M.E.C.D. 2017

Observatorio de San Fernando
BIBLIOTECA
Núm. del Invent. 1462
Secc.
Carp
Esta
Observatorio de Marina
BIBLIOTECA
Núm. 1499

BIBLIOTECA
DEL
[illegible]

M.E.C.D. 2017

BIBLIOTECA
DEL
INSTITUTO DE E. SECUNDARIA

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE

LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS II.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

MECHANICA

SIVE

MOTVS

SCIENTIA

ANALYTICE

EXPOSITA

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET MATHESEOS SUBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS II.

BIBLIOTECA
DE
CATEDRATICOS

M.E.C.D. 2017

PRAEFATIO

QVemadmodum in Tomo primo motus liberos corporum a quibuscunque potentiis ſollicitatorum expoſui, ita in hoc Tomo altero motus non liberos pertractare conſtitui; quae differentia in motus explicatione tanti eſt momenti, vt ex ea merito totius operis diuiſio ſit facta. In motu enim libero via a corpore deſcripta cum ex motu iam inſito, tum ex potentiis tam abſolutis quam reſiſtentia, quibus corpus afficitur, determinatur, quia praeter potentias et reſiſtentiam nihil adeſſe ponitur, quod corporis motum determinet. Atque idcirco motus liberi haec eſt primaria proprietas, vt via a corpore deſcripta omnino non prematur; canalis ſcilicet ſecundum viam, quam corpus deſcribere debet, exacte incuruatus, a corpore tranſeunte nullam omnino preſſionem ſuſtinebit, ſed corpus per eum libere transibit. In motu autem non libero praeter potentias et reſiſtentiam, quibus corpus ſollicitatur, viam praeſcriptam eſſe ponimus, ita vt corpus ſit coactum in hac via moueri. Haec ergo via praeſcripta ad inſtar canalis commode conſiderari poteſt, in quo corpus mouetur, neque ex eo erumpere poteſt. Cum igitur in iſtiusmodi motibus data ſit via, in qua corpus moueri debet, inquirendum eſt,

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

quantam corpus a quibuscunque potentiis et reſiſtentia ſollicitatum in ſingulis locis habiturum ſit celeritatem, quippe qua cognita totus motus perfecte cognoſcitur. Praeterea autem *cum corpus, niſi in hoc canali eſſet incluſum, aliam lineam deſcriberet, retinebit ſaltem in canali conatum in ea linea, in qua ſi liberum eſſet, moueretur, progrediendi, hocque conatu latera canalis premet, et niſi ſatis habeant firmitatis re-ipſa disrumpet.* Hanc *ob rem praeter celeritatem, quam corpus in ſingulis canalis locis habebit, determinari debet quoque preſſio, quam in latera canalis exeret, eiusque preſſionis directio, quo firmitas laterum canalis ad corpus retinendum requiſita cognoſcatur.* Huiusmodi *autem motus non liberi etiam ſine canali aliis modis produci poſſunt, id quod obſeruare licet in pendulis, atque in fundis, quibus corpus itidem in data linea mouери cogitur.* Pendulis *enim, prout* Hugenius *docuit, effici poteſt, vt corpus in quacunque curua praeſcripta moueri cogatur, quemadmodum in pendulis tum ſimpliciter ſuſpenſis, quibus corpus in linea circulari moueri cogitur apparet, tum iis, quae intra cycloides ſuſpendi ſolent, quibus corpus in cycloide moueri cogitur; ſimilique modo effici poteſt vt corpus in data quaque curua incedere cogatur.* Haec *igitur eſt prima ſpecies motus non liberi, qui fit ſuper data linea.* Praeter *eam autem alia ſpecies motus non liberi attendi meretur, in qua non ipſa quidem via, ſed tantum ſuperficies praeſcribitur, in qua corpus moueri cogitur; minus igitur haec motuum non liberorum ſpecies eſt reſtricta quam prior, cum in hac corpori adhuc libertas ſit relicta ſibi viam in data ſuperficie ſitam eligendi.*

BIBLIOTECA
DEL
CONSERVATORIO DE LA HABANA

M.E.C.D. 2017

gendi. Hanc ob rem haec motus non liberi ſpecies ita tractari debet, vt primo linea in data ſuperficie determinetur, quam corpus a potentiis et reſiſtentia ſollicitatum deſcribet, deinde vero vt celeritas corporis in ſingulis huius lineae punctis definiatur, tertio denique vt etiam preſſio, quam corpus in ſuperficiem exercet, inueſtigetur. Huiusmodi autem motus non liberi pariter ac priores pendulis quoque commode repraeſentari poſſunt; corpus enim pendulum oblique impulſum, vt eius directio non ſit in plano verticali, lineas curuas varii generis deſcribet, quae autem omnes ſunt in ſuperficie ſphaerica, cuius centrum in ipſo ſuſpenſionis puncto extat. Inquiſitio ideo huius motus huc redit, vt in ſuperficie ſphaerica primo linea quam corpus proiectum deſcribet, determinetur, deinde vero celeritas in ſingulis locis, et tertio preſſio, quam in ſuperficiem exeret. Simili modo etiam perſpicitur, effici poſſe, vt corpus pendulum non ad ſuperficiem ſphaericam, ſed ad aliam quamque reſtringatur, dum ſcilicet circa punctum ſuſpenſionis ſuperficies euoluta disponatur. Haec igitur eſt altera motuum non liberorum ſpecies, quae in motu ſuper data ſuperficie determinando occupatur; atque in his duabus motuum non liberorum ſpeciebus indagandis totus hic Tomus ſecundus abſoluitur. Quo ergo ad hanc tractationem, quae ſcitu neceſſaria ſunt, praeparentur, in capite primo fundamenta et principia expoſui, ex quibus, quae ad cognitionem vtriusque ſpeciei motuum non liberorum pertinent, deriuari queant. Demonſtraui nimirum corpus a nullis potentiis ſollicitatum tam ſuper data linea, quam

M.E.C.D. 2017

ſuper ſuperficie motu aequabili moueri debere; in ſuperficie autem fore viam a corpore deſcriptam ipſam lineam breuiſſimamquae in ea ſuperficie duci poteſt. Deinde imueſtigaui leges generales, quas quaeque potentiae atque etiam reſiſtentia tum in accelerando vel retardando motum tum in preſſione generanda obſeruant. Ad haec etiam doctrina de vi centrifuga exponitur, quam corpora etiam a nullis potentiis ſollicitata exercent, quaeque ex motu curuilineo, quo corpus incedere cogitur, ortum habet. In capitibus deinde ſecundo et tertio motus corporum ſuper data linea tam in vacuo quam in medio reſiſtente fuſe contemplor et examino. Primo nimirum motum determino, quo corpus a quibuscunque potentiis ſollicitatum ſuper data linea ſiue recta ſiue curua mouetur, ſiue deſcendendo ſiue aſcendendo; atque ſi curua ita fuerit comparata vt tam ad deſcenſus quam aſcenſus producendos ſit idonea oſcillationes quoque definio, easque inter ſe ratione temporum comparo; atque in hoc negotio indolem et proprietates oſcillationum tam in circulo quam cycloide factarum definio. Deinceps problemata tracto inuerſa, quibus potiſſimum pro datis potentiis ſollicitantibus in curuas inquiro, ſuper quibus motus datam habeat proprietatem. Huc ſcilicet pertinent problemata de inueniendis curuis aequabilis deſcenſus vel receſſus a dato puncto, et huiusmodi plura, quae vel ab aliis iam ſunt tractata, vel ad quae ipſum inſtitutum perduxit. Inter haec prae ceteris eminent problemata de lineis brachyſtochronis et tautochronis, quorum vtrumque ad vlteriorem quam ad-

M.E.C.D. 2017

adhuc a quoquam est factum, perfectionis gradum euexi. Circa curuas enim brachystochronas errorem, qui a nonnullis tam in vacuo quam medio resistente erat commissus, correxi, et loco principii Hugeniani *in se quidem veri, sed insufficientis, aliud latissime patens substitui, quo demonstraui in quocunque medio et potentiarum sollicitantium hypothesi quacunque, eam perpetuo curuam esse brachystrochronam, super qua corpus ita moueatur, vt tota pressio duplo sit maior quam vis centrifuga. Simili modo nouam atque genuinam curuas tautochronas inueniendi methodum trado, (quae enim ante sunt inuentae tautochronae nulla omnino methodo sed potius diuinatione sunt erutae) cuius ope non solum cycloidem iam dudum sub tautochronae nomine celebrem inueni, sed praeter eam innumerabiles alias curuas quaesito satisfacientes elicui, inter quas adeo curuam algebraicam obseruaui; praeterea tam ex aliis agnatis quaestionibus in vacuo, quam ex integra huius negotii tractatione pro medio resistente, praestantiam et vtilitatem huius methodi abunde intelligere licebit. Ceterum vti haec methodus instar specimini tam Analyseos quam Mechanicae promotae est censenda, ita quoque passim in difficiliorum quorundam problematum solutionibus non contemnenda Analyseos subsidia apparebunt, quibus etiam haec scientia non parum promota esse videatur.*

In quarto denique capite motum super data superficie persequor, quae doctrina, vti a nemine adhuc est tacta ita quoque tractatu est difficillima, propter naturam et proprietates soli-

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

ſolidorum nondum ſatis perſpectas neque ad calculum reuocatas. Antequam igitur de huius modi motu quicquam ſtatui potuerat, methodum exponere neceſſe erat, qua proprietates ſuperficierun et linearum in iis ductarum erui atque calculo ſubiici poſſent. Hoc *itaque praeſtiti ope aequationum tres quantitates variabiles continentium, quibus iam ante tum in* Comment. Tomo III. *ad lineam breuiſſimam ſuper quauis ſuperficie determinandam, tum in huius* Tractatus Tomo *praecedente ad motus liberos non in eodem plano factos inueſtigandos ſum vſus. His denique praeparatis progredi licuit ad effectus potentiarum in corpora ſuper ſuperficiebus mota definiendos, ex quibus modum elicui tam viam a corpore deſcriptam quam reliqua motus ſymtomata inueniendi. Quum vero calculus, quamdiu in generalibus verſamur, nimis fiat prolixus et tractatu difficilis; omiſſa reſiſtentia omnia ad vacuum et grauitatem ordinariam reduxi, atque praecipue motum pendulorum oblique oſcillantium ſum perſcrutatus, cuius motus anomalias et abſidum progreſſiones diligenter determinaui. Haec igitur ſunt, quae in iſto tomo ſecundo ſum complexus, quibus expeditis operam dabo, vt, quam primum licuerit motus corporum finitorum et primo quidem rigidorum, in ordinem reducam atque pari methodo exponam.*

CAPVT

M.E.C.D. 2017

CAPUT PRIMUM.

DE MOTU NON LIBERO IN GENERE.

DEFINITIO 1.

1.

Corpus non libere moueri dicitur, quando externa obſtacula impediunt, quo minus iuxta eam directionem progrediatur, iuxta quam cum ratione motus inſiti, tum ratione potentiarum ſollicitantium moueri deberet.

Scholion 1.

2. In motu puncti libero, quem Parte prima expoſuimus ſpatium, in quo corpus mouebatur, ab omnibus obſtaculis vacuum aſſumſimus, nunc vero ſpatium ita comparatum ponemus, vt corpori non liceat in quaque directione progredi, propter firmos parietes tranſitum non permittentes.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

3. Quando itaque corpus in motu ſuo obſtaculum inuenit, ideoque eam directionem, ſecundum quam tendit, conſeruare non poteſt; tum vel quieſcere, vel in alia directione motum continuare debebit.

Corollarium 2.

4. In quanam autem directione corpus progrediatur poſt occurſum obſtaculi, ex circumſtantiis tum motus tum poſitionis obſtaculi iudicari debet.

Scholion 2.

5. Videtur haec doctrina ad motum corporum ex percuſſione pertinere, qua de re tamen hoc libro non agetur. Hoc vero libro alius generis obſtacula aſſumimus, quae illam notitiam non requirunt. Sunt haec obſtacula continua, quae motum puncti reſtringunt neque vllam reflexionem admittunt; cuiusmodi eſt tubus vel canalis ſiue rectus ſive incurvatus, in quo corpuſculum motum continuare debet. Hoc caſu via penitus praeſcribitur, in qua corpus progredietur, neque propter tubi firmitatem inde egredi poterit. Quare cum hic loco corporis punctum conſideremus, hac poſitione punctum in data linea moueri debebit, neque ex ea excedere poterit.

Scholion 3.

6. Duas autem hoc libro pertractabimus motus impediti ſeu reſtricti ſpecies, quarum primae mo-

M.E.C.D. 2017

modo mentionem fecimus, quaeque complectitur motus punctorum ſuper data linea ſiue recta ſiue curua. Altera ſpecies minus reſtringit motus libertatem, ſuperficiem enim tantum praeſcribit, in qua corpus perpetuo verſari debeat. Atque has duas motus impediti ſpecies iſto libro ſumus expoſituri.

Corollarium 3.

7. Quae igitur in prima ſpecie ſunt inquirenda, ſunt corporis ſeu potius puncti celeritas in quouis lineae praeſcriptae loco, preſſio in hanc lineam, et tempus, quo punctum datam viae portionem percurrit.

Corollarium 4.

8. Circa motus alterius ſpeciei autem praeter haec inueniri debet ipſa linea, quam corpus ſuper ſuperficie data deſcribit. Quarum rerum fontes hoc primo capite aperiemus.

Scholion 4.

9. Hoc vero capite primum inueſtigabimus motus vtriusque ſpeciei, ſi corpus a nullis potentiis ſollicitetur; vbi oſtendimus, qua celeritate id progredi debeat, et quanta vi vbique tam lineam datam, quam ſuperficiem datam premat. Sed ſi ſuperficies tantum data fuerit, praeterea viam determinabimus in qua corpus mouebitur a nullis potentiis ſollicitatum. Deinde vero principia exponemus, ex quibus iudicari licebit, quae mutationes a potentiis ſollicitantibus tam abſolutis quam rela-

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

tiuis oriantur, quo in ſequentibus capitibus ſingula diſtincte deducere queamus.

Scholion 5.

10. In his autem motibus tam ſuper lineis quam ſuperficiebus datis, animum ab omni frictione abſtrahimus, neque vllam motus retardationem ponemus. Quamobrem lineae et ſuperficies, ſuper quibus puncta moueri ponuntur, laeviſſimae concipi debent et omni aſperitate deſtitutae, ne motus retardationi propter eam ſit obnoxius. Motum rotatorium quoque omnino ex animo profligari oportet, cum ex eo mutationes in motu oriantur, quae demum in ſequentibus explicari poſſunt. Hanc ob rem punctum quaſi rependo moueri concipiendum eſt, vt eius pars quaeque, ſi modo in puncto partes concipi poſſunt, eundem habeat motum.

Scholion 6.

11. Quae igitur in praecedente libro traditae ſunt, et in hoc de motu punctorum tradentur, ad corpora finitae magnitudinis quoque accommodari poſſunt, ſi modo eorum motus ſibi ſit perpetuo parallelus, et omnes partes corporis aequali motu ſint praeditae. Hoc vero ex ſequentibus libris clarius apparebit, quibus caſibus finitorum corporum motus a motu punctorum non diſcrepet. Quocirca in his libris ideo puncta tantum conſideramus, quia ut partibus deſtituuntur, ita etiam in partibus diuerſi motus ineſſe nequeunt.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 1.

Theorema.

12. *Corpus seu punctum, quod super linea data mouetur, et a nullis potentiis sollicitatur, perpetuo eandem celeritatem conseruabit: si modo illius lineae duo quaeque elementa contigua nusquam finitae magnitudinis angulum constituant.*

Demonstratio.

Quia corpus, dum in linea A M mouetur, a nulla potentia sollicitatur, neque frictioni vllus conceditur locus, motus corporis aliter variari nequit, nisi quatenus linea A M impedit, quo minus corpus libere moueri possit; ex quo, quae celeritatis immutatio oriri debeat, inuestigandum est. Sit celeritas, quam corpus in M habet $= c$, hac igitur celeritate corpus, si libere moueretur, in tangente Mν progrederetur, quod vero, quia corpus curvam A M deserere non potest, fieri nequit: sed corpus cogitur per Mm progredi. Hanc ob causam concipiatur motus corporis secundum Mν, resolutus in motum per Mm et motum per Mn, existente M $m\nu n$ parallelogrammo rectangulo. Perspicuum hic est motum per M n, cuius directio est normalis in curuae elementum Mm, penitus absorberi, neque vllum effectum in celeritate immutanda habere posse. Corpus igitur altero motu progredietur in M m, celeritate, quae est ad pristinam celeritatem vt Mm ad Mν: quare celeritas, qua corpus elementum Mm describit, erit $= \frac{Mm \cdot c}{M\nu}$. Quoniam vero, M$\nu m$ est triangulum ad m rectangulum ideoque M$m <$ Mν, celeri-

Tab. I. Fig. 1.

M.E.C.D. 2017

tas haec minor erit quam prior c, atque celeritatis decrementum erit $= \frac{(Mv - Mm)c}{Mv}$. Ad huius valorem inueniendum sit M O radius oſculi curuae in $M = r$ et elementum $Mm = ds$; eritque, ob ang. $O =$ ang. $\frac{m}{2} Mv$, MO: $Mm = Mm : mv$, ex quo prodit $mv = \frac{ds}{r}$, atque $Mv = V(ds^2 + \frac{ds^4}{r^2}) = \frac{ds}{r} V(r^2 + ds^2) = ds + \frac{ds^2}{2r^2}$. Ex hoc iam obtinebitur decrementum celeritatis, dum corpus curuae elementum ds percurrit $= \frac{cds^2}{2r^2}$, cuius integrale dabit decrementum celeritatis, dum corpus finitam curuae A M portionem percurrit. At expreſſio $\frac{cds^2}{2rr}$ aequiualet differentiali ſecundi gradus; eius ergo integrale erit differentiale primi gradus. Quamobrem decrementum celeritatis poſtquam corpus quantumuis arcum curuae datae percurrit, erit infinite paruum, atque corpus motu uniformi feretur per totam curuam A M, ſi modo radius oſculi r nusquam fuerit infinite paruus. Q. E. D.

Corollarium 1.

13. In omni igitur curua, in qua radius oſculi nusquam eſt infinite paruus, corpus mouebitur vniformiter, ſiquidem a nullis potentiis ſollicitatur; neque frictionem patitur.

Corollarium 2.

14. Si radius oſculi eſt infinite paruus, tum $\frac{cds^2}{2r}$ vel eſt quantitas finita vel differentiale primi gradus. Illo

M.E.C.D. 2017

Illo casu corpus finitum celeritatis gradum amittet, hoc vero tantum infinite paruum.

Corollarium 3.

15. Cum autem istius modi puncta in omnibus curuis sint rara et a se inuicem dissita, corpus tamen arcum inter duo talia puncta interceptum motu vniformi percurret.

Scholion 1.

16. Casus, quibus corpus celeritatis finitum decrementum subito patitur, alii non esse possunt, nisi vbi curua habet cuspides. His enim in locis corpus directe reverti cogitur, et normaliter in punctum cuspidis impingit. Tunc igitur corpus non solum finitum celeritatis gradum amittet, sed omnino omnem motum amittere debebit; nisi forte corpus ponatur elasticum, quo casu eadem celeritate, qua incurrit, reflectetur, atque ita motum vniformem conseruabit. In cuspide enim duo elementa angulum infinite acutum constituunt.

Scholion 2.

17. Praeter cuspides vero alia dari possunt in curuis puncta, in quibus radius curvedinis est infinite paruus; quia vero duo quaeque elementa contigua fere in directum sunt posita, et angulus deinceps positus est infinite paruus fieri non potest, vt ex demonstratione apparet, vt corpus finitum celeritatis decrementum patiatur. Quamobrem cum istiusmodi puncta sint rara, corpus nihilominus motu aequabili mouebitur.

Co-

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

18. Si igitur corpus motum fuerit elasticum, in quacunque curua semper motu aequabili feretur: at si non sit elasticum, cuspides tantum motum turbabunt, dum eum prorsus tollunt.

Scholion 3.

Tabula I. Fig. 2.

19. Vt haec clarius percipiantur, sint duo curuae elementa AB, BC, et anguli ABC quem constituunt, deinceps positus CBD infinite paruus, cuius sinus sit dz posito sinu toto $= 1$. Quia corpus postquam elementum AB descripsit vi insita in BD progredi conatur celeritate priore, quae sit c; eius motus duplex concipiatur, alter in directione BC, alter in directione ad BC normali, qui in effectum duci non potest. Demisso igitur ex D in BC perpendiculo DC, corpus altero motu per BC mouebitur celeritate, quae est ad priorem vt BC ad BD, i.e. vt $\sqrt{(1-dz^2)}$ ad 1. Per BC idcirco habebit celeritatem $= c\sqrt{(1-dz^2)}$ seu $c-\frac{cdz^2}{2}$; quare celeritatis decrementum erit $\frac{cdz^2}{2}$, quod aequiualet differentiali secundi gradus. Ex quo intelligitur, quamdiu in quaque curua angulus CBD fuerit infinite paruus, corpus motu aequabili esse progressurum. At in omni curua angulus vel est infinite paruus, vel angulus ABC ipse, quod in cuspidibus accidit. Consequenter cuspides tantum motus vniformitatem perturbant, nisi corpus fuerit elasticum, quo casu nihilominus motus vniformitas conseruatur.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 2.

Theorema.

20. *Dum corpus motu vniformi in curua AM mouetur, in ſingulis punctis M premet curvam normaliter vi, quae eſt ad corporis vim grauitatis, vt altitudo eius celeritati debita ad dimidium radium oſculi.* Tabula I. Fig. 1.

Demonſtratio.

Si corpus in curua AM libere moueri deberet motu aequabili; tum vbique vim adeſſe oporteret normalem corpus ſecundum MO trahentem tantam, quae ſe haberet ad corporis grauitatem, vt altitudo celeritati corporis debita ad dimidium radium oſculi MO, vt ex demonſtratis Libri praeced. apparet. Niſi enim talis vis adeſſet, corpus in linea recta progrederetur. Hoc autem caſu canalis AM in quo corpus incluſum concipitur, impedit, quo minus corpus in recta progrediatur. Quamobrem corpus tanta vi canalem normaliter premet, ſecundum directionem Mn. Si enim talis vis normalis adeſſet, corpus in canali AM libere moueretur, neque illum premeret; hac vero vi abſente, vt hic ponimus, neceſſe eſt vt corpus ipſum canalem tanta vi premat. Q. E. D.

Corollarium I.

21. Si igitur altitudo celeritati corporis debita ponatur w et radius oſculi $MO = r$, atque grauitas corporis $= 1$, quam ſcilicet haberet, ſi in ſuperficie terrae eſſet poſitum; erit vis, qua

M.E.C.D. 2017

corpus canalem in M secundum M n premet $= \frac{2v}{r}$.

Corollarium 2.

22 Si corpus maiore vel minore celeritate moueretur in curva AM, tum pressio in M maior vel minor esset in duplicata celeritatis ratione, quia altitudo v quadrato celeritatis est proportionalis.

Corollarium 3.

23. Directio huius pressionis est normalis in curuam, et directe contraria est positioni radii oſculi MO. Quare radius oſculi in alteram curuae partem productus dabit directionem huius pressionis.

Corollarium 4.

24. Si corpus in linea recta mouetur; haec pressio erit nulla, ob radium oſculi infinitum. Hoc quoque ex ipsa motus natura perſpicuum est. Corpus enim motum in recta vniformiter sponte progreditur, et hanc ob rem canalem rectum non premit.

Corollarium 5.

25. Si curua AM fuerit circulus, pressio vbique erit eadem. Eo vero maior erit quo minor est radius circuli. Existente enim celeritate eadem, pressio erit reciproce vt radius circuli.

Scholion I.

26. Quo corpus in curua AM libere moueri pos-

M.E.C.D. 2017

poſſit vniformiter, neceſſe eſt vt ſecundum normalem MO trahatur vi $= \frac{2v}{r}$. Ex quo intelligi licet, corpus tanta vi in plagam oppoſitam niti, alioquin enim illa vi non eſſet opus ad corpus in curua conſervandum. Dum igitur corpus in canali AM moueri cogitur, neque eius niſus a vi normali tollitur, hunc niſum re ipſa in canalem exercebit. Quamobrem talis canalis tantam firmitatem habere debebit, vt hanc preſſionem ſuſtinere queat.

Corollarium 6.

27. Apparet igitur corpus motum ſine vllo celeritatis diſpendio effectum edere poſſe, qui ſcilicet conſiſtit in preſſione definita.

Corollarium 7.

28. Ex motu ergo ſolo preſſio oriri poteſt. Quamobrem uti ex preſſione ſeu a potentiis motus generatur, ita quoque ex motu preſſio oriri poteſt.

Scholion 2.

29. Intelligitur hinc, quod iam ſupra innuimus Libro primo, incertum eſſe, vtrum motus potentiis debeatur, an vero potentiae motui. Videmus enim in mundo vtrumque potentias nempe et motum exiſtere; vtrum igitur alterius ſit cauſa, quaeſtio eſt tum ex ratione tum ex obſervationibus decidenda. Rationi quidem minime conſentaneum videtur corporibus conatus inſitos tribuere, multo minus potentias per ſe exiſtentes ſtatuere. Praeterea vero is phaenomenorum cau-

M.E.C.D. 2017

ſas genuinas dediſſe cenſendus eſt, qui omnia a motu orta demonſtrauerit. Motum enim ſemel exiſtentem perpetuo conſeruari debere clare oſtendimus ſupra; hic vero, quemadmodum ex motu potentiae oriantur expoſuimus. Quemadmodum vero potentiae ſine motu vel exiſtere vel conſeruari queant, concipi non poteſt. Quamobrem concludimus omnes potentias, quae in mundo conſpiciuntur, a motu prouenire; atque diligenti ſcrutatori incumbit inueſtigare ex quonam, quorumque corporum motu quaelibet potentia in mundo obſeruata ortum ſuum habeat.

Scholion 3.

30. Cum difficile intellectu ſit, quomodo talis effectus, preſſio ſcilicet continua, a corpore moto, ſine vllo celeritatis diſpendio, oriatur; operae pretium erit in huius rei cauſam inquirere. Vidimus in praecedente propoſitione motum corporis in curua linea non abſolute aequabilem eſſe, ſed celeritatem reuera decrementum pati, dum corpus per ſingula elementa curuae mouetur. Haec vero decrementa differentialibus ſecundi gradus aequiualent, vt etiam infinities repetita celeritatem corporis infinite parum tantum minuere queant. Huic igitur infinite paruo celeritatis decremento preſſionem adſcribi debere iudico; in hacque ſententia eo magis confirmor, quod, quo maius ſit hoc celeritatis decrementum, eo maior quoque exiſtat preſſio. Cum preſſio in M ſit $\frac{2v}{r}$, hacque vi totum elementum Mm, dum percurritur

pre-

M.E.C.D. 2017

prematur, licebit huius preſſionis effectum in $Mm = ds$ exponere per $\frac{2vds}{r}$. Supra vero decrementum celeritatis, dum corpus elementum Mm percurrit, inuentum eſt $\frac{cds^2}{2r^2}$ (12). Quod autem ibi erat c hic nobis eſt $\sqrt{v}$, ergo cum eſſet $-dc = \frac{cds^2}{2r^2}$ erit $-\frac{dv}{2\sqrt{v}} = \frac{ds^2\sqrt{v}}{2r^2}$ ſeu $-dv = \frac{vds^2}{r^2}$. Habebitur ergo $-4vdv = \frac{4vds^2}{r^2} =$ quadrato preſſionis quam ſuſtinet elementum Mm.

Corollarium 8.

31. Quadratum preſſionis ergo in Mm exercitae aequiualet decremento ipſius $2v^2$. Atque ſi hoc decrementum aequale fuerit ipſi ds^2, tum preſſio aequalis eſt vi grauitatis, ex quo comparatio harum preſſionum cognoſcitur.

Corollarium 9.

32. His ergo conceſſis, iſtud infinities infinite paruum celeritatis decrementum ſufficit ad preſſionem finitam producendam. Quamdiu enim ipſius v^2 decrementum homogeneum eſt ipſi ds^2, preſſio eſt finita, ſin vero id decrementum infinities maius exiſteret quam ds^2, preſſio quoque foret infinite magna.

DEFINITIO 2.

33. Preſſio haec, quam corpus in linea curua motum exercet in hanc lineam, vocatur vis centrifuga; eo quod eius directio a centro circuli oſculatoris O tendit.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

34. Vis centrifuga ergo eſt ad vim grauitatis, vt altitudo celeritati debita ad dimidium radium oſculi.

Corollarium 2.

35. Quando ergo corpus in linea curua moueri cogitur, hanc curuam vi centrifuga premit, etiamſi a nulla potentia ſollicitetur.

Scholion.

36. Quando vero corpus a potentiis quoque ſollicitatur, preſſio quoque in canalem ab his potentiis orietur, tumque canalis duplici ratione premetur, partim nempe a potentiis partim a vi centrifuga. Nunc igitur quid potentiae in corpus non libere motum valeant, inueſtigandum eſt.

PROPOSITIO 3.

Theorema.

Tabula I. Fig. 3.

37. *Si corpus, quod in canali AM mouetur, ſollicitetur in M a potentia MN, cuius directio normalis eſt in curuam AM, celeritas neque augebitur neque minuetur: ſed tota potentia in premendo canali conſumetur.*

Demonſtratio.

Ex priore libro manifeſtum eſt potentiam, cuius directio in directionem motus ſit normalis, celeritatem neque augere neque minuere. Quanquam hoc enim ibi de motu libero eſt demonſtratum, hic tamen eodem rigore locum habet, cum po-

M.E.C.D. 2017

potentia normalis corpus neque in consequentia neque in antecedentia trahat. In motu libero vero potentia normalis directionem corporis immutat, quem effectum hoc loco habere non potest. Hac igitur vi apprimetur corpus ad canalem, et consequenter tanta vi canalem premet in directione M N. Q. E. D.

Corollarium 1.

38. Directio igitur talis vis normalis vel incidit in directionem vis centrifugae vel ei directe est contraria. Illo casu auget vim centrifugam hoc casu minuit.

Corollarium 2.

39. Quia directio vis centrifugae in convexam curuae partem incidit, eius effectus augebitur, si normalis vis directio in eandem plagam incidit: at si normalis vis in concavam partem dirigitur minuetur effectus.

Corollarium 3.

40. Si vis normalis fuerit $= N$, et vis centrifuga vt ante $= \frac{2v}{r}$; premetur curua vel vi $\frac{2v}{r} + N$, si hae vires fuerint conspirantes, vel vi $\frac{2v}{r} - N$ si fuerint contrariae.

Corollarium 4.

41. Si vis normalis fuerit aequalis et contraria vi centrifugae, curua nullam pressionem sustinebit; seu corpus ex ea egredi non conabitur. Hoc ergo casu eandem curuam corpus libere describeret; id

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

id quod perſpicuum quoque eſt ex vi normali, quae tum eſt $\frac{2v}{r}$: hac enim efficitur, vt corpus aequabiliter in quacunque curua libere moueatur.

PROPOSITIO 4.

Theorema.

Tabula I. Fig. 3.

42. *Si corpus quod in canali A M mouetur, in M ſollicitetur a potentia, cuius directio ſit ſecundum tangentem M T: huius effectus in hoc conſiſtet, vt celeritatem corporis vel augeat, vel diminuat, eodem modo, quo in motu libero.*

Demonſtratio.

Quia huius potentiae directio eſt ipſa canalis tangens M T, canalis effectum huius potentiae impedire non poteſt; neque etiam in canalem haec potentia vllum effectum exerere poterit. Quamobrem augebit haec potentia vel diminuet, celeritatem corporis, prout eius directio directioni corporis vel conſpirans vel contraria fuerit, prorſus ac ſi corpus libere moueretur. Atque poſita altitudine celeritati in M debita $= v$, elemento $Mm = ds$, et vi $MT = T$, erit $dv = T\,ds$, accelerante potentia T: at retardante ea, erit $dv = -T\,ds$. Q. E. D.

Corollarium I.

43. In motu corporum igitur ſuper lineis datis vis normalis preſſionem tantum generat in eas, vis tangentialis vero celeritatem tantum afficit.

Corollarium 2.

44. Cum vis reſiſtentiae effectum vis tangentialis

M.E.C.D. 2017

tialis retardantis praeſtet, eodem quoque modo aget in motum corporum ſuper datis lineis, ac in motum liberum. Si igitur praeter vim tangentialem accelerantem T affuerit reſiſtentia R, prodibit ex ambabus coniunctim $dv = T\,ds - R\,ds$.

PROPOSITIO 5.

Problema.

45. *Si corpus ſuper linea data* **A M** *moueatur in medio quocunque reſiſtente, et inſuper ſollicitetur a potentia abſoluta, cuius directio ſit* M P; *determinare effectum tam potentiae abſolutae, quam reſiſtentiae, nec non preſſionem, quam curua* **A M** *ſuſtinet.* Tabula I. Fig. 4.

Solutio.

Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, vis reſiſtentiae $=$ R, et vis abſoluta M P $=$ P: cuius directio ſit talis, vt ſumto elemento M $m = ds$ ſit perpendiculum mn ex m in M P demiſſum $= dx$ et $Mn = dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Reſoluatur potentia P in has duas ſecundum MN normalem in curuam et M T tangentem trahentes, erit ob triangula MPT et Mmn ſimilia, vis normalis MN ſeu PT $= \frac{P\,dx}{ds}$, et vis tangentialis MT $= \frac{P\,dy}{ds}$ celeritatem augens. Quia vero vis reſiſtentiae celeritatem minuit, augebitur celeritas tantum ab exceſſu $\frac{P\,dy}{ds} - R$, hanc ob rem erit $dv = P\,dy - R\,ds$ (42). Normalis vis $\frac{P\,dx}{ds}$ vero efficit, vt curua in M tantundem prematur ſecundum directionem MN, ad conuexam curuae partem ſitam. Quare cum vis centrifuga in eandem plagam vrgeat, quae eſt $= \frac{2v}{r}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{2v}{r}$, designante r radium osculi in M; erit vis totalis, qua curua in M secundum M N premitur $= \frac{P dx}{ds} + \frac{2v}{r}$. Vnde tum motus corporis super curua, tum curuae pressio in singulis punctis innotescit. Q. E. I.

Corollarium 1.

46. Ex his duabus formulis igitur accelerationem et pressionem exprimentibus omnia deduci possunt, quae ad motum super lineis datis pertinent.

Scholion 1.

47. Hic quidem vnicam potentiam absolutam posuimns; nihilominus tamen satis ex eo intelligitur, quomodo plurium potentiarum effectus sit determinandus. Scilicet quemadmodum in motu libero fecimus, ita etiam hic singulae potentiae in binas normalem nempe et tangentialem sunt resoluendae, ex quibus colligendis vna vis normalis vnaque tangentialis oritur: quarum effectus per propositiones 3. et 4. determinari poterunt.

Scholion 2.

48. Hactenus igitur fundamenta exposuimus, ex quibus in sequentibus motum corporum super lineis datis determinare licebit. Antequam autem pro motu super superficiebus datis similia principia tradamus, expedit vt paucis ostendamus, quo modo motus super linea data in effectum deduci possit. Namque ope canalis, in quo corpus contineatur, talis motus minime produci pote-

M.E.C.D. 2017

poterit, propter frictionem aliaque obstacula, quae tolli neutiquam possunt. Commodissime autem huiusmodi motus non liberi efficiuntur pendulorum ope, vti primum a Hugenio factum est; quamobrem hanc pendulorum ad institutum nostrum accommodationem sequenti propositione explicabimus.

PROPOSITIO 6.
Problema.

49. *Ope penduli efficere vt corpus in data linea moueatur.* Tab. I. Fig. 5.

Constructio.

Sit A M B curua proposita in qua corpus moueri debeat; huius curuae construatur euoluta A O C, laminaque secundum eius figuram incurue-rur et firmetur. Tum filum huic laminae circumducatur, quod altero termino ad laminam sit affixum, altero vero termino in A annexum habeat corpus mouendum. Quando igitur corpus moueri incipit, perspicuum est id in curua A M B moueri debere, quia filum dum a lamina separatur hanc curuam euolutione describit. Q.E. Fac.

Corollarium I.

50. Hac igitur ratione corpus in data curua progreditur, atque frictionibus non est obnoxium. Quare tali motu commodissime per experimenta effici poterunt, quae in theoria inueniuntur.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

51. Ex doctrina de euolutionibus intelligitur fili partem MO a lamina separatam, in curuam AMB esse normalem ipsumque eius radium osculi.

Corollarium 3.

Tabula I. Fig. 6. 52. Quo corpus in peripheria circuli AMB moueatur, lamina incuruata non est opus, sed filum altero termino C tantummodo in centro C peripheriae est figendum.

Corollarium 4.

Fig. 5. 53. Quia filum MO est radius osculi, vis centrifuga tota ad tendendum hoc filum impenderetur. Quare hoc filum tum satis roboris habere, tum extensioni obnoxium non esse debet. Nisi enim eandem perpetuo longitudinem conseruet, curuam desideratam non describet.

Corollarium 5.

54. Accedente potentia absoluta, habebitur praeter vim centrifugam vis normalis, quae filum quoque tendet, si vi centrifugae fuerit conspirans. At si contraria fuerit minuet tensionem fili, imo etiam si maior fuerit, comprimet, quo casu euolutio nullius erit vsus. Nam cum filum debeat esse flexile, compressioni resistere non poterit, neque ideo impedire, quo minus corpus a curua AMB versus euolutam recedat.

Scholion I.

55. Praeter hanc difficultatem, ista curuarum per euolutiones generatio hoc quoque laborat

M.E.C.D. 2017

borat defectu, quod linea recta produci nequeat; ad eam enim generandam filum requireretur infinite longum. Simili modo haec euolutio ad curuas accommodari non potest, quae alicubi radium osculi habent infinite magnum. Deinde etiam neque cuspide neque flexu contrario praeditae curuae hoc modo describi possunt. Quamobrem ita praxis locum tantum habet in curuis vbique finitam curuaturam habentibus, ad quod addi debet, vt pressio curuae totalis nusquam in curuae concauam partem dirigatur.

Scholion 2.

56. Hugenius, qui primus euolutionis doctrinam excoluit, statim eam ad hunc ipsum vsum adhibuit; vti ex eius egregio opere de horologio oscillatorio apparet. Cum enim inuenisset oscillationes super cycloide omnes esse isochronas, motum super cycloide in horologia inferre volebat, quod per pendulum intra cycloides oscillans effecit. Cum enim cycloidis euoluta sit cyclois, hac ratione obtinuit, vt corpus filo annexum in cycloide moueretur.

Scholion 3.

57. In hoc autem pendulorum motu maxime notari conuenit, praeter corpus motum filum quoque moueri debere, id quod ad institutum huius libri, in quo de motu puncti tantum agetur, minime pertinet. Praeterea motus corporis pendulo annexi non est sibi parallelus, sed circularis circa centrum scilicet circuli curuam osculantis, qui motus pariter hoc loco non attin-

M.E.C.D. 2017

gitur. Hoc igitur libro motum puncti duntaxat ſuper linea vel ſuperficie data examini ſubiiciemus, mentemque tam a motu fili, quam a motu circulari abſtrahemus. In ſequentibus autem motum pendulorum, vbi et motus fili et motus circularis in computum ducetur, ad motum puncti tantum reducemus, ita vt haec, quae hoc libro tractabuntur, nihilominus in praxi vſum ſint habitura. Quamobrem, vt iam monuimus, punctum motu ſibi ſemper parallelo ſuper curua ſeu ſuperficie ſine vlla frictione ferri eſt concipiendum.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

Tabula II. Fig. 2.

58. *Si corpus a nullis potentiis ſollicitatum moueatur in vacuo ſeu medio non reſiſtente ſuper ſuperficie quacunque ABC: motu feretur vniformi animum ab omni frictione abſtrahendo.*

Demonſtratio.

Cum corpus ſuper linea data motum impreſſum continuare queat, multo magis ſuper ſuperficie data moueri poterit, eo quod eius libertas minus eſt reſtricta. Sit igitur D M*m* linea, in qua corpus progreditur; haec erit vel recta vel curua. Si iſta linea fuerit recta dubium non eſt, quin corpus motu aequabili ſit progreſſurum. Sin autem fuerit curua, quae aequatione exprimi poteſt, duo quaeque eius elementa contigua vel proxime in directum erunt ſita, vel an-

M.E.C.D. 2017

angulum infinite acutum conſtituent, quod in cuſpidibus accidit. Illo caſu ſupra demonſtratum eſt corpus nullum motus decrementum pati (12). In cuſpidibus vero corpus quidem omnem motum amittet, niſi fuerit elaſticum. Quamobrem ſi motus tantum fiat in curua vel parte curuae cuſpidibus carente motus corporis erit aequabilis. Q. E. D.

Corollarium 1.

59. Patietur quidem corpus celeritatis decrementum, quoties directionem mutare cogitur, hoc vero differentiali ſecundi gradus aequiualet, ideoque, etiamſi integretur, decrementum tamen infinite paruum producit.

Corollarium 2.

60. Si ſcilicet corporis celeritas ſuerit c et radius oſculi $MO = r$, erit decrementum celeritatis, dum corpus elementum ds percurrit $= \frac{cds^2}{2rr}$ (12).

Scholion.

61. Demonſtratio huius propoſitionis prorſus congruit cum demonſtratione primae propoſitionis, neque aliud eſt diſcrimen, niſi quod corpus illo caſu in data linea moueri cogatur, hoc vero caſu ſuper ſuperficie data viae quaerendae habeat libertatem. Quamobrem omnes annotationes, quae circa primam propoſitionem ſunt factae hic quoque valent. Videbimus ergo, quam-

M.E.C.D. 2017

quamnam viam, corpus in ſuperficie quacunque motum percurrere debeat.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

Tabula II. Fig. 1.

62. *Via* D M *m, quam corpus ſuper ſuperficie quacunque* A B C *motum deſcribit, eſt linea breuiſſima, quae inter terminos* D *et* M *duci poteſt; ſcilicet corpus in vacuo moueatur, et a nullis potentiis ſollicitetur.*

Demonſtratio.

Deſcripſerit corpus iam curuam DM; manifeſtum eſt corpus ex M in tangente M*n* eſſe progreſſurum, niſi in ſuperficiet perſeuerare cogeretur. Quia igitur motus per M*n* fieri non potest, reſoluatur is in duos laterales, quorum alter in ipſa ſuperficie ſit diſpoſitus, alterius vero directio in ſuperficiem ſit perpedicularis, atque ideo penitus non in effectum deduci poſſit. Hanc ob rem ex *n* in ſuperficiem demittatur perpendiculum *nm*, erit recta M *m* elementum, in quo corpus ex M progredietur. Planum ergo *n* M *m*, in quo poſita ſunt et elementum *m*M, et id quod a corpore immediate ante eſt deſcriptum, erit normale in ſuperficiem. At linea breuiſſima in quauis ſuperficie ducta hanc habet proprietatem, vt planum, in quo poſita ſunt duo quaeque elementa contigua, ſit in ſuperficiem normale. Quamobrem linea D M *m*, quae a corpore deſcribitur, eſt linea breuiſſima in ſuperficie A B C. Q.E.D.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

63. Si ergo ex puncto A, in quo motus incipit, linea breuissima in superficie ABC secundum directionem motus ducatur, habebitur via, qua corpus motu vniformi mouebitur.

Corollarium 2.

64. Quia filum tensum in superficie lineam breuissimam designat, ostendet filum tensum simul viam, in qua corpus super ea superficie mouetur.

Corollarium 3.

65. Si igitur superficies proposita fuerit plana, corpus lineam rectam describet, quia haec in plano est linea breuissima. Atque in superficie sphaerica corpus in circulo maximo mouebitur.

Corollarium 4.

66. Quia planum, in quo posita sunt duo curuae D M*m* elementa contigua, normale est in superficiem, radius osculi curuae vero in eodem plano sit positus et in curuam normalis; erit radius osculi curuae descriptae MO normalis in superficiem.

Scholion.

67. Quemadmodum in quauis superficie linea breuissima sit inuenienda a me primum ostensum est in Tomo III. Comment. Acad. Imp. Petrop. Cum autem ibi ex alio principio lineam breuissi-

M.E.C.D. 2017

mam determinauerim, atque haec materia elementis nondum sit inserta, sequenti propositione lineam hanc breuissimam seu eam, quae a corpore describitur, determinare constitui.

PROPOSITIO 9.

Problema

Tabula II. Fig. 2.

68. *In superficie quacunque determinare lineam, quam corpus a nullis potentiis sollicitatum, quod super ea mouetur, describit.*

Solutio.

Ad naturam superficiei propositae exprimendam sumatur pro arbitrio planum A P Q fixum in eoque recta A P pro axe. Tum ex quouis superficiei puncto M demittatur in hoc planum perpendiculum MQ, et ex Q in axem A P perpendicularis QP. Positis nunc $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$, natura superficiei dabitur per aequationem inter has tres variabiles x, y et z et constantes. Sit huius aequationis differentialis $dz = P\,dx + Q\,dy$, ex qua linea breuissima in hac superficie seu linea, quam corpus describit, determinari debet. Haec linea vero ex hoc determinatur, quod eius radius osculi in ipsam superficiei normalem incidat. Quamobrem primo normalem superficiei, et deinde cuiusque in ea ductae curuae radium osculi determinabimus; quo postmodum ex coincidentia harum linearum natura lineae quaesitae possit concludi.

Ad

M.E.C.D. 2017

Ad normalem in ſuperficiem inueniendam ſecetur primo ſuperficies plano MQB, exiſtente BQ recta in plano APQ parallela axi AP, prodeatque ex hac ſectione curua BM; cuius natura exprimetur hac aequatione $dz = Pdx$, quae ex locali pro ſuperficie $dz = Pdx + Qdy$ oritur, poſita y conſtante ſeu $dy = o$. Ducatur ad hanc curuam BM normalis ME rectae BQ productae in E occurrens, erit ſubnormalis $QE = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Ducta nunc EN perpendiculari ad BE, quaevis recta MN a M ad NE ducta normalis erit in curuam BM. Simili modo ſuperficies ſecetur plano PQM prodeatque ſectio CM, cuius natura exprimetur aequatione inter z et y manente x conſtante, quae erit $dz = Qdy$. Sit MF normalis in hanc curuam erit ſubnormalis $QF = \frac{-zdz}{dy} = -Qz$, ſigno negatiuo vtor, quia ſubnormalem QF verſus P cadere pono. Ducta nunc recta FN parallela axi AP, quaeuis recta ex M ad FN ducta normalis erit in curuam CM. Recta MN ergo, quae in punctum interſectionis N rectarum FN et EN cadit, perpendicularis in vtramque curuam BM et CM, et hanc ob rem perpendicularis erit in ſuperficiem. Locus ergo normalis inuenitur ſumendo $AH = x + Pz$, et $HN = -Qz - y$.

Ad determinandam vero radii oſculi cuiusuis curuae in ſuperficie data ductae poſitionem ſint duo curuae elementa Mm et $m\mu$, quibus reſpondeant in plano APQ elementa Qq, $q\xi$, atque in axe AP aſſumto elementa Pp, $p\pi$, quae ſint aequa- Tabula II. Fig. 3.

M.E.C.D. 2017

IIa. Erit ergo $Pp = p\pi = dx$; $pq = y + dy$; $p\varrho = y + 2dy + ddy$; $Qq = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; $q\varrho = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; $qm = z + dz$; $\varrho\mu = z + 2dz + ddz$; $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, et $m\mu = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{dy\,ddy + dz\,ddz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$.

Producantur Qq et Mm vtrinque, quarum illa ipsi $\pi\varrho$ in r, haec vero ipsi rn normali in planum APQ in n occurrat; eritque ob $Pp = p\pi$, $qr = Qq$ et $mn = Mm$, atque $\pi r = y + 2dy$, ac $rn = z + 2dz$ Iam ad elementum Mm ducatur in plano Qm normalis mS occurrens ipsi Qq productae in S, erit $QS = \frac{(qm - QM)\,QM}{Qq} = \frac{z\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Ducta iam SR in plano APQ perpendiculari ad QS, omnes rectae ex m ad SR ductae normales erunt ad elementum Mm. In his igitur normalibus erit radius osculi curuae $Mm\mu$. Ea vero harum normalium congruet cum radio osculi, quae in eo sita erit plano, in quo posita sunt elementa Mm et $m\mu$. Quamobrem hoc planum determinari oportet. In hoc vero plano sunt elementa mn et $n\mu$, ambo itaque usque ad planum APQ producta dabunt intersectionem illius plani cum plano APQ. At nm vel mM occurrit plano APQ in T, vbi cum elemento Qq producto concurrit. Est igitur $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dz}$. Ipsi $n\mu$ parallela MV in plano $mn\mu$ erit sita, haec vero MV in planum APQ incidet in V, dabiturque QV ex analogia hac $(rn - \varrho\mu)$:

$r\varrho$

$r\varrho = QM : QV$; erit itaque $QV = \frac{z\,ddy}{d\,dz}$. Hanc ob rem recta TV producta erit intersectio plani $nm\mu$ cum plano APQ; quare recta ME, quae in concursum rectarum SR & TV est ducta, erit simul normalis in Mm et posita in plano $nm\mu$; eritque propterea MR positio radii osculi curuae in M. Ex his punctum R hoc modo determinabitur; erit, ducta RX perpendiculari in AP productam, $AX = \frac{z\,dx\,(dy\,ddy + dz\,ddz)}{(dx^2 + dy^2)\,ddz - dy\,dz\,ddy} + x$ atque $XR = \frac{z\,dx\,ddy + z\,dz\,(dz\,ddy - dy\,ddz)}{(dx^2 + dy^2)\,ddz - dy\,dz\,ddy} - y$. Quo igitur normalis in superficiem MN in radii osculi curuae directionem incidat, debet esse $AH = AX$ et $XR = HN$; vnde erit $P\,(dx^2 + dy^2)\,ddz - P\,dy\,dz\,ddy = dx\,dy\,ddy + dx\,dz\,ddz$ et $-Q\,(dx^2 + dy^2)\,ddz + Q\,dy\,dz\,ddy = dx^2\,ddy + dz^2\,ddy - dz\,dy\,ddz$. Quae quidem aequationes inter se congruunt, fiet enim ex iis coniunctim $P\,dx + Q\,dy = dz$, quae est ipsa aequatio naturam superficiei exponens. Harum igitur aequationum alterutra cum hac $dz = P\,dx + Q\,dy$ coniuncta dabit curuam a corpore in proposita superficie percursam. Q.E.I.

Tabula II. Fig. 2. & 3

Corollarium 1.

96. Erit igitur pro linea in superficie proposita descripta $ddz : ddy = P\,dy\,dz + dx\,dy : P\,dx^2 + P\,dy^2 - dx\,dz$. At quia est $dz = P\,dx + Q\,dy$ erit $ddz : ddy = P\,dz + dx : P\,dy - Q\,dx$, seu $P\,dy\,ddz - Q\,dx\,ddz = P\,dz\,ddy + dx\,ddy$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

70. Si assumatur altera aequatio et vtrinque subtrahatur $Qdz^2\,ddz - dy^2\,ddy$ habebitur $-Q(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,ddz + Q\,dy\,dz\,ddy + dy^2\,ddy = (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,ddy - Qdz^2\,ddz - dz\,dy\,ddz$. Vnde habetur $\frac{ddy + Q\,ddz}{dy + Qdz} = \frac{dy\,ddy' + dz\,ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Quae est illa ipsa aequatio, quam pro linea breuissima in quacunque superficie dedi in Comm. Acad. Petr. Tom. III.

Scholion 1.

71. Vt in hoc casu quo corpus a nulla potentia sollicitatur, directio radii osculi cum normali in superficiem congruere debet, ita in aliis casibus, quando corpus sollicitatur a potentiis, hae lineae datum angulum constituere debent. Quamobrem ad hunc angulum generaliter inueniendum

Tabula III. Fig. 1.

sit MN normalis in superficiem, et MR directio radii osculi; erit, vt iam vel posuimus vel inuenimus, $PQ = y$, $QM = z$; $PH = bN = Pz$; $Qb = -Qz$; $PX = R\,x = \frac{z\,dx\,(dy\,ddy + dz\,ddz)}{(dx^2 + dy^2)\,ddz - dy\,dz\,ddy}$,

et $Q\,x = \frac{z\,dx^2\,ddy + z\,dz\,(dz\,ddy - dy\,ddz)}{(dx^2 + dy^2)\,ddz - dy\,dz\,ddy}$. Ducta NR ex N in MR demittatur perpendiculum NO, erit $MO = \frac{MR^2 + MN^2 - NR^2}{2MR} = \frac{MQ^2 + Rx.\,Nb + Qx.\,Qb}{MR}$ et

$$NO = \frac{\sqrt{(MR^2 MN^2 - (MQ^2 + Rx.\,Nb + Qx.\,Qb)^2)}}{MR} = \frac{}{\sqrt{(MQ^2}}$$

M.E.C.D. 2017

$$\frac{\sqrt{(MQ^2(Qx-Qb)^2+MQ^2(Rx-Nb^2)+(Rx.Qb-Qx.Nb)^2)}}{MR}$$

Anguli vero RMN tangens est $= \frac{NO}{MO}$ posito sinu toto $= 1$. Substitutis autem supra assumtis symbolis et in subsidium vocata aequatione $dz = Pdx+Qdy$ prodibit tangens anguli NMR $= \frac{ddy(dx+Pdz)-ddz(Pdy-Qdx)}{(ddx-Qddy)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Hoc ergo angulo euanescente fit $ddz : ddy = Pdz+dx : Pdy-Qdx$ ut supra (69).

Scholion 2.

72. Ipsa vero radii osculi longitudo MO inuenitur ex angul $nm\mu$ ope huius analogiae vt sinus anguli $nm\mu$ ad sinum totum ita Mm ad MO. Est vero $n\mu = V(ddy^2+ddz^2)$ et $mn-m\mu = \frac{-dy\,ddy-dz\,ddz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$, ergo perpendiculum ex n in $m\mu$ productum $= \frac{\sqrt{(dx^2ddy^2+dz^2ddy^2+dx^2ddz^2+dy^2ddz^2-2dydzddyddz)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Quare hoc perpendiculum est ad $V(dx^2+dy^2+dz^2)$ ut $V(dx^2+dy^2+dz^2)$ ad MO, vnde prodit radius osculi $MO = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2+ddz^2)+(dyddz-dzddy)^2)}}$. Hoc autem radio osculi opus erit in sequente propositione, in qua pressionem, quam corpus in superficiem exercet, inuestigabimus.

Tabula II. Fig. 3.

Scho-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE L. PEDRALBES

M.E.C.D. 2017

Scholion 3.

73. Ex hac generali radii oſculi expreſſione orietur ea pro radio oſculi lineae breuiſſimae, ſi conjungatur cum hac aequatione $ddz = \frac{ddy\,(Pdz+dx)}{Pdy-Qdx}$ et locali $dz = Pdx + Qdy$. Prodibit autem radius oſculi $= \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(Pdy-Qdx)}{dx\,ddy\sqrt{(P^2+Q^2+1)}} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{ddz-Qddy} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{dPdx+dQdy}$. Atque haec expreſſio dat radium oſculi curuae in ſuperficie propoſita deſcriptae a corpore a nullis potentiis ſollicitato.

PROPOSITIO 10.
Theorema.

Tabula II. Fig. 1.

74. *Preſſio, quam corpus in ſuperficie motum et a nullis potentiis ſollicitatum in ipſam ſuperficiem exercet, fit normaliter in eam verſus eius conuexitatem, et ſe habet ad vim grauitatis, vt altitudo celeritati corporis debita, ad dimidium radii oſculi curuae a corpore deſcriptae.*

Demonſtratio.

Sit D M *m* curua in ſuperficie A B C a corpore deſcripta; altitudo celeritati corporis debita $= dv$; et radius oſculi curuae M O $= r$. Quia corpus ex M, ſi libere moueri poſſet, progrederetur in elemento M *n*; ſuperficies vero effi-cit, vt per elementum M *m* incedat, exiſtente *nm* perpendiculo in ſuperficiem; ſuperficies a corpore

M.E.C.D. 2017

pore ſecundum directionem *nm* premetur, tanta vi, quanta opus eſt ad corpus ex directione M*n* in directionem M*m* pertrahendum. Hoc vero praeſtatur a vi $\frac{2v}{r}$ normaliter in ſuperficiem ſeu ſecundum directionem radii oſculi MO agente. Quamobrem preſſio corporis in ſuperficiem erit normalis, quippe agens ſecundum *mn* et aequalis $\frac{2v}{r}$, exiſtente vi grauitatis corporis $=$ 1. Q.E.D.

Corollarium 1.

75. Haec eſt igitur vis centrifuga, quam corpus in ſuperficiem ſimili modo exercet, quo in lineam datam, in qua moueri cogitur.

Scholion 1.

76. Preſſio in ſuperficiem neceſſario debet eſſe normalis. Nam niſi eſſet normalis reſolvi poſſet in duas, quarum altera eſſet normalis; altera in ipſa ſuperficie poſita. Harum vero normalis tantum ad premendam ſuperficiem impenditur, dum altera ipſum corporis motum immutaret.

Corollarium 2.

77. Longitudinem radii oſculi *r* lineae, quam corpus a nullis potentiis ſollicitatum ſuper propoſita ſuperficie deſcribit, inuenimus (73). Ea igitur aſſumta erit vis centrifuga $= \frac{(2v(ddz - Q\,ddx)}{dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}$
$= \frac{2v(dP\,dx + dQ\,dy)}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(P^2 + Q^2 + 1)}}$.

M.E.C.D. 2017

Scholion 2.

78. De hac vi centrifuga in ſuperficiem exercita eadem locum habent, quae ſupra de vi centrifuga in datam curuam ſunt annotata, vid. Prop. 2. cum annexis Coroll. et Schol. Linea enim breuiſſima, quam corpus ſuper ſuperficie percurrit, inſtar canalis conſiderari poteſt, in quo corpus moueatur; atque tum de motu in hoc canali omnia valent, quae ſupra de motu ſuper data linea, nullis agentibus potentiis, ſunt allata.

PROPOSITIO II.

Problema.

79. *Determinare effectum cuiusuis potentiae, quem exerit in corpus ſuper data ſuperficie motum tam in vacuo quam in medio reſiſtente.*

Solutio.

Quaecunque ſit directio potentiae ſollicitantis corpus, ea reſolvi poteſt in tres potentias laterales, quarum primae, quam vocabimus M, directio normalis in ſuperficiem: ſecundae, quam per N deſignabimus directio normalis tam in directionem motus corporis quam in directionem potentiae M, cuius igitur directio erit in plano tangente ſuperficiem, Tertiae potentiae T appellatae directio congruat cum directione motus, quae igitur erit vis tangentialis: priores vero erunt vires normales. Quia nunc harum trium virium directiones ſunt inter ſe normales, nullius effectus a reliquis perturbari

M.E.C.D. 2017

turbari poterit. Quare quem effectum quaeque producat, inueſtigabimus.

Prima potentia M, cuius directio in ſuperficiem eſt normalis, nullum habebit effectum in immutando corporis motu; ſed tota impendetur in preſſionem ſuperficiei. Augebit igitur vel diminuet preſſionem a vi centrifuga ortam, prout eius directio in plagam conuexae partis ſuperficiei incidit, vel in plagam partis concavae. Incidat ea in partem interiorem erit totalis preſſio in ſuperficiem verſus partes exteriores $= \frac{-2v(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}} M$ (77). Preſſio enim a vi centrifuga orta minuetur hoc caſu potentia M.

Secunda potentia N, quia eius directio in ipſa ſuperficie eſt poſita, et normalis in directionem corporis, corporis directionem tantum immutabit celeritatem neque augendo neque minuendo. Haec vis igitur corpus a linea breuiſſima deducet, facietque vt non amplius in plano ad ſuperficiem normali moueatur: huius igitur plani, in quo corpus mouebitur, inclinationem ad planum lineae breuiſſimae normale in ſuperficiem inueſtigari oportet. Huius vero inclinationis angulo aequalis eſt angulus, quem radius oſculi lineae deſcriptae cum normali in curuam conſtituit; quemque ante generaliter determinauimus (71). Poſtquam corpus elementum M*m* celeritate altitudini *v* debita deſcripſit progredere-

M.E.C.D. 2017

tur, nisi a vi N sollicitaretur per elementum in ν, ita vt Mm et $m\nu$ essent duo elementa lineae breuissimae, et posita in plano ad superficiem normali, erit directio vis N normalis in planum chartae, sit ea $\nu\mu$; corpus igitur hac vi a plano chartae sursum reducetur, si quidem ponamus hanc vim N sursum esse directam hac elementorum positione vt in figura repraesentatur. Efficiat ergo haec vis, vt corpus per elementum $m\mu$ moueatur, anguloque $\nu m\mu$ a directione $m\nu$ deflectat. Huic angulo respondet radius osculi $= \frac{m\nu^2}{\mu\nu}$. Quare cum vis N hunc angulum generet, celeritasque curuae debita sit altitudini v, erit ex effectu virium normalium $N = \frac{2v.\mu\nu}{m\nu^2}$ ideoque $\mu\nu = \frac{N.m\nu^2}{2v}$. Quo nunc inclinatio plani M$m\mu$, in quo corpus actu mouebitur, ad planum M$m\nu$, quod in superficiem est normale, inueniatur, demittatur ex ν in elementum Mm productum perpendiculum νn; erit μn quoque in mn perpendiculare, ideoque angulus $\mu n\nu$ erit angulus inclinationis plani μmM ad planum νmM; atque cum $\mu\nu$ sit normalis ad νn; huius anguli tangens erit $= \frac{\mu\nu}{n\nu} = \frac{N.m\nu^2}{2v.n\nu}$. At $n\nu$ determinatur ex inclinatione elementorum Mm et $m\nu$ seu radio osculi lineae breuissimae, cuius Mm et $m\nu$ sunt elementa. Sit hic radius osculi r; erit $\frac{m\nu^2}{n\nu} = r$, ideoque tangens anguli $\mu n\nu = \frac{Nr}{2v}$ $\frac{N.(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v(dPdx+dQdy)}$, substituto loco r valore

M.E.C.D. 2017

valore inuento (73.). Huic vero angulo aequalis eſt angulus, quem radius oſculi elementorum Mm, $m\mu$ a corpore actu deſcriptorum conſtituit cum radio oſculi elementorum Mm, $m\nu$ ſeu cum normali in ſuperficiem. Huius autem anguli tangentem ſupra invenimus (71). Quare facta aequatione habebimus $\frac{ddy\,(dx+Pdz)-ddz\,(Pdy-Qdx)}{(ddz-Qddy)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}} = \frac{N(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2+1)}}{2v\,(dPdx+dQdy)}$, qua aequatione effectus potentiae N determinatur. Seu cum ſit $ddz - Qddy = dPdx + dQdy$ habebitur iſta aequatio $ddy\,(dx+Pdz)-ddz\,(Pdy-Qdx) = \frac{N(dx^2+dy+^2dz^2)}{2v}\frac{3}{2}\sqrt{(P^2+Q^2+1)}$.

Tertia potentia T, quia in directione corporis eſt poſita, celeritatem tantum vel auget vel diminuit. Ponamus eam eſſe accelerantem, exprimetur eius effectus hac aequatione $dv = T\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Atque ſi motus in medio fiat reſiſtente reſiſtentiaque ſit $= R$, minuenda tantum eſt vis tangentialis T reſiſtentia R. Quamobrem habebitur $dv = (T-R)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Q. E. I.

Corollarium I.

80. Ex duabus igitur aequationibus, quarum altera v altera dv determinat, vna conflatur v non amplius continens, quae cum locali pro ſuperficie $dz = Pdx + Qdy$ coniuncta deter-

M.E.C.D. 2017

minat curuam, quam corpus ſuper propoſita ſuperficie deſcribit.

Scholion 1.

81. De potentia N bene eſt attendendum in quam plagam tendat, h. e. an ad dextram an ad ſiniſtram regionem corporis moti vergat? Pro hac enim differentia tangens anguli $\mu n \nu$ vel affirmatiua vel negatiua eſt accipienda. De hoc vero non erimus hic ſolliciti, ſed vlteriorem huius rei disquiſitionem in caput vltimum huius libri differemus.

Scholion 2.

82. Ad ſequens igitur caput ſecundum progredimur, in quo motum corporis ſuper data linea in vacuo examinabimus. Capite tertio vero motus ſuper data linea in medio reſiſtente inueſtigabimus. Quarto denique capite motum ſuper data ſuperficie tam in vacuo quam in medio reſiſtente ſcrutabimur.

CAPUT

M.E.C.D. 2017

CAPUT SECUNDUM.

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN VACUO.

PROPOSITIO 12.

Problema.

§ 3.

Sollicitetur corpus, quod ſuper curua AM *mouetur, vbique a potentia* MF *cuius directio ſit parallela axi* AP; *determinare celeritatem corporis in ſingulis punctis, atque tempus, quo curuae quaeuis portio deſcribitur, nec non preſſionem, quam curua in ſingulis punctis patitur.* Tabula III. Fig. 3.

Solutio.

Deſcripſerit corpus iam arcum AM, ſitque eius celeritas in A debita altitudini b, atque celeritas in M debita altitudini v. Poſitis nunc AP$=x$; PM$=y$; et arcu AM$=s$; reſoluatur potentia MF, que ſit p in laterales normalem ſcilicet MN et tangentialem MT; erit $ds : dx =$ MF: MT et $ds : dy =$ MF: MN. Hinc igitur prodibit vis tangentialis MT$= \frac{p\,dx}{ds}$ et vis normalis $= \frac{p\,dy}{ds}$. Perſpicuum hic eſt vim tangentialem celeritatem corporis minuere, erit ergo $dv = -p\,dx$ (42.) atque $v =$ C$- \int p\,dx$. Sumto autem integrali $\int p\,dx$ ita, vt evaneſcat poſito $x = o$, erit $v = b - \int p\,dx$; ex qua aequatione

M.E.C.D. 2017

ne corporis celeritas in ſingulis punctis cognoſcitur. Ex eadem aequatione innoteſcit quoque tempus, quo arcus AM abſoluitur, poſito enim tempore t erit $t = \int \frac{ds}{\sqrt{(b - spdx)}}$. Vis normalis $MN = \frac{pdy}{ds}$ tota impenditur in curuae preſſionem ſecundum MN (39). augebit ergo preſſionem a vi centrifuga ortam, quia MN in oppoſitam radii oſculi MO plagam cadit. Quare cum poſito radio oſculi $NO = r$ vis centrifuga ſit $= \frac{2v}{r}$ (20). Erit totalis preſſio in curuam iuxta MN $= \frac{pdy}{ds} + \frac{2v}{r}$; Q. E. I.

Corollarium I.

84. Celeritas in M igitur tanta eſt, quanta foret in P, ſi corpus eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ per AP eadem in ſingulis altitudinibus potentia p ſollicitatum aſcendiſſet.

Corollarium 2.

85. Celeritas igitur non pendet a natura curuae, ſed tantum ab altitudine, quam corpus percurrit. Si nimirum altitudinis elementum fuerit dx erit $dv = -pdx$ vel $dv = pdx$ prout corpus vel aſcendit vel deſcendit.

Corollarium 3.

86. Cum ſit $v = b - \int pdx$, ſi ſumatur abſciſſa x tanta uti AC, pro qua ſit $\int pdx = b$; erit corporis in illa altitudine B celeritas $= o$. Corpus igitur in B vsque aſcendit, ibique quieſcet, continuo vero ex B deſcendet per BMA.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

87. Si aſcenſus per AMB cum aſcenſu rectilineo per APC comparetur, erit tempus per elementum Mm ad tempus per Pp, vt Mm ad Pp i. e. vt ds ad dx.

Corollarium 5.

88. Quare ſi linea AMB fuerit recta, ob rationem Mm ad Pp conſtantem, erit tempus per AM ad tempus per AP in conſtanti ratione nempe ea, quam habet ſinus totus ad coſinum anguli A, ſeu quam habet longitudo AB ad AC.

Corollarium 6.

89. Poſito elemento Pp conſtante eſt radius oſculi $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$, ideoque vis centrifuga $= -\frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{-2(b-\int pdx)dx\,ddy}{ds^3}$. Quare preſſio totalis erit $= \frac{pds^2dy-2(b-\int pdx)\,dx\,ddy}{ds^3}$.

Scholion 1.

90. Quemadmodum in hoc problemate ex datis curua et potentia ſollicitante inuenta ſunt, celeritas in ſingulis punctis, tempus per quemvis arcum, et preſſio in ſingula curuae puncta: ita ex harum quinque rerum duabus quibusque datis, reliquae tres poſſunt inueniri. Ex quo decem naſcentur problemata, quae omnia ſolutionem ex huius problematis ſolutione habebunt.

M.E.C.D. 2017

Scholion 2.

91. Similiter habebuntur decem huiusmodi quaeſtiones, ſi directiones potentiae ſollicitantis non fuerint parallelae, ſed vel conuergentes ad centrum virium, vel alio modo determinatas directiones habentes. At ſi etiam directio inter quaeſita ponatur tunc ob ſex res in computum ducendas, ex ternis quibusque, reliquae tres inuenientur; hincque viginti orientur problemata.

Scholion 3.

