LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

POR

DON MANUEL VÁZQUEZ PRADA

PARTE SEGUNDA.—ECUACIONES

SUPLEMENTO

á los libros primero y segundo.— Ecuaciones de tercero y cuarto grado.

CUADERNO PRIMERO
Desarrollo completo de la solución de tercer grado con su propio radical.

CUADERNO SEGUNDO
Otra solución de tercer grado con sólo radicales de segundo;
solución por este método de cuatro ejemplos numéricos.

CUADERNO TERCERO
Desarrollo de una solución de cuarto grado, por otro procedimiento no sistemático,
y comprobada con la solución de tres ecuaciones numéricas.

CUADERNO CUARTO
Exposición de otro modo sistemático
para resolver la de cuarto grado, ó sea demostración directa del divisor que se deduce
en la primera sistemática.

MADRID
IMPRENTA DE ENRIQUE RUBIÑOS
Plaza de la Paja, 7 bis.

1889

LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

PARTE SEGUNDA.—ECUACIONES

Suplemento á los libros primero y segundo.—Cuaderno primero.

ECUACIÓN DE TERCER GRADO

Desarrollo completo de su resolución, con radical del mismo grado, según el primer método fundado en $c^2 = 3\ b\ n$.
Modo de proceder cuando haya raíces fraccionarias.

PRELIMINAR

El amigo que me puso á la vista el problema de quinto grado, fué quien á la vez me indicó también la conveniencia de demostrar la racionalidad de las raíces cuadrada y cúbica que entran en la primera solución de tercer grado, fundada en $c^2 = 3\,b\,n$.

Pero más tarde, demostrada ya la racionalidad de tales raíces, y presentándose en la solución, como elemento principal de la misma, la cantidad $\sqrt[3]{A \pm B\sqrt{-3}}$, hízome ver en seguida la necesidad de precisar, algebraica ó aritméticamente, el mejor modo para hallar, en cada caso numérico, la raíz ó raíces cúbicas de la expresada cantidad $A \pm B\sqrt{-3}$; y al propio tiempo también, desarrollar en su totalidad y en todos sus detalles la solución de tercer grado de que nos venimos ocupando.

A tan acertadas y oportunas indicaciones responde, en lo posible para mí, el cuaderno primero de este suplemento.

Mas he aquí que tras este trabajo y como consecuencia del mismo, hube de convencerme de la necesidad en que estaba de ejecutar otro igual para la solución de tercer grado con sólo radicales de segundo. De no hacerlo pudiera alguien creer que lo demostrado literalmente no contendría dentro de sí la realidad numérica.

En el cuaderno segundo se podrá ver cumplidamente satisfecha esta necesidad.

Por otra parte, estando ya demostrado que todas las ecuaciones de una incógnita se reducen grado á grado hasta la de cuarto, no había tampoco duda, que precisaba demostrar, por modo indubitable, que la realidad numérica se halla de igual manera contenida en las soluciones literales de la misma.

Esta demostración, comprobada como las anteriores con ejemplos numéricos, forma el contenido del cuaderno tercero.

Por fin, en el cuarderno cuarto y último se desarrolla otra solución sistemática de la de cuarto grado, en la cual se demuestra directamente el divisor que, por consecuencia inmediata, se establece por la primera de dichas demostraciones.

CUADERNO PRIMERO

ECUACIÓN DE TERCER GRADO

SU RESOLUCIÓN POR EL PRIMER MODO
FUNDADO EN $c^2 = 3\,b\,n$, DESARROLLADO HASTA DETERMINAR
LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN NUMÉRICA

ARTÍCULO PRIMERO

§ I.—(*Fórmulas directas de solución.*)

Sea:

$$Y^3 + b_1 Y^2 + c_1 Y + n_1 = 0. \qquad (A)$$

Se hace $Y = (x + s)$, se sustituye y nos da:

$$x^3 \begin{array}{l|} +\,3\,s \\ +\;\; b_1 \end{array} \; x^2 \begin{array}{l|} +\,3\,s^2 \\ +\,2\,b_1 s \\ +\;\; c_1 \end{array} \; x + \begin{array}{l} s^3 = 0. \\ +\,b_1 s^2 \\ +\,c_1 s \\ +\,n_1 \end{array} \qquad (A_1)$$

En ésta daremos á s el valor necesario, para que *el cuadrado* del coeficiente de x sea igual á *tres veces* el coeficiente de x^2 por todo el último término; así:

$$(3\,s^2 + 2\,b_1 s + c_1)^2 = 3\,(3\,s + b_1)\,(s^3 + b_1 s^2 + c_1 s + n_1)$$

Ejecutando las operaciones indicadas, transponiendo y reduciendo, desaparecen los términos de s^4 y s^3, quedando para s la de segundo grado:

$$(b_1^2 - 3\,c_1)\,s^2 + (b_1 c_1 - 9\,n_1)\,s + (c_1^2 - 3\,b_1 n_1) = 0.$$

De donde sale:

$$s = \frac{-(b_1 c_1 - 9\,n_1) \pm \sqrt{(b_1 c_1 - 9\,n_1)^2 - 4\,(b_1^2 - 3\,c_1)\,(c_1^2 - 3\,b_1 n_1)}}{2\,(b_1^2 - 3\,c_1)} \qquad (h)$$

Expresando ahora los coeficientes y último término de (A_1) por las letras b, c, n, respectivamente, será:

$$x^3 + b x^2 + c x + n = 0. \qquad (A_2)$$

En la cual es $\qquad c^2 = 3\, b\, n. \qquad (h_1)$

Despejando x en (A_2) por el modo indicado en la duodécima solución directa, nos da el primer valor de x, en esta forma:

$$x = \frac{c}{-b + \sqrt[3]{b\,(b^2 - 3\,c)}} \qquad (h_2)$$

Y si en (A_2) sustituímos á n su valor, tomado en (h_1), y luego dividimos la ecuación por la raíz ya conocida $x - \dfrac{c}{-b + \sqrt[3]{b\,(b^2 - c\,3)}}$, tendremos en el cociente exacto:

$$x^2 + \left(b + \frac{c}{-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}}\right) x$$

$$+ \left(c + \frac{b\,c}{-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}} + \frac{c^2}{\left(-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}\right)^2}\right) = 0.$$

la de segundo grado, que nos dará los otros dos valores de x; y expresando por C el coeficiente de x, y por C_1 todo el último paréntesis, tendremos:

$$x^2 + C\,x + C_1 = 0. \qquad (A_3)$$

De donde: $\qquad x = \dfrac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4C_1}}{2} \qquad (h_4)$

Para formar los valores ó fórmulas de Y, recordaremos que $Y = s + x$; y en su consecuencia, separando los dos valores que hay en (h_4) resultan para Y las siguientes fórmulas:

$$\left.\begin{array}{l} Y = s + \dfrac{c}{-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}} \\[2ex] Y = s + \dfrac{-C + \sqrt{C^2 - 4C_1}}{2} \\[2ex] Y = s + \dfrac{-C - \sqrt{C^2 - 4C_1}}{2} \end{array}\right\} \quad (M)$$

Para realizar estas fórmulas, en el caso de una ecuación numérica, tenemos los valores figurados, además del s, ya expresado en (h).

$$C_1 = c + \frac{bc}{-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}} + \frac{c^2}{\left(-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}\right)^2}$$

$$C = b + \frac{c}{-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}}$$

$$b = 3s + b_1$$

$$c = 3s^2 + b_1 s + c_1$$

b_1, c_1, n_1, representan los coeficientes numéricos.

§ II.—(*Otros valores indispensables.*)

Además de estos valores, y según ya se ha dicho en el artículo séptimo del cuaderno segundo, libro II, el radical de segundo grado que entra en el valor de s, sabemos que cubre siempre una cantidad que es un cuadrado perfecto, multiplicado por $\pm\sqrt{-3}$; cuya raíz, expresada en función de las de la ecuación propuesta, las que se indican por p^1, q^1, r^1, es, como también ya queda demostrado:

$$\pm\sqrt{(b_1 c_1 - 9n_1)^2 - 4(b_1^2 - 3c_1)(c_1^2 - 3b_1 n_1)}$$
$$= \pm(p^1 - q^1)(p^1 - r^1)(q^1 - r^1)\sqrt{-3} \qquad (h_5)$$

Y expresando por R la parte racional de la raíz en el primer miembro, será:

$$\pm R\sqrt{-3} = \pm (p^1 - q^1)(p^1 - r^1)(q^1 - r^1)\sqrt{-3}. \quad (h_6)$$

ó bien $\qquad \pm R = \pm (p^1 - q^1)(p^1 - r^1)(q^1 - r^1). \qquad (h_7)$

Asimismo se ha demostrado también en el mencionado artículo séptimo, que el radical de tercer grado que entra en las fórmulas (M) de Y, cubre una cantidad que es un cubo perfecto, el cual, relacionado con los raíces de la ecuación dada, se presenta así:

$$\sqrt[3]{b(b^2 - 3c)} = p^1 - \frac{q^1 + r^1}{2} \pm \frac{(q^1 - r^1)\sqrt{-3}}{2} \quad (h_8)$$

Para dar á esta cantidad subradical su verdadera forma, hay que sustituir en ella los valores de b, c, s, teniendo desde luego en cuenta que $(b^2 - 3c)$ es igual á $(b_1^2 - 3c_1)$; hecha la sustitución resulta:

$$\sqrt[3]{b(b^2 - 3c)} = \sqrt[3]{(3s + b_1)(b_1^2 - 3c_1)}$$

$$= \sqrt[3]{b_1^3 - 3b_1c_1 + \frac{-3b_1c_1 + 27n_1 \pm \sqrt{(b_1c_1 - 9n_1)^2 - 4(b_1^2 - 3c_1)(c_1^2 - 3b_1n_1)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2b_1^3 - 9b_1c_1 + 27n_1 \pm 3\sqrt{}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4(2b_1^3 - 9b_1c_1 + 27n_1) \pm 12\sqrt{(b_1c_1 - 9n_1)^2 - 4(b_1^2 - 3c_1)(c_1^2 - 3b_1n_1)}}}{2}$$

Dando al radical de segundo grado la forma que tiene en el primer miembro de (h_6), expresando $12R$ por B y la cantidad $4(b_1^3 - 9b_1c_1 + 27n_1)$ por A, tendremos:

$$\sqrt[3]{b(b^2 - 3c)} = \frac{\sqrt[3]{A \pm B\sqrt{-3}}}{2} \quad (h_9)$$

En cuya expresión A y B son cantidades racionales, pudiendo ser *cero* cualquiera de las dos.

§ III.—(*Raíces de* $(A \pm B\sqrt{-3})$).

Trátase, pues, de averiguar la raíz ó raíces cúbicas que pueda tener la cantidad $A \pm B\sqrt{-3}$; las cuales no hay duda de que habrán de ser de la misma forma que su cubo.

Expresando la raíz ó raíces en general por $x_1 \pm z_1\sqrt{-3}$, será:

$$(x_1 \pm z_1\sqrt{-3})^3 = x_1{}^3 \pm 3x_1{}^2 z_1\sqrt{-3} - 9x_1 z_1{}^2 \mp 3z_1{}^3\sqrt{-3} = A \pm B\sqrt{-3} \quad (h_{10})$$

De donde salen: $x_1{}^3 - 9\,z_1{}^2 x_1 = A.$ (h_{11})

y $\pm 3\,z_1{}^3 \mp 3\,x_1{}^2 z_1 = \pm B.$

O bien, teniendo en cuenta que B es divisible por 3, y siendo $\frac{B}{3} = B_1$.

$$z_1{}^3 - x_1{}^2 z_1 = B_1. \quad (h_{12})$$

Si para eliminar una de las incógnitas en (h_{11}) y (h_{12}), despejamos z_1 en la primera, ó x_1 en la otra, y sustituímos respectivamente, resulta en ambos casos una del grado noveno, rebajable al tercero, por entrar sólo las potencias de tercero, sexto y noveno grado; cuyas ecuaciones no son de muy fácil solución aun por los procedimientos del tanteo.

Mr. Clairaut, en su tratado de Algebra ya citado, ocupándose de esta cuestión en general, verifica la eliminación del siguiente modo:

si $$x_1 + z_1\sqrt{-3} = \sqrt[3]{A + B\sqrt{-3}}$$

será también $$x_1 - z_1\sqrt{-3} = \sqrt[3]{A - B\sqrt{-3}}$$

Multiplicando miembro á miembro estas dos igualdades, nos dan:

$$x_1{}^2 + 3\,z^2 = \sqrt[3]{A^2 + 3\,B^2} \quad (h_{13})$$

Expresando la raíz cúbica de (A^2+3B^2), que siempre será racional, por ser esta cantidad el producto de dos cubos, por R^1, nos dará (esta relación y la siguiente nos las da M. Clairaut):

$$x_1^2+3z_1^2=R^1 \qquad (h_{14})$$

Téngase presente que R^1, como luego se verá, es igual á $(4b_1^2-12c_1)$, siendo b_1, c_1, coeficientes de la ecuación propuesta.

Si en (h_{14}) se despeja x_1 ó z_1 y se sustituye respectivamente en (h_{12}) y en (h_{11}), se obtienen estas dos de tercer grado:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1^3-3R^1x_1&=A \\ 4z_1^3-R^1z_1&=B_1 \end{aligned}\right\} \qquad (h_{15})$$

Hasta aquí M. Clairaut.

Vemos, pues, que aunque estas ecuaciones, tratándose de casos numéricos, sean muy fáciles de resolver por procedimientos de tanteo, es lo cierto que no podemos eludir una de tercer grado, siempre que se trate de buscar algebraicamente las raíces de $A\pm B\sqrt{-3}$.

