ita □ X. ad □ Z. & erit □ Z. inuentum æquale priori summæ. Cognito iam □ Z. inueniatur circulus PYQ. & reliqua omnia omninò vt antea. Dico ex quolibet puncto Q circumferentiæ P*p*Q*q*. summam △QA. □QB. ▭QC. ◇QD. + ⌂OP. ◇OP. esse ad □ X. vt R. ad S. & iterum differẽtiam summarum, nempè ⌂QB. △QC. △QG. ⬠QH. ▷QI. ⬡QK. − △MP. □MP. ◁ MP. esse ad □ Z. vel ad priorem summã quod idem est, in data ratione T. ad V.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff*. ex quolibet puncto circunferentiæ PNQ. + ⌂OP. ◇OP. est ad □ X. in data

ra-

ratione R. ad S. & iterum ex quolibet puncto circunferentiæ PYQ. summa — △MP ▯MP. ⊲ MP. est ad □Z in alia data ratione T. ad V. omnia ex constructione. Sed punctum P. est commune vtrique circunferentiæ, vbi illæ se intersecant. Ergo ex communi pũcto P. summa *ff.* ad A. B. C. D. + ⊿OP. ◇OP. est ad □X. vt R. ad S. & summa ad B. C. G. H. I. K — △MP. ▯MP. ⊲ MP. ad □Z. est etiam in ratione T. ad V. sed punctum P. est in circunferentia circuli P*p*Q*q* ex L *centro* plani perpendicularis rectæ OM. ex constructione: Ergo ex quolibet puncto circunferentiæ P*p*Q*q*. sunt summæ semper eædem (57.*p*.) Ergo summa ex quolibet puncto Q. circunferentiæ P*p*Q*q*. in puncta A. B. C. D + ⊿OP. ◇OP. est ad □X. vt R. ad S. & ex eodem puncto Q. summa in B. C. G. H. I. K + △MP. ▯MP. ⊲ MP. est ad □Z in ratione data T. ad V. Quod erat demonstrandum.

Similiter si secunda summa ad priorem debuerit esse vt T. ad V. cum factum sit □X. ad □Z. vt R. ad S. & prior summa ad □X. etiam vt R. ad S. est □X æquale priori sũmæ (2.*l*.5.) Ergo cum demonstratum sit secundam summam ad □X. esse in data ratione T. ad V. etiã secunda summa ad priorem erit in eadem ratione T. ad V. prout cõstructio iuxta quæstionem

nem facta fuerit. Quod erat demonstrandũ.

CONSTRVCTIO II.

EX inuento *centro ff.* O. in puncta A. B. C. D. describatur sphæra PNQ. satisfaciens priori quæstionis parti (*99. p.*) & iterum ex inuento *centro* M. punctorum B. C. G. H. I. K. describatur sphæra PYQ. satisfaciens secundæ parti quæstionis: communis sphærarum sectio erit circulus P*p*Q*q*. & eius diameter PLQ. Dico circulum hunc esse quæsitum.

Demonstratio perspicua est. Quoniam circulus P*p*Q*q*. est communis sectio sphærarũ est in superficie vtriusque sphæræ: Ergo cùm quodlibet pũctum primæ sphæræ satisfaciat primæ quæstionis parti, & quodlibet punctũ secundæ sphæræ satisfaciat secundæ parti, tota circuli circunferentia, quæ est in vtraque superficie sphærica vtrique parti quæstionis satisfaciet. Quod erat, &c.

Si comparatio summæ ad summam faciẽda sit: debet prius inueniri □Z. æquale priori summæ; vt antea efficiendo □X. ad □Z. vt R. ad S. Hæc demonstratio clarior, & facilior est. constructio tamen praxi minus est cõmoda.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

PRoblema triplicem determinationem requirit, scilicet pro prima, & secunda quæstiostionis parte, & pro vtraque simul. Determinatio pro qualibet parte, est eadem problematis præcedentis 99. *p.* Determinatio pro vtraque parte simul, est circulum QNP. PYQ. intersectio. Si enim circuli se nō intersecent, erit quæstio omninò impossibilis, vt ex ista constructionis demonstratione liquet. Idemque dicendum de sphærarum intersectione in secunda praxi: vt perspicuum est.

OPERIS CONCLVSIO.