92. Orientur porro problemata indeterminata, vt ſi loco temporis per quamuis curuae portionem tantum integrum tempus per AMB daretur, tum enim infinitae ſolutiones locum haberent. Praeterea ſi plures deſcenſus vel aſcenſus integri conſiderentur ſuper eiusdem curuae variis partibus, eorumque ratio detur, numerus quaeſtionum multo magis augebitur. Ad hoc genus pertinet quaeſtio de inuenienda curua, ſuper qua omnes deſcenſus ad datum punctum fiant eodem tempore, quas tanquam difficillimas vltimo pertractabimus. Nunc autem primum curuam et potentiam ſollicitantem tanquam datas accipiemus et problemata eo pertinentia ſoluemus. Deinceps vero ex aliis datis, quemadmodum reliqua ſint inuenienda, monſtrabimus.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 13.

Problema.

Tabula III. Fig. 4.

93. *Si potentia ſollicitans fuerit vniformis et vbique deorſum tendat, determinare deſcenſum corporis ſuper data curua* A M *in* A *ex quiete incipientem, atque preſſionem, quam curua, in ſingulis punctis* M *ſuſtinet.*

Solutio.

Ducta verticali A P ſeu parallela directionibus potentiae M F, atque applicata rectangula M P, ſit A P $= x$, P M $= y$, curua A M $= s$. Ponatur potentia M F $= g$, exiſtente vi grauitatis $=$ 1, et celeritas in M debita altitudini v. His poſitis erit vis normalis $= \frac{g\,dy}{ds}$ et vis tangentialis $= \frac{g\,dx}{ds}$ (83.). Quia hoc caſu vis tangentialis accelerat, erit $dv = g\,dx$, et $v = g\,x$, ob celeritatem in A $= o$. Deinde quia radius oſculi in M O directus eſt $= \frac{+ds^3}{dx\,ddy}$, poſito dx conſtante, erit vis centrifuga $= \frac{+2v\,dx\,ddy}{ds^3}$, cuius directio eſt M N. Secundum eandem plagam vero premit vis normalis $\frac{g\,dy}{ds}$. Quare tota preſſio, quam curua in M ſuſtinet ſecundum M N eſt $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3} = \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2g\,x\,dx\,ddy}{ds^3}$ ob $v = g\,x$. Tempus vero quo corpus arcum A M percurrit eſt $= \int \frac{ds}{\sqrt{g\,x}}$. Q. E. I.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

94. Celeritas igitur in M tantum ab altitudine AP, per quam descendit, pendet, atque tanta est, quantam idem corpus ex AP delapsum et ab eadem potentia g sollicitatum acquirit.

Corollarium 2.

95. In quacunque igitur curua corpus a potentia vniformi g sollicitatum ex quiete descendat, celeritates erunt radicibus quadratis ex altitudinibus percursis proportionales, est enim celeritas, vt Vv i. e. vt Vgx.

Corollarium 3.

96. Tempus quo primum elementum Aa percurritur, est $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ euanescente x. Si igitur angulus PAa fuerit recto minor seu $s = nx$, erit tempus per Aa infinite paruum, ideoque tempus AM finitum, nisi curua vel ascendat inter A et M, supra A vel in infinitum progrediatur. At si angulus PAa fuerit rectus, erit ipso puncto A, $s^n = \alpha x$, existente n numero vnitate maiore, ideoque $\sqrt{gx} = s^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, et $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{2}{2-n} s^{\frac{2-n}{2}} \sqrt{\frac{\alpha}{g}}$. Quare si n fuerit binario minor, tempus per Aa erit infinite paruum, et tempus per AM finitum. At si $n = 2$ vel > 2 tempus per primum elementum Aa erit infinite magnum, seu corpus ex A nunquam egredietur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

97. Quoties autem $n < 2$, toties radius oſculi in A eſt infinite paruus. Quare in caſu quo tangens curuae in A ad AP eſt normalis, corpus non deſcendet, niſi radius oſculi in A fuerit infinite paruus.

Scholion 1.

98. Ex eo, quod primum elementum tempore infinite paruo percurritur, recte concluditur tempus per arcum AM eſſe finitum, cum enim corpus motu accelerato per AM deſcendat, multo celerius ſequentia elementa deſcribentur, et hancob rem tempus debebit eſſe finitum. Exemplis autem ſequentibus omnia illuſtrabuntur.

Exemplum 1.

Tabula III. Fig. 5.

99. Sit linea AM recta vtcunque inclinata ad verticalem AP, atque coſinus ang. $A = n$, erit $x = ns$. Tempus ergo, quo corpus per AM deſcendit, erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gns}} = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{gn}} = \frac{2\sqrt{AM}}{\sqrt{gn}} = \frac{2AM}{\sqrt{g.AP}}$. Seu tempus per lineam vtcunque inclinatam eſt directe, vt radix ex ipſa linea et inverſe, vt radix ex coſinu anguli inclinationis MAP. Vis centrifuga erit autem $= o$, quare linea AM tantum a vi normali premitur, quae eſt $= g\sqrt{(1-n^2}$, $= \frac{g.PM}{AM}$.

Corollarium 5.

100. Tempus ergo per AM eſt ad tempus per AK, vt $\sqrt{AM}$ ad $\sqrt{AK}$. At tempus per AM eſt ad tempus per AP vt AM ad AP. (88). Qua-

M.E.C.D. 2017

re si fuerit AM: AP = √AM: √AK, seu AM: AP = AP: AK, quod euenit si PK est in AM perpendicularis tum tempus descensus per AK aequale est tempori descensus per AP.

Corollarium 6.

101. Patet etiam tempus descensus per perpendiculum PK aequale esse tempori descensus per AP. Est enim cosinus anguli APK $= \frac{PK}{AP}$; Quare cum sit tempus per AP ad tempus per KP vt $\frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{1}}$ ad $\sqrt{KP}: \sqrt{\frac{PK}{AP}}$, erit haec ratio aequalitatis.

Corollarium 7.

Tabula IV. Fig. 1.

102. Ex hoc perspicitur in circulo APPB omnes descensus per chordas AP ex puncto supremo A ductas, nec non omnes descensus per chordas ad punctum infimum B ductas aequalibus fieri temporibus; eo scilicet tempore, quo corpus per diametrum AB perpendiculariter delabitur.

Exemplum 2.

Tabula IV. Fig. 2.

103. Si curua AMB fuerit circulus, ac radius $BC = a$ et AP tangat circulum, erit $(a-y)^2 + x^2 = a^2$ seu $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Habebitur ergo $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, et ob $v = gx$ et $r = a$ erit vis centrifuga $= \frac{2gx}{a}$; atque ob $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ tota pressio, quam circulus in M sustinet $= \frac{3gx}{a}$. Triplo igitur maior est tota pressio, quam sola vis normalis. Tempus deinde, quo arcus AM percurritur, est

=

M.E.C.D. 2017

$= \int \frac{a\,dx}{\sqrt{g(a^2x - x^3}}$, cuius integratio neque a circuli nec hyperbolae quadratura pendet, sed ope rectificationis curuae elasticae construi potest. Tempus interim per quadrantem AB est $= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \times (1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.9} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} + \text{etc.})$.

Corollarium 8.

104. Cum corpus ad infimum punctum B peruenerit, ibi habebit celeritatem altitudini ga debitam. Hac igitur ascendet in altero quadrante BD pertingetque ad D, vbi eius celeritas euanescet, ideoque rursus descendet ad B tumque ad A per BA reascendet. Similis vero erit ascensus descensui per quadrantem, quia corpus siue ascendat siue descendat in iisdem punctis eandem habet celeritatem.

Scholion 2.

105. Alia exempla non afferimus, cum in sequentibus, vbi plures descensus ad punctum fixum super data linea considerabimus, plura simus allaturi. Nunc vero primum eas quaestiones evolvemus, quae pertinent ad motum super data linea, ex dato puncto fixo a quiete inceptum: cuius modi est problema sequens.

PROPOSITIO 14.

Problema

106. *Si fuerint infinitae curuae similes* AM, AM *etc. ex puncto fixo* A *initium sumentes; inuenire* Tabula IV. Fig. 3.

cur-

M.E.C.D. 2017

curuam CMM, *ab illis curuis arcus* AM, AM etc. *abſcindentem, qui a deſcendente ſuper iis corpore aequalibus temporibus percurrantur; exiſtente vt ante potentia ſollicitante vniformi et vbique deorſum directa.*

Solutio.

Ex infinitis curuis datis ſumatur vna quaecunque AM, cuius parameter ſit a. Poſitoque AP$=x$, PM$=y$ et arcu AM$=s$, et exiſtente vt ante potentia ſollicitante$=g$; deſcendat corpus ſuper curua AM, erit celeritas in M debita altitudini gx. Tempus ergo deſcenſus ſuper AM erit $=\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Ab omnibus ergo curuis AM, AM etc. tanti arcus ſunt abſcindendi, vt pro iis ſit $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ quantitas conſtans. At $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ad alias curuas referetur, ſi praeter s et x etiam parameter a ponatur variabilis. Poſito igitur in $\int\frac{dx}{\sqrt{gx}}$ etiam a variabili, quantitas $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ponenda eſt$=$conſtanti, nempe ei tempori quo omnes deſcenſus fieri debent. Sit hoc tempus$=k$ erit k$=\int\frac{dx}{\sqrt{gx}}$ in ſingulis curuis. Quare ſi $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ ita differentietur vt etiam a variabile ponatur, hoc differentiale nihilo aequale eſt ponendum. Ad hoc differentiale inueniendum ſit $ds=pdx$, eritque p, quia omnes curuae ponuntur ſimiles, functio in qua a et x nullum dimenſionum numerum ſimul conſtituunt. Habebimus ergo $\int\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$: hoc differentiatum poſito quoque a variabili dabit

$\frac{pdx}{\sqrt{gx}}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda$, quod fieri debet $= o$. Quantitas q vero ſequenti modo inuenietur. Quia eſt $k = \int \frac{pdx}{\sqrt{gx}}$; in quantitate k, variabiles a et x dimenſionum numerum conſtituent $\frac{1}{2}$. Oſtendi autem alibi in Tom. IX. Comment. tum fore $\frac{px}{\sqrt{g}x} + qa = \frac{k}{2}$. Ex quo inuenitur $q = \frac{k}{2a} - \frac{p\sqrt{x}}{a\sqrt{g}}$. Habebitur ergo $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} + qda = \frac{pdx}{\sqrt{gx}} + \frac{kda}{2a} - \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} = o$. Quae eſt aequatio pro curua quaeſita. At ſi aequatio inter coordinatas x et y pro curua CMM deſideretur, ex aequatione pro quaque curuarum AM, valor ipſius a in x et y inuentus ſubſtitui debet. Q. E. I.

Corollarium 1.

107. Aequatio etiam primo inuenta $\frac{pdx}{\sqrt{gx}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a\sqrt{g}} - \frac{kda}{2a}$ ſufficit ad curuam CMM inueniendam. Nam pro quauis abſciſſa $AP = x$ ex ea inuenitur a parameter eius curuae AM, cuius punctum M reſpondens aſſumtae abſciſſae x eſt in curua quaeſita CMM.

Corollarium 2.

108. Cum autem haec aequatio ſit differentialis, ideoque ad plures curuas pro conſtante quae adiicitur, pertineat; notandum eſt in additione conſtantis, eam tantum ſolutioni eſſe conuenientem, quae pro data curua ſeu pro dato ipſius a valore det abſciſſam x tantum arcum AM abſcindentem, qui tempore k deſcenſu abſoluatur.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

109. Si tempus k aequale esse debeat tempori descensus per verticalem $AC = b$, erit $k = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Quo valore substituto habebitur aequatio $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ In cuius integratione id est faciendum, vt curua per punctum C transeat.

Scholion 1.

110. Erit autem semper recta verticalis AC species curuarum AM; quae oritur, si parameter a vel infinite magna vel infinite parua accipiatur. Quare commodissime tempus constans k per descensum per verticalem AC, quippe speciem curuarum AM, exprimitur. Atque in constructione aequationis inuentae $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ tanta constans est addenda, vt posito $x = b$, fiat a vel infinitum vel nihil, prout ille vel iste valor ipsius a recta AC respondeat.

Scholion 2.

111. Si $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ reipsa potest integrari, ne data quidem aequatione opus est, ad quam inueniendam opus fuit q determinare. Nam si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ iterum differentietur posito quoque a variabili reipsa obtinetur q; atque hoc differentiale tantum nihilo aequale esset ponendum. Commodissime vero his casibus problema soluetur, si integrale ipsius $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ statim ipsi k vel $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$ aequale ponatur, et loco a eius valor in x et y substituatur ex aequatione pro curuis datis. Atque hoc mo-

M.E.C.D. 2017

modo ſolutio in promtu eſt non ſolum pro curuis ſimilibus, ſed diſſimilibus etiam, ſi modo tempora deſcenſus per quantitates finitas exprimi poſſunt.

Exemplum I.

112. Si omnes hae curuae AM fuerint rectae diuerſimode ad verticalem AC inclinatae, erit $y = nx$ et $s = x\sqrt{(1+n^2)}$ ubi n tanquam parameter eſt conſideranda. Erit ergo $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \int \frac{dx\sqrt{(1+n^2}}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x(1+n^2)}}{\sqrt{g}}$ quod aequale poni debet ipſi $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$. Erit itaque $x(1+n^2) = b$. Cum autem n ſit quantitas variabilis, ponatur pro ea valor $\frac{y}{x}$ ex aequatione $y = nx$: quo facto prodibit pro curua CMM aequatio inter coordinatas orthogonales x et y iſta $y^2 + x^2 = bx$, quae eſt pro circulo, cuius diameter eſt recta $AC = b$.

Scholion 3.

113. Hic caſus eſt ille ipſe caſus ante pertractatus (102), ibi enim oſtenſum eſt corpus per omnes chordas in circulo ex puncto ſupremo eductas aequalibus temporibus deſcendere. Pertinet hic quidem caſus non ad curuas ſimiles; ſed hoc exemplum attulimus ad caſum Scholii 2. illuſtrandum, quia pro rectis hisce tempora deſcenſus finitis quantitatibus exprimuntur. Sequentia exempla vero curuas ſimiles, vti propoſitio poſtulat, complectentur.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Exemplum 2.

114. Sint curuae AM, AM omnes circuli tangentes verticalem AC in A. Ponatur radius cuiusque eorum $= a$, erit $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$ atque $a = \frac{y^2 + x^2}{2y}$. Hi circuli vero omnes sunt curuae similes, quia a, y et x in aequatione eundem dimensionum numerum tenent, seu homogeneitatem complent sola. Radius igitur a tanquam parameter variabilis debet tractari. Habetur autem ex illa aequatione $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, quare erit $p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, ideoque praescriptam habet proprietatem, vt a et x dimensionum numerus sit nullus. Hanc ob rem pro curua CMM haec habebitur aequatio $\frac{adx}{\sqrt{(a^2x - x^3)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$, seu haec $\frac{da\sqrt{b}}{a} = \frac{x\,da - a\,dx}{\sqrt{(a^2x - x^3)}}$. Quae aequatio construi potest, posito enim $x = au$, prodit $\frac{da\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} = \frac{-du}{\sqrt{(u - u^3)}}$ in qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae. Quo autem aequatio inter coordinatas x et y pro curua CMM obtineatur, ponatur loco a valor $\frac{y^2 + x^2}{2y}$ et loco da eius differentiale $\frac{y^2dy + 2yxdx - x^2dy}{2y^2}$. Quibus substitutis sequens prodit aequatio differentialis $-xdy + ydx = \frac{(y^2dy + 2yxdx - x^2dy)\sqrt{bx}}{y^2 + x^2}$. Quae ita integrari debet ut posito $x = b$ fiat $y = o$, quia curua per punctum C transire debet.

Corollarium 4.

115. Ex hac aequatione tangens curuae CMM in singulis punctis cognoscitur, et ex positione tangentis innotescit angulus AMM, quo cur-

M.E.C.D. 2017

curua CMM quamlibet datarum interſecat. Erit ſcilicet tangens anguli AMM $= \frac{y}{x - \sqrt{bx}}$. Hic ergo angulus eſt rectus in C, ob $x = b$, ſeu curua CMM in C ad AC eſt normalis.

Corollarium 5.

116. *Si* b vel maior vel minor accipiatur curua CMM alia quoque erit, hocque modo infinitae orientur curuae a circulis arcus iſochronos abſcindentes. Haeque curuae omnes inter ſe erunt ſimiles, ob parametrum b, quae in aequatione cum x et y homogeneitatem conſtituit. Data ergo vna curua CMM innumerabiles aliae ex ea conſtrui poſſunt, abſciſſis ſcilicet et applicatis curuae CMM in eadem ratione augendis vel diminuendis, in qua AC ſeu b augetur vel diminuitur.

Exemplum 3.

117. Sint curuae AM, AM omnes cycloides cuſpides in A habentes et tangentes verticalem AC in A. Poſita parametro cuiusque cycloidis AM ſeu dupla diametro circuli generatoris $= a$; erit ex natura cycloidis $s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)}$ atque $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$; hincque $dy = \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$. Hoc ergo caſu eſt $p = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}$, functio ipſarum a et x nullius dimenſionis vt requiritur. Quare pro curua CMM reperitur iſta aequatio $\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{x}}{\sqrt{(a^2 - 2ax)}} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ ſeu $\frac{x\,da - a\,dx}{\sqrt{(a^2x - 2ax^2)}} = \frac{da\sqrt{b}}{a}$. Si aequa-

M.E.C.D. 2017

aequatio inter coordinatas orthogonales x et y de-ſideretur, ex aequatione $y = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$ ſeu huius differentiali poſita quoque a variabili, valor ipſius a debet ſubſtitui. Haec vero aequatio differentiata poſito a quoque variabili dat $ady - ydx =$ $\frac{adx\sqrt{2ax} - xda\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$ ſeu $\frac{ady-yda}{\sqrt{2a}} = \frac{axdx-x^2da}{\sqrt{(a^2x-2ax^2)}}$. Quae abit in hanc $\frac{ady-yda}{a^2\sqrt{2}} = \frac{axdx-x^2da}{a^2\sqrt{(ax-2x^2)}}$. Superior vero per $\frac{1}{4\sqrt{a}}$ multiplicata praebet hanc, $\frac{da\sqrt{b}}{4a\sqrt{a}} = \frac{axda-a^2dx}{4a^2\sqrt{(ax-2x^2)}}$. Hae duae aequationes additae dant aequationem integrabilem, cuius integralis eſt $\frac{y}{a\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{-\sqrt{(ax-2x^2)}}{2a}$. Ex qua valor ipſius a erutus fit $\sqrt{a} = \frac{y\sqrt{2b} \pm \sqrt{(2y^2x-2bx^2+2x^3)}}{b-x}$ et $\sqrt{(ax-2x^2)}$ $= \frac{yx\sqrt{2} \pm \sqrt{(2by^2x-2b^2x^2+2bx^3)}}{b-x}$. Quibus valoribus in aequatione $\frac{(xdy-ydx)\sqrt{a}+xdx\sqrt{2b}}{\sqrt{(ax-2x^2)}} = dy\sqrt{b}$, quae oritur ex duabus differentialibus eliminato da, ſubſtitutis prodibit $\frac{xdy-ydx-bdy}{b\sqrt{b}} = \frac{dx\sqrt{(y^2-bx+x^2)}}{\sqrt{x}}$ aequatio pro curua quaeſita CMM.

Corollarium 6.

118. Ex hac aequatione inuenitur tangens anguli, quem curua CM cum applicata PM conſtituit nempe $\frac{dx}{dy} = \frac{-(b-x)\sqrt{x}}{y\sqrt{x}+\sqrt{(by^2-b^2x+bx^2)}}$. Deinde etiam innoteſcit tangens anguli, quem cyclois AM cum

M.E.C.D. 2017

cum applicata P M conſtituit. Ex aequatione cycloidis erit nimirum $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(a^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}} = \frac{\sqrt{(ax - 2x^2)}}{x\sqrt{2}}$. Eliminato vero a erit iſta tangens $= \frac{y\sqrt{x} + \sqrt{(by^2 - b^2x + bx^2)}}{(b-x)\sqrt{x}}$. Quare cum horum angulorum alter alterius ſit complementum, ſumto illius deinceps poſito, erit angulus, quem curua CMM cum qualibet datarum AM conſtituit, rectus. Conſequenter curva CMM eſt traiectoria orthogonalis omnium cycloidum datarum AM, AM &c.

Corollarium 7.

119. Sumto AC alius magnitudinis, aliae quoque curuae CMM prodibunt, et ſic infinitae traiectoriae orthogonales inueniuntur, quae omnes inter ſe ſunt ſimiles. Data ergo vna facile quotquot libuerit, conſtruere licebit.

Scholion 4.

120. Omnes hae curuae arcus abſcindentes iſochronos, quaecunque fuerint curuae ſecandae, ſemper conſtrui poſſunt, etiamſi id ex aequatione non appareat. Per quadraturas enim ex datis curuis arcus poſſunt abſcindi, qui dato tempore deſcenſu abſoluantur, hocque modo puncta quotlibet curuaé quaeſitae inueniuntur. Si quidem curuae ſecandae ſunt algebraicae, aequatio pro curua ſecante ſemper ita eſt comparata, ut factis debitis ſubſtitutionibus indeterminatae a ſe inuicem poſſint ſeparari. At ſi curuae ſecandae differentiali

M.E.C.D. 2017

tiali aequatione exprimantur, aequatio differentialis pro curua ſecante rariſſime ſeparationem indeterminatarum admittit. Cauſa eſt, quod peculiari modo, quo in hoc cycloidum caſu uſus ſum, parameter a eliminari debeat; eaque ſubſtitutio ad ſeparationem non deducat.

Scholion 5.

121. Deinde obſeruandum eſt, omnes curuas arcus iſochronos abſcindentes, quarum numerus pro vario ipſius b valore eſt infinitus, inter ſe ſimiles eſſe, ſi quidem curuae ſecandae fuerint tales. Colligitur hoc ex generali aequatione $\frac{pdx}{\sqrt{x}} = \frac{pda\sqrt{x}}{a} - \frac{da\sqrt{b}}{a}$ in qua cum p ſit functio ipſarum a et x nullius dimenſionis quantitates a, b et x homogeneitatem conſtituunt. At ex aequatione curuarum ſecundarum, quia in ea a, x et y vbique eundem dimenſionum numerum conficere ponuntur, valor ipſius a erit functio ipſarum x et y vnius dimenſionis. Quare eo ſubſtituto loco a habebitur aequatio pro curua ſecante, in qua b, x et y vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt. Conſequenter b variabili poſito oriuntur infinitae curuae ſimiles inter ſe reſpectu puncti A. Data ergo vnica, reliquae facile ex ſimilitudinis ratione deſcribuntur.

Scholion 6.

122. Materia haec de arcubus iſochronis abſcindendis iam praeterito ſeculo eſt pertractata in

M.E.C.D. 2017

in Act. Erud. Lipſ. A. 1697. a Cel. Ioh. Bernullio, atque poſtmodum in Comment. Acad. Pariſ. a Cel. Saurino, qui vero alia methodo ſunt vſi. Ego vero eam adhibui methodum, quam in noſtris Comment. pro A. 1734. tradidi, tanquam commodiſſimam ad huiusmodi problemata ſoluenda. In his vero locis Viri Cel. curuas quoque ſimiles tantum, vt ego, conſiderauerunt, ſine dubio, quia pro curuis diſſimilibus ſolutio fit nimis difficilis et ſaepe etiam vires ſuperat. Vocantur vero in locis citatis hae curuae ſynchronae, quia arcus ſimul percurſi abſcinduntur.

Scholion 7.

123. Ex mea diſſertatione Tomi IX. Comment. Acad. Petrop. apparet, has curuas ſynchronas ſimili modo poſſe inveniri, ſi curuae datae etiam non fuerint ſimiles, ſed eiusmodi tamen, vt poſito $ds = p\,dx$, in p quantitates a et x datum dimenſionum numerum conſtituant; tum enim aeque facile valor literae q inuenitur. Vt ſi numerus dimenſionum ipſarum a et x in p fuerit n, aequatio pro curua ſecante reperietur haec $\frac{p\,dx}{\sqrt{x}} = \frac{p\,da\sqrt{x}}{a} - \frac{(2n+1)\,da\sqrt{b}}{a}$. Quare ſi fuerit $n = -\frac{1}{2}$, vt ſi fuerit $p = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{da}{a}$ ideoque $x = ma$, ſeu x in data ratione ad parametrum a eſt capiendum: quo igitur caſu conſtructio ſynchronarum eſt facillima. At ſi p

M.E.C.D. 2017

non huiusmodi habuerit valorem, ex ſupra citata diſſertatione mea intelligitur, quo modo in aequationem quaeſitam ſit inquirendum.

PROPOSITIO 15.

Problema.

Tabula IV. Fig. 4.

124. *Si fuerit, vt ante infinitae curuae ſimiles* AM, AM *etc. et rectapoſitione data* DE; *invenire eam curuam* AMN, *ſuper qua corpus tempore breuiſſimo ex* A *ad rectam* DE *deſcenſu peruenit.*

Solutio.

Deſcripta per Prop. praeced. quacunque curva CMM arcus AM iſochronos abſcindente, ducatur tangens GMH parallela datae rectae DE. Manifeſtum eſt ſuper curua AM, quae ad punctum contactus M tendit, corpus tempore breuiſſimo ad rectam GMH eſſe venturum, quia quaeque alia puncta rectae GMH extra curuam CMM cadunt, ideoque longiore tempore opus eſt, quo corpus ad ea perveniat. Iam, quoniam omnes curuae a curuis AM, AM arcus iſochronos abſcindentes ſunt inter ſe ſimiles (121). concipiatur ex iis una quae rectam DE tangat, dico punctum contactus fore in N puncto, quo recta AM per prius punctum contactus M ducta rectae DE occurrit. Sequitur hoc tum ex natura ſimilitudinis curuarum CMM reſpectu puncti A, tum etiam ex eo, quod arcus AMN ſimilis ſit arcui AM, atque rectae DE in eodem angulo occurrat, quo curua AM rectae GH. Quare

M.E.C.D. 2017

re cum corpus per AM tempore breuiſſimo ad GH perueniat, neceſſe eſt, vt quoque tempore breuiſſimo ſuper curua AMN ad rectam DE perveniat. Q. E. I.

Corollarium 1.

125. Ex hoc perſpicitur, ſi recta DE fuerit horizontalis, corpus deſcenſu per verticalem AC ad eam citiſſime peruenire, ob tangentem curuae CMM in C horizontalem: id quod quidem per ſe perſpicuum eſt.

Corollarium 2.

126. Si ergo curuae AM, AM fuerint cycloides vt in exemplo 3. Propoſ. praec. poſuimus, corpus ſuper ea cycloide celerrime ad rectam DE peruenit, quae huic rectae in N ad angulos rectos occurrit; quia angulus, quem quaeque cyclois cum curua CM conſtituit, eſt rectus.

Corollarium 3.

127. Si igitur recta DE fuerit verticalis ſeu parallela ipſi AC, portio cycloidis AMM erit dimidia cyclois. Quare ſuper dimidia cycloide motus horizontalis eſt celerrimus.

Corollarium 4.

128. Si curuae AM, AM ſint rectae ex puncto A ad rectam poſitionem datam DE ductae, corpus ſuper ea AM citiſſime ad DE perveniet, quae eſt chorda circuli per A tranſeuntis et centrum in verticali AB habentis, atque rectam DE tangentis .(112.). Tabula IV. Fig. 5.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

129. Si igitur angulus DCA fuerit n graduum erit angulus BAM $\frac{90+n}{2}$ graduum, et angulus AMC graduum $\frac{90-n}{2}$. Seu ducta horizontali AGH, anguloque DGH bisecto recta GF, erit quaesita linea AM parallela ipsi GF.

Corollarium 6.

130. Quare si linea DE fuerit verticalis corpus ad eam citissime perueniet descendendo super recta ad horizontem angulo semirecto inclinata. Corpus igitur super recta hoc modo inclinata motu horizontali celerrime progreditur.

Scholion.

Tabula IV. Fig. 4.

131. Simili modo quoque inueniri potest, super quanam infinitarum curuarum similium AM, AM corpus descensu citissime ad datam curuam perueniat. Nam si linea GMH fuerit curua quaecunque tangens curuam CMM in M, corpus super hac curua AM celerrime ad curuam GMH perueniet, si quidem tota curua GMH extra curuam CMM fuerit sita. Eodem etiam modo posset determinari, si curuae AM, AM non fuerint similes, super quanam corpus celerrime ad datam lineam GH perueniat. Ex infinitis enim curuis CMM arcus isochronos abscindentibus ea est quaerenda, quae datam GMH tangat, eritque ea curua AM, quae per punctum contactus transit ea, quae quaeritur. Sed cum in his casibus difficile plerumque sit curuas CMM inuenire, multoque

M.E.C.D. 2017

toque difficilius eam determinare, quae datam lineam tangat; quaeſtionem ad curuas ſimiles tantum reſtrinximus.

PROPOSITIO 16.

Theorema.

132. *Tempora deſcenſuum, quibus corpus curuas* AM *et* A*m ſimiles ſimiliterque ex puncto* A *poſitas percurrit, ſunt in ratione ſubduplicata laterum homologorum.* Tabula IV. Fig. 6.

Demonſtratio.

Quia curuae AM, A*m* ſunt ſimiles, erunt AM: A*m*; AP: A*p*; et PM: *pm* in data ratione, nempe ea, quam latera homologa tenent; ſit haec ratio laterum homologorum N: *n*. Quia celeritas in M eſt ad celeritatem in *m*, vt $\sqrt{}$AP ad $\sqrt{}$A*p*, erunt celeritates in M et *m* in ratione ſubduplicata laterum homologorum. Sumantur jam ex M et *m* elementa ſimilia rationem ſcilicet N ad *n* tenentia, erunt tempora, quibus haec duo elementa homologa percurruntur in ratione compoſita ex directa elementorum, i. e. N ad *n* et reciproca celeritatum, i. e. $\sqrt{}$N: $\sqrt{}$*n*. Ex quo ſequitur, tempora, quibus curuarum AM, A*m* elementa homologa percurruntur, eſſe in ratione ſubduplicata laterum homologorum. Quare cum haec ratio ſit conſtans, tempora, quibus totae curuae AM et A*m* percurruntur, eandem hanc rationem tenebunt. Q E. D.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

133. Tempora igitur, quibus arcus circulares ſimiles ſimiliterque poſiti deſcenſu percurruntur, ſunt in ſubduplicata ratione radiorum.

Corollarium 2.

134. Pendula igitur, quae arcus circulares ſimiles deſcribunt, oſcillationes abſoluent temporibus, quae rationem ſubduplicatam longitudinum pendulorum tenebunt.

Corollarium 3.

135. Eadem ratio temporum locum habet, ſi corpora pendula non circulos deſcribant, ſed alias curuas, dummodo eae fuerint inter ſe ſimiles, ſimilesque arcus abſoluantur.

Scholion.

136. In his autem omnibus potentiam ſollicitantem ſemper ponimus vniformem, deorſumque tendentem, etiamſi hanc conditionem omiſerimus. Hanc enim hypotheſin ante pertractare conſtituimus, quam ad alias ſumus progreſſuri.

PROPOSITIO 17.

Problema

Tabula V. Fig. 1.

137. *Exiſtente potentia ſollicitante vniformi tendenteque deorſum, moueatur corpus ſuper curua quacunque* AM *cum data celeritate initiali in A: deter-*

M.E.C.D. 2017

terminare motum corporis ſuper hac curua, et preſſionem, quam curua in ſingulis punctis ſuſtinet.

Solutio.

Poſita potentia ſollicitante g, et celeritate initiali in A debita altitudini b, praetereaque AP $= x$; PM $= y$; AM $= s$ et celeritate in M debita altitudini v. His poſitis erit $dv = g\,dx$, (93.) vnde fit $v = b + g\,x$. Porroque tempus per arcum AM erit $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}}$. Deinde preſſio totalis, quam ſuſtinet curua ſecundum directionem normalis MN erit $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$ (93.) $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2(b+gx)\,dx\,ddy}{ds^3}$ exiſtente dx elemento conſtante. Hoc enim tantum differt haec ſolutio a ſolutione Prop. 13. quod ibi eſſet $v = gx$, hic vero ſit $v = b + g\,x$. Ex his igitur formulis tum motus tum preſſio cognoſcitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

138. Si linea AM fuerit recta, jam ex §. 88. intelligitur tempus per AM eſſe ad tempus deſcenſus per AP eadem celeritate $\sqrt{b}$ incepti, vt eſt AM ad AP. Preſſio vero ob euaneſcentem vim centrifugam erit $= \frac{g\,dy}{ds}$ ſeu conſtans.

Corollarium 2.

139. Patet etiam hoc caſu, quo motus non a quiete incipit, celeritatem ab altitudine tantum pendere. Quare quaecunque fuerit curua AM celeritas corporis in quouis eius puncto innoteſcit, etiam incognita curuae natura.

Exem-

M.E.C.D. 2017

Exemplum I.

140. Sit curua AM parabola verticem in A et axem verticalem AP habens; erit ergo posita eius parametro $= a$, $y^2 = ax$; et $dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{(a^2+4ax)}}{2\sqrt{ax}}$. Habebitur ergo tempus per AM $= \int \frac{dx\sqrt{(a+4x)}}{2\sqrt{x}(b+gx)}$. Deinde cum posito dx constante sit $ddy = \frac{-a\,dx^2}{4x\sqrt{ax}}$, erit $\frac{dx\,ddy}{ds^3} = \frac{-2a}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$. Consequenter pressio totalis est $= \frac{ga}{\sqrt{(a^2+4ax)}} - \frac{4a(b+gx)}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$ $= \frac{ga^2-4ab}{(a+4x)\sqrt{(a^2+4ax)}}$.

Corollarium 3.

141. Si igitur est $b = \frac{ga}{4}$, pressio curuae evanescit. Corpus ideo hoc casu libere in hac parabola moueri posset; qui est etiam ipse casus praecd. Libro pertractatus.

Corollarium 4.

142. Existente igitur $b = \frac{1}{4}ga$ erit tempus per arcum $AM = \int \frac{dx}{\sqrt{gx}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$. Hoc ergo tempus aequatur tempori descensus per abscissam AP a quiete incepti.

Corollarium 5.

143. Si $b > \frac{1}{4}ga$ pressio fit negatiua, tum igitur curua in plagam axi AP oppositam premitur. At si $b < \frac{1}{4}ga$ directio pressionis erit in MN. Quantitas vero pressionis in singulis curuae punctis erit reciproce vt radius osculi.

Exem-

M.E.C.D. 2017

Exemplum 2.

144. Si curua AM fuerit circulus; cuius radius $= a$, et centrum in verticali AP ſit poſitum; erit $y^2 = 2ax - x^2$, vnde $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$ et $ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Erit ergo tempus, quo arcus AM percurritur $= \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - x^2)(b + gx)}}$. Atque cum ſit $\frac{dx\,ddy}{ds^3} = \frac{-1}{a}$, erit preſſio, quam circulus in puncto M patitur $= g - \frac{gx}{a} - \frac{2(b+gx)}{a} = g - \frac{3gx}{a} - \frac{2b}{a}$.

Corollarium 6.

145. Tempus per logarithmos exprimi poteſt, ſi fuerit $b = 0$; ſit autem $= \infty$, ſeu corpus perpetuo in A manebit. Id quod per ſupra tradita (97.) patet. Nam, quia curua in A eſt normalis in AP, neque radius oſculi infinite paruus, corpus deſcendere non poteſt.

Corollarium 7.

146. Si eſt $b = \frac{ga}{2}$, ſeu celeritas initialis, tanta, quantam corpus acquirit cadendo ex altitudine dimidii radii circuli; preſſio totalis cum vi centrifuga erit conſpirans atque $= \frac{3gx}{a}$, erit itaque altitudini percurſae proportionalis.

DEFINITIO 3.

147. Motus oſcillatorius eſt motus reciprocus, quo corpus alternatim accedit et recedit ab initio motus M. *Ita ſi corpus ſuper curua* Tabula V. Fig. 2.

BIBLIOTECA DEL
M.E.C.D. 2017

MAN *moueatur, primo deſcendet ſuper* MA, *tum aſcendet in* AN, *donec celeritatem amiſerit; deinde ex* N *iterum deſcendet aſcendetque in arcu* AM, *quo facto iterum deſcendet, hancque periodum continuabit: Atque talis motus oſcillatorius vocatur.*

Corollarium 1.

148. Motus oſcillatorius ergo conſiſtit in alternis deſcenſibus et aſcenſibus ſuper linea curua; atque deſcenſu motu accelerato mouetur, aſcenſu vero celeritatem acquiſitam rurſus perdit.

Corollarium 2.

149. Quilibet ergo deſcenſus ſuper eadem curuae parte fit, ſuper qua praecedens aſcenſus contigit. Quare cum celeritas corporis ab altitudine tantum pendeat in vacuo, corpus in eodem curuae puncto ſiue in aſcenſu ſiue in deſcenſu eandem habet celeritatem.

Corollarium 3.

150. Ex quo ſequitur tempus deſcenſus per MA, aequale eſſe tempori aſcenſus per AM; ſimilique modo tempus aſcenſus per AN tempori deſcenſus per NA.

Corollarium 4.

151. Corpus in arcu AN aſcendens ad punctum N vsque perueniet, quod aeque altum eſt ac punctum M, ex quo erat delapſum. Sequitur hoc ex eo, quod celeritas per altitudinem tantum determinetur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

152. Si curua AN ſimilis et aequalis fuerit curuae AM, tum motus per AN aequalis erit motui per AM. Quare omnes aſcenſus et deſcenſus aequalibus fient temporibus.

Corollarium 6.

153. Si curuae MA, AN fuerint diſſimiles, tempus ſaltem per MAN aequale erit tempori per NAM, ſeu tempora acceſſionum et receſſionum erunt inter ſe aequalia.

Corollarium 7.

154. Quia corpus ſemper ad eandem altitudinem pertinget, manifeſtum eſt hunc motum oſcillatorium perpetuo durare debere.

Corollarium 8.

155. Curua ergo ad motum oſcillatorium producendum apta eſt omnis curua, quae de puncto infimo A duos habet arcus aſcendentes, vt MAN.

Scholion I.

156. Expoſuimus hic proprietates motus oſcillatorii, quales ex expoſita hypotheſi potentiae ſollicitantis vniformis et perpetuo deorſum tendentis conſequuntur. Eaedem vero quoque locum habent, ſi potentia vtcunque ab altitudine pendeat, vel etiam ad fixum punctum dirigatur; id quod in ſequentibus plenius apparebit. In medio reſiſtente vero res aliter ſe habet,

M.E.C.D. 2017

nam neque aſcenſus per datam curuam ſimilis eſt deſcenſui per eandem, neque in aſcenſu corpus ad aequalem altitudinem pertingit ei, ex qua deſcenſu erat delapſum.

Scholion 2.

157. Vocari ſolet motus per MAN itus ſequens vero motus per NAM reditus, conſiſtit ergo motus oſcillatorius ex alternis itibus et reditibus. Oſcillatio vero ab aliis vocatur motus ex itu et reditu conſtans, ab aliis tam itus quam reditus oſcillatio vocatur. Hic priori ſenſu oſcillationis vocem accipiemus, ita vt vna oſcillatio ex vno itu vnoque reditu conſtet. Itus vero atque reditus vterque vno aſcenſu vnoque deſcenſu conſiſtit, atque ideo integra oſcillatio duos aſcenſus duosque deſcenſus complectetur. Cum igitur tempus itus aequale ſit reditus tempori, erit tempus vnius oſcillationis duplo maius quam tempus vnius itus ſeu reditus.

Corollarium 9.

158. In hoc ergo capite, in quo de motu in vacuo agitur, ſi motum oſcillatorium examinare velimus, vel aſcenſus vel deſcenſus ſolos ſuper duabus curuae partibus AM, AN conſiderare opus habebimus.

Scholion 3.

159. Nihil refert vtrum arcus AM et AN vnam curuam continuam conſtituant, an vero ſint diuerſae curuae, dummodo in A ita ſint con-

M.E.C.D. 2017

coniunctae, vt communem habeant tangentem: alias enim motus perturbaretur. Quare ad motum oscillatorium inquirendum tantum opus est, vt motus super curuis AM et AN seorsum definiamus. Sufficit enim hoc tum ad oscillationes determinandas, tum ad relationem inter maiores minoresque oscillationes inueniendam. Vocantur autem eae oscillationes maiores, quae maioribus arcubus absoluuntur, minores vero, quae minoribus.

Scholion 4.

160. Ex Prop. 6. §. 49. perspicitur, quomodo oscillationes ope pendulorum effici queant; scilicet ope euolutae curuaram AM et AN, circum quas filum circumducitur. Ab Hugenio etiam iste pendulorum vsus ad oscillationes accommodatur, vt vel ex eius instituto, quo eo motu ad horologia perficienda vtitur apparet. Eaedem vero difficultates, quas loco cit. commemorauimus, hic locum habent. Quamobrem motum puncti super datis lineis hic tantum inuestigabimus, mentemque ab omnibus pendulorum circumstantiis abducemus, quae nostrum institutum turbare possent.

PROPOSITIO 13.

Problema.

Tabula V. Fig. 3.

161. *Existente potentia sollicitante vniformi et deorsum directa, determinare tempus ascensus seu descensus per quemuis circuli arcum* EA *in puncto circuli infimo* A *terminatum.*

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Sit C circuli centrum, erit CA radius verticalis ſeu parallelus directioni potentiae g. Ponatur $AC = a$, et arcus AE altitudo $AG = b$, erit celeritas in infimo puncto A debita altitudini gb, quia corpus ex E deſcendens tantam habebit celeritatem, cum in A peruenerit. Atque tantam celeritatem corpus in A habere debet, vt ad E vsque aſcendere poſſit. Conſideretur quodvis arcus AE elementum Mm, et dicatur $AP = x$, erit $PM = V(2ax - x^2)$ et $Mm = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Celeritas vero in M erit debita altitudini g. $GP = gb - gx$. (93). Tempus igitur, quo elementum Mm ſiue aſcenſu ſiue deſcenſu percurritur, erit $= \frac{a\,dx}{\sqrt{g\,(b-x)(2ax-x^2)}}$. Quod quia integrari non poteſt per ſeries eius integrale exprimemus. Eſt autem poſito $2a = c$,

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)(2ax-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{bc}}\left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}(b+c)}{2bc} + \frac{x^{\frac{3}{2}}(3b^2+2bc+3c^2)}{8b^2c^2}\right.$$

$$\left. + \frac{x^{\frac{5}{2}}(5b^3+3b^2c+3c^2+5c^3)}{16b^3c^3} + \text{etc.}\right).$$

Hoc ergo per $\frac{a\,dx}{\sqrt{g}}$ multiplicatum et integratum dat tempus, quo arcus AM abſoluitur $= \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{gb}}\left(1 + \frac{x(b+c)}{6bc} + \frac{x^2(3b^2+2bc+3c^2)}{40b^2c^2} + \frac{x^3(5b^3+3b^2c+3bc^2+5c^3)}{112b^3c^3} + \text{etc.}\right)$. Totum vero tempus per arcum EA prodibit, ſi fiat $x = b$, et ratio periſpheriae ad diametrum $= \pi : 1$. quo poſito habebitur, $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi b}{8c} + \frac{9\pi b^2}{128c^2} + \text{etc.}\right)$ $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}\left(1 + \frac{b}{4c} + \frac{9b^2}{64c^2} + \text{etc.}\right)$. Vbi coefficientes

M.E.C.D. 2017

tes 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{64}$ etc. sunt quadrata coefficientium 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ qui prodeunt si $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem resoluitur. Ex hac igitur serie tempus vero proxime potest inueniri. Q. E. I.

Corollarium 1.

162. Quo maior igitur arcus EA est, eo maius quoque erit tempus, quo is percurritur. Fit enim posito $b = 2a = c$, tempus infinitum; quia corpus descensu semicirculum nequaquam describere potest.

Corollarium 2.

163. Si igitur corpus oscillatorio motu mouetur in arcu circuli EAF, erit tempus vnius itus vel reditus duplo maius, quam tempus vnius ascensus vel descensus, quia tempus per ANF aequale est tempori per AMG. Quare vnius itus reditusve tempus, seu tempus dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\left(1+\frac{b}{4c}+\frac{9b^2}{64c^2}+\text{etc.}\right)$. Integra vero oscillatio tempore duplo maiore absoluetur.

Scholion 1.

164. Series haec tempus exprimens statim hoc modo potest inueniri. Temporis elementum in hos factores resoluatur $\frac{adx}{\sqrt{g(bx-xx)}} \times \frac{1}{\sqrt{(2a-x)}}$ horumque posterior tantum in seriem commutetur scilicet hanc $\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1.x}{2.c\sqrt{b}}+\frac{1.3x2}{2.4c^2\sqrt{c}}+$ etc. posito $2a=c$ Quia autem post integrationem fit $x=b$, erit $\int\frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$;

M.E.C.D. 2017

$= \pi$; $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1\pi b}{2}$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1.3.\pi b^2}{2.4}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1.3.5.\pi b^3}{2.4.6}$. etc. Ex quibus totum descensus tempus vt ante colligitur $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{b}{c} + \frac{9}{64}\frac{b^2}{c^2} + \frac{225}{2304}\frac{b^3}{c^3} + \text{etc.}\right)$.

Scholion 2.

165. Quo appareat a cuiusnam aequationis constructione summatio seriei $1 + \frac{1}{4}\frac{b}{c} + \frac{9}{64}\frac{b^2}{c^2} +$ etc. pendeat, pono $\frac{b}{c} = \frac{tt}{1+tt}$ et summam seriei $= e^{\int \frac{qdt}{t}}$ denotante e numerum, cuius log. est $= 1$. His positis ex mea series summandi methodo in Comment. Acad. Petrop. Tom. VII. exposita inuenitur sequens aequatio $dq + \frac{q^2 dt}{t} = \frac{tdt}{(1+tt)^2}$. Ex qua aequatione, si construi posset, inueniretur, q in t, indeque ipsa summa per t seu per $\frac{b}{c}$. Quia autem aequatio constructionem non admittit in se spectata, apparet eam tamen construi posse, quia summa seriei per tempora in circulo ope quadraturarum assignari potest. Data enim summa seriei ex ea constructio aequationis inuentae sequitur.

Corollarium 3.

166. Si arcus AE, in quo descensus vel ascensus absolvitur, ponitur infinite paruus, tempus per eum tamen non fit infinite paruum. Euanescit enim in expressione temporis tantum b. eritque tempus descensus vel ascensus per arcum AE euanescentem $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

167. Iuncta altera circuli parte AF cum AE oscillationes per arcum EAF euanescentem fient infinite paruae, tempore tamen absoluentur finito. Scilicet tempus vnius itus vel reditus seu tempus vnius dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Corollarium 5.

168. Tempora igitur huiusmodi oscillationum infinite paruarum sunt in ratione subduplicata composita ex directa radiorum et reciproca potentiarum sollicitantium.

Corollarium 6.

169. Haec eadem valent, si potentia sollicitans non fuerit vniformis. Nam vtcunque variabilis ponatur, tamen, dum in corpus super arcu infinite paruo motum agit, constantem habebit valorem.

Corollarium 7.

170. Intelligitur, etiamsi curua EAF non fuerit circulus sed curua quaecunque, tum etiam quae hic allata sunt ad oscillationes infinite paruas super hac curua pertinere. Tum vero loco radii *a* radius osculi huius curuae in puncto infimo A est accipiendus.

Corollarium 8.

171. Huiusmodi oscillationes super arcu infinite paruo EAF efficiuntur ope penduli, cuius longitudo est radius AC. Tempora igitur oscil-

M.E.C.D. 2017

lationum infinite paruarum pendulorum ſunt directe vt radix quadrata ex longitudine penduli et reciproce vt radix quadrata ex potentia ſollicitante.

Corollarium 9.

172. Si curua ANF non fuerit aequalis curuae AME pro oſcillationibus infinite paruis radium oſculi in A tantum conſiderare ſufficit. Sit is $= \alpha$ erit tempus aſcenſus per arcum AF infinite paruum $= \frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$ atque cum tempus deſcenſus per arcum AME euaneſcentem ſit $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ erit tempus vnius itus ſeu dimidiae oſcillationis ſuper curua compoſita EAE $= \frac{\pi(\sqrt{a}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{2g}}$.

Corollarium 10.

173. Si oſcillationes non fuerint infinite parvae ſuper circulo BAD, tempora oſcillationum maiora erunt, quo maiores ſint oſcillationum arcus. Atque ſi oſcillationes tamen ſint valde paruae, erit tempus talis oſcillationis ad tempus oſcillationis infinite paruae vt quadruplum diametri circuli ſinu verſo arcus percurſi auctum ad quadruplum diametri ipſum.

Corollarium 11.

174. Altitudo ex qua corpus eodem tempore ab eadem potentia g ſollicitatum deſcendit, quo fit deſcenſus per arcum EMA infinite paruum eſt $= \frac{\pi^2 a}{8}$; ſeu eſt ad octauam radii partem vt quadratum peripheriae circuli ad quadratum dia-

M.E.C.D. 2017

diametri; quam proxime ergo haec altitudo erit $= \frac{5}{4} a$.

Corollarium 12.

175. Super chorda autem arcus EMA corpus descendit tempore eodem, quo per diametrum circuli (102). Quare tempus descensus super chorda infinite parua est ad tempus descensus super arcu respondente vt $\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ ad $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$ i. e. vt diameter ad quartam peripheriae partem. Atque tempus descensus ex diametro seu dupla penduli longitudine est ad tempus vnius integrae oscillationis infinite paruae ex itu et reditu compositae vt diameter ad peripheriam.

Scholion 3.

176. Si duo arcus circulares AE et FA super quibus coniunctis oscillationes peraguntur non sunt aequales, ope penduli hae oscillationes confici possunt, si in centro K arcus AF clauus infigatur, vt filum CA, postquam arcum EA circa centrum C descripsit, in K retineatur et circa centrum K arcum AF describat. Tabula V. Fig. 4.

PROPOSITIO 19.

Problema.

177. *Data potentia sollicitante inuenire longitudinem penduli infinite paruas oscillationes conficientis, quod singulos itus reditusue vno minuto secundo absoluat.*

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Existente a longitudine penduli quaesita et g potentia sollicitante, vnitate vim gravitatis denotante, est tempus vnius dimidiae oscillationis infinite paruae $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Haec vero expressio vt in minutis secundis habeatur, longitudo a in partibus millesimis pedis Rhenani est exprimenda, et formula $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ per 250 diuidenda, vt ex primo Libro apparet. Quamobrem habebitur tempus vnius dimidiae oscillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{250\sqrt{g}}$ minut. sec. Quare, cum hoc tempus vnum minutum secundum esse debeat, erit $\pi\sqrt{2a} = 250\sqrt{g}$, atque $a = \frac{31250g}{\pi^2} = 3166\frac{1}{4}g$. part. mill. pedis Rhen. Haec ergo est longitudo penduli semioscillationes vno minuto secundo absoluentis. Q. E. I.

Corollarium 1.

178. Longitudines ergo pendulorum eodem tempore oscillationes peragentium, sed a diuersis potentiis sollicitatorum, sunt in ipsarum potentiarum ratione.

Corollarium 2.

179. Si potentia sollicitans g aequalis est vi grauitatis 1, qui casus in oscillationes in superficie terrae factas competit, erit penduli longitudo, quod itus reditusque singulos vno minuto secundo absoluit $= 3, 16625$ pedum Rhenan. seu trium pedum cum sexta pedis parte.

M.E.C.D. 2017

Scholion. 1.

180. Apprime conuenit haec longitudo cum ea, quam Hugenius per experimenta invenit; ex quo apparet nos in praecedente libro numerum 15625. ſcrup. ped. Rhen. recte pro altitudine, ex qua corpus vi grauitatis ſollicitatum tempore vnius minuti ſecundi delabitur, aſſumſiſſe; ex hoc enim numero fluit numerus 250, per quem temporum expreſſiones dividi debent, vt minuta ſecunda praebeant. Cum igitur Hugenius longitudinis 3, 166. ped. tertiam partem pro pede vniuerſali haberi velit, quippe cuius longitudo vbique terrarum per obſeruationes poteſt determinari: continebit hic pes vniuerſalis 1055 partes milleſimas pedis Rhenani.

Scholion 2.

181. Obſeruationibus vero hic pes vniuerſalis ſequenti modo commodiſſime determinatur. Sumatur pendulum longitudinis f, quod ad minimas oſcillationes faciendas impellatur, numerenturque eius dimidiae oſcillationes tempore vnius horae, earumque numerus ſit n, ita vt vna ſemioſcillatio abſoluatur tempore $\frac{3600}{n}$ min. ſecund. Sit iam longitudo penduli ſemioſcillationes minutis ſecundis abſoluentis z. Quare cum tempora oſcillationum diuerſorum pendulorum ab eadem potentia ſollicitatorum ſint in ſubduplicata ratione pendulorum (171.); erit $\frac{3600}{n} : 1 = \sqrt{f} : \sqrt{z}$ ideo-

M.E.C.D. 2017

que $z = \frac{n^2 f}{1296\,0000}$ et consequenter pes vniuersalis $= \frac{n^2 f}{3888\,0000}$.

Corollarium 3.

182. Pendulum igitur quadruplo longius quam $3166\frac{1}{4}$ scrup. pedis Rhenani semioscillationes duobus minutis secundis absoluet; quia tempora oscillationum sunt in subduplicata ratione longitudinum pendulorum.

Corollarium 4.

183. Cum semidiameter telluris sit 20382230 ped. Rhen. si tantae longitudinis pendulum concipiatur, durabit eius vna semioscillatio 2536 min. secunda. Quare in horis 24 prope 17 oscillationes integras absoluet.

Corollarium 3.

185. Quia tempus dimidiae oscillationis est $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$, erit tempus integrae oscillationis $\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. At huic tempori aequale est tempus reuolutionis in peripheria circuli radii a a corpore motu libero peractae, quod ad centrum circuli vrgetur vi $= g$, vt ex praeced. Libro apparet. Hanc ob rem tempus vnius oscillationis integrae penduli semidiametro terrae aequalis aequatur tempori, quo corpus proiectum in superficie terrae vnam reuolutionem perageret. Ostendit vero quoque Hugenius corpus hoc modo motum tempore 24 horarum fere 17 reuolutiones esse absoluturum.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

186. Cum vis grauitatis ſit ad vim qua corpus in ſuperficie ſolis ad centrum ſolis vrgetur, vt 1000 ad 41; erit longitudo penduli, quod in ſuperficie ſolis ſemioſcillationes minuto ſecundo abſoluit $=77, 226$ ped. Rhenan. Simili modo ob grauitatem in ſuperficie Iouis $=\frac{127}{82}$, tale pendulum longum erit $6, 448$ ped. Atque in ſuperficie Saturni ob grauitatem $=\frac{105}{82}$ talis penduli longitudo erit $4, 054$ ped.

PROPOSITIO 20.

Problema.

187. *Si fuerit curua* BAD, *ſuper qua fiunt oſcillationes, cyclois circulo diametri* AC *ſuper baſi horizontali* BD *deſcripta; determinare tempus oſcillationis per quemque arcum* EAF, *exiſtente potentia ſollicitante uniformi et deorſum tendente.* Tabula V. Fig. 5.

Solutio.

Sit radius oſculi in A nempe $AO=a$, qui eſt duplum diametri circuli generatoris AC, erit ergo $AC=\frac{1}{2}a$ et poſita abſciſſa $AP=x$, et arcu reſpondente $AM=s$, erit ex natura cycloidis $s^2=2ax$. Sit iam abſciſſa arcui EAE, qui motu oſcillatorio percurritur, reſpondens $AG=b$, erit celeritas in puncto infimo A debita altitudini gb, et celeritas in M debita altitudini $g(b-x)$. Quare cum ſit $ds=\frac{adx}{\sqrt{2ax}}$ erit tempus, quo arcus AM per-

M.E.C.D. 2017

percurritur $= \int \frac{dx\sqrt{2a}}{2\sqrt{g(bx-x^2)}} = \frac{\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$. Est vero si post integrationem ponatus $x = b$, quo tempus per totum arcum AE prodeat, $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi$, seu peripheria circuli per diametrum diuisa. Quare tempus vnius ascensus vel descensus est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$, et tempus vnius itus vel reditus per arcum EAF erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Atque tempus vnius integrae oscillationis erit $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

188. Quia in hanc temporis expressionem littera b, quae quantitatem arcus EAF determinat, non ingreditur, omnium oscillationum tempora, quae super eadem cycloide perficiuntur, sunt inter se aequalia.

Corollarium 2.

189. Tempus ergo vnius cuiusque oscillationis erit aequale tempori oscillationis per arculum infinite paruum. At arculus infinite paruus congruit cum arculo circuli radio OA descripti. Quare tempus cuiusque oscillationis super cycloide BAD aequale erit tempori, quo pendulum longitudinis a oscillationem minimam absoluit. Id quod etiam ex praecedente Propos. elucet, tempus enim minimae oscillationis penduli a est $= \frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ (167.), qua eadem formula tempus vnius oscillationis integrae super cycloide expressum inuenimus.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

190. Si igitur pendulum ita adaptetur, vt corpus oſcillans in cycloide moueatur; omnes eius oſcillationes ſiue fuerint magnae ſiue paruae aequalibus abſoluentur temporibus. Quare ſi AO fuerit $= 3166\frac{1}{4}g$ ſcrup. pedis Rhen. ſingulae ſemi-oſcillationes minuto ſecundo abſoluentur.

Corollarium 4.

191. Omnes igitur deſcenſus ſuper cycloide ad punctum infimum A ſunt aequitemporanei ſeu iſochroni; item omnes aſcenſus ex puncto infimo A donec celeritas fuerit abſumta. Tempus vero vnius aſcenſus vel deſcenſus eſt $\frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

Scholion 1.

192. Propter hanc proprietatem cyclois tautochronae nomine appellari ſolet, quia omnes oſcillationes ſuper ea eodem tempore abſoluuntur. Hugenius primus hanc eximiam cycloidis proprietatem detexit, ſtatimque cogitauit de cycloide in locum circuli ſubſtituenda in oſcillationibus, id quod in horologiis effecit. Nunc tamen horologiorum artifices hunc oſcillandi modum rurſus deſeruerunt, quod eius vſum nimis exiguum comperuerint. Atque certe in vacuo quaelibet curua oſcillationes iſochronas producit, quia perpetuo eiusdem magnitudinis exiſtunt. In medio reſiſtente vero, quo oſcillationes decreſcunt, cy-

M.E.C.D. 2017

clois hanc proprietatem amittit, ideoque nullius eſt vtilitatis.

Scholion 2.

Tabula V. Fig. 2.

193. Intelligitur etiam, ſi duae cycloides AE et AF diſſimiles in punctis infimis iungantur, oſcillationes ſuper curua compoſita EAF aequalibus temporibus abſolui. Nam cum ſuper vtraque tempora aſcenſus vel deſcenſus ſint conſtantis quantitatis, etiam ſummae eorum nempe tempora ſemioſcillationum et integrarum oſcillationum inter ſe erunt aequalia. Sit duplum diametri circuli generantis cycloidem $AF = \alpha$ erit tempus vnius aſcenſus vel deſcenſus ſuper $AF = \frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2\sqrt{g}}$. Quare itus reditusve ſuper curva compoſita EAF abſoluetur tempore $= \frac{\pi(\sqrt{2a}+\sqrt{2\alpha})}{2\sqrt{g}}$; integra vero oſcillatio tempore $\frac{2\pi(\sqrt{a}+\sqrt{\alpha})}{\sqrt{g}}$.

Scholion 3.

194. Ordo requireret, vt antequam ad alias potentiae ſollicitantis directiones progrediamur, effectus potentiae, cuius directiones ſint adhuc parallelae, ſed variabiles euolueremus, motumque corporis a huiusmodi potentia ſollicitati ſuper data curua inueſtigaremus. Sed cum exempla notatu dignum continentia nobis adhuc latent, atque principia, quorum ope motus ſuper quaque curua cognoſcitur, iam ſint expoſita, pleniorem tractationem eo differemus, vbi curuas

ſumus

M.E.C.D. 2017

ſumus inueſtigaturi, ſuper quibus corpus a huiusmodi potentiis ſollicitatum, data lege incedat.

PROPOSITIO 21.

Problema

196. *Si corpus perpetuo vi quacunque ad centrum fixum* C *trahatur, atque ſuper data curua* AM *moueatur; determinare motum corporis ſuper hac linea, et preſſionem, quam curua in ſingulis punctis ſuſtinet.* Tabuia V. Fig. 6.

Solutio.

Sit corporis celeritas initialis in A debita altitudini b, et puncti A a centro C diſtantia AC $=a$. Celeritas vero corporis in quocunque curuae loco M debita ſit altitudini v, et vis, qua corpus in M verſus C ſollicitatur ſit $=$ P, exiſtente vi grauitatis corporis moti $=1$. Dicatur diſtantia MC, y, et arcus AM, s; erit elementum $Mm=ds$ et $Mn=-dy$. Centro C deſcribantur arcus circulares MP, mp; erit $AP=a-y$, $Pp=Mn=-dy$. Iam ducta tangente MT in eamque perpendiculo CT, erit $MC:MT=Mm:Mn$; et $MC:CT=Mm:mn$, vnde erit $MT=\frac{-ydy}{ds}$ et $CT=\frac{y\sqrt{(ds^2-dy^2)}}{ds}$. Ex quibus, ſi vis centripeta in tangentialem ſecundum MT et normalem ſecundum MO reſolvatur, erit vis tangentialis $=-\frac{Pdy}{ds}$ et normalis $=\frac{P\sqrt{(ds^2-dy^2)}}{ds}$. Ex vi tangentiali ergo habebitur $dv=-Pdy$. Ponatur interuallum AP $=x$,

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$=x$, quo corpus propius ad centrum acceſſit, erit $a-y=x$ et $dx=-dy$. Quare erit $dv=Pdx$, et ſi P a diſtantia MC pendeat, poterit $\int Pdx$ exhiberi. Ita igitur integrali $\int Pdx$ accepto, vt euaneſcat poſito $x=o$, erit $v=b+\int Pdx$. Ex quo tempus per arcum AM erit $=\int\frac{ds}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$. Vis normalis $\frac{P\sqrt{(ds^2-dy^2)}}{ds}$ tota in preſſione curuae ſecundum MO inſumitur. Quo igitur haec commodius exponatur et cum vi centrifuga ſimul exhibeatur, pono perpendiculum $CT=p$, erit vis normalis $=\frac{Pp}{y}$. Deinde radius oſculi MO erit $=\frac{ydy}{dp}$, ex quo habetur vis centrifuga $=\frac{2vdp}{ydy}=\frac{2dp(b+\int Pdx)}{ydy}$, cuius effectus effectui vis normalis eſt contrarius. Quamobrem curua in M verſus MO premetur vi $=\frac{Ppdy-2bdp-2dp\int Pdx}{ydy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

196. Si igitur vis P a diſtantia y tantum pendeat, ita vt corpus in aequalibus a centro diſtantiis aequaliter vrgeatur, celeritas corporis a diſtantia quoque tantum pendebit, atque corpus ſuper curua AM motum in aequalibus a centro diſtantiis aequales habebit celeritates.

Corollarium 2.

197. Atque in quouis puncto M celeritas tanta erit, quantam idem corpus acquireret, ſi eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ ex A per interual-

lum

BIBLIOTECA
DEL
REAL OBSERVATORIO DE LA MARINA

M.E.C.D. 2017

lum AP descenderet, existente nimirum CP = CM.

Corollarium 3.

198. Etiamsi igitur ipsa curua AM sit incognita; tamen corporis super ea moti in quaque a centro C distantia celeritas potest assignari. Est nempe pro distantia y, $v = b + \int P dx$, existente $x = a - y$.

Corollarium 4.

199. *Si* curua AM fuerit talis, vt pressio, quam corpus in eam exercet, sit nulla, erit curua ea ipsa, quam corpus motum in A celeritate Vb inchoans libere describeret. Erit itaque pro motu libero $Pp\,dy = 2bdp + 2dp\int P dx$. seu ob $dx = -dy$, habebitur $Pp\,dy + 2\,dp\int P\,dy = 2b\,dp$. Cuius integralis est $p^2\int P\,dy = bp^2 - bh^2$ existente h perpendiculo ex C in tangentem in A demisso. Ex his aequationibus invenitur $P = \frac{2bh^2dp}{p^3dy}$ uti praeced. Libro pro motu libero inuenimus.

Corollarium 5.

200. In motu igitur super quaecunque curua AM, pressio, quam curua in M secundum MO sustinet, est $= \frac{-\text{diff. } p^2(b+\int P dx)}{pydy} = \frac{\text{diff. } p^2(b+\int P dx)}{pdx(a-x)} = \frac{\text{diff. } p^2 v}{Pdx(a-x)}$.

Exemplum 1.

201. Sit curua AM circulus centrum in C habens; erit motus corporis vniformis, propter

M.E.C.D. 2017

eandem eius perpetuo a centro virium C distantiam. Quare erit $v = b$ et $\int P\,dx = o$, atque tempus per $AM = \frac{s}{\sqrt{b}} = \frac{AM}{\sqrt{b}}$. Deinde cum sit $y = a$ erit et $p = a$ et $dp = dy$. Quamobrem pressio, quam curua secundum MO seu versus centrum C sustinet, prodibit $= P - \frac{2b}{a}$. Ex quo perspicitur, si fuerit $b = \frac{Pa}{2}$ corpus libere per hunc circulum motum iri.

Exemplum 2.

202. Sit vis centripeta P potestati cuicunque distantiarum y proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$ et curua AM spiralis logarithmica circa centrum C, ita vt sit $p = my$, et $dp = m\,dy$, atque $ds = \frac{dy}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Erit ergo $v = b + \int \frac{y^n dx}{f^n} = \frac{a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1)bf^n}{(n+1)f^n}$ atque tempus per arcum $AM = \frac{\sqrt{(n+1)}\,f^n}{\sqrt{(1-m^2)}} \int \frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1} - y^{n+1} + (n+1)bf^n)}}$. Pressio vero, quam curua secundum MO sustinet, erit $= \frac{m(n+3)\,y^n}{(n+1)f^n} - \frac{2mb}{y} - \frac{2m\,a^{n+1}}{(n+1)f^n y}$.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

203. Corpus igitur cum in centrum C pervenerit, celeritatem habebit finitam, si $n+1$ est numerus affirmatiuus, altitudo enim isti celeritati debita est $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}+b$. At si $n+1$ est numerus negatiuus vel etiam $=0$ celeritas corporis in C erit infinite magna.

Corollarium 7.

204. In ipso vero centro corpus vi infinita premetur directione a centro tendente, seu vis centrifuga praeualebit, si fuerit $n>-3$. At si $n<-3$, tunc vis normalis praevalebit, atque curua vi infinita versus centrum premetur.

PROPOSITIO 22.

Problema.

205. *Si corpus perpetuo vi centripeta ad centrum virium* C *trahatur, dataque sit curua* EAF *ad oscillandum idonea, determinare motum oscillatorium corporis super hac curua.* Tabula VI. Fig. 1.

Solutio.

Sit vis centripeta functioni cuicunque distantiarum a centro C proportionalis; erit celeritas corporis in aequalibus a centro C distantiis, vt M et N, eadem. In E vero et F celeritas corporis sit nulla, maxima vero erit in puncto cur-

M.E.C.D. 2017

curuae A centro C proximo, ducaturque recta CAO. Corpus ergo per arcum EAF oscillationes absoluet, ad quas definiendas motum corporis super vtraque curua AE et AF inuestigare sufficit. Sit celeritas corporis maxima, quam habet in A debita altitudini b, et celeritas in quocunque puncto M debita altitudini v. Ponatur distantia CM, cui aequalis sit CP, $=y$, et vis centripeta in M $=$ P. Sit CA $=a$ et AP $=x$, atque AG $=k$, sumta CG $=$ CE, erit $y=a+x$ et CG $=$ CE $=a+k$. Posito arcu AM $=s$, erit tangens MC, quam perpendiculum ex C in eam demissum determinat $=\frac{ydy}{ds}$, ideoque vis tangentialis $=\frac{Pdy}{ds}$, quae motui corporis crescente y est contraria: vnde habebitur $dv=-Pdy=-Pdx$ et $v=b-\int Pdx$; integrali $\int Pdx$ ita accepto, vt euanescat posito $x=o$. Si igitur ponatur $v=o$, dabit ex aequatione $b=\int Pdx$ valor ipsius x erutus interuallum AG seu k. Tempus ergo, quo arcus AM percurritur, est $=\int \frac{ds}{\sqrt{(b-\int Pdx)}}$, ex quo tempus per totum arcum AE prodibit, si post integrationem ita institutam, vt integrale euanescat posito $x=k$, seu $\int Pdx=b$. Simili modo tempus per arcum AF inuenietur, quo igitur inuento summa horum temporum dabit tempus vnius semioscillationis. Q. E. I.

Corollarium 1.

206. Si curua AF similis et aequalis fuerit curuae AE tempora per vtramque erunt aequalia,

M.E.C.D. 2017

lia, atque ideo tempus vnius ſemioſcillationis aequabitur duplo tempori per AE.

Exemplum I.