Lo cual, si no hubiese otro remedio, nos colocaría de nuevo en el punto de partida.

Sin embargo, si algebraicamente no podemos evitar la reaparición de una de tercer grado, es posible, no obstante, y aun muy fácil, determinar las raíces de $A\pm B\sqrt{-3}$, por procedimientos aritméticos, de tanteo si se quiere, pero alguno de ellos en condiciones tales de precisión y seguridad, que le asemejan á un procedimiento mecánico infalible.

Resta, pues, averiguar cuál sea el mejor de estos procedimientos.

§ IV.—(*Un modo de determinar dichas raíces.*)

La ecuación (h_{14}), á no ser que x_1 y z_1 tengan un valor igual, no sería divisible por ninguno de los factores de R^1, y no puede por lo tanto ser resuelta por este método. Pudiéramos, sin embargo, proceder en ella, restando sucesivamente de R^1 los cuadrados desde 1 en adelante, anotando todos aquellos casos en que el resto, siendo divisible por 3, diese de cociente un cuadrado perfecto. En cada uno de estos casos, la raíz del cuadrado sustraído sería un valor de x_1, y la del cuadrado cociente uno correlativo de z_1. Este método, como se ve, además de largo y penoso, tiene también la desventaja de no indicarnos los signos de x_1 y z_1, cuyos signos, para determinarse, exigen un trabajo de comprobación de los valores hallados en las otras ecuaciones.

§ V.—(*Otro modo.*)

Si nos fijamos en las ecuaciones (h_{15}), vemos desde luego que, un valor de x_1 estará necesariamente entre los divisores de A_1, y uno de z_1 entre los divisores de B_1. Los otros dos en cada una podrían determinarse comprobándolos como el primero entre los divisores de A_1 y B_1, ó bien dividiendo cada ecuación por la raíz ya conocida y resolviendo la de segundo grado del cociente; pero después de este trabajo habría que comprobar en la (h_{14}), ó en las (h_{11}) y (h_{12}), cuáles eran los valores de x_1 y z_1, que de dos en dos formaban las raíces de $A \pm B\sqrt{-3}$. Este procedimiento parecerá sin duda más largo y penoso, si se quiere, que el precedente.

§ VI.—(*Otro modo.*)

Tenemos, pues, las ecuaciones (h_{11}) y (h_{12}), las que podemos desde luego escribir así:

$$\left.\begin{aligned} x_1(x_1+3\,z_1)\,(x_1-3\,z_1)&=A \\ z_1\,(z_1+x_1)\,(z_1-x_1)&=B_1 \end{aligned}\right\} \quad (h_{16})$$

En la primera vemos que A es igual á un producto de tres factores, tales, que uno de éstos se diferencia de cada uno de los otros dos en tres veces una misma cantidad, siendo el primer factor x_1 y la diferencia dividida por 3, z_1.

La misma relación, pero más simple, existe en la segunda, puesto que B_1 es igual á un producto de tres factores, tales que uno de ellos se diferencia de los otros dos en una misma cantidad: el primero es z_1 y la diferencia x_1.

Operando, pues, con la segunda, que es la más sencilla, hallaremos los divisores de B_1, y luego, con ellos, se formarán todos los productos ternarios que se pueda, pero tales, que cada producto sea igual á B_1; y entre éstos se tomarán aquellos en que un factor se diferencie de cada uno de los otros dos en una misma cantidad, aunque uno de los factores cambie de signo, puesto que B_1 puede ser positivo ó negativo.

Cada producto que llene las dos condiciones, será una solución de la segunda en (h_{16}), y nos dará un par de valores para x_1 y z_1 que llevarán el signo que les corresponda al comprobarlos en ambas ecuaciones.

Las raíces que, resolviendo la de z_1 en (h_{16}), resuelvan también la de x_1, serán las raíces que se buscan para $A \pm B\sqrt{-3}$, representadas en general por $(x_1 \pm z_1\sqrt{-3})$.

Este procedimiento, que luego veremos en la práctica, creo será tomado como el más breve, fácil y seguro de todos.

§ VII.—(*¿Cuántas raíces tiene* $(\mathrm{A} \pm \mathrm{B}\sqrt{-3})$?)

A primera vista pudiera parecer que la cantidad $A \pm B\sqrt{-3}$, siendo como es numérica, sólo tuviese una raíz cúbica, ó á lo más dos á causa del doble signo que lleva el seguno término; pero es lo cierto que en la realidad tiene tres raíces distintas, por ser tres los valores que representan x_1 y z_1, en relación con las raíces de la ecuación dada.

En efecto; en (h_8) se ha visto que:

$$\sqrt[3]{b(b^2-3c)}=\frac{\sqrt[3]{A\pm B\sqrt{-3}}}{2}=p^1-\frac{q^1+r^1}{2}\pm\frac{(q^1-r^1)\sqrt{-3}}{2},$$

y siendo $\sqrt[3]{A\pm B\sqrt{-3}}=x_1\pm z_1\sqrt{-3}$

será
$$\frac{x_1\pm z_1\sqrt{-3}}{2}=p^1-\frac{q^1+r^1}{2}\pm\frac{(q^1-r^1)\sqrt{-3}}{2} \qquad (h_{17})$$

De donde salen
$$\frac{x_1}{2}=p^1-\frac{q^1+r^1}{2} \qquad (h_{18})$$

y
$$\pm z_1=\pm(q^1-r^1) \qquad (h_{19})$$

Al determinar la raíz cúbica $(A\pm B\sqrt{-3})$ en función de las raíces de la ecuación propuesta, se ha indicado ya, que si el polinomio subradical de tercer grado, en vez de ordenarse con relación á p^1, se le hubiese ordenado con relación á q^1 ó r^1, la fórmula de relación sería la misma con sólo cambiar de lugar las letras p^1, q^1, r^1.

Así, pues, ordenando con relación á q^1 las igualdades (h_{18}) y (h_{19}), cambiarían en esta forma:

$$\frac{x_1}{2}=q^1-\frac{p^1+r}{2} \qquad (h_{20})$$

y
$$\pm z_1=\pm(p^1-r^1) \qquad (h_{21})$$

Y si se ordenase con relación á r^1, serían:

$$\frac{x_1}{2}=r^1-\frac{p^1+q^1}{2} \qquad (h_{22})$$

y
$$\pm z_1=\pm(p^1-q^1) \qquad (h_{23})$$

De modo que, no habiendo más combinaciones de p^1, q^1, r^1, resultan tres valores diferentes para cada una de las letras x_1 y z_1 como componentes de las raíces de $A\pm B\sqrt{-3}$; y no puede haber más: z_1 representa las tres diferencias posibles entre cada dos raíces de la ecuación dada, y x_1 las diferencias posibles entre el duplo de cada raíz y la suma de las otras dos.

§ VIII.—(*Relaciones especiales entre las raíces de* $A \pm B\sqrt{-3}$.)

La suma de los tres valores de x_1 es igual á *cero*.

La suma de los tres valores de z_1 es igual á $2(p-r)$, es decir, igual al duplo de uno de los valores de z_1.

Sumando los dos últimos valores de z_1, resulta:

$$2z_1 = 2p^1 - (q^1 + r^1);$$

pero $2p^1 - (q^1 + r^1)$, (h_{18}), es igual á x_1, y, por lo tanto, un valor de x_1 aparecerá siempre igual á dos de z_1, y también igual á la suma de los otros dos valores de x_1.

§ IX.—(*Aplicación de los productos ternarios á un ejemplo numérico.*)

Para que se vea que es operación fácil el determinar las raíces de $A \pm B\sqrt{-3}$, á medio de los productos ternarios, vamos ante todo á practicarlo en un ejemplo numérico.

Sea la ecuación:

$$Y^3 + 2Y^2 - 68Y + 120 = 0. \qquad (f)$$

Tendremos desde luego:

$$b_1 = 2, \quad c_1 = -68, \quad n_1 = 120. \qquad (f_1)$$

Poniendo estos valores en la fórmula (h) de s, la raíz cuadrada de la cantidad subradical, es:

$$\pm 768\sqrt{-3}; \quad B = 768 \times 12 = 9216; \quad B_1 = \frac{B}{3} = 3072;$$
$$A = 4(2b_1^3 - 9b_1c_1 + 27n_1) = 17920. \qquad (h_9)$$

Las dos ecuaciones (h_{16}) serán:

$$x_1(x_1+3z_1)(x_1-3z_1)=17920. \qquad (f_2)$$

$$z_1(z_1+x_1)(z_1-x_1)=3072. \qquad (f_3)$$

Y el radical de tercer grado tendrá la siguiente forma:

$$\sqrt[3]{b(b^2-3c)}=\frac{\sqrt[3]{A\pm B\sqrt{-3}}}{2}=\frac{\sqrt[3]{17920\pm 9216\sqrt{-3}}}{2} \qquad (f_4)$$

Trátase, pues, de determinar las raíces cúbicas que tenga la cantidad $(17920\pm 9216\sqrt{-3})$, expresadas en general por $(x_1\pm z_1\sqrt{-3})$.

Tomemos $B_1=3072$: sus divisores primos son, la unidad, 2 elevado á 10 y el 3, y por lo tanto, será: $(2^{10}=1024)$.

$$1\times 3\times 1024=3072.$$

En este primer producto ternario vemos que no hay un factor que equidiste aritméticamente de los otros dos.

Para formar un primer grupo de productos observables, conservando el 1 como primer factor, no hay más que separar en el 1024 sucesivamente los factores 2, 4, 8, 16, 32, y multiplicar por éstos el segundo factor del primer terno, así:

$$\left.\begin{array}{l} 1\times 6\times 512 \\ 1\times 12\times 256 \\ 1\times 24\times 128 \\ 1\times 48\times 64 \\ 1\times 96\times 32 \end{array}\right\} \qquad (f_5)$$

En este grupo no hay tampoco factor equidistante, y con facilidad se percibe que, conservando el factor 1, apenas podrá resultar un producto que le tenga.

Separando en los últimos factores de este grupo el factor 2, y multiplicándole por el 1 respectivamente, también se comprende á simple vista que no hay factor equidistante, como tampoco si el 2 le separamos en los del medio, multiplicándole por el 1.

Separando el 4 en los últimos, y multiplicando por el 1, el 3.º nos da:

$$24 \times 4 \times 32,$$

en el cual es, $4+28=32,\ 4-28=-24.$

Separando el 8 nos da el 2.º:

$$8 \times 12 \times 32,$$

en el cual es, $12+20=32,\ 12-20=-8.$

Y separando el 16, nos da también el 3.º:

$$8 \times 16 \times 24,$$

en el cual es, $16+8=24,\ 16-8=8.$

Tenemos, pues, ya tres ternos determinados, con las dos condiciones que deben reunir, y son:

$$\begin{array}{r} 24 \times 4 \times 32 \\ 8 \times 12 \times 32 \\ 8 \times 16 \times 24 \end{array}$$

El 1.º nos da: $z_1 = 4,\ x_1 = 28;$
el 2.º, $z_1 = 12,\ x_1 = 20;$
el 3.º, $z_1 = 16,\ x_1 = 8.$

Comprobados estos valores en las ecuaciones (h_{11}) y (g_{12}), las resuelven, fijándose para ellos los signos de este modo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 28,\ z_1 = 4 \\ x_1 = -20,\ z_1 = 12 \\ x_1 = -2,\ z_1 = 16 \end{array}\right\} \quad (f_6)$$

Debiendo tenerse en cuenta, con relación al $z_1 = +12$, que teniendo que ser $+12$ en (f_2) y -12 en (f_3), debe tomarse el signo de (f_2) á causa de que el segundo miembro de (f_3) lleva en rigor el doble signo $\pm$; y A por el contrario, ó es positivo ó negativo.

§ X.—(*Modo de hallar algebraicamente dos raices* $A \pm B\sqrt{-3}$ *conocida la primera.*)

Conocido el modo facilísimo de hallar las raíces de $A \pm B\sqrt{-3}$ por el medio de los productos ternarios, indicaremos el modo de hallar dos de estas raíces algebraicamente, después de conocida una por el método que precede.

Hemos visto ya que z_1 representa las tres diferencias posibles entre las raíces de la ecuación propuesta, es decir que:

$$z_1 = (p^1 - q^1) = (p^1 - r^1) = (q^1 - r^1). \qquad (f_7)$$

En (h_7), tenemos:

$$(p^1 - q^1)(p^1 - r^1)(q^1 - r^1) = R.$$

Determinado un valor de z_1 que suponemos sea el $(q^1 - r^1)$, tendremos:

$$(p^1 - q^1)(p^1 - r^1) z_1 = R$$

ó bien

$$(p^1 - q^1)(p^1 - r^1) = \frac{R}{z_1}$$

ó bien

$$(p^1 - q^1)^2 (p^1 - r^1)^2 = \frac{R^2}{z_1^{\,2}} \qquad (f_8)$$

Por otra parte también tenemos la igualdad fácilmente demostrable:

$$(p^1 - q^1)^2 + (p^1 - r^1)^2 + (q^1 - r^1)^2 = 2\,b_1^{\,2} - 6\,c_1 \qquad (f_9)$$

en la que b_1, c_1 son coeficientes de la ecuación propuesta.