PRoblema Catholicum clara, ac facili methodo solutum dedimus, quod forte nimis arduum, nedum impossibile cui videri poterat. Magna sane moles minimo cētro innixa Geometriæ magnitudinem satis indigitat; & non immeritò Geometria magna in minimis dicitur in hac parte prima. Magnam esse in minimis secunda, & tertia ostendent; quæ proximè sequuntur priori saltem eo nomine maiores, quòd in determinatis planis, ac solidis perspicua breuitate nobiliora concludant.

FINIS.

APPENDIX
PRO CIRCVLI, ET ELLIPSIS QVADRATVRA.

EX demonstratis *prop.* 8. ſequitur datam eſſe Quadraturam circuli, vel Ellipſis ſi inueniatur triangulum, vel polygonū quodlibet circulo, aut ellipſi minimum. Sit enim in *fig* 3. ſemicirculus M. ſupra diametrum AB. & Triangulum rectangulum H. ſupra baſim BC. detur eſſe minimum ſemicirculo M. Dico datam eſſe quadraturam totius circuli M. Si enim ſumatur BD. æqualis diametro BA. & ducatur DI. perpendicularis diametro, erit rectangulum F. æquale circulo M.

DEMONSTRATIO.

SI BE. ſumatur æqualis BA. erit ſemicirculus BNE. quadruplus ſemicirculi M. ſcilicet vt quadratum AE. ad quadratum AB (5. *l.* 6.) Ergo cum ſemicirculi M. & Y. ſint æquales, complementum N. erit æquale duobus ſemicirculis M. & Y. hoc eſt toti circulo M. ſed cōplementum F. eſt æquale etiam complemento N. quia figuræ minimæ habent æqualia cōplementa (8. *p.*) Ergo rectangulum, vel complementum F. æquale erit circulo M. Vnde ſi ſi detur triangulum rectangulum ſemicirculo minimum datum erit parallelogrammum rectangulum circulo æquale. Si verò triangulum non ſit rectangulum, erit parallelogrammum F. circulo æquale: & vtrumque facile ad quadratum reduci poterit, &c.

Tandem ſi rectilineum datum circulo minimum ſit polygonum quodlibet irregulare, habebitur complementum rectilineũ circulo æquale in quadratum facile reducendum. Qui ergo rectilineum circulo minimum demonſtrauerit, circuli Quadraturam perficiat.

SCHOLIVM.

Hinc apparet mirabilis connexio Minimorum cum grauitatis *centro.* Si enim rectilineum inueniatur circulo, ellipſi, vel ſectori minimum data erit circuli, & ellipſis quadratura, vnde etiam, & grauitatis *centrum* partiũ ipſius circuli, prout expoſuit P. IOANNES DE LA FAILLE, Regius Profeſſor in hac Matritenſi Acadæmia Anteceſſor noſter: & *è conuerſo* dato *centro* grauitatis dabitur etiam circuli Quadratura, vnde & polygonum cuilibet ſimile circulo minimum: Data etiam Quadratura vtrumque *centrum*, minimum ſcilicet, & grauitatis vice verſa innoteſcet. Tres iſti Gorgij nodi adeò inter ſe connexi, vt quo-

quouis soluto, soluti etiam reliqui sint, hanc habent inconnexionem, vt quiuis seorsim ab alijs investigari queat. Nouam igitur aperuimus viam ad circuli, vel ellipsis Quadraturam investigandam Geometriæ studiosis fortè non iniucundam.

FINIS.