207. Si arcus EAF fuerit infinite paruus, potentia ſollicitans P ob diſtantiam a centro E inuariabilem, erit conſtans $= g$. Sit radius oſculi curuae in A ſeu $AO = h$, erit AE arcus circuli hoc radio deſcriptus. At ex natura circuli erit $CT = \frac{a^2+2ah-y^2}{2h}$ et $MT = \frac{\sqrt{(4h^2y^2-a^4-4a^3h-4a^2h^2+2a^2y^2+4ahy^2-y^4)}}{2h}$. Sed ob $y = a+x$ et x reſpectu a et h infinite paruum erit $MT = \frac{\sqrt{2ahx(a+h)}}{h}$ et $ds = \frac{hydy}{\sqrt{2ahx(a+h)}} = \frac{h(a+x)dx}{\sqrt{2agx(a+k)}} = \frac{dx\sqrt{ah}}{\sqrt{2(a+h)x}}$. At cum ſit $v = b - gx$, ideoque $b = gk$; habebimus $v = g(k-x)$ atque elementum temporis $= \frac{dx\sqrt{ah}}{\sqrt{2g(a+h)(kx-x^2)}}$. At $\int \frac{dx}{\sqrt{(kx-x^2)}}$ poſito $x = k$ fit $= \pi$ peripheriae circuli exiſtente diametro 1. Conſequenter tempus per arcum AE infinite paruum eſt $= \frac{\pi\sqrt{ah}}{\sqrt{2g(a+h)}} = \frac{\pi\sqrt{2ah}}{2\sqrt{g(a+h)}}$.

Corollarium 2.

208. Si centrum virium infinite diſtet, vt eſſet $a = \infty$ erit potentiae directio ſibi parallela, ideoque vt ſupra erit tempus, quo arcus AE abſoluitur $= \frac{\pi\sqrt{2h}}{2\sqrt{g}}$. At ſi arcus circuli EA fit linea recta, ſeu $h = \infty$, erit tempus per $EA = \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}}$.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

209. Si ergo hic casus comparetur cum oscillationibus penduli a potentia g quoque sed directiones sibi parallelas habente sollicitati, erit penduli isochroni longitudo $= \frac{ab}{a+b}$. Tempus enim vnius descensus seu ascensus huius penduli est $= \frac{\pi\sqrt{2ab}}{2\sqrt{g(a+b)}}$ (166.).

Exemplum 2.

Tabula VI. Fig. 4.

210. Sit iam vis centripeta potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{y^n}{f^n}$, et linea EF recta. Erit $AM = s = \sqrt{(y^2 - a^2)}$ et $x = y - a$. Erit autem porro $x = b - \int \frac{y^n dy}{f^n} = b + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$; positoque $v = 0$ fiet $y^{n+1} = a^{n+1} + (n+1) bf^n = (a+k)^{n+1}$. Vel dicta $CE = c$ erit $b = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1) f^n}$, et $v = \frac{c^{n+1} - y^{n+1}}{(n+1) f^n}$

Consequenter ob $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$ habebitur tempus per $AM = \int \frac{ydy\sqrt{(n+1) f^n}}{\sqrt{(y^2 - a^2)(c^{n+1} - y^{n+1})}}$. Quod integrale ita est accipiendum, vt fiat $= 0$ posito $y = a$. Tumque facto $y = c$ habebitur tempus per lineam EA. Semioscillatio vero seu motus per EAF aequabitur duplo huius temporis.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

211. Ponatur vis centripeta distantiis proportionalis seu $n = 1$ erit tempus per AM $= \int \frac{y dy \sqrt{2f}}{\sqrt{(y^2-a^2)(c^2-y^2)}}$ seu posito AE $= i$ ob $e^2 = a^2 + i^2$ et $y^2 = a^2 + s^2$ erit tempus per AM $= \int \frac{ds\sqrt{2f}}{\sqrt{(i^2-s^2)}}$, vnde tempus per AE erit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$. Omnes igitur oscillationes super hac recta absoluuntur eodem tempore, dimidia nimirum oscillatio tempore $\pi\sqrt{2f}$ conficietur.

Corollarium 5.

212 Si oscillatio est infinite parua, tempus vnius semioscillationis super recta erit quoque $\pi\sqrt{2f}$, at cum vis centripeta tum vt constans considerari possit, sit ea $= g$, erit $\frac{a}{f} = g$, ideoque tempus vnius semioscillationis $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$ vt supra §. 208.

Corollarium 6.

213. Quia directiones grauitatis reuera convergunt ad centrum terrae, corpus in superficie telluris super recta perfecte horizontali oscillationes peragere posset, nisi resistentia et frictiones impedirent. Tempus autem vnius semioscillationis talis foret (ob $a =$ semid. terrae et $g = 1$) 2537. minut. secund. (183.)

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 23.

Problema.

Tabula VI. Fig. 3.

214. *Si corpus ſollicitetur a duabus quibuscunque potentiis, quarum alterius directio ſit verticalis* MQ, *alterius borizontalis* MP: *definire motum corporis ab iſtis viribus ſollicitati ſuper data curua* AMB.

Solutio.

Sit celeritas in B nulla, in M debita altitudini v. Vis ſollicitans ſecundum MQ ſit $=$P, et ea ſecundum MP $=$Q. Ponatur BR $=t$, RM $=z$, arcus BM $=w$, quas litteras ad deſcenſum corporis ex quiete ex B adhibebimus. At pro aſcenſu ex A quacunque cum celeritate initiali, qui motus ad oſcillationes referetur, ſit AP $=x$ $=$QM; PM $=$AQ $=y$ et arcus AM $=s$, celeritas vero corporis in A debita ſit altitudini b; erit ergo $t+x=$ conſt. item $z+y=$ conſt. et $w+z=$ conſt. vnde $dt+dx=o$ et $dw+dz=o$. Reſolutis potentiis P et Q in normales et tangentiales, erit vis tangentialis ex P orta $=\frac{Pdt}{dw}$ et vis normalis ex P orta $=\frac{Pdz}{dw}$ trahens ſecundum MN. Deinde erit vis tangentialis ex Q orta $=\frac{Qdz}{dw}$ et normalis ex Q $=\frac{Qdt}{dw}$ quae illi normali eſt contraria. Vtraque vis tangentialis motum per BM accelerat, ideoque erit $dv=Pdt+Qdz$, et $v=\int Pdt+\int Qdz$ his integralibus ita

ac-

M.E.C.D. 2017

acceptis, vt euaneſcant factis t et $z = o$. Atque pro aſcenſu ex A erit $v = b - \int P dx - \int Q dy$, his integralibus ita ſumtis, vt euaneſcant poſitis x et $y = o$. Poſitis igitur in illa aequatione $v = \int P dt + \int Q dz$, $t =$ BD et $z =$ AD fiet $v = b$. Quare tempus per BM erit $= \int \frac{dw}{\sqrt{(\int P dt + \int Q dz)}}$ et tempus per AM $= \int \frac{ds}{\sqrt{(b - \int P dx - \int Q dy)}}$. Sumto elemento dt vel dx conſtante erit radius oſculi curuae in M $= \frac{dw^3}{dt\, ddz}$, atque vis centrifuga cuius directio ſecundum MN eſt $= \frac{2\, dt\, ddz (\int P dt + \int Q dz)}{dw^3}$. Totalis ergo vis, qua curua in M ſecundum MN premitur eſt $= \frac{P dz - Q dt}{dw} + \frac{2 dt\, ddz}{dw^3} (\int P dt + \int Q dz)$. Q E. I.

Corollarium 1.

215. Si P eſt functio ipſius x vel t, quaecunque, et Q functio ipſius y vel z quaecunque, tam $P dx$ quam $Q dy$ integrari poterunt; atque ideo celeritas v poterit exhiberi, et ope aequationis pro curua tempus quoque.

Corollarium 2.

216. Quia quaecunque et quotcunque potentiae ſollicitantes, ſi modo earum directiones ſint in eo plano, in quo eſt curua AMB, in huiusmodi duas potentias poſſunt reſolui, haec propoſitio latiſſime patet et omnes caſus complectitur, quibus potentiarum directiones et curua ſunt in eodem plano.

M.E.C.D. 2017

Scholion.

217. Patet etiam haec propoſitio latius, ſi pauca adiiciantur, et comprehendit caſus, quibus non omnes potentiarum directiones ſunt in plano curuae. Tum enim hae potentiae in binas ſunt reſoluendae, quarum alterae ſint in ipſo curuae plano, alterae ad hoc planum normales. Illae igitur in plano curuae ſitae eodem modo, quo in propoſitione vſi ſumus, tractatae dabunt accelerationem corporis et preſſionem ſecundum MN: alterae potentiae, quia normales ſunt in curuam, in curua premenda tantum inſumentur. Quare hinc duplex naſcetur preſſio, quam curua ſuſtinet, altera ſecundum MN directa, altera ad planum curuae normalis. Harum igitur duarum preſſionum, ſi media ſumatur directio prodibit directio potentiae aequipollentis, in qua curua premitur. Quamobrem non eſt opus, vt huiusmodi caſus euoluamus, ſed paucis attingemus motum corporum ſuper curua, quae ipſa non eſt in plano ſita, vbi potentiam ſollicitantem conſtantem et deorſum tendentem ponemus.

PROPOSITIO 24.

Problema.

Tabula VI. Fig. 4.

218. *Exiſtente potentia ſollicitante vniformi, eiusque directione recta deorſum tendente, determinare motum corporis ſuper curua quacunque* A M *non in eodem plano conſtituta.*

So-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Sit curua AQ proiectio curuae AM in plano horizontali, demiſſisque ex punctis quibusque proximis M et m in hoc planum perpendiculis MQ et mq, ducantur ad axem pro lubitu aſſumtum AP normales QP et qp; ponanturque $AP = x$, $PQ = y$, et $QM = z$. Sit corporis celeritas in A debita altitudini b, celeritas in M debita altitudini v. Potentia vero ſit $= g$, qua corpus in M ſecundum MQ ſollicitatur. Ducta tangente MT, et in eam ex Q perpendiculari QT, reſoluatur potentia g in tangentialem et normalem. Erit ob MQ: $MT = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : dz$ vis tangentialis $\frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Atque ob MQ: $QT = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ vis normalis $= \frac{g\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Quia autem vis tangentialis motum retardat erit $dv = -g\,dz$ et $v = b - gz$, vnde tempus, quo arcus AM abſoluetur, prodit $= \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{(b-gz)}}$. Vis normalis vero efficiet, vt curua in M a corpore tanta vi prematur iuxta directionem ad Mm normalem et in plano $QMmq$ ſitam. Premitur vero curua praeterea a vi centrifuga ſecundum directionem poſitioni radii oſculi oppoſitam vi $= \frac{2(b-gz)}{r}$, deſignante r radium oſculi curuae in M. Inuenimus autem ſupra §. 71. poſitionem radii oſculi, ex qua proinde directio vis centrifugae innoteſcit. Quantitas vero vis centrifugae dabitur ex radio oſculi, qui §. 72. eſt inuentus; eſt nempe $r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy)^2 + ddz^2) + (dy\,ddz - dz\,ddy)^2}}$. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

219. Celeritas igitur corporis hoc quoque casu ab altitudine tantum pendet. Atque celeritas in M tanta est, quantam corpus per QM ascendens cum celeritate in Q altitudini b debita in M haberet.

Corollarium 2.

220. Non poterit ergo corpus ad maiorem altitudinem ascendere, quam ad $\frac{b}{g}$. Nam si est $b - gz = o$, corpus in ea altitudine omnem celeritatem amisit, iterumque descendet.

Corollarium 3.

221. Intelligitur etiam, si potentia non constans fuisset accepta, sed variabilis P; tum inuentam fuisse celeritatem in M debitam altitudini $b - \int P\,dz$.

Scholion 1.

Tabula VI. Fig. 5.

222. Si in plano verticali concipiatur curua AM ad axem horizontalem AQ relata; fueritque AQ = curuae AQ praec. Fig. et QM = QM praec. Fig. erit quoque curua AM aequalis curuae AM praec. Fig. Si iam corpus super curua AM ascendat celeritate initiali in A debita altitudini b, et ab eadem potentia g sollicitatum, habebit in M quoque celeritatem altitudini $b - gz$ debitam. Atque ideo tempus quoque ascensus per AM congruet cum tempore ascensus per AM in praeced. Fig. Hac igitur ratione motus corporis super curua non in eodem plano sita reduci potest ad motum super

curua

M.E.C.D. 2017

curua in eodem plano posita. Inter motus enim ipsos nullum erit discrimen; at pressiones, quas hae duae curuae sufferunt, erunt diuersae. Quamobrem hoc modo pressio vt libet poterit variari manente motu corporis super curua eodem.

Scholion 2.

223. Posuimus hactenus curuam, super qua corpus mouetur, et potentiam sollicitantem vna cum directione datas, ex iisque motum corporis et pressionem curuae deduximus. Nunc igitur cum haec sufficere possint, ad alias quaestiones progrediemur, in quibus alia pro datis accipiuntur, reliquaque sunt inuenienda. Et primo quidem data sit pressio in singulis curuae punctis et potentia sollicitans; ex quibus ipsa curua et motus super ea debeat inueniri. Deinde aliis factis combinationibus inter eas res, quae in computum veniunt, alias quaestiones formabimus.

PROPOSITIO 25.

Problema.

224. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorsum trahatur; inuenire curuam* A M, *quam corpus super ea descendens vbique aequaliter premit.* Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Sit AM curua quaesita, dicatur super axe verticali abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et curua $AM = s$. Sit porro vis corpus in M sollicitans $= P$; et altitudo debita celeritati in $A = b$;

M.E.C.D. 2017

erit altitudo debita celeritati in $M = b + \int P dx$, integrali $\int P dx$ ita sumto, vt euanescat facto $x = 0$. His positis erit pressio, quam curua secundum normalem MN sustinet (§ 3) $= \frac{P dy}{ds} + \frac{2(b + \int P dx) dx\, ddy}{ds^3}$, sumto elemento dx pro constante. Iam cum haec pressio debeat esse constans, ponatur ea $= k$, erit $k ds^3 = P ds^2 dy + 2b dx ddy + 2 dx ddy \int P dx$. At si ponatur ds constans, habebitur $k ds\, dx = P dx\, dy + 2b ddy + 2 ddy \int P dx$, cuius integralis est $\frac{2 dy \sqrt{(b + \int P dx)}}{ds} = \int \frac{k dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$. Quae aequatio cum P per x detur, construi potest; quia y in eam non ingreditur sed tantum dy. Q. E. I.

Corollarium 1.

225. Exprimit $\int \frac{dx}{\sqrt{(b + \int P dx)}}$ tempus, quo corpus ex A celeritate initiali eadem, qua per AM mouetur, per altitudinem AP delabitur, et $\sqrt{(b + \int P dx}$ dat celeritatem in eodem loco. Quare celeritas haec in P per tempus per AP diuisa, dat $\frac{k ds}{2 dy}$, ex qua proprietate curua AM determinatur.

Corollarium 2.

226. Tempus autem per AP quantitate constante quacunque puta $\sqrt{c}$ potest augeri. Hacque quantitate constante angulus, quem curua in A cum AP constituit, determinatur. Erit scilicet sinus huius anguli $= \frac{k\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}$ posito sinu toto $= 1$. Quare $\sqrt{c}$ maior non potest accipi quam $\frac{2\sqrt{b}}{k}$; ideo-

quo

M.E.C.D. 2017

que si motus in A a quiete incipit c debet esse $=0$.

Exemplum.

227. Sit potentia vniformis seu $P=g$, erit $\int\frac{kdx}{\sqrt{(b+gx)}}=\frac{2k\sqrt{(b+gx)}-2k\sqrt{b}+2k\sqrt{c}}{g}=\frac{2dy\sqrt{(b+gx)}}{ds}$, vnde habetur $\frac{dy}{ds}=\frac{k}{g}+\frac{k(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{g\sqrt{(b+gx)}}$ atque $gdy\sqrt{(b+gx)}=kds\sqrt{(b+gx)}+kds(\sqrt{c}-\sqrt{b})$. Ex qua orietur sequens aequatio $dy=\frac{kdx(\sqrt{(b+gx)}+\sqrt{c}-\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)-k^2(\sqrt{(b+gx)}+\sqrt{c}-\sqrt{b})^2)}}$. Sit $\sqrt{(b+gx)}=t$ et $-\sqrt{c}+\sqrt{b}=h$, erit $x=\frac{t^2-b}{g}$ et $dx=\frac{2tdt}{g}$. His igitur substitutio habebitur $dy=\frac{2ktdt(t-h}{g\sqrt{(g^2t^2-k^2t^2+2k^2ht-k^2h^2)}}$. Haec aequatio tribus casibus integrationem admittit, quorum primus est, si $k=0$, tum enim inuenitur curua, quam corpus in A proiectum libere describit. Alter est casus, quando $h=0$, seu $\sqrt{b}=\sqrt{c}$, tum enim habetur $\frac{dy}{ds}=\frac{k}{g}$, seu linea satisfaciens erit recta inclinata. Si tertio $k=g$, seu si tota pressio aequatur vbique vi sollicitanti corpus g; erit $dy=\frac{2tt\,dt-2bt\,dt}{g\sqrt{(2bt-b^2)}}$, cuius integralis est $gy=\frac{(2tt-2bt-2b^2)}{5b}\sqrt{(2bt-b^2)}+$ const. Constans haec, quia posito $x=0$ seu $t=\sqrt{b}$, fit $y=0$, debet esse $=\frac{(2b^2+2b\sqrt{b}-2b)}{5b}\sqrt{(2b\sqrt{b}-b^2)}$. Restituto ergo $\sqrt{(b+gx)}$ loco t et posito $\sqrt{b}-\sqrt{c}=h=\sqrt{a}$ habebitur $\frac{5gy\sqrt{a}}{2}=(b+gx-a\cdot\sqrt{a}(b+gx)\sqrt{(2\sqrt{a}(b+gx)-a)}+(a-b+\sqrt{ab})\sqrt{(2\sqrt{ab}-a)}$. Quae est aequatio pro curua quaesita, in qua a debet esse numerus

M.E.C.D. 2017

minor quam b. Si corpus ex quiete cadere debet, alia linea praeter rectam non satisfacit. Debet enim esse $c=0$, vt angulus ad A sit realis, et propterea habetur $y=\frac{kx}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$.

Corollarium 3.

228. Aequatio algebraica inuenta, si ab irrationalitate liberetur, fit ordinis quinti. Si in ea ponatur $a=b$, quo casu curuae tangens in A est verticalis; prodibit $\frac{5gy\sqrt{a}}{2}=(gx-\sqrt{(a^2+gax)})\sqrt{(2\sqrt{(a^2+gax)}-a)}+a\sqrt{a}$.

Corollarium 4.

229. Si generaliter tangens in A debeat esse verticalis, erit $\sqrt{c}=0$, atque ideo prodibit ista aequatio $dy=\frac{kdx(\sqrt{(b+gx)}-\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)-k^2(\sqrt{(b+gx)}-\sqrt{b})^2)}}$. Si tangens in A ponatur horizontalis erit $k\sqrt{c}=g\sqrt{b}$ habeturque haec aequatio $dy=\frac{dx(k\sqrt{(b+gx)}+(g-k)\sqrt{b})}{\sqrt{(g^2(b+gx)x(k\sqrt{(b+gx)}+(g-k)\sqrt{b})^2)}}$

Scholion.

230. Vocatur haec curua linea aequabilis pressionis, eiusque solutio extat in Comment. Acad. Paris. quae cum hac nostra egregie conuenit. Ceterum ex solutione constat, si potentia non fuerit constans, sed vtcunque variabilis P, aequationem inuentam nihilominus integrationem admittere, si pressio in curuam ipsi P debeat esse proportionalis, Erit enim $k=mP$ atque pro curua quaesita prodibit

M.E.C.D. 2017

dibit ſequens aequatio $\frac{2dy\sqrt{(b+\int Pdx)}}{ds} = \int \frac{mPdx}{\sqrt{(b+\int Pdx)}}$, cuius integralis eſt $dy\sqrt{(b+\int Pdx)} = mds\sqrt{(b+\int Pdx)} + mds\sqrt{c}$. Haec aequatio, ſi fuerit $c=o$ erit pro linea recta ad horizontem inclinata. At per $\sqrt{c}$ definitur angulus, quem curua in A cum verticali conſtituit, eius enim ſinus eſt $m + \frac{m\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Quare ſi ſumatur $\sqrt{c} = -\sqrt{b}$ curua tanget in A verticalem. Praeterea haec curua hanc habet proprietatem, vt tempus, quo arcus AM percurritur proportionale ſit m. AM − PM. Denique ex ſolutione huius propoſitionis fluit ſolutio ſequentis, in qua ex data curua et preſſione aequabili quaeritur quantitas potentiae deorſum tendentis.

PROPOSITIO 26.

Problema.

Tabula VII. Fig. I.

231. *Data curua* AM *et celeritate initiali in* A *debita altitudini* b, *inuenire quantitatem potentiae perpetuo deorſum tendentis, quae faciat, vt corpus ſuper curua* AM *deſcendens curuam vbique aequaliter premat.*

Solutio.

Sit potentia ſollicitans quaeſita $=P$, dictisque AP$=x$, PM$=y$, et AM$=s$, atque preſſione, quam curua ſuſtinet $=k$; habebitur iſta aequatio $kds\,dx = Pdx\,dy + 2bddy + 2ddy\int Pdx$ (224) in qua ds eſt elementum conſtans. Ex hac igitur aequatione quantitatem P erui oportet. Aequatio autem

M.E.C.D. 2017

per dy multiplicata et integrata dat $kds\int dx\,dy = dy^2\int P dx + bdy^2$, ex qua prodit $\int P dx + b = \frac{kds}{dy}\int dx\,dy$; quae differentiata dat $P = \frac{kds}{dy} - \frac{2kds\,ddy}{dx\,dy^3}$ $\int dx\,dy$. At integrale $\int dx\,dy$ ita eſt ſumendum, vt poſito $x=o$ fiat $\frac{k\,ds}{dy^2}\int dx\,dy = b$. Quo autem haec integratio facilius ſuccedat, ponatur $dy = pdx$ erit $ds = dx\sqrt{(1+p^2)}$, et $\int dx\,dy = ds\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$, ideoque $\frac{k\,ds}{dy^2}\int dx\,dy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex qua aequatione prodibit $P = \frac{k\sqrt{(1+pp)}}{p} - \frac{2k\,dp}{p^3\,dx}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Q.E.I.

Corollarium 1.

232. Ex hac aequatione quoque ſtatim celeritas corporis in ſingulis punctis habetur; altitudo enim debita celeritati corporis in M eſt $b + \int P dx = \frac{kds}{dy^2}\int dx\,dy = \frac{k(1+pp)}{p^2}\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. Tempus vero, quo arcus AM abſoluitur, eſt $= \frac{1}{\sqrt{k}}\int pdx : \sqrt{\int\frac{pdx}{\sqrt{(1+p^2)}}}$.

Corollarium 2.

233. Perſpicuum eſt ex aequatione inuenta, quantitatem potentiae P eo fore maiorem, quo maior ſit k, ceteris paribus; variabilis enim eius valor ductus eſt in preſſionem k.

Corollarium 3.

234. Etſi vero non videatur potentia P a celeritate initiali b pendere, quia in expreſſione b non

M.E.C.D. 2017

b non ineſt, tamen pendet P ab b ob integrale $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$, quod ita eſt accipiendum, vt poſito $x = 0$, fiat $\frac{k(1+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = b$. Variata ergo celeritate initiali alia prodit potentia ſollicitans, tametſi curua propoſita eadem maneat.

Exemplum 1.

235. Sit curua AM parabola in A verticem et axem horizontalem habens; ita vt ſit $ay = x^2$. Erit ergo $dy = \frac{2xdx}{a}$, hincque $p = \frac{2x}{a}$, et $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{2xdx}{\sqrt{(a^2+4x^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2+4x^2)} + C$. Quare erit $\frac{k(2+pp)}{p^2} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{8x^2} + \frac{kC(a^2+4x^2)}{4x^2}$. Quae quantitas cum debeat eſſe $= b$, ſi fit $x = 0$, erit $C = -\frac{a}{2}$, ſeu $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\sqrt{(a^2+4x^2)}-a}{2}$. Ex quibus inuenietur $P = \frac{k a^3}{4x^3} - \frac{k(a^2-2x^2)\sqrt{(a^2+4x^2)}}{4x^3}$. In ipſo ergo puncto A potentia P erit infinite parua, tam numerator enim, quam denominator euaneſcunt, fitque valor iſtius expreſſionis $= 0$. Celeritas vero in A non poteſt eſſe arbitraria, etiam ſi conſtans C videatur ex b determinata. Nam C talem tantum habet valorem, qui expreſſionem $b + \int P dx = \frac{k\,ds}{dy^2}$ $\int dx\,dy$ reddat finitae magnitudinis. Pendebit ergo b ab a eiusque valor inuenietur, ſi in expreſſione $\frac{k(a^2+4x^2)^{\frac{3}{2}} - ka(b^2+4x^2)}{8x^2}$, ponatur $x = 0$. Tum autem prodibit $b = \frac{ka}{4}$. Hac ergo celeritate deſcen-

ſus

M.E.C.D. 2017

ſus incipere debet, vt preſſio vbique aequalis a potentia P inuenta oriatur.

Exemplum 2.

236. Sit curua AM circulus radii a tangens rectam AP in A, erit $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$ et $p = \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ atque $\sqrt{(1+pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Fiet ergo $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{xdx}{a} = \frac{x^2}{2a}$, ad quod conſtantem addere non licet, quia $\frac{1+pp}{pp} = \frac{a^2}{x^2}$ fit infinitum euaneſcente x. Erit ergo $k\frac{(1+pp)}{pp} \int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{ka}{2} = b + \int pdx$, quare celeritas corporis erit vniformis, ideoque potentia ſollicitans euaneſcit. Perſpicuum enim eſt corpus a nulla potentia ſollicitatum in peripheria circuli aequabiliter progredi, eiusque vim centrifugam eſſe vbique eiusdem magnitudinis.

Exemplum 3.

237. Sit curua AM cyclois baſin habens horizontalem et cuſpide tangens verticalem AP in A; ita vt ſit $dy = \frac{dx\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$. Habetur ergo $p = \frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-2ax)}}$. Quare erit $\int \frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{dx\sqrt{2ax}}{a} = \frac{2x\sqrt{2x}}{3\sqrt{a}} + C$ et $\frac{k(1+pp}{pp} = \frac{ka}{2x}$. Sumta ergo conſtante C finitae magnitudinis fit $b = \infty$, quare fiat $C = 0$, erit $b + \int Pdx = \frac{k\sqrt{2ax}}{3}$, et $b = 0$, Prodibit igitur $P = \frac{k\sqrt{a}}{3\sqrt{2x}}$. Si itaque corpus ſuper cycloide AM ex A deſcendat ex quiete et ſollicitetur

M.E.C.D. 2017

citetur deorſum a potentia, quae reciproce eſt vt radix quadrata ex abſciſſa AP, corpus vbique curuam aequali vi premet.

Scholion.

238. Dantur igitur caſus, quibus celeritatem $\sqrt{b}$ non pro lubitu aſſumere licet, quemadmodum in his exemplis euenit. Quoties enim $\frac{1+pp}{pp}$ fit infinite magnum facto $x=0$, conſtans in integratione ipſius $\frac{pdx}{\sqrt{(1+pp)}}$ addenda plerumque hoc ipſo determinatur, quod celeritas initialis non debeat eſſe infinite magna. Semper autem, ſi curua in A tangit rectam AP, fit $\frac{1+pp}{pp}$ infinitum poſito $x=0$, id quod in cauſa etiam eſt, quod in exemplis allatis celeritas initialis non ſit arbitraria.

PROPOSITIO 27.

Problema.

239. *Si corpus a quacunque vi perpetuo deorſum trahatur; inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus ita mouetur, vt tota preſſio, quam curua ſuſtinet, datam habeat rationem ad preſſionem a vi normali ortam.* Tabula VII. Fig. 1.

Solutio.

Deſcendat corpus ex A celeritate debita altitudini b, et poſito AP $=x$, PM $=y$, AM $=s$,

M.E.C.D. 2017

sit potentia corpus in M sollicitans $=P$, erit altitudo debita celeritati, quam corpus in M habet, $=b+\int P dx$. Tota vero pressio quam curua in M secundum directionem normalis MN, sustinet $=\frac{P dy}{ds}+\frac{2ddy(b+\int P dx)}{dx ds}$ sumto ds pro elemento constante. Iam habeat se haec pressio ad vim normalem $\frac{P dy}{ds}$ vt m ad 1; erit $(m-1)P dx dy = 2ddy(b+\int P dx)$; quae est aequatio pro curua quaesita. Haec vero reducetur ponendo v loco $b+\int P dx$, ad hanc formam $\frac{(m-1)dv}{v} = \frac{2ddy}{dy}$, quae integrata dat $2\,l\frac{dy}{ds} = (m-1)\,l\frac{v}{a}$, seu $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$. Ex qua habebitur $dy = \frac{v^{\frac{m-1}{2}} dx}{\sqrt{(a^{m-1}-v^{m-1})}} = \frac{dx(b+\int P dx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1}-(b+\int P dx)^{m-1})}}$, quae est aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

240. Celeritas corporis ibi est nulla, vbi $\frac{dy}{ds}=0$, seu vbi curuae tangens est verticalis, si quidem $\frac{m-1}{2}$ fuerit numerus positiuus, seu si m maior fuerit vnitate. In his igitur casibus curuam in A tangere ponemus rectam AP, et celeritatem initialem seu $b=0$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

241. Quare si $m > 1$, seu si pressio tota maior est, quam pressio a vi normali orta; curuam quaesitam dabit ista aequatio $dy = \frac{dx\,(\int P dx)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(a^{m-1} - (\int P dx)^{m-1})}}$ in qua $\int P dx$ ita debet accipi, vt euanescat posito $x = 0$.

Corollarium 3.

242. Si $m = 1$, vis centrifuga euanescet, et propterea linea quaesita erit recta. Fit autem ex aequatione $ddy = 0$, quae est proprietas lineae rectae.

Corollarium 4.

243. Si $m = 0$ tum tota pressio euanescit, quare tum prodibit curua, quam corpus celeritate sua altitudini b debita proiectum libere describit. Pro hac igitur curua habebitur ista aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(b - a + \int P dx)}}$.

Corollarium 5.

244. Si m est vnitate minor, tunc vis centrifuga erit contraria vi normali, et propterea curua AM erit concaua deorsum. Ponamus igitur in A curuam esse normalem ad AP, erit $b = a$. Posito igitur $b = a$, habebitur pro curua quaesita haec aequatio $dy = \frac{a^{\frac{1-m}{2}}\,dx}{\sqrt{((a + \int P dx)^{1-m} - a^{1-m})}}$.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

245. Pro motu libero igitur, quo casu est $m=0$, inuenietur curua a corpore descripta, si in A horizontaliter celeritate altitudini a debita proiiciatur, ex hac aequatione $dy = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{\int P dx}}$.

Exemplum 1.

246. Sit vis sollicitans vniformis seu $P=g$ erit $\int P dx = gx$. Casibus ergo quibus $m > 1$, et corpus in A ex quiete descendit, aequatio pro curuis quaesitis, scripto gc loco a, erit haec $dy = \frac{x^{\frac{m-1}{2}} dx}{\sqrt{(c^{m-1}-x^{m-1})}}$. At si sit $m < 1$, et corpus in A celeritate altitudini a debita proiiciatur horizontaliter, curua super qua corpus moueri debebit, scripto gc loco a, exponetur hac aequatione $dy = \frac{c^{\frac{1-m}{2}} dx}{\sqrt{((c+x)^{1-m}-c^{1-m})}}$. Hae ergo curuae erunt algebraicae, si vel $\frac{3-m}{2m-2}$, vel $\frac{m}{1-m}$ fuerit numerus integer affirmatiuus. Hoc vero euenit si m fuerit terminus vel ex hac serie $3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}$ etc. vel ex hac serie $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ etcet.

Corollarium 7.

247. Si igitur tota pressio triplo debeat esse maior quam vis normalis, curua erit circulus tangens

M.E.C.D. 2017

gens rectam AP in A. Namque erit $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ seu $y = c - \sqrt{(c^2-x^2)}$, aequatio ad circulum radii c.

Corollarium 8.

248. Sit tota pressio duplo maior quam vis normalis, seu vis centrifuga aequalis vi normali cum eaque conspirans; erit curua cyclois cuspide verticalem in A tangens. Aequatio enim erit $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}$.

Exemplum 2.

249. Quaecunque fuerit potentia sollicitans P, requirantur curuae eiusmodi, vt pressio tota quam curua sustinet, sit duplo maior quam vis normalis seu quam vis centrifuga, quae hoc casu illi aequalis erit. Fiat igitur $m = 2$, et pro curua quaesita haec habebitur aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{\int P dx}}{\sqrt{(a - \int P dx)}}$ Seu dicto $\int P dx = X$ erit $dy = dx\sqrt{\frac{X}{a-X}} = \frac{X dx}{\sqrt{(aX - X^2)}}$ Hoc exemplum ideo attulimus, quod in sequentibus demonstrabitur curuas huius proprietatis esse simul lineas celerrimi descensus.

Corollarium 9.

250. Perspicitur ergo infinitas esse curuas quaestioni satisfacientes, propter quantitatem a arbitrariam. Atque infinitae hae curuae omnes tangent rectam AP in A.

M.E.C.D. 2017

Scholion. 1.

251. Ex ſolutione huius problematis appa-ret, quomodo problema inuerſum, quo curua et ratio inter totam preſſionem et vim normalem datur, at quantitas vis ſollicitantis deorſum tendentis quaeritur, ſolui debeat. Cum enim ſit $v^{\frac{m-1}{2}} ds = a^{\frac{m-1}{2}} dy$, ſeu poſito $dy = p\,dx$, $v^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{(1+pp)} = a^{\frac{m-1}{2}} p$ erit $v = \frac{a p^{\frac{m-1}{2}}}{(1+pp)^{\frac{m-1}{m-1}}} = b + \int \mathrm{P}\,dx$; hincque differentiando $\mathrm{P}\,dx = \frac{2\,a p^{\frac{3-m}{m-1}} dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}}$. Conſequenter inuenitur $\mathrm{P} = \frac{2\,a p^{\frac{3-m}{m-1}} dp}{(m-1)(1+pp)^{\frac{m}{m-1}}\,dx}$. Vbi notandum, celeritatem initialem iam eſſe datam, nam formula $\frac{a p^{\frac{2}{m-1}}}{(1+pp)^{\frac{1}{m-1}}}$, ſi in ea ponatur $x = o$, dat b.

Scholion 2.

252. Simili modo ſi motus corporis ſeu celeritas eius in ſingulis locis detur, atque relatio preſſionis totius ad vim normalem, inuenietur ex celeritate ſtatim potentia ſollicitans. Vt ſit v altitudo debita celeritati in M, erit ob $b + \int \mathrm{P}\,dx = v$;

M.E.C.D. 2017

$=v$; $P=\frac{dv}{dx}$; atque aequatio $v^{\frac{m-1}{2}}ds = a^{\frac{m-1}{2}}dy$ dabit naturam curuae requisitae. Cum enim v sit data, dari debet vel in x vel s et constantibus quantitatibus, scilicet quae ad curuae naturam exprimendam adhibentur. Ceterum eadem problemata in hypothesi virium centripetarum vel plurium potentiarum sollicitantium proposita non habent plus difficultatis, etiamsi ad magis perplexas aequationes perueniatur. Atque cum simplicia exempla in medium proferre non liceat ad illustrandum, ea potius relinquo; hocque eo magis, quod in sequentibus, vbi de brachystochronis agetur, eiusdem naturae curuae prodeant, quas ibi diligentius expositurus sum. Nunc igitur ad ea progredior problemata, in quibus motus quaedam proprietas proponitur, ex qua coniuncta vel cum potentia sollicitante curua quaeritur, vel cum curua ipsa, potentia sollicitans. Problemata vero nimis facilia, vt quando vel scala celeritatum, vel scala temporum daretur, praetermitto, cum ex expressione celeritatis vel potentia sollicitans, vel ipsa curua sponte fluat, atque temporis expressio facillime ad celeritatem deducat. Hanc ob rem huiusmodi afferemus quaestiones, in quibus non ipsae celeritates vel tempora dantur, sed relationes quaedam ab iis pendentes.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 28.

Problema

Tabula VI. Fig. 3.

253. *Sollicitetnr corpus a quacunque potentia deorſum tendente; inuenire curuam* AM *ſuper qua corpus deſcendens motu aequabili deorſum feratur, ſeu aequabiliter a horizontali* AB *recedat.*

Solutio.

Poſitis AP$=x$, PM$=y$, AM$=s$, et potentia ſollicitante $=$ P, ſit celeritas corporis initialis in A debita altitudini b, erit celeritas in M debita altitudini $b+\int P\,dx$. Quare tempuſculum, quo elementum M percurritur, eſt $\frac{ds}{\sqrt{(b+\int P\,dx)}}$. Quia autem motus per AM reſpondere debet motui aequabili per AP, concipiatur corpus motum ſuper AP celeritate conſtante debita altitudini b, debebit tempus per $P\rho$ aequari tempori per Mm, vnde habebitur $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b+\int P dx)}}$, ſeu $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx}$. Pono autem celeritatem initialem congruentem cum celeritate deſcenſus, vt curua in A tangat verticalem AP, et corpus primo principio recta deſcendat. Nam quia propter motum acceleratum neceſſe eſt vt curua continuo magis ad horizontem inclinetur, eius initium commodiſſime ſumetur in A, vbi curua eſt verticalis. Prodiitque ergo pro hac curua aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx}$. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

254. Haec ergo curua hanc habet proprietatem, vt quo maior sit corporis celeritas, eo magis quoque curua in eo loco ad horizontem sit inclinata.

Corollarium 2.

255. In loco ergo supremo, vbi celeritas corporis est minima, inclinatio curuae debet esse minima, seu tangens curuae in eo loco debet esse verticalis.

Corollarium 3.

256. Celeritas igitur initialis Vb non potest esse nulla, quia ei aequalis est celeritas respectiua, qua corpus deorsum progreditur, seu ab horizontali AB recedit.

Scholion 1.

257. Vocatur haec curua linea aequabilis descensus, quia corpus super ea descendens aequabili motu deorsum progreditur. Lineae huius inuentio extat in Act. Erud. Lipf. A. 1690. pro hypothesi grauitatis, seu potentiae sollicitantis vniformis. Satisfacere autem huic quaestioni demonstratur ibi parabola cubicalis Neiliana, quae eadem in exemplo sequente prodibit.

Exemplum 1.

258. Sit potentia sollicitans vniformis seu $P=g$, erit $\int Pdx=gx$. Quare pro curua quaesita

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

habebitur iſta aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx}$, quae integrata praebet hanc, $3y\sqrt{b} = 2x\sqrt{gx}$, ſeu $\frac{9by^2}{4g} = x^3$, quae eſt pro parabola Neiliana cuſpide in A verticalem AP tangente, cuius parameter eſt $\frac{9b}{4g}$. Pro quaque ergo alia celeritate initiali, alia eſt ſumenda parabola.

Exemplum 2.

259. Sit potentia ſollicitans P poteſtati cuicunque abſciſſarum data linea auctarum proportionalis vt $P = \frac{(a+x)^n}{f^n}$, erit $\int P dx = \frac{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Quamobrem pro curua ſatisfaciente habebitur iſta aequatio $dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{(a+x)^{n+1} - a^{n+1}}$. Si $a = 0$, ita vt potentia ſollicitans P ſit poteſtati exponentis n diſtantiarum corporis a horizontali AB proportionalis, erit $dy\sqrt{(n+1)bf^n} = dx\sqrt{x^{n+1}}$, cuius integralis eſt $y\sqrt{(n+1)bf^n} = \frac{2x^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}$, ſeu $\frac{(n+1)(n+3)^2}{4} bf^n y^2 = x^{n+3}$. At $n+1$ debet eſſe numerus affirmatiuus, alioquin $\int P dx$ fieret infinitum, quia euaneſcere debet facto $x = 0$. Fit ergo $n+3 > 2$; quare ſatisfaciunt parabolae verticibus in A verticalem AP tangentes. Vt ſi $n = 1$ ſeu $P = \frac{\infty}{f}$, ſatisfaciet parabola Appolloniana, cuius parameter eſt $2\sqrt{2bf}$.

Scholion 2.

260. Ex huius propoſitionis ſolutione perſpicitur quomodo eius inuerſa, qua data curua, quae

M.E.C.D. 2017

ſit linea aequabilis deſcenſus, requiritur potentia ſollicitans. Cum enim ſit $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{\int P dx}$, erit $\int P dx = \frac{bdy^2}{dx^2}$. Ex qua oritur poſito dx conſtante, $P = \frac{2bdyddy}{dx^3}$. Perſpicitur ergo potentiam P a celeritate initiali $\sqrt{b}$ pendere. Curua vero data ita eſſe debet comparata, vt in A tangat verticalem AP. Si curuae radius oſculi in M dicatur r, erit $P = \frac{2bds^3dy}{rdx^4}$. Quare ſi ex. gr. curua AM fuerit circulus tangens AP in A, cuius radius $= a$, erit $r = a$; $dy = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ et $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Pro circulo ergo erit $P = \frac{2a^2bx}{(a^2-x^2)^2}$. Celeritas vero in M debita eſt altitudini $b + \int P dx = \frac{a^2b}{a^2-x^2}$.

Corollarium 4.

261. Patet ceterum ex aequatione, quam inuenimus, $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \frac{ds}{\sqrt{(b+\int P dx)}}$ tempus quo arcus AM deſcribitur, aequale eſſe tempori, quo corpus vniformiter celeritate altitudini b debita abſciſſam AP percurrit. In hoc ipſo ſcilicet natura lineae aequabilis deſcenſus nititur.

PROPOSITIO 29.

Problema.

262. *Trahente vniformi potentia vbique verticaliter deorſum, inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus aequabiliter verſus datam plagam* AP *progreditur.* Tabula VII. Fig. 3.

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Sit AM curua quaesita, et pro axe sumatur eius tangens AP, quae versus datam plagam dirigitur. Problema ergo requirit, vt corpus super AM motum a potentia vniformi g sollicitatum eodem tempore ad M perueniat, quo corpus motu aequabili nempe celeritate $\sqrt{b}$ latum abscissam respondentem AP percurrit, eritque celeritas initialis in A debita altitudini b. Dicantur $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$, ducaturque verticalis AQ, in Q secans horizontalem MQ. Celeritas igitur corporis in M tanta erit, quantam in Q cadendo per AQ cum sua celeritate $\sqrt{b}$ acquireret; quare celeritas corporis in M debita erit altitudini $b + gz$ dicta $AQ = z$. Per conditionem problematis vero debet esse $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b}}$ seu $\frac{ds}{\sqrt{(b+gz)}} = \frac{dx}{\sqrt{b}}$, vnde oritur haec aequatio $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gz}$. At z in x et y dabitur ex angulo PAQ; sit sinus huius anguli $= m$, erit cosinus $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Nunc erit $\sqrt{(1-m^2)} : m = AP(x) : PO$, ex quo erit $PO = \frac{mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$, ideoque $MO = \frac{y\sqrt{(1-m^2)}-mx}{\sqrt{(1-m^2)}}$. At AO fiet $= \frac{x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Deinde ob $1 : m = MO : OQ$, erit $OQ = \frac{my\sqrt{(1-m^2)}-m^2x}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Consequenter $AQ = z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$, et hinc $dy = \frac{dz}{m} - \frac{dx\sqrt{(1-m^2)}}{m}$. Quo valore in aequatione inuenta substituto prodit $dz\sqrt{b} = dx\sqrt{b}(1-m^2) + mdx\sqrt{gz}$, quae transit in hanc $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{gz}+\sqrt{b}(1-m^2)}$.

Cu-

M.E.C.D. 2017

Cuius integralis inuenitur $x = \frac{2\sqrt{b}z}{m^2g} - \frac{2b\sqrt{(1-mm)}}{m^2g}$ $l\frac{m\sqrt{gz}+\sqrt{b(1-m^2)}}{\sqrt{b(1-m^2)}}$. Quae aequatio, loco z valore $my + x\sqrt{(1-m^2)}$ ſubſtituto, dat naturam curuae quaeſitae. Q. E. I.

Corollarium 1.

263. Curua ergo ſatisfaciens ſemper eſt linea transcendens, nempe a logarithmis pendens, niſi ſit m vel o vel 1, i. e. niſi recta AP vel ſit verticalis vel horizontalis.

Corollarium 2.

264 Si igitur $m=o$ problema cum praecedente conuenit, fit enim $z=x$, ideoque curua exprimetur hac aequatione $dy\sqrt{b} = dx\sqrt{gx}$, quae dat parabolam cubicalem vt ſupra.

Corollarium 3.

265. Si $m=1$ fit linea AP horizontalis, et $z=y$. Habetur ergo $dx = \frac{dy\sqrt{b}}{\sqrt{gy}}$, ſeu $x = \frac{2\sqrt{by}}{\sqrt{g}}$, ſeu $x^2 = \frac{4by}{g}$. Haec ergo curua eſt ipſa proiectoria, quam corpus in A celeritate $\sqrt{b}$ horizontaliter proiectum libere deſcribit. Haec enim curua, vt ex ſuperiore libro intelligitur, hanc habet proprietatem, vt motus horizontalis ſit aequabilis.

Corollarium 4.

266. Si x et y, et conſequenter z eſt valde paruum, erit $l(1 + \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}}) = \frac{m\sqrt{gz}}{\sqrt{b(1-m^2)}} - \frac{mmgz}{2b(1-m^2)} + \frac{m^3gz\sqrt{gz}}{3b(1-m^2)\sqrt{b(1-m^2)}}$, quam proxime. Initium er-

M.E.C.D. 2017

go curuae AM exprimetur hac aequatione $x = \frac{z}{\sqrt{(1-m^2)}} - \frac{2mz\sqrt{gz}}{3(1-m^2)\sqrt{b}}$ seu ob $z = my + x\sqrt{(1-m^2)}$, ista $y = \frac{2(my+x\sqrt{(1-m^2)})\sqrt{g(my+x\sqrt{(1-mm)})}}{3\sqrt{b}(1-m^2)}$. Quae reducitur ad hanc $\frac{9b(1-m^2)y^2}{4g} = (my + x\sqrt{(1-m^2)})^3$.

Corollarium 5.

267. Si $m = 1$, seu si linea AP est horizontalis, et series logarithmo illi aequalis continuetur in infinitum, haecque series loco illius substituatur, termini omnes prae infinitesimo ∞ euanescent. Dabit autem infinitesimus $z = 0$, seu $y = 0$, id quod indicat hoc casu lineam rectam horizontalem quoque satisfacere. Id quod quidem per se est perspicuum, nam corpus super recta horizontali aequabiliter progredietur, ideoque motus eius horizontalis est aequabilis.

Scholion 1.

268. Mirabile igitur videtur, quod aequatio differentialis et integralis quoque, quae prodit si ponatur $m = 1$, parabolam tantum praebeat, et rectam horizontalem excludere videatur. Sed notandum est, lineam rectam horizontalem pro omnibus quoque plagis AP satisfacere cum motus in ea sit aequabilis, atque ideo versus omnes plagas aequabiliter progrediatur. Perspicuum autem est aequationem nostram generalem hanc rectam comprehendere non posse, quia rectam AP nusquam tangit, nisi in casu $m = 1$, quo cum ea congruit.

M.E.C.D. 2017

gruit. Atque haec ipſa ratio quoque eſt, cur pro caſu etiam $m=1$ linea recta non directe inueniri queat.

Scholion 2.

269. Manifeſtum quoque eſt eadem opera problema latiori ſenſu acceptum ſolui potuiſſe, ſi ſcilicet potentia ſollicitans non vniformis ſed variabilis vtcunque eſſet poſita. Namque ſubſtituto P loco g, et $\int P dz$ loco gz in aequatione differentiali, prodiſſet haec aequatio $dy \sqrt{b} = dx \sqrt{\int P dz}$ pro curua quaeſita. Habet vero z eundem valorem quem ante. Quare ſi P ab altitudine z et conſtantibus tantum pendeat, poterit $\int P dz$ vel integrari vel per quadraturas exhiberi. Atque tum aequatio pro curua poterit conſtrui, peruenietur enim ad hanc aequationem $dx = \frac{dz\sqrt{b}}{m\sqrt{\int P dz} + \sqrt{b(1-m^2)}}$, in qua variabiles x et z ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Nolui autem problema nimis lata ſignificatione confuſum efficere. Quando enim latior ſignificatio neque plus difficultatis habet in ſe, neque ad peculiarem vſum accommodari poteſt, eo relicto particulare tantum problema pertractare conſtitui. Propter eandem rationem ſequens problema iſochronae paracentricae in hypotheſi tantum potentiae vniformis et deorſum directae reſoluo.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 30.

Problema.

Tabula VII. Fig. 4.

270. *In hypotheſi potentiae ſollicitantis vniformis et deorſum tendentis inuenire curuam* AM *ſuper qua corpus deſcendens aequabiliter a dato puncto* C *recedit.*

Solutio.

Sit AM curua quaeſita, eius ſumatur tangens CA, quae per datum punctum C transit, erit corporis in A celeritas minima. Quia enim haec celeritas tota ad recedendum a C impenditur, in aliis curuae elementis neceſſe eſt, vt celeritas ſit maior, eo quod eius tantum pars ad receſſum inſumitur. Punctum A ergo erit ſupremum curuae quaeſitae. Sit igitur celeritas corporis in A debita altitudini b, hacque celeritate concipiatur corpus per AP vniformiter moueri: debebit itaque hic motus cum deſcenſu corporis ſuper curua AM ita conuenire, vt ad quaeque puncta P et M aequaliter ab C diſtantia ſimul perueniatur. Poſita celeritate in M debita altitudini v, ducatur $CP=CM=x$, et ſit ſinus ang. $PCM=t$, poſito ſinu toto $=1$. Ducantur arcus circulares PM et pm centro C, erit $Mn=Pp=dx$, et ang. pCm ſinus $=t+dt$. Quare erit ſinus ang. $mCn=\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{mn}{x}$. Erit igitur $mn=\frac{xdt}{\sqrt{(1-tt)}}$, atque $Mm=\sqrt{(dx^2+\frac{x^2dt^2}{1-tt})}$. Cum ergo elementum Mm celeritate $\sqrt{v}$ eo-

M.E.C.D. 2017

eodem tempore deſcribi debeat, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$, erit $\frac{dx}{\sqrt{b}} = \sqrt{(\frac{x^2}{v} + \frac{x^2dt^2}{(1-tt)v})}$ ſeu $dx\sqrt{(1-tt)}(v-b) = x\,dt\sqrt{b}$. Requiritur ergo vt v determinetur. Ad hoc ducatur ex C verticalis CQ et horizontales AD, et MQ; poſtquam ergo corpus ex A ad M deſcendit, deorſum peruenit interuallo DQ. Quare poſita potentia ſollicitante $= g$ erit $v = b + g$. $DQ = b + g$. $CQ - g$. CD. Sit $AC = a$, ſinus anguli $ACD = m$, erit eius coſinus $= \sqrt{(1-m^2)}$, vnde erit $CD = a\sqrt{(1-m^2)}$, et coſinus ang. $MCQ = mt + \sqrt{(1-m^2)}\sqrt{(1-t^2)}$. Quam ob rem erit $CQ = mtx + x\sqrt{(1-m^2)}\sqrt{(1-t^2)}$. Ex quibus conficitur $v = b - ga\sqrt{(1-m^2)} + mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}\sqrt{(1-t^2)}$. Quo loco v valore ſubſtituto prodibit iſta aequatio $dx\sqrt{(1-tt)}(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}\sqrt{(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-m^2)}) = x\,dt\sqrt{b}$, ſeu haec $\frac{dx}{x}\sqrt{(mgtx + gx\sqrt{(1-m^2)}\sqrt{(1-t^2)} - ga\sqrt{(1-m^2)})} = \frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-t^2)}}$. Quae aequatio exprimit naturam curuae quaeſitae, et, ſi indeterminatae x et t a ſe inuicem ſeparari poſſent, ipſa curua conſtrui poſſet. Q. E. I.

Corollarium I.

271. Perſpicuum igitur eſt ex aequatione inuenta innumerabiles curuas quaeſito ſatisfacere, ob tres quantitates angulum ſcilicet ACD, diſtantiam AC et celeritatem $\sqrt{b}$, qua corpus a fixo puncto C recedit, quae pro lubitu variari poſſunt.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

272. Atque harum trium quantitatum binis quibusque assumtis pro arbitrio tertia sola variabilis infinitas producet curuas quaesito satisfacientes. At quia aequatio haec generaliter construi non potest, omnes curuae satisfacientes exhiberi non possunt.

Corollarium 3.

273. Quod ad figuram curuarum harum attinet, intelligitur, eas omnes in A cuspidem habere debere, quia A est punctum supremum. Alter enim curuae ramus ex A ad alteram partem rectae AP descendere debet; Excepto casu quo CAP fit linea horizontalis, tum enim haec ratio cessat.

Corollarium 4.

274. Alter vero ramus ad alteram rectae CP partem positus aeque soluit problema ac iste AM. Inuenitur enim eadem ex aequatione, si modo t seu angulus PCM accipitur negatiuus.

Corollarium 5.

275. Ex sola autem aequationis inuentae inspectione perspicitur eam duobus casibus separationem iudeterminatarum admittere, quorum alter est si $a = 0$, alter si $m = 1$. Illo scilicet casu euanescit distantia AC et punctum A in C incidit: hoc vero casu recta CP fit horizontalis.

Hos

M.E.C.D. 2017

Hos igitur ambos casus in sequentibus duobus exemplis euoluemus.

Exemplum 1.

276. Incidat ergo punctum A in C seu corpus descensum incipiat in ipso puncto C; fiet $a = 0$. Hoc ergo casu aequatio pro curua quaesita abibit in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$, in qua indeterminatae a se inuicem sunt separatae. Constructio igitur curuae quaesitae per quadraturas confici poterit; fiet enim $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$, quae integratio ita debet absolui, vt facto $t=0$ fiat $x=0$. Namque generalis aequatio ita debet integrari vt posito $t=0$ fiat $x = a$. Hoc igitur casu integrale $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)(mt+\sqrt{(1-m^2)(1-t^2)})}}$ ita est accipiendum, vt facto $t=0$ ipsum euanescat. Ad constructionem huius integralis vero melius perspiciendam, pono cosinum anguli MCQ seu $mt+\sqrt{(1-m^2)(1-tt)} = q$, quo facto fiet sinus ang. MCm, seu $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}}$. Hisque substitutis habebitur ista aequatio: $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{-dq}{\sqrt{(q-q^2)}}$, quod integrale ita est accipiendum, vt facto $q=\sqrt{(1-m^2)}$ fiat $x=0$.

Corollarium 6.

277. Si ipsi b diuersi valores attribuantur, omnes curuae quae oriuntur erunt inter se simi-

M.E.C.D. 2017

les, manente enim angulo MCP, distantia CM proportionalis est accipienda ipsi *b* altitudini generanti celeritatem initialem

Corollarium 7.

278. Quicunque ergo fuerit angulus ACQ, constructio non immutatur, sed tantum constans adiicienda. Quare constructio inseruiens vni casui ad omnes casus potest accommodari.

Scholion 1.

279. Problema hoc de aequabili recessu a fixo puncto praeterito seculo jam erat propositum et solutum in Act. Lipsi. A. 1695. atque solutiones quae ibi extant conueniunt apprime cum casu huius exempli, vniuersalis enim solutio illo loco non est data. Quamobrem casus exempli sequentis nouas prorsus dare videtur curuas huic quaestioni satisfacientes. At quia sequens constructio cum hac conuenit, quanquam ipsae curuae sint prorsus differentes, tamen etiam sequens casus in iis, quae hac de re tradita sunt, contineri censendus est. Vocantur autem istiusmodi curuae isochronae paracentricae, quia motus super iis a centro fixo fit aequabilis.

Exemplum 2.

280. Sit linea CAP horizontalis, fiet $m = 1$ atque in aequatione generali euanescet terminus $ga\sqrt{(1-m^2)}$. Hoc igitur casu aequatio fit vt ante

M.E.C.D. 2017

te ſeparabilis, transmutabitur enim generalis aequatio in hanc $\frac{dx\sqrt{g}}{\sqrt{bx}} = \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$, ſeu $\frac{2\sqrt{gx}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$ quod integrale ita eſt accipiendum, vt poſito $t = 0$ fiat $x = a$. Quare $\int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$ ita integrato, vt euanefcat poſito $t = 0$ erit $\frac{2\sqrt{gx} - 2\sqrt{ga}}{\sqrt{b}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-t^3)}}$. Quae conſtructio ergo cum praecedente conuenit.

Scholion 2.

281. An praeter hos duos caſus alii inueniri queant, qui ſeparationem indeterminatarum admittant, vehementer dubito. A nemine quidem, quantum ſcio, alius eſt erutus, quamobrem non neceſſe eſſe iudico, vt huic materiae diutius immorer.

PROPOSITIO 31.

Problema.

282. *Potentia ſollicitante exiſtente vniformi et deorſum tendente, inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus data cum celeritate initiali ita moueatur, vt aequalibus temporibus aequales angulos circa punctum fixum* C *abſoluat.* Tab. VIII. Fig. 1.

Solutio.

Sumatur initium curuae in loco quodam A in quo recta CA in ipſam curuam eſt normalis. Sitque celeritas in A debita altitudini b, et $AC = a$; erit celeritas angularis vt $\frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quanti-

M.E.C.D. 2017

tati celeritas angularis in singulis punctis M expressa debet esse aequalis. Sit celeritas in M debita altitudini v et $CM = x$, erit $mn = dx$. Fiat vt Mm: $Mn = V v$: $\frac{Mn\sqrt{v}}{Mm}$, quae quantitas per MC diuisa dat celeritatem angularem $= \frac{Mn.\sqrt{v}}{Mm.MC}$, quae cum aequalis esse debeat ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$ habebitur haec aequatio $Mn.\ a\sqrt{v} = Mm.\ MC.\sqrt{b} = Mm.\ x\sqrt{b}$. Sit jam ducta verticali DCQ, sinus ang. $ACD = m$, erit cosinus eius $= \sqrt{(1-m^2)}$ posito sinu toto $= 1$. Item sinus ang. MCD sit $= t$, erit cosinus $= \sqrt{(1-tt)}$. His igitur positis erit $CD = a\sqrt{(1-m^2)}$ et $CQ = -x\sqrt{(1-tt)}$, atque sinus ang. $MCm = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{Mn}{x}$, vnde fit $Mn = \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ et $Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 - tt\,dx^2 + x^2\,dt^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$. At quia corpus ex altitudine DQ est delapsum, erit $v = b + g$. $DQ = b + g\,a\sqrt{(1-m^2)} - g\,x\sqrt{(1-tt)}$. Quibus valoribus in aequatione inuenta substitutis orietur haec aequatio, $bdx^2(1-tt) = a^2 b\,dt^2 + g\,a^2\,dt^2\sqrt{(1-m^2)} - g\,a^2\,x\,dt^2\sqrt{(1-tt)} - bx^2\,dt^2$, seu $dx\sqrt{b} = \frac{dt\sqrt{(a^2 b + ga^3\sqrt{(1-m^2)} - ga^2 x\sqrt{(1-tt)} - bx^2)}}{\sqrt{(1-tt)}}$, Quae aequatio ita integrata vt posito $t = m$ fiat $x = a$, exprimit naturam curuae quaesitae. Q. E. I.

Corollarium 1.

283. Si loco sinuum angulorum ACD, MCD eorum cosinus introducantur, fiatque $\sqrt{(1-m^2)} = n$ et $\sqrt{(1-tt)} = q$; erit $dx\sqrt{b} = \frac{-dq\sqrt{(a^2 b + gna^3 - ga^2 qx - bx^2)}}{\sqrt{(1-q^2)}}$

seu

M.E.C.D. 2017

seu $\frac{-dq}{\sqrt{(1-qq)}} = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b(a^2-x^2)+ga^2(na-qx))}}$, quae ita est integranda, vt posito $q=n$ fiat $x=a$.

Corollarium 2.

284. Vbi curua ad radium CM est normalis, ibi ob euanescens dx erit $b(a^2-x^2)=ga^2(qx-na)$. Quoties ergo est $q = \frac{a^2b+gna^3-bx^2}{ga^2x}$, erit curua in radium CM normalis. Quia autem q intra limites $+1$ et -1 continetur; x non potest esse maior data quantitate; nam posito $x=\infty$ fieret $q=\infty$, quod esset absurdum.

Corollarium 3.

285. Si CM est normalis in curuam erit celeritas angularis $= \frac{\sqrt{v}}{MC} = \frac{\sqrt{(b+gna-gqx)}}{x}$, quae aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Maxima ergo est illa celeritas angularis si $q=-1$. Ille autem motus angularis eo fit minor quo maior est x. Eo vero minor porro erit motus angularis, quo magis obliqua est curua ad radium MC. Quare curua non vltra datam distantiam infra C descendere poterit, quam distantiam dabit x ex hac aequatione $x\sqrt{b} = a\sqrt{(b+gna+gx)}$, nempe $x = \frac{ga^2}{2c} + a\sqrt{(\frac{ga^2}{4b^2} + \frac{gna}{b} + 1)}$. Haec ergo est maxima curuae a puncto C distantia.

Corollarium 4.

286. Cum igitur curua non vltra datam distantiam a centro fixo C distare queat, curua haec erit

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

erit in se rediens. Scilicet vel post vnam reuolutionem vel post duas vel post tres etc. vel etiam post infinitas reuolutiones in se redibit. Prout litterae a, b, n et g fuerint assumtae.

Exemplum I.

287. Si potentia sollicitans euanescit fit $g = 0$, et corpus aequabiliter promouebitur. Tum igitur pro curua descripta haec habebitur aequatio $\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$, cuius integralis per log. est $\sqrt{-1}\, l(\frac{x\sqrt{-1}-\sqrt{(a^2-x^2)}}{c}) = \sqrt{-1}\, l(t\sqrt{-1}-\sqrt{(1-tt)})$, seu $x\sqrt{-1}-\sqrt{(a^2-x^2)} = ct\sqrt{-1}-c\sqrt{(1-tt)}$. Quae reducta dat $(a^2-c^2)^2 = 4(a^2+c^2)ctx-4c^2x_2-4a^2c^2t^2$. Incidat recta AC in verticalem CD hoc enim perinde est, ob euanescentem potentiam g, debebit ergo fieri $x = a$, posito $t = 0$, ex quo fit $a^2+c^2 = 0$, atque $a^4 = a^2x^2+a^2t^2$ seu $x^2 = a^2(1-tt)$. Quae aequatio est pro circulo diametri a per punctum fixum C transeunte. Quando enim motus in circulo est aequabilis, motus quoque respectu cuiusque puncti in peripheria erit aequabilis.

Scholion.

288. Perspicuum autem est hoc casu peripheriam circuli quoque satisfacere, cuius centrum est in puncto fixo C, quippe quae solutio est facillima et sua sponte se prodit. Quamobrem maxime mirandumest hunc casum in solutione non contineri.

M.E.C.D. 2017

neri. Ratio vero huius similis prorsus est eius, quam supra §. 268. dedimus, vbi simile paradoxum obseruauimus. Ad circulum centrum in C habentem designandum prodire debuisset $x = a$, seu $dx = o$, quod vero quia x vt quantitas variabilis consideratur non fieri potuit, praesertim cum in eadem aequatione solutio alia sit contenta, in qua x est quantitas reuera variabilis. Ex prima vero aequatione posito $v = b$, quae est $Mn.\ a = Mm.\ x$ intelligi potest circulum satisfacere, nam si vbique est $x = a$ erit quoque $Mn = Mm$. Magnum autem arbitror subsidium ad construendas curuas huic problemati satisfacientes proditurum, si tali methodo solutio inveniri posse, quae sponte pro casu motus aequabilis circulum centrum in C habentem effet datura. Cum enim casus simplicissimus ita sit inuolutus et abditus, vt elici vix queat, coniicere licet, alias saepe curuas simplices in generali quapiam solutione contineri, quae sint erutu difficillimae.

PROPOSITIO 32.

Problema.

289. *Si corpus attrahatur vi quacunque ad centrum virium* C, *inuenire curuam* AM *super qua corpus data cum celeritate descendens, motu aequabili versus* C *feratur.* Tab. VIII, Fig. 2.

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Sit corporis in A celeritas minima debita altitudini b; erit recta CA tangens curuae in A, quia corpus in A directe ad C moueri debet. Sit AC$=a$, et CM$=x$; celeritas in M debita altitudini v, et vis centripeta in M$=$P, erit $v=b-\int P dx$, quod integrale ita est accipiendum vt facto $x=a$, euanescat, fiatque $v=b$. Celeritas vero in M tanta esse debet, qua elementum Mm eodem tempusculo absoluatur, quo elementum Pp celeritate $\sqrt{b}$. Erit ergo $\sqrt{b}:\sqrt{v}=Pp:Mm=MT:MC$, vnde prodibit ista aequatio $b.MC^2=v.MT^2=b.MT^2-MT^2.\int P dx$. Dicatur perpendiculum CT in tangentem $=p$, erit $bp^2=-(x^2-p^2)\int P dx$, seu $p^2=\frac{-x^2\int P dx}{b-\int P dx}$. Vel si finus ang. ACM ponatur $=t$ erit $\frac{mn}{MC}=\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$. Vnde sequens emergit aequatio: $\frac{dt\sqrt{b}}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-dx}{x}\sqrt{-\int P dx}$. Quarum vtraque, si quidem P per x datur, ad curuam construendam est apta. Q. E. I.

Corollarium 1.

290. Si vis centripeta potestati cuicunque distantiarum fuerit proportionalis, nempe P$=\frac{x^n}{f^n}$, erit $\int P dx=\frac{x^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hoc substituto habebitur pro curua AM sequens aequatio $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-dx}{x}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{-dx}{x}\sqrt{\frac{a^{n+1}-x^{n+1}}{(n+1)\,bf^n}}$. Quae aequatio ita debet integrari vt facto $t=0$ fiat $x=a$.

Corollarium 2.

291. Si $\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}$ ita accipiatur, vt fiat $=0$ si $t=0$, prodibit ex illa aequatione integrata haec

$$\int\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-2\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{bf^n}}+\frac{a^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{bf^n}}$$

$$l\frac{a^{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}{a^{\frac{n+1}{2}}-\sqrt{(a^{n+1}-x^{n+1})}}$$

$=$ BS, si centro C radio BC$=1$ descriptus fuerit arcus circuli BSs. Ex quo patet curuam AM infinitos habere gyros antequam corpus in C perueniat. Nam posito $x=0$ fit BS$=\infty$.

Corollarium 3.

292. Pendet igitur constructio huius curuae partim a quadratura circuli, partim a logarithmis si $n+1$ est numerus affirmatiuus. At si $n+1$ est numerus negatiuus, is terminus qui per logarithmos erat datus, ad quadraturam circuli quoque reducitur.

Corollarium 4.

293. Curua haec punctum habebit flexus contrarii, vbi est $dp=0$. Ad hoc igitur inue-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

niendum ſumatur aequatio $pp = \frac{-x^2 \int P dx}{b - \int P dx}$, ex qua differentiata poſitoque $dp = o$ prodibit $bPx = 2(\int P dx)^2 - 2b \int P dx$.

Corollarium 5.

294. In caſu igitur quo $P = \frac{x^n}{f^n}$ punctum flexus contrarii ibi erit, vbi eſt $(n+1)^2 b f^n x^{n+1} = 2(a^{n+1} - x^{n+1})^2 + 2(n+1) b f^n (a^{n+1} - x^{n+1})$. Vnde haec oritur aequatio $\frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} = -\frac{(n+3) b f^n}{4} + \frac{1}{4} V((n+3)^2 b^2 f^{2n} + 8 a^{n+1} b f^n)$. Quae in integrali ſubſtituta dabit angulum ACM in quo eſt punctum flexus contrarii.

Scholion. I.

295. Cum autem de natura huiusmodi curuarum difficile ſit in genere quicquam producere, ad caſus ſpeciales deſcendendum erit principales, id quod in ſequentibus exemplis efficere viſum eſt.

Exemplum I.

296. Sit vis centripeta ipſis diſtantiis proportionalis ſeu $P = \frac{x}{f}$ fiet $n = 1$. Poſito ergo arcu $BS = s$ curua quaeſita exprimetur iſta aequatione $s = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{2bf}} + \frac{a}{2\sqrt{2bf}} l \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2)}}{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Ex qua

M.E.C.D. 2017

qua aequatione data quauis puncti M a C distantia reperitur angulus BCS, quo absoluto corpus in ea distantia existit. Inter distantiam MC, x vero et perpendiculum CT $= p$ aequatio haec erit $pp = \frac{a^2x^2 - x^4}{2bf + a^2 - x^2}$. Huius curuae punctum flexus contrarii erit vbi est $dp = 0$, hoc autem vbi est $x^4 = 2a^2x^2 + 4bfx^2 - a^4 - 2abf$, seu $xx = a^2 + 2bf - 2\sqrt{(a^2bf + b^2f^2)}$, quia x non maior esse potest quam a. Hinc fit $x = \sqrt{(a^2 + bf)} - \sqrt{bf}$, atque $\frac{pp}{xx} = \frac{\sqrt{(a^2+bf)} - \sqrt{bf}}{\sqrt{(a^2+bf)}}$. Anguli ergo, quem curua in puncto flexus contrarii constituit cum radio CM cosinus erit $= \frac{\sqrt{4bf}}{\sqrt{4(a^2+bf)}}$. Aequatio vero curuae in seriem conuersa erit; posito $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$, haec $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^9}{9a^8} +$ etc. In ipso ergo curuae principio, vbi x non multo minor est quam a, seu y valde paruum erit $s\sqrt{2bf} = \frac{y^3}{3a^2}$. Deinde ex ipsa aequatione apparet facto $x = 0$ fore $s = \infty$, quare curua infinitis spiris ambit centrum C, eritque quando corpus centro iam proximum est $\frac{pp}{xx} = \frac{aa}{2bf + a^2}$. Ex quo sequitur proxime circa centrum C curuam abire in logarithmicam spiralem.