Sustituyendo z_1 á $(q^1 - r^1)$, y pasándolo al segundo miembro, será:

$$(p^1 - q^1)^2 + (p^1 - r^1)^2 = 2\,b_1^{\,2} - 6\,c_1 - z_1^{\,2} \qquad (f_{10})$$

En (f_8) y (f_{10}), tenemos pues el producto y la suma de las dos cantidades $(p^1 - q^1)^2$ y $(p^1 - r^1)^2$; luego estas dos cantidades son las raíces de la ecuación:

$$u^2 - (2\,b_1^2 - 6\,c_1 - z_1^2)\,u + \frac{R^2}{z_1^2} \qquad (f_{11})$$

Hallando los dos valores de u en esta ecuación, y tomando la raíz cuadrada de cada uno, tendremos los valores de $(p^1 - q^1)$ y $(p^1 - r^1)$, es decir, los otros dos valores de z_1 que se buscan.

Conocidos así los valores segundo y tercero de z_1, para hallar los correlativos de x_1 por el camino más breve, no hay más que sustituirlos sucesivamente en la ecuación (h_{13}), $x_1^2 + 3\,z_1^2 = R^1$, y se tendrán aquellos valores de x_1.

Como comprobación de este método pónganse en la (h_{13}) los valores (f_6) de z_1, y se verá cómo resultan los tres correlativos de x_1, afectados de $\pm$, puesto que se hallan en función de raíces cuadradas.

Ahora, bien; siendo como se ha visto muy fácil determinar una raíz para $A \pm B\sqrt{-3}$, por el medio de los productos ternarios; y pudiendo en seguida determinar las otras dos algebraicamente por el método precedente, queda la cuestión reducida al mínimum de sus dificultades; y mucho más si se tiene en cuenta que R^1 se obtiene directamente, á medio de los coeficientes de la ecuación dada, en la expresión á que es igual, como queda dicho: $(4\,b_1^2 - 12\,c_1) = R^1$.

Para comprobar esta igualdad no hay más que hallar la raíz cúbica literal de la cantidad.

$$\left(4(2b_1^3 - 9b_1c_1 + 27n_1)\right)^2 - \left(12\sqrt{-3}\sqrt{\frac{(b_1c_1 - 9n_1)^2 - 4(b_1^2 - 3c_1)(c_1^2 - 3b_1n_1)}{3}}\right)^2$$

La que sabemos es igual á

$$A^2 - B^2\,(\sqrt{-3})^2 = A^2 + 3\,B^2,$$

y se verá que, desapareciendo los términos de n_1 queda sólo en la expresión el cubo de $(4\,b_1^2 - 12\,c_1)$.

La igualdad antes indicada (f_9) se comprueba también de este modo:

Tenemos
$$b_1 = p^1 + q^1 + r^1;$$
$$c_1 = p^1 q^1 + p^1 r^1 + q^1 r^1$$
$$b_1^2 - 2\,c_1 = p_1^2 + q_1^2 + r_1^2$$
$$b_1^2 - 3\,c_1 = p_1^2 - p^1 q^1 + q_1^2 - q^1 r^1 + r_1^2 - p^1 r^1$$

Sumando esta última igualdad con la de c_1 después de cambiarle los signos, nos da:

$$b_1^2 - 4\,c_1 = p_1^2 - 2\,p^1 q^1 + q_1^2 - 2\,q^1 r^1 + r_1^2 - 2\,p^1 r^1$$

Y sumando con ésta la de $(b_1^2 - 2\,c_1)$, sin cambio de signos, tendremos:

$$\begin{aligned} 2\,b_1^2 - 6\,c_1 = p_1^2 - 2\,p^1 q^1 + q_1^2 &- 2\,p^1 r^1 + r_1^2 - 2\,q^1 r^1 + r_1^2 \\ + p_1^2 \qquad &\qquad + q_1^2 \end{aligned}$$

ó bien: $2\,b_1^2 - 6\,c_1 = (p^1 - q^1)^2 + (p^1 - r^1)^2 + (q^1 - r^1)^2$

§ XI.—(*Fórmulas de solución sacadas de las raíces de* $A \pm B\sqrt{-3}$).

Ahora, además de las fórmulas finales, deducidas directamente para Y de la ecuación dada, y establecidas en (M), expondremos también las que resultan de comparar entre sí las raíces de $(A \pm B\sqrt{-3})$ y las de la ecuación propuesta, según se hizo en (h_{17}).

Las dos igualdades allí expresadas, (h_{18}) y (h_{19}), que son:

$$\frac{x_1}{2} = p^1 - \frac{q^1 + r^1}{2} \qquad (h_{18})$$

y

$$\pm z_1 = \pm (q^1 - r^1) \qquad (h_{19})$$

nos dan las siguientes: la primera, multiplicada por 2 y poniendo en vez de $(q^1 + r^1)$, su igual $(b_1 - p^1)$, da:

$$\pm p^1 = \frac{b_1 \pm x_1}{3} \qquad (f_{12})$$

Pónese á p^1 y x_1 el doble signo porque las raíces de la ecuación propuesta pueden resultar positivas ó negativas, según que Y se tome positiva ó negativamente.

Si ahora ponemos el valor (f_{12}) de p^1 en (h_{18}) y despejamos (q^1+r^1), nos da:

$$q^1+r^1=\frac{3b_1\mp x_1}{3} \qquad (f_{13})$$

En esta igualdad y en (h_{19}) tenemos el valor de la suma y diferencia de las raíces q^1 y r^1, y por lo tanto será:

$$\pm q^1=\frac{2b_1\mp x_1}{6}\pm\frac{z_1}{2} \qquad (f_{14})$$

$$\pm r^1=\frac{2b_1\mp x_1}{6}\pm\frac{z_1}{2} \qquad (f_{15})$$

En cuyas dos igualdades y la (f_{12}) tenemos los valores siempre dobles de las raíces p^1, q^1, r^1, en función de b_1, x_1, z_1, La razón del doble signo se ve con evidencia en la ecuación (h_{14}), en la que x_1 y z_1 se determinan siempre como raíces cuadradas. Al comprobar en los (h_{11}) y (h_{12}), es cuando se fijan los signos según ya queda dicho.

Sin embargo, en las fórmulas de p^1, q^1, r^1, se puede prescindir del doble signo, dejando á cada letra el que estrictamente le resulta al formarse las igualdades, ó sea:

$$\left.\begin{array}{l} p^1=\dfrac{b_1+x}{3} \\[2ex] q^1=\dfrac{2b_1-x}{6}+\dfrac{z_1}{2} \\[2ex] r^1=\dfrac{2b_1-x}{6}-\dfrac{z_1}{2} \end{array}\right\} \qquad (k)$$

Pero entonces habrá de observarse, como luego se verá, que los valores que toman p^1, q^1, r^1, llevan signo contrario al que les corresponde como valores de Y.

§ XII.—(*Solución del ejemplo numérico por las fórmulas que preceden.*)

Para resolver, por fin, la ecuación propuesta (f), para la cual las raíces de $(A \pm B\sqrt{-3})$, son las expresadas en (f_6), sustituiremos sucesivamente los valores de estas raíces y el de b_1 en las fórmulas de p^1, q^1, r^1.

Sustituyendo la primera raíz ($x_1 = 28$), ($z_1 = 4$), y apreciando sólo valores enteros, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \pm p^1 = \dfrac{2 \pm 28}{3} = +10 \\[2ex] \pm q^1 = \dfrac{4 \mp 28}{6} \pm \dfrac{4}{2} = -4 \pm 2 = -2 = -6 \\[2ex] \pm r^1 = \dfrac{4 \mp 28}{6} \pm \dfrac{4}{2} = -4 \pm 2 = -6 = -2 \end{array}\right\} (f_{16})$$

Sustituyendo la segunda raíz (f_6), se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \pm p^1 = \dfrac{2 \mp 20}{3} = -6 \\[2ex] \pm q^1 = \dfrac{4 \pm 20}{6} \pm \dfrac{12}{2} = +4 \pm 6 = \ 10 = -2 \\[2ex] \pm r^1 = \dfrac{4 \pm 20}{6} \pm \dfrac{12}{2} = +4 \mp 6 = -2 = +10 \end{array}\right\} (f_{17})$$

Sustituyendo la tercera raíz (f_6), nos da:

$$\begin{array}{l} \pm p^1 = \dfrac{2 \mp 8}{3} = -2 \\[2ex] \pm q^1 = \dfrac{4 \mp 8}{6} \pm \dfrac{16}{2} = +2 \pm 8 = +10 = -6 \\[2ex] \pm r^1 = \dfrac{4 \mp 8}{6} \mp \dfrac{16}{2} = +2 \mp 8 = -6 = +10 \end{array}$$

Vemos, pues, que con cada una de las raíces (f_6), obtenemos para p^1, q^1, r^1, indistintamente los valores 10, 6, 2, que, por lo tanto, serán raíces de la ecuación propuesta, aunque sin determinar en general sus signos. Para determinar éstos, si se hace uso de las fórmulas con doble signo, observaremos ante todo, que la suma de los tres valores ha de ser igual en este ejemplo á $+2 = b_1$; y como sólo la combinación (-2), (-6), $(+10)$ nos da este resultado, deducimos que son estos los signos que corresponden á las raíces. Si comparando con b_1 hubiese aún duda, se comparará con c_1, ó con n_1 ó con los dos, y se fijarán los signos con toda precisión.

Pero si sólo se aplican las fórmulas (k), de signo sencillo, resultan:

$$
\begin{aligned}
p^1 &= +10 = -\ 6 = -\ 2\\
q^1 &= -\ 2 = +10 = -\ 6\\
r^1 &= -\ 6 = -\ 2 = +10.
\end{aligned}
$$

Es decir, todos los valores de Y en la ecuación propuesta, pero con signo contrario, puesto que Y ha de ser:

$$Y = -10 = +6 = +2,$$

en el supuesto de que la suma de los tres valores de Y, tiene que ser igual á $-b_1$.

§ XIII.—(*Qué se hace cuando* A *ó* B *sea* cero.)

En las igualdades (h_{17}) y (h_{18}) debe observarse que, cuando las raíces de una ecuación dada sean tales que una de ellas sea igual á la mitad de la suma de las otras dos, en signo y magnitud, un valor de x_1 será *cero*, y entonces lo será también A; y en la (h_{19}) se ve igualmente que, si dos raíces de la ecuación dada fuesen iguales en signo y magnitud, un valor de z_1 será *cero*, y como consecuencia, lo será también R, ó sea el radical de s.

En este caso la ecuación $(Y - p^1)(2Y - 2q^1)$, será de segundo grado. Pero si se la construye con las tres raíces separadas $(Y - p^1)(Y - q^1)(Y - q^1)$, la raíz igual q^1 podrá fácilmente descubrirse en los coeficientes de la ecuación.

Cuando z_1 tenga un valor *cero*, y que por lo tanto B es también *cero*, un valor de x_1 es la raíz cúbica de A; así como cuando A es *cero*, un valor de z_1 es la raíz cúbica de B_1.

Pero cuando B, ó B_1 sea *cero*, hay que acudir á la primera de las ecuaciones (h_{16}) para hallar los demás valores de x_1 y z_1 en los productos ternarios que se formen con los divisores de A. La comprobación de los valores hallados se hará en la ecuación (h_{14}).

§ XIV.—(*Solución del ejemplo numérico por las fórmulas directas de* Y.)

Para que con toda claridad se vea la precisión y eficacia de las raíces (f_6), ó sean las de $(A \pm B\sqrt{-3})$, halladas por los productos ternarios, vamos á llevarlas también á la primera de las fórmulas (M), directamente deducidas para Y de la ecuación propuesta. Se tiene:

$$Y = s + \frac{c}{-b + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}} = \frac{c}{-3s - b_1 + \sqrt[3]{b(b^2 - 3c)}}$$

$$Y = \frac{b_1 s + s\sqrt[3]{b(b_1^2 - 3c_1)} + c_1}{-3s - b_1 + \sqrt[3]{b(b_1^2 - 3c_1)}} \qquad (g)$$

Ante todo pondremos en la fórmula de s, (h), los valores numéricos de $b_1 = 2$, $c_1 = -68$ y $n_1 = 120$.

El radical se reduce á $768\sqrt{-3}$, y la fórmula de s será:

$$s = \frac{38 \pm 24\sqrt{-3}}{13} \qquad (g_1)$$

Poniendo en (g) el primer valor ó raíz de la cantidad cúbica, que es (f_6) $\frac{28+4\sqrt{-3}}{2}=14+2\sqrt{-3}$, resulta:

$$Y=\frac{16s\pm 2s\sqrt{-3}-68}{-3s+12+2\sqrt{-3}} \qquad (g_2)$$

Y poniendo en ésta el valor de s (g_1), ejecutando operaciones y reduciendo, se obtiene:

$$Y=\frac{-420+460\sqrt{-3}}{42-46\sqrt{-3}}=-10. \qquad (g_3)$$

Procediendo lo mismo en (g) con la segunda raíz (f_6), que es $\frac{-20+12\sqrt{-3}}{2}=-10+6\sqrt{-3}$, y sustituyendo luego s, b_1 y c_1, como en la anterior, nos da:

$$Y=\frac{-1620+36\sqrt{-3}}{-270+6\sqrt{-3}}=+6. \qquad (g_4)$$

Y procediendo del mismo modo en (g) con la tercera raíz (f_6), que es $\frac{-8+16\sqrt{-3}}{2}=-4+8\sqrt{-3}$, resulta:

$$Y=\frac{-384+352\sqrt{-3}}{-192+176\sqrt{-3}}=+2. \qquad (g_5)$$

Vemos, pues, que con las tres raíces (f_6), se determinan en la primera fórmula (M) de Y, los tres valores de ésta en la ecuación dada, y con su propio signo, no apreciando como antes sino los valores enteros y racionales.