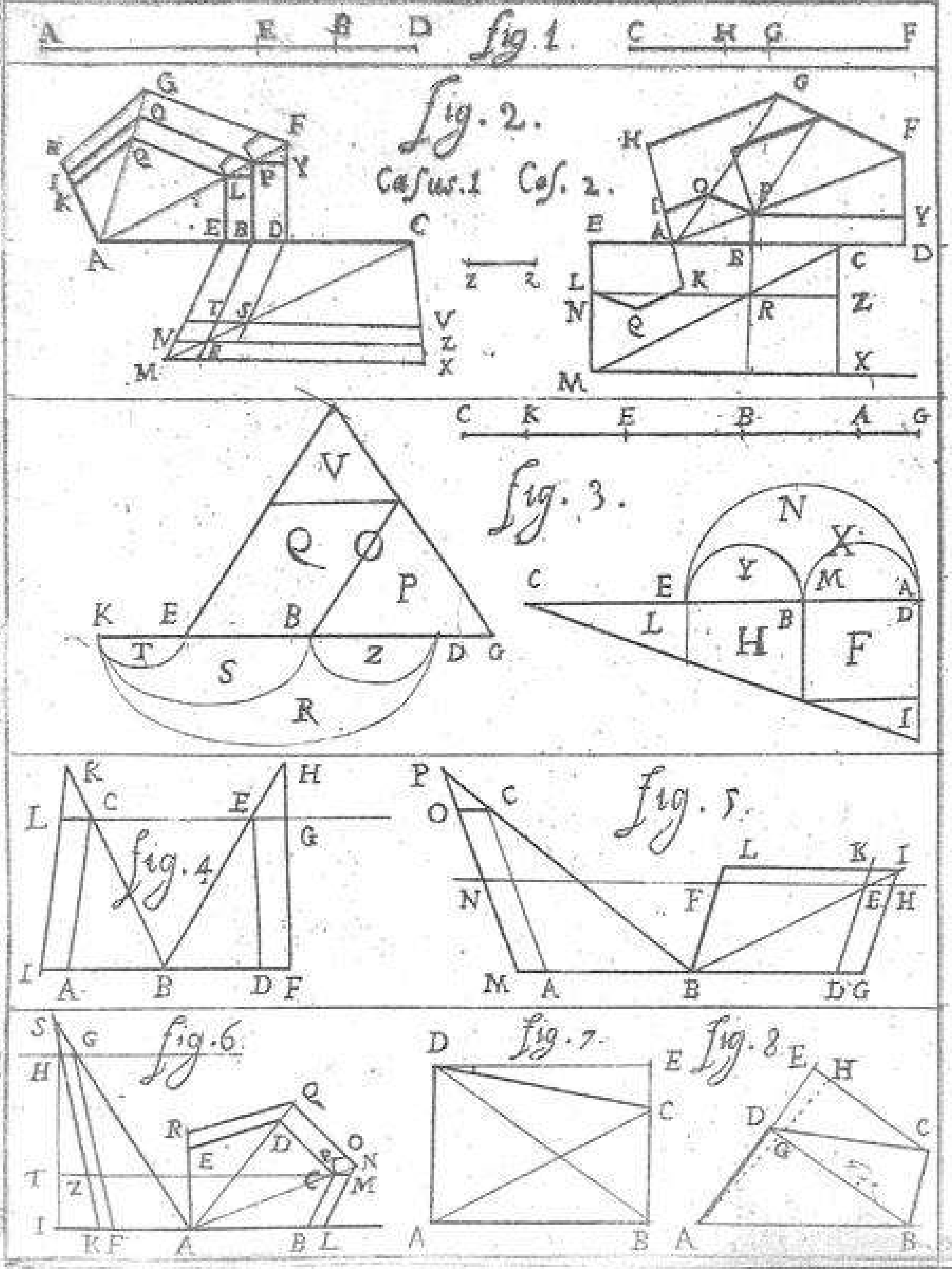


fig. 1
fig. 2.
Casus. 1 Cas. 2.
fig. 3.
fig. 4
fig. 5
fig. 6
fig. 7
fig. 8

fig. 9. L. II P. I

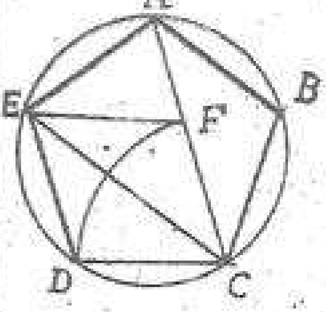


fig. 10.

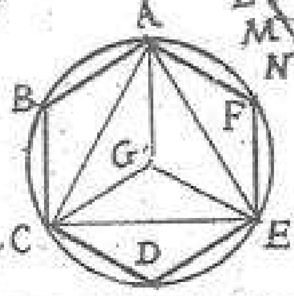


fig. 11

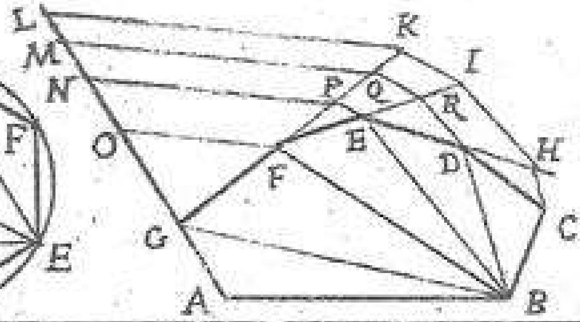


fig. 12.