Exemplum 2.

297. Sit $n = -1$, seu $n + 1 = 0$, qui casus ex ipsa aequatione differentiali est eruendus. Fit enim ob $P = \frac{f}{x}$, $\int P dx = fl\frac{x}{a}$, vnde habebitur ista aequa-

M.E.C.D. 2017

aequatio $ds = \frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-dx}{x\sqrt{b}} \sqrt{fl\frac{a}{x}}$, cuius integralis eſt $s = \frac{2f(la-lx)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{bf}}$. Altera aequatio inter perpendiculum p et x, erit haec $pp = \frac{fxxl\frac{a}{x}}{b+fl\frac{a}{x}}$. Ex qua inuenitur punctum flexus contrarii in eo loco, in quo eſt $b = 2f(l\frac{a}{x})^2 + 2bl\frac{a}{x}$ ſeu $l\frac{a}{x} = \frac{-b+\sqrt{(bb+2bf)}}{2f}$. Hoc ergo habebitur ſumendo $s = \frac{(-b+\sqrt{(bb+2bf)})^{\frac{3}{2}}}{3f\sqrt{2a}}$. Perſpicitur porro ſi fiat $x = 0$, fore $s = \infty$, ſeu curuam infinitis ſpiris centrum C circumdare, hoc vero caſu erit $\frac{pp}{xx} = 1$, ſeu $p = x$. Vltimo ergo curua in circulum infinite paruum abit.

Exemplum 3.

298. Ponatur $n = -2$ vt vis centripeta ſit quadratis diſtantiarum reciproce proportionalis, erit $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{-fdx}{x}\sqrt{\frac{a-x}{abx}} = ds$. Ponatur $\frac{a-x}{x} = yy$, fiet $\frac{ds\sqrt{ab}}{2f} = \frac{yy\,dy}{1+yy} = dy - \frac{dy}{1+yy}$. Exprimit vero $\int\frac{dy}{1+yy}$ arcum, cuius tangens eſt y ſeu $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ ſit hic arcus $= t$; erit $t + \frac{s\sqrt{ab}}{2f} = y = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Vbique ergo data diſtantia x capiendus eſt arcus s in $\frac{\sqrt{ab}}{2f}$ ductus aequalis differentiae inter tangentem $\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ et arcum reſpondentem, poſito radio $= 1$. Si x ponatur $= 0$, fiet $s = \infty$, ex quo ſequitur curuam per infinitas ſpiras ad centrum C deſcendere.

Prae-

M.E.C.D. 2017

Praeterea ob $-\int P dx = \frac{ff(a-x)}{ax}$ erit $pp = \frac{ffxx(a-x)}{abx+ff(a-x)}$ Ex quo sequitur si x euanescat fore $\frac{pp}{xx} = 1$, seu curuam vltimo quoque in circulum infinite paruum abire. Si fuerit $ab = ff$, erit $pp = \frac{xx(a-x)}{a}$, et $t + \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$ Punctum flexus contrarii hoc ergo casu incidet in eum locum, vbi est $2ax = 3xx$, seu vel $x = o$ vel $x = \frac{2a}{3}$. Sin autem fuerit $ab = 4ff$, erit $t + s = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$; et punctum flexus contrarii habebitur capiendo $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Scholion 2.

299. Quo autem appareat, quomodo spirae infinitae sint comparatae, si vis centripeta fuerit potestati cuicunque distantiarum proportionalis seu $P = \frac{x^n}{f^n}$; consideretur aequatio inter p et x, quae erit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1} - x^{n+1}}$. Vbi duo distinguendi sunt casus alter quo $n+1$ est est numerus affirmatiuus alter quo est negatiuus. Si $n+1$ est numerus affirmatiuus facto $x = o$ fit $\frac{pp}{xx} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)bf^n + a^{n+1}}$. Hoc ergo casu curua AM circa centrum C abit in logarithmicam spiralem. At si $n+1$ est numerus negatiuus facto $x = o$ fit $\frac{pp}{xx} = 1$. His ergo in casibus curua in C abit in circulum infinite paruum. Fit his casibus corporis ad C accedentis celeritas infinite magna,

et

M.E.C.D. 2017

et hanc ob rem nisi curua in circulum abiret corpus celeritate infinite magna ad C accederet, quod esset contra conditionem problematis. Determinatis igitur curuis, super quibus corpus aequabiliter ad centrum virium accedit, inuestigabimus eas curuas, super quibus motu aequabili circa centrum virium circumfertur.

PROPOSITIO 33.

Problema

Tab. VIII. Fig. 3. 300. *Si corpus attrahatur perpetuo ad centrum virium* C, *determinare curuam* AM, *super qua corpus motu angulari circa centrum* C *aequabiliter mouetur.*

Solutio.

Sit A curuae punctum supremum, vbi curua normalis erit in radium AC; sitque celeritas corporis in A debita altitudini b et $AC = a$, erit motus angularis in $A = \frac{\sqrt{b}}{a}$, cui quantitati motus angularis in singulis punctis M debet esse aequalis. Ponatur $CM = x$, cui aequalis capiatur CP, et sit vis centripeta in $M = P$, erit celeritas in M debita altitudini $b - \int P dx$, integrali $\int P dx$ ita accepto vt euanescat posito $x = a$. Ducta tangente MT vocetur perpendiculum ex C in eam demissum $CT = p$, erit $x : p = Mm : mn$. Hanc ob rem celeritas per $mn = \frac{p\sqrt{(b - \int P dx)}}{x}$, et celeritas angularis $= \frac{p\sqrt{(b - \int P dx)}}{x^2}$, quae acqua-

M.E.C.D. 2017

aequalis esse debet ipsi $\frac{\sqrt{b}}{a}$. Hinc prodit sequens aequatio $bx^2 = a^2bp^2 - a^2p^2\int P dx$, seu $p = \frac{x^2\sqrt{b}}{a\sqrt{(b-\int P dx)}}$. Centro C radio BC = 1 describatur arcus circuli BS, qui dicatur = s, erit $1 : ds = x : mn$, vnde erit $mn = x\,ds$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)}$. Cum nunc sit $x : p = \sqrt{(dx^2 + x^2ds^2)} : x\,ds$ fiet $p = \frac{xxds}{\sqrt{(dx^2+x^2ds^2)}}$. Quo valore in aequatione inuenta substituto habebitur $bdx^2 + bx^2ds^2 = a^2bds^2 - a^2ds^2\int P dx$, hincque $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b - bx^2 - a^2\int P dx)}}$. Ex qua aequatione curua quaesita poterit constrúi. Q.E.I.

Corollarium 1.

301. Quo minor fit x, eo maior fiet $b - \int P dx$, quare quo minor fit x eo minor quoque fiet $\frac{p}{x}$, seu sinus anguli CMT. Est enim $\frac{p}{x} = \frac{x\sqrt{b}}{a\sqrt{(b-\int P dx)}}$.

Corollarium 2.

302. Porro tam ex hypothesi quam hac aequatione x non potest fieri maior quam a, fieret enim $p > x$. Quamobrem radiorum CM nullus potest esse normalis in curuam, nisi qui est maximus nempe = AC.

Scholion 1.

303. Per se quidem manifestum est in quacunque vis centripetae hypothesi circulum cen-

M.E.C.D. 2017

tro C descriptum satisfacere; corpus enim super circulo vniformiter moueri debebit. Etiamsi autem aequatio generalis circulum non comprehendere videatur, nihilo tamen minus in ea contentus esse debet; vt iam supra innuimus.

Scholion 2.

304. Perspicuum autem est nullam aliam curuam centrum C cingentem praeter circulum quaesito satisfacere posse. Nam in huiusmodi curuis fieri non potest, vt omnes rectae ex C eductae et in curuam normales sint inter se aequales. Quae igitur curuae praeter circulum problema soluunt, eae per ipsum centrum C transire debent, vt plus vno radio MC non sit in curuam normali. Cuiusmodi ergo sint hae curuae in sequente exemplo videamus.

Exemplum.

305. Sit vis centripeta distantiis a centro directe proportionalis seu $P = \frac{x}{f}$ erit $-\int P dx = \frac{a^2 - x^2}{2f}$. Quo substituto pro curua sequens prodit aequatio $ds = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b + \frac{a^2}{2f})(a^2 - x^2)}}$. Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ arcus, cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente toto sinu $= 1$. Notetur hic arcus per $A\frac{x}{a}$. Sit sinus arcus BS $= t$, erit $s = A.\,t$; vnde fiet $A.\,t = V\frac{2bf}{a^2 + 2bf}$.

(A. 1–

M.E.C.D. 2017

$(A.1-A\frac{x}{a})$. Seu arcus cuius cosinus est $\frac{x}{a}$ erit $=A.t\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$. Vnde constructio curuae facilis fluit, eritque curua algebraica quoties $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}$ est numerus rationalis. Sit $\sqrt{\frac{a^2+2bf}{2bf}}=m$ seu $2bf=\frac{a^2}{m^2-1}$, erit $\frac{mdt}{\sqrt{(1-tt)}}=\frac{-dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, cuius integralis per logarithmos imaginarios est $ml(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)})=l(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a})$ seu $(t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-tt)})^m=\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Demittatur ex M in AC perpendiculum $MQ=y$ et posito $CQ=u$, erit $1:t=x:y$ atque $t=\frac{y}{x}$. Propterea prodibit $(\frac{y\sqrt{-1}+\sqrt{(x^2-y^2)}}{x})^m=\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Vt sit $m=2$ seu $bf=\frac{a^2}{8}$, habebitur ista aequatio $(\frac{y\sqrt{-1}+u)}{x})^2=\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$. Quae reducta dat hanc $x^3=au^2-ay^2=ax^2-2ay^2$, seu $y=x\sqrt{\frac{a-x}{2a}}$ et $u=x\sqrt{\frac{a+x}{2a}}$. At si inter coordinatas orthogonales u et y aequatio desideretur ea erit ordinis sexti haec $(y^2+u^2)^3=a^2(u^2-y^2)^2$ In hac curua applicata erit maxima si $x=\frac{2b}{3}$, seu si sumatur $CQ=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{5}{6}}=a\sqrt{\frac{10}{27}}$, tum enim erit $QM=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{2}{27}}$. In aliis vero ipsius m valoribus maxima applicata erit vbi est $my\sqrt{(a^2-x^2)}=ux$.

PROPOSITIO 34.
Problema.

306. *Sit potentia sollicitans vniformis* g, *et vbique deorsum tendat, deturque curua* AT, *inue-* Tab. VIII, Fig. 4.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

nire curuam AM, *ſuper qua corpus ita deſcendat, vt tempus per arcum quemcunque* AM *proportionale ſit radici quadratae ex applicata reſpondente* PT *curuae datae* AT.

Solutio.

Ponatur abſciſſa communis $AP = x$, curuae AT applicata $PT = t$, dabitur ergo, quia curua AT datur aequatio inter x et t, quae talis eſſe debebit, vt euaneſcente x fiat quoque $t = 0$, quia motus initium in A ponitur, et tempora a puncto A computantur. Sit porro curuae quaeſitae AM applicata $PM = y$, et arcus $AM = s$. Debita ſit celeritas initialis in A altitudini b. Erit ergo celeritas in M debita altitudini $b + gx$, et tempus quo arcus AM abſoluitur $= \int \frac{dt}{\sqrt{(b+gx)}}$, quod aequale eſſe debet ipſi $\sqrt{t}$. Habebitur ergo haec aequatio $\int \frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}} = \sqrt{t}$ ſeu $\frac{ds}{\sqrt{(b+gx)}} = \frac{ds}{2\sqrt{t}}$. Vnde $dt^2(b+gx) = 4t\,ds^2 = 4t\,dx^2 + 4t\,dy^2$, atque $dy = \frac{\sqrt{(b\,dt^2 + gx\,ds^2 - 4t\,dx^2)}}{2\sqrt{t}}$. Ex qua aequatione, cum t per x detur, curua quaeſita AM conſtrui poterit. Ita autem eſt conſtruenda, vt poſito $x = 0$ fiat quoque $y = 0$, quo curuae AM initium ſit in A. Q. E. I.

Corollarium 1.

307. Quo igitur curua ſit realis, oportet, vt $b\,dt^2 + gx\,dt^2$ ſit maius quam $4t\,dx^2$ ſeu $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

M.E.C.D. 2017

$> \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, siue integrando $\sqrt{t} > \frac{2\sqrt{(b+gx)}-2\sqrt{b}}{g}$.
Si enim fuerit $\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{(b+gx)}-2\sqrt{b}}{g}$, curua AM fit recta verticalis, super qua descensus fit celerrimus.

Corollarium 2.

308. Si igitur in curua AT alicubi fiat $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ aequale ipsi $\frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, ibi tangens curuae AM respondens erit verticalis. Atque si infra hunc locum sit $\frac{dt}{2\sqrt{t}} < \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, curua AM non eousque descendet, sed habebit punctum reuersionis in eo loco vbi tangens est verticalis.

Corollarium 3.

309. Si angulus quem curua AT in A cum verticali AP constituit fuerit acutus, cuius tangens $= m$, erit in initio A, $t = mx$, et $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{mdx}{2\sqrt{mx}} > \frac{dx}{\sqrt{(b+gx)}}$, vnde $m(b+gx)$ maius esse debet quam $4x$, id quod semper accidit si b non fuerit $= 0$. Tum autem erit $dy = \frac{dx\sqrt{(bm^2+gm^2x-4mx)}}{2\sqrt{mx}}$. Posito igitur $x = 0$, fiet $\frac{dy}{dx} = \infty$, seu his casibus curuae AM tangens in A erit horizontalis; nisi sit $b = 0$. At si $b = 0$, erit $dy = \frac{dx\sqrt{(gm-4)}}{2}$. Ne igitur curua AM fiat imaginaria, debet gm maius esse quam 4, atque tum curua AM cum AP in A angulum acutum constituet, cuius tangens erit $\frac{\sqrt{(gm-4)}}{2}$.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

310. Sin vero angulus, quem curua AT in A cum verticali AP facit, fit rectus, fit $m = \infty$. Hoc ergo casu curuae AM tangens in A semper erit horizontalis, siue b sit $= o$ siue secus.

Corollarium 5.

311. Si celeritas in A est $= o$, et in principio A curua AT confundatur cum curua, cuius aequatio est $t = \alpha x^n$, existente n numero affirmatiuo, quo crescente x quoque t crescat, erit $dt = \alpha n x^{n-1} dx$ et $dy = \frac{dx\sqrt{(\alpha^2 g n^2 x^{2n-1} - 4\alpha x^n}}{2\sqrt{\alpha x^n}}$.

Nunc ne dy fiat imaginarium facto $x = o$ debebit esse $n > 2n-1$, seu $n < 1$, quibus casibus scilicet curua AT in A est normalis ad AP. Tum vero erit in puncto A, $dy = \frac{n dx \sqrt{\alpha g}}{2 x^{\frac{1-n}{2}}}$ et $y = \frac{n x^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{ag}}{n+1}$, et radius osculi curuae AM in A $= \frac{n^2 \alpha g x^n}{2(n+1)}$. Ex quo sequitur curuae AM, cuius tangens in A est horizontalis, radium osculi in A debere esse infinite paruum, si corpus ex quiete super ea descendere posse debeat. Nisi enim radius osculi fuerit infinite paruus, corpus perpetuo in A quiescens permanebit.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

312. Si igitur corpus ex quiete descendere ponatur in A, quo curua AM fiat realis, debebit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ maius esse quam $\frac{dx}{\sqrt{gx}}$ saltem in initio curuae AT. Quare si ponatur $\frac{d}{2\sqrt{t}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p\,dx$, vbi p est quantitas affirmatiua saltem nisi x ponatur nimis magnum, erit $\sqrt{t} = \frac{2\sqrt{gx}}{g} + \int p\,dx$, vbi $\int p dx$ ita accipi debet, vt euanescat facto $x = o$. Hoc autem valore loco $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ substituto prodibit $\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p\,dx$ seu $s = x + \int p\,dx\sqrt{gx}$, pro curua quaesita AM. Vel inter x et y haec habebitur aequatio $y = \int dx\sqrt{(2p\sqrt{gx} + gpp x)}$. Notandum vero est p non talem esse posse quantitatem, ex qua $\int p dx$ praescripto modo acceptum fiat infinite magnum.

Corollarium 7.

313. Ex dictis intelligitur, quamdiu p valorem affirmatiuum retineat, tamdiu curuam AM descendere: si fit $p = o$, et deinceps negatiuum, curua AM in illo loco habebit cuspidem, et reuertetur sursum. Si $p = \infty$, manente tamen $\int p\,dx$ finito, curua AM ibi habebit tangentem horizontalem.

Corollarium 8.

314. Si b non ponatur $= o$, ex eadem curua AT innumerabiles inueniri poterunt curuae AM; prout enim celeritas initialis maior minorue accipiatur, alia prodit curua AM.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion.

315. Problematis huius maximus erit vſus in ſolutionibus ſequentium problematum indeterminatorum, in quibus omnes curuae requiruntur, ſuper quibus corpus eodem tempore vel ad datam rectam vel curuam lineam perueniat. Hanc ob rem indolem quantitatum t et p diligentius inueſtigauimus, quo iis in ſequentibus vti liceat.

PROPOSITIO 35.

Problema.

Tabula IX. Fig. I.

316. *Poſita potentia ſollicitante vniformi* g *et deorſum directa, inuenire omnes curuas* AMC, *ſuper quibus corpus in* A *ex quiete deſcenſum incipiens dato tempore ad rectam horizontalem* BC *perueniat.*

Solutio.

Ponatur AP$=x$, PM$=y$, et AB$=a$. In curua AND exprimat PN ſupra ſumtam quantitatem $\int p\,dx$, cuius curuae haec debet eſſe proprietas, vt in A cum axe AB concurrat, eiusque applicatae continuo vsque ad D ſaltem creſcant, quo ſcilicet $p\,dx$ ſit affirmatiuum. Nunc ſumto $y = \int dx \sqrt{(2p\sqrt{gx} + gpp x)}$ erit tempus per AMC$= \frac{2\sqrt{ga}}{g} +$ BD (312.). Quamobrem cum infinitae curuae huius indolis in locum curuae AND ſubſtitui queant, ex iis infinitae orientur curuae AMC, ſuper quibus omnibus

M.E.C.D. 2017

bus corpus eodem tempore ex A ad lineam horizontalem BC pertingit. Ad hoc ergo obtinendum pro $\int pdx$ talis quantitas accipi debet, quae euaneſcat poſito $x=o$, et fiat $=$BD poſito $x=a$, retinente p vbique per AND affirmatiuum valorem. Q. E. I.

Corollarium 1.

317. Si facto $x=a$ fiat $p=o$, ſeu ſi curua AND in D perpendiculariter inſiſtat horizontali CD, curua AMC quoque horizontali DC perpendiculariter inſiſtet.

Corollarium 2.

318. Atque ſi poſito $x=o$, fiat quoque $p=o$, tangens curuae AMC in A erit verticalis, idem vero quoque accidit, ſi $p\sqrt{x}$ fiat $=o$ poſito $x=o$. At ſi $p\sqrt{x}$ fiat infinitum poſito $x=o$, curua AMC in A habebit tangentem horizontalem.

Scholion 1.

319. Intelligitur ergo problema hoc maxime eſſe indeterminatum, cum infinitis modis infinitae curuae AMC poſſint inueniri. Quamobrem in ſequentibus exemplis modum indicabimus quotcunque libuerit ſeries infinitarum curuarum quaeſito ſatisfacientium inueniendi.

M.E.C.D. 2017

Exemplum 1.

320. Ponatur PN $= \int p\,dx = z$ et BD $= \sqrt{b}$, ita vt tempus descensus esse debeat $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Sumatur pro curua AND haec aequatio $z = \alpha x^2 + \beta x$, quae hanc iam habet proprietatem, vt $\int p\,dx$ seu z euanescat posito $x = 0$. Nunc quia facto $x = a$ fieri debet $z = \sqrt{b}$, habebitur $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \beta a$, hincque $\beta = \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$, ideoque $z = \alpha x^2 + \frac{x\sqrt{b}}{a} - \alpha a x$. Deinde quia p seu $\frac{dz}{dx}$ affirmatiuum semper habere debet valorem si $x < a$, debebit esse $2\alpha x + \frac{\sqrt{b}}{a} - \alpha a$ affirmatiuum. Quare oportet esse $\sqrt{b} > \alpha a^2$, ponatur ideo $\sqrt{b} = \alpha a^2 + \alpha a f$ erit $\alpha = \frac{\sqrt{b}}{a^2 + af}$. Quo substituto habebitur $z = \frac{x^2\sqrt{b} + fx\sqrt{b}}{a^2 + af}$, quae aequatio substituendis loco f innumerabilibus valoribus affirmatiuis, infinitas dat curuas AND. Fiet autem $p = \frac{dz}{dx} = \frac{2x\sqrt{b} + f\sqrt{b}}{a^2 + af}$ et $p\sqrt{gx} = \frac{2x\sqrt{gbx} + f\sqrt{gbx}}{a^2 + af}$; ex qua patet omnes hinc orientes curuas AMC tangere rectam AB in A. Aequatio vero pro curuis AMC erit haec $y = \int \frac{dx}{a^2 + af} \sqrt{(2a(a+f)(2x+f)\sqrt{gbx} + gbx(2x+f)^2)}$. Quae infinitas continet curuas problemati satisfacientes, super quibus omnibus tempus descensus ad lineam horizontalem est $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$.

Corollarium 3.

321. Hae autem lineae omnes sunt rectificabiles. Nam cum sit $\frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{dx}{\sqrt{gx}} + p\,dx$, erit $s = x + \int p\,dx\sqrt{gx}$.

M.E.C.D. 2017

$\sqrt{gx}$. Est vero $\int p\,dx\sqrt{gx} = \frac{\frac{4}{5}x^2\sqrt{gbx} + \frac{2}{3}fx\sqrt{gbx}}{a^2+af}$

Vnde tota curua AMC erit $= a + \frac{(\frac{4}{5}a+\frac{2}{3}f)\sqrt{gab}}{a+f}$

Corollarium 4.

322. Inter has igitur curuas AMC longissima prodit si $f=o$, erit enim tum $AMC = a + \frac{4}{5}\sqrt{gab}$. Et pro hac erit aequatio ista $y = \int \frac{2dx}{a^2}\sqrt{(a^2x\sqrt{gbx}+gbx)}$. Breuissima vero habetur facto $f=\infty$, tum enim erit $AMC = a + \frac{2}{3}\sqrt{gab}$. Et aequatio pro hac curua erit $y = \int \frac{dx}{a}\sqrt{(2a\sqrt{gbx}+gbx)}$.

Scholion 2.

323. Omnes curuae AND sub aequatione $z = \frac{x^2\sqrt{b}+fx\sqrt{b}}{a^2+af}$ contentae sunt parabolae, adeo vt per solas parabolas innumerabiles inuentae sint curuae problemati satisfacientes. Neque vero omnes parabolae in hac aequatione continentur, sed loco illius aequationis, si adhibeatur haec, $z^2 + z\sqrt{f} = \frac{x(b+\sqrt{bf})}{a}$, quae etiam infinitas parabolas continet, iterum infinitae curuae AMC inuenientur, super quibus corpus dato tempore descensum absoluit. Ex quo intelligi potest quoties infinitae inueniri queant curuae AMC, si tantum sectiones conicae in locum curuae AND sub-

M.E.C.D. 2017

ſtituantur. Sumta enim pro curua AND hac aequatione $z^2 + \alpha z = \beta x^2 + \gamma x + \gamma x + \delta xz$, quae omnes continet ſectiones conicas per punctum A transeuntes, fieri debet $b + \alpha \sqrt{b} = \beta a^2 + \gamma a + \delta a \sqrt{b}$, atque $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{2ba + \gamma + \delta\sqrt{b}}{\alpha + 2\sqrt{b} - \delta a}$ debent eſſe quantitates poſitivae, quod quam infinitis modis fieri poſſit, facile perſpicitur. Si deinde omnes curvae algebraicae conſiderentur, atque poſtmodum quoque curuae tranſcendentes ſimul, maxima copia curuarum ſimul deſcriptarum concipi poterit.

Exemplum 2.

324. Sumatur pro curua AND haec aequatio generalis $z = \frac{x^n \sqrt{b}}{a^n}$, denotante n numerum affirmatiuum quemcunque; euaneſcet z poſito $x = 0$, fietque $z = \sqrt{b}$ poſito $x = 0$ vt requiritur: praeterea vero quoque erit p ſeu $\frac{dz}{dx} = \frac{n x^{n-1} \sqrt{b}}{a^n}$ quantitas affirmatiua. Cum igitur ſit $p\sqrt{g}x = \frac{n x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{gb}}{a^n}$ erit $y = \int \frac{dx}{a^n} \sqrt{(2na^n x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{gb} + n^2 gb x^{2n-1})}$.

Quae aequatio infinitas curuas AMC complectitur, quae omnes erunt rectificabiles. Erit enim $AM = x + \frac{2n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{gb}}{(2n+1)a^n}$, ideoque $AMC = a + \frac{2n\sqrt{gab}}{2n+1}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

325. Si fuerit $n = \frac{1}{2}$ erit $y = \int \frac{dx\sqrt{(gb + 4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$ atque $y = \frac{x\sqrt{(gb+4\sqrt{gab})}}{2\sqrt{a}}$ et $AM = x(1 + \frac{\sqrt{gab}}{2a})$. Quare curua abit in lineam rectam inclinatam super qua descensus fit tempore $= \frac{2\sqrt{ga}}{g} + \sqrt{b}$. Perspicitur ergo dari lineas breuiores recta hac inclinata, super quibus corpus dato tempore ex A ad horizontalem BC peruenit: facto enim $n < \frac{1}{2}$ linea AMC fit breuior.

Scholion 3.

326. Ceterum si detur vnica curua AND desideratam curuam AMC praebens, ex ea ipsa innumerabiles aliae poterunt inueniri. Data enim vnica aequatione inter z et x capiatur $PN = \frac{(ma-(m-1)x)z}{a}$, vnde pro diuerso ipsius m valore innumerabiles curuae orientur. Simili modo poni etiam potest $PN = \frac{(max^n-(m-1)x^{n+1})z}{a^{n+1}}$ fit enim $PN = z = \sqrt{b}$ si ponatur $x = a$. Atque generaliter si fuerit P functio quaecunque ipsarum x et z, A vero eadem functio quae prodit facto $x = a$ et $z = \sqrt{b}$, accipi poterit $PN = \frac{Pz}{A}$. Debebit autem P talis esse functio vt Pz euanescat facto $x = 0$ et $z = 0$, et diff. PN diuisum per dx debet esse quantitas affirmatiua, saltem quamdiu est $x < a$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Scholion 4.

327. Simili modo problema generaliſſime ſoluetur, ſi deſignante P quamcunque functionem ipſius x euaneſcentem ſi eſt $x=0$, et A eam quantitatem in quam abit P ſi fit $x=a$, ſumatur $z=\frac{P\sqrt{b}}{A}$ pro generaliſſima aequatione curuae AND. Sit deinde $dP=Q\,dx$, debebit Q eſſe quantitas affirmatiua, quamdiu x non ſuperat a; erit $p=\frac{Q\sqrt{b}}{A}$ atque hinc $y=\int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AQ\sqrt{gbx}+gbQQx)}$, quae eſt generaliſſima aequatio pro curuis AMC, quae omnes a corpore deſcendente propoſito tempore abſoluentur. Apparet hoc modo curuas transcendentes quoque in locum curuarum AND ſubſtitui poſſe, quibus caſibus tempus, quo quaeuis curuae AMC portio abſoluitur, agebraice non poteſt definiri. Si $Q\sqrt{gbx}$ ponatur $=R$, erit $y=\int\frac{dx}{A}\sqrt{(2AR+RR)}$. Sumto ergo loco R quacunque functione ipſius x, ad inueniendam A integrari debet $\frac{R\,dx}{\sqrt{gbx}}$ ita vt euaneſcat poſito $x=0$, deinde poni oportet $x=a$, et quod prouenit erit $=A$. Hic vero hoc tantum eſt monendum vt pro R ſumatur quantitas affirmatiua, quamdiu x non excedit a, et caueri debet ne $\int\frac{R\,dx}{\sqrt{gbx}}$ fiat infinitum ſi praeſcripto modo accipiatur.

PROPOSITIO 36.

Problema.

Tabula IX. Fig. 2.

328. *Poſita potentia ſollicitante vniformi* g *et vbique deorſum directa, inuenire omnes curuas* AMC *ſuper*

M.E.C.D. 2017

super quibus corpus ex A *dato tempore ad rectam* BC *ad horizontem vtcunque inclinatam descendat.*

Solutio.

Exprimat curuae AND applicata BD tempus, quo corpus ex A ad rectam BC pertingit, etducta per quodvis punctum M recta MQ parallela rectae datae BC secante verticalem AB in Q exprimat applicata QN tempus, quo corpus partem AM percurrit. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in B eandem habeant applicatam BD, hae omnes generabunt curuas AMC super quibus corpus dato tempore ab A ad rectam BC peruenit. Curuae autem AND vt supra monitum concurrere debent in A cum verticali AB, et vsque ad D diuergere debent ab AB. Ponatur nunc tangens anguli $ABC = k$, sitque $AP = x$, $PM = y$, $AQ = u$, $QN = t$, et $AP = a$ erit $PQ = \frac{y}{k}$, ideoque $x + \frac{y}{k} = u$. Quia autem celeritas in M debita est altitudini gx erit tempus per $AM = \int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ quod aequale esse debet ipsi $QN = t$, erit adeo $dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ et $gx\,dt^2 = dx^2 + dy^2$. At ob curuam AND datam, dabitur t in u, et cum sit $u = x + \frac{y}{k}$ dabitur t per x et y quamobrem habebitur aequatio inter x et y pro curua quaesita AMC. Vel cum sit $y = ku - kx$, erit $gx\,dt^2 = (k^2 + 1)\,dx^2 - 2k^2\,du\,dx + k^2\,du^2$, ex qua aequatione x per u inuenire licebit. Sit ad hoc $dt = p\,du$, erit $gx\,p^2\,du^2 = (k^2 + 1)\,dx^2 - 2k^2$

$du\,dx$

M.E.C.D. 2017

$dudx + k^2 du^2$, atque $dx = \frac{k^2 du \pm \sqrt{(g(k^2+1)p^2x - k^2)du^2}}{k^2+1}$ Curua igitur AND talis accipi debet vt vbique p maius sit quam $\frac{k}{\sqrt{gx(k^2+1)}}$. Aequatio illa autem ita debet integrari vt facto $u = o$ fiat $x = o$. Quo facto quoque eruetur aequatio inter x et y pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium 1.

329. Curua AMC tanget in A rectam AB si fit $dy = o$, posito $x = o$; tum vero debebit esse $du = dx$, atque $1 = \sqrt{(g(k^2+1)p^2x - k^2)}$. Quare hoc eueniet si fit $ppx = \frac{1}{g}$ facto $x = o$. Quia autem hoc casu est y infinities minor quam x, erit in ipso initio $x = u$; ex quo sequitur curuam AMC in A tangere verticalem AB si fuerit $ppu = \frac{1}{g}$ posito $u = o$.

Corollarium 2.

330. Deinde curua AMC normalis erit in QM si fuerit $PQ = \frac{y}{k} = \frac{ydy}{dx}$ seu $dx = kdy$, $= k^2 du - k^2 dx$, siue $dx = \frac{k^2 du}{k^2+1}$. Hoc vero eueniet vbi erit $p^2 x = \frac{k}{g(k^2+1)}$.

Corollarium 3.

331. In ipso puncto A expressio ppx vel finitum valorem eumque maiorem quam $\frac{kk}{g(k^2+1)}$ habebit facto $x = o$; vel infinite magnum. In posteriore casu erit $dx = \pm \infty du$, et cum sit $dx = dx$

M.E.C.D. 2017

$\pm \frac{dy}{k}$, erit $dy = -kdx$. Quibus casibus tangens curuae AMC in A parallela erit rectae BC.

Exemplum.

332. Sit curua AND parabola quaecunque, ita vt sit $t = \frac{2\alpha\sqrt{u}}{\sqrt{gu}}$ erit $dt = \frac{\alpha du}{\sqrt{gu}}$, et $p = \frac{\alpha}{\sqrt{gu}}$, vnde habebitur ista aequatio, $(k^2+1)\,dx - k^2\,du = \pm \frac{du\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)}}{\sqrt{u}}$. Huius aequationis integralis est $C = (\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)\,x - k^2u)} + A\sqrt{u})^{\pi}(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)\,x - k^2u)} + B\sqrt{u})^{\varrho}$. Existente $A = \frac{\alpha^2+\sqrt{(\alpha^4-4(1-\alpha^2)k^2)}}{2}$ et $B = \frac{\alpha^2-\sqrt{(\alpha^4-4(1-\alpha^2)k^2)}}{2}$ et $\pi = \frac{-2A}{A-B}$ atque $\varrho = \frac{2B}{A-B}$. Cum igitur sit π numerus negatiuus, erit $C(\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x - k^2u)} + A\sqrt{u})^{-\pi} = (\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)\,x - k^2u)} + B\sqrt{u})^{\varrho}$, vbi C denotat constantem, quae efficiat vt posito $x = o$ fiat $u = o$. Manifestum autem est quaecunque fuerit constans, semper fieri $u = o$ posito $x = o$, excepto casu quo ϱ vel π euanescit. At π euanescere non potest, ϱ vero euanescit casu quo $\alpha = 1$, hoc igitur casu debet esse $C = \infty$, fietque $\pm\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)\,x - k^2)} + \alpha^2\sqrt{u} = o$, seu $u = x$ et $y = o$; quare satisfacit hoc casu recta verticalis AB. Reliquis casibus vero ob C arbitrariam quantitatem ex vnica curua AND innumerabiles curuae AMC inveniuntur. Vnicus porro casus est seorsim tractandus, si $A = B$ seu $k^2 = \frac{\alpha^4}{4(1-\alpha^2)}$ tum enim erit $lu = C - 2\,l(r \pm \frac{\alpha}{2}) \pm \frac{\alpha^2}{r \pm \frac{\alpha}{2}}$ existente $r = \sqrt{(\alpha^2$

M.E.C.D. 2017

$\frac{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}}{\sqrt{u}}$. Consequenter pro hoc casu habebitur haec aequatio $C = 2\,l(\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}) \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{\sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)} \mp \frac{\alpha^2\sqrt{u}}{2}}$, vbi C quoque determinatione non opus habet. Si est $\alpha > 1$ fit B et hinc quoque ρ numerus negatiuus, tum ergo debet esse $C = \infty$. Hoc ergo casu erit vel $A\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$ vel $B\sqrt{u} = \sqrt{(\alpha^2(k^2+1)x-k^2u)}$. Quae duae aequationes sunt pro lineis rectis certo modo inclinatis et per A transeuntibus: haeque etiam generaliter satisfaciunt. Vt si fuerit $\alpha = 1$, erit $A = 1$ et $B = 0$, hincque hae aequationes $u = x$ seu $y = 0$ et $u = \frac{(k^2+1)x}{kk} = x + \frac{y}{k}$ seu $x = ky$, quae est linea recta perpendicularis in BC, haec enim a corpore eodem tempore percurritur, quo verticalis BC.

Corollarium 4.

332. Nisi igitur sit $\alpha = 1$ vel $\alpha > 1$, innumerabiles lineae curuae inueniuntur problemati satisfacientes; quae ergo omnes minore tempore absoluentur, quam perpendicnlaris AB.

Corollarium 5.

333. Cum ergo ex vnica curua AND infinitae oriri queant curuae AMC, facile intelligitur infinities plures curuas huic quaestioni satisfacere, quam praecedenti.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

334. Si $\alpha < 1$ effici poteſt determinanda conſtante C, vt curua quaeſita per datum punctum rectae BC transeat. Deinde aliis aſſumendis curuis AND ſimili modo infinitae curuae poterunt inueniri, ſuper quibus corpus non ſolum dato tempore ad rectam BC perueniat, ſed ad quodvis in ea punctum datum C.

Scholion 1.

335. In hoc exemplo caſus quo $\alpha = 1$ bis occurrit, prima enim vice linea recta verticalis tantum ſatisfaciens eſt inuenta, altera vice praeter hanc rectam alia inclinata, vtroque tamen modo eadem aequatione generali ſumus vſi. Saepius autem iam huiusmodi caſus obtigerunt, in quibus aequationes differentiales continent in ſe aequationes integrales, quae nihilominus per integrationes non eruuntur. Vt in caſu $\alpha = 1$ haec habetur aequatio differentialis, $\frac{(k^2+1)dx-k^2du}{\sqrt{((k^2+1)x-k^2u)}} = \frac{\pm du}{\sqrt{u}}$ quae integrata dat $x = u$. Interim tamen perſpicuum eſt hanc aequationem $k^2 u = (k^2+1)x$ in illa quoque contineri, etiamſi per integrationem non prodeat. Et hanc ob rem poſterior aequatio integralis aeque ſatisfacit ac prior $x = u$. Hinc generaliter colligere licet aequationem differentialem $\frac{dt}{T} = V\,du$, in qua T eſt talis functio ipſius t, quae euaneſcat poſito $t = 0$, et V functio quaecunque ipſius u, aeque comprehendere hanc in-

M.E.C.D. 2017

tegralem $t=o$ ac hanc $\int\frac{dt}{T}=\int V\,du$, quae per integrationem elicitur. Plerumque quidem casus $t=o$, si t est simplex quantitas negligi potest, at si t est quantitas composita vt in nostro casu, perperam omittitur. Similem casum supra habuimus §. 300. in aequatione $ds=\frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{(a^2b-bx^2-a^2\int P dx)}}$ vbi obseruauimus aequationem $x=a$ in ea contineri, etiamsi integratio nequidem possit perfici. Nam posito $a-x=t$ erit $-dx=dt$ et $V(a^2b-bx^2-a^2\int P dx)$ erit functio ipsius t, quae fit $=o$ si fit $t=o$ seu $x=a$; namque $\int P dx$ ita accipi jubebatur, vt euanescat posito $x=a$. Posita ergo hac ipsius t functione $=T$ erit $ds=\frac{dt\sqrt{b}}{T}$, ex qua aequatione ergo tuto concludi licet, satisfacere aequationem $t=o$ seu $x=a$, ideoque problemati illi satisfacere circulum, vt ibi innuimus. (303.) Magis vniuersaliter vero in hac aequatione $V\,du=\frac{dt}{T}$, si T non euanescit posito $t=o$, comprehendetur ista aequatio $T=o$, ex qua erit $t=$ constanti quantitati, ideoque $dt=o$. Vnde intelligitur $T=o$ contineri in aequatione proposita $V\,du=\frac{dt}{T}$. Atque hinc si t fuerit quantitas composita v. g. ex u et x statim habetur aequatio integralis, per integrationem vix eruenda.

Scholion 2.

336. Casus hic supereſt, qui peculiarem resolutionem requirit, quando recta BC supra punctum

M.E.C.D. 2017

ctum A cum BA concurrit, et quando eſt parallela. Conſiderabimus autem ſequente problemate tantum caſum, quo fit BC parallela verticali AB et in data diſtantia poſita; ex quo ſimili modo caſum rectae BC vtcunque inclinatae deducere licebit.

PROPOSITIO 37.
Problema.

337. *Sollicitetnr corpus perpetuo deorſum vi uniſormi* g; *inuenire curuas innumerabiles, ſuper quibus corpus ex* A *motum a qniete-incipiendo, dato tempore ad rectam verticalem* EC *perueniat.* Tab. IX. Fig. 3.

Solutio.

Sit AMC curua quaecunque quaeſitarum, et pro axe ſumatur recta verticalis AB, dicatur AP $=x$, PM$=$AQ$=y$; erit celeritas in M debita altitudini gx, et tempus per AM $=\int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$. Sit porro AND curua, cuius quaevis applicata QN exprimat tempus per AM, et ſit QN$=t$ functioni ipſius y, poterit ex curua AND data curua AMC inueniri. Quare ſi infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in E communem habeant applicatam DE, omnes producent curuas AMC ſuper quibus corpus dato tempore per DE expreſſo ex A ad CE perueniet. Erit itaque $t = \int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ et poſito $dt = p\,dy$ erit $gp^2 x\,dy^2 = dx^2$

M.E.C.D. 2017

$+dy^2$, atque $dx = dy\sqrt{(gp^2x-1)}$. Quae ita integrata, vt posito $x=o$ fiat $y=o$, dabit curuas AMC quaesitas. Sit R functio quaecunque ipsius y et $\int R\,dy$ ita capiatur vt euanescat posito $y=o$. Tum fiat $\int R\,dy = A$ posito $y = AE = a$, et existente $DE = \sqrt{b}$ sumatur $t = \frac{\sqrt{b}\int R\,dy}{A}$, erit $p = \frac{R\sqrt{b}}{A}$ atque $dx = \frac{dy}{A}\sqrt{(gbR^2x - A^2)}$. Quae aequatio, quicquid pro R substituatur, dabit innumeras curuas quaesito satisfacientes. Q. E. I.

Corollarium 1.

338. Casus ergo habetur simplicissimus, si fuerit $R = 1$, tum enim aequatio separabilis prodit. Erit vero $t = \frac{y\sqrt{b}}{a}$, ob $A = a$. Hanc ob rem fit $\frac{adx}{\sqrt{(gbx-a^2)}} = dy$, atque $\frac{2a}{gb}\sqrt{(gbx-a^2)} = y$. Qui autem nullius est vtilitatis, ob valorem ipsius y imaginarium.

Corollarium 2.

339. Quia autem $\sqrt{(gbR^2x-A^2)}$ non potest esse quantitas imaginaria, oportet sit $R^2x > \frac{A^2}{gb}$ etiamsi $x=o$. Quare R neque quantitas constans esse potest, neque functio ipsius y, quae euanescat facto $y=o$. Hanc ob rem R talis esse debet functio ipsius y, quae fiat $=\infty$, si ponatur $y=o$. Praeterea tamen eiusmodi esse debet, vt $\int R\,dy$ non fiat infinitum quod eueniret si esset $R = \frac{1}{y}$ vel $\frac{1}{y^2}$ etc.

Exem-

M.E.C.D. 2017

Exemplum.

340. Ponamus ergo esse $R = \frac{1}{\sqrt{y}}$, erit $\int R\,dy = 2\sqrt{y}$ et $A = 2\sqrt{a}$. Hinc habebitur ista aequatio $2dx\sqrt{ay} = dy\sqrt{(gbx - 4ay)}$. Quae aequatio quia est homogenea ponatur $x = qy$, erit $2qdy\sqrt{a} + 2ydq\sqrt{a} = dy\sqrt{gbq - 4a)}$ seu $\frac{dq}{\sqrt{(gbq-4a)} - 2q\sqrt{a}} = \frac{dy}{2y\sqrt{a}}$. Posito $\frac{gb}{4a} = n$ et $\sqrt{(nq-1)} = r$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{r^2 - nr + 1}$. Quae posterior formula a quadratura circuli pendebit, si $n < 2$. Hoc vero casu erit integrale $ly = lC + \frac{n-\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}} l(2r - n + \sqrt{(n^2-4)})$ $\frac{-n-\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}} l(2r - n - \sqrt{(n^2-4)})$. Quae ob $r = \frac{\sqrt{(nx-y)}}{\sqrt{y}}$ abit in hanc $C(2\sqrt{(nx-y)} - (n - \sqrt{(n^2-4)})\sqrt{y})^{\frac{n-\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}}} = (2\sqrt{(nx-y)} - (n + \sqrt{(n^2-4)})\sqrt{y})^{\frac{n+\sqrt{(n^2-4)}}{\sqrt{(n^2-4)}}}$. Vbi pro C constantem quamcunque accipere licet, quia ipsa aequatio ita est comparata, vt posito $x = o$ fiat $y = o$. Per methodum autem supra traditam (335) ex aequatione differentiali statim habetur haec integralis $2q\sqrt{a} = \sqrt{(gbq - 4a)}$ seu $2x\sqrt{a} = \sqrt{(gbxy - 4ayy)}$ vnde oritur $\frac{y}{x} = \frac{gb \pm \sqrt{(g^2b^2 - 64a^2)}}{8a}$, quae dat duas lineas rectas, nisi sit $gb < 8a$, quo casu aequatio est imaginaria. In casu quo $n = 2$ erit $\frac{dy}{y} = \frac{-2rdr}{(r-1)^2}$ seu $ly = -2l(r-1) + \frac{2}{r-1}$, vnde fit $ly = -2l(\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}) + 2l\sqrt{y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}} + lC$, seu $l(\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}) - lC = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(2x-y)} - \sqrt{y}}$. Vbi etiam pro C quantitatem quamcunque accipere licet. Si $n < 2$, tum constructio curuae partim a logarithmis

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

mis partim a quadratura circuli pendet; fiunt enim ob $\sqrt{(n^2-4)}$ imaginarium logarithmi inuenti imaginarii. Hoc igitur casu expedit constructionem perficere prae expressione analytica.

PROPOSITIO 38.

Problema.

Tabula IX. Fig. 4.

341. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi uniformi* g, *dataque sit curua quaecunque* BSC *inuenire omnes curuas* AMC, *super quibus corpus descendendo ex* A *dato tempore ad curuam* BSC *perueniat.*

Solutio.

Sit curuarum quaesitarum quaecunque AMC, per cuius quodvis punctum M ducatur curva MQ similis curuae BSC respectu puncti fixi A. et exprimat curuae AN applicata NQ tempus per arcum AM: exponet ergo applicata BD tempus per totam curuam AMC. Quo facto poterit vicissim ex data curua AND curua AMC inueniri. Quare si infinitae curuae AND concipiantur, quae omnes in B habeant applicatam BD communem, eae generabunt infinitas curuas AMC, super quibus omnibus corpus ex A descendendo dato tempore per BD expresso ad curuam BSC perueniat. Sit nunc $AB = a$, $BD = \sqrt{b}$, et arcui QM abscindatur arcus similis BS ex curua data BSC, erit $AQ:AB = PM:RS = AP:AR = PQ:BR$. Ponatur porro

AP

M.E.C.D. 2017

$AP=x$; $PM=y$; $AQ=u$; $QN=t$; $AR=r$; $RS=s$, dabitur ob curuam BSC datam aequatio inter r et s, atque ob curuam AND datam dabitur aequatio inter t et u. At ob similitudinem erit $u:a=y:s=x:r$, vnde erit $y=\frac{us}{a}$, et $x=\frac{ur}{a}$. Celeritas deinde corporis in M debita est altitudini gx, ex qua tempus per AM erit $=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ quod aequale poni debet ipsi t; vnde oritur ista aequatio $gx\,dt^2=dx^2+dy^2$. Quia autem t per u datur sit $dt=p\,du$, et p sit functio ipsius u; atque ob $dx=\frac{u\,dr+r\,du}{a}$ et $dy=\frac{u\,ds+s\,du}{a}$, transibit illa aequatio in hanc: $garup^2\,du^2=(udr+r\,du)^2+(uds+s\,du)^2$. At quia curua BSC datur, erit s functio ipsius r sitque $ds=q\,dr$, existente q functione ipsius r quacunque. His substitutis habebitur aequatio inter u et r ista $garup^2\,du^2=(udr+r\,du)^2+(uq\,dr+s\,du)^2$. Quae radice quadrata extracta dat $\frac{dr}{du}=\frac{-r-sq\pm\sqrt{(2rsq-s^2-r^2q^2+garup^2(1+qq))}}{u(1+qq)}$ Ex qua si aequatio inter r et u inueniatur, inde habebitur simul aequatio inter x et y pro curua quaesita. Quod autem ad curuam AND attinet, sit P functio quaecunque ipsius u, et $\int P\,du$ ita integratum vt euanescat facto $u=0$, et fiat $=A$ posito $u=a$, tum sumatur $t=\frac{\sqrt{b}\int P\,du}{A}$, pro aequatione curuae AND. Erit ergo $p=\frac{P\sqrt{b}}{A}$, vbi pro P functionem quamvis ipsius u ponere licet. Q.E.I.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

342. Si u ponatur $= 0$, eo ipso quoque x et y euanescunt, nisi forte fiat r vel s infinitum. Illo igitur casu in integratione aequationis differentialis inuentae constantem quamcunque addere licet, quia non opus est vt r datum habeat valorem, si u fit $= 0$.

Corollarium 2.

343. Tum igitur ob constantem arbitrariam addendam ex vnica curua AND data innumerabiles inueniuntur curuae AMC quaesito satisfacientes.

Corollarium 3.

344. Si curua BSC ita est comparata, vt nusquam neque r neque s fieri queat infinite magnum, semper vnica curua AND infinitas dabit curuas quaesitas A M C. Quae non solum hanc habebunt proprietatem, vt corpora super iis descendentia simul ad datam BSC perueniant; sed quoque simul ad quam vis datae similem curuam QM pertingent.

Corollarium 4.

345. Cum igitur in integratione aequationis inuentae constantem quamcunque addere liceat,

M.E.C.D. 2017

ceat, ea ita poterit assumi vt curua AMC ad datum punctum C curuae datae BSC dirigatur. Hocque modo infinitae curuae AMC poterunt inueniri, quae omnes in dato puncto C conueniant.

Scholion 1.

346. Posuimus curuas QM similes curuae BSC vt curua ipsa in A erecta fiat infinite parua et omnia puncta curuae BSC in A conueniant, et x et y euanescant posito $u=0$. Potuissemus autem eodem modo curuas QM vel cum BSC congruentes ponere, vel discrepantes lege quacunque. Vt fit Q functio ipsius u quaecunque euancscens posito $u=0$, abeatque ea in B, facto $u=a$, curua QM ita pendere poterit a curva BSC vt sit $x=\frac{Qr}{B}$ et $y=\frac{Qs}{B}$: namque facto $u=a$, curua QM transibit in ipsam BSC, et in A curua in punctum transibit, nisi curua BSC in infinitum progrediatur. At etiam hoc casu pro Q talis accipi poterit functio, vt etiamsi fiat $r=\infty$, tamen Qr et Qs fiat $=0$ si $u=0$. Posito autem $dQ=V\,du$, habebitur aequatio generalis sequens $Qdr(1+qq)+V\,du(r+sq)=du\sqrt{(\frac{gb\,BP^2Qr(1+qq)}{A^2}-(Vs-Vrq)^2)}$. Quae aequatio latissime patet, et ex vnica curua AND infinite infinitas curuas AMC suggeret, quin etiam infinitas suppeditabit, quae per datum punctum C transeunt.

M.E.C.D. 2017

Scholion 2.

347. Quantumuis generalis autem eſt haec aequatio, tamen curua QM eſt ſimilis curuae BSC, quia eſt $x:y=r:s$. Quare adhuc generalior ſolutio poterit exhiberi, in qua curuae QM vtcunque diſſimiles ponuntur curuae BSC eiusmodi tamen vt QM in BSC abeant facto $u=a$. Obtinebitur vero haec ſolutio, ſi R ſumatur functio quaecunque ipſius u euaneſcens facto $u=o$, abeatque R in D poſito $u=a$, ſitque $dR=Wdu$. Sumatur enim $x=\frac{Qr}{B}$ et $y=\frac{Rb}{D}$; abibit x in r et y in s ſi fiat $u=a$, atque euaneſcente u tam x quam y euaneſcent, quicquid ſit r. Hinc autem ſequens orietur aequatio generaliſſima: $dr\,(D^2Q^2+B^2R^2q^2)+du\,(D^2QVr+B^2RWqs)=\pm du\sqrt{(\frac{gBD^2bP^2Qr(D^2Q^2+B^2R^2q^2)}{A^2}-B^2D^2(RVqr-QWs)^2)}$. In hac aequatione loco dr introduci poteſt ds ponendo $\frac{ds}{q}$ loco dr, vel etiam loco r poterit x introduci ponendo loco r eius valorem $\frac{Bx}{Q}$, et tum habebitur aequatio inter u et x. Notandum autem eſt quia Q euaneſcit facto $u=o$, P talem eſſe debere functionem ipſius u, vt P^2Q poſito $u=o$, vel fiat quantitas finita vel infinite magna, at tamen cauendum eſt ne $\int P\,du$ debito modo ſumtum fiat infinite magnum.

Corollarium 5.

348. Aequatio in ſolutione inuenta fit ſeparabilis, ſi fuerit $P=\frac{1}{\sqrt{u}}$; erit $A=2\sqrt{a}$ et $p=\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{au}}$. Habe-

M.E.C.D. 2017

Habebitur enim $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$
dantur enim s et q per r.

Corollarium 6.

349. Simili modo aequatio Schol. I. separationem admittet, si fuerit $P^2Q = V^2$ seu $P = \frac{V}{\sqrt{Q}}$
Habebitur enim $\frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gBbr(1+qq)}{AA}-(s-rq)^2)}} = \frac{V\,du}{Q} = \frac{dQ}{Q}$, in qua indeterminatae u et r sunt a se inuicem separatae.

Exemplum 1.

350. Manente $P^2Q = V^2$ seu $\int P\,du = 2\sqrt{Q}$ ob $V\,du = dQ$, erit facto $u = a$; $A = 2\sqrt{B}$. Vnde fit $\frac{dQ}{Q} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$. Habebit ergo $\int P\,du$ requisitam proprietatem, vt evanescat facto $u = o$; euanescit enim Q. Sit nunc curua BSC circulus super diametro AB descriptus, erit $s = \sqrt{(ar-r^2)}$, et $q = \frac{a-2r}{2\sqrt{(ar-r^2)}}$ atque $1+qq = \frac{a^2}{4(ar-r^2)}$, his valoribus loco s et q substitutis prodibit ista aequatio $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{(-2\sqrt{ar-rr}) \pm r\sqrt{(gbr-4r^2)})\sqrt{(ar-r^2)}}$. Quae aequa-

M.E.C.D. 2017

tio non ſolum indeterminatas a ſe inuicem habet ſeparatas, ſed etiam generaliter per logarithmos integrari poteſt: poteſt enim in aequatione $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2ar+2r^2 \pm r\sqrt{(gb-4r)(a-r)}}$ membrum irrationale rationale effici. Prodibit autem integralis haec $lQ = \frac{4a}{4a-gb} l \frac{2\sqrt{(a-r)} \mp \sqrt{(gb-4r)}}{\sqrt{r}} \pm \frac{\sqrt{gab}}{4a-gb} l \frac{\sqrt{a(gb-4r)} \pm \sqrt{gb(a-r)}}{\sqrt{a(gb-4r)} - \sqrt{gb(a-r)}} + lC$. Notari hic convenit caſum quo $gb = 4a$ ſeu $\sqrt{b} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, quo tempus per quamvis curuam AMC aequale ponitur tempori deſcenſus per rectam verticalem AB; tum enim erit $\frac{dQ}{Q} = \frac{adr}{-2(ar-r^2) \pm 2(ar-r^2)}$. Si igitur ſignum + valeat, erit $dr = o$, er $r =$ conſt. $= c$, vnde fit $s = \sqrt{(ac-c^2)}$ et $x:y = \sqrt{c}:\sqrt{(a-c)}$ ſeu $y\sqrt{c} = x\sqrt{(a-c)}$, quae aequatio omnes dat chordas in hoc ſemicirculo ex A ductas, quemadmodum jam demonſtravimus tempora per ſingulas chordas eſſe inter ſe aequalia. Valeat ſignum − erit $\frac{4dQ}{Q} = -\frac{adr}{ar-rr}$, atque hinc $Q^{-4} = \frac{Cr}{a-r}$, ſe $\frac{r}{a-r} = \frac{C^4}{Q^4}$. Erit ergo $Q = C\sqrt{\sqrt{\frac{a-r}{r}}}$, atque ob $s = \sqrt{(ar-r^2)}$ habebitur $x = \frac{Cr}{B}\sqrt{\sqrt{\frac{a-r}{r}}}$ et $y = \frac{C}{B}\sqrt{\sqrt{r(a-r)^3}}$; eliminata ergo r prodibit iſta aequatio (poſito $\frac{C}{B} = m$) $y^2 + x^2 = ma\sqrt{xy}$. Hae ergo curuae hanc habent proprietatem, vt arcus earum a ſemicirculo abſciſſae abſoluantur deſcendendo eodem tempore, eo ſcilicet tempore, quo ſingulae ſemicirculi chordae percurruntur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 7.

351. Huius autem curuae cuius aequatio eſt $y^2 + x^2 = maV\,xy$ figura eſt AMFA; habet nimirum diametrum AF cum verticali AP angulum ſemirectum conſtituentem et in A nodum. At vero omnes hae curuae ſunt inter ſe ſimiles, et omnes ad omnes circulos accommodari poſſunt. Tabula IX. Fig. 5.

Corollarium 8.

352. Si ergo in hac curua ſumatur quodcunque punctum M et per hoc et A circulus tranſiens concipiatur centrum habens in verticali AP, corpus arcum AM eodem tempore percurret, quo diametrum circuli, ſeu quo chordam AM. Quare haec curua hanc habet proprietatem, vt quivis arcus AM a corpore ex A deſcendente abſolvatur eodem tempore, quo ſubtenſa AM.

Corollarium 9.

353. Hoc ergo caſu quo $P^2Q = V^2$ perinde eſt ſive ſit $Q = u$ ſive ſecus; eadem enim prodit aequatio inter x et y. Vti tam ex exemplo hoc quam ex aequatione intelligitur. Tabula IX. Fig. 4.

Exemplum 2.

354. Manente $P^2Q = V^2$, vt ſit $\frac{dQ}{Q} = \frac{\quad}{dr}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{dr(1+qq)}{-r-sq\pm\sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$, sit curua BSC circulus centro A radio AB$=a$ descriptus, erit $s=\sqrt{(a^2-r^2)}$ et $q=\frac{-a}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ atque $1+qq=\frac{a^2}{a^2-r^2}$. Quibus substitutis prodibit sequens aequatio, $\frac{dQ}{Q}=\frac{\pm adr}{\sqrt{(\frac{gbr}{4}-a^2)(a^2-r^2)}}$ vbi gb maius esse debet quam $4a$, quia r non excedere potest a. Hinc statim ille radius innotescit, qui quaesito satisfacit, ponendo $\frac{gbr}{4}=a^2$ seu $r=\frac{4a^2}{gb}$, quo casu erit $s=\frac{a\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{gb}$. Vnde erit $x:y=4a:\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}$ et $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{(g^2b^2-16a^2)}}{4}$ quae est tangens anguli illius radii, super quo corpus dato tempore $\sqrt{b}$ ad peripheriam peruenit, cum verticali AB. Curuae praeterea algebraicae non dantur, quia formula differentialis non effici potest rationalis.

Exemplum 3.

355. Sumta aequatione generalissima ex §. (347.) et ponatur linea BSC recta horizontalis fiet $r=a$ et $dr=o$. Hanc ob rem loco dr introducatur eius valor $\frac{ds}{q}$, vbi q erit infinite magnum. Deletis ergo terminis, qui prae q euanescunt, proueniet ista aequatio: $ABRds+ABWsdu=\pm D du\sqrt{(gBabP^2Q-A^2a^2V^2)}$. Quae aequatio ob $Wdu=dR$ et P, Q, et V data per u integrationem admittit. Erit nempe $\frac{ABRs}{D}=C\pm$

M.E.C.D. 2017

$C \pm \int du V (gBabP^2Q - A^2a^2V^2)$. Ex qua aequatione ergo invenitur s. Deinde cum sit $y = \frac{Rs}{D}$, at y euanescere debeat facto $u = 0$, debebit esse $C = 0$, si quidem integrale $\int du V (gBabP^2Q - A^2a^2V^2)$ ita sumatur vt euanescat posito $u = 0$. Tum ergo erit $x = \frac{Qa}{B}$ et $y = \frac{\pm 1}{AB} \int du V (gBabP^2Q - A^2a^2V^2)$. Quae est aequatio generalis pro omnibus curuis super quibus corpus ex A ad horizontalem datam descendit.

Exemplum 4.

356. Teneatur aequatio generalissima supra inventa (347), et ponatur linea BSC recta verticalis parallela ipsi AB et ad distantiam f ab ea posita erit $s = f$ et $q = 0$. Quare habebitur ista aequatio $ADQdr + ADrdQ = \pm du V (gBD^2bP^2Qr - A^2B^2f^2W^2)$. Cum autem sit $Qr = Bx$ hoc substituto prodibit $ADdx = \pm du V (gD^2bP^2x - A^2f^2W^2)$, vnde invento x erit $y = \frac{fR}{D}$. At quia in illa aequatione indeterminatae x et u non sunt a se inuicem separatae, non multum ex ea deriuare licet.

Scholion 3.

357. Ex generali huius problematis solutione, quando vnica curua AND infinitas dat curuas AMC, colligere licet solutionem huius problematis, quo infinitae requiruntur curuae, super

M.E.C.D. 2017

quibus omnibus corpus ex A ad datum punctum peruenit. Quaelibet enim curua AND vnam dabit curuam per datum punctum curuae BSC transeuntem; hocque modo innumerabiles huiusmodi curuae obtinebuntur. Sed cum hoc modo solutio nimis esset difficilis et operosa, aliam genuinam magis afferre conuenit. Modus autem, quo vtemur ita est comparatus, vt vnam curuam jam nosse oporteat, ex qua innumerabiles deducere docebimus. Haec ergo curua quae nota esse debet, ex alterutra traditarum methodo eliciatur vt ex §. 350, vbi curua per quodvis punctum semicieculi transiens inveniri potest dato tempore describenda.

PROPOSITIO 39.

Problema.

Tabula X. Fig. 1.

358. *Sollicitetur corpus perpetuo deorsum vi vniformi* g, *dataque sit curua* AMC *super qua corpus ex* A *ad punctum datum* C *peruenit, inuenire omnes curuas* ANC *super quibus corpus eodem tempore ad punctum* C *ex* A *descendit.*

Solutio.

Sumta verticali AB pro axe omnium curuarum sit curuae datae AMC abscissa AP $= t$, applicata PM $= u$; sitque curua ANC vna quaesitarum: capiatur in ea arcus AN, qui eodem tempore absol-

M.E.C.D. 2017

absoluatur, quo arcus AM, jungantur puncta M et N recta MN, et constructur curua ALB talis, vt applicata PL aequalis sit rectae MN. Haec ergo curua ALB occurret axi AB in punctis A et B; nam incidente puncto M in A, punctum N quoque in A incidet, et posito M in C punctum N quoque erit in C, quia arcus AMC et ANC eodem tempore percurri ponuntur. Intelligitur autem ex curua ALB inveniri posse curvam ANC; quare si infinitae huiusmodi curuae ALB concipiantur, in A et B incidentes in AB, earum quaeque dabit curuam ANC, hocque modo innumerabiles prodibunt curuae ANC quaesito satisfacientes. Sit nunc $PL=r$, erit r functio quaedam ipsius $AP=t$; curuae autem ANC ponatur abscissa $AQ=x$, et $QN=y$. His positis erit $MN=\sqrt{((x-t)^2+(u-y)^2)}=r$, ideoque $y=u\pm\sqrt{(r^2-(x-t)^2)}$. Porro quia tempus per AM aequale ponitur tempori per AN, erit. $\int\frac{\sqrt{(dx^2+du^2)}}{\sqrt{gt}}=\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{gx}}$ seu $x\,dt^2+xdu^2=tdx^2+tdy^2$. Est autem $dy=du\pm\frac{(rdr-xdx+tdx+xdt-tdt)}{\sqrt{(r^2-(x-t)^2)}}$. Sit $du=p\,dt$ et $dr=q\,dt$, erunt r, p, et q functiones ipsius t: ponatur porro breuitatis gratia $x-t=z$ seu $x=t+z$, erit $dy=p\,dt\pm\frac{qrdt\mp zdz}{\sqrt{(r^2-z^2)}}$, et $dy^2+dx^2=p^2dt^2+dt^2+2dtdz+dz^2\pm\frac{2pqrdt^2\mp 2pzdtdz}{\sqrt{(r^2-z^2)}}+\frac{q^2r^2dt^2-2qrzdtdz+z^2dz^2}{r^2-z^2}$, Hinc obtinetur ista aequatio $\frac{tr^2dz^2}{r^2-z^2}-\frac{2tqrzdtdz-tq^2r^2dt^2}{r^2-z^2}\pm\frac{2pztdtdz\mp 2pqtrdt^2}{\sqrt{(r^2-z^2)}}=2tdtdz+zdt^2+zp^2dt^2$ ex qua

M.E.C.D. 2017

z ex t determinetur, habebitur aequatio inter x et y. Quo autem appareat cuiusmodi functio ipsius t loco r debeat accipi, vt r euanescat, tam posito $t = o$ quam $t = AB = a$, sit P functio quaecunque ipsius t euanescens posito $t = o$, et Q sit etiam talis functio euanescens posito $t = o$, abeat vero Q in A si fiat $t = a$; poterit ergo poni $r = P(A - Q)$. Hocque valore substituto quicquid loco P et Q substituatur, habebitur aequatio pro curuis quaesitis. Q. E. I.

Scholion I.

359. Ex hac quidem aequatione maxime intricata parum concludi potest ad propositum, etiamsi haec methodus genuina esse videatur. Saepe autem aequatio inuenta ad absurdum deducere debet, vt si curua data AMC fuerit linea breuissimi descensus, quo casu non dari potest alia curua, super qua descensus fiat eodem tempore. Ad nostrum ergo institutum conueniens videtur de lineis celerrimi descensus tractare, eaque problemata resoluere, in quibus inter omnes curuas vel eiusdem longitudinis vel aliam proprietatem communem habentes ea quaeritur, quae minimo tempore absoluatur. Atque etiam quemadmodum inter omnes lineas, super quibus descensus fit eodem tempore, ea sit inuenienda, quae data quapiam proprietate sit praedita. Etiamsi enim difficillimum sit omnes lineas idem descen-

M.E.C.D. 2017

deſcenſus tempus habentes exhibere, tamen ex iis quaelibet poteſt inueniri ex proprietate, quam prae reliquis omnibus poſſidet. Requiritur autem ad hanc rem pertractandam methodus iſoperimetricorum, quam vt paſſim expoſitam hic non explicabimus.

Scholion 2.

360. Huius autem problematis ſolutio per (348) ſequenti modo habetur: erat ibi $\frac{du}{u} = \frac{dr(1+qq)}{-r-sq \pm \sqrt{(\frac{gbr}{4}(1+qq)-(s-rq)^2)}}$. Sit punctum C ad quod omnes curuae conuenire debent, ponaturque AE$=f$ et EC$=h$, ſi ergo fit $r=f$, fieri debet $s=h$. Ad hoc ſit S functio quaecunque ipſius r, quae abeat in F poſito $r=f$, quo facto ponatur $s=\frac{Sh}{F}$. Subſtituatur hic valor in ſuperiore aequatione, eaque ita integretur vt poſito $u=a$ fiat $r=f$. Deinde ex ea aequatione prodibit aequatio inter coordinatas curuae quaeſitae AMC nempe AP$=x$ et PM$=y$, ex eo quod eſt $x=\frac{ur}{a}$ et $y=\frac{us}{a}$. Atque arbitrarius valor ipſius S dabit infinitas curuas A M C puncta A et C jungentes, et ſuper quibus corpus deſcendens tempore dato $=\sqrt{b}$ peruenier ex A ad C. Sit autem $dS = Tdr$, erit $q = \frac{bT}{F}$, atque $\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2+b^2T^2)}{-F^2r-b^2ST \pm \sqrt{(\frac{gF^2br}{4}(F^2+b^2T^2)-(FbS-FbTr)^2)}}$ ſeu

Tabula IX. Fig. 4.

$\frac{du}{u}$

M.E.C.D. 2017

$$\frac{du}{u} = \frac{dr(F^2+b^2T^2)}{-F^2r-b^2ST \pm FV(\frac{gbr}{u}(F^2+b^2T^2)-(bS-bTr)^2)}$$

Quae aequatio ita integretur, vt posito $u=a$ fiat $r=f$; quo facto ponatur $x=\frac{ur}{a}$ et $y=\frac{bSu}{Fa}$; atque habebitur aequatio inter x et y pro infinitis curuis AMC quaesito satisfacientibus.

PROPOSITIO 40.
Problema.

Tabula X. Fig. 2.

361. *Inuenire legem generalem, secundum quam curua disposita esse debet, ut corpus super ea descendens citissime perueniat ad quoduis curuae punctum.*

Solutio.