Y no es dudoso que sucedería lo mismo con las otras dos fórmulas (M); por lo que, en obsequio á la brevedad, omitimos el ejecutarlas. Obsérvese, sin embargo, que con una sola raíz de $A\pm B\sqrt{-3}$, se tiene bastante para resolver una ecuación numérica.

§ XV.—(*Modo de proceder en la ecuación que tenga raíces fraccionarias.*)

Cuando se presente una ecuación que tenga una ó más raíces fraccionarias, lo que se conoce en llevar coeficiente mayor que la unidad en el primer término, se la puede tratar como las de raíces enteras, pero dividiéndola desde luego por el coeficiente del primer término.

Mas si se quiere evitar la presencia de los denominadores como tales, puede procederse así.

Sea la ecuación:

$$m Y_1^3 + b_2 Y_1^2 + c_2 Y_1 + n_2 = 0.$$

En la cual m es el producto de los denominadores que tengan las raíces.

Multiplicando la ecuación por m^2, será:

$$m^3 Y_1^3 + b_2 m^2 Y_1^2 + c_2 m^2 Y_1 + n_2 m^2 = 0.$$

Haciendo $m Y_1 = Y$, se sustituye y nos da:

$$Y^3 + b_2 Y^2 + c_2 m Y + n_2 m^2 = 0.$$

Y haciendo $b_2 = b_1$, $c_2 m = c_1$, $n_2 m^2 = n_1$, tendremos:

$$Y^3 + b_1 Y^2 + c_1 Y + n_1 = 0.$$

La cual tiene las mismas soluciones que la general de raíces enteras, sin más diferencia que, una vez halladas en ésta las raíces ó valores de Y, se dividirá cada uno por m, y los cocientes serán los valores de Y_1.

LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

PARTE SEGUNDA

Suplemento á los libros primero y segundo.—Cuaderno segundo.

Solución de tercer grado con sólo
radicales de segundo. Fórmulas generales y su comprobación.
Solución de cuatro ejemplos numéricos.
Explicación del método.

PRELIMINAR

Demostrada por diferentes modos la solución de tercer grado, con sólo radicales de grado par, era preciso comprobarla en el terreno de la realidad numérica, resolviendo ejemplos de esta clase á medio de las fórmulas previamente deducidas. Este trabajo no se imponía sólo con el fin de evitar que cada uno tuviese que hacerlo por sí mismo, sino también porque siendo este modo de resolver enteramente nuevo, de no dar demostrada su certeza en las dos esferas del conocimiento, pudiera á primera vista ser mirado como una mera utopia, más ó menos bien elaborada.

Una dificultad se presentaba, sin embargo, al emprender esta tarea puramente experimental: la de elegir entre los métodos demostrados el que fuese de más fácil, más breve y más segura ejecución. No respondo de haber elegido el mejor, porque si el método seguido es el de formas más concisas, era también por otro lado, en resultados prácticos, el que los ofrecía más oscuros y problemáticos.

Hay en este procedimiento, como en el que admite el radical de tercer grado, un punto de enlace íntimo entre coeficientes y raíces, que sólo aritméticamente puede ser resuelto. En la de segundo grado tampoco se resuelve todo algebraicamente, pues la raíz cuadrada de la cantidad subradical ($b^2 - 4\,n$), tenemos que determinarla por procedimientos aritméticos. Y según esto, nada tiene de extraño, ni de irracional, si en la de tercer grado, ya con su propio radical, ya con sólo el de segundo, se presenta á resolver una relación que sólo puede ser resuelta por operaciones aritméticas, es decir, operando con las cantidades numéricas que representan las raíces y los coeficientes de la ecuación propuesta. Exigir lo contrario sería tanto como querer que lo más complicado, lo más complejo, fuese más fácil de resolver que lo más sencillo y lo más simple.

El modo de resolver en este caso la indicada relación, por operaciones aritméticas, es tan sencillo y de tal precisión, que nada tiene que envidiar á los procedimientos algebraicos.

ARTÍCULO II

SOLUCIÓN DE TERCER GRADO SIN RADICALES DE GRADO IMPAR

§ I.

Exposición del método y deducción de las fórmulas generales.

Sea la ecuación: $Y^3+bY^2+cY+n=0.$ (A)

Separando Y en los tres primeros términos, y sumando y restando sY, se tendrá, después de separar s en los dos últimos términos que resultan:

$$Y\left(Y^2+bY\begin{array}{l}+c\\-s\end{array}\right)+s\left(Y+\frac{n}{s}\right)=0. \qquad (A_1)$$

Haciendo $Y=(x+r)$ se sustituye, y nos da:

$$(x+r)\left(x^2\begin{array}{l}+2r\\+b\end{array}\Bigg|\, x+\begin{array}{l}r^2\\+br\\+c\\-s\end{array}\right)+s\left(x+\frac{rs+n}{s}\right)=0. \qquad (A_2)$$

Haciendo $x=\frac{z}{q}$, se sustituye, y quitando el denominador en toda la ecuación se tiene:

$$(z+rq)\left(z^2\begin{array}{l}+2rq\\+bq\end{array}\Bigg|\, z+\begin{array}{l}r^2\\+br\\+c\\-s\end{array}\Bigg|\, q^2\right)+sq^2\left(z+\frac{rs+n}{s}q\right)=0. \qquad (A_3)$$

En ésta igualamos á la unidad el segundo término del último paréntesis, ó sea:

$$\frac{rs+n}{s}q=1. \qquad (h)$$

De donde sale: $$q=\frac{s}{sr+n} \qquad (h_1)$$

En (A_3), dividimos también la cantidad del segundo paréntesis por $(z+1)$, dándonos como cociente:

$$z+2rq+bq-1. \qquad (h_2)$$

Y como residuo que debe ser *cero* para que la división sea exacta:

$$(r^2+br+c-s)q^2-(2r+b)q+1=0. \qquad (h_3)$$

De donde: $$q=\frac{2r+b\pm\sqrt{b^2-4c+4s}}{2r^2+2br+2c-2s} \qquad (h_4)$$

Igualando los dos valores de q, (h_1) y (h_4), será:

$$\frac{s}{rs+n}=\frac{2r+b\pm\sqrt{b^2-4c+4s}}{2r^2+2br+2c-2s} \qquad (h_5)$$

De donde, quitando denominadores, transpeniendo y reduciendo, resulta para r:

$$r=\frac{bn+2s^2-2cs\pm n\sqrt{b^2-4c+4s}}{bs-2n\mp s\sqrt{b^2-4c+4s}} \qquad (h_6)$$

Con este valor de r se realiza la igualdad (h_5), con lo que los dos valores de q, se hicieron iguales; y la ecuación (A_3) hízose también divisible por $(z+1)$, pudiéndose por lo tanto escribirla de este modo, pero teniendo en cuenta el cociente (h_2).

$$(z+rq)(z+2rq+bq-1)(z+1)+sq^2(z+1)=0. \qquad (A_4)$$

Y como la cantidad $(z+1)$, si se hace *cero*, reduce á *cero* toda la ecuación, tendremos en (A_4) para un valor de z,

$$z=-1. \qquad (k)$$

Dividiendo (A_4) por $(z+1)$, queda:

$$(z+rq)(z+2rq+bq-1)+sq^2=0. \qquad (A_5)$$

De la cual sale:
$$\left.\begin{array}{r} z^2+3rq \\ +bq \\ -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} z+\ sq^2=0. \\ +2r^2q^2 \\ +brq^2 \\ -rq \end{array} \qquad (A_6)$$

De esta, y la igualdad k, nos resultan los tres valores de z:

$$\left.\begin{array}{l} z=-1 \\ z=\dfrac{1-bq-3rq+\sqrt{(1-bq-rq)^2-4sq^2}}{2} \\ z=\dfrac{1-bq-3rq-\sqrt{(1-bq-rq)^2-4sq^2}}{2} \end{array}\right\} \qquad (k_1)$$

Siendo $x=\frac{z}{q}$, y además $Y=r+x$, sustituyendo en (k_1) tendremos para Y:

$$\left.\begin{array}{l} Y=\dfrac{-1+rq}{q} \\ Y=\dfrac{1-bq-rq+\sqrt{(1-bq-rq)^2-4sq^2}}{2q} \\ Y=\dfrac{1-bq-rq-\sqrt{(1-bq-rq)^2-4sq^2}}{2q} \end{array}\right\} \qquad (k_2)$$

§ II.—(*Comprobación de las fórmulas.*)

Estas fórmulas, de los valores de Y, cumplen la ley general de relación entre las raíces y los coeficientes de la ecuación dada.

En efecto: 1.° Sumando los tres segundos miembros, después de multiplicar y dividir el primero por 2, á simple vista se ve que la suma es igual á $-b$.

2.° Multiplicando los dos últimos miembros (k_2), el producto es $\frac{4sq^2}{4q^2}$.

Y multiplicando el primero por cada uno de los otros, después de multiplicar y dividir aquel por 2, se obtiene:

$$\frac{-4r^2q^2-4brq^2+8rq+4bq-4}{4q^2}$$

cuya cantidad sumada con el primer producto binario $\frac{4sq^2}{4q^2}$, nos da:

$$\frac{-4r^2q^2-4brq^2+4sq^2+8rq+4bq-4}{4q^2}$$

O bien, dividiendo por 4 el numerador y denominador:

$$\frac{-r^2q^2-brq^2+sq^2+2rq+bq-1}{q^2}$$

Esta cantidad, que es la suma de los tres productos binarios, formados con los tres segundos miembros (k_2), tiene que ser igual á c, ó bien:

$$-r^2q^2-brq^2+sq^2+2rq+bq-1=cq^2.$$

Pasando cq^2 al primero, y cambiando signos, tendrá que ser:

$$(r^2+br+c-s)q^2-(2r+b)q+1=0.$$

Pero esta igualdad es cierta por ser la misma ya realizada en (h_3).

3.° Multiplicando los dos últimos segundos miembros (k_2) se obtiene, como ya se vío, el producto $\frac{4sq^2}{4q^2}=s$.

Y multiplicando este producto s por el primer segundo miembro (k_2), se obtiene el producto $\frac{-s+rsq}{q}$, el cual tiene que ser igual á $-n$, ó sea: $-s+rsq=-nq$.

Pasando $-nq$ al primero, y $-s$ al segundo, y dividiendo luego por s, se obtiene:

$$\frac{(sr+n)\,q}{s}=1.$$

Cuya igualdad es cierta, por ser la misma ya realizada en (h).

Vemos, pues, que las fórmulas (k_2), cumpliendo como cumplen la mencionada ley de relación, son evidentemente ciertas, y por lo tanto contienen cada una en su segundo miembro, un valor por lo menos de Y, de cada ecuación numérica propuesta. En matemáticas no parece posible que se contradigan la verdad objetiva y la subjetiva.

§ III.—(*Ejemplos numéricos.*)

Vamos, pues, á ver por modo de comprobación, como algunas ecuaciones numéricas se resuelven por las fórmulas (k_2).

Ante todo se habrá observado que en dichas fórmulas interviene la cantidad indeterminada aun s, la cual con un valor ú otro es inevitable para dar á la ecuación (A) la forma (A_1), que la hace suscaptible del procedimiento ya explicado.

Podemos, pues, dar á s diferentes valores; pero desde luego se ve que no puede ser igual á *cero*, porque entonces faltaría la forma (A_1) de la ecuación, sin la cual no hay procedimiento posible en el presente caso: ni tampoco puede ser s igual á c, pues como se observa en (A_1), semejante igualdad no sería mas que el cambio de este modo de proceder por otro diferente.

Entre los diferentes valores que puede tomar s, no hay duda que será mejor darle en cada caso numérico el que simplifique más la solución de que se trata. Si nos fijamos en la fórmula de r (h_6), sin dificultad percibimos la ventaja de dar á s un valor que nos convierta la cantidad subradical en un cuadrado mayor ó menor que b^2, puesto que, además de simplificar los valores de r, desterrando de ellos el radical, conseguimos también que debajo del radical de Y en (k_2), no aparezca el radical de r, facilitando así el que la cantidad subradical en Y, pueda más fácilmente ser *cuadrado perfecto*, cuya condición es necesaria para que tales fórmulas puedan darnos raíces de la ecuación propuesta.

Primer ejemplo numérico.

Sea la ecuación: $Y^3-6Y^2+11Y-6=0$.

Sustituyendo en el radical de r (h_6) los valores de b y c, nos dan $b^2-4c=-8$; y si damos á s el valor 6 por ejemplo, será debajo del radical $-8+24=16=4^2$. Es decir que, la cantidad subradical se convirtió en el cuadrado de 4, número par, inmediato inferior al 6 que representa b.

Tenemos, pues: $s=6$, $\sqrt{}$ de $r=4$.

Sustituyendo estos valores en r, tendremos:

$$r=\frac{36+72-132\mp 24}{-36+12\mp 24}=\frac{-24\mp 24}{-24\mp 24}=0=1.$$

Tomando el valor *cero* de r, será en q, (h_1):

$$q=\frac{6}{-6}=-1.$$

Y en la primera fórmula de Y, (k_2) será:

$$Y=\frac{-1}{-1}=1. \qquad (m)$$

Sustituyendo en la segunda fórmula doble de Y, (k_2) nos da:

$$Y=\frac{1-6\pm\sqrt{(1-6)^2-24}}{-2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{-2}=\frac{-5\pm 1}{-2}=\frac{-6}{-2}=\frac{-4}{-2}=3=2\ (m_1)$$

Tenemos, pues, las raíces $Y=1$, $Y=2$, $Y=3$, que son las de la ecuación propuesta.