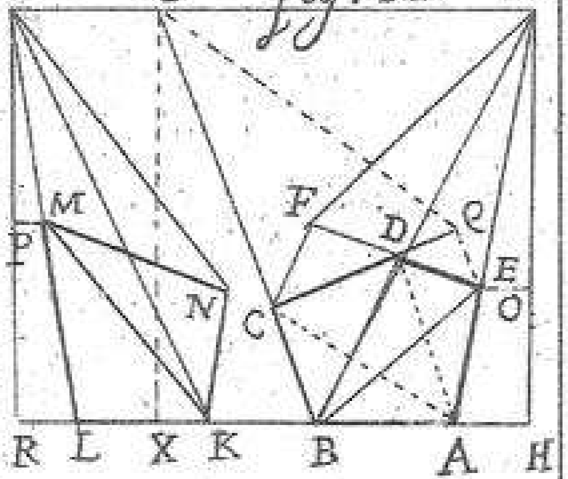


fig. 13

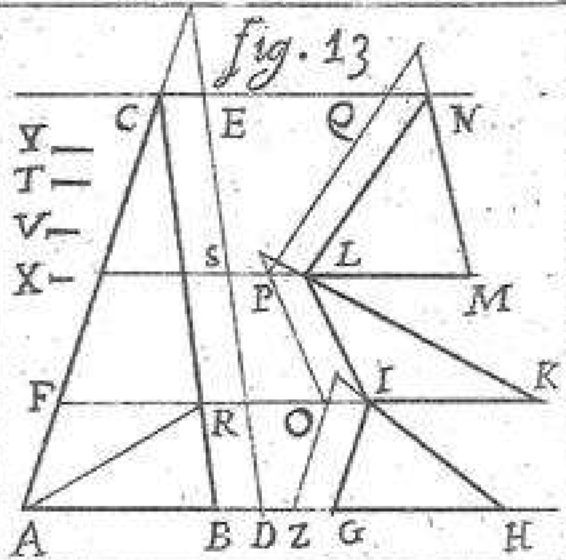


fig. 14. S

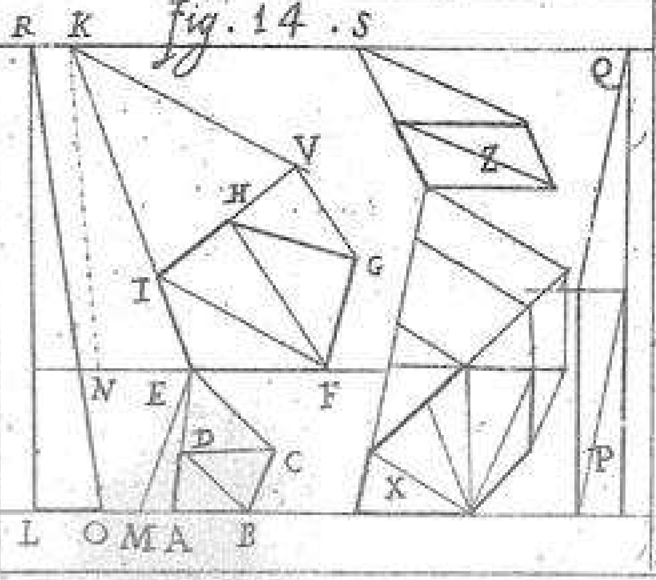
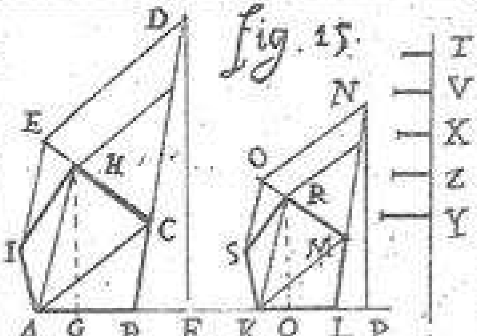
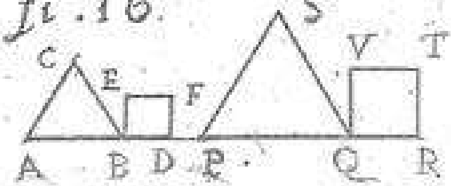


fig. 15.



fi. 16.