Sit AMC curua huiusmodi, super qua corpus ex A ad C tempore breuiore perueniat, quam super quavis alia curua per puncta A et C transeunte. Sumtis ergo in ea duobus quibusque M et μ, curua inter ea intercepta ita debet esse comparata, vt corpus in motu suo per AMC, arcum inter M et μ interceptum breuiore tempore absoluat quam quemuis alium, si esset interceptus. Sint nunc puncta M et μ proxima juncta duobus elementis $Mm\mu$, et debebit tempus per $Mm\mu$ esse minimum; seu per regulas methodi maximorum et minimorum aequali tempori per elementa proxima $Mn\mu$. Ducantur ad

axem

M.E.C.D. 2017

axem AP applicatae MP, mp, $\mu\pi$, ſumtisque elementis Pp, $p\pi$ inter ſe aequalibus, ſeu quoque MG$=m$H, et pm ſi opus eſt ad n producta, erit mn infinite paruum reſpectu elementorum Mm et $m\mu$. Debebit ergo eſſe $t.\,Mm+t.\,m\mu=t.\,Mn+t.\,n\mu$. Sit celeritas quam corpus in M habet, debita altitudini v, qua ergo tam elementum Mm, quam Mn percurret. Celeritas autem quam in m habebit debita ſit altitudini $v+du$, et celeritas, quam in n habebit debita ſit altitudini $v+du+ddw$; illa autem celeritate percurret elementum $m\mu$, hac vero elementum $n\mu$. Hinc ergo habebitur iſta aequatio, $\frac{Mm}{\sqrt{v}}+\frac{m\mu}{\sqrt{(v+du)}}=\frac{Mn}{\sqrt{v}}+\frac{n\mu}{\sqrt{(v+du+ddw)}}$, eſt vero $\frac{1}{\sqrt{(v+du+ddw)}}=\frac{1}{\sqrt{(v+du)}}\;\frac{-ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}$, vnde ductis centris M et μ arculis mg et nh, erit $\frac{ng}{\sqrt{v}}=\frac{mh}{\sqrt{(v+du)}}+\frac{n\mu.ddw}{2(v+du)\sqrt{(v+du)}}$. Porro quia eſt $\frac{1}{\sqrt{(v+du)}}=\frac{1}{\sqrt{v}}-\frac{du}{2v\sqrt{v}}$ et $\frac{1}{(v+du)\sqrt{(v+du)}}=\frac{1}{v\sqrt{v}}-\frac{3du}{2v^2\sqrt{v}}$. Quibus, ineglectis negligendis, ſubſtitutis oritur $2v(mh-ng)=mh.du-n\mu.ddw=mh.du-Mm.ddw$. Eſt vero propter triangula ſimilia nmg, mMG et nmh, μmH vt ſequitur $ng:mn=m$G$:m$M, ſeu $ng=\frac{mG.mn}{Mm}$ et $mh:mn=\mu$H$:m\mu$, ſeu $mh=\frac{\mu H.mn}{m\mu}$. Quamobrem erit $2v\left(\frac{mH}{m\mu}-\frac{mG}{Mm}\right)=\frac{mG.du}{Mm}-\frac{Mm.ddw}{mn}=2v$ diff. $\frac{mG}{Mm}$. Quae aequatio eſt homogenea et determinat naturam curuae AMC brachyſtochronae vocatae

catae, ſuper qua corpus tempore breuiſſimo ex A ad C peruenit. Q. E. I.

Corollarium 1.

362. Si ergo dicatur $MG = mH = dx$, $mG = dy$, et $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$; erit $H\mu = dy + ddy$ et $m\mu = ds + dds$. His ſubſtitutis habebitur $2vd\frac{dy}{ds} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. In qua ſi ex potentiis ſollicitantibus determinentur v, du, et ddw, habebitur aequatio pro curua brachyſtochrona. At ſemper ddw ita inuoluet mn, vt mn ex calculo excedat.

Corollarium 2.

363. Sit radius oſculi curuae $Mm\mu = r$ iſque in plagam auerſam ab axe AP directus erit $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, at eſt $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dsddy - dydds}{ds^2} = \frac{dx^2ddy}{ds^3}$. Quare erit $d.\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{r}$, hinc prodibit iſta aequatio $\frac{2vdx}{r} = \frac{dydu}{ds} - \frac{dsddw}{mn}$. Ubi notandum eſt eſſe $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua curua in M ſecundum normalem ad curuam premitur.

Corollarium 3.

364. Si ex potentiis ſollicitantibus fluat $dv = Pdx + Qdy + Rds$; erit $du = Pdx + Qdy + Rds$ et $ddw = Q.mn + R.ng$, quia puncto m in n translato creſcit dy particula mn et ds particu-

la

la *ng*. Quia autem eſt $ng = \frac{dy.mn}{ds}$, erit $\frac{ddw}{mn} = -Q - \frac{Rdy}{ds}$, quibus ſubſtitutis habebitur iſta aequatio $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy - Qdx}{ds}$.

Scholion I.

365. Ex ſolutione intelligitur formulam inventam latiſſime patere, atque ad potentias ſollicitantes quascunque extendi, etiam reſiſtentia non excepta. Quaecunque enim fuerint potentiae ſollicitantes, determinari poteſt tam *du* quam *ddw*, qui valores ſubſtituti dabunt aequationem pro brachyſtochrona quaeſita. Attamen haec tantum locum habent, ſi potentiarum directiones ſint in eodem plano: curua enim inuenta eſt in eodem plano ſita. Nihilo tamen minus ſi potentiae non fuerint in eodem plano, curua brachyſtochrona in dato plano ope formulae huius poterit inueniri. In quolibet enim plano dato peculiaris erit curua brachyſtochrona quaecunque fuerint potentiae ſollicitantes. Alia vero quaeſtio eſt, ſi quaeratur linea brachyſtochrona inter omnes omnino lineas data duo puncta jungentes, etiam non in vno plano ſitas. Quoties vero potentiarum ſollicitantium directiones in eodem plano ſunt poſitae, dubium non eſt lineam brachyſtochronam in eodem poſitam eſſe plano. Nam ſi curuae non eſſent in eodem plano potentiae oblique agerent, et propterea corpus non tantum, quantum fieri poteſt, accelerarent. Ex hac

M.E.C.D. 2017

igitur ſolutione tam linea abſolute brachyſtochrona, ſi potentiarum ſollicitantium directiones ſunt in eodem plano, inuenitur, quam linea, quae in dato plano eſt brachyſtochrona, quaecunque fuerint potentiae ſollicitantes.

Scholion 2.

366. Quaeſtionem hanc de linea brachyſtochrona ſeu celerrimi deſcenſus primus produxit Cel. Ioh. Bernoulli, atque plures eius ſolutiones extant tam in Act. Lipſ. quam Transactionibus Angl. et Comm. Acad. Pariſ. et alibi vbi hoc problema tam in hypotheſi potentiae ſollicitantis deorſum directae, quam pro viribus centripetis ſolutum dederunt. Nemo autem problema fundamentale, quale hic dedimus, tam late patens praemiſit, vt ad potentias quascunque et reſiſtentiam etiam extendi poſſet. Sumſerunt enim omnes $ddw=o$, quod ſemper perperam fit, niſi directio potentiae ſit MG vel mH. Et hanc ob rem Cel. Hermannus ceſpitauit, dum tali propoſitione ad brachyſtochronas in medio reſiſtente inueniendas eſt vſus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727; quasque correctas dedi in iisdem Comm. A. 1734. ex hoc ipſo problemate.

PROPOSITIO 41.
Problema.

Tabula X. Fig. 2.

367. *Si corpus perpetuo deorſum trahatur vi qua-*

M.E.C.D. 2017

quacunque; inuenire lineam brachyſtochronam AMC *ſuper qua corpus citiſſime ex* A *ad* C *deſcendit.*

Solutio.

Poſita AP$=x$; PM$=y$; et arcu AM$=s$, ſit vis quae corpus in M deorſum vrget $=$P; erit $v=\int P dx$ hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $x=0$, ſi quidem corpus motum in A ex quiete inchoare ponitur: atque $dv=P dx$. Erit ergo $du=P dx=dv$ et $ddw=0$, quia dx inuariatum manet, eunte m in n. Quocirca habebitur iſta aequatio $2v.d.\frac{dy}{ds}=\frac{dy\,dv}{ds}$, cuius integralis eſt $l\frac{v}{a}=2\,l\frac{dy}{ds}$ ſeu $v\,ds^2=a\,dy^2$, hincque $dx^2\int P dx=a\,dy^2-dy^2\int P dx$. Quamobrem pro linea brachyſtochrona quaeſita habebitur iſta aequatio $dy=\frac{dx\sqrt{\int P dx}}{\sqrt{(a-\int P dx)}}$, in qua indeterminatae x et y ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Curuae autem longitudo habetur ex hac aequatione $ds=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-\int P dx)}}$. Q.E.I.

Corollarium 1.

368. In A igitur vbi celeritas corporis euaneſcit ſeu fit $\int P dx=0$, erit $dy=0$ ſeu tangens curuae in A erit verticalis incidens in AP. At vbi fit $\int P dx=a$, ibi tangens curuae erit horizontalis.

Corollarium 2.

369. Quia $ddw=0$, et $du=P dx$, erit $\frac{2v}{r}=\frac{P\,dy}{ds}$. (363) Eſt vero $\frac{P\,dy}{ds}$ vis normalis, qua cur-

M.E.C.D. 2017

va in M ſecundum normalem verſus axem AP ductam premitur. Conſequenter vis normalis eſt aequalis vi centrifugae et in eandem plagam tendens. Quocirca linea brachyſtochrona hanc habet proprietatem, vt tota preſſio, qua curua premitur, ſit duplo maior quamvis normalis ſola. In ſequentibus vero demonſtrabimus hanc proprietatem in omnibus lineis brachyſtochronis ſive in vacuo ſiue in medio reſiſtente locum habere.

Corollarium 3.

370. Propter arbitrariam *a* dantur infinitae curuae brachyſtochronae omnes in A initium habentes. Atque hac litera *a* effici poteſt, vt curva ex A per datum punctum C transeat, quae erit linea inter A et C, ſuper qua tempus eſt minimum.

Corollarium 4.

371. Quia curua AMC alicubi habet tangen-
Tabula X, Fig. 3. tem horizontalem, ſit ea BC et in C ſumatur alius axis verticalis CQ. Sit $CQ = X$, $QM = Y$ et $CM = S$, erit $dX = -dx$, $dY = -dy$ et $dS = -ds$; atque $\int P dx = a - \int P dX$ integrali $\int P dX$ ita accepto vt evaneſcat poſito $X = 0$. Ad hunc ergo axem CQ ſi curua referatur, habebitur iſta aequatio $dY = \frac{dX\sqrt{(a - \int P dX)}}{\sqrt{\int P dX}}$ ſeu $dS = \frac{dX\sqrt{a}}{\sqrt{\int P dX}}$.

Corollarium 5.

372. Hae ergo omnes curuae ad vtramque partem axis CQ duos arcus habent ſimiles et aequales.

M.E.C.D. 2017

les. Simili modo ad vtramque partem axis AB curua aequaliter eſt diſpoſita. Quamobrem huiusmodi curuae infinitas diametros habebunt inter ſe parallelas, et ad diſtantiam BC poſitas; niſi forte potentia ſollicitans ita accipiatur, vt ſupra A ſit negatiua, quo caſu curua CMA ſurſum tendere poterit et partem concavam deorſum convertere.

Exemplum I.

373. Sit potentia ſollicitans vniformis ſeu $P = g$, erit $\int P dx = gx$; vnde loco a poſito gb pro brachyſtochrona in hac potentiae ſollicitantis hypotheſi habebitur iſta aequatio $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}}$ ſeu $ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}}$. At ſi aequatio ad axem CQ referatur erit $dY = \frac{dX\sqrt{(b-X)}}{\sqrt{X}}$ et $dS = \frac{dX\sqrt{b}}{\sqrt{X}}$ cuius integralis eſt $S = 2\sqrt{b}X$. Ex qua aequatione patet curuam eſſe cycloidem ſuper baſi horizontali a circulo diametri b deſcriptam et deorſum conuerſam: quemadmodum hoc a Cel. Ioh. Bernoulli aliisque eximiis Geometris jam pridem eſt inuentum. Si itaque dentur duo quaecunque puncta A et M, linea ſuper qua corpus ex A citiſſime ad M deſcendit, inuenitur ſi deſcribatur cyclois cuſpidem in A, et baſem horizontalem habens, atque per punctum M tranſiens; id quod ex eo, quod omnes cycloides ſunt curuae ſimiles, ex vnica deſcripta cycloide facile efficitur. Tempus autem, quo corpus ex A ad M pertingit, quodque eſt minimum, erit $= \int \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{g(bx-x^2)}}$,

M.E.C.D. 2017

et curuae AM longitudo erit $= \int \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(b-x)}} = 2b - 2\sqrt{b}(b-x)$. Cum autem sit $PM = y = \int \frac{xdx}{\sqrt{(bx-xx)}}$; erit tempus per $AM = \frac{2y+2\sqrt{(bx-xx)}}{\sqrt{gb}}$ = arcui in circulo diametri b cuius sinus versus est $= x$ ducto in $\frac{2}{\sqrt{gb}}$.

Exemplum 2.

374. Si potentia sollicitans P fuerit vt potestas quaecunque abscissae CQ, nempe $P = \frac{X^n}{f^n}$ erit $\int PdX = \frac{X^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Consequenter curua brachystochrona AMC exprimetur hac aequatione $dY = \frac{dX\sqrt{(n+1)af^n - X^{n+1}})}{X^{\frac{n+1}{2}}}$ seu $dS = \frac{dX\sqrt{(n+1)af^n}}{X^{\frac{n+1}{2}}}$, ita vt sit $S = \frac{2X^{\frac{1-n}{2}}\sqrt{(n+1)af^n}}{1-n}$

Quare si fuerit vel $n = 1$ vel $n > 1$ curua CM erit infinite magna, seu ipsa recta BC. Cuspis autem curuae A seu locus in quo motus incipit habetur sumendo $CQ = BA = \sqrt[n+1]{(n+1)af^n}$. Curuae prodibunt algebraicae si fuerit $n = \frac{1-2m}{1+2m}$ denotante m numerum integrum affirmatiuum quemcunque. His igitur casibus erit n numerus negatiuus, vnitate minor, ita tamen vt $n+1$ sit numerus affirmatiuus. Sit $m = 1$, erit $n = -\frac{1}{3}$. Quare fiet $dY = \frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}}$

M.E.C.D. 2017

$= \frac{dX}{X^{\frac{1}{3}}} \sqrt{(\frac{2}{3}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}})}$, cuius integralis eſt $Y =$

$\frac{2a\sqrt{2a}}{3\sqrt{3}f} - (\frac{3}{2}af^{-\frac{1}{3}} - X^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}})$. Quae aequatio ab irrationalitate liberata fit ordinis ſexti. Simili modo aliae curuae algebraicae inuenientur, quae in certis hypotheſibus ſunt brachyſtochronae.

Scholion 1.

375. Ex data problematis ſolutione ſequitur ſimul ſolutio problematis inuerſi, quo quaeritur potentia ſollicitans deorſum directa, talis vt data curua ſit brachyſtochrona. Debet autem haec curua in puncto infimo C habere tangentem horizontalem, et alicubi in A vbi eſt motus initium, tangentem verticalem. Vt ſi fuerit aequatio pro curua data haec $dY = R\,dX$, erit $R^2 \int P\,dX = a - \int P\,dX$ atque $\int P\,dX = \frac{a}{R^2+1}$. Vnde inuenitur $P = \frac{-2aR\,dR}{(R^2+1)^2\,dX} = \frac{-2a\,dX\,dY\,ddY}{dS^4}$. Si ergo radius oſculi in M ponatur r, propter $r = -\frac{dS^3}{dX\,ddY}$ habebitur $P = \frac{2a\,dY}{r\,dS}$. Quare problema hac vnica ſoluetur analogia: vt radius oſculi curuae in M ad lineam datam; ita ſinus anguli, quem tangens curuae in M cum verticali facit, ad potentiam ſollicitantem, quae quaeritur. Altitudo vero debita celeritati, quam corpus in M habet, eſt $a - \int P\,dX = \frac{aR^2}{R^2+1} = \frac{a\,dY^2}{dS^2}$, ex quo ſequitur celeritatem corporis eſſe illi ipſi ſinui anguli, quem tangens curuae cum verti-

M.E.C.D. 2017

verticali conſtituit, proportionalem. Vt ſi ſit curva CMA circulus radio c deſcriptus; erit $r = c$ et $dY = \frac{c\,dX - X\,dX}{\sqrt{(2cX - XX)}}$ atque $dS = \frac{c\,dX}{\sqrt{(2cX - XX)}}$, ex quibus fit $P = \frac{2a(c-X)}{c^2} = \frac{2a.AP}{cc}$. Vis ergo corpus deorſum trahens proportionalis eſſe debet abſciſſae AP, cui etiam celeritas eſt proportionalis.

Scholion 2.

376. Inuenta linea brachyſtochrona pro hypotheſi potentiae ſollicitantis deorſum tendentis, ordo requireret, vt lineas brachyſtochronas in hypotheſi virium centripetarum determinaremus. Tabula X. Fig. 2. At propoſitio fundamentalis (361.) ita eſt comparata, vt elementa curuae Mm et $m\mu$ ad axem AP et ordinatas orthogonales MP, mp referantur, quod ad caſum virium centripetarum non commode quadrat. Videtur quidem elementa MG et mH vt conuergentia ad centrum virium conſiderari poſſe; ſed hic ipſe error, qui ex hoc oritur, quod elementa MG et mH non eſſent parallela, vt propoſitio fundamentalis requirit, perperam negligitur. Perſpicuum hoc reddi poteſt determinando radio oſculi, qui ſi MG et mH fuerint inter ſe parallela eſt $= MG$: d. $\frac{m\,G}{M\,m}$, quae autem expreſſio non locum habet, ſi MG et mH ad centrum virium convergunt. Quare antequam ad brachyſtochronas in hypotheſi virium centripetarum accedamus, ex propoſitione fundamentali

M.E.C.D. 2017

tali generalem deriuabimus proprietatem cuicunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi accommodatam. Ex quibus perſpicietur Cel. Hermannum in Phoronomia aliosque, qui brachyſtochronas pro viribus centripetis dederunt, eſſe deceptos, dum vſi ſunt principio cum veritate non conſentaneo, vt mox indicabitur.

PROPOSITIO 42.

Theorema.

377. *Quaecunque fuerint potentiae ſollicitantes, ea linea erit brachyſtochrona, quam corpus ſuper ea motum premit vi duplo maiore, quam eſt vel ſola vis centrifuga, vel ſola vis normalis.* Tabula X. Fig. 2.

Demonſtratio.

Quaecunque et quotcunque fuerint potentiae ſollicitantes, eae omnes in binas reſolui poſſunt, quarum altera trahat ſecundum MG altera ſecundum MP. Sit illa ſecundum MG trahens $= P$ et quae ſecundum MP trahit $= Q$, et dicantur $AP = x$, $PM = y$, et $AM = s$; itemque altitudo celeritati in M debita $= v$. Erit ex his duabus viribus vis tangentialis $= \frac{Pdx - Qdy}{ds}$, et vis normalis $= \frac{Pdy + Qdx}{ds}$. Hanc ob rem erit $dv = Pdx - Qdy$. Cum hac expreſſione comparetur, quod ſupra (364.) eſt allatum, vbi poſuimus $dv = Pdx + Qdy$

M.E.C.D. 2017

$Qdy+Rds$, erit Q negatiuum et $R=0$. Sequitur ergo exinde fore $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy+Qdx}{ds}$. At eſt $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga, qua curua in M premitur et $\frac{Pdy+Qdx}{ds}$ eſt vis normalis. Quare cum vis centrifuga ſit aequalis vi normali, tota preſſio, quam curua ſuſtinet duplo maior eſt quam vel ſola vis centrifuga, vel ſola vis normalis. Q. E. I.

Scholion I.

378. In ſequente capite demonſtrabimus hanc eandem propoſitionem locum etiam habere in medio quocunque reſiſtente; id quod quidem eadem opera hic demonſtrare potuiſſemus: ſed quia reſiſtentiae ſequens caput eſt deſtinatum, eo potius hoc theorema transferre viſum eſt.

Corollarium 1.

379. Ex hac igitur propoſitione facile erit in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi brachyſtochronas determinare. Hocque ipſum jam ex aliqua parte ſupra praeſtitimus, vbi curuas determinauimus, in quibus preſſio totalis datam habeat rationem ad vim centrifugam.

Corollarium 2.

380. Cum ſit $dv = Pdx - Qdy$, erit $v = \int Pdx - \int Qdy$ his integralibus ita accipiendis, vt euanescant

M.E.C.D. 2017

neſcant factis x et $y = o$, ſi quidem motus in A ex quiete incipere debet.

Corollarium 3.

381. Si ergo hic pro v inuentus valor ſubſtituatur habebitur aequatio pro curua brachyſtochrona haec $\frac{2\int P\,dx - 2\int Q\,dy}{r} = \frac{P\,dy + Q\,dx}{ds}$. Eſt vero $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ (363.) ſumto dx pro conſtante, quia in partem oppoſitam axi AP cadere r ponitur; vnde habetur haec aequatio: $\frac{2\,dx\,ddy}{ds^2}(\int P\,dx - \int Q\,dy) = P\,dy + Q\,dx$.

Corollarium 4.

382. Quia haec aequatio eſt differentialis ſecundi gradus atque ideo duplicem integrationem requirit, altera integratione conſtans quaevis poterit adiici, altera effici debet, vt facto $x = o$ fiat quoque $y = o$. Infinitae ergo prodeunt curuae brachyſtochronae pro eadem potentiarum ſollicitantium hypotheſi. Atque conſtante arbitraria effici poterit, vt curua per datum punctum transeat.

Corollarium 5.

383. Tempus, quo corpus ex A ad M pervenit, eſt $= \int \frac{ds}{\sqrt{(\int P\,dx - Q\,dy)}} = \int V \frac{2\,dx\,ddy}{P\,dy + Q\,dx}$, quae quidem expreſſio prius ex aequatione curuae eſt in-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

veſtiganda; minimum vero hoc tempus eſſe debet inter omnia alia tempora motuum per curvas omnes puncta A et M jungentes.

Scholion 2.

384. Quemadmodum porro in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi eae curuae libere deſcribuntur, in quibus vis centrifuga aequalis eſt et contraria vi normali; ita eae curuae erunt brachyſtochronae, in quibus vis normalis quoque aequalis eſt vi centrifugae, ſed in eandem plagam tendens. Atque quemadmodum illa proprietas communis eſt omnium curuarum libere deſcriptarum etiam in medio reſiſtente, ita haec quoque proprietas ad omnes lineas brachyſtochronas in medio reſiſtente extenditur.

PROPOSITIO 43.
Problema.

Tabula X. Fig. 4.

385. *Si corpus vi quacunque perpetuo trahatur ad centrum virium* C: *inuenire lineam brachyſtochronam* AM, *ſuper qua corpus ex* A *citiſſime ad* M *pertingat.*

Solutio.

A puncto A, in quo motus initium ponitur, ad centrum virium C ducatur recta AC, item

MC

M.E.C.D. 2017

MC, et in tangentem MT ex C perpendiculum CT. Ponantur AC$=a$; CM$=y$; CT$=p$; vis centripeta in M$=$P et celeritas in M debita altitudini v. His poſitis erit $dv=-\mathrm{P}dy$ et $v=-\int \mathrm{P}dy$ hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $y=a$. Vis normalis autem erit $=\frac{\mathrm{P}p}{y}$; cui aequalis eſſe debet vis centrifuga et in eandem plagam tendens; tum enim proueniet curua brachyſtochrona, vt Prop. praec. demonſtrauimus. Curua igitur debebit eſſe conuexa verſus centrum C et radius oſculi in partem averſam a centro C cadet. Quare cum haec expreſſio $\frac{ydy}{dp}$ exhibeat radium oſculi, quatenus verſus centrum cadit, erit vera radii oſculi expreſſio in noſtro caſu $\frac{-ydy}{dp}$. Vis igitur centrifuga erit $=\frac{-2vdp}{ydy}=\frac{2dp\int \mathrm{P}dy}{ydy}$, cui aequalis poni debet vis normalis $\frac{\mathrm{P}p}{y}$; ex quo oritur haec aequatio $\frac{2dp}{p}=\frac{\mathrm{P}dy}{\int \mathrm{P}dy}$ cuius integralis eſt $\frac{pp}{b}=-\int \mathrm{P}dy$, ſeu $p=\sqrt{-b\int \mathrm{P}dy}$; quae eſt aequatio pro curua quaeſita inter y et p. At ſi centro C ducatur arcus MP hicque dicatur $\frac{ys}{a}$, erit $nm=\frac{yds}{a}$ et $pp=\frac{y^4ds^2}{a^2dy^2+y^2ds^2}$. Hinc fiet $ds=\frac{-apdy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$, atque valore ipſius p ex ſuperiore aequatione ſubſtituto habebitur $ds=\frac{-ady\sqrt{-b\int \mathrm{P}dy}}{y\sqrt{(y^2+b\int \mathrm{P}dy)}}$, quae eſt aequatio inter y et arcum circuli s radio a deſcriptum, qui metitur angulum ACM, ex qua fluit conſtructio curuae quaeſitae. Q. E. I.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

386. Quia altitudo celeritati debita eſt $v = -\int P dy = \frac{pp}{b}$; celeritas corporis in quovis loco erit vt perpendiculum ex C in tangentem demiſſum: ſimili modo, quo in motu libero celeritas eſt huic perpendiculo reciproce proportionalis.

Corollarium 2.

387. Sit radius oſculi in $M = r$, erit $\frac{2v}{r} = \frac{pp}{y}$ ex conditione problematis. Hinc ergo habebitur $r = \frac{2yv}{Pp} = \frac{2py}{bP}$. Quia autem in initio curuae in A eſt $p = o$ ſeu AC tangens curuae, erit radius oſculi quoque in $A = o$, niſi forte ſimul P vis centripeta in A euaneſcat.

Corollarium 3.

388. Maximam corpus habebit celeritatem in loco vbi $dp = o$, ibi autem ex aequatione pro curua fit $dy = o$. Quare in eo loco corpus celerrime mouetur vbi recta CM in curuam eſt normalis. Curua ergo vltra hoc punctum a centro C recedit.

Scholion 1.

389. Celeritas ergo corporis in ſingulis brachyſtochronae punctis non eſt proportionalis ſinui anguli, quem tangens curuae cum directione vis centripetae conſtituit; huius enim anguli TMC

ſinus

M.E.C.D. 2017

sinus est $\frac{p}{y}$, celeritas vero ipsi p inuenta est proportionalis. Haec quidem proprietas locum habet, si centrum virium infinite distat et directiones vis sollicitantis sunt inter se parallelae, vt ex Prop. 41. intelligitur, vbi celeritas erat vt $\frac{dy}{ds}$ i. e. vt sinus ang. quem elementum curuae cum directione potentiae sollicitantis constituit. Hanc autem proprietatem Cel. Hermannus in Comm. Acad. Petrop. A. 1727. omnibus brachystochronis tam in vacuo, quam in medio resistente communem esse est arbitratus. Atque hanc ob rem non solum eae lineae, quas in medio resistente pro brachystochronis dedit, tales non sunt, sed etiam quas in vacuo pro viribus centripetis invenit. Hoc autem casu inuenit hanc aequationem $\frac{-\int P dy}{b} = \frac{p^2}{y^2}$ a nostra atque vera aequatione prorsus discrepantem.

Exemplum I.

890. Sit vis centripeta ipsis distantiis corporis a centro proportionalis, fiet $P = \frac{y}{f}$. Quare erit $\int P dy = \frac{y^2 - a^2}{2f}$ atque $v = \frac{a^2 - y^2}{2f} = \frac{p^2}{b}$. Quae est aequatio pro brachystochrona in hac vis centripetae hypothesi, inter p et y. Altera vero aequatio inter arcum s radio a descriptum, qui est mensura anguli ACM, et y est haec $ds = \frac{-a dy \sqrt{b(a^2 - y^2)}}{y\sqrt{(2fy^2 + by^2 - a^2 b)}}$. Huius curuae punctum infimum seu centro proximum habetur ponendo vel $dy = o$

vel

M.E.C.D. 2017

vel $p=y$, tum autem erit $y=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}}$, haec ergo eſt minima curuae a centro C diſtantia. Radius oſculi huius curuae in quovis puncto eſt $=\frac{2py}{bP}=\sqrt{\frac{2f(a^2-y^2)}{b}}$. In puncto ergo centro proximo radius oſculi eſt maximus quippe $=\frac{2af}{\sqrt{b(b+2f)}}$. Ponatur tangens anguli $ACM=t$ poſito ſinu toto $=1$, erit $\frac{ds}{a}=\frac{dt}{1+tt}$; ponatur porro $\frac{\sqrt{b(a^2-y^2)}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}}=q$, habebitur iſta aequatio $\frac{dt}{1+tt}=\frac{dq}{1+qq}-\frac{dq}{1+(\frac{b+2f}{b})qq}$

Ex quo intelligitur curuam toties eſſe algebraicam quoties eſt $\frac{b}{b+2f}$ numerus quadratus. Longitudo curuae AM eſt porro generaliter $=\int\frac{-ydy}{\sqrt{(y^2+b\int Pdy)}}$; hoc ergo caſu erit $AM=\int\frac{-ydy\sqrt{2f}}{\sqrt{(2fy^2+by^2-a^2b)}}=\frac{2af-\sqrt{2f(2fyy+byy-a^2b)}}{2f+b}$. Ex qua aequatione ſequitur curuam brachyſtochronam AM eſſe hypocycloidem, quae generatur rotatione circuli cuius diameter eſt $=\frac{a\sqrt{(b+2f)}-a\sqrt{b}}{\sqrt{(b+2f)}}$ ſuper concava parte peripheriae AE centro C radio AC deſcriptae. Cum igitur b pro lubitu accipere liceat, apparet omnes hypocycloides ſuper peripheria AE natas eſſe brachyſtochronas.

Exemplum 2.

391. Sit vis centripeta reciproce proportionalis quadratis diſtantiarum, vt ſit $P=\frac{f^2}{y^2}$, vnde erit $\int P\,dy=\frac{-f^2}{y}+\frac{f^2}{a}=\frac{f^2(y-a)}{ay}$, atque $v=\frac{f^2(a-y)}{ay}=\frac{p^2}{b}$.

M.E.C.D. 2017

$\frac{p^2}{b}$, quae eſt aequatio pro brachyſtochrona in hac vis centripetae hypotheſi. Altera vero aequatio inter arcum s et y erit iſta $ds = \frac{-ady\sqrt{bf^2(a-y)}}{y\sqrt{(ay^3+bf^2y-abf^2)}}$. Huius ergo curuae punctum infimum poſito $dy = 0$, determinabitur ope huius aequationis cubicae $ay^3+bf^2y=abf^2$. Ceterum iſta aequatio inter s et y ſufficit ad curuam quaeſitam conſtruendam.

Scholion 2.

392. Ex his igitur, quae in hac et praecedentibus propoſitionibus allata ſunt, intelligitur quomodo in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi ea linea ſit inuenienda, ſuper qua corpus ex dato puncto ad datum punctum citiſſime perueniat. Nunc ergo etiam determinari oportet eam lineam, ſuper qua corpus a dato puncto citiſſime non ad datum punctum ſed ad datam lineam perueniat, quae ſane curua vna erit ex infinitis brachyſtochronis: at quaenam ea ſit in ſequente Propoſitione declarabimus.

PROPOSITIO 44.

Theorema.

393. *Corpus a dato puncto* A *ad quamuis lineam datam* BM *celerrime peruenit ſuper linea brachyſtochrona* AM, *quae datae lineae* BM *ad angulos rectos occurrit: hocque in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi.* Tabula X. Fig. 5.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Demonſtratio.

Sit AM ea linea, ſuper qua corpus ex A citiſſime ad lineam BM perueniat; perſpicuum eſt primo hanc lineam fore brachyſtochronam: nam ſi daretur linea, ſuper qua corpus citius ab A ad M perueniret, ea potius quaeſito ſatisfaceret. Praeterea haec linea AM ad angulos rectos in M curuae BM occurrit; niſi enim ad angulos rectos occurreret, ducta minima normali *mn*, ob *mn* < *m*M corpus citius per A*mn* ad curuam BM perueniret, quam per A*m*M. Quare ne haec exceptio locum inuenire poſſit, neceſſe eſt, vt curua AM datae curuae normaliter inſiſtat. Conſequenter corpus ſuper ea infinitarum brachyſtochronarum ex A ad curuam BM ductarum citiſſime ad curuam BM peruenit, quae curuae BM ad angulos rectos occurrit. Q. E. I.

Corollarium 1.

394. Si ergo infinitae curuae quaerantur, ſuper quibus corpus dato tempore ab A ad lineam BM perueniat; oportet vt datum tempus ſit maius quam tempus per brachyſtochronam A M: alias enim problema fieret impoſſibile.

Coollarium 2.

395. Si accidat vt plures curuae brachyſtochronae ſint normales in curuam BM, plura quoque

M.E.C.D. 2017

que prodibunt tempora minima vel maxima. Haec enim methodus tam minima quam maxima declarat.

Corollarium 3.

396. Quia tempus per curuam brachyſtochronam AM eſt minimum, intelligitur ex methodo maximorum et minimorum, ſi duae brachyſtochronae proximae concipiantur normaliter inſiſtentes curuae BM, tempora per eas eſſe inter ſe aequalia.

Corollarium 4.

397. Hinc porro perſpicitur, ſi curua BM fuerit eiusmodi, vt omnes brachyſtochronas ex puncto A ductas ſecet ad angulos rectos, tempora per omnes brachyſtochronas ad curuam BM vsque ductas fore inter ſe aequalia.

Corollarium 5.

398. Quamobrem curua quae ab omnibus curuis brachyſtochronis ex puncto A ductis arcus iſochronos, ſeu eodem tempore percurſos abſcindit, ea quoque omnes brachyſtochronas ad angulos rectos ſecabit, ſeu erit illarum traiectoria orthogonalis.

Corollarium 6.

399. Atque viciſſim quoque perſpicitur, ſi curua, quae ab infinitis curuis arcus iſochronos

M.E.C.D. 2017

abſcindit, fuerit earum traiectoria orthogonalis; eas infinitas curuas omnes eſſe brachyſtochronas.

Scholion.

400. Facile intelligitur hanc propoſitionem locum quoque habere in medio reſiſtente; ſimili enim modo apparet tempus per elementum *mn* normale in curuam BM minus eſſe quam tempus per elementum *m*M quod non eſt perpendiculare; in hoc autem totius demonſtrationis vis eſt ſita. Quare ſi, infinitis curuis ex puncto A eductis, lex potentiarum ſollicitantium et reſiſtentiae poterit inueniri, in qua eae curuae omnes ſint brachyſtochronae, ſimul harum curuarum trajectoria orthogonalis poterit exhiberi quaerendo tantum curuam ab iis curuis arcus iſochronos abſcindentem. Atque hanc ipſam traiectorias orthogonales inueniendi methodum jam adhibuit Cel. Ioh. Bernoulli, in Act. Lipſ. A. 1697.

PROPOSITIO 45.
Problema.

Tabula X. Fig. 6.

401. *Inter omnes curuas puncta* A *et* C *jungentes et aequaliter longas eam determinare* AMC *ſuper qua corpus celerrime ex* A *ad* C *perueniat, in hypotheſi potentiae ſollicitantis vniformis* g *et deorſum directae.*

So-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Ducta verticali AP et horizontali PM dicatur AP$=x$, PM$=y$ et AM$=s$; eritque tempus quo arcus AM absoluitur $=\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$. Iam per methodum isoperimetricorum, de qua peculiarem dedi dissertationem cum formulis generalibus, ex quibus quaeuis problemata facile resolui possunt, in Comment. Acad. Petr. A. 1733; duae quantitates considerandae sunt arcus AM$=s=\int ds$ et tempus per AM$=\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius respectu debet esse minima vel maxima. Eodem enim redit siue inter omnes curuas aeque longas quaeratur ea, quae breuissimum habeat descensum, sive inter omnes, super quibus descensus fiunt eodem tempore ea, quae est breuissima. Per formulas autem meas dat $\int ds$, hanc quantitatem *diff.* $\frac{dy}{ds}$ et $\int\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ dat *diff.* $\frac{dy}{ds\sqrt{gx}}$, quarum altera alterius multiplo cuicunque aequalis est ponenda. Habetur ergo integrando $\frac{dy}{ds}=\frac{dy\sqrt{a}}{ds\sqrt{x}}-m$, seu $dy(\sqrt{a}-\sqrt{x})=mds\sqrt{x}$. Sumendis vero quadratis erit $dy^2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2=m^2xdx^2+m^2xdy^2$, vnde erit $dy=\frac{mdx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax}+(1-m^2)x)}}$ et $ds=\frac{dx(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax}+(1-m^2)x)}}$. Ex quo curua quaesita determinabitur. Q. E. I.

Corollarium I.

402. In aequatione inuenta duae insunt quantitates a et m arbitrariae, quibus effici potest vt curua per datum punctum C transeat, et vt simul sit

M.E.C.D. 2017

datae longitudinis. Atque tum haec curua celerrime absoluetur inter omnes alias curuas eiusdem longitudinis per A et C transeuntes.

Corollarium 2.

403. Si ponantur a et m infinite magna prodibit cyclois, quae non solum inter omnes curuas eiusdem longitudinis, sed inter omnes omnino citissime absoluitur.

Corollarium 3.

404. Si ponatur $m = o$ prodit $dy = o$; seu recta verticalis. At si fiat $a = o$, oritur recta quaecunque per punctum A ducta. Est enim recta linea inter omnes lineas, quae eodem tempore absoluuntur minima seu breuissima.

Corollarium 4.

405. Si ponatur $m = 1$, prodibit curua algebraica, erit enim $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}$, cuius integralis est $y = \frac{-(4a+4\sqrt{ax}+6x)\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{15\sqrt{a}} + \frac{4a}{15}$. Haec curua etiam est rectificabilis, namque erit $s = \frac{2a}{5} - \frac{(2a+2\sqrt{ax}-2x)}{5\sqrt{a}}\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}$. Quin etiam tempus per arcum AM algebraice poterit exprimi, erit enim $\int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{a}}{3} - \frac{(4\sqrt{a}-2\sqrt{x})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{5\sqrt{a}}$. Aequatio vero pro curua reducta fit ordinis quinti.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

406. Si in hac curua ſumatur $x = \frac{a}{4}$, ibi tangens erit horizontalis, atque recta verticalis in eo curuae puncto erit diameter curuae. Illo autem loco fit $y = \frac{4}{15}a$, et longitudo curuae ad hoc punctum erit $= \frac{2a}{5}$. Atque tempus, quo hic arcus abſolvitur eſt $= \frac{4\sqrt{a}}{3\sqrt{g}}$. Eodem ergo tempore corpus recta deſcendet per altitudinem $\frac{4}{9}a$.

Scholion.

407. Miſſis nunc hisce de celerrimo deſcenſu progredimur ad eas curuas conſiderandas, ſuper quibus plures deſcenſus inter ſe comparati datam teneant relationem. Huc maxime pertinet quaeſtio de curuis tautochronis, ſuper quibus vel omnes deſcenſus ad punctum infimum curuae vsque fiunt eodem tempore, vel integrae oſcillationes. Ad haec deinde aliae accedere poſſunt quaeſtiones cum difficiles, tum vim methodi, qua vtemur, illuſtrantes.

PROPOSITIO 46.
Problema.

408. *Inuenire legem generalem curuarum tautochronarum, ſuper quibus omnes deſcenſus ad punctum A, initio deſcenſus vbicunque in curua* AM *accepto, abſoluantur eodem tempore.* Tabula XI. Fig. 1.

So-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Sumta recta AP pro axe, dicatur curuae portio AM$=s$, ſitque altitudo celeritati in A debita $=b$, et altitudo celeritati in M debita $=v$; erit tempus quo arcus AM abſoluitur $=\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$, quod integrale ita eſt capiendum, vt euaneſcat poſito $s=o$. Tum ſi in eo integrali ponatur $v=o$, habebitur tempus deſcenſus a loco in quo celeritas erat nulla vsque ad punctum A, ſeu totum deſcenſus tempus; id quod eadem quantitate expreſſum eſſe debet, quaecunque fuerit quantitas b. Haec igitur quantitas b neque in expreſſione temporis ineſſe debet, neque in expreſſione pro curva AM, quia haec eadem curua idem deſcenſus tempus producere debet, vtcunque varietur b. Sit jam v quantitas compoſita ex litera z ad curuam pertinente, et a curua AM cum abſciſſa AP et applicata PM tantum pendente, neque b inuolvente; atque ex littera b quae ex b et quantitatibus conſtantibus ſit compoſita. Sit autem v talis ipſarum b et z functio vt euaneſcat, poſito $z=b$, atque vt fiat $=b$, ſi ſit $z=\alpha b$, exiſtente α numero quocunque. Ponatur porro $ds=p\,dz$ pro aequatione curuae quaeſitae, debebit p talis eſſe quantitas, in qua non contineatur b vel b, quia hae litterae in aequationem curuae ingredi nequeunt Habebimus ergo pro expreſſione temporis per AM, $\int\frac{p\,dz}{\sqrt{v}}$ hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $v=b$ ſeu $z=\alpha b$. Deinde hoc integrale ſi in eo po-

M.E.C.D. 2017

ponatur $z=h$ dabit tempus totius deſcenſus, in quo h ineſſe non poterit. Hoc vero euenit ſi $\int \frac{pdz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio ipſarum h et z nullius dimenſionis, ſeu ſi $\frac{pz}{\sqrt{v}}$ fuerit functio nullius dimenſionis. Sit v functio m dimenſionum ipſarum h et z, debebit eſſe $p = C z^{\frac{m-2}{2}}$, denotante C quantitatem conſtantem a b non pendentem. Quoties ergo pro v talis functio fuerit comperta, habebitur pro curua quaeſita haec aequatio $ds = C z^{\frac{m-2}{2}} dz$, ſeu $s = \frac{2C z^{\frac{m}{2}}}{m} +$ conſt. ſi opus eſt, quo s euaneſcat, ſi in z euaneſcat vel x vel y. Q. E. I.

Corollarium 1.

409. Quo igitur haec methodus poſſit adhiberi, oportet vt v quantitatibus finitis ſit expreſſum: atque vt ea expreſſio transmutari poſſit in functionem homogeneam ex h et z conſtantem.

Corollarium 2.

410. Hanc ob rem neceſſe eſt vt fiat $v=b$, ſi ponatur $z = \alpha h$; quo in quantitate conſtante adiecta etiam non reperiatur h. Sufficit igitur ſi viderimus fieri $v=b$, facto $z=\alpha h$ neque opus eſt, vt integratio abſoluatur.

Corollarium 3.

411. Intelligitur etiam curuam in A habere debere tangentem normalem in directionem vis

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

ſollicitantis; niſi enim hoc fuerit, tempus per arcum deſcenſus infinite paruum, foret quoque infinite paruum.

Scholion.

412. Valet haec ſolutio non ſolum ſi, vti figura indicat, curua exponatur per coordinatas orthogonales; nihil enim intereſt quibusnam quantitatibus naturam curuae exponere velimus; dummodo in z non ingrediatur b. Poteſt autem z continere lineas et quantitates quascunque a curva pendentes. Hac igitur methodo in vacuo, in quacunque potentiarum ſollicitantium hypotheſi, lineae tautochronae poterunt inueniri, quia ſemper celeritas per quantitates finitas exprimi poteſt. At ſi, vt in mediis reſiſtentibus fieri ſolet, celeritas non poteſt exhiberi finitis quantitatibus; haec methodus vſum habere nequit; ſed alia deſideratur, quae ſuccedit, etiam ſi celeritas per aequationem differentialem tantum detur.

PROPOSITIO 47.
Problema.

Tabula XI. Fig. 1.

413. *Si corpus deorſum ſollicitetur vi quacunque; inuenire lineam tautochronam, ſuper qua omnes deſcenſus fiant eodem tempore.*

Solutio.

Poſito AP$=x$, PM$=y$; et AM$=s$, ſit celeritas in A debita altitudini b; et in M debita altitu-

M.E.C.D. 2017

titudini v. Sit porro vis ſollicitans in M$=$P, erit $v=b-\int P dx$ integrali $\int P dx$ ita accepto vt euaneſcat facto $x=0$. Iam ſi ponatur $b=b$ et $\int P dx = z$, erit v functio vnius dimenſionis ipſarum b et z, et euaneſcit facto $z=b$, fitque $v=b$ facto $z=0$. Erit igitur $m=1$, ideoque habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio $ds = \frac{Cdz}{\sqrt{z}}$ et $s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a\int P dx}$. Si deſideretur aequatio inter x et y, erit ob $ds = \frac{aPdx}{\sqrt{a\int P dx}}$, $dy = \frac{dx\sqrt{(aP^2 - \int P dx)}}{\sqrt{\int P dx}}$ Q. E. I.

Corollarium 1.

414. Quia euaneſcit $\int P dx$ facto $x=0$; tangens curuae in A erit horizontalis, niſi in A euaneſcat P. Atque curua alicubi habebit tangentem verticalem, ibique plerumque cuſpidem, hoc euenit vbi erit $\int P dx = aP^2$. Ibi enim fit $dy=0$.

Corollarium 2.

415. Huius curuae in puncto infimo A radius oſculi eſt aequalis ſubnormali $= \frac{ydy}{dx} = \frac{sds}{dx}$, quia in A s et y fiunt aequalia. Quare in A erit radius oſculi $= 2aP$, vbi P denotat potentiam ſollicitantem in puncto A.

Corollarium 3.

416. Ex radio oſculi in A et potentia ſollicitante in A inuenitur tempus aſcenſus vel de-

M.E.C.D. 2017

ſcenſus per infinite paruum arcum $= \frac{\pi\sqrt{4aP}}{2\sqrt{P}}$ (172) $= \pi\sqrt{a}$. Huicque tempori tempus cuiusque deſcenſus eſt aequale. In hypotheſi ergo grauitatis $=$ 1, pendulum longitudinis $2a$ deſcenſus infinite paruos eodem tempore abſoluet.

Exemplum 1.

417. Sit potentia ſollicitans vbique conſtans nempe $P=g$, erit $\int P dx = gx$ atque $s = 2\sqrt{gax}$, itemque $dy = \frac{dx\sqrt{(ga-x)}}{\sqrt{x}}$, vnde intelligitur curuam eſſe cycloidem deorſum convexam, prorſus cum linea brachyſtochrona in eadem potentiae hypotheſi congruentem. Quod autem omnes deſcenſus fiant eodem tempore ſuper cycloide jam ſupra demonſtrauimus (187).

Exemplum 2.

418. Sit potentia ſollicitans vt poteſtas quaecunque ipſius x, erit $P = \frac{x^n}{f^n}$ et $\int P dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)f^n}$ ſi quidem fuerit $n+1$ numerus affirmatiuus; ſin enim eſſet $n+1$ numerus negatiuus, fieret $\int P dx = \infty$. Erit igitur $s = \frac{2x^{\frac{n+1}{2}}}{f^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\frac{a}{n+1}}$ atque $dy = \frac{dx\sqrt{((n+1)ax^{n-1}-f^n)}}{\sqrt{f^n}}$. Ex qua aequatione intelligitur curuam fore rectam vtcunque inclinatam ad ho-

M.E.C.D. 2017

horizontem, si fuerit $n=1$. At si $n>1$ curua in initio A fit imaginaria, quo vsque nimirum f^n incipit minus esse quam $(n+1)\,ax^{n-1}$.

Scholion 1.

419. Ex aequatione generali apparet rectam AP esse diametrum curuae. Quare cum in vacuo ascensus sint similes descensibus, semioscillationes omnes super curua MA ad alteram partem vsque producta erunt quoque isochronae, et consequenter etiam integrae oscillationes. Deinde cum ob arbitrariam a infinitae sint curuae tautochronae AM, duae quaeque in puncto A coniunctae, vt ibi habeant tangentem communem horizontalem, producent tam semioscillationes quam integras oscillationes isochronas; si scilicet pendulum ita accommodetur vt oscillando huiusmodi curuas absoluat.

Scholion 2.

420. Intelligitur etiam ex solutione eas curuas, quas inuenimus, esse solas, quae quaesito satisfaciunt. Nam loco p alia functio ipsius z substitui nequit, vt in integrali, si ponatur $v=0$, prorsus ex formula exeant b seu b. Id quod aliis methodis, quibus tautochronae sunt inuentae, non satis liquet.

Scholion 3.

421. Quia est $s=2\sqrt{a}\int \mathrm{P}\,dx$, erit $\mathrm{P}=\frac{s\,ds}{2a\,dx}$. Ex quo apparet, cuiusmodi esse debeat potentia

M.E.C.D. 2017

sollicitans, vt data curua sit tautochrona. Scilicet potentia deorsum tendens debet esse proportionalis ipsi $\frac{sds}{dx}$ ex data curua desumto. Quare nisi curua sit rectificabilis, valor potentiae sollicitantis non potest algebraice exhiberi.

PROPOSITIO 48.

Problema.

Tabula XI. Fig. 2.

422. *Si corpus perpetuo trahatur ad centrum virium* C *vi quacunque: inuenire lineam tautochronam* BMA; *super qua corpus omnes descensus ad punctum* A *usque eodem tempore absoluat.*

Solutio.

Dicatur CA$=c$, CM$=y$, et vis centripeta in M corpus sollicitans $=$ P. Sit porro celeritas in debita altitudini b et ea in M altitudini v. Sumatur $\int P dy$ ita vt euanescat posito $y=c$, quo facto erit $v=b-\int P dy$. Sumtis ergo b pro h et $\int P dy$ pro z, erit functio ipsarum h et z, cui v aequatur, vnius dimensionis, quare erit $m=1$. Si nunc arcus AM dicatur $=s$, erit $s=2\sqrt{az}=2\sqrt{a\int P dy}$, atque hinc $ds=\frac{a P dy}{\sqrt{a\int P dy}}$. Si nunc in M ducatur tangens in eamque ex centro C demittatur perpendiculum CT, quod dicatur p, erit $\frac{y dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}=ds$. Quare habebitur $y^2\int P dy=(y^2-p^2)aP^2$ seu $p^2=y^2-\frac{y^2\int P dy}{aP^2}$, aequatio pro curua quaesita. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

423. In puncto A vbi $\int P\,dy$ euaneſcit, erit $p = y$, ſeu recta CA erit normalis in curuam, in eoque propterea celeritas corporis erit maxima, quia A eſt punctum curuae centro C proximum.

Corollarium 2.

424. Si ponatur $p = o$, habebitur punctum curuae B; in quo recta CB curuam tangit. In eoque puncto, quod erit ſupremum, curua cuſpidem habebit. Inuenitur vero punctum B ex hac aequatione $aP^2 = \int P\,dy$; atque y non poterit eſſe maior, quam valor ex hac aequatione inuentus.

Corollarium 3.

425. Apparet etiam ex aequatione inuenta $s = 2\sqrt{a}\int P\,dy$, quia ſignum radicale ſignum ambiguum inuoluit, curuam duos habere ramos AB et AD inter ſe ſimiles et aequales; et hanc ob rem oſcillationes, quae ſuper curua BAD fiunt, eſſe inter ſe aequales.

Corollarium 4.

426. Radius oſculi in puncto A eſt $= \frac{2acP}{c - 2aP}$. Et quia eſt $AC = c$, erit tempus, quo vnus deſcenſus ſuper curuae AB portione infinite parua abſoluitur $= \pi\sqrt{a}$ (207.), huic igitur tempori omnes deſcenſus erunt aequales. Hanc ob rem oſcillatio-

M.E.C.D. 2017

lationes, quae fiunt ſuper curua BAD iſochronae erunt cum oſcillationibus penduli in grauitatis hypotheſi, cuius longitudo eſt $= 2a$.

Exemplum I.

427. Sit vis centripeta directe proportionalis diſtantiis a centro vt ſit $P = \frac{y}{f}$, erit $\int P dy = \frac{yy-cc}{2f}$. Hinc ergo erit $AM = s = \sqrt{\frac{2a(yy-cc)}{f}}$, atque $pp = yy - \frac{f(yy-cc)}{2a}$. Huius curuae radius oſculi in puncto M, qui eſt $\frac{y\,dy}{dp}$, inuenitur $= \frac{2a}{2a-f}\sqrt{(2a-f)yy+cc}$. Ex quo ſequitur ſi fuerit $2a > f$ curvam verſus centrum C fore conuexam vt exhibet figura. At ſi fuerit $2a = f$, curua euadet linea recta in A normalis ad rectam AC. Punctum autem B vbi CB tangit curuam inuenitur ex hac aequatione $(f-2a)yy = ccf$, ex qua fit $BC = \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f-2a)}}$. Quoties ergo accidit vt ſit $f > 2a$ ſeu curua conuexa verſus C, habebit curua cuſpidem in B. Atque in his caſibus curua erit hypocyclois, quae generatur rotatione circuli, cuius diameter eſt $= \frac{c\sqrt{f}-c\sqrt{(f-2a)}}{\sqrt{(f-2a}}$, ſuper concaua parte circuli centro C radio $= \frac{c\sqrt{f}}{\sqrt{(f-2a)}}$ deſcripti. Hoc ergo caſu curuae tautochronae conueniunt cum brachyſtochronis ſupra inuentis (390). At ſi $2a > f$ quo caſu curua eſt concaua verſus C, fit BC imaginaria et curua AM non amplius eſt hypocyclois. Tum autem erit $pp =$

$(2a-$

M.E.C.D. 2017

$\frac{(2a-f)yy+ccf}{2a}$, vnde p vbique praeter in A erit maior quam AC. Sit $c=o$, fiet $p=y\sqrt{\frac{2a-f}{2a}}$, quare hoc casu curuae tautochronae erunt omnes spirales logarithmicae circa centrum C descriptae. Corpus scilicet super spirali logarithmica perpetuo eodem tempore ad centrum C pertinget, vbicunque descensum inceperit. Hac igitur vis centripetae hypothesi tautochronae erunt, primo omnes hypocycloides, deinde omnes lineae rectae vtcunque ductae, tertio omnes spirales logarithmicae, et quarto infinitae curuae aliae hac aequatione contentae $p^2=\frac{(2a-f)y^2+ccf}{2a}$ si quidem fuerit $2a>f$ et c non $=o$. In hac autem vis centripetae hypothesi pro tautochronis tantum dederunt hypocycloides Neutonus in Princ. et Hermannus in Phoronomia et Comment. Acad. Petrop. A. 1727. quamvis hic aequationem aeque generalem ac nostram habuerit.

Exemplum 2.

428. Ponatur vis centripeta reciproce proportionalis quadratis distantiarum a centro, vt sit $P=\frac{ff}{yy}$, erit $\int P\,dy=\frac{-ff}{y}+\frac{ff}{c}=\frac{ff(y-c)}{cy}$. Curua igitur AM erit $=2\int\sqrt{\frac{a(y-c)}{cy}}$; atque $pp=\frac{acffyy+cy^5-y^6}{acf}$, vnde inuenitur radius osculi $\frac{ydy}{dp}=\frac{2acfy\sqrt{(acff+cy^3-y^4)}}{2acff+5cy^3-6y^4}$. Vbi ergo p euanescit ibi etiam radius osculi fit $=o$. Ipsius BC valor autem reperietur ex hac aequatione $y^4=cy^3+acff$. Si igitur ponatur $BC=k$, erit a

M.E.C.D. 2017

$= \frac{k^4 - ck^3}{cff}$, id quod assumi potest, quia k est quantitas arbitraria. Ceterum apparet hanc curuam intra A et B habere posse punctum flexus contrarii, id quod euenit, si curua in A est concaua versus C, nempe si fuerit $2aff > c^3$.

Exemplum 3.

429. Sit vis centripeta vbique constans seu $P = 1$, erit $\int P\,dy = y - c$. Quare si centro C radio CM ducatur arcus MP, erit $\int P\,dy = AP$, atque arcus $AM = 2\sqrt{a(y-c)} = 2\sqrt{a}.\ AP$. At erit porro $p^2 = y^2 - \frac{y^2(y-c)}{a} = \frac{(a+c)y^2 - y^3}{a}$, vnde inuenitur $BC = a + c$, et curua $AM = 2a = 2(BC - AC)$. Radius osculi vero in puncto M erit $= \frac{2y\sqrt{(a+c-y)a}}{2a+2c-3y}$. In puncto ergo infimo A erit radius osculi $= \frac{2ac}{2a-c}$. Curua igitur in A erit concaua versus C si $2a > c$ at conuexa si $c > 2a$, atque radius osculi in A erit infinite magnus, si $2a = c$. Primo casu, quo curva in A est concaua versus C, curua habebit punctum flexus contrarii, vbi est $CM = \frac{2}{3}(a+c) = \frac{2}{3}BC$. Si est $c = 0$, ita vt punctum A in centrum C cadat, fiet y chorda huius curuae, eritque $AM = 2\sqrt{ay}$, cuius curuae radius osculi in ipso centro C est infinite paruus, atque est $p = y\sqrt{\frac{a-y}{a}}$, curua autem ipsa per quadraturam circuli potest construi.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 49.

Problema.

430. *Si corpus ſollicitetur a potentiis quibuscunque, inuenire curuam* AM, *ſuper qua omnes deſcenſus ad punctum* A *usque fiant aequalibus temporibus.* Tabula XI. Fig. 3.

Solutio.

Quaecunque fuerint potentiae ſollicitantes, eae omnes reduci poſſunt ad duas, quarum altera corpus perpetuo deorſum trahat ſecundum MQ, altera vero horizontaliter ſecundum MP. Sit vis, quae ſecundum MQ trahit $=$ P, et vis quae ſecundum MP trahit $=$ Q: dicantur AP $= x$, PM $= y$, AM $= s$, ſitque celeritas in puncto A debita altitudini b et celeritas in M debita altitudini v. His poſitis erit $v = b - \int P dx - \int Q dy$. Quare ſi ponatur $h = b$ et $\int P dx + \int Q dy = z$, erit v functio vnius dimenſionis ipſarum h et z, et propterea $m = 1$ (408). Quamobrem habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio $s = 2\sqrt{az} = 2\sqrt{a}(\int P dx + \int Q dy)$, ſeu $ds = \frac{aP dx + aQ dy}{\sqrt{a}(\int P dx + \int Q dy)}$. At quia eſt $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ erit $\frac{dy}{dx} = \frac{aPQ \pm \sqrt{(\int P dx + \int Q dy)(aP^2 - \int P dx - \int Q dy + aQ^2)}}{\int P dx + \int Q dy - aQ^2}$. In ipſo ergo principio A, vbi eſt $\int P dx + \int Q dy = o$, erit $P dx + Q dy = o$, ſeu $dy : dx = -P : Q$. Atque vt ex praecedentibus intelligitur tempus cuiusque deſcenſus aequatur tempori, quo in hypotheſi grauita-

M.E.C.D. 2017

tis = 1 pendulum longitudinis 2*a* deſcenſum abſoluit. Q. E. I.

Scholion.

431. Si habeatur curua, ſuper qua omnes deſcenſus fiunt eodem tempore, facile erit dare curuas ſuper quibus oſcillationes omnes eodem tempore peragantur. Nam quia in vacuo aſcenſus ſimiles ſunt deſcenſibus, omnis curua, quae eſt tautochrona pro deſcenſibus, talis quoque erit pro aſcenſibus. Quare duae curuae tautochronae coniunctae in puncto A dabunt curuam, ſuper qua omnes oſcillationes ſunt iſochronae. Attamen hac ratione alterum problema, quo curuae omnes oſcillationes iſochronas producentes requiruntur, non perfecte ſolnitur: dari enim poſſunt curuae infinitae huic quaeſtioni ſatisfacientes, quarum tamen partes non ſint aptae ad deſcenſus ſolos iſochronos efficiendos. Problema autem hoc modo proponi poteſt: data curua quacunque inuenire aliam, quae cum ea coniuncta producat omnes oſcillationes aequidiurnas. Nunc vero antequam ad haec progrediamur, aliud problema proferemus, in quo quaeritur curua datae curuae adiungenda, vt omnes deſcenſus ſuper hac curua compoſita abſoluantur temporibus aequalibus. Quod problema vt maxime difficillimum mihi quondam erat propoſitum a Cl. Dan. Bernoulli. Attamen hac methodo, qua in inveſtigatione tautochronarum vtor, etiam iſtud problema reſolui poteſt.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 50.

Problema.

432. *In hypotheſi grauitatis vniformis deorſum tendentis, ſi detur curua* ANB, *inuenire curuam* BMF *ei adiungendam, ut omnes deſcenſus ſuper hac curua compoſita ad* A *usque abſoluantur aequalibus temporibus, in quocunque curuae* BMF *puncto deſcenſus incipiat.* Tabula XI. Fig. 4.

Solutio.

Si deſcenſus incipiat in infimo curuae quaeſitae puncto B, deſcenſus fiet per datam curuam BNA tantum, eius ergo tempori, quod etiam dabitur, aequalia eſſe debent omnium deſcenſuum tempora. Sit AD$=a$, AQ$=u$, AN$=t$; dabitur-que aequatio inter u et t. Pro curua autem quaeſita ſit BP$=x$ et BM$=s$. Nunc in deſcenſu quocunque ſit celeritas in puncto B debita altitudini b, erit celeritas in M debita altitudini $b-x$; atque celeritas in N debita altitudini $a+b-u$. Tempus ergo deſcenſus per curuam incognitam eſt $\int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$ ita integratum vt euaneſcat poſito $x=0$, et poſt integrationem poſito $x=b$. Tempus vero per curuam cognitam BNA erit $\int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}}$, ita integratum vt euaneſcat poſito $u=o$, atque poſt integrationem poſito $u=a$. Expreſſio ergo $\int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$ poſtquam factum eſt $x=b$, ita debet eſſe com-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S.

M.E.C.D. 2017

comparata, vt ſi addatur ad expreſſionem temporis per BNA, ex aggregato penitus egrediatur littera b; tum enim totius tempus deſcenſus erit quantitas conſtans neque pendens a b ſeu a puncto curuae BMF, in quo deſcenſus incepit. Sit integrale $\int \frac{dt}{\sqrt{(a+a-u)}}$ poſtquam poſitum eſt $u=a$ aequale huic ſeriei $k+\alpha b+\beta b^2+\gamma b^3+\delta b^4+$ etc. $+\zeta \sqrt{b}+\eta b\sqrt{b}+\theta b^2\sqrt{b}+2b^3\sqrt{b}+$ etc. Quare ſi deſcenſus in puncto B incipiat, tempus totius deſcenſus erit $=k$, ob euaneſcentem b. Ipſi k ergo aequale eſſe debet tempus totius deſcenſus per curuam compoſitam, in quocunque curuae BMF puncto ponatur initium deſcenſus. Sit nunc curuae quaeſitae BMF natura ſequente ſerie expreſſa $ds = -A\,dx\sqrt{x} - B\,x\,dx\sqrt{x} - C\,x^2\,dx\sqrt{x} - D\,x^3\,dx\sqrt{x} -$ etc. $-F\,dx - G\,x\,dx - H\,x^2\,dx - I\,x^3\,dx -$ etc. Ponatur peripheriae ad diametrum ratio $\pi : 1$, quae reuera eſt $l-1:-\sqrt{-1}$, ita vt ſit $\pi = -\frac{l-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,l-1$. Eſt vero poſt integrationem, poſito $x=b$, $\int \frac{A\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1}{2}\pi A b$; $\int \frac{B\,x\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\pi B b^2$; $\int \frac{C\,x^2\,dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\pi C b^3$ etc. Atque $\int \frac{F\,dx}{\sqrt{(b-x)}} = 2F\sqrt{b}$; $\int \frac{G\,x\,dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2}{3}\,2Gb\sqrt{b}$; $\int \frac{H\,x^2\,dx}{\sqrt{(b-x)}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\,2Hb^2\sqrt{b}$; etc. Quo igitur horum terminorum cum illis terminis coniunctim tempus per BNA experimentibus aggregatum aequetur ipſi k, termini homogenei b inuoluentes ſeſe tollere debent. Fiet igitur $\frac{1}{2}\,\pi A = \alpha$ ſeu $A = \frac{2}{1}\cdot\frac{\alpha}{\pi}$; ſimilique modo $B = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{\beta}{\pi}$; $C = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 5}\,\frac{\gamma}{\pi}$ etc. Atque $F = \frac{\zeta}{2}$; $G = \frac{3}{2}\,\frac{\eta}{2}$; $H =$

M.E.C.D. 2017

$H = \frac{3\cdot5}{2\cdot4}\cdot\frac{\theta}{2}$; $I = \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}, \frac{\iota}{2}$ etc. Quamobrem cum α, β, γ, δ, etc. ζ, η, θ, ι etc. ſint quantitates cognitae propter curuam ANB datam; habebitur pro curua quaeſita BMF iſta aequatio: $ds = \frac{-dx}{\pi}(\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x} + \frac{2\cdot4}{1\cdot3}\beta x\sqrt{x} + \frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5}\gamma x^2\sqrt{x} + \text{etc.}) - \frac{dx}{2}(\zeta + \frac{3}{2}\eta x + \frac{3\cdot5}{2\cdot4}\theta x^2 + \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}\iota x^3 + \text{etc.})$, cuius integralis eſt $s = \frac{-2}{\pi}(\frac{2}{3}\alpha x\sqrt{x} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\beta x^2\sqrt{x} + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\gamma x^3\sqrt{x} + \text{etc.}) - \frac{1}{2}(\zeta x + \frac{3}{4}\eta x^2 + \frac{3\cdot5}{4\cdot6}\theta x^3 + \frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8}\iota x^4 + \text{etc.})$. Cuius ſeriei hanc do conſtructionem: ſumatur $\int\frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int\frac{dt}{\sqrt{(a+d-u)}}$ ita vt euaneſcat poſito $u = 0$, tum fiat $u = a$, et prodibit functio quaedam ipſius b. Ponatur $x(1-z)$ loco b et quod prodit ſit R. Tum integretur $\frac{Rdz}{\sqrt{z}}$ dum x vt conſtans conſideretur, ita vt euaneſcat poſito $z = 0$. Deinde ponatur $z = 1$, et prodibit functio ipſius x quae erit $= \frac{\pi s}{\sqrt{x}}$. Hocque modo prodibit aeqatio pro curua quaeſita. Q. E. I.

Scholion I.

433. Conſtructio haec prorſus ſingularis ſed facilis tamen ſequitur ex ea methodo, qua vſus ſum in aequatione a C. Riccati quondam propoſita conſtruenda, atque hac potiſſimum gaudet praerogatiua, quod quaecunque fuerit curua data, quaeſita eius ope ſemper poſſit conſtrui, etiamſi aequatio ipſa, quae pro curua inuenitur minime ſaepe tractari poſſit. Dat praeterea ſtatim aequationem finitam eam, quae alias ex ſummatione ſerierum inueniretur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

434. Si in aequatione pro curua BMF inventa ponatur $x=0$, erit $ds=\frac{-\zeta dx}{2}$, vnde inclinatio curuae in B ad verticalem BP innotescit. Quo igitur appareat, quomodo hae duae curuae inuicem cohaereant, oportet quoque positionem tangentis curuae ANB in B determinare.

Corollarium 2.

435. Sit DQ$=p$ et BN$=q$, erit $dt=-dq$ et $a-u=p$. Vnde tempus per BNA erit $=\int\frac{dq}{\sqrt{(b+p)}}$ posito in hoc integrali $p=a$. Sit in ipso puncto B, $dq=\mathrm{L}dp$, erit generatim $dq=\mathrm{L}dp+\mathrm{P}dp$, existente P tali functione ipsius p, quae euanescat posito $p=0$. Videamus ergo euanescente p qualem terminum haec aequatio $\int\frac{dq}{\sqrt{(b+p)}}=\int\frac{\mathrm{L}dp}{\sqrt{(b+p)}}$ producat. Prodit autem posito $p=a$, $2\,\mathrm{L}\sqrt{(b+a)}-2\,\mathrm{L}\sqrt{b}$, vnde in serie initio assumta prodit terminus $-2\,\mathrm{L}\sqrt{b}$, qui conuenit cum $\zeta\sqrt{b}$, erit ergo $\mathrm{L}=-\frac{\zeta}{2}$ et $dq=\frac{-\zeta dp}{2}$. Ex quo intelligitur curuam datam et quaesitam in puncto coniunctionis B communem habere tangentem.

Scholion 2.

436. Dixi $2\,\mathrm{L}\sqrt{(b+a)}-2\,\mathrm{L}\sqrt{b}$ in serie dare hunc terminum $-2\lessgtr\sqrt{b}$; nam $\sqrt{(b+a)}$, dat terminos hos $\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}+$ etc. cum aliis comparan-

M.E.C.D. 2017

parandos. Hic autem ſolus terminus L*dp* dat terminum huius formae $\zeta \sqrt{b}$. Quare ex eo tantum de inclinatione curuae in B concludere licet.

Scholion 3.

437. Conſtructio curuae quaeſitae quam dedi etiam hoc modo immutari poteſt, ſcribatur poſtquam in integrali $\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}}$ poſitum eſt $u=a$, loco b hoc xz, et vocato eo, quod prodit R, integretur $\frac{Rdz}{\sqrt{(1-z)}}$, in quo x vt quantitas conſtans tractetur, ita vt euaneſcat poſito $z=0$. Tum ponatur $z=1$, atque id quod prouenit, aequetur ipſi $\frac{\pi s}{\sqrt{x}}$; hacque ratione plerumque commodius aequatio pro curua quaeſita obtinetur.

Exemplum 1.