Segundo ejemplo numérico.

Sea la ecuación: $Y^3+4Y^2-81Y+180=0$.

Haciendo en el radical de r, $s=-60$, resulta debajo de dicho radical $\sqrt{10^2}$, es decir, el cuadrado del mismo por mayor que $4=b$ en seis unidades.

Sustituyendo en r los valores $s=-60$ y $\sqrt{}=10$, resulta:

$$r=\frac{720+7200-9720\pm 1800}{}=0.$$

Luego será: $q=\frac{s}{n}=\frac{-60}{180}=\frac{-1}{3}$. La primera fórmula de Y, nos da:

$$Y=\frac{-1}{q}=\frac{-1}{-1/3}=3.$$

La doble de Y, será:

$$Y=\frac{1+\frac{4}{3}\pm\frac{17}{3}}{-2/3}=\frac{7\pm 17}{-2}=\frac{24}{-2}=\frac{-10}{-2}=-12=5.$$

Con lo que tenemos $Y=3$, $Y=5$, $Y=-12$, que son las raíces de la propuesta.

Tercer ejemplo numérico.

Sea la ecuación: $Y^3+3Y^2-73Y+165=0$.

Haciendo en r, $s=-55$, queda debajo del radical $\sqrt{9^2}$, es decir, el cuadrado de 3 que representa b, mas 6 unidades.

Sustituyendo en r los valores $s=-55$ y $\sqrt{}=9$, se tiene:

$$r=\frac{495+6050-8030\pm 1485}{}=0.$$

Será, pues, $q=\frac{-55}{165}=\frac{-1}{3}$. La primera fórmula de Y, nos da:

$$Y=\frac{-1}{-1/3}=3.$$

La fórmula doble de Y, nos da:

$$Y = \frac{1 + \frac{3}{3} \pm \frac{16}{3}}{-2/3} = \frac{22}{-2} = \frac{-10}{-2} = -11 = 5.$$

Con lo que se tiene $Y=3$, $Y=5$, $Y=-11$, que son las tres raíces de la propuesta.

Cuarto ejemplo numérico.

Sea la ecuación: $Y^3 + 3\,Y^2 - 25\,Y + 21 = 0$.

Haciendo en r, $s=-21$, queda debajo del radical $\sqrt{5^2}$, es decir, el cuadrado del impar superior al $3=b$, en dos unidades.

Sustituyendo en r los valores $s=-21$ y $\sqrt{}=5$, tendremos:

$$r = \frac{63 + 882 - 1050 \pm 105}{} = 0.$$

Será, pues, $q = \frac{-21}{21} = -1$. La primera fórmula de Y, nos da:

$$Y = \frac{-1}{q} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

La doble de Y, será:

$$Y = \frac{1 + 3 \pm \sqrt{100}}{-2} = \frac{4 \pm 10}{-2} = \frac{14}{-2} = \frac{-6}{-2} = -7 = 3.$$

Con lo que se tiene $Y=1$, $Y=3$, $Y=-7$, que son las tres raíces de la propuesta.

§ III.—(*Explicación del procedimiento.*)

1.° Al disponer de s debajo del radical de r de tal modo que para r se obtenga siempre un valor *cero*, es evidente que el valor de q le limitamos precisamente á $\frac{s}{n}$: pero como entonces Y, en su primera fórmula se reduce á $\frac{-1}{q}$, sustituyendo el valor de $q = \frac{s}{n}$ será $Y = -\frac{n}{s}$. Ahora bien: n es el producto de las tres raíces de la ecuación dada en cada caso, y por lo tanto, para que la igualdad $Y = -\frac{n}{s}$ sea cierta, es necesario que s sea el producto de dos raíces de la ecuación propuesta. Esta es una condición intrínseca del procedimiento, que se cumple con toda exactitud. Véanse todos los ejemplos resueltos, y se verá que en todos s es el producto de dos raíces.

2.° El denominador de q en la fórmula $q = \frac{s}{n}$, es por consiguiente uno de los valores de Y, después de dividir por s los dos términos del quebrado.

3.° La necesidad de que s tome como valor el producto de dos raíces, hácese evidente en la fórmula doble de Y. En efecto, suprimiendo los términos que tienen r, será:

$$Y = \frac{1 - bq \pm \sqrt{(1 - bq)^2 - 4sq^2}}{2q} \qquad (k_3)$$

Hemos visto ya que el valor de q es un quebrado cuyo numerador es la unidad, y cuyo denominador es una raiz de la ecuación dada que expresaremos por p^1 (a), así: $q = \frac{1}{p^1}$. Este quebrado puede ser positivo ó negativo según lo sean s y n. Y como $b = p^1 + q^1 + r^1$, será en (k_3).

$$Y = \frac{1 - q(p^1 + q^1 + r^1) \pm \sqrt{(1 - q(p^1 + q^1 + r^1))^2 - 4sq^2}}{2q}$$

ó bien:

$$Y = \frac{-(q^1 + r^1) \pm \sqrt{(q^1 + r^1)^2 - 4s}}{\pm 2} \qquad (k_4)$$

En la ecuación de segundo grado se hace ver que su radical $\sqrt{b^2 - 4n}$ cubre siempre el cuadrado perfecto de la dife-

(a) Las letras p', q', r', m', se leerán: p *prima*, q *prima*, r *prima* m *prima*.

rencia de las raíces, puesto que siendo $b=(p+q)$ y $n=pq$, la cantidad b^2-4n, se convierte en $(p-q)^2$.

Pues esto mismo tiene que suceder en (k_4) para que la fórmula nos de, como tiene que dar por ley necesaria, las dos raíces que faltan de la ecuación propuesta: s tiene que ser igual al producto q^1r^1; y entonces el radical representa la raíz cuadrado del cuadrado $(q^1-r^1)^2$.

Véase en lós ejemplos numéricos resueltos, y se notará que la cantidad subradical de (k_4), es en todos el cuadrado de (q^1-r^1); es decir, el cuadrado de la diferencia de dos de las raíces.

4.° La cantidad cuadrada que dejamos debajo del radical de r, está representada por $(b\pm m^1)^2$, siendo m^1 un número por 2, 4, 6... De modo que el cuadrado que se deja será par ó impar según lo sea b. Para determinar el valor de s y por lo tanto el de m^1, se calcula en números (b^2-4c) y restando $(b\pm m^1)^2$, el resto se divide por 4: todo está reducido á repetir esta operación, dando á m^1 los valores 2, 4, 6... hasta que un resto dividido por 4, sea divisor de n: el cociente entonces será el valor de s, y el cuadrado subradical $(b\pm m^1)^2$.

5.° Si hacemos $(b\pm m^1)^2=R^2$, se puede determinar R en función de las raíces de la ecuación propuesta.

En efecto; debajo del radical de r, será:

$$b^2-4c-R^2+4s=0$$

$$b^2-4c=p^{1^2}+q^{1^2}+r^{1^2}-2p^1q-2p^1r^1-2q^1r^1;$$

y como $\qquad s=q^1r^1$, será $4s=4q^1r^1$;

luego $p^{1^2}+q^{1^2}+r^{1^2}-2p^1q^1-2p^1r^1+2q^1r^1-R^2=0$

ó bien: $p^{1^2}+q^{1^2}+r^{1^2}-2p^1r^1-2p^1r^1+q^1r^1=R^2$.

El primer miembro es igual á $(p^1-(q^1+r^1))^2$.

Luego se tiene: $\quad R=p^1-(q^1+r^1)$.

De cuya igualdad resulta que R tiene tres valores, expresados por cada una de las diferencias, entre un raíz y la suma de los otros dos. Estas diferencias son siempre tres.

En la práctica nos basta determinar un valor de R, el más cercano á b, y que solo se diferencia de b en dos veces la raíz menor.

6.° Veamos ahora como procediendo del modo dicho se obtendrá siempre para r un valor *cero*. Nos ocuparemos sólo del numerador, puesto que nos basta con que éste lo sea. El valor de r se presenta así:

$$r = \frac{bn + 2s^2 - 2cs \pm n(b \pm m')}{}$$

ó bien $$r = \frac{bn + 2s^2 - 2cs \pm bn \pm m'n}{}$$

La cantidad del numerador debe ser igual á *cero*, ó bien

$$bn + 2s^2 - 2cs \pm bn \pm m'n = 0.$$

Hemos visto que s toma como valor el producto de dos raíces que supondremos sea $p'q'$; y como $n = p'q'r'$, dividiendo por $p'q'$, será:

$$br' + 2p'q' - 2c \pm br' \pm m'r' = 0.$$

Poniendo en lugar de b su igual $(p' + q' + r')$, y en lugar de c su igual $p'q' + p'r' + q'r'$, será:

$$p'r' + q'r' + r'^2 + 2p'q' - 2p'q' - 2p'r' - 2q'r' \pm p'r' \pm q'r' \pm r'^2 \pm m'r' = 0.$$

. . . .

Destruyendo y reduciendo en los términos de signo sencillo, será:

$$-p'r' - q'r' + r'^2 \pm p'r' \pm q'r' \pm r'^2 \pm m'r' = 0.$$

Dividiendo por r' y ordenando, se tiene:

$$(-p' \pm p') + (-q' \pm q') + (r' \pm r') \pm m' = 0.$$

Esta igualdad se realiza con tal que sea:

$$m^1 = 2\,r^1,\ \text{ó bien: } m^1 = 2\,(p^1 + q^1),\ \text{ó bien: } m^1 = 2\,(r^1 - q^1)$$

$$\text{ó } 2\,(r^1 - p^1),\ \text{ó bien } m^1 = 2\left(r^1 - (p^1 + q^1)\right).$$

Y como cualquiera de las letras p^1, q^1, r^1, representa indistintamente todas las raíces de la ecuación, resulta que los valores de m^1 que reducen á *cero* el valor de r son: el duplo de cada una de las raíces; el duplo de cada suma de dos raíces; el duplo de cada diferencia entre dos raíces, y el duplo de cada diferencia entre una raíz y la suma de las otras dos. Todos son números pares.

Pero, ya se ha visto que los valores que se dan á m^1 son los pares desde el 2 en adelante; luego por necesidad se llega á darle uno de los que reducen á *cero* el valor de r.

Fíjese la atención en los ejemplos resueltos y se verá que el valor de m^1 es en cada caso uno de los que quedan expresados.

7.° El valor *cero* de r con uno de los valores que toma m^1 puede comprobarse de otro modo, más directo si se quiere.

modo, más directo si se quiere. m^1 puede comprobarse de otro

m^1 puede comprobarse de otro modo, más directo si se quiere.

Dividiendo por $q^1 r^1$, será:

$$bp^1 + 2\,q^1 r^1 - 2\,p^1 q^1 - 2\,p^1 r^1 - 2\,q^1 r^1 \pm p^{1^2} \pm p^1 q^1 \pm p^1 r^1.$$

Poniendo en lugar de b su igual $(p^1 + q^1 + r^1)$, será:

$$p^{1^2} + p^1 q^1 + p^1 r^1 + 2\,q^1 r^1 - 2\,p^1 q^1 - 2\,p^1 r^1 - 2\,q^1 r^1 \pm p^{1^2} \pm p^1 q^1 \pm p^1 r^1,$$

ó bien: $(p^{1^2} \pm p^{1^2}) + (p^1 q^1 \pm p^1 q^1) - (p^1 r^1 \pm p^1 r^1)$.

Esta cantidad es el numerador de r, y uno de sus valores como se ve, es *cero*.

El valor $2\,q^1 r^1$, como número par que es, es uno de los que puede tomar m^1 según ya queda explicado, puesto que sólo toma valores pares.

8.° Entre los ejemplos numéricos resueltos los hay con las raíces variadas en muy diferentes modos, para que se vea que el procedimiento responde á todas la combinaciones con la misma facilidad y precisión. En los cuatro ejemplos resueltos no hubo necesidad de pasar del tercer par ó impar superior ó inferior al representado por b, para determinar el valor de s.

9.° El modo más fácil, breve y seguro para determinar el primer valor de s, ó todos si se quiere, es el siguiente:

Pongamos las raíces $+2$, $+9$, -24, las que nos dan para coeficientes de la ecuación $b = -13$, $c = -246$, $n = -432$.

Los divisores de $n = -432$, son:

1	2	4	8	16
3	6	12	24	48
9	18	36	72	144
27	54	108	216	432

En el radical de r tenemos: $b^2 - 4\,c = 1153$.

Ahora para saber si menor á b que es 13, hay algún impar que pueda ser valor de R, y darnos por lo tanto algún valor de s, se procede así: el impar menor siguiente al 13 es 11;

su cuadro 121 se resta de 1153 y nos da 1032, que dividido por 4 produce 258. Este número no es divisor de n, y por lo tanto no resuelve la cuestión.

Los demás valores de s, correspondientes á los impares sucesivos menores que 11, y que irán siendo sucesivamente mayores, se forman añadiendo al 258 los números pares sucesivos, menores y desde el $(11-1)=10$, así:

$$258+10=268;\quad 268+8=276;\quad 276+6=282;$$
$$282+4=286;\quad 286+2=288.$$

Como se ve ninguno es divisor de $n=-432$; de lo cual se deduce que los valores de R han de ser mayores que $13=b$.

Tomaremos, pues, el impar superior inmediato al 13 que es 15, cuyo cuadrado 225, restado de 1153 nos dé 928, y dividido por 4 produce 232; este número no es divisor de n, y por lo tanto no sirve.