L. III. P. I.

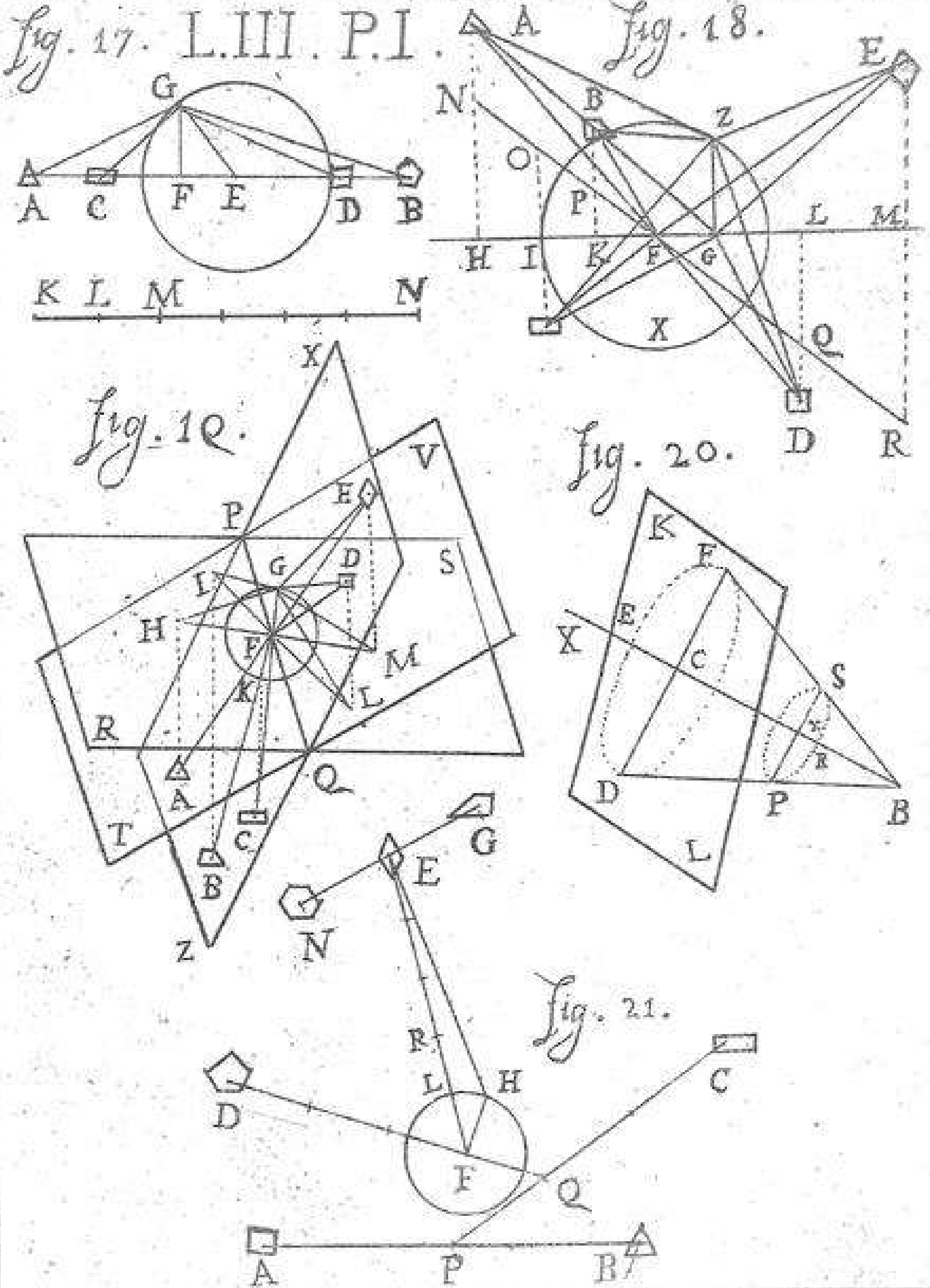