438. Sit curua data ANB cyclois ita vt ſit $t=2\sqrt{cu}$, ſeu $dt=\frac{cdu}{\sqrt{cu}}$; erit $\int \frac{dt}{\sqrt{(a-u)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{(a+b-u)}} = \int \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au-u^2)}} - \int \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{(au+bu-u^2)}} = \sqrt{-c}\, l\frac{a-2u-2\sqrt{(u^2-au)}}{a} - \sqrt{-c}\, l\frac{a+b-2u-2\sqrt{(u^2-au-bu)}}{a+b}$. Ponatur $u=a$ et habebitur $\sqrt{-c}\, l-1 - \sqrt{-c}\, l\frac{b-a-2\sqrt{ab}}{a+b} = \pi\sqrt{c} - 2\sqrt{-c}\, l(\sqrt{b}-\sqrt{-a}) + \sqrt{-c}\, l(a+b) = \pi\sqrt{c} + \sqrt{-c}\, l\frac{\sqrt{b}+\sqrt{-a}}{\sqrt{b}-\sqrt{-a}}$. Ponatur xz loco b et habebitur $R = \pi\sqrt{c} + \sqrt{-c}\, l\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}}$, quo multiplicato per $\frac{dz}{\sqrt{(1-z)}}$ habebitur $\frac{\pi dz\sqrt{c}}{\sqrt{(1-z)}} + \frac{dz\sqrt{-c}}{\sqrt{(1-z)}}\, l\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}}$, cuius integrale eſt $= -2\pi\sqrt{c(1-z)} - 2\sqrt{c(z-1)}\, l\frac{\sqrt{xz}+\sqrt{-a}}{\sqrt{xz}-\sqrt{-a}} - \frac{2\sqrt{-ac}}{\sqrt{x}}\, l\frac{\sqrt{(z-1)}+\sqrt{z}}{\sqrt{(z-1)}-\sqrt{z}}$

M.E.C.D. 2017

$-\frac{2\sqrt{-c(a+x)}}{\sqrt{x}}\,l\frac{\sqrt{-a(1-z)}-\sqrt{z(a+x)}}{\sqrt{-a(1-z)}+\sqrt{z(a+x)}}+2\pi\sqrt{c}-2\sqrt{c}.\sqrt{-1}.$ $l-1$, qui duo vltimi termini sunt inter se aequales ob $\pi=\sqrt{-1}.\,l-1$. Ponatur nunc $z=1$ habebitur $\frac{-2\sqrt{ac}+2\sqrt{c(a+x)}}{\sqrt{x}}\pi$, quod aequale est ponendum ipsi $\frac{\pi s}{\sqrt{x}}$. Hinc prouenit ista aequatio $s=-2\sqrt{ac}+2\sqrt{c(a+x)}$ seu $s+\mathrm{ANB}=\mathrm{ANBM}=2\sqrt{c}(\mathrm{AD}+\mathrm{BP})$. Ex quo patet curuam BME esse continuationem datae AND, ita vt coniunctae totam cycloidem constituant; id quod ex natura tautochronismi, cui cyclois satisfacere inuenta est, per se sequitur.

Exemplum 2.

439. Sit linea data ANB recta ad horizontem vtcunque inclinata erit $dt=ndu$, atque $\int\frac{ndu}{\sqrt{(a-u)}}-\int\frac{ndu}{\sqrt{(a+b-u)}}=2n\sqrt{a}-2n\sqrt{(a-u)}-2n\sqrt{(a+b)}+2n\sqrt{(a+b-u)}$. Ponatur $u=a$ atque $b=xz$, erit $R=2n\sqrt{a}+2n\sqrt{xz}-2n\sqrt{(a+xz)}$. Quamobrem erit $\int\frac{R\,dz}{\sqrt{(1-z)}}=2n\int\frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{(1-z)}}+2n\sqrt{x}\int\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(1-z)}}-2n\int\frac{dz\sqrt{(a+xz)}}{\sqrt{(1-z}}=4n\sqrt{a}-4n\sqrt{a(1-z)}+2n\sqrt{x}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(z-z^2)}}-2n\int\frac{a\,dz+xz\,dz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}}$. Est vero $\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(z-zz)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-zz)}}-\sqrt{(z-zz)}=\frac{1}{2}\pi$, postquam in integrali positum est $z=1$. At $\int\frac{a\,dz+xz\,dz}{\sqrt{(a-az+xz-xz^2)}}$, si post integrationem ponatur $z=1$, dat $\sqrt{a}+\frac{a+x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{A}\,\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$, denotante A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$ arcum circuli radii $=1$, cuius sinus est $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Quocirca erit $\frac{\pi b}{\sqrt{x}}=4n\sqrt{a}+n\pi\sqrt{x}-2n\sqrt{a}-\frac{n(a+x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{A}.\,\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$, hinc-

M.E.C.D. 2017

hincque $s = nx + \frac{2n\sqrt{ax}}{\pi} - \frac{n(a+x)}{\pi}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Huius aequationis differentialis est $ds = ndx - \frac{ndx}{\pi}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x} = \frac{sdx+nadx}{a+x} - \frac{2ndx\sqrt{ax}}{\pi(a+x)}$. Curua haec autem non vltra datam altitudinem poterit ascendere vt in F vsque, vbi erit $ds = dx$. Posito igitur $ds = dx$, erit $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{\pi}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$. Fiat ergo vt $n : n-1$ ita semiperipheria circuli cuius radius est 1, ad arcum eiusdem circuli, cuius cosinus sit m, erit $\frac{a-x}{a+x} = m$ atque $x = \frac{a(1-m)}{1+m}$. Vt si fuerit angulus DAB, 60°, erit $n = 2$, et $m = o$, ideoque BE $= a =$ AD. Ex quo sequitur, si angulus DAB fuerit maior quam 60. grad. fore $x > a$, at si ille angulus minor fuerit quam 60°, fore $x < a$. Ceterum ex aequatione differentiali apparet, vt jam notauimus in puncto B fore $ds = ndx$, tum vero perpetuo fieri $ds < ndx$, vsque in F, vbi est $ds = dx$.

Corollarium 3.

440. Si linea recta BNA fuerit horizontalis erit $n = \infty$ et $a = o$. Si autem fit $n\sqrt{a} = \sqrt{f}$, erit $ds = \frac{sdx}{x} - \frac{2dx\sqrt{fx}}{\pi x}$ ex aequatione differentiali inventa, cuius integrale est $\frac{s}{x} = \frac{-2}{\pi}\int \frac{dx\sqrt{f}}{x\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{f}}{\pi\sqrt{x}}$, ideoque $s = \frac{4}{\pi}\sqrt{fx}$. Curua ergo erit cyclois, cuius infimum elementum curuae datae locum tenet.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

441. Si aequatio differentialis $ds = ndx - \frac{adx}{\pi}$ A. $\frac{2\sqrt{ax}}{a+x}$ denuo differentietur posito dx constante, prodibit $dds = \frac{-nadx^2}{\pi(a+x)\sqrt{ax}}$. Ex qua aequatione sequitur curuae in B radium osculi fore infinite paruum.

Scholion 4.

442. Ex aequatione generali differentiali $ds = \frac{-dx}{\pi}(\frac{2}{1}\alpha\sqrt{x} + \frac{2\cdot4}{1\cdot3}\beta x\sqrt{x} + \text{etc.}) - \frac{dx}{2}(\zeta + \frac{3}{2}\eta x +$ etc. sequitur semper fore $dds = \infty$ posito $x = 0$, nisi fuerit $\alpha = 0$. Quoties igitur non fuerit $\alpha = 0$ radius osculi curuae quaesitae in B erit $= 0$. At si fuerit $\alpha = 0$, tum radius osculi curuae BMF in puncto B inuenitur $= \frac{\zeta^2}{3\eta}\sqrt{(\frac{\zeta^2}{4} - 1)}$. Ex quo in quouis exemplo proposito statim radius osculi curuae in puncto B innotescit.

Exemplum 3.

443. Si curua data ANB hanc habuerit aequationem, vt sit $dt = Cu^n du$; erit tempus per $NA = \int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}}$. Ponatur $a+b = f$ et $f-u = r^2$, erit $u = f - r^2$ et $u^n = f^n - \frac{n}{1}f^{n-1}r^2 + \frac{n.n-1}{1.2}f^{n-2}r^4 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}f^{n-3}r^6 +$ etc. Cum vero sit $\frac{du}{(\sqrt{a+b-u})} = -2dr$; erit $\int \frac{Cu^n du}{\sqrt{(a+b-u)}} = \text{Const.} - 2C(f^n r -$

M.E.C.D. 2017

$\frac{n}{1.3} f^{n-1} r^3 + \frac{n.n-1}{1.2.5} f^{n-2} r^5 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} f^{n-3} r^7 +$ etc.). Quia autem haec quantitas euaneſcere debet facto $u = o$ ſeu $r = \sqrt{f}$; erit quantitas illa conſtans addenda $= 2C f^{n+\frac{1}{2}} (1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} +$ etc.). Ponatur nunc $u = a$ ſeu $r = \sqrt{b}$, atque loco ſeriei $1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} -$ etc. ponatur N, prodibit totum deſcenſus per BNA tempus $= 2CNf^{n+\frac{1}{2}} - 2C (f^n \sqrt{b} - \frac{n}{1.3} f^{n-1} b\sqrt{b} + \frac{n.n-1}{1.2.5} f^{n-2} b^2 \sqrt{b} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} f^{n-3} b^3 \sqrt{b} +$ etc.). Reſtituatur $a+b$ loco f et orietur hoc tempus $= 2CN (a^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(2n+1)}{2} a^{n-\frac{1}{2}} b + \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.4} a^{n-\frac{3}{2}} b^2 + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2.4.6} a^{n-\frac{5}{2}} b^3 +$ etc.) $- 2C (a^n \sqrt{b} + \frac{2}{1.3} \frac{n}{4} a^{n-1} b\sqrt{b} + \frac{2n(2n-2)}{1.3.5.} a^{n-2} b^2 \sqrt{b} + \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{1.3.5.x} a^{n-3} b^3 \sqrt{b} +$ etc.). Haec igitur ſeries cum ſerie aſſumta hoc tempus exprimente comparata dat: $k = 2CNa^{n+\frac{1}{2}}$; $\alpha = \frac{2n+1}{2} 2CNa^{n-\frac{1}{2}}$; $\beta = \frac{(2n+1)(2n-1)}{2.4} 2CNa^{n-\frac{3}{2}}$; $\gamma = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2.4.6} 2CNa^{n-\frac{5}{2}}$ etc. $\zeta = -2Ca^n$; $\eta = \frac{-2n}{1.3} 2Ca^{n-1}$; $\theta = \frac{-2n(2n-2)}{1.3.5} 2Ca^{n-2}$ etc. Hinc oritur $ds = \frac{-2CNa^n dx}{\pi} \left(\frac{(2n+1)\sqrt{x}}{1.\sqrt{a}} + \frac{(2n+1)(2n-1)x\sqrt{x}}{1.3.a\sqrt{a}} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2\sqrt{x}}{1.3.5.a^2\sqrt{a}} +\right.$ etc.) $+ Ca^n dx (1 + \frac{n.x}{1.a} + \frac{n(n-1)x^2}{1.2.a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{1.2.3.a^3} +$ etc.) Huius vero ſeriei poſterioris ſumma eſt $Cdx(a+x)^n$, huiusque integralis $\frac{C(a+x)^{n+1}}{n+1}$. Quare

M.E.C.D. 2017

post integrationem habebitur $s = \frac{C(a+x)^{n+1} - Ca^{n+1}}{n+1}$ $- \frac{4CNa^n\sqrt{x}}{\pi\sqrt{a}}\left(\frac{2n+1}{3}x + \frac{(2n+1)(2n-1)x^2}{3.5.a}\right.$ $\left. + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^3}{3.5.7.a^2} + \text{etc.}\right)$. Quae est aequatio pro curua quaesita BMF, quae toties ex terminorum numero finito constat, quoties n fuerit terminus huius seriei $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etc. Est vero $N = \int dp(1-pp)^n$ si post integrationem ponatur $p = 1$. Hacque facta substitutione est $\int dp(1-pp)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3}\int dp(1-pp)^n$. Quare si fuerit $n = -\frac{1}{2}$, quia est $\int \frac{dp}{\sqrt{(1-pp)}} = \frac{\pi}{2}$, erit si $n = \frac{1}{2}$, $N = \frac{\pi}{4}$; si $n = \frac{3}{2}$ erit $N = \frac{3\pi}{4.4}$; si $n = \frac{5}{2}$ erit $N = \frac{3.5.\pi}{4.6.4}$; si $n = \frac{7}{2}$ erit $N = \frac{3.5.7.\pi}{4.6.8.4}$ etc. At quia si $n = 0$ est $N = 1$, erit si $n = 1$, $N = \frac{2}{3}$; si $N = 2$, erit $N = \frac{2.4}{3.5}$; si $n = 3$; erit $N = \frac{2.4.6}{3.5.7}$ etc. Vt si curua fuerit cyclois erit $n = -\frac{1}{2}$, ideoque erit $s = 2C\sqrt{(a+x)} - 2C\sqrt{a}$ vt supra inuenimus. (438.).

Scholion 5.

444. Quando igitur est $dt = Cu^n du$, hic valor pro s inuenitur, atque ex ipsa methodi natura intelligitur: si dt aequetur aggregato aliquot huiusmodi terminorum, tum s aequalem fore aggregato serierum a singulis terminis productarum. Hac igitur ratione, si curua data fuerit

M.E.C.D. 2017

rit quaecunque, ſeries eſt quaerenda terminorum huius formae $C u^n du$, ipſi dt aequalis. Atque ex iis omnibus debitus ipſius s valor obtinebitur. Vt ſi fuerit natura lineae datae ANB haec $dt = \frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} + \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{c}}$; primus terminus dat $C = \sqrt{c}$ et $n = -\frac{1}{2}$; vnde fit $s = 2\sqrt{c}(a+x) - 2\sqrt{ac}$, alter terminus dat $C = \frac{1}{\sqrt{c}}$, et $n = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{\pi}{4}$ vnde oritur $s = \frac{2(a+x)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$. Curua quaeſita ergo ſequente aequatione exprimetur $s = \frac{2(a+3c+x)\sqrt{(a+x)} - 2(a+3c)\sqrt{a} - 2x\sqrt{x}}{3\sqrt{c}}$.

Exemplum 4.

445. Sit curua data circulus diametri c, erit $dt = \frac{\frac{1}{2}c\,du}{\sqrt{(cu-u^2)}} = \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{\sqrt{cu}} + \frac{1.\sqrt{u}}{2.c\sqrt{c}} + \frac{1.3.u\sqrt{u}}{2.4.c^2\sqrt{c}} + \text{etc.}\right)$ Sumto nunc quolibet termino ſeorſim et inveniatur valor ipſius ds, habebitur colligendis omnibus $ds = \frac{c\,dx}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c(a+x)}} + \frac{1\sqrt{(a+x)}}{2c\sqrt{c}} + \frac{1.3(a+x)^{\frac{3}{2}}}{2.4.c^2\sqrt{c}} - \frac{1\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}} - \frac{1.3.x\sqrt{x}}{2.4.c^2\sqrt{c}} - \frac{3.1.3a\sqrt{x}}{2.2.4c^2\sqrt{c}}\right)$ etc.

Ex quibus ſequens aequatio naſcitur $\frac{2ds}{cdx} = \frac{1}{\sqrt{(a+x)}(c-a-x)} - \left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}}\right) - \frac{a}{1.dx}d\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1.\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}}\right) - \frac{a^2}{1.2.dx^2}dd\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1.\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}} - \frac{1.3.x\sqrt{x}}{2.4c^2\sqrt{c}}\right) - \frac{a^3}{1.2.3.dx^3}d^3\left(\frac{1}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \frac{1}{\sqrt{cx}} - \frac{1.\sqrt{x}}{2c\sqrt{c}} - \text{etc.}\right)$

M.E.C.D. 2017

$\frac{1.3.x\sqrt{x}}{2.4c^2\sqrt{c}} - \frac{1.3.5.x^2\sqrt{x}}{2.4.6c^3\sqrt{c}}) -$ etc. Quae expreſſio in multas alias formas transmutari poteſt.

PROPOSITIO 51.

Problema.

Tabula XI. Fig. 5.

446. *In hypotheſi grauitatis vniformis deorſum tendentis ſi detur curua quaecunque* AM, *inuenire curuam* AN *eiusmodi, vt oſcillationes, quae peraguntur ſuper curua compoſita* MAN, *ſint omnes inter ſe iſochronae.*

Solutio.

Sit datae curuae AM abſciſſa AP$=u$; arcus reſpondens AM$=t$, dabitur ob curuam datam aequatio inter u et t. Deinde in curua quaeſita AN ponatur abſciſſa AQ$=x$ et arcus AN$=s$. Iam in oſcillatione quacunque ſit celeritas in puncto A debita altitudini b; eritque tempus per MAN$=\int\frac{dt}{\sqrt{(b-u)}} + \int\frac{ds}{\sqrt{(b-x)}}$. Atque ſi in hac expreſſione ponatur $u=b$ et $x=b$ prodibit tempus vnius ſemioſcillationis; quod cum debeat eſſe conſtans, ex formula id exprimente littera b prorſus euaneſcere debet. Ponatur $dt=\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}} + P\,du$ et $ds=\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{x}} - Q\,dx$; eritque tempus vnius ſemioſcillationis $=\int\frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{(bu-u^2)}} + \int\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(bx-x^2)}} + \int\frac{P\,du}{\sqrt{(b-u)}} - \int\frac{Q\,dx}{\sqrt{(b-x)}}$ poſtquam poſitum eſt $u=b$ et $x=b$. Huius autem expreſ-

M.E.C.D. 2017

expreſſionis duo priores termini jam ita ſunt comparati, vt b ex iis euaneſcat facto $u = b$ et $x = b$, dant nimirum $\pi \sqrt{f} + \pi \sqrt{b}$, denotante π peripheriam circuli diametri $= 1$. Quare ſi poſteriores termini ita fuerint comparati, vt ſeſe deſtruant, facto $u = b$ et $x = b$, habebitur id quod quaeritur; at P et Q tales neceſſe eſt ſint quantitates, quae b non inuoluant, quia in aequationes curuarum ingrediuntur. At erit $\int \frac{P\,du}{\sqrt{(b-u)}} - \int \frac{Q\,dx}{\sqrt{(b-x)}} = 0$ facto $u = b$ et $x = b$, ſi Q talis fuerit functio ipſius x, qualis P eſt ipſius u. Seu cum nihil impediat, quo minus poni poſſit $x = u$, fiat $x = u$; oportebitque eſſe $Q = P$. Datur vero P ex aequatione curuae A M datae, quippe eſt $P = \frac{dt}{du} - \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$. Quo circa pro curua quaeſita haec habebitur aequatio $ds = \frac{du\sqrt{b}}{\sqrt{u}} - dt + \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{u}}$, ſeu $s + t = 2\sqrt{bu} + 2\sqrt{fu}$; ex qua aequatione determinatur natura curuae quaeſitae AN. Q. E. I.

Corollarium 1.

447. Sumta igitur $AP = u = x$; cum ſit $AM = t$ et $AN = s$, erit $NA + MA = t + s = 2(\sqrt{f} + \sqrt{b})\sqrt{AP}$, ſeu ſumma arcuum eidem abſciſſae reſpondentium proportionalis eſt radici quadratae ex abſciſſa AP. Tabula XI. Fig. 6.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

448. Curua igitur quaesita AND ita debet esse comparata, vt summa arcuum AM + AN aequalis sit arcui cycloidis eidem absciſſae AP respondentis. Ex qua proprietate sponte fluit, omnes oscillationes esse isochronas.

Corollarium 3.

449. Tempus ergo vnius oscillationis, aequatur tempori descensus super cycloide, cuius in infimo puncto radius osculi est $2(\sqrt{f}+\sqrt{h})^2$. Seu pendulum huius longitudinis producet semioscillationes minimas isochronas oscillationibus super curua MAN. Pendulum vero long. $\frac{1}{2}(\sqrt{f}+\sqrt{h})^2$, peraget totas oscillationes isochronas.

Corollarium 4.

450. Quia quantitatem h pro lubitu accipere licet, infinitae curuae AND satisfaciunt: atque etiam ea poterit determinari vt tempus oscillationis sit datae quantitatis. Vt si vna oscillatio isochrona esse debeat oscillationi penduli longitudinis $\frac{L}{4}$; erit $L = 2(\sqrt{f}+\sqrt{h})^2$, ideoque $\sqrt{h} = \sqrt{\frac{L}{2}} - \sqrt{f}$. Quare L maius esse debet quam $2f$.

Corollarium 5.

451. Si data curua AM fuerit cyclois seu $dt = \frac{du\sqrt{f}}{\sqrt{f}}$, altera curua AN erit quoque cyclois quo-

M.E.C.D. 2017

quaecunque, fit enim $ds = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{x}}$. Atque ſuper duabus huiusmodi cycloidibus non ſolum integrae oſcillationes erunt iſochronae, ſed etiam ſinguli aſcenſus et deſcenſus ſuper qualibet cycloide abſoluentur eodem tempore.

Exemplum 1.

452. Sit curua data AM recta vtcunque ad horizontem inclinata, vt ſit $dt = ndu$, prodibit pro curua quaeſita poſito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f}+\sqrt{h}$ haec aequatio $ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - ndu = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - ndx$. Quare ſi vocetur $PN = y$, erit $dy = dx\sqrt{(\frac{L}{2x} - \frac{2n\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} + n^2 - 1)}$ vbi $\frac{L}{4}$, denotat longitudinem penduli iſochroni: ex qua aequatione curua quaeſita poterit conſtrui. Curua autem in D habebit punctum reuerſionis ibique tangentem verticalem, quod habebitur ſumendo $AC = \frac{L}{2(n+1)^2}$. Curuae vero in infimo loco A radius oſculi eſt $= L$. Hic praeterea notandum eſt ſi $n = 1$, quo caſu linea AM fit recta verticalis in AC incidens, fore curuam quaeſitam algebraicam; erit namque $dy = \frac{dx\sqrt{(L-2\sqrt{2Lx})}}{\sqrt{2x}}$, cuius integralis eſt $y = \frac{L}{3} - \frac{(\sqrt{L}-2\sqrt{2x})\sqrt{(L-2\sqrt{Lx})}}{3}$ ſeu $9y^2 - 6Ly = -6L\sqrt{2Lx} + 24Lx - 16x\sqrt{2Lx}$, quae ab irrationalitate prorſus liberata fit quatuor dimenſionum. Huius curuae cuſpis D habebitur ſumendo $AC = \frac{1}{8}L$, quo caſu fit $CD = \frac{L}{3}$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Exemplum 2.

453. Sit curua data AM circulus radii a; erit $dt = \frac{adu}{\sqrt{(2au-u^2)}}$. Hinc posito $\sqrt{\frac{L}{2}}$ loco $\sqrt{f}+\sqrt{h}$ erit $ds = \frac{du\sqrt{L}}{\sqrt{2u}} - \frac{adu}{\sqrt{(2au-u^2)}} = \frac{dx\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} - \frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Ex qua aequatione sequitur $dy = dx\sqrt{(\frac{L}{2x} - \frac{2a\sqrt{L}}{x\sqrt{(4a-2x)}} + \frac{a^2}{2ax-xx} - 1)}$. Cuspis curuae AND erit vbi est $\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2x}} = 1 + \frac{a}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ seu $4x^4 + 2Lx^3 - 16ax^3 + L^2x^2 - 8aLx^2 + 24a^2x^2 - 4aL^2x + 12a^2Lx - 16a^3x + 4a^2L^2 - 8a^3L + 4a^4 = 0$. Ponatur $L = a$, fiet $x = 0$ et $4x^3 - 14ax^2 + 17a^2x - 8a^3 = 0$. At si $L = 2a$, erit $x^4 - 3ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x - a^4 = 0$, vnde fit $x = a = AC$. Hocque casu longitudo penduli isochroni est $\frac{a}{2}$.

Scholion.

454. Si igitur efficiatur, vt pendulum in huiusmodi curua composita oscillationes peragat, eius oscillationes aeque erunt isochronae, ac si in cycloide moueretur. Atque hanc ob rem quaecunque curua ad tautochronismum adhiberi poterit. Restat in hoc negotio ista quaestio, quemadmodum curuam datam comparatam esse oporteat, vt inuenta cum data vnam curuam continuam constituat, id quod sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 52.

Problema.

455. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum ten-*

M.E.C.D. 2017

tendentis inuenire curuam continuam MAN, *ſuper qua omnes ſemioſcillationes abſoluantur aequalibus temporibus.*

Solutio.

Sit igitur curua MAN curua continua, in eaque AP $=x$, et AM $=t$, et AN $=s$. Aſſumatur noua indeterminata z atque x et t ita dentur in z, vt poſita z affirmatiua prodeat curuae pars AM, at poſita z negatiua prodeat curuae pars AN. Quia nunc pro vtraque parte x eundem obtinet valorem, debebit x talis eſſe functio ipſius z, quae eadem maneat, ſiue z affirmatiue ſumatur ſiue negatiue; ſeu x debet eſſe functio par ipſius z. Deinde t eiusmodi eſſe debet functio ipſius z, vt prodeat s, ſi ponatur $-z$ loco z. At quia arcus s in alteram partem axis cadit, eius valor erit negatiuus reſpectu curuae AM: quare ſi in valore ipſius t ponatur $-z$ loco z, prodire debet $-s$. Sit nunc R functio impar ipſius z, et S eius functio par; et ponatur $t = R + S$, fiet $-s = -R + S$, ſeu $s = R - S$; vnde fit $t + s = 2R$. Sit longitudo penduli iſochroni $= a$, quia eſt $\sqrt{2a} = \sqrt{f} + \sqrt{h}$; debebit eſſe $t + s = 2\sqrt{2ax}$; hincque erit $R = \sqrt{2ax}$, et $x = \frac{R^2}{2a}$. Quia autem x debet eſſe functio par ipſius z; ex hac expreſſione id per ſe obtinetur; cum enim R ſit functio impar, eius quadratum erit functio par. Sit igitur $R = z$, erit $z = \sqrt{2ax}$, atque S debebit eſſe functio par ipſius $\sqrt{2ax}$ ſeu ipſius $\sqrt{x}$. Quo facto habebitur iſta aequatio $s = \sqrt{2ax} - S$ pro omnibus curuis continuis tautochronis. Sit $dS = \frac{T\,dx}{\sqrt{2ax}}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$, erit T functio impar quaecunque ipsius $\sqrt{x}$. Quapropter fiet $ds = \frac{adx - Tdx}{\sqrt{2ax}}$, atque $dy = \frac{dx\sqrt{(a^2 - 2aT + T^2 - 2ax)}}{\sqrt{2ax}}$, posito PN $= y$. Ex qua aequatione infinitae curuae tautochronae continuae reperiuntur. Q. E. I.

Corollarium 1.

456. Curua igitur hoc modo inuenta AN est tautochrona cum sui ipsius parte continua AM. Dantur vero per praecedens problema infinitae aliae curuae AM, quae cum AN coniunctae oscillationes isochronas producunt.

Corollarium 2.

457. Per praecedentem propositionem omnis curua AM, cuius haec est aequatio $t = \sqrt{2cx} + S$ seu $dt = \frac{cdx}{\sqrt{2cx}} + \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$ oscillationes isochronas cum curua AN producit. At harum oscillationum longitudo penduli isochroni est $= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{4}$.

Corollarium 3.

458. Inter has ergo infinitas curuas AM cum AN oscillationes isochronas producentes ea est continua cum AN in qua est $c = a$. Atque longitudo penduli isochroni fit $= a$, vt assumsimus.

Corollarium 4.

459. Si ponatur $c = 0$; erit cum curua AN quoque tautochrona haec curua AM, cuius aequatio est $dt = \frac{Tdx}{\sqrt{2ax}}$ seu $t = S$. Hocque casu longitudo penduli est $\frac{a}{4}$. Quoties ergo est $T = \sqrt{2bx}$; to-

M.E.C.D. 2017

toties quoque linea recta cum AN tautochronismum producit, si ita fuerit inclinata vt anguli MAP secans sit $\sqrt{\frac{b}{a}}$ seu cosinus $= \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Corollarium 5.

460. Quia curua AN in puncto A ad axem AP normalis esse debet, oportet vt T euanescat posito $x = 0$. Idem etiam sequitur ex eo quod $a - T$ debeat esse quantitas affirmatiua saltem in initio A. Si enim T fieret infinitum posito $x = 0$, id quod infinitis modis accidere potest, ita tamen vt S euanescat posito $x = 0$, curua AN in alteram axis AP partem cadet, curuaque in A haberet cuspidem et corpus postquam super MA descendit per reflexionem super AN ascenderet, quod esset contra naturam oscillationum.

Corollarium 6.

461. Si igitur T euanescit posito $x = 0$; radius osculi in A qui est $\frac{sds}{dx}$, ob $s = y$ in hoc loco, erit $= a$, ideoque oscillationes congruent cum oscillationibus minimis penduli longitudinis a vt assumsimus.

Corollarium 7.

462. Curuae portio AN habebit in D tangentem verticalem ibique cuspidem; quod punctum inuenitur ex hac aequatione $a = T = \sqrt{2ax}$, sumendo AC = valori ipsius x ex hac aequatione. Altera quoque pars AM habebit cuspidem si alicubi fuerit $a + T = \sqrt{2ax}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 8.

463. Si fuerit $S=0$ et $T=0$, erit $s=\sqrt{2ax}$. Quare curua erit cyclois atque portio AN aequalis et similis curuae AM. Est ergo cyclois curua continua super qua omnes oscillationes absoluuntur eodem tempore.

Exemplum.

464. Sit $T=\sqrt{2bx}$, quo casu curua AN quoq; est tautochrona cum recta angulum AD constituente, cuius cosinus est $\sqrt{\frac{a}{b}}$; erit $ds=\frac{adx-dx\sqrt{2bx}}{\sqrt{2ax}}$, atque $s=\sqrt{2ax}-\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. Habebitur autem $dy=\frac{dx\sqrt{(a^2-2a\sqrt{2bx}+2bx-2ax)}}{\sqrt{2ax}}$. Quae aequatio etiam congruit cum ea, quam in prop. praec. pro curua inuenimus, quae cum recta tautochronam constituat (452), si modo scribatur L pro a et n pro $\sqrt{\frac{b}{a}}$. Quare si fuerit $b=a$, curua quoque algebraica inuenitur NAM, quae est tautochrona, cuius aequatio est $dy=dx\sqrt{\frac{a-2\sqrt{ax}}{2x}}$, et integralis haec $3y=a-(\sqrt{a}-2\sqrt{2x})\sqrt{(a-2\sqrt{2ax})}$. Quae est ea ipsa curua, quae cum recta verticali tautochronam constituit, vt supra inuenimus (452). Longitudo vero penduli isochroni est $=a$, si corpus in hac curua oscilletur. At si moueatur super recta AC et parte curuae AN, longitudo penduli isochroni erit $\frac{1}{4}a$. Atque si D fuerit cuspis curuae, erit $AC=\frac{1}{8}a$, alter vero ramus AM in infinitum ascendit. Praeter hanc curuam tautochronam algebraicam aliae vix inueniri poterunt.

CAPUT

M.E.C.D. 2017

CAPUT TERTIUM.

DE MOTU PUNCTI SUPER DATA LINEA IN MEDIO RESISTENTE.

PROPOSITIO 53.

Problema.

465.

SI corpus sollicitetur deorsum a potentia uniforg, in medio quocunque resistente; determinare motum corporis descendentis super data curua AM, *et pressionem, quam curua in singulis punctis sustinet.* Tabula XII. Fig. 1.

Solutio.

Ponatur in verticali AP abscissa $= x$, applicata PM $= y$ et arcus AM $= s$; sitque altitudo celeritati corporis in M debita $= v$ et resistentia in M $=$ R. Manifestum jam est ex capite praecedente si nulla esset resistentia fore $dv = g\,dx$. Resistentia vero minuit hoc celeritatis incrementum, et aequipollet vi tangentiali $=$ R; eiusque solius effectus in hoc consisteret, vt foret $dv = -R\,ds$. Quamobrem si et potentia sollicitans g, et resistentia R ambae simul in corpus agunt, erit $dv = g\,dx - R\,ds$, ex qua aequatione celeritas corporis in quouis puncto M est eruenda. Atque si corpus in A ex quiete descendat, integratio ita

M.E.C.D. 2017

est instituenda, vt facto $x=0$ prodeat quoque $v=0$. Verum si data cum celeritate corpus in A descensum inceperit, in integratione effici debet, vt posito $x=0$, fiat v aequalis altitudini debitae illi celeritati initiali. Cum autem inuenta fuerit celeritas corporis, habebitur simul tempus, quo quiuis arcus AM absoluitur sumendo $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$. Quod ad pressionem, quam curua in M sustinet, spectat, curua in M duplici vi premitur, vi centrifuga scilicet, et vi normali. Ponamus curuam esse conuexam deorsum, et elementum dx constans, erit longitudo radii osculi in contrariam partem normalis MN directi $= \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, vnde vis centrifuga erit $= \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$, qua curua secundum directionem MN premitur. Secundum eandem vero directionem curua premetur a vi normali, quae est $= \frac{g\,dy}{ds}$; vis normalis enim a potentia absoluta g tantum oritur, quia directio vis resistentiae est in tangente sita, ideoque nullam vim normalem generat. Consequenter tota vis, qua curua in M secundum directionem normalis MN premitur est $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$. Q. E. I.

Corollarium I.

466. Expressio ergo vis curuam prementis congruit cum ea, quam in vacuo inuenimus. Neque tamen curua in medio resistente eadem vi premitur qua in vacuo, ob celeritatem a qua vis cen-

M.E.C.D. 2017

centrifuga pendet, quae a medio resistente variatur.

Corollarium 2.

467. In isto descensu corpus non vt in vacuo maximam habet celeritatem in puncto B, in quo tangens est horizontalis; sed posito $dv = o$, locus in quo corpus maximam habet celeritatem inuenitur ex hac aequatione $g\,dx = R\,ds$ seu $\frac{dx}{ds} = \frac{R}{g}$ in eo puncto, vbi sinus anguli, quem tangens curuae cum linea horizontali constituit, est ad sinum totum vt potentia absoluta g ad resistentiam in eo loco.

Corollarium 3.

468. Celeritas corporis igitur augetur vsque ad hoc punctum, in quo celeritas est maxima; vltra vero hoc punctum celeritas iterum decrescit, quia tum $R\,ds$ excedit $g\,dx$, et hanc ob rem fit dv negatiuum.

Corollarium 4.

469. Si resistentia fuerit vt potestas quaecunque celeritatum, cuius exponens est $2m$, et si medium resistens fuerit vniforme, cuius exponens sit k; vbi k est altitudo celeritati debita, qua cum corpus mouetur, resistentiam patitur vi grauitati aequalem. Hoc ergo casu erit $R = \frac{v^m}{k^m}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{v^m}{k^m}$, atque ista habebitur aequatio ad motum definiendum: $dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m}$.

Corollarium 5.

470. Si autem abscissae in axe BQ capiantur, fueritque BQ $= x$, QM $= y$, et BM $= s$, propter harum quantitatum differentialia negatiua respectu priorum, habebitur $dv = -g\,dx + R\,ds$. Quae aequatio ita est integranda, vt posito $x = 0$ fiat $v = b$, si quidem celeritas in B, quam corpus in hoc puncto obtinet, huic altitudini fuerit debita. At pressio secundum MN, quam curua sustinet, est $= \frac{g\,dy}{ds} - \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$.

Corollarium 6.

471. Si medium fuerit vniforme cuius exponens sit k, resistentia vero functioni cuicunque ipsius v, quae sit V, proportionalis. Sumatur K talis functio ipsius k, qualis V est ipsius v, erit resistentia $R = \frac{V}{K}$; ideoque habebitur ista aequatio $dv = -g\,dx + \frac{V\,ds}{K}$, sumto axe BQ.

Scholion 1.

472. Formulam hic duplicem incrementum celeritatis exhibentem dedi pro duobus axibus AP et BQ, quia in sequentibus mox hac mox illa vtemur.

M.E.C.D. 2017

vtemur. Scilicet quando deſcenſus ſemper fit ex fixo puncto vt A, vtemur priore formula AP pro axe ſumente. At ſi in eadem curua plures deſcenſus ad punctum fixum vsque B ſint conſiderandi, vt in motu oſcillatorio vſu venit, poſteriore formula vtemur, in qua BQ pro axe habetur.

Scholion 2.

473. Quia formula, ex qua motus corporis ſuper data curua determinari debet, ita eſt comparata, vt indeterminatae paucis caſibus a ſe inuicem ſeparari queant, ſaepe ex ea nihil, quod ad motum ſpectat, concludi licet. Quamobrem eos tantum caſus euoluere conuenit, quibus aequatio $dv = \pm g dx \mp \frac{V ds}{K}$ vel ſeparari vel integrari poteſt. Hi autem caſus omnino ad tres caſus generales reducentur. Primus eſt, quando linea ſuper qua corpus mouetur eſt recta, tum enim ob $ds = ndx$, aequatio transit in hanc $\frac{\pm K dv}{gK - nV} = dx$, in qua indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Secundus caſus eſt, quando in V vnicam tantum obtinet dimenſionem v, tum enim aequatio integrationem admittit. Tertius caſus eſt, quando tam v quam aequatio pro curua ita eſt comparata, vt in aequatione v et x, vbique eundem dimenſionrm numerum conſtituant; tum enim per regulam notam Bernoullianam indeterminatae a ſe inuicem poſſunt ſeparari. Hoc autem euenit, ſi in Vds vnica fuerit dimenſio ipſarum v et x. Praeter hos quidem caſus eſſent duo alii, integrationem admittentes, ſed qui huc non pertinent.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

nent. Primus est si resistentia euanescit, qui vero casus in praecedente Capite iam sufficienter est pertractatus. Alter casus est, si potentia sollicitans g euanescit; de quo autem non est opus vt agamus, quia motus super quacunque linea congruit cum motu super linea recta, de quo in praecedente libro iam satis est dictum. Praeterea quoque multis casibus aequatio separationem admittit, si fuerit $V = v^2$, quoties scilicet aequatio pro curua ita est comparata, vt aequatio ad casum aequationis, quam quondam Com. Riccati proposuit, potest reduci. Generaliter vero etiam potest in hoc casu celeritas per seriem exhiberi, atque finita expressione definiri, quemadmodum ego generalem aequationis Riccatianae dedi constructionem. Quoties igitur natura rei requiret, praeter tres casus expositos, subinde quoque hunc casum, in quo resistentia biquadrato celeritatis est proportionalis, euoluemus.

Scholion 3.

474. Quia haec de motu in medio resistente tractatio per se est difficilis et intricata, non ad plures vis sollicitantis hypotheses, vt capite praecedente fecimus, eam accommodabimus; sed nobis perpetuo potentia sollicitans erit vniformis et deorsum directa; neque de viribus centripetis multum erimus solliciti. Atque cum potentia sollicitans ponatur vniformis, medium resistens quo-

M.E.C.D. 2017

quoque tale poni conueniet; fluidum enim quod reſiſtentiam generat, ipſam corporis grauitatem minuit, et ſi id non eſſet vniforme, potentia abſoluta non recte vniformis poneretur. Deinde etiam propter eandem rationem curuam in qua corpus mouetur, totam in eodem plano poſitam aſſumemus, quo multas difficultates nullam vtilitatem afferentes remoueamus.

PROPOSITIO 54.

Problema.

475. *Si corpus perpetuo ſollicitetur deorſum a potentia vniformi* g, *in medio quocunque reſiſtente; determinare motum corporis ſuper data curua* A M *aſcendentis et preſſionem, quam curua in ſingulis punctis* M *patitur.* Tabula XII. Fig. 2.

Solutio.

In verticali AP poſita abſciſſa A P $=x$; P M $=y$ et A M $=s$; ſit altitudo celeritati in A debita $=b$; eique in M debita $=v$; atque reſiſtentia in M $=$ R. Erit igitur dum corpus aſcendit tam potentia ſollicitans g, quam reſiſtentia R motui contraria. Hanc ob rem erit ſimili modo, quo in praecedente prop. $dv = -g\,dx - R\,ds$. Ex qua aequatione v ita debet determinari, vt facto x $=o$ fiat $v=b$. Deinde cum reſiſtentia in preſſionem, quam curua patitur, non ingrediatur, erit

M.E.C.D. 2017

erit vt ſupra preſſio tota, quam curua in M ſecundum directionem normalis MN ſuſtinet $= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$ poſito dx conſtante; vbi $\frac{gdy}{ds}$ denotat vim normalem, et $-\frac{2vdxddy}{ds^3}$ vim centrifugam, vtramque juxta MN directam. Q. E. I.

Corollarium 1.

476. In aſcenſu corporis ergo ſuper quacunque curua celeritas corporis perpetuo imminuitur; atque punctum curuae D reperietur, in quo corporis aſcendentis celeritas euaneſcit, ſi in aequatione $dv = -gdx - Rds$ poſt integrationem ponatur $v = 0$.

Corollarium 2.

477. Si corpus ſuper curua DMA deſcenderet, haberetur iſta aequatio $dv = -gdx + Rds$, (470.) ex qua intelligitur aſcenſum non eſſe ſimilem deſcenſui, vt in vacuo. Sed ſi reſiſtentia fieret negatiua ſeu accelerans, tum aſcenſus ſimilis foret deſcenſui. Quare deſcenſus in medio reſiſtente congruet cum aſcenſu in medio tantumdem accelerante et viciſſim.

Corollarium 3.

478. Quoniam aequatio pro aſcenſu hoc tantum differt ab aequatione pro deſcenſu, quod reſiſtentia R valorem induat negatiuum; intelligitur iisdem caſibus, quibus aequatio pro deſcenſu

M.E.C.D. 2017

ſu ſeparari vel integrari poteſt, iisdem quoque aequationem pro aſcenſu ſimili modo tractari poſſe.

Corollarium 4.

479. Si fuerit $R = \frac{V}{K}$, erit pro aſcenſu ſuper curua AM haec aequatio $dv = -g\,dx - \frac{V\,ds}{K}$. At pro deſcenſu habetur $dv = -g\,dx + \frac{V\,ds}{K}$. Quare ſi illa aequatio poterit integrari ſimul quoque huius aequationis habebitur iutegrale ponendo tantum $-K$ loco K.

Scholion.

480. Secundum tres igitur caſus ſupra memoratos, quibus aequatio inuenta vel ſeparari vel integrari poteſt, tam deſcenſum quam aſcenſum pertractabimus, ſi ſcilicet detur curua ſuper qua motus fieri ponitur. Deinde autem ex datis potentia ſollicitante, reſiſtentia et preſſione curuam inueſtigabimus. Tertio ſi motus quaedam proprietas fuerit propoſita, curuam determinabimus, quae in data reſiſtentiae hypotheſi ſatisfaciat. Praeterea ſequentur alia problemata, in quibus harum quatuor rerum reſiſtentiae, motus, preſſiones et curuae duae dantur, reliquae duae requiruntur. Habebimus deinceps quoque problemata indeterminata, quibus omnes curuae requiruntur, ſuper quibus corpus deſcendens vel eandem celeritatem acquirit vel eas eodem tempore abſoluit.

M.E.C.D. 2017

Tum ſequetur doctrina de lineis brachyſtochronis, atque tandem caput concludet de motu oſcillatorio tractatio.

PROPOSITIO 55.

Problema.

Tabula XII. Fig. 3.

481. *In medio reſiſtente vniformi quocunque et hypotheſi grauitatis vniformis* g, *determinare motum corporis deſcendentis ſuper linea recta* AMB *ad horizontem vtcunque inclinata.*

Solutio.

Poſita AP $=x$ erit AM $=s=nx$; et quia medium reſiſtens eſt vniforme, erit reſiſtentia R $=\frac{V}{K}$. Poſita ergo altitudine celeritati in M debita $=v$, erit $dv=gdx-\frac{nVdx}{K}$ (465.). Vnde fit $\frac{Kdv}{gK-nV}=dx$, in qua aequatione indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae: erit ergo $x=\int\frac{Kdv}{gK-nV}$, in qua integratione efficiendum eſt vt poſito $x=0$ fiat $v=0$, ſi quidem deſcenſus in A ex quiete incipiat. Sin vero habeat celeritatem initialem haec per integrationem eſt introducenda. Tempus per ſpatium AM eſt $=\int\frac{ndx}{\sqrt{v}}$. Poſito ergo loco dx eius valore in v, habebitur tempus per AM $=\int\frac{nKdv}{(gk-nV)\sqrt{v}}$ quod integrale ita eſt ſumendum, vt poſita $V v=$ celeritati initiali in A euaneſcat. Preſſio vero quam linea in quouis puncto M ſuſtinet, eſt

M.E.C.D. 2017

est constans nempe aequalis vi normali $= \frac{g\,dy}{ds} = \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$, quia vis centrifuga euanescit ob $ddy = 0$. Q. E. I.

Corollarium 1.

482. Celeritas corporis ergo tam diu acceleratur, quam diu est $gK > nV$. At si semel fuerit $gK = nV$ corpus neque accelerabitur neque retardabitur. Diminuetur vero corporis celeritas si in initio A fuerit $nV > gK$.

Corollarium 2.

483. Si ergo corpus in A descensum a quiete incipiat motus perpetuo crescet, ita tamen vt semper sit $gK > nV$, quippe quae est vltima celeritas, quam descensu per infinitum spatium demum acquirit.

Corollarium 3.

484. Quo maior ergo est angulus BAC, eo minor est vltima, quam corpus acquirere potest celeritas. Maximam vero celeritatem vltimam, qua aequabiliter progreditur, acquirit descensu super recta verticali AC.

Corollarium 4.

485. Si resistentia fuerit vt potestas indicis $2m$ celeritatum, erit $V = v^m$ et $K = k^m$, vnde

M.E.C.D. 2017

ista habebitur aequatio $x = \int \frac{k^m dv}{g k^m - n v^m}$, atque tempus per $AM = \int \frac{n k^m dv}{(g k^m - n v^m)\sqrt{v}}$

Exemplum 1.

486. Resistat medium in simplici ratione celeritatum, erit $2m = 1$, atque $dv = g dx - \frac{n dx \sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $x = \int \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}} = -\frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}$; vel per seriem $x = \frac{2v}{2g} + \frac{2nv\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^2v}{4g^3k} + \frac{2n^3v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}} +$ etc. si quidem descensus in A ex quiete inciat. Tempus autem per spatium AM erit $= \int \frac{n dv \sqrt{k}}{g\sqrt{kv} - nv} = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{v}}$. Quare si tempus per AM ponatur $= t$, erit $nx + 2\sqrt{kv} = \frac{gt\sqrt{k}}{n}$. Atque in serie $t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v}{2g^2\sqrt{k}} + \frac{2n^3v\sqrt{v}}{3g^3k} + \frac{2n^4v^2}{4g^4k\sqrt{k}} +$ etc. Si ergo corpus in descensu per AB acquisiuit celeritatem altitudini b debitam, ex hac reperitur altitudo $AC = \frac{-2\sqrt{bk}}{n} + \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - n\sqrt{b}}$.

Exemplum 2.

478. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$ et $x = \int \frac{k dv}{gk - nv} = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nv}$, si quidem corpus in A ex quiete ascensum inchoauerit. Quare si e sit numerus, cuius logarithmus est vnita, erit $e^{\frac{nx}{k}} = \frac{gk}{gk - nv}$; atque $v = \frac{gk}{}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{gk(e^{\frac{nx}{k}}-1)}{ne^{\frac{nx}{k}}} = \frac{gk}{n}(1-e^{\frac{-nx}{k}})$. Hanc ob rem si corpus in B habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit $AC = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk-nb}$. Atque si corpus per spatium infinitum descendat, habebit celeritatem altitudini $\frac{gk}{n}$ debitam. Tempus vero per spatium AM erit $= \int \frac{nkdv}{(gk-nv)\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{nv}}{\sqrt{gk}-\sqrt{nv}}$. Per series tam spatium x, quam tempus commode exprimitur; id quod generaliter pro quouis valore litterae m in sequente exemplo monstrabimus.

Exemplum 3.

488. Sit resistentia vt potestas exponentis $2m$ celeritatum, erit $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$; quae expressio in seriem conuersa dat $dx = \frac{dv}{g} + \frac{nv^m dv}{g^2 k^m} + \frac{n^3 v^{2m} dv}{g^3 k^{2m}} +$ etc. Ex qua inuenitur $x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2 k^m} + \frac{n^2 v^{2m+1}}{(2m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{n^3 v^{3m+1}}{(3m+1)g^4 k^{3m}} +$ etc. Atque si ponatur tempus per AM $= dt$, quia est $dt = \frac{ndx}{\sqrt{v}}$ erit $t = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2 v^m \sqrt{v}}{(2m+1)g^2 k^m} + \frac{2n^3 v^{2m}\sqrt{v}}{(4m+1)g^3 k^{2m}} + \frac{2n^4 v^{3m}\sqrt{v}}{(6m+1)g^4 k^{3m}} +$ etc.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 56.

Problema.

Tabula XII. Fig. 4.

489. *Reſiſtat medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum; datumque ſit punctum* A, *ex quo infinitae rectae* AM *ſint eductae: determinare curuam* CMD *huiusmodi, vt corpus per quamlibet rectam* AM *deſcendens in puncto* M *eandem habeat celeritatem.*

Solutio.

Sit $2m$ exponens poteſtatis celeritatis, cui reſiſtentia eſt proportionalis, dicaturque $AP = x$ et $AM = z$, et ponatur $z = nx$. Sit altitudo celeritati in M debita $= v$, quae debet eſſe conſtans ſcilicet $= b$. Erit ergo $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ (485.) denotante, vt ſupra k exponentem reſiſtentiae, et g potentiam ſollicitantem deorſum tendentem. Ad naturam curuae CM ergo inueniendam oportet integrare aequationem $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ ita vt poſito $v = o$ fiat quoque $x = o$; tum autem poni b loco v atque $\frac{z}{x}$ loco n, hocque modo obtinebitur aequatio inter x et z naturam curuae exponens. Per ſeriem autem ſupra aequationem propoſitam integrauimus (488), vnde poſito b loco v habebimus $x = \frac{b}{g} + \frac{nb}{}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$ + etc. Ponatur q^m loco n et multiplicetur vbique per q, quo facto habebimus $qx = \frac{bq}{g} + \frac{b^{m+1}q^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}q^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$ + etc. Sumantur differentialia et diuidatur per bdq habebitur $\frac{qdx+xdq}{bdq} = \frac{1}{g} + \frac{b^mq^m}{g^2k^m} + \frac{b^{2m}q^{2m}}{g^3k^{2m}} = \frac{k^m}{gk^m-b^mq^m}$, seu $qdx + xdq = \frac{bk^mdq}{gk^m-b^mq^m}$. At quia est $q^m = n$ et $n = \frac{z}{x}$ ponatur $\frac{z^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{m}}}$ loco q et prodibit $z^{\frac{m-1}{m}}x^{\frac{m-1}{m}}dz + (m-1)z^{\frac{1}{m}}x^{-\frac{1}{m}}dx = \frac{bk^mz^{\frac{1-m}{m}}x^{\frac{m-1}{m}}dz - bk^mz^{\frac{1}{m}}x^{\frac{-1}{m}}dx}{gk^mx-b^mz}$.

Quae multiplicata per $x^{\frac{1}{m}}z^{\frac{m-1}{m}}$ abit in hanc $xdz + (m-1)zdx = \frac{bk^mxdz - bk^mzdx}{gk^mx-b^mz}$. Constructio autem curuae facilius sequitur ex aequatione $qx = \int \frac{bk^mdq}{gk^m-b^mq^m}$. Supra autem habuimus seriem ipsi qx aequalem, ex qua patet si fuerit $q^m = \frac{gk^m}{b^m}$, tum $\frac{gx}{b}$ aequari seriei harmonicae

M.E.C.D. 2017

$1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1}$ etc. ideoque esse x infinitum. Si igitur x est infinitum, erit $q^m = \frac{z}{x} = \frac{gk^m}{b^m}$, ex quo perspicitur rectam AE fore curuae asymtoton et cosinum ang. CAE fore $= \frac{b^m}{gk^m}$. Verticis autem curuae C a puncto A distantia AC aequalis erit huic seriei $\frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}} +$ etc. Debet autem esse necessario $b^m < gk^m$, alias enim vertex C a puncto A infinite distaret. Q. E. I.

Corollarium 1.

490. Si applicata PM vocetur y, erit $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$ et $dz = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, quibus valoribus in aequatione inuenta substitutis habebitur $xy\,dy + mx^2dx + (m-1)y^2dx = \frac{bk^m y(x\,dy - y\,dx)}{gk^m x - b^m\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

Corollarium 2.

491. Ponatur in hac aequatione $y = px$, transmutabitur ista aequatio in hanc $xpdp + mdx + mp^2dx = \frac{bk^m p\,dp}{gk^m - b^m\sqrt{(1+pp)}}$, quae aequatio per $(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}$ mul-

M.E.C.D. 2017

multiplicata, fit integrabilis, habebitur enim $m(1+pp)^{\frac{1}{2m}}x = \int \frac{bk^m p\,dp(1+pp)^{\frac{1-2m}{2m}}}{gk^m - b^m\sqrt{(1+pp)}}$, quae expreſſio per quadraturas effici poteſt.

Corollarium 3.

492. Si reſiſtentia euaneſcat, corpusque in vacuo moueatur fit k infinitum; atque ex ſupra data ſerie inuenitur $qx = \frac{bq}{g}$ ſeu $x = \frac{b}{g}$, vnde cognoſcitur lineam CM fieri rectam horizontalem.

Scholion 1.

493. Quia autem ex hac aequatione generali parum ad cognitionem curuae poteſt concludi, in exemplis ſpecialibus hanc disquiſitionem vlterius proſequemur. Talia autem aſſumemus exempla, in quibus formula $\frac{bk^m\,dq}{gk^m - b^m q^m}$ integrationem ſaltem per logarithmos admittit, quo ad expreſſiones finitas perueniamus, ex quibus facile erit curuae naturam perſpicere.

Exemplum 1.

494. Sit igitur reſiſtentia ipſis celeritatibus proportionalis, erit $m = \frac{1}{2}$. Ponatur $AC = a$; quia celeritas, quam corpus per AC cadendo acquirit, debita eſſe debet altitudini b erit $a = -$

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$2\sqrt{bk} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$ (486.). Deinde vero erit $\sqrt{q} = \frac{z}{x}$ seu $q = \frac{z^2}{x^2}$, atque $qx = \int \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{bq}}$, quod integrale ita est accipiendum vt posito $z = x$ seu $q = 1$ fiat $x = a$ vel eius valori assignato. Erit ergo $qx = -2\sqrt{bkq} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{bq}}$, quae aequatio loco q substituto $\frac{z^2}{x^2}$ abit in hanc $z = -2z\sqrt{bk} + 2gkx\, l\frac{gx\sqrt{k}}{gx\sqrt{k}-z\sqrt{b}}$ Si $q = 1$ fit $x = a = -2\sqrt{bk} + 2gk\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$. Fiat autem $q = 1 + dq$ habebitur $dx + x\,dq = -dq\sqrt{bk} + \frac{gkdq\sqrt{b}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}} = \frac{bdq\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{b}}$. At quia $\frac{1}{\sqrt{q}}$ est cosinus anguli MAC erit $\sqrt{dq} =$ sinui huius anguli. Quamobrem incrementum ipsius x infinities minus est, quam incrementum anguli MAC, incidente MA in CA, ex quo sequitur tangentem curuae in C esse horizontalem; huiusque curuae tangens in infinito seu asymtota erit AE existente ang. EAC cosinu $\frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Ceterum haec curua ex altera verticalis AC parte arcum habebit similem et aequalem ipsi CMD.

Scholion 2.

495. Generaliter quidem etiam ostendi potest curuae tangentem in C esse debere horizontalem. Posita enim $n = 1$, in serie x exprimente habetur $AC = \frac{b}{g} + \frac{b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} +$ etc. augeatur n elemento dn habebitur incrementum momentaneum ipsius $AC = \frac{b^{m+1}\,dn}{(m+1)g^2k^m} +$

$2b$

M.E.C.D. 2017

$\frac{2b^{2m+1}dn}{(m+1)g^{2m}k^{2m}}$ + etc. Est vero $\frac{1}{n}$ cosinus anguli MAC, ideoque sinus $= \frac{\sqrt{(n^2-1)}}{n} = \sqrt{2dn}$ posito $1+dn$ loco n. Quamobrem incrementum ipsius AC infinities est minus quam incrementum anguli; atque ideo AC normalis erit in curuam DMC.

Exemplum 2.

496. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m=1$; positoque $AC=a$ erit $a=k\,l\frac{gk}{gk-b}$, atque $b=gk(1-e^{\frac{-a}{k}})$. Deinde vero est $q=n=\frac{z}{x}$, atque $qx=z=\int\frac{bk\,dq}{gk-bq}=k\,l\frac{gk}{gk-bq}=k\,l\frac{gkx}{gkx-bz}$. Habebitur ergo $e^{\frac{z}{k}}=\frac{gkx}{gkx-bz}$, vnde sequitur $x=\frac{e^{\frac{z}{k}}bz}{gk(e^{\frac{z}{k}}-1)}=\frac{e^{\frac{z}{k}}z(e^{\frac{a}{k}}-1)}{e^{\frac{a}{k}}(e^{\frac{z}{k}}-1)}$ posito loco b eius valore in a. Ad curuam autem construendam commodissime adhibetur haec aequatio $z=k\,l\frac{gk}{gk-bq}$, in qua z est AM et q est secans anguli MAC.

Scholion 3.

497. In solutione problematis ad inuenien-dam aequationem curuae CMD vsi fuimus seriei cuiusdam summatione; eandem vero aequationem

M.E.C.D. 2017

ſine ſeriebus ſequente modo elicere licet. Quia eſt $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$, haecque ipſa aequatio exprimit naturam curuae quaeſitae, ſi poſt integrationem ponatur $v = b$ et $\frac{z}{x}$ loco n. Quamóbrem ſi $\int \frac{k^m dv}{gk^m - nv^m}$ differentietur poſito non ſolum v ſed etiam n variabili, atque tum ponatur v conſtans $= b$ et $\frac{z}{x}$ loco n habebitur aequatio differentialis pro curua quaeſita. Ad hoc efficiendum pono $n = \frac{1}{p^m}$, quo prodeat $x = \int \frac{k^m p^m dv}{gk^m p^m - v^m}$.

Ponamus breuitatis gratia $\frac{k^m p^m}{gk^m p^m - v^m} = P$, ſitque aequatio differentialis haec $dx = P dv + Q dp$, ſi etiam p variabilis accipiatur. Quia autem P eſt functio nullius dimenſionis ipſarum v et p erit $x = Pv + Qp$, ideoque $Q = \frac{x}{p} - \frac{Pv}{p}$. Hoc igitur loco Q valore ſubſtituto prodibit $p dx = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{gk^m - nv^m} + x dp$. Reſtituatur $n^{-\frac{1}{m}}$ loco p, et orietur $mn dx + x dn = \frac{mk^m n dv + k^m v dn}{gk^m - nv^m}$,

in qua aequatione n aeque variabilis eſt aſſumta ac v et x. Nunc ponatur $v = b$, $dv = 0$ et $n = \frac{z}{x}$ atque habebitur iſta aequatio: $x dz + (m-1) z dx = \frac{bk}{}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{bk^m(x\,dz-z\,dx)}{gk^m x-b^m z}$, quae cum aequatione ſupra inuenta congruit.

PROPOSITIO 57.

Problema.

498. *Si reſiſtentia fuerit in quacunque multiplicata ratione celeritatum; inuenire curuam* A M C *huius proprietatis, vt corpus deſcendens ſuper quauis ſubtenſa* A M *dato tempore ex* A *ad* M *perueniat.* Tabula XII. Fig. 5.

Solutio.

Ducta verticali AC ponatur AP$=x$, AM$=z$; ſitque $n=\frac{z}{x}$. Poſita altitudine celeritati in M debita $=v$ et reſiſtentia $=\frac{v^m}{k^m}$ ſit tempus quo corpus per AM deſcendit $=t$, quod debet eſſe quantitas conſtans. Habebimus ergo ex praecedentibus $x=\int\frac{k^m dv}{gk^m-nv^m}$ et $t=\int\frac{nk^m dv}{(gk^m-nv^m)\sqrt{v}}$ (385.). Quocirca ad naturam curuae AMC inueniendam, opus eſt vt vtraque aequatio, ſi fieri poteſt, re ipſa integretur, et valor ipſius v ex altera aequatione in altera ſubſtituatur, atque tum loco n ſcribatur $\frac{z}{x}$, quo facto habebitur aequatio inter

M.E.C.D. 2017

x et z naturam curuae quaesitae exprimens. At si integrationes non commode perfici poterunt, vtraque aequatio est differentianda ponendo quoque n variabili; et postquam positum est $dt = o$, ex duabus aequationibus inuentis eliminari debet v, quo prodeat aequatio n et x tantum continens, quae ob $n = \frac{z}{x}$ exhibebit naturam curuae quaesitae. Ad hoc ponatur $n = \frac{1}{p^m}$, quo habeamus $x = \int \frac{k^m p^m dv}{g k^m p^m - v^m}$ et $t = \int \frac{k^m dv}{(g k^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$. Quarum aequationum illius sumto quoque p variabili differentialis iam est inuenta $p dx - x dp = \frac{k^m p^{m+1} dv - k^m p^m v dp}{g k^m p^m - v^m}$ (497). Ad alteram aequationem differentiandam pono $\frac{k^m}{(g k^m p^m - v^m)\sqrt{v}} = P$, fitque $dt = P dv + Q dp$. Quia autem P est functio ipsarum v et p dimensionum $-m - \frac{1}{2}$ erit $(\frac{1}{2} - m)\, t = Pv = +Qp$, atque hinc $Q = \frac{(1-2m)t}{2p} - \frac{Pv}{p}$. Quo valore loco Q substituto prodibit $p dt = \frac{k^m (p dv - v dp)}{(g k^m p^m - v^m)\sqrt{v}} + \frac{(1-2m) t dp}{2}$. Sit nunc $t = {}_2\sqrt{c}$ atque $dt = o$, habebimus $(2m-1)\, dp \sqrt{c} = \frac{k^m (p dv - v dp)}{(g k^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$. Eliminetur ex his duabus aequationibus dv et proueniet $p dx - x dp = (2m-1) p^m$

M.É.C.D. 2017

$p^m dp \sqrt{cv}$ seu $\sqrt{v} = \frac{p\,dx - x\,dp}{(2m-1)p^m dp\sqrt{c}}$ $=\!=\!=\!=$

$\frac{dr}{(2m-1)p^{m-2}dp\sqrt{c}}$ posito $x = rp$. Substituatur hic valor loco v in aequatione $(2m-1)\,dp\sqrt{c} = \frac{k^m(p\,dv - v\,dp)}{(gk^m p^m - v^m)\sqrt{v}}$ vel in hac $\frac{dr}{p^{m-2}} = \frac{k^m(p\,dv - v\,dp)}{gk^m p^m - v^m}$ Casu quidem quo $m = \frac{1}{2}$ seu resistentia celeritatibus proportionalis erit $p\,dv = v\,dp$ seu $v = \alpha p$ et $p = b = x = \frac{1}{n^2} = \frac{xx}{zz}$, vnde sequitur fore $zz = ax$; quamobrem in hac resistentiae hypothesi curua AMC est circulus omnino vt in vacuo. In aliis hypothesibus nisi re ipsa aequatio alterutra integretur eliminata v habebitur aequatio differentio differentialis inter z et x naturam curuae exprimens. Q. E. I.

Corollarium 1.

499. Si ponatur $v = up$, erit $p\,dv - v\,dp = pp\,du$ Atque hinc erit $\sqrt{u} = \frac{dr}{(2m-1)p^{m-\frac{3}{2}}dp\sqrt{c}}$, qui valor substitutus in aequatione $dr = \frac{k^m\,du}{gk^m - u^m}$ dabit aequationem inter p et r, ex qua aequatio inter x et z formabitur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

500. In medio ergo quod resistit in simplici celeritatum ratione apparet curuam AMC esse circulum. Atque ideo in hac resistentiae hypothesi tempora descensuum per singulas circuli chordas ex puncto A ductas sunt inter se aequalia.

Exemplum 1.

501. Sit resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$, atque $x = \frac{k}{n} l \frac{gk}{gk - nv}$ seu $v = \frac{gk}{n}\left(1 - e^{\frac{-nx}{k}}\right)$. Praeterea vero erit $t = 2\sqrt{c} = \frac{\sqrt{nk}}{\sqrt{g}} l \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{nv}}{\sqrt{gk}-\sqrt{nv}}$ seu $e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} = \frac{\sqrt{gk}+\sqrt{nv}}{\sqrt{gk}-\sqrt{nv}}$, vnde fit $v = \frac{gk\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} - 1\right)^2}{n\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{nk}}} + 1\right)^2}$. Eliminata ergo v et $\frac{z}{x}$ posito loco n habebitur $\frac{e^{\frac{z}{k}} - 1}{e^{\frac{z}{k}}} = \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} - 1\right)^2}{\left(e^{\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}}} + 1\right)^2}$ seu $\frac{2\sqrt{gcx}}{\sqrt{kz}} = l \frac{1 + \sqrt{\left(1 - e^{\frac{-z}{k}}\right)}}{1 - \sqrt{\left(1 - e^{\frac{-z}{k}}\right)}}$. In hac curua est $AC = k l \frac{\left(e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + 1\right)^2}{4 e^{\frac{2\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}} = k l \frac{e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}}{2}$, si igitur ponatur

AC

M.E.C.D. 2017

$AC = a$, erit $2e^{\frac{a}{2k}} = e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} + e^{\frac{-\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}}$: vnde erit $e^{\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{k}}} = e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}$, seu $\sqrt{\frac{gc}{k}} = l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)})$. Erit igitur $\sqrt{x}\, l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{a}{k}} - 1)}) = \sqrt{z}\, l(e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{z}{k}} - 1)})$ aequatio pro curua AMC. Si resistentia fuerit valde parua, erit k quantitas vehementer magna, atque ideo $e^{\frac{z}{2k}} + \sqrt{(e^{\frac{z}{k}} - 1)} = 1 + \frac{z}{2k} + \sqrt{(\frac{z}{k} + \frac{z^2}{2k^2})} = 1 + \sqrt{\frac{z}{k}} + \frac{z}{2k} + \frac{z\sqrt{z}}{4k\sqrt{k}}$ huiusque logarithmus erit $= \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{k}} + \frac{z\sqrt{z}}{12k\sqrt{k}}$. Simili modo erit $l(e^{\frac{a}{2k}} + \sqrt{e^{\frac{a}{k}} - 1}) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{k}} + \frac{a\sqrt{a}}{12k\sqrt{k}}$. Atque hanc ob rem habebitur pro curua AMC haec aequatio $\sqrt{ax} + \frac{a\sqrt{ax}}{12k} = z + \frac{z^2}{12k}$ seu $ax(1 + \frac{a}{6k} + \frac{a^2}{144k^2}) = z^2 + \frac{z^3}{6k} + \frac{z^4}{144k^2}$ Vnde perspicitur si resistentia prorsus euanescat seu k fiat infinite magnum fore $ax = z^2$ atque ideo curuam AMC circulum. At si medium rarissimum fuerit, erit $ax(a + 6k) = 6kz^2 + z^3$, et differentiando $adx(a + 6k) = 12kzdz + 3z^2dz$. Si nunc fiat $zdz = xdx$ habebitur applicata PM maxima, seu locus vbi tangens curuae est verticalis, scilicet $a^2 + 6ak = 12kx + 3xz$ seu $x = \frac{a^2 + 6ak}{12k + 3z}$, vnde fit $\frac{(6ak + a^2)^2}{3} = 24k^2z^2 + 10kz^3 + z^4$, ex qua aequatione ipsius z valor quam proxime est $\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{(4\sqrt{2} - 5)a^2}{48k}$, atque $x = \frac{a}{2} - \frac{}{(3\sqrt{2}}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{(3\sqrt{2}-4)a^2}{48k}$ et $PM = \frac{a}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})a^2}{24k}$. Curua ergo latissima est supra medietatem, ibique latior est quam altitudo AC.

Corollarium 3.

502. Si igitur linea recta vel curua hanc curuam AMC in M tangat, ita vt tota extra spatium AMC sit sita, corpus ex A ad eam lineam citius perueniet descendendo super chorda AM, quam super quauis alia recta ex A ad eam lineam ducta.

Exemplum 2.

503. Sit m numerus affirmatiuus et resistentia valde parua, erit k quantitas vehementer magna, atque hinc $\frac{k^m}{gk^m - nv^m} = \frac{1}{g} + \frac{nv^m}{g^2k^m}$. Quocirca erit $x = \frac{v}{g} + \frac{nv^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$ atque $t = 2\sqrt{c} = \frac{2n\sqrt{v}}{g} + \frac{2n^2v^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m}$; hincque prodit $v = gx - \frac{ng^m x^{m+1}}{(m+1)k^m}$, et $\sqrt{v} = \sqrt{gx} - \frac{ng^{m-\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$ atque $v^{m+\frac{1}{2}} = g^{m+\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}} - \frac{n(2m+1)g^{2m-\frac{1}{2}}x^{2m+\frac{1}{2}}}{2(m+1)k^m}$

His autem valoribus substitutis prodit ista aequatio

M.E.C.D. 2017

tio $\frac{\sqrt{gc}}{\sqrt{x}} = n + \frac{n^2 g^{m-1} x^m}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{n^3 g^{2m-2} x^{2m}}{(2m+2)k^{2m}}$.