Para formar los siguientes valores de s, correspondientes á los impares sucesivos mayores que 15, no hay más que restar sucesivamente los pares sucesivos desde el $(15+1)=16$ para arriba, así:

$$\frac{232}{15}-16=\frac{216}{17};\quad 216-18=\frac{198}{19};\quad 198-20=\frac{178}{21};$$

$$178-22=\frac{156}{23};\quad 156-24=\frac{132}{25};\quad 132-26=\frac{106}{27};$$

$$106-28=\frac{78}{29};\ 78-30=\frac{48}{31};\ 48-32=\frac{16}{33};\ 16-34=\frac{-18}{35}$$

y así hasta que se obtengan, si se quiere, tres valores de s que dividan á n.

Los números puestos encima de las rayas son los valores sucesivos de s, y los que están debajo los valores sucesivos de R.

Obsérvese que al segundo impar superior á 13, que es el 17, ya nos resultó el valor de s, 216, divisor de n: otro está sobre el impar 31, que es 48, y otro sobre el — 35 que es 18.

Los pares de valores $s = -216$, $R = 17$; $s = -48$, $R = 31$; $s = +18$, $R = -35$; reducen á *cero* el numerador del valor de r, y por lo tanto son los tres valores de s, y los tres de R que resuelven la ecuación propuesta.

En efecto: los tres valores de s son cada uno el producto de dos raíces de la ecuación:

$$\begin{aligned} -216 &= -24 \times 9 \\ -48 &= -24 \times 2 \\ -(-18) &= 9 \times 2 \end{aligned}$$

Los tres valores de R son cada uno la diferencia entre una raíz y la suma de los otros dos:

$$\begin{aligned} 17 &= 2 - (9 - 24) \\ 31 &= 9 - (2 - 24) \\ -35 &= -24 - (9 + 2) \end{aligned}$$

Y dividiendo por fin $n = -432$, por cada valor de s, se obtendrán las tres raíces de la ecuación:

$$\begin{aligned} -432 : -216 &= 2 \\ -432 : -48 &= 9 \\ -432 : 18 &= -24 \end{aligned}$$

Debe observarse también que sobre el impar 33 está el valor de s, 16, que es divisor de n, lo cual parece indicar que R puede tener cuatro valores en este ejemplo, pero no es así. Los valores $s = -16$ y $R = 33$, no reducen á *cero* el numerador del valor de r; y además -16 no es producto de dos raíces de la ecuación, ni 33 es igual á ninguna de las diferencias entre una raíz y la suma de las otras dos. Lo que nos indica este detalle es la necesidad de comprobar los pares de valores de s y R, hallados debajo del radical, fuera de éste, para cerciorarnos de que reducen á *cero* el valor de r.

Para hacer esta comprobación no hay necesidad de ejecutar todas las operaciones indicadas en el numerador de r, pues bastan las indicadas en esta igualdad, que se deduce de los dos que se forman en dicho numerador, una debajo del radical y otra fuera, ó sea:

$$s(b \pm R) = 2n.$$

La comprobación en ésta es facilísima y mucho más breve que en la otra del numerador.

LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

PARTE SEGUNDA

Suplemento á los libros primero y segundo.—Cuaderno tercero.

ECUACIÓN DE CUARTO GRADO

Un modo general de resolverla.
Deducción de las fórmulas y solución de tres ejemplos numéricos.

NOTA

La demostración que sigue de cuarto grado, con ejemplos numéricos resueltos por sus fórmulas, han sido trabajados, como ya se ha dicho, para hacer constar la virtualidad real de éstas, y presentar á la vez resuelta esta ecuación, que es el término inferior á que se reducen todas las de superiores grados.

Con estos procedimientos á la vista, no será ya dudoso que en lo sucesivo, las soluciones de tercero y cuarto grado, numéricas, llegarán á ser tan fáciles y triviales como las de regundo.

UN MODO ESPECIAL DE RESOLVER LA DE CUARTO GRADO

§ I.

Demostración y fórmulas generales.

Sea la ecuación:

$$Y^4 + b_1 Y^3 + c_1 Y^2 + d_1 Y + n_1 = 0. \qquad (A)$$

Hacemos $Y = x + r$; se sustituye, y dando luego á r el valor $r = \frac{-b_1}{4}$, desaparece el segundo término, y queda:

$$x^4 \begin{array}{l|l|l} +6r^2 & x^2 + 4r^3 & x + r^4 \\ +3b_1 r & +3b_1 r^2 & +b_1 r^3 \\ +c_1 & +2c_1 r & +c_1 r^2 \\ & +d_1 & +d_1 r \\ & & +n_1 \end{array} \qquad (A_1)$$

En esta expresaremos para abreviar el coeficiente de x^2 por c, el de x por d, y el último término todo por n, así:

$$x^4 + cx^2 + dx + n = 0. \qquad (A_2)$$

Sustituyendo en (A_1) el valor de $r = \frac{-b}{4}$, se tendrán en (A_2) los valores de c, d, n.

En (A_2) dejaremos en el primer miembro x^4, pasando los demás términos al segundo, pero añadiendo en ambos á la vez, la cantidad $2zx^2 + z^2$, así:

$$x^4 + 2zx^2 + z^2 = 2zx^2 - cx^2 - dx - n + z^2 \qquad (A_3)$$

El primer miembro es el cuadrado de $(x^2 + z)$; y en el segundo separaremos como factor común la suma de los coeficientes de x^2, multiplicando y partiendo por 2 el coeficiente de x.

$$(x^2+z)^2=(2z-c)\left(x^2-2\frac{d}{2(2z-c)}x+\frac{z^2-n}{(2z-c)}\right) \qquad (A_4)$$

En esta haremos que, *el quebrado* del término x en el último paréntesis, sin el factor 2 que le precede, *elevado al cuadrado, sea igual* al último quebrado en el mismo paréntesis, ó sea:

$$\frac{d^2}{4(2z-c)^2}=\frac{z^2-n}{(2z-c)} \qquad (h)$$

Suprimiendo en los denominadores el factor común $(2z-c)$, quitando el denominador que queda en el primer miembro, y ordenando para z, nos da:

$$8z^3-4cz^2-8nz+4cn-d^2=0. \qquad (h_1)$$

Con los valores de z en esta de tercer grado, se realiza la igualdad (h); y realizada esta igualdad, es evidente que el último paréntesis general de (A_4), se convirtió en el cuadrado de $\left(x-\frac{d}{2(2z-c)}\right)$; y tomando las raíces cuadradas de ambos miembros, será:

$$x^2+z=\left(x-\frac{d}{2(2z-c)}\right)\sqrt{2z-c}$$

Efectuando operaciones en el segundo miembro y pasando todo al primero, resulta:

$$x^2\pm\sqrt{2z-c})\,x+\frac{d}{2\sqrt{2z-c}}+z=0. \qquad (A_5)$$

De donde $$x=\frac{\pm\sqrt{2z-c}\pm\sqrt{2z-c\pm\frac{2d}{\sqrt{2z-c}}-4z}}{2} \qquad (h_2)$$

Y además es, (h_1): $8z^3-4cz^2-8nz+4cn-d^2=0.$ (h_3)

Hallados en (h_3) los valores de z, y puestos en (h_2), es indudable que se tendrán en ésta todos los valores de x: cada valor de x, sumado con el de $r = \frac{-b}{4}$, dará un valor para Y en la ecuación propuesta. Los cuatro que le corresponden se comprobarán á medio de sus relaciones con los coeficientes.

Ahora bien; la de z, (h_3), como de tercer grado, podríamos resolverla como tal, á medio de las fórmulas ya explicadas, con ó sin el radical de tercar grado; pero á mi modo de ver, creo será preferible, por lo más breve, fácil y seguro, el siguiente procedimiento.

Separando en los dos primeros términos $4z^2$, y en los dos siguientes $4n$, será:

$$4z^2(2z - c) - 4n(2z - c) = d^2 \qquad (h^4)$$

Dividiendo por $(2z - c)$, tendremos:

$$4z^2 - 4n = \frac{d^2}{2z - c} \qquad (h_5)$$

En esta igualdad se puede aritméticamente determinar con grande facilidad los valores de z.

En primer lugar observaremos que la cantidad $(2z - c)$ tiene que ser cuadrado perfecto, así como también la cantidad $(2z - c \pm \frac{2d}{\sqrt{2z-c}} - 4z)$, como condición indispensable para que los valores de x en (h_2), sean racionales y puedan, sumados con la cantidad racional $\frac{-b}{4}$, darnos los valores de Y en la ecuación propuesta. Si en el valor de r pudiese entrar un elemento irracional, este mismo elemento tendría que presentarse en los valores de x, para que al efectuar las sumas se destruyesen mutuamente, dando los valores racionales que puedan corresponder á Y.

También se debe observar que, por la manera de formarse los coeficientes c, d, n, en (A_1) á medio del valor $r=\frac{-b}{4}$, á c le corresponde el denominador 16, á d 64 y á n 256, á menos que b sea 2 ó un múltiplo de 4; pero en rigor, sino simplificamos, los denominadores habrán de serlos indicados.

§ II

Ejemplos numéricos.

Primer ejemplo.

Sea la ecuación numérica:

$$Y^4+2\,Y^3-3\,Y^2-8\,Y-4=0.$$

Cuyas cuatro raíces son:

$$(Y+1),\quad (Y+1),\quad (Y+2),\quad (Y-2).$$

Haciendo $Y=x+r$; sustituyendo y haciendo $r=\frac{-1}{2}$, desaparece el segundo término, y los demás coeficientes, calculados en (A_1), serán respectivamente para la (A_2):

$$x^4-\frac{18}{4}x^2-\frac{32}{8}x-\frac{15}{16}=0. \qquad (h_1)$$

Sustituyendo estos coeficientes en (h_5) ó sea; $c=-\frac{18}{4}$ $d=-\frac{32}{8}$, y $n=-\frac{15}{16}$, nos da:

$$16\,z^2+15=\frac{64}{2z+\frac{18}{4}} \qquad (h_2)$$

Tenemos, pues, ante todo, que los valores de z han de ser tales que, el denominador del segundo miembro sea un cuadrado, y la cantidad del primero igual á la del segundo.

Y además sabemos, por la forma de la ecuación (h_3), que los valores de z todos ó alguno, han de ser fraccionarios.

Desde luego vemos en el denominador del segundo miembro que, $\frac{18}{4}-\frac{2}{4}$ y $\frac{18}{4}-\frac{14}{4}$ son cuadrados; y por lo tanto, haciendo $z=\frac{-1}{4}$ y $z=\frac{-7}{4}$, nos resultan en dicho denominador los cuadrados respectivos $\frac{16}{4}$ y $\frac{4}{4}$: con los que el segundo miembro se convertirá en 16 y 64.

Tendremos, pues, en (k_2):

$$16\,z^2+15=16$$

$$16\,z^2+15=64$$

Sustituyendo en la primera el valor $\frac{-1}{4}$ que corresponde á z, será:

$$1+15=16$$

y sustituyendo en la segunda el valor de $z=\frac{-7}{4}$ nos da:

$$49+15=64.$$

En (k_2) no encontraremos el otro valor de z, que la realice en las condiciones indicadas; pero le podemos determinar fácilmente con los coeficientes de (h_3). Sustituyendo en ella los valores de c, d, n, y dividiendo luego por 8, coeficiente de z^3, la ecuación se presenta así:

$$z^3+\frac{9}{4}z^2+\frac{15}{16}z+\frac{7}{64}=0.$$

La suma de los tres valores de z ha de ser igual á $-\frac{9}{4}$; y como tenemos los dos valores $-\frac{1}{4}$ y $-\frac{7}{4}$, el otro debe ser $-\frac{1}{4}$; es decir, que la resolvente (h_3) tiene dos raíces iguales como la propuesta y con el mismo signo.

El producto de los tres valores, para que sean ciertos, debe ser igual á $-\frac{7}{64}$, y efectivamente vemos que lo es: y además la suma de los productos binarios debe ser igual á $+\frac{15}{16}$, y en efecto vemos que $\frac{1}{16}+\frac{7}{16}+\frac{7}{16}=\frac{15}{16}$. Son pues, ciertos los tres valores de z.

Con estos dos valores $\frac{-1}{4}$, $\frac{-7}{4}$, puesto que el terreno es también $\frac{-1}{4}$, vamos á determinar los de x en (h_2).

El primer radical sabemos que vale 2 ó 1, y lo mismo el que está debajo del $2d$ en el segundo radical doble. $2d=-8$, y $-4z=1=7$. $2z-c=4=1$, y $\pm\frac{2d}{\sqrt{2z-c}}=\pm 4=\pm 8$: tomando los primeros valores.

Tendremos:

$$x=\frac{\pm 2\pm\sqrt{4\pm 4+1}}{2}=\frac{\pm 2\pm 3}{2}=\frac{\pm 2\pm 1}{2}$$

Tomando los segundos, es:

$$x=\frac{\pm 1\pm\sqrt{1\pm 8+7}}{2}=\frac{\pm 1\pm 4}{2}=\frac{\pm 1\pm 0}{2}$$

De la primera sale:

$$x=\frac{5}{2}=\frac{-5}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{-3}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}\quad (M)$$

Y de la segunda despreciando el *cero*, sale:

$$x=\frac{5}{2}=\frac{-5}{2}=\frac{3}{2}=\frac{-3}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}\qquad (M_1)$$

Cuyos valores son los mismos que los de la primera: Ahora bien, $b=2$; luego $\frac{-b}{4}=\frac{-1}{2}$.