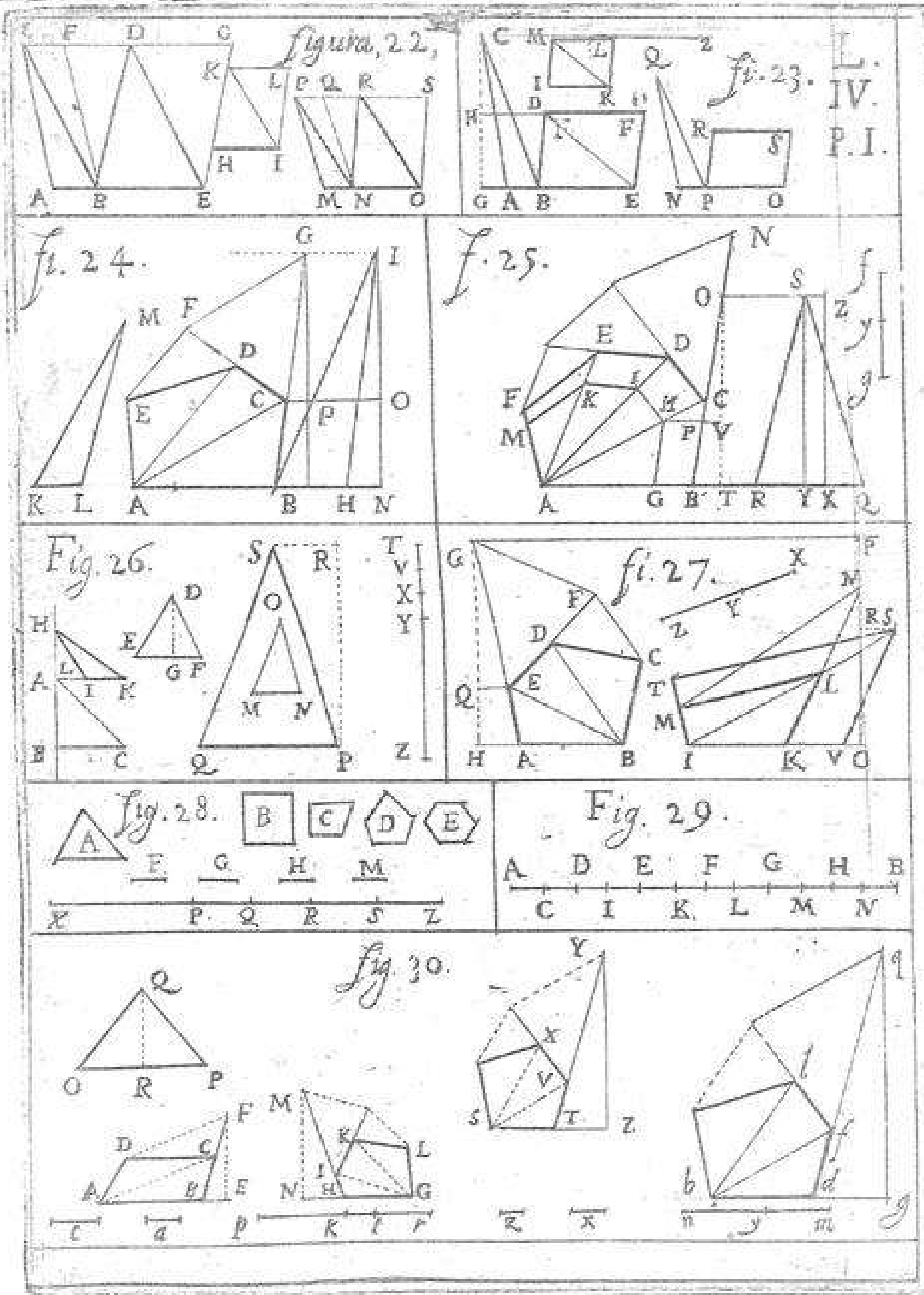