Quia vero eſt $n = \frac{z}{x}$, habebitur iſta aequatio $\sqrt{g}$

$$cx = z + \frac{g^{m-1} x^{m-1} z^2}{(2m+1)(2m+2)k^m} - \frac{g^{2m-2} x^{2m-2} z^3}{(2m+2)k^{2m}}$$

ſeu $gcx = z^2 + \frac{g^{m-1} x^{m-1} z^3}{(m+1)(2m+1)k^m}$ ſi medium eſt rariſſimum. Vnde patet ſi reſiſtentia penitus euaneſcat fore $z^2 = gcx$ ſeu curuam AMC circulum diametri AC.

Scholion.

504. Si igitur cognita fuerit curua AMC, et detur linea quaecunque determinari poterit recta AM ſuper qua corpus ex A celerrime ad datam lineam pertingat. Scilicet conſtruenda eſt curua AMC, quae datam lineam tangat v. g. in M; eritque recta AM ea recta ſuper qua corpus deſcendendo ex A citiſſime ad lineam datam perveniat. Atque ſimili modo in praecedente problemate ſi recta vel curua tangat curuam CMD in M, corpus ex A deſcendendo per AM vsque ad lineam tangentem curuam CMD maiorem acquiret celeritatem, quam deſcendendo ſuper quavis alia recta ex A ad eam lineam ducta. Ex his igitur ſolui poſſunt problemata, quibus requiritur recta ex A ad datam lineam ducta, ſuper qua corpus deſcendendo vel maximam acqui-

Tabula XII. Fig. 4.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. PETERSBURG

M.E.C.D. 2017

rat celeritatem, vel citiſſime ad eam lineam pertingat. Quamobrem hisce problematibus non diutius immorabimur, ſed ad aſcenſum ſuper lineis rectis conſiderandum progrediemur.

PROPOSITIO 58.

Problema.

Tabula XII. Fig. 6.

505. *In hypotheſi grauitatis vniformis* g *et medio quocunque reſiſtente vniformi determinare motum corporis data cum celeritate initiali ex* A *aſcendentis ſuper linea recta* AB *vtcunque inclinata ad horizontem.*

Solutio.

Ducta horizontali AC et ex M ad eam perpendiculari MP vocetur PM$=x$, ſitque AM$=nx$. Sit altitudo debita celeritati initiali in A$=b$, et altitudo debita celeritati initiali in M$=v$; reſiſtentia vero in M ſit $=\frac{V}{K}$. His poſitis erit $dv=-gdx-\frac{nVdx}{K}$ (475.), vnde habetur $dx=\frac{-Kdv}{gk+nV}$ atque $x=\int\frac{-Kdv}{gK+nV}$ hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $v=b$. Si deinde ponatur $v=0$, prodibit $x=$BC, vbi in puncto B corpus omnem celeritatem amittit. Tempus vero, quo corpus per AM aſcendit eſt $=\int\frac{-nKdv}{(gK+nV)\sqrt{v}}$ hoc integrali quoque ita accepto, vt euaneſcat poſito $v=b$, in quo

ſi

M.E.C.D. 2017

ſi porro ponatur $v = o$, prodibit tempus totius aſcenſus per AMB. Preſſio autem, quam linea AMB ſuſtinet, vbique eſt conſtans et aequalis vi normali $= \frac{g\sqrt{(n^2-1)}}{n}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

506. Si linea AMB fit horizontalis euaneſcente angulo BAC fiet $n = \infty$. Poſito igitur AM $= z = nx$, erit $z = \int \frac{-K dv}{V}$, et tempus quo per AM progreditur erit $= \int \frac{-K dv}{V\sqrt{v}}$.

Corollarium 2.

507. Si reſiſtentia fuerit vt poteſtas exponentis $2m$ celeritatum erit $V = v^m$ et $K = k^m$. Hoc ergo caſu erit $x = \int \frac{-k^m dv}{gk^m + nv^m}$, atque tempus per AM $= \int \frac{-nk^m dv}{(gk^m + nv^m)\sqrt{v}}$.

Corollarium 3.

508. Vtraque haec expreſſio in ſeriem converſa dat $x = \frac{b-v}{g} - \frac{n(b^{m+1} - v^{m+1})}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2(b^{2m+1} - v^{2m+1})}{(2m+1)g^3k^{2m}}$ etc. Atque tempus per AM $= \frac{2n(\sqrt{b} - \sqrt{v})}{g} - \frac{2n^2(b^{m+\frac{1}{2}} - v^{m+\frac{1}{2}})}{(2m+1)g^2k^m} +$

M.E.C.D. 2017

$\frac{2n^3(b^{2m+\frac{1}{2}} - v^{2m+\frac{1}{2}})}{(4m+1)g^3k^{2m}}$ — etc. Quamobrem posito $v = 0$ erit $BC = \frac{b}{g} - \frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} + \frac{n^2b^{2m+1}}{(2m+1)g^3k^{2m}}$ — etc. atque tempus totius ascensus per $AB = \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2b^{m+\frac{1}{2}}}{(2m+1)g^2k^m} + \frac{2n^3b^{2m+\frac{1}{2}}}{(4m+1)g_3k^{2m}}$ — etc.

Exemplum I.

509. Sit resistentia celeritatibus proportionalis, erit $m = \frac{1}{2}$, atque $x = \int \frac{-dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2\sqrt{kv}}{n} + \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}$. Hinc erit tota altitudo BC ad quam corpus pertingere valet $= \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Tempus vero, quo per AM ascendit est $= \int \frac{-ndv\sqrt{k}}{(g\sqrt{k}+n\sqrt{v})\sqrt{v}} = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}+n\sqrt{v}}$. Quare tempus totius ascensus per AMB erit $= 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Si igitur corpus super linea inclinata AC descenderit et celeritate in C acquisita ascendat in CB vsque ad B; sitque $AC = N$. AD et $BC = n$. BE atque celeritas in C debita altitudini b; erit $AD = -\frac{2\sqrt{bk}}{N} + \frac{2gk}{N^2} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$; $AC = -2\sqrt{bk} + \frac{2gk}{N} l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$ (486); $BE = \frac{2\sqrt{bk}}{n} - \frac{2gk}{n^2} l \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$; $CB = 2\sqrt{bk} - \frac{2gk}{n} l \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Atque tempus descensus per $AC = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$ (cit.) et tempus ascensus per $CB = 2\sqrt{k}\, l \frac{g\sqrt{k}+n\sqrt{b}}{g\sqrt{k}}$. Vnde

Tabula XII. Fig 7.

M.E.C.D. 2017

de deſcenſus et aſcenſus ſuper lineis rectis inter ſe comparari poſſunt.

Corollarium 4.

510. Si hi logarithmi per ſeries exprimantur, patet fieri non poſſe, vt ſit BE=AD, eſt enim in quacunque reſiſtentiae hypotheſi, vt ex ſeriebus (508. et 488.) intelligitur, $BE \lesssim \frac{b}{g}$ et $AD \gtrsim \frac{b}{g}$. Fieri autem poteſt vt ſit AC=BC.

Corollarium 5.

511. Effici autem facile poteſt vt tempus deſcenſus per AC aequale ſit tempori aſcenſus per CB. Fieri ſcilicet debet $ng\sqrt{k}=Ng\sqrt{k}+Nn\sqrt{b}$, ſeu $n=\frac{Ng\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-N\sqrt{b}}$. Eſt igitur $n>N$ ſeu ang. BCE $<$ ang. ACD. Relatio autem inter N et n pendet a celeritate in puncto C.

Corollarium 6.

512. Si autem angulus BCE aequalis fuerit angulo ACD, ſeu N=n tempus aſcenſus per BC minus erit tempore deſcenſus per AC. Atque hoc generaliter locum habet in quacunque reſiſtentiae hypotheſi; eſt enim tempus deſcenſus per $AC \gtrsim \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ et tempus aſcenſus per $CB \lesssim \frac{2n\sqrt{b}}{g}$, vt ex ſeriebus ſupra datis (488. et 508.) appareret.

Exem-

M.E.C.D. 2017

Exemplum 2.

Tabula XII. Fig. 6.

513. Reſiſtat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m=1$. Quare habebitur $x=\int\frac{-kdv}{gk+nv}$ $=\frac{k}{n}\,l\frac{gk+nb}{gk+nv}$ atque $BC=\frac{k}{n}\,l\frac{gk+nb}{gk}$, et $AB=k\,l\frac{gk+nb}{gk}$ Tempus vero aſcenſus AM erit $=\int\frac{-nkdv}{(gk+nv)\sqrt{v}}$ $=\frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}}$ (A. tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$ − A. tang. $\sqrt{\frac{nv}{gk}}$) exiſtente radio $=1$, et A denotante arcum circuli. Erit

Tabula XII. Fig. 7.

ergo tempus aſcenſus per $AB=\frac{2\sqrt{kn}}{\sqrt{g}}$ A tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$ Si nunc corpus ſuper linea inclinata AC deſcenderit, et celeritate in C acquiſita, quae debita ſit altitudini b rurſus aſcendat per CB, fueritque $AC=N.AD$ et $BC=n.BE$, erit $AD=\frac{K}{N}\,l\frac{gk}{gk-Nb}$ et $AC=k\,l\frac{gk}{gk-Nb}$, atque tempus deſcenſus per $AC=\frac{\sqrt{N}k}{\sqrt{g}}\,l\frac{\sqrt{g}k+\sqrt{N}b}{\sqrt{g}k-\sqrt{N}b}$ (487.). Porro vero erit $BE=\frac{k}{n}\,l\frac{gk+nb}{gk}$; $BC=k\,l\frac{gk+nb}{gk}$ et tempus aſcenſus per $CB=\frac{2\sqrt{nk}}{\sqrt{g}}$ A. tang. $\sqrt{\frac{nb}{gk}}$.

Corollarium 7.

514. In hac reſiſtentiae hypotheſi commode effici poteſt, vt ſit $AC=BC$: debebit enim eſſe $ngk=Ngk+Nnb$, ſeu $n=\frac{Ngk}{gk-Nb}$. Eſt igitur $n>N$ hincque ang. $BCE<ACD$.

Exemplum 3.

515. Sit reſiſtentia quam minima et proportionalis poteſtati $2m$ celeritatum, erit k quantitas vehe-

M.E.C.D. 2017

vehementer magna. Si ergo celeritas in C fuerit debita altitudini b et $AC = N.AD$ atque $BC = n.BE$, corpusque super AC descendat et super CB ascendat; erit $AD = \frac{b}{g} + \frac{N b^{m+1}}{(m+1) g^2 k^m}$; et tempus descensus per $AC = \frac{2N\sqrt{b}}{g} + \frac{2N^2 b^m \sqrt{b}}{(2m+1) g^2 k^m}$ (488.). Pro ascensu vero erit $BE = \frac{b}{g} - \frac{n b^{m+1}}{(m+1) g^2 k^m}$ et tempus per $CB = \frac{2n\sqrt{b}}{g} - \frac{2n^2 b^m \sqrt{b}}{(2m+1) g^2 k^m}$ (508) Si igitur effici debeat vt sit $AC = BC$, oportet esse $N + \frac{N^2 b^m}{(m+1) g k^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(m+1) g k^m}$, vnde fit $n = N + \frac{2N^2 b^m}{(m+1) g k^m}$, propter quantitatem k valde magnam. At quo tempus descensus per AC aequale sit tempori ascensus per CB, debet esse $N + \frac{N^2 b^m}{(2m+1) g k^m} = n - \frac{n^2 b^m}{(2m+1) g k^m}$, seu $n = N + \frac{2N^2 b^m}{(2m+1) g k^m}$.

Scholion I.

516. In casu huius exempli, quo resistentia est valde parua, curua AMD potest determinari Tabula XII. Fig. 8.

M.E.C.D. 2017

huius proprietatis, vt corpus ex C celeritate altitudini b debita aſcendendo ſuper quauis recta CM ad curuam AMD pertingat. Poſita enim $CM=z$, et $MP=x$, erit $n=\frac{z}{x}$ atque $x=\frac{b}{g}-\frac{nb^{m+1}}{(m+1)g^2k^m}$. Quare habebitur iſta aequatio $b^{m+1}z=(m+1)gbk^mx-(m+1)g^2k^mx^2$. Sit $CP=y$ et loco $\frac{b^{m+1}}{(m+1)gk^m}$ ſcribatur f orietur $fV(x^2+y^2)=bx-gx^2$ ſeu $ffyy=(bb-ff)xx-2gbx^3+g^2x^4$. Si ponatur $y=o$, erit et $x=o$ et $x=\frac{b-f}{g}=CA$. Curua ergo etiam per punctum C transit, quae autem eius pars quaeſtioni ſatisfacere ceſſat, propter ſequentes terminos neglectos, qui perperam negliguntur ſi n ſeu $\frac{z}{x}$ fit quoque valde magnum. Aequatio vero dat curuam elliptiformem maxime oblongam circa axem minorem AC deſcriptam. Vera autem curua habet formam AMD, cuius aſymtotos eſt horizontalis CE, ſi quidem eſt $m>1$, eiusque aequatio habetur omnibus ſumendis terminis, quae erit $xdz+(m-1)zdx=\frac{bk^m(zdx-xdz)}{gk^mx+b^mz}$. Si $m<1$ curua non in infinitum progredietur, ſed incidet in CE ſumendo $CE=\frac{bk^m}{(1-m)b^m}$. Nam ſi $m<1$ corpus horizontaliter non in infinitum progredi poteſt, ſed in diſtantia finita omnem amittit celeritatem.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 2.

517. Si medium reſiſtens non ſit vniforme, tum linea non eſſet recta, ſuper qua motus facillime determinari poſſet: idem quoque eſt notandum ſi potentia ſollicitans non fuerit vniformis. Vt ſit potentia ſollicitans $= P$ et reſiſtentia $= \frac{V}{Q}$, vbi Q talis eſt functio exponentis reſiſtentiae variabilis q, qualis V eſt ipſius v: His poſitis motus corporis ſuper quacunque curua exprimitur hac aequatione $dv = \pm P dx \pm \frac{V ds}{Q}$. Eius ergo curuae, ſuper qua motus facillime definitur, haec erit aequatio $PQ dx = A ds$, ex qua oritur ſequens $\frac{A dv}{\pm A \pm V} = P dx$, motum ſuper hac curua determinans, in qua indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Quare ſi etiam huiusmodi hypotheſes perſequi vellemus, loco linearum rectarum huiusmodi curuas hac aequatione expreſſas $PQ dx = A ds$ aſſumere deberemus. Sed quia ſtatuimus hypotheſin potentiae ſollicitantis et reſiſtentiae vniformis tantum fuſius pertractare, miſſis his ad eos caſus progredimur, in quibus v vnicam tantum habet dimenſionem, id quod euenit, ſi reſiſtentia proportionalis fuerit quadratis celeritatum.

PROPOSITIO 59.

Problema.

518. *In hypotheſi grauitatis vniformis* g, *et reſiſtentiae quadratis celeritatum proportionalis deſcendat* Tabula XII. Fig. 1.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

dat corpus ſuper curua quacunque AMB; *determinare eius motum et preſſionem, quam curua in ſingulis punctis ſuſtinet.*

Solutio.

In axe verticali ſumatur abſciſſa $AP=x$ et ponatur arcus $AM=s$, celeritas in M debita altitudini v et exponens reſiſtentiae k, erit reſiſtentia $=\frac{v}{k}$. Quamobrem iſta habebitur aequatio motum corporis exponens $dv=gdx-\frac{vds}{k}$ (465). Ad hanc integrandam multiplico per $e^{\frac{s}{k}}$ eritque integralis $e^{\frac{s}{k}}v=\int e^{\frac{s}{k}}gdx$. Ita autem ſumi debet hoc integrale, vt poſito $s=0$, abeat v in altitudinem celeritati initiali in A debitam. Si igitur deſcenſus ex quiete fieri ponatur, $e^{\frac{s}{k}}gdx$ ita debet integrari vt euaneſcat poſito $s=0$. Hoc itaque facto erit $v=ge^{\frac{-s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}dx$. Vnde tempus per AM erit $=\int\frac{e^{\frac{-s}{2k}}ds}{\sqrt{g\int e^{\frac{s}{k}}dx}}$. Poſito nunc $PM=y$ ſumtoque dx conſtante, erit preſſio, quam curua in M ſecundum normalem MN ſuſtinet $=\frac{gdy}{ds}+\frac{2ge^{\frac{-s}{k}}dx\,ddy\int e^{\frac{s}{k}}dx}{ds^3}$. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

519. Preſſio, quam curua ſuſtinet in hanc formam poteſt transmutari $\frac{g\,ds}{e^{\frac{s}{k}}\,dy\,dx}$ d. $\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{s}{k}}\,dx$, quae, poſtquam pro data curua integratum eſt $e^{\frac{s}{k}}\,dx$, commodius ad quosuis caſus accommodatur.

Corollarium 2.

520. Corpus in deſcenſu maximam habet celeritatem, vbi eſt $v = \frac{gk\,dx}{ds}$. Hoc vero euenit vbi eſt $e^{\frac{s}{k}}k\,dx = ds\int e^{\frac{s}{k}}\,dx$, ſeu vbi d. $l\int e^{\frac{s}{k}}\,dx = \frac{ds}{k}$, in quo puncto patet tangentem non eſſe horizontalem.

Corollarium 3.

521. Si fuerit $\int e^{\frac{s}{k}}\,dx = \frac{e^{\frac{s}{k}}s^n}{a^{n-1}}$, erit $dx = \frac{n\,s^{n-1}\,ds}{a^{n-1}} + \frac{s^n\,ds}{a^{n-1}\,k}$ atque $x = \frac{s^n}{a^{n-1}} + \frac{s^{n+1}}{(n+1)\,a^{n-1}\,k}$. Quare ſi haec aequatio exprimat curuae quaeſitae naturam, erit $v = \frac{g\,s^n}{a^{n-1}}$ et tempus per A M $= \frac{n-1}{2a}\,\frac{2-n}{2}\,\frac{2}{s}\,\frac{2}{(2-n)\sqrt{g}}$ ſi quidem n fuerit minor binario;

M.E.C.D. 2017

nam si $n=2$ vel $n>2$, curua in A tangentem horizontalem habebit, atque corpus ibi perpetuo permanebit.

Corollarium 4.

522. Simili modo etiam perspicitur, si x fuerit potestas quaecunque ipsius s vel huiusmodi potestatum aggregatum, semper integrari posse $e^{\frac{s}{k}}dx$ atque ideo celeritatem terminis finitis exhiberi.

Corollarium 5.

523. Si autem abscissae in axe verticali BQ sumantur et celeritas, quam corpus in B habebit debita sit altitudini b; praetereaque vocetur BQ $=x$ et BM$=s$, erit $dv=-g\,dx+\frac{v\,ds}{k}$, cuius integralis est $e^{\frac{-s}{k}}v=b-g\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx$ integrali scilicet $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ ita accepto vt euanescat posito $x=0$. Hanc ob rem erit $v=be^{\frac{s}{k}}-ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}\,dx$, et tempus, quo in descensu arcus MB absoluitur $=$

$$\int\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}.$$

Corollarium 6.

524. Si igitur detur celeritas in puncto B nempe $\sqrt{b}$, inueniri potest in curua B M A punctum A, ex quo descendere incepit, vbique celeritatem ha-

M.E.C.D. 2017

habuit $=o$. Quaeri debet ſcilicet locus, vbi eſt $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{b}{g}$. Atque etiam expreſſio temporis $\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx)}}$ dabit tempus totius deſcenſus per AMB, ſi poſt integrationem ponatur $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{b}{g}$.

Scholion.

525. Duplicem hic motum inueſtigandi modum ideo attulimus, vt tam ad deſcenſus ex dato puncto factos, quam ad deſcenſus vsque ad datum punctum, vt in motu oſcillatorio fieri ſolet, accommodari poſſit.

PROPOSITIO 60.

Problema.

526. *Exiſtente potentia ſollicitante vniformi et medio vniformi reſiſtente in duplicata ratione celeritatum; determinare motum corporis aſcendentis ſuper data curua* AMD, *et preſſionem quam curua ſuſtinet in ſingulis punctis M.* Tabula XII. Fig. 2.

Solutio.

In linea verticali AP ponatur abſciſſa AP $= x$, arcus AM $= s$; celeritas in A debita altitudini b, et celeritas in M altitudini v. Sit potentia ſollicitans deorſum $= g$ et reſiſtentia $= \frac{v}{k}$. His poſitis erit $dv = -g\,dx - \frac{v\,ds}{k}$ (475.), quae multiplicata

M.E.C.D. 2017

cata per $e^{\frac{s}{k}}$ dat integrale $e^{\frac{s}{k}}v = b - g\int e^{\frac{s}{k}}dx$ ita sumto $\int e^{\frac{s}{k}}dx$ vt euaneſcat poſito $x = o$. Hanc ob rem erit $v = e^{\frac{-s}{k}}b - ge^{\frac{-s}{k}}\int e^{\frac{s}{k}}dx$, atque tempus aſcenſus per arcum $AM = \int \frac{e^{\frac{2s}{k}}ds}{\sqrt{(b - g\int e^{\frac{s}{k}}dx)}}$. Ex inuenta celeritate habebitur preſſio, quam curua in M ſecundum normalem MN patitur, $= \frac{gdy}{ds} - \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (475), poſito $PM = y$ et ſumto dx pro conſtante. Q. E. I.

Corollarium 1.

527. Poſito ergo $v = o$, erit $g\int e^{\frac{s}{k}}dx = b$, ex qua aequatione obtinebitur punctum D, quousque corpus ex A aſcendere poterit. Atque tempus totius aſcenſus per AMD habebitur, ſi in expreſſione temporis ponatur $g\int e^{\frac{s}{k}}dx = b$.

Corollarium 2.

528. Si in formula preſſionem exhibente loco v eius valor inuentus ſubſtituatur, habebitur

$$\frac{-2e^{\frac{-s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \frac{gdy}{ds} + \frac{2ge^{\frac{-s}{k}}dxddy\int e^{\frac{s}{k}}dx}{ds^3}$$

Quae transmutari poteſt in hanc formam

M.E.C.D. 2017

$$\frac{2e^{\frac{-s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \frac{gds}{e^{\frac{s}{k}}dydx}\,\mathrm{d}.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{s}{k}}dx.$$

Corollarium 3.

529. Pro deſcenſu vero, ſi celeritas in **A** debita quoque eſt altitudini b, preſſio quam curua in M ſecundum normalem MN ſuſtinet eſt $=-$

$$\frac{2e^{\frac{s}{k}}bdxddy}{ds^3} + \frac{ge^{\frac{s}{k}}ds}{dydx}\,\mathrm{d}.\frac{dy^2}{ds^2}\int e^{\frac{-s}{k}}dx.$$

Corollarium 4.

530. Si igitur tam aſcenſus quam deſcenſus reſpectu axis AP definiatur, aequatio aſcenſum determinans transmutari poteſt in aequationem deſcenſus ſcribendo $-k$ loco k; atque viciſſim. Quare ſi ſuper curua AM deſcenſus fuerit determinatus, habebitur quoque aſcenſus et viciſſim.

Scholion.

531. Quia formulae aſcenſum et deſcenſum determinantes tantam inter ſe habent affinitatem, aſcenſus et deſcenſus facile poterunt inter ſe comparari, atque ideo oſcillationes ſuper data curua determinari. Id quod in ſequente propoſitione, quantum generaliter fieri poteſt, praeſtabimus.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 61.

Problema.

Tabula XII. Fig. 9.

532. *Sint curuae quaecunque* MA *et* NA *in infimo puncto* A *coniunctae, atque corpus descendat super curua* AN *in medio resistente vniformi secundum quadrata celeritatum; inter se comparare descensum super curua* MA *et ascensum super curua* AN.

Solutio.

Sit celeritas in puncto A debita altitudini b; atque in axe verticali AP abscissa AP$=x$, arcus AM$=s$. Pro curua ascensus AN vero sit AQ$=t$ et AN$=r$. His positis erit corporis descendentis celeritas in M debita altitudini $e^{\frac{s}{k}}b-ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. (523.) Corporis vero ascendentis super curua AN celeritas in N debita est altitudini $e^{\frac{-r}{k}}b-ge^{\frac{-r}{k}}\int e^{\frac{r}{k}}dt$ (526). Quare si celeritates in M et N euanescant, ita vt MAN sit arcus vna semioscillatione descriptus erit $\frac{b}{g}=\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ et $\frac{b}{g}=\int e^{\frac{r}{k}}dt$. Si nunc concipiatur alia semioscillatio arcum m An absoluens, in qua celeritas in puncto A debita sit altitudini $b+db$, erit $\frac{b+db}{g}=\int e^{\frac{-s}{k}}dx+e^{\frac{-s}{k}}dx$, hincque $e^{\frac{-s}{k}}dx=\frac{db}{g}$, seu $e^{\frac{-\mathrm{AM}}{k}}.\mathrm{P}p=\frac{db}{g}$. Similiter pro ascensu erit $e^{\frac{\mathrm{AN}}{k}}.\mathrm{Q}q=\frac{db}{g}$. Ex quibus

M.E.C.D. 2017

bus fiet $\frac{Pp}{Qq} = e^{\frac{AM+AN}{k}}$, seu $lPp - lQq = \frac{AM+AN}{k}$. Dato ergo arcu MAN vna semioscillatione descripto, si corpus in puncto proximo superiore m descendere incipiat, inuenietur punctum n ad quod supra N pertinget: erit nempe $Qq = \frac{Pp}{e^{\frac{AM+AN}{k}}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

533. Si igitur MAN et mAn fuerint duo arcus oscillationibus proximis descripti, erit semper $Qq < Pp$, eoque minus erit Qq quam Pp, quo maior fuerit summa arcuum AM+AN. Semper igitur quoque erit AQ minor quam AP.

Corollarium 2.

534. In vacuo, quia est $k = \infty$, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1$; fietque $Qq = Pp$, atque hinc AQ = AP. Quare corpus oscillans in vacuo ad tantam ascendit altitudinem, quanta erat illa ex qua descendit.

Corollarium 3.

535. Si resistentia fuerit valde parua, ideoque k vehementer magnum, erit $e^{\frac{AM+AN}{k}} = 1 + \frac{MAN}{k}$. Quare hoc casu erit $Qq + \frac{MAN.Qq}{k} = Pp$, atque $Qq = \frac{Pp(k - MAN)}{k}$.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

536. Si punctum O fuerit locus, in quo corpus descendens maximam habet celeritatem, ibique ponatur AO$=s$, AS$=x$, erit $\frac{gkdx}{ds}=e^{\frac{s}{k}}b-g e^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, seu $b=g\int e^{\frac{-s}{k}}dx+\frac{gkdx}{ds}$. Quare si corpus ex m descendat, erit punctum maximae celeritatis in o, existente $db=ge^{\frac{-s}{k}}dx+\frac{gkdy}{p}$ existente $dy=ov$ et radio osculi in puncto O, seu $\frac{db}{\varepsilon}=e^{\frac{-AO}{k}}Ss+\frac{kov}{p}$.

Corollarium 5.

537. Tempus vnius itus per MAN habetur, si in integralium summa $\int\frac{e^{\frac{-s}{2k}}ds}{\sqrt{(b-g\int e^{\frac{-s}{k}}dx)}}+\int\frac{e^{\frac{r}{2k}}ds}{\sqrt{(b-g\int e^{\frac{r}{k}}dt)}}$ ponatur $\int e^{\frac{-s}{k}}dx=\frac{g}{b}$ atque $\int e^{\frac{r}{k}}dt=\frac{b}{g}$. Sicque prodibit tempus vnius semioscillationis.

Corollarium 6.

538. Ex dictis alia elegans sequitur proprietas, vt si corpus ex A celeritate $\sqrt{b}$ ascendat ad N atque ex N iterum decidat per NA sitque celeritas quam tum in A habebit debita altitudini c.

Dein-

M.E.C.D. 2017

Deinde ex A celeritate altitudini $b+db$ debita aſcendat pertingatque ad n, vnde rurſus deſcendendo in A acquirat celeritatem altitudini $c+dc$ debitam. Erit ergo $\frac{db}{g} = e^{\frac{AN}{k}}$. Qq et $\frac{dc}{g} = e^{-\frac{AN}{k}}$. Qq. Atque $Qq^2 = \frac{db.dc}{g^2}$, vel etiam $\frac{db}{dc} = e^{\frac{2AN}{k}}$.

Scholion.

539. Reſtat vt haec generalia ad exempla ſeu datas curuas accommodemus, quo vſus eorum eo magis pateat. Accipiemus autem pro curua data cycloidem tantum, eo quod $\int e^{\frac{s}{k}} dx$ in ea facile poſſit exhiberi, et aequatio quoque inter s et x ſit algebraica. Inueſtigabimus ergo tam deſcenſus ſuper cycloide factos, quam oſcillationes, quo appareat, quantum oſcillationes, quae in cycloide fiunt, ab iſochronismo diſcrepent; quippe quae in vacuo omnes eodem tempore abſolui ſunt demonſtratae.

PROPOSITIO 62.
Problema.

540. *Sit curua data cyclois* ACB *ſuper baſi horizontali* AB *prouolutione circuli diametri* CD *deſcripta; corpusque ſuper ea ex* A *deſcendat in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum, determinare motum corporis deſcendentis.* Tab. XIII. Fig 1.

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Posita $2CD = a$, $AL = x$, et $AM = s$ erit ex natura cycloidis $s = a - \sqrt{(a^2 - 2ax)}$ seu $2ax = 2as - ss$. Celeritas vero in M debita sit altitudini v, erit $v = ge^{\frac{-s}{k}} \int e^{\frac{s}{k}} dx$. Quia autem est $dx = ds - \frac{s\,ds}{a}$, erit $\int e^{\frac{s}{k}} dx = ke^{\frac{s}{k}} + \frac{k^2 e^{\frac{s}{k}}}{a} - \frac{ke^{\frac{s}{k}} s}{a}$ $-k - \frac{k^2}{a} = e^{\frac{s}{k}}\left(\frac{ak + k^2 - ks}{a}\right) - \frac{ak - k^2}{a}$. Quo valore substituto erit $v = \frac{gak + gk^2 - gks}{a} - \frac{ge^{\frac{-s}{k}}(ak + k^2)}{a}$. Maxima corporis erit celeritas vbi est $v = \frac{gkdx}{ds} = \frac{gak - gks}{a}$; hoc igitur accidit vbi est $e^{\frac{s}{k}} k = a + k$ seu $s = k\,l\,\frac{a+k}{k}$. Inueniri etiam potest punctum N in quo corpus omnem celeritatem perdit faciendo $v = o$ seu $e^{\frac{s}{k}} = \frac{a+k}{a+k-s}$ seu $s = k\,l\,\frac{a+k}{a+k-s}$, ex qua aequatione valor ipsius s dat arcum ACN. Tempus quo arcus AM descensu absoluitur est $= \int \frac{ds\sqrt{a}}{\sqrt{gk(a+k-s-e^{\frac{-s}{k}}(a+k))}}$.

Deinde ad pressionem inueniendam est $\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{(2as - ss)}}{a}$ $= \frac{\sqrt{2ax}}{a}$, vnde pressio ipsa in puncto M prodit $= \frac{g\sqrt{2ax}}{a} + \frac{2gak + 2gkk - 2gks}{a\sqrt{2ax}} - \frac{2gak + 2gkk}{e^{\frac{s}{k}} a\sqrt{2ax}}$

De-

M.E.C.D. 2017

Determinauimus ergo celeritatem, et tempus, et preſſionem, vnde motus corporis innoteſcit. Q.E.I.

Corollarium 1.

541. Quia eſt $e^{-\frac{s}{k}} = 1 - \frac{s}{1.k} + \frac{s^2}{1.2k^2} - \frac{s^2}{1.2.3k^3}$ + etc. ſi ponatur $a + k = c$ ſeu $a = c - k$ erit $\frac{(c-k)v}{gk} = -s + \frac{cs}{1.k} - \frac{cs^2}{1.2k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3k^3} -$ etc. $= \frac{as}{1.k} - \frac{cs^2}{1.2k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3k^3} -$ etc. Quare erit $v = \frac{gs}{a}\left(\frac{a}{1} - \frac{s}{1.2} - \frac{as}{1.2k} + \frac{(a+k)s^2}{1.2.3k^2} - \frac{(a+k)s^3}{1.2.3.4k^3} + \text{etc.}\right)$

Corollarium 2.

542. In vacuo igitur, vbi k eſt infinitum, erit $v = gs - \frac{gs^2}{2a} = gx$, vt conſtat. At ſi reſiſtentia tantum ſit valde parua et propterea k valde magnum erit $v = gs - \frac{gs^2}{2a} - \frac{gs^2}{2k} + \frac{gs^3}{6ak}$.

Corollarium 3.

543. In vacuo apparet celeritatem corporis eſſe nullam in duobus punctis vbi eſt $s = 0$ et $s = 2a$, i. e. in duobus cuſpidibus A et B. In medio vero reſiſtente alter locus eſt $s = 0$, alter vero ex hac aequatione erui debet $a = \frac{cs}{1.2k} - \frac{cs^2}{1.2.3k^2} + \frac{cs^3}{1.2.3.4k^3}$ – etc. vnde inuenitur $s = \frac{2ak}{c} + \frac{4a^2k}{3c^2} + \frac{13a^3k}{9c^3} + \frac{196a^4k}{135c^4}$ + etc. Si igitur k fuerit valde magnum erit $s = \frac{2ak}{a+k} + \frac{4a^2k}{3(a+k)^2} = 2a - \frac{2a^2}{3k}$ quam proxime.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

544. Eadem haec series inuenta substituto $a+k$ loco c transformatur in hanc $s = 2a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{7a^3}{9k^2} - \frac{119a^4}{135k^3} +$ etc. ex qua valor ipsius s dat arcum ACN, quo vsque corpus motu suo peruenire potest.

Corollarium 3.

545. Arcus AO ab A vsque ad O, vbi corpus maximam habet celeritatem, est $= k l \frac{a+k}{k} =$ $a - \frac{a^2}{2k} + \frac{a^3}{3k^2} - \frac{a^4}{4k^3} + \frac{a^5}{5k^4} -$ etc. Quare erit arcus $ON = a - \frac{a^2}{6k} + \frac{4a^3}{9k^2} -$ etc. $OC = \frac{a^2}{2k} - \frac{a^3}{3k^2} + \frac{a^4}{4k^3} -$ etc. et $-AO + ON = \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{9k^2}$.

Corollarium 6.

546. Celeritas vero in puncto C reperitur debita altitudini $= \frac{gk^2 - ge^{\frac{-a}{k}}(ak+kk)}{a} = g$ $(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{1.3k} + \frac{a^3}{1.2.4.k^2} - \frac{a^4}{1.2.3.5k^3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.6k^4} -$ etc.). Vnde perspicitur celeritatem in C nunquam posse esse euanescentem; nam altitudo huic celeritati debita est $= \frac{gk^2}{e^{\frac{a}{k}}a}(e^{\frac{a}{k}} - 1 - \frac{a}{k})$, atque $e^{\frac{a}{k}}$ semper maius est quam $1 + \frac{a}{k}$; excessus autem maior est quam $\frac{a^2}{2k^2}$. Quare altitudo debita celeritati in C ma-

M.E.C.D. 2017

maior est quam $\frac{ga}{2c^{\frac{a}{k}}}$, ideoque A C N maior est quam A C.

Corollarium 7.

547. Altitudo debita celeritati maximae in O est $=gk-\frac{gk^2}{a}\,l\frac{a+k}{k}=g\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{3k}+\frac{a^3}{4k^2}-\frac{a^4}{5k^3}+\right.$ etc.). Quare excessus huius altitudinis supra altitudinem celeritati in C debitam est $=g\left(\frac{a^3}{1.2.4k^2}\right.$ $-\frac{5a^4}{1.2.3.5k^3}+\frac{23a^5}{1.2.3.4.6.k^4}-$ etc.) $=gc^{\frac{-a}{k}}\left(\frac{a^3}{8k}+\frac{a^4}{24k^3}\right.$ +etc. Haec nempe expressio obtinetur, si in generali valore ipsius v substituatur $kl\frac{a+k}{k}$ loco s, quippe cui quantitati arcus AO est aequalis.

Scholion.

548. In solutione huius propositionis considerandum venit, quod ex formula descensum tantum determinante etiam ascensum corporis super arcu C N deriuauimus; ex quo dubium oriri potest, an iste ascensus legitime sit definitus. Hoc autem ex ipsa formula ascensum determinante facile perspicitur. Vsi enim fuimus formula hac $dv=gdx-Rds$, quae puncto M vltra punctum C cadente propter dx factum negatiuum abit in hanc $dv=-gdx-Rds$, quae reuera naturam ascensus continet. Ex his intelligitur continuitas inter ascensum et descensum, qua nullo interiecto

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

ſaltu inter ſe cohaerent. Vbi enim curua ſe ſurſum flectere incipit, ibi ſimul formula deſcenſui inſeruiens transmutatur ſponte in formulam aſcenſus. Atque haec connexio locum habet in medio quocunque reſiſtente, vti ex generalibus formulis apparet, quae tantum ſigno ipſius dx diſcrepant. Quamobrem data aequatione pro curua quacunque, non eſt neceſſe vt inquiratur, ſuper quanam parte corpus aſcendat deſcendatve, ſed alterutra formula ad aequationem accommodata verum dabit motum ſuper curua propoſita. Hoc tantum eſt tenendum, vt abſciſſae in axe verticali capiantur, atque ea formula ſiue aſcenſus ſiue deſcenſus adhibeatur, quae cum motus initio congruat.

PROPOSITIO 63.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1. 549. *Sit curua data* ACB *cyclois ſuper baſi horizontali* AB *deſcripta et deorſum ſpectans, corpusque ſuper ea oſcillationes peragat in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum, determinare motum oſcillatorium.*

Solutio.

Ponatur diameter circuli $CD = \frac{1}{2}a$, in eaque ſumatur abſciſſa $CP = x$, et arcus CM vocetur s, erit ex natura cycloidis $s = \sqrt{2ax}$ et $x = \frac{ss}{2a}$ atque $dx = \frac{sds}{a}$. Deſcendat nunc corpus ſuper ar-

CR

cu MC, sitque eius celeritas in C debita atitudini b, erit altitudo debita celeritati in M $= e^{\frac{s}{k}}b - ge^{\frac{s}{k}}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ (523.). Est vero $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \int \frac{e^{\frac{-s}{k}}ds}{a} = \frac{k^2 - k^2e^{\frac{-s}{k}} - ke^{\frac{-s}{k}}s}{a}$; quare altitudo debita celeritati in M est $= \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab-gk^2) + gk^2 + gks}{a} =$

$e^{\frac{s}{k}}b - \frac{g}{a}(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2.3k} + \frac{s^4}{2.3.4.k^2} + \frac{s^5}{2.3.4.5.k^3} + \text{etc.})$

Arcus ergo in quo integer fit descensus habebitur si ipsius s valor ex hac aequatione quaeratur: $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2+gks}{gk^2-ab}$. Fiet autem hinc in serie $s = A + \frac{A^2}{3k} + \frac{5A^3}{24k^2} + \frac{11A^4}{180k^3} +$ etc. posito breuitatis ergo A loco $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Huic ergo seriei aequatur arcus CM, si quidem corpus ex puncto M descendere inceperit. Celeritatem maximam corpus habebit in O sumto $CO = s$ ex hac aequatione $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2-ab}$ seu $CO = k\,l\frac{gk^2}{gk^2-ab}$, atque altitudo huic maximae celeritati debita est $= \frac{gk.CO}{a} = \frac{gk^2}{a}\,l\frac{gk^2}{gk^2-ab} = b + \frac{ab^2}{2gk^2} + \frac{a^2b^3}{3g^2k^4} +$ etc. Ad tempus determinandum conuenit ad punctum O celeritatemque maximam respicere, et tempus per MO definire. Hanc ob rem pono altitudinem celeritati in O debitam $= c$,

M.E.C.D. 2017

et arcum $MO = q$, erit $CO = \frac{ac}{gk}$ et $ab = gk^2 (1 - e^{\frac{-ac}{gk^2}})$, $s = \frac{ac}{gk} + q$. His substitutis erit altitudo debita celeritati in M seu $v = \frac{gk^2 + ac + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}$

Quia nunc v minor est quam c, pono $c - v = z$, eritque $az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}} gk^2$ atque in serie $\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2} + \frac{q^5}{120k^3} +$ etc. Ex qua conuertendo fit $q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2z^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2z^2\sqrt{2az}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. Incipiat descensus in puncto M, erit ibi $v = 0$ et $z = c$, ideoque $OM = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} c - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. Ex eadem formula, si ponatur q negatiuum, habebitur motus per OCN: at quia perinde est, siue q ponatur negatiuum siue k, erit arcus ON, si N fuerit punctum quousque corpus ascendit, $= \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g\,k^3} + \frac{a^2c^2\sqrt{2ac}}{1080g^2k^4\sqrt{g}} +$ etc. Tempus vero per MO hoc modo inuenitur; quia est $ds = dq = \frac{adz}{\sqrt{2gaz}} - \frac{adz}{3gk} + \frac{adz\sqrt{2az}}{12gk^2\sqrt{g}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3} + \frac{a^2zdz\sqrt{2az}}{432g^2k^4\sqrt{g}} -$ etc. hoc diuisum per $\sqrt{v} = \sqrt{(c-z)}$ dat elementum temporis $= \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2g\,(cz-z^2)}} - \frac{adz}{3gk\sqrt{(c-z)}} + \frac{azdz\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g\,(cz-zz)}} - \frac{4a^2zdz}{135g^2k^3\sqrt{(c-z)}} + \frac{a^2z^2dz\sqrt{2a}}{432g^2k^4\sqrt{g\,(cz-z^2)}} -$ etc. Quod ita integrari debet vt posito $v = c$ vel $z = 0$ euanescat; deinde si ponatur $z = c$ habebitur tempus quo corpus per arcum MO descendit. Hoc igitur tempus posita peripheriae ad diametrum ratione

M.E.C.D. 2017

ratione π ad 1 erit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} - \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} - \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3}$ + etc. Posito igitur k negatiuo erit tempus quo corpus ex O ad N vsque ascendit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} + \frac{2a\sqrt{c}}{3gk} + \frac{\pi ac\sqrt{a}}{12gk^2\sqrt{2g}} + \frac{4a^2c\sqrt{c}}{135g^2k^3}$ + etc. Tempus ergo per MCN seu tempus vnius dimidiae oscillationis est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}$ + etc. Q. E. I.

Corollarium 1.

550. Si ergo celeritas maxima corporis descendentis fuerit debita altitudini c, propter CO $= \frac{ac}{gk}$ erit $MC = \frac{\sqrt{2}ac}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2}ac}{18gk^2\sqrt{g}} - \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3}$ + $\frac{a^2c^2\sqrt{2}ac}{1080g^2k^4\sqrt{g}}$ - etc. Totus vero ascensus CN erit $= ON - CO = \frac{\sqrt{2}ac}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2}ac}{18gk^2\sqrt{g}} + \frac{2a^2c^2}{135g^2k^3}$ + $\frac{a^2c^2\sqrt{2}ac}{1080g^2k^4\sqrt{g}}$ + etc. Hinc erit $CM - CN = \frac{4ac}{3gk} - \frac{4a^2c^2}{135g^2k^3}$ - etc. atque $MCN = \frac{2\sqrt{2}ac}{\sqrt{g}} + \frac{ac\sqrt{2}ac}{9gk^2\sqrt{g}} + \frac{a^2c^2\sqrt{2}ac}{540g^2k^4\sqrt{g}}$ + etc.

Corollarium 2.

551. Si totus arcus descensus MC ponatur $= E$ et sequens arcus ascensus $CN = F$, atque altitudo debita celeritati in $C = b$, erit $\frac{ab}{g} = k^2 - e^{\frac{-E}{k}}(k^2 + kE) = \frac{E^2}{2} - \frac{E^3}{3k} + \frac{E^4}{8k^2} - \frac{E^5}{30k^3} + \frac{E^6}{144k^4}$ --- etc. Atque posito k negatiuo eodem modo inuenitur $\frac{ab}{g} = \frac{F^2}{2} + \frac{F^3}{3k} + \frac{F^4}{8k^2} + \frac{F^5}{30k^3} + \frac{F^6}{144k^4}$ + etc. Ex quibus fit $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2} - \frac{26E^4}{135k^3} + \frac{86E^5}{405k^4}$ - etc.

BIBLIOTECA DEL

M.E.C.D. 2017

atque altitudo debita celeritati maximae $c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{4ak^2} -$ etc.

Corollarium 3.

552. Quia F eſt arcus aſcenſus in prima dimidia oſcillatione, erit idem arcus F arcus deſcenſus in ſequente oſcillatione: cum quo ergo coniungetur arcus aſcenſus $G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2} - \frac{28E^4}{15k^3} + \frac{964E^6}{405k^4}$ — etc. Atque ſimili modo ſequentes oſcillationes quotquot libuerit definiri poſſunt.

Corollarium 4.

553. Ex aequatione tempus exponente appareret tempus quo corpus ex M ad O peruenit ſemper minus eſſe tempore quo corpus ex O ad N vsque pertingit. Simili modo etiam arcus ON maior eſt quam arcus OM, arcus vero CN minor eſt arcu MC.

Corollarium 5.

554. Si oſcillationes fuerint infinite paruae, ſeu c quantitas euaneſcens, congruent oſcillationes cum oſcillationibus in vacuo factis; in ſingulis enim expreſſionibus iidem termini euaneſcent, qui euaneſcerent poſito $k = \infty$. Minimis ergo oſcillationibus iſochronae erunt oſcillationes penduli longitudinis a in vacuo, ſollicitati a potentia g, ſeu penduli in hypotheſi grauitatis $= 1$, cuius longitudo eſt $= \frac{a}{g}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 6.

555. At si oscillationes fiant maiores, tempora oscillationum quoque fient maiora, quare in hac resistentiae hypothesi cyclois tautochronismi proprietate non gaudet. Quo enim in quaque oscillatione maior fuerit celeritas maxima, maior quoque erit excessus temporis oscillationis huiusmodi supra tempus oscillationis minimae.

Scholion 1.

556. Quod diximus oscillationes minimas cum oscillationibus in vacuo congruere locum habet, si a et k fuerint quantitates finitae magnitudinis. Si enim a esset infinite magnum, seu k infinite paruum, sequentes termini tempus exprimentes $\frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}} +$ etc. non euanescerent etiamsi c, esset infinite paruum. Tum igitur tantum oscillationes minimae super curua quacunque in vacuo et medio resistente inter se congruent, quando neque radius osculi curuae in infimo puncto fuerit infinite magnus, neque resistentia infinite magna.

Exemplum.

557. Exempli loco euoluamus casum, quo resistentia tam sit exigua, ideoque k quantitas tam magna vt fractiones, in quarum denominatoribus k plures duabus habet dimensiones, tuti pro nihilo haberi possint. Dicta igitur altitudine celeritati maximae in O debita c, ita vt sit $CO = \frac{ac}{gk}$; erit

M.E.C.D. 2017

erit arcus descensus $MC = E = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$ et sequens arcus ascensus $CN = F = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Vnde inuenitur $\sqrt{c} = \frac{E\sqrt{g}}{\sqrt{2a}} - \frac{E^2\sqrt{g}}{3k\sqrt{2a}} + \frac{7E^3\sqrt{g}}{36k^2\sqrt{2a}}$, seu $c = \frac{gE^2}{2a} - \frac{gE^3}{3ak} + \frac{gE^4}{3ak^2}$ atque $F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$. Tempus ergo dimidiae oscillationis per MCN est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$. In sequente dimidia oscillatione est arcus descensus $= F = E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$, quem sequetur arcus ascensus $G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16E^3}{9k^2}$; atque tempus huius dimidiae oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$, vbi vltimus terminus negligi potest ob k^3 in denominatore. In tertia semioscillatione est arcus descensus $= G = E - \frac{4E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$, et arcus descensus $= H = E - \frac{6E^2}{3k} + \frac{36E^3}{9k^2}$ Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur numero n est arcus descensus $= E - \frac{2(n-1)E^3}{3k} + \frac{4(n-1)^2E^3}{9k^2}$ et arcus ascensus $= E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$. Quamobrem post n semioscillationes corpus ab infimo puncto C distabit arcu $E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, qui minor est quam arcus descensus primae oscillationis quantitate $\frac{2nE^2}{3k} - \frac{4n^2E^3}{9k^2}$. Tempus autem semioscillationis numero n indicatae erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}} - \frac{\pi(n-1)E^3\sqrt{2a}}{18k^3\sqrt{g}}$. At si totus arcus primae semioscillationis MCN dicatur A, erit $A = 2E - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4E^3}{9k^2}$ et $E = \frac{A}{2} + \frac{A^2}{12k}$ euanescente sponte termino sequente. Hinc to-

M.E.C.D. 2017

sequente. Hinc totus arcus oscillatione per numerum n indicata descriptus erit $= 2E - \frac{2(2n-1)E^2}{3k} + \frac{4(2n^2-2n+1)E^3}{9k^2} - = A - \frac{(n-1)A^2}{3k} + \frac{(n-1)^2A^3}{9k^2}$.

Corollarium 7.

558 Si n fiant oscillationes dimidiae et arcus descensus primae oscillationis fuerit E et arcus ascensus vltimae $= L$, erit $L = E - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2E^3}{9k^2}$, quae expressio, si per seriem propius capiatur, fere congruet cum progressione geometrica eiusdem initii, hancque ob rem erit $L = \frac{3Ek}{3k+2nE}$ seu $3k(E-L) = 2nEL$.

Corollarium 8.

559. Hinc si peractis aliquot semioscillationibus detur arcus descensus primae oscillationis E, vna cum arcu ascensus vltimae L inueniri potest numerus semioscillationum n est, namque $n = \frac{3k(E-L)}{2EL}$.

Corollarium 9.

560. Patet ergo diminutionem arcuum non a longitudine penduli pendere, sed ex n et E datis idem reperitur arcus L quaecunque fuerit longitudo penduli a. Atque est semper n proportionalis ipsi $\frac{1}{L} - \frac{1}{E}$.

Scholion 2.

561. Huiusmodi experimenta circa oscillationes in medio resistente multa recenset Newt. in

M.E.C.D. 2017

Phil. Lib. II. vbi notat arcum deſcenſus primae, arcum deſcenſus vltimae oſcillationis atque numerum oſcillationum tam in aëre quam in aqua et mercurio. Quare ſi haec media perfecte reſiſterent in duplicata celeritatum ratione, congrua eſſe deberent cum hisce formulis, ita vt decrementum arcus proportionale eſſet numero oſcillationum et arcui primo et vltimo coniunctim. Quod etiam locum habere obſeruaui in maioribus oſcillationibus, in quibus celeritas non eſt nimis exigua. At in oſcillationibus minimis maxima aberratio ab hac regula conſpicitur. Ex quo colligitur quo maior fuerit corporis celeritas in fluido, eo propius reſiſtentiam accedere ad rationem duplicatam celeritatum, motum autem tardiſſimum alii reſiſtentiae inſuper eſſe obnoxium, quae in motibus celerioribus prae reſiſtentia, quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, euaneſcat. In hisce quoque experimentis Newtonus reſiſtentiam partim ſimplici celeritatum rationi, partim ſesquiplicatae, partim duplicatae proportionalem aſſumſit, neque tamen pro motibus tardiſſimis ſatisfecit. In vltima vero Phil. Editione ipſe Newtonus quoque inſufficientem priorem theoriam ſuam agnoſcit, atque pluribus rationibus oſtendit alteram illam fluidorum reſiſtentiam eſſe conſtantem ſeu temporis momentis proportionalem; quam antea ipſis celeritatibus proportionalem erat arbitratus. Hanc ob rem iſtam reſiſtentiam cum ea, quae quadratis celeritatum eſt propor-

M.E.C.D. 2017

proportionalis in ſequenti propoſitione coniunctam conſiderabimus; cum praeſertim aequationum reſolutio et celeritatum determinatio hac adiectione non difficilior euadat.

Corollarium 10.

562. Quod ad tempora oſcillationum et ſemioſcillationum attinet, perſpicuum eſt ea decreſcere, quo minores fiant arcus deſcripti; atque ſi arcus plane euaneſcant tempus dimidiae oſcillationis fore $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 11.

563. Exceſſus autem cuiusque ſemioſcillationis temporis ſupra tempus minimae ſemioſcillationis in caſu reſiſtentiae minimae eſt $\frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$, denotante E arcum deſcenſus illius ſemioſcillationis Quare iſte exceſſus proportionalis eſt quadrato arcus deſcenſus, vel etiam quadrato totius arcus ſemioſcillatione deſcripti.

Scholion 3.

564. Cyclois igitur, quae ab Hugenio apta eſt demonſtrata ad iſochronismum pendulorum producendum, hanc proprietatem in medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione amittit, et hanc ob rem in aëre non inſeruit, niſi vel oſcillationes ſint valde paruae, vel inter ſe proxime aequales. Ex hoc vero, quod maiores o-

M.E.C.D. 2017

ſcillationes diutius durent, colligi licet, veram curuam tautochronam in hac reſiſtentiae hypotheſi magis eſſe curuam quam cycloidem. Quemadmodum ſcilicet cyclois in circulo eiusdem radii, cuius cyclois eſt in infimo puncto, continetur, ita quoque vera tautochrona in cycloide continebitur, atque eius curuedo a puncto infimo magis decreſcet, quam curuedo cycloidis.

PROPOSITIO 64.
Problema.

Tab. XIII. Fig 1.

565. *Si medii reſiſtentia partim fuerit conſtans, partim quadratis celeritatum proportionalis, determinare motum oſcillatorium corporis ſuper cycloide* MCB, *ſaltem in caſu quo reſiſtentia eſt valde parua.*

Solutio.

Sit vt ante diameter circuli generatoris CP $= \frac{1}{2}a$; CP $= x$; et arcus CM $= s$. Ponatur celeritas in C debita altitudini b, et celeritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorſum ſollicitans ſit $= g$, pars reſiſtentiae quae eſt conſtans ſit $= h$, et pars reſiſtentiae quadratis celeritatum proportionalis ſit $= \frac{v}{k}$ vt ante; erit k quantitas valde magna reſpectu v et s et a; atque h valde paruum reſpectu g. Iam fiat deſcenſus ſuper arcu MC, erit $dv = -g\,dx + h\,ds + \frac{v\,ds}{k}$, atque hinc $v = e^{\frac{s}{k}} b - e^{\frac{s}{k}} \int e^{\frac{-s}{k}} (g\,dx - h\,ds)$.

M.E.C.D. 2017

At quia eſt ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{\alpha}$ erit $\int e^{\frac{-s}{k}}$ $gdx = \frac{gk^2 - gk^2 e^{\frac{-s}{k}} - gke^{\frac{-s}{k}} s}{a}$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} hds = hk - h$ $ke^{\frac{-s}{k}}$; vnde fit $v = \frac{e^{\frac{s}{k}}(ab + hak - gk^2) - hak + gk^2 + gks}{a}$

Celeritas maxima habetur ſi fuerit $\frac{gs}{a} = h + \frac{v}{k}$ ſeu $e^{\frac{s}{k}} = \frac{gk^2}{gk^2 - ab - hak}$. Dicatur altitudo debita celeritati maximae in $O = c$, erit $CO = \frac{ha}{g} + \frac{ac}{gk}$ et $ab = gk^2 - hak - gk^2 e^{\frac{-hak-ac}{gk^2}}$. Ponatur arcus $MO = q$ erit $s = \frac{ha}{g} + \frac{ac}{gk} + q$; vnde fit $v = \frac{ac + gk^2 + gkq - e^{\frac{q}{k}} gk^2}{a}$. Quia nunc v minus eſt quam c, pono $c - v = z$, erit $az + gk^2 + gkq = e^{\frac{q}{k}} gk^2$. Quae aequatio in ſeriem conuerſa dat vt ſupta $\frac{az}{g} = \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6k} + \frac{q^4}{24k^2}$, atque $q = \frac{\sqrt{2az}}{\sqrt{g}} - \frac{az}{3gk} + \frac{az\sqrt{2az}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Incipiat deſcenſus ex M, erit ibi $v = 0$ et $z = c$, ideoque $MO = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$. Ex eadem formula reperitur arcus aſcenſus $ON = \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$; atque cum in his h non reperiatur erit vt ſupra tempus ſemioſcillationis per $MON = \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi ac\sqrt{2a}}{12gk^2\sqrt{g}}$ Totus vero arcus deſcenſus MC erit $= \frac{ha}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} + \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$; atque arcus aſcenſus $CN = -\frac{ha}{g} + \frac{\sqrt{2ac}}{\sqrt{g}} - \frac{2ac}{3gk} + \frac{ac\sqrt{2ac}}{18gk^2\sqrt{g}}$.

M.E.C.D. 2017

Quare si arcus descensus MC ponatur E et arcus ascensus CN = F, erit $F = E - \frac{2ba}{g} - \frac{2E^2}{3k} + \frac{4baE}{3gk} + \frac{4E^3}{9k^2}$. In sequente semioscillatione est arcus descensus F et arcus ascensus $G = E - \frac{4ba}{g} - \frac{4E^2}{3k} + \frac{16baE}{3gk} + \frac{16E^3}{9k^2}$. Atque generaliter in ea semioscillatione, quae indicatur numero n, arcus ascensus est $= E - \frac{2nba}{g} - \frac{2nE^2}{3k} + \frac{4n^2baE}{3gk} + \frac{4n^2E^3}{9k^2} = \frac{3gkE - 6bnak}{3gk + 2gnE}$. Quare si peractis n semioscillationibus dicatur arcus descensus primae E et arcus ascensus vltimae L, erit $2gnEL = 3gk(E-L) - 6bnak$ seu $n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL + 6bak}$. Tempus vero quo quaelibet semioscillatio per MCN absoluitur est $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi(gE - ba)^2\sqrt{2a}}{24g^2k^2\sqrt{g}}$ loco c eius valore substituto. Q. E. I.

Corollarium I.

566. Si ponatur $c = 0$, vt locus prodeat in quo corpus sit quieturum, inuenitur $MC = \frac{ba}{g}$: corpus ergo in quiete permanere potest non solum in puncto C, sed extra C quoque in distantia $\frac{ba}{g}$ cis et vltra C. Quare in huiusmodi medio resistente ex statu quietis penduli non exacte linea verticalis potest cognosci; sed angulo cuius sinus est $\frac{b}{g}$ aberrari potest.

Scholion I.

567. Huiusmodi resistentiam in aqua locum habere experimentis facile euincitur, quippe in moti-

M.E.C.D. 2017

motibus tardiſſimis reſiſtentia quadratis celeritatum minime proportionalis obſeruatur; in fluido vero praeter reſiſtentiam quadratis celeritatum proportionalem aliam non dari probabile eſt, niſi reſiſtentiam conſtantem. Confirmatur hoc etiam experimentis a *La Hirio* inſtitutis, quibus monſtrauit pendulum in aqua extra ſitum verticalem in quiete permanere poſſe. Quod fieri non poſſet, ſi reſiſtentia a ſola celeritate penderet. Ex experimentis *Newtoni*, quae circa retardationem motus pendulorum in aëre inſtituit, concludi poteſt globi plumbei diametri 2 dig. reſiſtentiam conſtantem eſſe circiter partem millioneſimam grauitatis, ſeu $\frac{b}{g} = \frac{1}{1000000}$. Hic ergo globus filo ſuſpenſus a linea verticali aberrare poteſt angulo $10'''$, qui autem error eſt inſenſibilis. Maior autem et ſenſibilis eſſe poterit hic error, quo minor ſimulque leuior globus adhibeatur.

Corollarium 2.

568. Ad hunc angulum inueniendum inſeruit iſta aequatio ex ſuperiori deducta $\frac{b}{g} = \frac{E-L}{2na} - \frac{EL}{3ak} =$ ſinui anguli, quo pendulum a linea verticali declinare poteſt. At loco E arcum paruum accipi conuenit, quo termini neglecti eo magis fiant inſenſibiles.

Corollarium 3.

569. Ex aequatione $n = \frac{3gk(E-L)}{2gEL+6bak}$ apparet quo maior ſit arcus oſcillatione deſcriptus eo minorem

M.E.C.D. 2017

norem fieri terminum $6hak$ reſpectu 2gEL. Atque hoc in cauſa eſt, quod haec reſiſtentia tantum in minimis oſcillationibus ſentiatur.

Corollarium 4.

570. Quia h eſt numerus tum per hypotheſin valde paruus, tum in ſubtilibus fluidis, ad quae haec propoſitio eſt accommodata, reipſa fere euaneſcens: in expreſſione temporis euaneſcet quoque ha prae gE, ideoque tempus vnius ſemioſcillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}} + \frac{\pi E^2\sqrt{2a}}{24k^2\sqrt{g}}$ Reſiſtentia igitur conſtans non immutabit tempora oſcillationum.

Scholion 2.

571. Etiamſi ergo haec reſiſtentia conſtans cum reſiſtentia quadratis celeritatum proportionali coniuncta conſideretur, calculus eo neque fit prolixior neque difficilior. Nam ex celeritate maxima Vc totus arcus vna ſemioſcillatione deſcriptus eodem modo determinatur, ſiue haec reſiſtentia conſtans adſit ſiue non; vtroque enim caſu plane eadem obtinetur aequatio. Quamobrem vel ex hoc ipſo ſequi videtur, hanc reſiſtentiae legem in natura locum habere, alias vero reſiſtentias praeter hanc et eam, quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, actu non inueniri. Fluida autem iam pridem duplicem reſiſtentiam exercere obſeruata ſunt, alteram quadra-

is

M.E.C.D. 2017

tis celeritatum proportionalem, quae in motibus celerioribus ſola obſeruetur, alteram in motibus tardiſſimis tantum ſenſibilem. Illa reſiſtentia oritur a vi inertiae particularum fluidi, et per eam corpus de motu ſuo amittit, quando particulas eas remouet; quam quadratis celeritatum proportionalem eſſe dubitari nequit. Haec vero reſiſtentia a tenacitate fluidi ortum habet, qua particulae fluidi inter ſe cohaerent et difficulter a ſe inuicem ſeparantur. Dum igitur corpus per datum ſpatium mouetur datus particularum numerus ipſi ſpatio proportionalis a ſe inuicem diuelli debet; quare haec reſiſtentia congruit cum potentia abſoluta motum corporis retardante; quippe quae etiam per aequalia ſpatia aequalem ictuum numerum in corpus exerit. Haec igitur reſiſtentia ſeu vis motui corporis ſemper eſt contraria, et ſecundum ipſam directionem motus in corpus agit, atque ideo eſt vis tangentialis perpetuo conſtans et retardans. At hoc caſu natura a calculo exceptionem poſtulat, quando corpus quieſcit. Quoniam enim haec vis eſt conſtans, aeque agere deberet in corpus quieſcens ac in motum; quieſcens autem corpus, quia fluidi particulas non diuellit, hanc vim ſentire nequit. Accedit ad hoc, quod, cum haec vis directioni motus ſit contraria, ea in corpus quieſcens, quod nullam habeat directionem, nullum effectum habere queat. At ſi motus ſuper linea curua inueſtigatur, tangens curuae ſemper pro directione motus habetur, etiamſi

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

corpus actu quieſcat, atque ideo calculus effectum huius vis etiam in corpore quieſcente oſtendit; hoc igitur caſu a calculo exceptionem fieri oportet. Corpus pendulum ergo per aliquod paruum ſpatium circa C in quiete permanere poſſe ideo eſt dicendum, quia eius niſus verſus C non ſufficit ad particulas fluidi a ſe inuicem ſeparandas. Quare corpus quieſcere poteſt in quolibet puncto illius ſpatioli, etiamſi calculus oſtendat, etiam in ipſo puncto C corpus non in quiete perſeuerare poſſe.

Scholion 3.

572. Ex his quae partim generaliter tradidimus partim de cycloide attulimus, perſpicitur, quomodo in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum motus corporis ſuper quacunque curua poſſit determinari. Conſiderauimus quidem medium reſiſtens vniforme, et potentiam ſollicitantem quoque aequabilem; ſed ex aequatione reſoluenda apparet, eam quoque integrari poſſe, quomodocunque tum medium ſit difforme, tum potentia ſollicitans variabilis, ſemper enim in aequatione altitudo celeritati debita v vnicam tantum habet dimenſionem. Progredior igitur ad alias medii reſiſtentis hypotheſes; ſed quia tum non pro quauis curua motus poteſt definiri, curuae primo ſunt inueniendae, quae determinationem motus admittunt. Aſſumimus hic autem iuxta

M.E.C.D. 2017

ta inſtitutum noſtrum eas curuas, quae ad aequationem homogeneam deducunt, in qua indeterminatae vbique eundem obtinent dimenſionum numerum. Si reſiſtentia fuerit poteſtati celeritatum exponentis $2m$ proportionalis, habetur iſta aequatio $dv = \pm g\,dx \pm \frac{v^m\,ds}{k^m}$, quae quo ſit homogenea inter v et x debet eſſe $ds = x^{-m}\,dx$, ſeu $s = a^m x^{1-m}$, ſeu $x = a^{\frac{m}{m-1}} s^{\frac{1}{1-m}}$. Vel ſi x et s datis quantitatibus augeantur vel diminuantur, in curua, cuius haec eſt aequatio $x = a^{\frac{m}{m-1}} (s+f)^{\frac{1}{1-m}} - a^{\frac{m}{m-1}} f^{\frac{1}{1-m}}$, motus quoque determinari poteſt. In medio ergo reſiſtente in ſimplici ratione celeritatum curua fit cyclois, ideoque motum ſuper ea determinemus.

PROPOSITIO 65.

Problema.

573. *In medio quod reſiſtit in ſimplici ratione celeritatum, determinare motum oſcillatorium corporis ſuper cycloide* A C B, *exiſtente tam medio quam potentia ſollicitante vniformi.* Tab. XIII. Fig. 1.

Solutio.

Sit iterum vt ante diameter circuli generatoris $CD = \frac{1}{2}a$: abſciſſa $CP = x$, et arcus $CM = s$.