Los valores, pues, de Y en la propuesta, serán:

$$Y=\frac{-1+5}{2}=\frac{-1-5}{2}=\frac{-1+3}{2}=\frac{-1-3}{2}=\frac{-1+1}{2}=\frac{-1-1}{2}=\frac{-1+1}{2}=\frac{-1-1}{2}$$

ó bien $Y=2=-3=1=-2=0=-1=0=-1.$

Los valores *cero* son desde luego nulos puesto que no pueden corresponder á la ecuación propuesta. Un valor *cero* en la de cuarto grado la reduciría desde luego al tercero.

Fijándonos en la propuesta (k), desde luego vemos que el valor -3, no es de la ecuación puesto que no es factor de $n=-4$.

El valor $+1$, con otros tres $+2$, -2, -1, nos daría para $n=+4$, lo que no puede ser: y por lo tanto sólo quedan los valores $+2$, -2, -1, -1, ó sea:

$$Y=2=-2=-1=-1.$$

Lo que da las raíces $(Y-2)=0$, $(Y+2)=0$, $(Y+1)=0$, $(Y+1)=0$, que son los que pusimos en la ecuación, dada.

Segundo ejemplo numérico.

Sea la ecuación:

$$Y^4+2Y^3-13Y^2-14Y+24=0.$$

Cuyas cuatro raíces son:

$$(Y-1),\ (Y+2),\ (Y-3),\ (Y+4).$$

Haciendo $Y=x+r$; y haciendo luego $r=\frac{-1}{4}=\frac{-1}{2}$ desaparece el segundo término, y será:

$$c=\frac{-58}{4},\quad d=0,\quad n=\frac{441}{16}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (h_5) de z, será:

$$16\,z^2-441=\frac{0}{2z+\frac{58}{4}}$$

Esta ecuación es evidente que sólo estará resuelta con los valores de z en el primer miembro, los cuales son:

$$z = \pm \frac{21}{4}$$

Pero estos valores de z deben convertir en cuadrado la cantidad $2z + \frac{58}{4}$; y en efecto, sustituyendo en ella dichos valores, resulta:

$$\frac{42+58}{4} = \frac{100}{4} = \frac{10^2}{2^2},\ \text{y}\ \frac{-42+58}{4} = \frac{16}{4} = \frac{4^2}{2^2}$$

Y además, los mismos valores de z tienen que convertir también en cuadrado la cantidad subradical del doble de x en (h_2); cuya cantidad, siendo $d = 0$ se reduce á $-2z + \frac{58}{4}$ pero como z es igual á $\pm \frac{21}{4}$, la cantidad será $\frac{\mp 42}{4} + \frac{58}{4}$, que es la misma anterior.

Y por lo tanto, valiendo el primer radical de x, ± 5 y ± 2; y el segundo, ∓ 5, ó ∓ 2; los valores de x, despreciando los que igualan á *cero*, y los que igualen á número entero, por inútiles, serán:

$$x = \frac{7}{2} = \frac{-7}{2} = \frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$$

Que sumados uno á uno con $r = \frac{-1}{2}$, nos dan:

$$Y = 3 = -4 = 1 = -2$$

ó sea las raíces de la propuesta.

Tercer ejemplo numérico.

Sea la ecuación:

$$Y^4 - 2Y^3 - 19Y^2 + 8Y + 60 = 0.$$

Cuyas raíces son:

$$(Y-2),\quad (Y+2),\quad (Y+3),\quad (Y-5).$$

Procediendo como en los anteriores, se obtiene:

$$c = \frac{-82}{4}, \quad d = -12, \quad n = \frac{945}{16}$$

La ecuación de z, (h_5), será:

$$16\,z^2 - 945 = \frac{4.144}{2z + \frac{82}{4}}$$

Dando á z los valores $\frac{31}{4}$, $-\frac{39}{4}$, $-\frac{33}{4}$, se obtienen en el denominador los cuadrado respectivos $\frac{12^2}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{16}{4}$, y con cada uno de dichos valores se verifica la igualdad.

Poniendo en la fórmula de x (h_2), los valores de z, el primer radical toma los valores respectivos ± 6, ± 1, ± 2; y el otro radical toma con cada uno de z los dos respectivos; con el primero, ± 3, ± 1; con el segundo, ± 8, ± 4, y con el tercero, ± 7, ± 5.

Combinados estos con los del primer radical, nos da:

$$x = \frac{\pm 6 \pm 3}{2}, \quad x = \frac{\pm 6 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{\pm 1 \pm 8}{2}, \quad x = \frac{\pm 1 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{\pm 2 \pm 7}{2}, \quad x = \frac{\pm 2 \pm 5}{2}$$

ó bien

$$x = \frac{+9}{2} = \frac{-9}{2} = \frac{+3}{2} = \frac{-3}{2} = \frac{+7}{2} = \frac{-7}{2} = \frac{+5}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$x = \frac{+9}{2} = \frac{-9}{2} = \frac{+7}{2} = \frac{-7}{2} = \frac{+5}{2} = \frac{-5}{2} = \frac{+3}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$x = \frac{+9}{2} = \frac{-9}{2} = \frac{+5}{2} = \frac{-5}{2} = \frac{+7}{2} = \frac{-7}{2} = \frac{+3}{2} = \frac{-3}{2}$$

De donde se ve que cada valor de z nos da todos los de x:

$$\frac{\pm 9}{2},\ \frac{\pm 7}{2},\ \frac{\pm 5}{2},\ \frac{\pm 3}{}$$

Los de Y, serán:

$$\frac{\pm 9+1}{2},\ \frac{\pm 7+1}{2},\ \frac{\pm 5+1}{2},\ \frac{\pm 3+1}{2}$$

ó bien

$$Y=+5=-4=+4=-3=+3=-2=+2=-1.$$

Tomando éstos de cuatro en cuatro, y formando los coeficientes de la ecuación propuesta, se determinan las cuatro raíces de la misma. Pero, para hacerlo brevemente no hay más que fijarse en que el $+5$ es un valor de Y puesto que n, ó sea 60, es divisible por 5; por la misma razón otro valor será $+3$ ó -3; y en consecuencia el -1 no puede ser uno de dichos valores, puesto que ni con $+2$, ni con -2, no puede formarse el producto 60. Los dos valores $+3$ y -3, no pueden tomarse porque con su producto 9 no puede tampoco formarse el 60. Luego los valores serán $+5$, ± 3, $+2$, y -2. Para determinar el signo del 3, basta fijarse en que siendo $n=+60$, el signo del 3 será el negativo y se tendrá $Y=+5=-3=-2=+2$; ó sean las raíces $(Y-5)$, $(Y+3)$, $(Y+2)$, $(Y-2)$. Los signos de 5 y 3 no pueden cambiarse puesto que entonces resultaría $b=+2$, contrario á lo supuesto.

Por los ejemplos que preceden se comprende bien que los valores de z en (h_5), atendiendo á las condiciones que han de reunir en cada caso numérico se determinan con toda facilidad.

Y como por otra parte, con cada valor de z, puesto en la fórmula de x, se obtienen sus cuatro valores, los que, sumados uno á uno con el de r, nos dan los cuatro de Y, resulta, que en rigor, nos basta con hallar un sólo valor de z, lo cual hace del procedimiento, que sea este el más fácil y el más breve que pudiera desearse.

LUCUBRACIONES ALGEBRAICAS

PARTE SEGUNDA.—ECUACIONES

Suplemento á los libros primero y segundo.—Cuaderno cuarto.

Otra demostración sistemática
de la solución de cuarto grado; en la cual se establece
directamente el divisor de segundo grado, que en la primera
se dedujo por consecuencia inmediata
de premisas evidentes.

ADVERTENCIA

A esta solución, que desde un principio se buscó hasta con insistente tenacidad, y que fué como la causa ocasional de haberse hallado las otras cinco, no se pudo llegar sino mucho después de estar determinadas éstas, por cuyo motivo no se la remitió con aquellas á la imprenta. Por lo demás, si se atiende á las formas de su desarrollo, y á la facilidad en resolver las ecuaciones numéricas, acaso sea la que merezca la preferencia entre todas las de su género.

SEXTA SOLUCIÓN SISTEMÁTICA DE CUARTO GRADO

§ I

Sea la ecuación:

$$Y_1^4 + b_1 Y_1^3 + c_1 Y_1^2 + d_1 Y_1 + n_1 = 0. \qquad (A)$$

Separamos Y_1^2 en los tres primeros términos y d_1, en los últimos, así:

$$Y_1^2 (Y_1^2 + b_1 Y_1 + c_1) + d_1 \left(Y_1 + \frac{n_1}{d_1}\right) = 0. \qquad (A_1)$$

Hacemos en ésta $Y_1 = (Y + r)$, se sustituye y da:

$$(Y+r)^2 \left(Y^2 \begin{array}{l|l} +2r & Y + r^2 \\ + b_1 & +b_1 r \\ & + c_1 \end{array}\right) + d_1 \left(Y + \left(r + \frac{n_1}{d_1}\right)\right) = 0. \qquad (A_2)$$

Para abreviar expresaremos el coeficiente de Y en el segundo paréntesis por b, la última cantidad toda del mismo por c, y la cantidad del último paréntesis interior por n, así:

$$(Y+r)^2 (Y^2 + bY + c) + d_1 (Y + n) = 0. \qquad (A_3)$$

Ahora se hace $Y = x + \frac{1}{s}$, y sustituyendo da:

$$\frac{(xs + rs + 1)^2}{s^2} \left(x^2 \begin{array}{l|l} + \frac{2}{s} & x + \frac{1}{s^2} \\ + b & + \frac{b}{s} \\ & + c \end{array}\right) + d_1 \left(x + \frac{1}{s} + n\right) = 0. \qquad (A_4)$$

Esta se multiplica por $(x+p)$, efectuando la multiplicación sólo en el último paréntesis é indicándola en lo demás, así:

$$\frac{(x+p)\,(xs+rs+1)^2}{s^2}\left(x^2\begin{array}{l|l} +\frac{2}{s} & x+\frac{1}{s^2}\\ +b & +\frac{b}{s}\\ & +c\end{array}\right)+d_1\left(x^2\begin{array}{l|l}+p & x+np\\ +n & +\frac{p}{s}\\ +\frac{1}{s} & \end{array}\right)=0 \quad (A_5)$$

Igualando en esta, entre sí, los coeficientes de los términos x de los dos últimos paréntesis, nos dan:

$$\frac{2}{s}+b=p+n+\frac{1}{s} \qquad (h)$$

De donde:
$$s=\frac{1}{p+n-b} \qquad (h_1)$$

Igualando entre sí también las últimas cantidades de dichos dos paréntesis, dan:

$$\frac{1}{s^2}+\frac{b}{s}+c=np+\frac{p}{s} \qquad (h_2)$$

ó bien
$$cs^2-nps^2+bs-ps+1=0. \qquad (h_3)$$

De donde:

$$s=\frac{p-b\pm\sqrt{b^2-4c+p^2-2p(b-2n)}}{2c-2np} \qquad (h_4)$$

Igualando entre sí los dos valores de s, (h_1) y (h_4), pero sin quitar el radical; quitando denominadores, reduciendo y pasando todo al primer miembro, se tiene:

$$2c-b^2+bn-p^2+2bp-3np\pm(b-n-p)\sqrt{b^2-4c+p^2-2p(b-2n)}=0 \qquad (h_5)$$

Poniendo en esta igualdad los valores que representan las letras b, c, n, ó sean:

$$b=2r+b_1$$
$$c=r^2+b_1r+c_1$$
$$n=r+\frac{n_1}{d_1}$$

Y quitando el denominador d_1 fuera del radical; teniendo en cuenta que debajo de éste desaparecen los términos de r, quedando las mismas letras con el subíndice 1 en b y c, y en vez de n su representada $\frac{n_1}{d_1}$; ordenando para r y despejando, se tiene:

$$r=\frac{b_1^2 d-b_1 n_1-2c_1 d_1+d_1 p^2+3n_1 p-2b_1 d_1 p\mp(b_1 d_1-n_1-d_1 p)\sqrt{b_1^2-4c_1+p^2-2p\left(b_1-\frac{2n_1}{d_1}\right)}}{2n_1-b_1 d_1+d_1 p\pm d_1\sqrt{b_1^2-4c_1+p^2-2p\left(b_1-\frac{2n_1}{d_1}\right)}} \quad (h_6)$$

Con un valor de r se realiza la igualdad (h_5) entre los valores de s; y por lo tanto con cualquiera de ellos se verifican las igualdades (h) y (h_2); con lo cual es evidente que las cantidades de los dos últimos paréntesis de (A_5) se identificaron.

Expresando, pues, en dicha ecuación el coeficiente de x, en los dos últimos paréntesis por B, y la última cantidad por C; separando el factor común y multiplicando por s^2, será:

$$\left((x+p)(xs+rs+1)^2+d_1 s^2\right)(x^2+Bx+C)=0 \quad (A_6)$$

La cual como se ve, está resuelta con una de segundo hrado y otra de tercero para x, ó sean:

$$\left.\begin{aligned} x^2+Bx+C&=0\\ (x+p)(xs+rs+1)^2+d_1 s^2&=0 \end{aligned}\right\} \quad (A_7)$$

En las cuales se tiene:

$$\left.\begin{aligned} B&=\frac{2}{s}+b=p+n+\frac{1}{s}\\ C&=\frac{1}{s^2}+\frac{b}{s}+c=np+\frac{p}{s} \end{aligned}\right\} \quad (A_8)$$

s tiene el valor (h_1) ó el (h_4), y r el valor (h_6).