fig. 17.
G
A C F E D B
K L M N
fig. 18.
A
E
N
B
Z
O
P
L M
H I K F G
X
Q
D R
fig. 19.
X
V
E
P
G D
S
I
H
F
M
K
L
R
A
Q
T
C
B
Z
N
G
E
fig. 20.
K
F
X E
C
S
x
R
D P B
L
fig. 21.
C
R
L H
D
F
Q
A P B


L. IV. P. I.
figura, 22,
A B E M N O
fi. 23.
G A B E N P O
fi. 24.
K L A B H N
f. 25.
A G B T R Y X Q
Fig. 26.
B C Q P Z
fi. 27.
H A B I K V O
fig. 28.
A B C D E
F G H M
X P Q R S Z
Fig. 29.
A D E F G H B
C I K L M N
fig. 30.
O R P Q

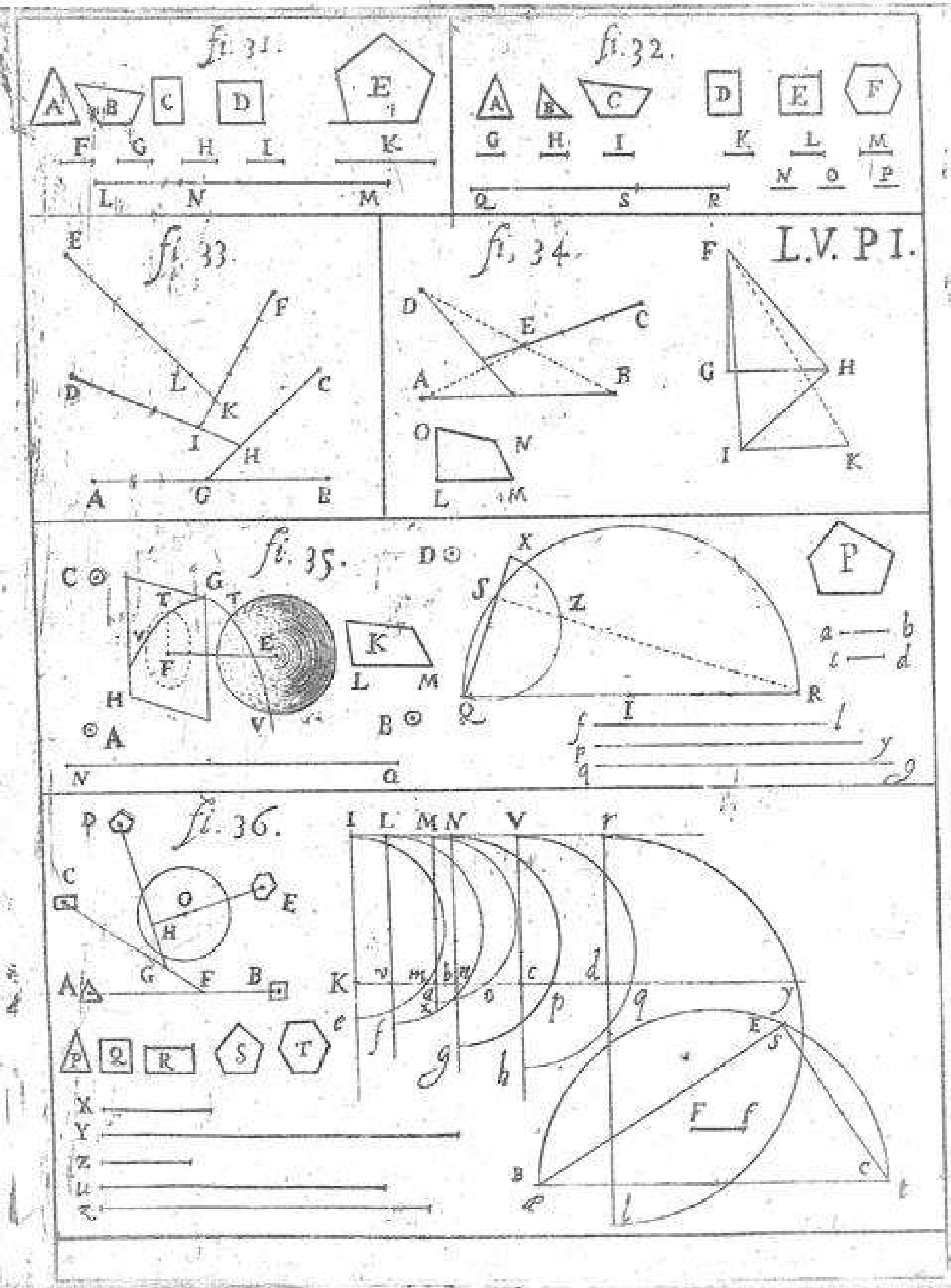

fi. 31.
fi. 32.
fi. 33
fi. 34
L.V. Pl.
fi. 35.
fi. 36.

fig. 37.