Obsérvese también que p es una disponible, á la cual á su tiempo (como se hizo con s en la solución de tercer grado sin radical de grado impar), se dará el valor necesario para poder determinar con más facilidad los de Y_1, en función de r, s y x. La disponible p podemos llevarla del mismo modo á todas las ecuaciones de grado superior al cuarto.

§ II

De lo expuesto, se tiene:

$$Y_1 = r + Y. \qquad (k)$$

Pero como Y es igual á $x + \frac{1}{s}$ sustituyendo, tendremos:

$$Y_1 = r + \frac{1}{s} + x. \qquad (k_1)$$

Del último paréntesis de (A_6), resulta para x:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \qquad (k_2)$$

Y de (A_5), resulta:

$$B = \frac{2}{s} + b = p + n + \frac{1}{s} \qquad (k_3)$$

$$C = \frac{1}{s^2} + \frac{b}{s} + c = np + \frac{p}{s} \qquad (k_4)$$

Dando, pues, valores á p, se determinan en (h_6) los valores de r. Con los valores de p y r, se determinan en (h_1) ó (h_4) los valores de s. Y con los valores de r y s, se determinan en (k_3) y (k_4) los valores de B y C; y con éstos en (k_2) quedan determinados los valores de x.

Los valores de r, s y x, nos dan por sumas ternarias los valores de Y_1 en (k_1), y formadas estas sumas, tendremos para x_1 tantos valores como éstas sean, pero entendiéndose que en cada suma han de entrar siempre un valor de r, otro de s, y otro de x. Entre estos valores no es dudoso que se encuentre al menos uno de los que corresponden á Y_1 en la ecuación propuesta. Los otros tres en todo caso, se buscarán para la de cuarto grado, en la de tercero que para x nos queda (h_6), la cual será de cuarto para la de quinto; de quinto para la de sexto y así sucesivamente.

Sin que yo presuma por ahora haber acertado en dar á p el valor más conveniente, voy sin embargo á indicar uno que, por razón de la sencillez que da al procedimiento y por estar comprobado en ecuaciones numéricas, pudiera acaso ser el preferido entre los muchos que se pueden dar á p.

En la fórmula de r (h_6), vamos á dar á p el valor necesario para que el radical desaparezca, pero sin reducirle a *cero*, puesto que en tal caso se obtendría para p otro valor irracional, que es lo que se trata de evitar.

Igualaremos, pues, la cantidad subradical á R^2, con lo que, multiplicando por d_1 y pasando R^2 al primer miembro, tendremos:

$$d_1 p^2 - (2\, b_1 d_1 - 4\, n_1)\, p + b_1^2 d_1 - 4\, c_1 d_1 - d_1 R^2 = 0. \quad (k_5)$$

De donde $p = \dfrac{b_1 d_1 - 2\, n_1 \pm \sqrt{4(n_1^2 - b_1 d_1 n_1 + c_1 d_1^2) + d_1^2 R^2}}{d_1}$ (k_6)

Ahora bien: en este radical de p, la cantidad $d_1^2 R^2$, siendo R la disponible, será siempre un cuadrado perfecto; y toda la cantidad que le precede será siempre un múltiplo de 4.

Pero todo múltiplo de 4 es la suma de dos números impares sucesivos, y todo número impar es la diferencia entre los cuadrados de dos números inmediatos, que serán el impar más *uno* partido por *dos*, y el impar menos *uno* partido por *dos:* según que así ya queda demostrado en el libro de las raíces numéricas. Luego, según esto, es evidente que en cada caso dado, el valor de R se determina con perfecta exactitud algebraica. A su tiempo veremos que á R en cada ecuación numérica, se le pueden dar todos los valores que se quiera.

La misma condición que en el radical de p, de poder transformarse su cantidad en un cuadrado, se verifica en la cantidad subradical de x, la que se compone también de un cuadrado B^2, sumado ó restado, según sea el valor de C, con un múltiplo de 4.

Determinados así los valores racionales de p, desaparece el radical de r, y á la vez su igual el de s, que tendrá el valor $\pm R$: y con esto los valores de r y s quedarán determinados en cantidades racionales. Y como las cantidades B y C, dependen de los valores que tomen p, r y s, no es dudoso que la expresión $(B^2 - 4\,C)$ tomará valores cuadrados, determinándose así, por lo tanto, los de x en cantidades numéricas racionales.

No se ha de perder de vista que, si de (A_6) deben resultar cinco valores para x, cuatro de ellos corresponden á los cuatro de Y_1 en su ecuación, y el otro por la quinta raíz introducida $(x+p)$. Y asimismo, que á x en la igualdad (k_1), además de los valores que le resulten de su ecuación (k_2), se le pueden sustituir los expresados por $x = -p$; pudiendo asimismo llegar á tomar p tantos pares de valores, como valores simples puede tomar R.

En tres ejemplos numéricos se ha comprobado ya la eficacia de este modo de dar valor á p.

Para ir determinando en el radical de x los valores de C, numéricos, que sumados ó restados con B^2, también numérico, producen cuadrados perfectos, hay que tener muy en cuenta la manera de formarse los cuadrados á medio de los números impares, ya de uno en uno, ya por sumas de dos en dos, siempre consecutivos; así como también la relación de los impares con las raíces de los cuadrados.

En las soluciones numéricas que se publicarán, se explicará todo satisfactoriamente.

Y por fin, debe tenerse presente que la ecuación de tercer grado puede también resolverse por el procedimiento que precede, después de hacer en ella *dos* de su penúltimo término.

NOTAS GENERALES.

1.ª Página 10, penúltima línea. A y B serán siempre racionales como funciones que son de los coeficientes racionales de la ecuacion. Si las raices de esta son tres racionales, resultará B multiplicado por $\sqrt{-3}$; si fuesen una racional y dos irracionales cuadradas, aparecerá B multiplicado por $\sqrt{-3a}$, espresando a el número subradical de las irracionales. Dese en h_5 á las letras p, q, r, la forma de las tres raices indicadas, multiplíqueselas entre sí, y se verá esto comprobado. Si se quiere sacar a del radical, quedará en esta forma, $\sqrt{a}\sqrt{-3}$; pero entonces resulta B irracional.

En las de tres irracionales cúbicas puede venir B multiplicado, segun los casos, por $\sqrt{-3}$, ó por $\sqrt{-3a}$; espresando a un número racional en cada ecuacion numérica que le produzca.

2.ª Página 11 § III. La presencia del factor a bajo el radical de s, nos indica que las raices no son *tres racionales*; sino que pueden ser *una racional* con *dos irracionales cuadradas*, ó *tres irracionales cúbicas*. Por de pronto ya no se aplicará el método de los *productos ternarios* para determinar los raices de $A \pm B\sqrt{-3a}$, sino el del § IV página 12, escribiendo la ecuacion de los cuadrados h_{14} así:

$$x_1^2 + 3\,a\,z_1^2 = R^1$$

Los valores que fácilmente se encontrarán para x_1 y z_1, si los tienen que identifiquen la ecuacion, se comprobarán en las ecuaciones h_{11} y h_{12}, escribiéndolas así:

$$x_1^3 - 3\,a\,z_1^2 x_1 = A$$
$$z_1^3 - a\,x_1^2\,z_1 = B$$

Cuando un par de valores de x_1 y z_1, hallados en la h_{14}, resuelva estas dos ecuaciones, las raices de la propuesta serán *una racional* y *dos irracionales cuadradas*. Pero si h_{14} no dá un par de valores que resuelvan estas dos, las raices de la propuesta, son *tres irracionales cúbicas*. De esta misma forma lo serán tambien cuando, no apareciendo *a* bajo el radical de *s*, el método de los productos ternarios del § VI, no descubra los tres pares de valores para x_1 y z_1, que resuelvan las dos ecuaciones h_{15}. Estas tres raices cúbicas nos las dán las fórmulas *M*, con solo sustituir los coeficientes numéricos, y son, por lo demás irreemplazables. (Véase la nota 12.ª del cuaderno 9.º)

3.ª Art. II página 33. La solucion allí espuesta, con solo radicales de segundo grado, dá exactamente las raices numéricas de la ecuacion, cuando sean las tres racionales, ó una de estas con dos irracionales cuadradas. En las de tres irracionales cúbicas, reproducen sus fórmulas la ecuacion, mientras conserven la forma general é indeterminada; pero desde que se dan valores determinados á *s* nos dá con cada valor de *s* un sistema de tres raices aproximadas, con la eliminacion ya hecha del radical cúbico. Y es evidente que creciendo, ó menguando los valores de *s*, así serán, segun los casos, los sistemas de valores que se obtengan, cada vez mas ó menos aproximados. Para saber si los valores de *s* han de crecer ó menguar, se comprueban dos sistemas consecutivos, por la ley de relacion entre las raices y los coeficientes.

4.ª Página 67. En las cinco primeras soluciones sistemáticas, no entra la disponible *p*, que solo es posible en la sexta solucion, y en condiciones tales que se la puede introducir en todos los grados siguientes hasta el infinito. Cada cual puede elegir entre los seis, el procedimiento que mas le agrade; y el que opte por el sexto, en que entra *p*, podrá tambien disponer de ésta del modo que le parezca mejor para la mas fácil resolucion de un problema dado. Al efecto hay que fijar siempre la atencion en las diferentes formas que pueden tener las raices de la ecuacion numérica de que se trate. Racionales solas; racionales con irracionales de segundo grado, ó con irracionales de tercero, ó con ambas clases á la vez; irracionales solas de segundo grado, ó de tercero; ó de aquellas con estas á la vez.

Las ecuaciones de coeficientes racionales, no pueden tener otras clases ni formas de raices.

Las fórmulas del procedimiento sistemático, en cada grado, sacando de cada una los valores que contenga, y formando las combinaciones, ó sistemas de *n* raices, que se pueda con aquellos valores, dan sistemas de raices para todas las formas que puedan tener las de la ecuacion. El sistema de raices que cumpla la ley de relacion entre ellas y los coeficientes, ese será el que contenga todas las raices de la ecuacion dada.

En la ecuacion de sexto grado, que despues de la de tercero, es la primera que puede contener solo raices irracionales cúbicas, pueden entrar ya en la primera resolvente auxiliar, los radicales de dicho tercer grado, y por consiguiente entrar tambien en todas las fórmulas de la ecuacion.

5.ª Los valores de Y_1, en su primera fórmula h_1, página 70, redúcense á muy pocos en la práctica, si se tiene en cuenta la diferente forma de las raices, y se buscan estas por su órden: las racionales, las irracionales de segundo grado, y las irracionales cúbicas.

Cuando la ecuacion á resolver tenga una ó mas raices racionales, resultarán éstas siempre de la primera fórmula de Y_1. Para obtener *el sistema de raices* de la ecuacion, si todas ó algunas son irracionales, hay que deducir todas las fórmulas de la ecuacion, y tomar á la vez valores de cada una.

6.ª Las fórmulas generales de cada grado, cumpliendo la ley de relacion entre las raices y los coeficientes, son raices de la ecuacion, cualquiera que sea el valor que se dé á las disponibles. Y si despues de dar valores determinados á éstas, no se cumple en algunos casos aquella ley, con relacion á todos los coeficientes, esto mismo sucede con *todas las fórmulas generales*, aunque no entre en ellas ninguna disponible; pero que contengan alguna cantidad irracional de cualquiera forma. Las tales fórmulas cumplen la ley de relacion, mientras conserven el *modo de ser indeterminado*, pues en cuanto se determine mas ó menos su valor, dándolos aproximados á las irracionales, ya no vuelven á cumplir exactamente aquella ley.

Las *irracionales cúbicas*, en que por ley del procedimiento hay una cantidad irracional cuadrada, sometida al radical cúbico, y luego éste, formando otra irracional de su grado, vuelve á estar sometido á otro radical cuadrado, ó combinado esteriormente con otros de esta clase, son inmensamente mas indeterminadas, que las simplemente *irracionales de segundo grado*; y por lo tanto en la práctica, las ecuaciones que ya se sepa que *contienen irracionales cúbicos*, será siempre preferible resolverlas con solo *irracionales de segundo grado*. Los valores aproximados que den éstas, lo serán mas que los de aquellas, y sin comparacion mas fáciles de obtener.

7.ª Para resolver *sistemas de ecuaciones* no hay mas que el procedimiento sistemático; y en cuanto á resolver ecuaciones de una incógnita, es casi seguro que se habrá de preferir el *nuevo método*, publicado en libro separado, y que se funda en la relacion de las ecuaciones con las cuatro primeras séries de los números.

8.ª Al resolver una ecuacion numérica, lo primero que ha de hacerse es determinar las raices racionales que contenga; y en cuanto á la ecuacion de *solo raices irracionales*, es en rigor indiferente, el resolverla por cualquier procedimiento, siempre que la convierta en fórmulas generales: deducidas éstas, resuelven siempre la ecuacion bajo su forma general é indeterminada; y de cada sistema general de raices indeterminadas, pueden obtenerse sistemas de raices determinadas, y aproximadas hasta donde se quiera.

9.ª Aunque ya esté dicho en otra parte, repetiremos aquí que, para conocer en general, *cómo se resuelven algebráicamente todas las ecuaciones* basta conocer, despues de la de segundo grado, una de tercero con radical cúbico, y otra son solo el de segundo grado; una solucion de cuarto con resolvente de tercero; y la solucion sistemático de cuarto grado, por uno de los seis modos demostrados, con su aplicacion á las de quinto, sexto y séptimo, como están en este libro; con lo cual se sabe ya hasta la del grado enésimo, y los sistemas de ecuaciones.