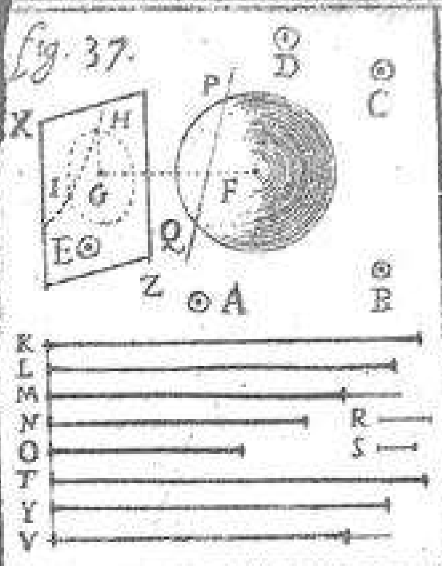
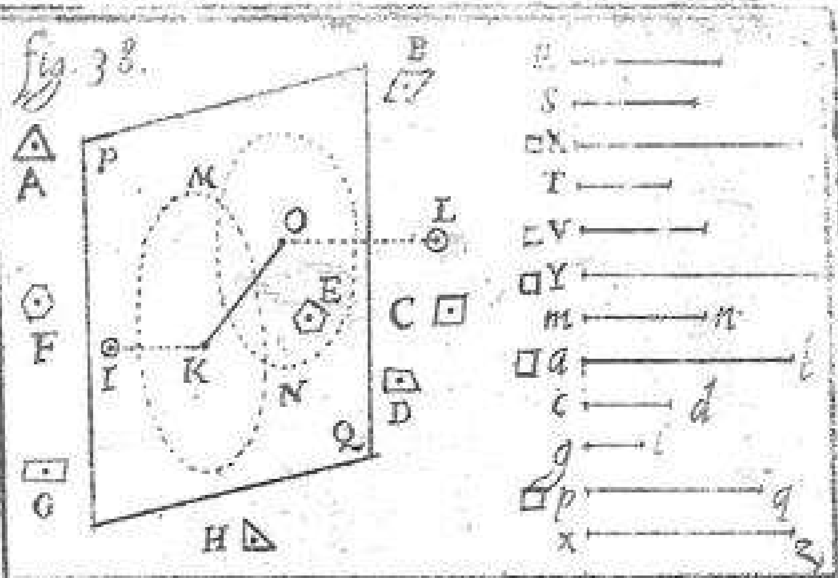
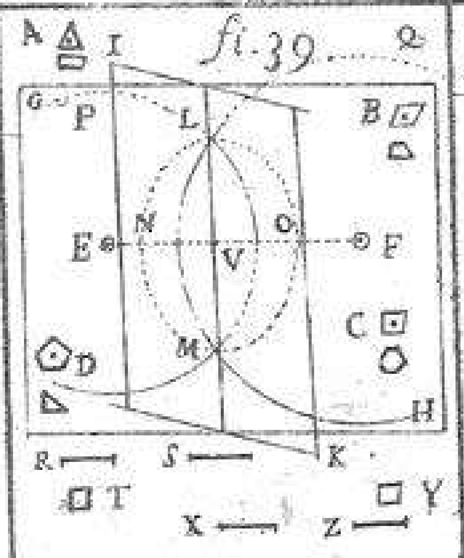


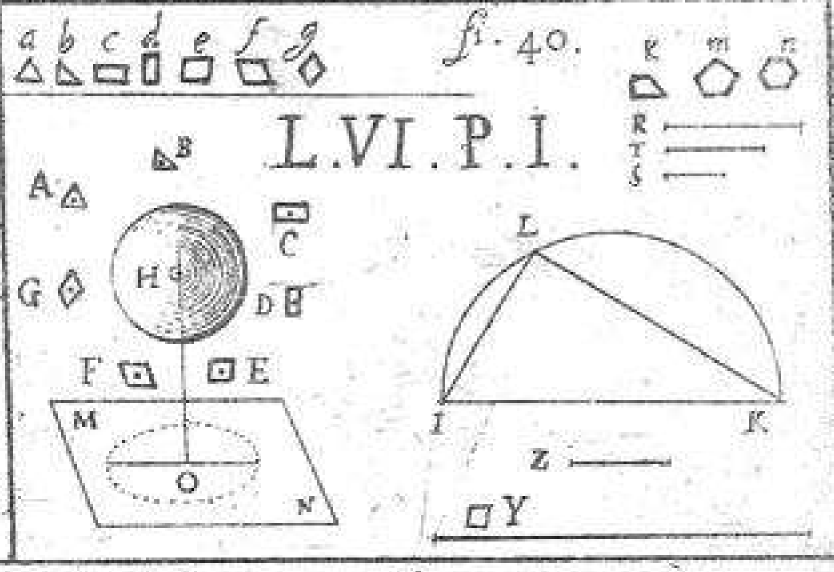
fig. 38.



fi. 39.



fi. 40.



fi. 41.