M.E.C.D. 2017

Ponatur celeritas in C debita altitudini b et celeritas in M altitudini v. Potentia corpus perpetuo deorsum trahens sit $= g$; et resistentia $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Fiat super parte AMC descensus, erit ex natura descensus $dv = -g\,dx + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = -\frac{g\,s\,ds}{a} + \frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{u}{a}$, erit $v = \frac{ku^2}{a^2}$ et $dv = \frac{2kudu}{a^2}$, vnde fit $2kudu = -gasds + auds$, quae aequatio ita debet integrari vt facto $s = o$ fiat $u = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{k}}$. Pro ascensu vero super arcu CN haec habetur aequatio $2kudu = -gasds - auds$. Ponatur $u = ps$, habebitur pro descensu $2kp^2 s\,ds + 2kps^2\,dp = -gasds + apsds$, seu $\frac{2kpdp}{ap - ga - 2kp^2} = \frac{ds}{s}$. Hinc fit integrando $ls = lC - \frac{1}{2}l(p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}) + \frac{a}{2\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$ $l\frac{4kp - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4kp - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}} = lC - \frac{1}{2}l\frac{2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}}{2ks^2\sqrt{k}} + \frac{a}{2\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$ $l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$, seu $lC = l(2a^2v\sqrt{k} - a^2s\sqrt{v} + gas^2\sqrt{k}) - \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$ $l\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$. Ponatur $s = o$ et $v = b$ fiet $lC = l2a^2b\sqrt{k}$; hinc fiet $\frac{2av\sqrt{k} - as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} - as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} - as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}$. In altera vero curuae parte CN pro ascensu corporis posito $CN = s$ habetur haec aequatio $\frac{2av\sqrt{k} + as\sqrt{v} + gs^2\sqrt{k}}{2ab\sqrt{k}} = \left(\frac{4a\sqrt{kv} + as - s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4a\sqrt{kv} + as + s\sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}$. Si altitudo celeritati maximae, quae fit in O, debita dicatur c, erit $CO = \frac{a\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$, atque $c = b\left(\frac{4gk - a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{4gk - a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}}$. Hae autem aequationes locum non habent, nisi fit $a^2 > 8gak$, seu $k <$

M.E.C.D. 2017

$k \lessgtr \frac{a}{8g}$. Nam si $k \gtrless \frac{a}{8g}$ aequationes a logarithmis et quadratura circuli simul pendebunt. Ponamus esse $k = \frac{a}{8g}$, eritque $\frac{ds}{s} = \frac{-p\,dp}{(p-\frac{a}{4k})^2} = \frac{-dp}{p-\frac{a}{4k}}$ $\frac{a\,dp}{4k(p-\frac{a}{4k})^2}$. Integrando ergo prodibit $l\,s = lC - l(p-\frac{a}{4k}) + \frac{a}{4kp-a} = lC - l(\frac{a\sqrt{v}}{s\sqrt{k}} - \frac{a}{4k}) + \frac{as}{4a\sqrt{kv}-as}$ $= lC - l(4a\sqrt{kv}-as) + ls + \frac{as}{4a\sqrt{kv}-as}$. Fit igitur $lC = l\,4a\sqrt{kb}$; vnde habebitur $l\frac{4\sqrt{kv}-s}{4\sqrt{kb}} = \frac{s}{4\sqrt{kv}-s}$. Apparet hinc in descensu celeritatem nusquam esse posse $= o$, semper enim $4\sqrt{kv}$ maius esse debet quam s. Hoc ergo casu, si celeritas in puncto C sit realis descensus initium fit imaginarium. Quare vbicunque corpus descensum inceperit celeritas in puncto infimo C erit $= o$. Ad motum igitur inuestigandum si descensus fit ex puncto dato E fueritque $CE = f$, erit $lC = l - af + 1$, ideoque $i^{\frac{s-4\sqrt{kv}}{f}} = \frac{4\sqrt{kv}}{4\sqrt{kv}-s}$. Ex quo intelligitur semper esse debere $4\sqrt{kv} \lessgtr s$, quamobrem in puncto C vbi $s = o$ debet quoque esse $v = o$. Maxima celeritas, quae sit in O habetur ponendo $\sqrt{v} = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$ seu $s = 8\sqrt{kv}$, quo posito prodit $l\frac{s}{2f} = -1$, seu $s = \frac{2f}{e} = CO$ denotante e numerum, cuius logarithmus est $= 1$. His igitur casibus, quibus arcus descensus est realis, nullus est arcus ascensus. At si corpus per arcum CN celeritate initiali in C altitudini b debita ascendat, motus

BIBLIOTECA DEL OSSERVATORIO DI S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

hac aequatione exprimetur $l\frac{4\sqrt{kv}+s}{4\sqrt{kb}} = \frac{-s}{4\sqrt{kv}+s}$, ex qua patet esse $s+4\sqrt{kv} < 4\sqrt{kb}$ et $\sqrt{v} < \sqrt{b}\frac{s}{4\sqrt{k}}$. Totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v=0$, tumque erit $l\frac{s}{4\sqrt{kb}} = -1$, seu $CN = \frac{4\sqrt{kb}}{e}$. Si est $k < \frac{a}{8g}$, quem casum iam tractauimus, resistentia adhuc fit maior, quamobrem multo magis celeritas in C erit $= o$, si quidem descensus ex puncto dato fiat; atque pro data celeritate in C initium descensus erit imaginarium. Quamobrem aequatio quam pro descensu dedimus est imaginaria, nisi constans determinetur ex dato descensus initio. Sit igitur arcus $CE = f$, erit $lC = lgaf^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}}\sqrt{k}-\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}l\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ factoque $s=o$ erit $l\frac{gf^2}{aa} = \frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}l\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}$ si v non esset $=o$, nam si v est $=o$ haec aequatio non valet. Apparet autem hanc aequationem contradictionem continere, quia av maius esse deberet quam gff seu $v > \frac{gss}{a}$ posito s pro f. At est $\frac{ss}{a} = 2x$ atque ita esset $v > 2gx$, quod est absurdum, nam in vacuo est tantum $v = gx$, atque in medio resistente adhuc minor esse debet. Pro ascensu autem inseruit aequatio inuenta atque ex ea totus arcus ascensus CN reperitur faciendo $v=0$, quo posito prodit $\frac{as^2}{2ab} = \left(\frac{a-\sqrt{(a^2-8gak)}}{a+\sqrt{(a^2-8gak)}}\right)^{\frac{a}{\sqrt{(a^2-8gak)}}} = \frac{g.CQ}{b}$. Ex his igitur perspicitur si fuerit vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$ oscillationes peragi non posse, quia post nullum descensum ascensus sequi potest. Quare nobis potissimum reliqui casus, quibus est $k > \frac{a}{8g}$, sunt inuesti-

M.E.C.D. 2017

ueſtigandi ; quia enim in his reſiſtentia eſt minor, atque quantumuis parua aſſumi poteſt, oſcillationes vtique perfici poterunt. Factis ergo ſuperioribus ſubſtitutionibus habemus $\frac{-ds}{s} = \frac{pdp}{p^2 - \frac{ap}{2k} + \frac{ga}{2k}}$ quae aequatio poſito $q = p - \frac{a}{4k}$ abit in hanc $\frac{-ds}{s} = \frac{qdq + \frac{adq}{4k}}{qq + \frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2}}$. Ponatur $\frac{ga}{2k} - \frac{a^2}{16k^2} = B^2$, quia eſt quantitas affirmatiua, eritque $lC - ls = lV(q^2 + B^2) + \frac{a}{4k}\int \frac{dq}{q^2+B^2} = lV(q^2+B^2) + \frac{a}{4Bk}$ A$t.\ \frac{q}{B}$, vbi A$t.\ \frac{q}{B}$ eſt arcus circuli cuius tangens eſt $\frac{q}{B}$ exiſtente ſinu toto $= 1$. Reſtituto autem pro q valore debito erit $lC = lV(2avVk - asVv + gs^2Vk) + \frac{a}{4Bk}$ A$t.\ \frac{4aVkv - as}{4Bks}$. Ponatur ad lC deſiniendum $s = o$ et $v = b$, erit $lC = lV\ 2abVk + \frac{a}{4Bk}$ A$t.\ \infty$, quare erit $l\frac{V2abVk}{V(2avVk - asVv + gs^2Vk)} = -\frac{a}{4Bk}$ A$t.\ \frac{4Bks}{4aVkV - as}$. Pro aſcenſu vero per arcum CN inuenitur $l\frac{V2abVk}{V(2avVk + asVv + gs^2Vk)} = \frac{a}{4Bk}$ A$t.\ \frac{4Bks}{4aVkv + as}$. Poſito nunc $v = o$ prodit integer arcus deſcenſus MC ex hac aequatione $lV\frac{2ab}{gss} = \frac{a}{4Bk}$ A$t.\ \frac{4Bk}{a} = lV\frac{b}{g.CP}$. Atque totus arcus aſcenſus CN inuenietur ex hac aequatione $lV\frac{2ab}{gss} = \frac{a}{4Bk}$ A$t.\ \frac{4Bk}{a} = lV\frac{b}{g.CQ}$. Ex his aequationibus quanquam videantur arcus aſcenſus et deſcenſus inter ſe aequales, tamen ſunt inaequales; dantur enim infiniti arcus quorum tangens eſt eadem $\frac{4Bk}{a}$, atque pro aſcenſu alius accipi debet alius prodeſcenſu. Atque

cum

M.E.C.D. 2017

cum infiniti dentur arcus tangentis $\frac{4Bk}{a}$, quilibet eorum ad propositum accommodari potest. His enim sumtis arcubus in ordine prodeunt successiue omnes arcus tam ascensus quam descensus, quam diu corpus oscillationes peragit; nam quia aequatio inuenta est generalis ea omnia loca ostendere debet, in quibus corporis oscillantis celeritas vnquam est $=0$. Quare in hac resistentiae hypothesi hoc habetur commodum, quod statim pro qualibet oscillatione centesima v. gr. arcus tam descensus quam ascensus possit definiri. Sit arcus D cuius tangens est $\frac{4Bk}{a}$, et posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit eadem tangens $\frac{4Bk}{a}$ omnium horum arcuum D; $\pi + D$; $2\pi + D$; $3\pi + D$; etc. Pro arcu descensus nunc primae oscillationis MC sumi debet arcus D, eritque $\frac{2ab}{gss}$ $= e^{\frac{Da}{2Bk}}$ seu abscissa arcus $MC = \frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}$. Abscissa autem arcus ascensus sequentis seu abscissa arcus descensus secundae semioscillationis erit $\frac{b}{g}\, e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$. Simili modo abscissa arcus descensus in tertia semioscillatione erit $= \frac{b}{g}\, e^{\frac{--a(2\pi+D)}{2Bk}}$. Atque generaliter abscissa arcus descensus in oscillatione quae indicatur per $n+1$ est $\frac{b}{g}\, e^{\frac{-a(n\pi+D)}{2Bk}}$, quae simul est abscissa arcus ascensus in oscillatione quae indicatur numero n. Quod ad tempora oscillationum attinet, ea sequenti propositioni reseruamus. Q.E.I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

574. Nisi ergo fuerit $k \gtrsim \frac{a}{8g}$, oscillationes absolui non possunt; quia finito primo descensu corpus ad quietem redigitur, si vel $k < \frac{a}{8g}$ vel $k = \frac{a}{8g}$. At si $k > \frac{a}{8g}$ oscillationes perpetuo durabunt, quia expressio $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(n\pi+D)}{2Bk}}$ neque euanescere neque negatiua fieri potest.

Corollarium 2.

575. Arcus descensus se habet ad arcum sequentem ascensus in data ratione; est enim abscissarum ratio $\frac{b}{g} e^{\frac{-Da}{2Bk}}$ ad $\frac{b}{g} e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$, ideoque ipsorum arcuum 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$, quae ratio non pendet a celeritate data $\sqrt{b}$.

Corollarium 3.

576. Atque simili modo arcus descensus primae semioscillationis ad arcum ascensus semioscillationis numero n indicatae datam habet rationem, est enim haec ratio vt $e^{\frac{\pi n a}{4Bk}}$ ad 1. Quare si numerus semioscillationum duplo fit maior haec ratio fit duplicata.

Corollarium 4.

577. Arcus descensus quotcunque semioscillationum se insequentium constituunt progressionem geometricam decrescentem in ratione 1 ad $e^{\frac{-\pi a}{4Bk}}$. Atque ideo integri etiam arcus semioscillationibus de-

M.E.C.D. 2017

ſcripti erunt in progreſſione geometrica eiusdem denominatoris.

Scholion I.

578. Quia autem pro D infiniti arcus accipi poſſunt, quo appareat quinam ex iis pro arcu deſcenſus accipi debeat; ſumo caſum quo $k = \frac{a}{8g}$, atque arcus aſcenſus $= \frac{4\sqrt{kb}}{e}$; ſeu eius abſciſſa $= \frac{8kb}{ae^2} = \frac{b}{g}e^{-2}$. Hoc autem caſu eſt $B = o$ atque abſciſſa arcus aſcenſus $= \frac{b}{g}e^{\frac{-a(\pi+D)}{2Bk}}$. Debet ergo eſſe $\frac{a(\pi+D)}{2Bk} = 2$ et $\pi + D = \frac{4Bk}{a} = o$. Eſt vero $\frac{4Bk}{a}$ tangens arcus $\pi + D$, et cum $\frac{4Bk}{a}$ ſit $= o$, debet $\pi + D$ eſſe $= o$. Ex quo intelligitur $\pi + D$ eſſe minimum arcum tangenti $\frac{4Bk}{a}$ reſpondentem. Dicatur ergo minimus arcus tangenti $\frac{4Bk}{a}$ reſpondens E, erit $D = E - \pi$. Quocirca in prima ſemioſcillatione erit abſciſſa arcus deſcenſus $= \frac{b}{g}e^{\frac{a(\pi-E)}{2Bk}} = \frac{MC^2}{2a}$, ideoque ipſe arcus $MC = e^{\frac{a(\pi-E)}{4Bk}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Ponatur $\frac{4Bk}{a}$ ſeu tangens arcus $E = \tau$, erit arcus deſcenſus primae ſemioſcillationis $= e^{\frac{\pi-E}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Arcus aſcenſus primae ſeu arcus deſcenſus ſecundae ſemioſcillationis $= e^{\frac{-E}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Atque arcus deſcenſus in ſemioſcillatione quae indicatur numero $n + 1$ erit $= e^{\frac{-E-(n+1)\pi}{\tau}}\sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui eſt ſimul arcus aſcenſus in ſemioſcillatione numero n indicata. Progreſſionis geometricae ergo, quam hi arcus aſcenſus conſtituunt, denominator eſt $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

579. Ex his etiam in qualibet ſemioſcillatione celeritas in puncto infimo C poteſt definiri. Sit enim in ſemioſcillatione, quae numero n indicatur, celeritas in C debita altitudini β, erit arcus aſcenſus $= e^{\frac{-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$, qui aequalis eſſe debet ipſi $e^{\frac{-E-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. Hinc fit $\sqrt{\beta} = e^{\frac{-(n-1)\pi}{\tau}} \sqrt{b}$. Celeritates ergo in puncto C in ſemioſcillationibus ſucceſſiuis progreſſionem geometricam quoque conſtituunt cuius denominator eſt $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$.

Corollarium 6.

580. Si n ponatur numerus negatiuus ſemioſcillationes, quae ante primam factae eſſe poſſent, cognoſcuntur. Vt in ſemioſcillatione primam praecedente arcus deſcenſus eſſe debuiſſet $= e^{\frac{2\pi-E}{\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}}$.

Corollarium 7.

581. Si in prima ſemioſcillatione deſcenſus fiat ex puncto cycloidis ſupremo A, erit arcus deſcenſus $= a$. Quare eſt $\sqrt{\frac{ag}{2b}} = e^{\frac{\pi-E}{\tau}}$ et celeritas in puncto infimo C ſeu $\sqrt{b}$ erit $e^{\frac{E-\pi}{\tau}} \sqrt{\frac{ga}{2}}$.

Corollarium 8.

582. Si reſiſtentia fere evaneſcat, ſeu k fuerit quantitas vehementer magna erit $B = \sqrt{\frac{ga}{2k}}$ et

M.E.C.D. 2017

$\tau = \frac{4\sqrt{gk}}{\sqrt{2a}} = \frac{2\sqrt{2gk}}{\sqrt{a}}$. Cum igitur sit τ valde magnum erit $E = \frac{\pi}{2}$, atque arcus descensus primae semioscillationis $= e^{\frac{\pi}{2\tau}} \sqrt{\frac{2ab}{g}} = (1 + \frac{\pi}{2\tau}) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$ et arcus ascensus $= (1 - \frac{\pi}{2\tau}) \sqrt{\frac{2ab}{g}}$.

Scholion 2.

583. Ex solutione huius propositionis inter cetera intelligi potest, quanta circumspectione saepe opus sit ad conclusiones ex aequationibus deducendas. Nam in casu $k > \frac{a}{8g}$, aequationes quas pro descensu et ascensu inuenimus ita sunt comparatae, vt ex iis sequi videatur arcum ascensus aequalem esse arcui descensus; nam facto $v = 0$ ex vtraque aequatione prodit $\frac{gs^2}{2ab} = (\frac{a - \sqrt{(a^2 - 8gak)}}{a + \sqrt{(a^2 - 8gak)}}) \frac{a}{\sqrt{(a^2 - 8gak)}}$. Atque hoc ita se quoque haberet, nisi descensus necessario faceret $b = 0$. Posito autem $b = 0$, nullus datur ascensus et aequatio pro descensu prorsus est immutanda. Quare nisi ex casu quo $k = \frac{a}{8g}$ aduertissemus b esse $= 0$, difficulter ex aequatione veritas cognosci potuisset. Idem quoque accidit, vbi in eadem hypothesi $k < \frac{a}{8g}$ descensu ex dato puncto facto celeritatem in puncto C inuestigauimus, posito enim $s = 0$, aequatio ad absurdum deduxit. Ita enim est comparata illa aequatio, vt facto $s = 0$ non ostendat esse quoque $v = 0$, etiamsi reuera sit $v = 0$; ii enim tantum termini sunt neglecti, in quibus reperiebatur s, cum reliqui v continentes eodem iure negligi

M.E.C.D. 2017

negligi debuiſſent. Inueniri ergo non poteſt eſſe $v=0$ ſi $s=0$, ſed quia ex aequatione abſurdum ſequitur, niſi eſſet $v=0$, ex hoc concludi poteſt eſſe $v=0$ ſi $s=0$. In aliis vero caſibus, in quibus abſurdum non tam facile perſpicitur, difficulter lapſus euitari poterit.

PROPOSITIO 66.
Theorema.

584. *In medio vniformi, quod reſiſtit in ſimplici celeritatum ratione, omnes deſcenſus ſuper cycloide* AMC *fiunt aequalibus temporibus: atque ſimiliter etiam omnes aſcenſus ſuper cycloide* CNB *aequalibus temporibus abſoluuntur; ſi quidem potentia ſollicitans fuerit vniformis et deorſum directa.*

Tab. XIII. Fig. 1.

Demonſtratio.

Pro deſcenſu ſi dicatur arcus $CM=s$ et altitudo debita celeritati in M, v, habetur iſta aequatio $dv=-\frac{gsds}{a}+\frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur $\sqrt{v}=u$, erit u vt ipſa celeritas in M, atque ob $dv=2udu$ habetur iſta aequatio $2udu=-\frac{gsds}{a}+\frac{uds}{\sqrt{k}}$, in qua u et s vbique eundem tenent dimenſionum numerum. Quare ſi ponatur initium deſcenſus in E et arcus $CE=f$, et integretur aequatio propoſita ita vt fiat $u=0$ poſito $s=f$, prodibit aequatio integralis in qua u, f et s vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt. Ex hac igitur aequa-

M.E.C.D. 2017

bitur u functioni vnius dimensionis ipsarum f et s. Quocirca elementum temporis $\frac{ds}{u}$ erit functio nullius dimensionis ipsarum f, s atque elementi ds. Eius ergo integrale ita acceptum vt euanescat posito $s = o$, erit functio quoque nullius dimensionis ipsarum f et s, et exhibebit tempus per arcum CM. In hac igitur functione si ponatur $s = f$, euanescet f vbique ex ea functione, aequabiturque tempus totius descensus per EC functioni ex quantitatibus constantibus g, a et k tantum compositae, in quam neque f neque alia quantitas punctum E respiciens ingredietur. Quamobrem tempus descensus per EC eadem exprimetur quantitate, vbicunque punctum E accipiatur, atque ideo omnes descensus aequalibus absoluentur temporibus. Si in formula tempus descensus exhibente ponatur $-\sqrt{k}$ loco $\sqrt{k}$ prodibit tempus ascensus in arcu CNB, quod propterea quoque erit constans, quantuscunque fuerit arcus ascensu percursus. Q. E. D.

Corollarium 1.

585. Quia u aequalis est functio vnius dimensionis ipsarum f et s aequabitur $\frac{u}{f}$ functioni nullius dimensionis ipsarum f et s. Quare si ponatur $s = nf$ aequabitur $\frac{u}{f}$ quantitati constanti, in qua non inerit f. In variis ergo descensibus celeritates in punctis homologis totorum arcuum, erunt ipsis arcubus f proportionales.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

586. Cum in descensu maxima celeritas sit vbi est $u = \frac{gs\sqrt{k}}{a}$, inuenietur punctum O seu arcus CO ex aequatione in qua f et s vbique eundem dimensionum numerum constituunt; ex qua ergo erit s seu CO ipsi f proportionalis. In pluribus ergo descensibus tam maximae celeritates ipsae, quam arcus CO arcubus descensuum totis erunt proportionales.

Corollarium 3.

587. Quia tempus per MC aequale est functioni nullius dimensionis ipsarum f et s; tempus quoque per EM aequabitur functioni nullius dimensionis ipsarum f et s, seu etiam ipsius f et arcus EM.

Corollarium 4.

588. Hinc consequitur non solum tempora integrorum descensuum, sed etiam tempora descensuum per partes similes arcuum totorum esse inter se aequalia. Similique modo hoc locum habet in ascensibus.

Corollarium 5.

589. Cum igitur tam omnes descensus sint isochroni quam omnes ascensus; etiam omnes semioscillationes aequalibus absoluentur temporibus. Atque in casu $k > \frac{a}{8g}$, quo corpus perpetuo oscil-

M.E.C.D. 2017

oſcillationes continuat, omnes abſoluentur temporibus aequalibus.

Corollarium 6.

590. Cyclois ergo, quae eſt curua tautochrona in vacuo, eandem proprietatem retinet in medio quod reſiſtit in ſimplici ratione celeritatum. Praeterea cyclois quoque tautochronismum obtinet in medio, cuius reſiſtentia eſt conſtans, ſeu momentis temporum, vt *Newtonus* loquitur, proportionalis. (570.)

Scholion 1.

591. Hunc triplicem cycloidis tautochronismum *Newtonus* quoque demonſtrauit in Princ. Phil. atque quod ad reſiſtentiam ipſis celeritatibus proportionalem attinet, ex hoc demonſtrationem formauit, quod in diuerſis deſcenſibus, ſi arcuum partes totis arcubus proportionales accipiantur, in iis locis celeritates ſint totis arcubus quoque proportionales. Nam ſi celeritates totis arcubus fuerint proportionales, ſi elementa quoque capiantur totis arcubus proportionalia, tempora per ea erunt inter ſe aequalia.

Scholion 2.

592. Etſi autem ex his appareat, tempora tam aſcenſuum quam deſcenſuum inter ſe eſſe aequalia, tamen determinari non poteſt, quantum ſit tempus ſiue deſcenſuum ſiue aſcenſuum neque etiam

M.E.C.D. 2017

etiam tempora descensuum et ascensuum inter se possunt comparari. Aequatio enim relationem inter s et u definiens ita est complicata, vt ex ea elementum temporis $\frac{ds}{u}$, per vnicam variabilem non possit exprimi. Praeterea oscillationes infinite paruae, quae ante in determinandis temporibus calculum valde facilem reddiderunt, in hac resistentiae hypothesi nihil adiuuant. Nam etiam si arcus totus descriptus ponatur infinite paruus, in aequatione $l\frac{\sqrt{2}ac^2\sqrt{k}}{\sqrt{(2au^2\sqrt{k}-aus+gss\sqrt{k})}} = \frac{a}{4Bk}$ A. $t.\frac{4Bks}{as-4au\sqrt{k}}$ quae ex superiori integrata oritur, ne vnicus terminus euanescit prae ceteris. Pendebit autem tempus ascensus a quantitatibus a, k et g, at quomodo ex his sit compositum non liquet. Interim tamen hoc certum est, quo maior sit g ceteris paribus, minus esse tempus, at crescente a tempus quoque crescere; k vero crescente diminui, quia resistentia fit minor. In hac igitur resistentiae hypothesi resistentia in motibus tardissimis non euanescit, quemadmodum in resistentia quadratis celeritatum proportionali. Ex quo consequi videtur, si resistentia in maiore quam duplicata celeritatum ratione crescat, in motibus tardissimis resistentiam negligi posse; at si resistentia fuerit in minore ratione, etiam in motibus tardissimis resistentiam considerari debere.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 67.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 1.

593. *In medio vniformi, quod reſiſtit in ratione multiplicata celeritatum, cuius exponens eſt* 2*m, determinare motum corporis ſuper curua* CMA, *in qua arcus quisque* CM *proportionalis eſt poteſtati abſciſſae* CP, *cuius exponens eſt* 1−m.

Solutio.

Poſitis abſciſſa $CP=x$ et arcu $CM=s$ erit $ds=\frac{a^m dx}{x^m}$. Sit celeritas in M debita altitudini v, erit reſiſtentia in $M=\frac{v^m}{k^m}$; atque ideo ſi corpus deſcendere ponatur ſuper arcu CM habebitur iſta aequatio $dv=-g\,dx+\frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Pro aſcenſu autem ſuper eadem curua inſeruit iſta aequatio: $dv=-g\,dx-\frac{a^m v^m dx}{k^m x^m}$. Vtraque vero aequatio ſeparationem admittet, ſi ponatur $v=tx$; prodibit enim pro deſcenſu $x\,dt=-t\,dx-g\,dx+\frac{a^m t^m dx}{k^m}$ ſeu $\frac{-k^m dt}{k^m(g+t)-a^m t^m}=\frac{dx}{x}$, atq; pro aſcenſu haec aequatio $\frac{-k^m dt}{k^m(g+t)+a^m t^m}=\frac{dx}{x}$. In quibus aequationibus variabiles t et x a ſe inuicem ſunt ſeparatae; ita vt

M.E.C.D. 2017

vt t per x ope quadraturarum poſſit determinari. Conſtans in integratione addenda definiri debet vel ex data celeritate in puncto C vel ex loco curuae in quo vel deſcenſus incipit vel aſcenſus finitur. Si ponatur abſciſſa toti arcui deſcenſus vel aſcenſus reſpondens f; aequalis erit v functioni vnius dimenſionis ipſarum f et x tam in deſcenſu quam aſcenſu propter aequationes differentiales homogeneas. Hanc ob rem $\sqrt{v}$ aequabitur functioni dimidiae dimenſionis ipſarum f et x. Tempus igitur deſcenſus per MC, quod eſt $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = a^m \int \frac{dx}{x^m \sqrt{v}}$ aequale erit functioni $\frac{1}{2} - m$ dimenſionum ipſarum f et x. Quia autem poſito $x = f$ prodit tempus totius deſcenſus vt $f^{\frac{1}{2}-m}$; cui etiam proportionale eſt tempus totius aſcenſus, ſi quidem f abſciſſam arcus totius aſcenſus deſignat. Si ponatur totus arcus vel deſcenſus vel aſcenſus $= A$, quia eſt A vt f^{1-m}, erit tempus totum vel aſcenſus vel deſcenſus vt $\frac{A}{f^{\frac{1}{2}}}$ vel vt $A^{\frac{1-2m}{2-2m}}$ Plurium ergo deſcenſuum tempora ſunt in ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata totorum arcuum deſcriptorum. Atque in eadem ratione ſunt quoque tempora aſcenſuum inter ſe; ſed tempora aſcenſuum et deſcenſuum inter ſe non comparantur. Q.E.I.

Corollarium I.

594. Quia celeritas ſeu $\sqrt{v}$ aequalis eſt functioni dimidiae dimenſionis ipſarum f et x; in

M.E.C.D. 2017

pluribus descensibus celeritates in puncto C acquisitae sunt in subduplicata ratione altitudinum, ex quibus corpus descendit. Atque altitudines, ad quas corpus ascendens pertingit, sunt in duplicata ratione celeritatum initialium in C.

Corollarium 2.

595. Cum tam tempora descensus quam ascensus sint vt $f\frac{1}{2}^{-m}$; omnes descensus aequalibus absoluentur temporibus, si fuerit $m=\frac{1}{2}$ seu resistentia ipsis celeritatibus proportionalis. Atque hac hypothesi pariter tempora ascensuum inter se erunt aequalia. Curua autem erit cyclois, vt ante ostendimus.

Corollarium 3.

596. Quia est $ds=\frac{a^m dx}{x^m}$ erit $s=\frac{a^m x^{1-m}}{1-m}$

Ex quo perspicitur, nisi sit $m<1$, curuam AMC fore negatiuam seu quod perinde est imaginariam. Semper enim curua maior esse debet quam abscissa.

Corollarium 4.

597. Praeterea semper debet esse $ds>dx$; quare quo hoc accidat si $x=0$ debet m esse numerus positiuus. Hinc nostra propositio requirit vt m inter limites 0 et 1 contineatur.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

598. In his caſibus maximus ipſius x valor erit a; ibique erit $ds = dx$, ſeu tangens verticalis. Hocque loco curua habebit cuſpidem, altius enim aſcendere nequit, quia ſi $x > a$, foret $ds < dx$, quod fieri nequit.

Corollarium 6.

599. Si m continetur intra limites 0 et 1, curua in C habebit tangentem horizontalem, atque radius oſculi in C erit $= \frac{s\,ds}{dx} = \frac{a^{2m} x^{1-2m}}{1-m}$. poſito $x = 0$. Quare radius oſculi in C erit infinite paruus ſi $m < \frac{1}{2}$ finitus ſi $m = \frac{1}{2}$ et infinite magnus ſi $m > \frac{1}{2}$.

Corollarium 7.

600. Tempora minimorum deſcenſuum et aſcenſuum ſunt infinite parua, ſi $m < \frac{1}{2}$, at finita ſi $m = \frac{1}{2}$. Infinite magna denique erunt, ſi $m > \frac{1}{2}$ Tenent ergo radiorum oſculi in infimo puncto C rationem.

Scholion.

601. Habemus hic ergo exempla curuarum pro reſiſtentia minorem quam duplicatam rationem celeritatum tenente, ſuper quibus motus corporis poteſt determinari. At ſi medium in ma-

M.E.C.D. 2017

iore quam duplicata ratione resistit, curua nusquam habebit tangentem horizontalem, atque ideo descensus et ascensus nunquam finiri possunt. Quo autem in exemplo appareat, qualis sit motus corporis in medio, quod in maiore quam duplicata ratione celeritatum resistit, inuestigare lubet motum corporis super cycloide saltem in medio, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum. Hanc vero resistentiae hypothesin prae aliis eligo, quia in ea celeritas commode per seriem potest definiri.

PROPOSITIO 68.

Problema.

Tab. XIII. Fig 1. 602. *In medio vniformi, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum, determinare tam descensum quam ascensum corporis quemcunque super cycloide* ACB.

Solutio.

Posita potentia vniformi corpus perpetuo deorsum trahente g, et abscissa $CP = x$, et arcu $CM = s$, erit ex natura cycloidis $dx = \frac{sds}{a}$. Sit celeritas in C debita altitudini b, et in M altitudini v; atque exponens resistentiae k, erit resistentia in $M = \frac{v^2}{k^2}$. Pro descensu ergo habebitur haec aequatio $dv = -g\,dx + \frac{v^2 ds}{k^2} = -\frac{gsds}{a} + \frac{v^2 ds}{k^2}$; at pro ascensu ista: $dv = -\frac{gsds}{a} - \frac{v^2 ds}{k^2}$. Pro descensu po-

M.E.C.D. 2017

ponatur $v = \frac{-k^2 dz}{z ds}$; erit $dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$ posito ds constante. Quamobrem habebitur $k^2 ddz = \frac{gzsds^2}{a}$; quae aequatio in seriem conuersa dat $z = f + hs + \frac{fgs^3}{2.3.ak^2} + \frac{hgs^4}{3\ 4.ak^2} + \frac{fg^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} + \frac{hg^2s^7}{3.4.6.7a^2k^4} + \frac{fg^3s^9}{2.3.5.6.8.9a^3k^6}$ + etc. Ad constantes f et h determinandas quaeratur valor ipsius v posito $s = a$; erit ergo $b = -\frac{k^2 h}{f}$. Et quia si $s = o$ est $dv = \frac{v^2 ds}{k^2} = \frac{b^2 ds}{k^2}$, propter $dv = \frac{-k^2 ddz}{z ds} + \frac{k^2 dz^2}{z^2 ds}$, erit $\frac{b^2}{k^2} = \frac{k^2 h^2}{ff}$ quae aequatio cum illa congruit erit ergo $h = -\frac{bf}{k^2}$. Hoc substituto erit

$$v = \frac{b - \frac{gs^2}{2a} + \frac{bgs^3}{3ak^2} - \frac{g^2s^5}{2.3.5a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3\ 4.6\ a^2k^4} \text{ etc.}}{1 - \frac{bs}{k^2} + \frac{gs^2}{2.3ak^2} - \frac{bgs^4}{3.4.ak^4} + \frac{g^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} \text{ etc.}}$$

Pro ascensu vero posito $-s$ loco s habebitur

$$v = \frac{b - \frac{gs^2}{2a} - \frac{bgs^3}{3ak^2} + \frac{g^2s^5}{2.3.5a^2k^2} + \frac{bg^2s^6}{3.4.6a^2k^4} - \text{etc.}}{1 + \frac{bs}{k^2} - \frac{gs^3}{2.3ak^2} - \frac{bgs^4}{3.4ak^4} + \frac{g^2s^6}{2.3.5.6a^2k^4} + \text{etc.}}$$

Ex his aequationibus totus arcus vel descensus vel ascensus inuenitur, si ponatur $v = o$, atque valor ipsius s inuestigatur. Vt si k fuerit quantitas valde magna erit arcus descensus qui sit $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}}$ + etc. At sequens arcus ascensus qui sit F erit $= \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{8ab^2}{15gk^2} + \frac{17a^2b^4\sqrt{g}}{25g^2k^4\sqrt{2ab}} -$ etc. Q. E. I.

Corollarium 1.

603. Si ergo resistentia est quam minima erit summa arcuum descensus et ascensus seu arcus

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

eus vna semioscillatione descriptus, i. e. $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$, quam proxime.

Corollarium 2.

604. Differentia autem inter arcum ascensus et descensus scilicet $E-F=\frac{16ab^2}{15gk^2}-\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Quare differentia inter arcuum descensus et ascensus est vt biquadratum summae arcuum.

Scholion 1.

605. Ex his perspicitur in medio rarissimo, quod resistit in quadruplicata ratione celeritatum differentiam inter arcus ascensus et descensus proportionalem esse biquadrato summae arcuum, seu $E-F=\frac{g(E+F)^4}{60ak^2}$. Supra autem vidimus in medio rarissimo, quod in duplicata ratione celeritatum resistit, esse arcum descensus $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{2ab}{3gk}$, et arcum ascensus $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{2ab}{3gk}$; hinc erit $E+F=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ et $E-F=\frac{4ab}{3gk}=\frac{(E+F)^2}{6k}$ (557.). Quare in hac resistentia est differentia inter arcus ascensus et descensus vt quadratum summae arcuum. Atque in medio quod in simplici ratione celeritatum resistit, si fuerit rarissimum est $E=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}+\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ et $F=\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}-\frac{\pi a\sqrt{b}}{4g\sqrt{k}}$ (582). Quare erit $E-F=\frac{\pi a\sqrt{b}}{2g\sqrt{k}}=\frac{\pi(E+F)\sqrt{a}}{4\sqrt{2kg}}$. Seu differentia inter arcus descensus et ascensus est ipsi summae arcuum proportionalis.

Ex

M.E.C.D. 2017

Ex quo conſequi videtur in medio quocunque rariſſimo, quod reſiſtit in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, differentiam inter arcus aſcenſus et deſcenſus ſuper cycloide proportionalem eſſe poteſtati ſummae arcuum aſcenſus et deſcenſus, cuius exponens ſit $2m$. Atque in hac reſiſtentiae hypotheſi coniectare licet, fore arcum deſcenſus $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2.4.6\text{----}2m.ab^m}{3.5.7\text{-----}(2m+1)gk^m}$ et arcum aſcenſut $F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - \frac{2.4.6\text{-----}2m.ab^m}{3.5.7\text{---}(2m+1)gk^m}$. Vnde fit $E-F = \frac{1.2.3\text{-----}m.g^{m-1}(E+F)^{2m}}{3.5.7\text{----}(2m+1)2^{2m-1}a^{m-1}k^m}$. Quoties ergo m eſt numerus integer ſeu $2m$ numerus par, aſſignari potéſt aequatio inter $E-F$ et $E+F$: at ſi m fuerit numerus fractus valor fractionis $\frac{1.2.3\text{----}m}{3.5.7\text{----}(2m+1)}$ per methodum interpolationem, quam exhibui in Comment. Acad. Petrop. A. 1730, inueſtigari poteſt. Ex qua quidem conſtat ſi $2m$ fuerit numerus impar valorem huius fractionis inuoluere quadraturam circuli, quemadmodum etiam in caſu, quo $2m = 1$ reperimus.

Scholion 2.

606. Quod quidem ad ipſam propoſitionem attinet, eſſe differentiam inter arcus deſcenſus et aſcenſus ſuper cycloide in totuplicata ratione ſummae arcuum, in quotuplicata ratione ce-

M.E.C.D. 2017

leritatum sit resistentia, si quidem fuerit minima *Newtonus* in Princ. demonstrauit. Atque demonstrationem etiam ex ipsa aequatione $dv = -\frac{gsdx}{a} \pm \frac{v^m ds}{k^m}$ deriuare licet. Ponatur enim $v = b - \frac{gs^2}{2a} + Q$, vbi Q erit quantitas valde parua prae b et $\frac{gs^2}{2a}$. Hanc ob rem habebitur $-\frac{gsds}{a} + dQ = \frac{-gsds}{a} + \frac{(b-\frac{gs^2}{2a})^m ds}{k^m}$ pro descensu seu $Q = \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$ hoc integrali ita accepto vt euanescat posito $s = 0$. Pro descensu ergo erit $v = b - \frac{gs^2}{2a} + \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$ et pro ascensu $v = b - \frac{gs^2}{2a} - \int \frac{(2ab-gs^2)^m ds}{(2ak)^m}$.

Ponatur $v = 0$, et quia tunc proxime est $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$ ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + q$, erit $0 = \frac{-gq\sqrt{2ab}}{a\sqrt{g}} + \int \frac{(2ab-gss)^m ds}{(2ak)^m}$, atque $q = \sqrt{\frac{a}{2gb}} \int \frac{(2ab-gss)^m ds}{(2ak)^m}$ siquidem post integrationem ponatur $s = \sqrt{\frac{2ab}{g}}$. At quia in hoc ipsius q valore ipsarum $\sqrt{b}$ et s sunt $2m$ dimensiones habebit q huiusmodi formam Nb^m. Quocirca erit arcus descensus $E = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} + Nb^m$ et arcus ascensus $F = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}} - Nb^m$. Hinc ergo habebitur $E - F = 2Nb^m = \frac{Ng^m (E+F)^{2m}}{2^{3m-1} a^m}$. At numerus N obtinebitur ex formula $\sqrt{\frac{a}{2gb}} \int (\frac{2ab-gss}{2abk})^m ds$ si

M.E.C.D. 2017

ſi poſt integrationem ponatur $s = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{g}}$. Atque haec eſt demonſtratio illius ipſius, quod in praecedente ſcholio ex inductione deriuabamus. Erit enim N numerus rationalis, quoties m fuerit numerus integer affirmatiuus; at ſi $2m$ fuerit numerus integer impar inuentio numeri N a quadratura circuli pendebit. Generaliter autem valor ipſius q cum hac expreſſione $\frac{2.4.6 \cdots 2m\, ab^m}{3.5.7 \cdots (2m+1)gk^m}$ congruit.

PROPOSITIO 69.

Problema.

607. *In medio, quo reſiſtit in quadruplicata ratione celeritatum, ſi detur corporis ſuper curua* AMC *ex dato puncto* A. *deſcendentis in ſingulis locis celeritas, inuenire celeritatem eiusdem corporis deſcenſum in quocunque alio puncto* E *incipientis.* Tab. XIII. Fig 2.

Solutio.

Poſito CP $= x$ et CM $= s$, ſit corporis ex A delapſi celeritas in M debita altitudini u, quae quantitas u ergo per hyp. datur per x et s. Iam ſi corpus deſcenſum ex quocunque puncto E incipiat, ſit celeritas in M debita altitudini v. Aequatio vero motum determinans erit $dv = -g\,dx + \frac{v^2\,ds}{k^2}$, quae dat valorem ipſius v vbicunque deſcenſus inceperit; erit ergo etiam $du = -g\,dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{u^2ds}{k^2}$ Ponatur $v=u-q$, erit $du-dq=-gdx+\frac{u^2ds}{k^2}-\frac{2quds}{k^2}+\frac{q^2ds}{k^2}$; ex qua aequatione propter $du=-gdx+\frac{u^2ds}{k^2}$ oritur $-dq=-\frac{2quds}{k^2}+\frac{q^2ds}{k^2}$ seu $\frac{dq}{q^2}+\frac{2uds}{k^2q}=\frac{ds}{k^2}$, quae multiplicata per $e^{\frac{2\int uds}{k^2}}$ dat hanc integralem $e^{\frac{2\int uds}{k^2}}=cq+q\int\frac{e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds}{k^2}$, ex qua prodit $q=\frac{k^2e^{\frac{2\int uds}{k^2}}}{c+\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds}$. Quocirca erit $v=u-\frac{k^2e^{\frac{2\int uds}{k^2}}}{c+\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds}$, in qua aequatione integralia $\int\frac{uds}{k^2}$ et $\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds$ ita sint accepta vt euanescant posito $s=0$. Sit nunc altitudo celeritati in C debita $=a$, si descensus ex A fiat; at altitudo celeritati in C debita si descensus ex E fit $=b$; erit $b=a-\frac{k^2}{c}$. Ex quo habebitur $v=u-\frac{(a-b)k^2e^{\frac{2\int uds}{k^2}}}{k^2+(a-b)\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds}$. Data ergo celeritate in C nempe $=b$ inuenietur punctum E, in quo descensus incepit ex hac aequatione $u=\frac{(a-b)k^2e^{\frac{2\int uds}{k^2}}}{k^2+(a-b)\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}}ds}$, ex qua valor ipsius s dabit arcum C M E. Quia igitur datur u per s ex hac aequatione celeritas corporis ex quocunque

M.E.C.D. 2017

que alio puncto delapsi super curua AMC inuenietur. Q. E. I.

Corollarium 1.

608. Si valor ipsius v ita immutetur vt tam in numeratore quam in denominatore b sine co-efficiente appareat, prodibit $v = \frac{(us e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}})}{\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}$

$\left(b-a+\frac{k^2 u}{k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} - u\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}\right)$

$\left(b-a-\frac{k^2}{\int e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds}\right)$. Atque erit $v = 0$ si est $a + \frac{k^2 u}{u e^{\frac{2\int u ds}{k^2}} ds - k^2 e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}} = b$.

Corollarium 2.

609. Quia est $du - \frac{u^2 ds}{k^2} = -g dx$, erit huius aequationis per $e^{\frac{2\int u ds}{k^2}}$ multiplicatae integralis haec $u = a e^{\frac{\int u ds}{k^2}} - g e^{\frac{\int u ds}{k^2}} \int e^{\frac{-\int u ds}{k^2}} dx$; integralibus ita sumtis vt euanescant posito s vel $x = 0$. Vel etiam est $\frac{du}{u} + \frac{g dx}{u} = \frac{u ds}{k^2}$, atque hinc $\int \frac{u ds}{k^2} = l\frac{u}{a} + \int \frac{g dx}{u}$. Quare erit $e^{\frac{\int u ds}{k^2}} = \frac{e^{\frac{\int g dx}{u}} u}{a}$; vnde dx loco ds in aequatione superiore potest introduci.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 3.

610. Si resistentia fuerit quam minima, euanescet $\int e^{\frac{2\int uds}{k^2}} ds$ prae k^2; et ideo erit $v = u - (a-b) e^{\frac{2\int uds}{k^2}} = u - (a-b)(1 + 2\int \frac{uds}{k^2})$, propter k quantitatem maximam. Quamobrem erit $v = b + \frac{2b\int uds}{k^2} - a - 2\int \frac{uds}{k^2} + u = (1 + \frac{2\int uds}{k^2})(b - a + \frac{u}{1 + \frac{2\int uds}{k^2}})$.

Corollarium 4.

611. Cum autem sit $\sqrt{(1 + \frac{2\int uds}{k^2})} = 1 + \frac{\int uds}{k^2}$ erit elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + \int uds)\sqrt{(b - a + \frac{k^2 u}{k^2 + 2\int uds})}}$. Per aequationem autem $du = -g\,dx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ est quam proxime $u = a - gx + \int \frac{(a-gx)^2 ds}{k^2}$, vnde erit $\int uds = \int (a-gx)\,ds$, atque $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + \int (a-gx)ds)\sqrt{(b - a + \frac{k^2 a - gk^2 x + \int (a-gx)^2 ds}{k^2 + 2\int (a-gx)\,ds})}} = \frac{k^2 ds}{(k^2 + \int (a-gx)\,ds)\sqrt{(b - \frac{gk^2 x - \int (a^2 - g^2 x^2) ds}{k^2 + 2\int (a-gx)\,ds})}}$.

Scholion.

612. Quemadmodum hypothesis resistentiae quadratis celeritatum proportionalis prae aliis hypothesibus excepta ea, quae est constans, hanc habet praerogatiuam, vt corporis super quacunque curua

M.E.C.D. 2017

curua moti celeritas in omnibus locis ex aequatione curuae poſſit definiri; ita haec reſiſtentiae hypotheſis in hoc prae reliquis excellit, quod ex dato vnico deſcenſu vel aſcenſu, ſimul omnes deſcenſus et aſcenſus poſſint determinari. In aliis enim reſiſtentiis operatio, qua hic vſi ſumus, non ſuccedit, neque ad aequationem deducit, in in qua indeterminatae a ſe inuicem ſeparari poſſunt. Hanc ob rem vti reſiſtentia conſtans eſt ſimpliciſſima, eamque ſequitur ea, quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, ita poſt has pro ſimpliciſſima reſiſtentiae hypotheſi eſt habenda ea, quae fit in quadruplicata ratione celeritatum. Videtur quidem ex his parum commodi ad motum in hac reſiſtentiae hypotheſi definiendum obtineri, quia vnus deſcenſus tanquam datus accipitur, qui autem inuentu aeque eſt difficilis ac quisque alius. At ſi plures deſcenſus conſiderantur, et inter ſe comparantur, aequatio $dv = -gdx + \frac{v^2 ds}{k^2}$ reipſa tres variabiles implicat, nempe praeter v et s ſeu x celeritatem in puncto C, quae in variis deſcenſibus variatur. Quare cum reſolutionem huius aequationis ad hanc aequationem $du = -gdx + \frac{u^2 ds}{k^2}$ reduxerimus, quae ad vnicum deſcenſum ſpectat, illud incommodum trium variabilium hoc modo tollitur. Praeterea ope iſtius artificii plures deſcenſus inter ſe comparari poſſunt, quod in aliis reſiſtentiae hypotheſibus ne quidem fieri poteſt. Atque hinc etiam multa proble-

M.E.C.D. 2017

blemata inuersa pro hac resistentiae hypothesi resolu possunt, quae in aliis omnino tractari nequeunt.

PROPOSITIO 70.

Problema.

Tab. XIII. Fig. 3.

613. *Si resistentia fuerit quam minima respectu potentiae sollicitantis absolutae, et proportionalis potestati cuicunque celeritatum determinare motum corporis super quacunque curua* AM.

Solutio.

Descendat corpus super curua AM, descensus initio in A existente; ponatur super axe verticali abscissa AP $=x$, arcus AM $=s$; et potentia perpetuo deorsum trahens $=g$. Sit celeritas in M debita altitudini v et resistentia ibidem $=\frac{v^m}{k^m}$, ita vt resistentia sit proportionalis potestati exponentis $2m$ celeritatum. His positis erit $dv=gdx-\frac{v^m ds}{k^m}$; at quia resistentia ponitur valde parua, erit terminus $\frac{v^m ds}{k^m}$ vehementer exiguus, atque propterea $v=gx$ quam proxime. Substituatur gx loco v in termino $\frac{v^m ds}{k^m}$ erit $v=gx-\frac{g^m}{k^m}\int x^m ds$ at-

M.E.C.D. 2017

atque ſimili modo adhuc propius $v = gx - \frac{g^m}{k^m}\int x^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}} - \int x^{m-1} ds \int x^m ds$. Quae integralia ita ſunt accipienda vt euaneſcant poſito $x = o$. Hinc ergo erit $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{gx}} + \frac{g^m \int x^m ds}{2k^m g x \sqrt{gx}} - \frac{mg^{2m} \int x^{m-1} ds \int x^m ds}{2k^{2m} g^2 x \sqrt{gx}} + \frac{3g^{2m} (\int x^m ds)^2}{8k^{2m} g^2 x^2 \sqrt{gx}}$. Atque tempus deſcenſus per AM erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{gx}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int x^{-\frac{3}{2}} ds \int x^m ds$. q. pr.

At ſi deſcenſus ad fixum punctum C vsque deſideretur, initio deſcenſus ex puncto E facto, ponatur puncti E ſupra C altitudo verticalis $CD = a$; abſciſſa $CP = x$ et arcus $CM = s$; quibus poſitis hic caſus ad ſuperiorem reducetur, ſi ibi loco x ponatur $a - x$ et $-ds$ loco ds. Quare ſi altitudo celeritati in M debita vocetur v, erit $v = g(a-x) + \frac{g^m}{k^m}\int (a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}} \int (a-x)^{m-1} ds \int (a-x)^m ds$; q.p. Haec vero integralia ita ſunt accipienda vt euaneſcant poſito $x = a$. Atque tempus per arcum EM eſt $= -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$. q. pr. vbi iterum omnia integralia ita ſunt capienda, vt euaneſcant poſito $x = a$. Simili modo ſi corpus ex C ſuper curua CME aſcendat tanta celeritate, qua ad

Fig. 2.

M.E.C.D. 2017

punctum E vsque pertingere possit, eaedem aequationes locum habebunt si modo loco k^m ponatur $-k^m$. Hanc ob rem erit $v = g(a-x) - \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds + \frac{mg^{2m-1}}{k^{2m}}\int(a-x)^{m-1}ds\int(a-x)^m ds$, q.p.

atque tempus ascensus per $ME = -\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m}\int(a-x)^{-\frac{3}{2}}ds\int(a-x)^m ds$ q. pr. omnibus his integralibus quoque ita acceptis, vt euanescant posito $x=a$. Atque hoc modo tam descensus corporis super curua quacunque, quam oscillationes super curua idonea in medio rarissimo poterunt determinari. Q. E. I.

Corollarium 1.

Fig. 3. 614. Apparet ex his, quod quidem per se intelligitur, si corpus in medio resistente super curua AM descendat, fore celeritatem in M minorem, quam si corpus in vacuo super eadem curua descendisset. Atque tempus in medio resistente maius est, quam tempus descensus per AM in vacuo.

Corollarium 2.

Fig. 2. 615. Altitudo celeritati in puncto infimo C debita prodibit, si in expressione ipsius v ponatur $x = o$. Hoc autem facto fit $v = ga + \frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$ q. pr. posito post integrationem supra

M.E.C.D. 2017

pra praescripto modo peractam $x=o$. At si $(a-x)^m ds$ ita capiatur vt euanescat posito $x=o$, tum erit in puncto C, $v=ga-\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, si post integrationem ponatur $x=a$. Id quod ad descensum pertinet.

Corollarium 3.

616. At pro ascensu celeritas corporis in C qua ad E vsque ascendere valet debita erit altitudini $=ga+\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, si hoc integrale ita accipiatur vt euanescat posito $x=o$, atque post integrationem ponatur $x=a$.

Corollarium 4.

617. Sit altitudo debita celeritati in $C=b$ quam iam descendendo per EMC acquisiuit, et qua iterum super eadem curua ascendet; ponatur altitudo DC descensu percursa vt ante a, et altitudo ad quam quam ascensu pertinget $a-d$, erit d quantitas valde parua; atque ideo $b=ga-\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds=ga-gd+\frac{g^m}{k^m}\int(a-x)^m ds$, et $d=\frac{2g^{m-1}}{k^m}\int(a-x)^m ds$. Vel etiam $d=\frac{2ga-2b}{g}$.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

618. Quia tempus descensus per EM est $=-\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$ his integralibus ita acceptis vt euanescant posito $x=a$; erit tempus per $CM=\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} - \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$, si integralia ita accipiantur vt euanescant posito $x=o$. Atque simili modo in ascensu erit tempus per $CM=\int \frac{ds}{\sqrt{g(a-x)}} + \frac{g^{m-\frac{3}{2}}}{2k^m} \int (a-x)^{-\frac{3}{2}} ds \int (a-x)^m ds$.

Corollarium 6.

619. Integrum ergo tempus vel descensus vel ascensus per CME habebitur, si in his posterioribus formulis ponatur post integrationem $x=a$.

Scholion.

620. Satis iam expositis iis, quae ad motum corporis super data curua inueniendum pertinent, progredior ad quaestiones inuersas, in quibus ex aliis datis, quae incognita sunt, inuestigantur. Et primum quidem occurrunt huiusmodi problemata, in quibus lex accelerationis seu scala celeritatum datur, et curua quaeritur, quae motum illi scalae conuenientem producat in medio

M.E.C.D. 2017

dio quocunque reſiſtente; potentiam vero abſolutam vt hactenus conſtantem et deorſum directam aſſumemus.

PROPOSITIO 71.

Problema.

621. *In medio, quod reſiſtit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, inuenire curuam* AM, *ſuper qua corpus ita deſcendat, vt in ſingulis punctis* M *celeritatem habeat debitam altitudini, quae aequalis ſit applicatae reſpondenti* PL *datae curuae* BL. Tab. XIII. Fig. 4.

Solutio.

Poſita AP$=x$ et PL$=v$ dabitur aequatio inter x et v propter curuam BL datam. Iam ſit arcus AM$=s$, et exponens rationis multiplicatae celeritatum $2m$, cui reſiſtentia eſt proportionalis; quibus poſitis erit $dv=g\,dx-\frac{v^m\,ds}{k^m}$; denotante g potentiam vniformem deorſum trahentem et k exponentem reſiſtentiae. Ex hac igitur aequatione eſt $ds=\frac{g\,k^m\,dx-k^m\,dv}{v^m}$, quae quia v per x dari ponitur, variabiles habet a ſe inuicem ſeparatas, atque idcirco ſufficit ad curuam quaeſitam AM conſtruendam. At quia ds ſemper maius eſſe debet quam dx; ne curua AM fiat imaginaria, oportet vt ſit $g\,k^m\,dx-k^m\,dv>v^m\,dx$, ſeu

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$dx > \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Namque vbi eſt $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$ ibi curuae AM tangens ſit verticalis; et vbi $dx < \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$, ibi curua AM omnino partem habere nequit. Q. E. I.

Corollarium 1.

622. Cum vbi curuae BL tangens eſt verticalis, ſit $dv = o$, erit in loco reſpondente curuae AL, $ds = \frac{gk^m dx}{v^m}$, in quo puncto corpus deſcendens maximam vel minimam habebit celeritatem. Ne igitur hoc curuae AL punctum ſit imaginarium, oportet ſit $gk^m > v^m$, ſeu $v < k\sqrt[m]{g}$.

Corollarium 2.

623. Si curua BL alicubi incidat in axem AP, vt ibi ſit $v = o$; erit in loco curuae AM reſpondente $ds = \infty$; ſi quidem m fuerit numerus affirmatiuus. Hoc ergo loco curua AM habebit tangentem horizontalem, in quam curua deſinet.

Corollarium 3.

624. Habeat curua AM alicubi tangentem horizontale, m euaneſcet illo loco dx prae ds. Quamobrem erit $ds = \frac{-k^m dv}{v^m}$. Ex quo apparet in

M.E.C.D. 2017

in loco curuae BL respondente applicatas decrescere debere, atque ibi curuae BL tangentem fore horizontalem, quia dv infinities quoque maius erit quam dx.

Corollarium 4.

625. Curuae AM tangens, vt vidimus, est verticalis, vbi est $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Quo igitur curua in initio A, vbi celeritas sit nulla, habeat tangentem verticalem, oportet vt ibi sit $dv = gdx$, seu $v = gx$. Hoc ergo casu tangens anguli, quem curua BL in A cum AP constituet, erit $= g$.

Corollarium 5.

626. Cum sit $ds = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^m}$, erit elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{gk^m dx - k^m dv}{v^{m+\frac{1}{2}}}$. Quocirca tempus descensus per AM erit $= \frac{2k^m}{(2m-1)v^{m-\frac{1}{2}}} + gk^m \int \frac{dx}{v^{m+\frac{1}{2}}}$.

Scholion I.

627. Si curua BL super AB ascenderet, tum curua AM quoque sursum vergeret; atque loco descensus problemati satisfaceret ascensus super

M.E.C.D. 2017

per illa curua. Fit enim hoc casu abscissa x negatiua ideoque et eius elementum dx; quamobrem habebitur ista aequatio $ds = \frac{-g k^m dx - k^m dv}{v^m}$

quae oritur ex aequatione $dv = -g dx - \frac{v^m ds}{k^m}$ naturam ascensus continente. Simili modo si curua BL ita est comparata, vt rursus ascendat; tum curua AM quoque sursum dirigetur; et partim descensu partim ascensu conditioni praescriptae satisfaciet.

Exemplum I.

628. Si quaeratur curua AM super qua corpus aequabiliter moueatur celeritate scilicet altitudini b debita; erit BL linea recta parallela axi AP atque $v = b$. Hanc ob rem erit $ds = \frac{g k^m dx}{b^m}$. Vnde sequitur lineam AM fore rectam inclinatam, et cosinum anguli, quem cum verticali AP constituet fore $= \frac{b^m}{g k^m}$ posito 1 pro sinu toto. Quo igitur maior fuerit b, seu celeritas, qua corpus ferri debet, eo minor erit angulus cum verticali AP, atque si fuerit $b^m = g k^m$, tum linea quaesita ipsa erit verticalis AP. At si b^m maior ponereturquam $g k^m$, tum solutio perduceret ad imaginarium, ad angulum scilicet, cuius cosinus esset maior

M.E.C.D. 2017

maior ſinu toto. Tempus porro, quo lineae portio AM deſcenſu abſoluitur, erit $= \frac{g k^m x}{b^m \sqrt{b}} = \frac{s}{\sqrt{b}}$.

Exemplum 2.

629. Quaeratur curua AM ſuper qua corpus ita deſcendat, vt eius celeritas in ſingulis punctis ſit vt radix quadrata ex altitudine AP, quae eſt proprietas omni motui in vacuo competens. Erit igitur $v = \alpha x$, et $dv = \alpha dx$; hisque ſubſtitutis habebitur $ds = \frac{g k^m dx - \alpha k^m dx}{\alpha^m x^m}$ et $s = \frac{(g-\alpha) k^m x^{1-m}}{(1-m)\alpha^m}$, vbi conſtantis additione non eſt opus ſi $m < 1$. At ſi $m = 1$. curua eſt tractoria ſuper linea horizontali per A transeunte deſcripta; ſuper qua corpus ab infinita diſtantia, concurſu ſcilicet tractoriae cum aſymtoto, deſcenſum incipit. Simili modo ſi $m > 1$, curua formam habebit tractoriae ſimilem. Semper autem eſſe debet $\alpha < g$; ex quo perſpicitur corpus in medio reſiſtente non tantam acquirere poſſe celeritatem quantam in vacuo. Deinde quia ds maius eſſe debet quam dx, erit $(g-\alpha) k^m > \alpha^m x^m$; corpus igitur profundius deſcendere nequit, quam per altitudinem $= \frac{k}{\alpha}\sqrt[m]{(g-\alpha)}$; quo loco curuae tangens erit verticalis, curuaque punctum reuerſionis habebit. Tempus autem, quo corpus per arcum

M.E.C.D. 2017

AM descendit est $= \int \frac{ds}{V\alpha x} = \frac{2(g-\alpha)k^m x^{\frac{1}{2}-m}}{(1-2m)k^{m+\frac{1}{2}}}$.

Quare nisi sit $m < \frac{1}{2}$ tempus non potest esse finitum; sed est infinite magnum; nam si $m = \frac{1}{2}$ curua erit cyclois deorsum versa, super cuius vertice A corpus perpetuo permanebit.

Corollarium 6.

630. Perspicitur ergo in medio resistente motum non vltra datum punctum posse continuari, ita vt celeritates semper sint in subduplicata ratione altitudinum.

Corollarium 7.

631. Ex his apparet omnes curuas hoc modo inuentas habere in A tangentem horizontalem. Quamdiu ergo radius osculi in A est finitae magnitudinis, corpus nunquam descendet. At si radius osculi fit infinite paruus, quod euenit si $m < \frac{1}{2}$, tum corpus descendere poterit; id quod ex eo, quod tempus fit finitum, intelligitur.

Scholion 2.

632. Si corpus ex A descensum incipiat, atque curuae AM in A tangens non fuerit horizontalis, tum ipso motus initio resistentia est nulla, erit ergo ibi $dv = g\,dx$. Quamobrem quo loco AM curua prodeat non habens in A tangentem

M.E.C.D. 2017

tem horizontalem, curua BL, quae in A conueniet cum AP, ita debet esse comparata, vt in ipso initio sit $v = gx$; seu tangens curuae BL in A cum axe AP angulum constituere debet, cuius tangens sit $= g$; alioquin enim curua AM non angulum acutum cum AP conficeret. Magis autem descendendo semper esse debet $v < gx$, in medio enim resistente celeritas ex quacunque altitudine acquisita minor est celeritate, quae in vacuo ex eadem altitudine acquiritur. Porro in medio resistente corpus maiorem celeritatem acquirere non potest, quam si per lineam verticalem delaberetur, quia enim linea verticalis est breuissima, et citissime descensu absoluitur, corpus quam minime resistentiae actioni est expositum. Quamobrem in medio resistente curua BL ita debet esse comparata, vt v vbique sit minor, quam altitudo debita celeritati, quae a corpore in eodem medio resistente per AP cadendo acquiritur. Vbi enim v hanc altitudinem superat, ibi curua AM fit imaginaria.

Scholion 3.

633. Simili modo res se habet si pro ascensu detur curua BLD, cuius applicatae PL sint altitudines debitae celeritatibus corporis ascendentis super curua inuenienda AME in punctis M. Dictis enim $AP = x$; $PL = v$ et $AM = s$, erit $ds = \frac{-gk^m dx - k^m dv}{v^m}$. Tab. XIII. Fig. 5.

Ne igitur ds sit negatiuum,

M.E.C.D. 2017

oportet, vt dv habeat valorem negatiuum, i. e. vt curua BL continuo ad axem AD conuergat. Deinde etiam $-dv$ maius esse debet quam gdx seu tangens curuae BL vbique cum axe AP maiorem angulum constituere debet, quam est is, cuius tangens est $=g$. Neque vero hoc sufficit, sed praeterea $-dv-gdx$ maius esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$; seu $-dv > \frac{(gk^m+v^m)dx}{k^m}$, siue differentia inter $-dv$ et gdx maior esse debet quam $\frac{v^m dx}{k^m}$. Haec postrema conditio huc redit, vt PL sit minor, quam altitudo debita celeritati, quam corpus in P haberet, si ex A celeritate alt. AB debita, per AP ascendisset. In ascensu enim per lineam verticalem corpus pro ratione altitudinis percursae minimum celeritatis detrimentum a resistentia patitur. In ipso autem puncto D, angulus ADB tantus esse debet vt eius tangens sit $=g$; quia prope punctum E, in quo celeritas est nulla, resistentiae effectus euanescit: sin vero iste angulus esset maior, curua AME in E tangentem haberet horizontalem, vti in praeced. scholio quoque de descensu monuimus.

PROPOSITIO 72.
Problema.

Tab. XIII. Fig. 6.

634. *Si detur curua* AM *super qua corpus in vacuo moueatur; inuenire curuam* am, *super qua corpus*

pus in medio reſiſtente ita deſcendat, vt celeritas in a *aequalis ſit celeritati in* A, *et ſumtis arcubs* A M *et* a m *aequalibus, vt celeritates in ſingulis punctis* M *et* m *ſint quoque aequales.*

Solutio.

Ductis axibus verticalibus A P et *ap*, et horizontalibus M P, *mp*; ſit A M $=$ *am* $=$ *s*; A P $=$ *t*, et *ap* $=$ *x*; propter curuam A M datam dabitur aequatio inter *s* et *t*. Iam ſint celeritates in punctis A et *a* debitae altitudini *b*, et celeritates in M et *m* debitae altitudini *v*. Sit potentia abſoluta deorſum ſollicitans *g*, et reſiſtentia vt poteſtas exponentis 2*m* celeritatum. His poſitis erit pro motu in vacuo ſuper curua A M, $dv = -g\,dt$, ſeu $v = b - gt$; et pro deſcenſu in medio reſiſtente ſuper curua *ma* erit $dv = -g\,dx + \frac{v^m\,ds}{k^m}$; in qua aequatione ſi loco *dv* et *v* ſubſtituantur valores ex priori aequatione inuenti, prodibit $-g\,dt = -g\,dx + \frac{(b-gt)^m\,ds}{k^m}$; ſeu $dx = dt + \frac{(b-gt)^m\,ds}{g\,k^m}$. Quia autem datur aequatio inter *t* et *s*; ſi loco *t* eius valor in *s* ſubſtituatur, habebitur aequatio inter *x* et *s* pro curua quaeſita *am*. Q. E. I.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

635. Si in curua AM punctum B fuerit initium descensus, ideoque eius altitudo supra A$=\frac{b}{g}$; habebitur quoque in curua *am* initium descensus *b*, sumendo arcum *amb* $=$ AMB.

Corollarium 2.

636. Ex solutione apparet esse semper $dx > dt$: quare altitudo *ap* maior erit quam altitudo AP; in medio enim resistente maiore opus est altitudine ad eandem celeritatem generandam quam in vacuo.

Corollarium 3.

637. Quia in curuis AM et *am* sumtis aequalibus arcubus, celeritates in illis locis sunt aequales; tempora quoque, quibus aequales arcus AM et *am* describuntur, erunt aequalia. Atque ideo tempus descensus in medio resistente per *bma* aequale est tempori descensus in vacuo per BMA.

Corollarium 4.

637. Ne curua *bma* fiat imaginaria, oportet vt sit vbique $dx < ds$. Hanc ob rem debet esse $dt + \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m} < ds$ seu $gk^m dt < gk^m ds - (b-gt)^m ds$. Hoc autem ita se habet si fuerit $gk^m dt$

M.E.C.D. 2017

$\lesseqgtr (gk^m - b^m)ds$, qui eſt caſus ſi t euaneſcit et pertinet ad punctum a, niſi t alicubi habeat valorem negatiuum. Quocirca ad hoc tantum eſt reſpiciendum vt punctum a fiat reale, quod euenit ſi $gk^m dt$ non maius fuerit quam $(gk^m - b^m)\,ds$.

Corollarium 5.

639. Ne igitur curua am fiat imaginaria, ante omnia neceſſe eſt, vt ſit $b \lesseqgtr k\sqrt[m]{g}$. Sit in puncto A $ds = \alpha dt$, erit α numerus vnitate maior; et ideo erit $gk^m \lesseqgtr \alpha(gk^m - b^m)$ ſeu $b \lesseqgtr k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}$. Si ergo curua MA in A habeat tangentem horizontalem debet eſſe $b \lesseqgtr k\sqrt[m]{g}$ propter $\alpha = \infty$.

Corollarium 6.

640. Sit autem, ſi fuerit $ds = \alpha dt$ in puncto A, $b^m = \frac{g(\alpha-1)}{\alpha}k^m$; erit in ipſo puncto a, $dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)ds}{\alpha} = ds$. Hoc ergo caſu curua am in a tangentem habebit verticalem.

Corollarium 7.

641. In initio motus in B fit $b = gt$, ſeu $t = \frac{b}{g}$. Pro puncto b igitur erit $dx = dt$ curuarum elementis ſumtis aequalibus. Quare tangentes in punctis B et b aequaliter erunt inclinatae.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion I.

642. Quia curua *am* non abſolute ex curua AM conſtrui poteſt, ſed praeterea noſſe oportet celeritatem in puncto A ſeu deſcenſus initium B; ſi in curua AM aliud deſcenſus initium accipiatur, alia inuenietur curua *am*. Curuae ergo BMA et *bma* ratione vnici deſcenſus tantum ita congruunt, vt celeritates aequalibus percurſis ſpatiis ſint inter ſe aequales; et ſi in aliis punctis initia deſcenſus ponantur, haec conuenientia non amplius locum habebit. Non igitur dantur duae curuae ſuper quibus deſcenſus omnes ad datum punctum vsque inter ſe congruant, altera in vacuo altera in medio reſiſtente conſtituta.

Exemplum I.

642. Sit AMB linea recta vtcunque inclinata ita vt ſit $s = \alpha t$; et quaeratur curua *amb* ſuper qua corpus ſimili modo progrediatur in medio reſiſtente, quo ſuper AMB in vacuo. Poſito autem $\frac{s}{\alpha}$ loco t prodibit ſequens aequatio inter x et s pro curua quaeſita *amb*: $dx = \frac{ds}{\alpha} + \frac{(\alpha\acute{o} - gs)^m}{g\alpha^m k^m} ds$, cuius integralis eſt $x = \frac{s}{\alpha} + \frac{\alpha b^{m+1}}{(m+1)g^2k^m} - \frac{(\alpha b - gs)^{m+1}}{(m+1)g^2\alpha^m k^m}$. Nepunctum *a* fiat ima-

M.E.C.D. 2017

imaginarium oportet vt $\frac{1}{\alpha}+\frac{b^m}{gk^m}<1$. Nam si fuerit $b^m=\frac{(\alpha-1)gk^m}{\alpha}$ curua in a habebit tangentem verticalem; neque propterea b maiorem habere poterit valorem. Ponatur igitur corpus super linea inclinata BMA ex tanta altitudine descendisse, vt fiat $b=k\sqrt[m]{\frac{g(\alpha-1)}{\alpha}}$, erit $dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(k\sqrt[m]{g\alpha^{m-1}(\alpha-1)}-gs)^m ds}{g\alpha^m k^m}$, quae est aequatio pro curua amb, in qua initium descensus in b est capiendum, vbi est $ds=\alpha dx$, seu arcus amb erit $=k\sqrt[m]{\frac{\alpha^{m-1}(\alpha-1)}{g^{m-1}}}$. Si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis erit $m=1$, ideoque $dx=\frac{ds}{\alpha}+\frac{(gk(\alpha-1)-gs)ds}{g\alpha k}=ds-\frac{sds}{\alpha k}$ et integrando $x=s-\frac{ss}{2\alpha k}$. Quae est aequatio pro cycloide super basi horizontali descripta, cuius circuli generatoris diameter est $\frac{\alpha k}{2}$.

Corollarium 8.

644. Sit ergo super basi horizontali CB descripta cyclois AMB circulo generatore ANC, et sit medium resistens in duplicata ratione celeritatum, cuius exponens sit $=k$. Si nunc in circulo ANC sumatur chorda $AN=\frac{k}{2}$ ducaturque horizontalis PNM, et ex M tangens MT: atque duo corpora ponantur descendere alterum Tab. XIII Fig 7.

BIBLIOTECA DEL ... DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

ſuper MT in vacuo et alterum ſuper curua MB in medio reſiſtente, ambo haec corpora aequalibus temporibus aequalia ſpatia abſoluent.

Exemplum 2.

Fig. 6

645. Sit curua AMB cyclois deorſum ſpectans, cuius circuli generatoris diameter $= \frac{a}{2}$; erit $ss = 2at$ et $t = \frac{ss}{2a}$ atque $dt = \frac{sds}{a}$. His ergo ſubſtitutis prodibit pro curua amb ſequens aequatio $dx = \frac{sds}{a} + \frac{(2ab - gss)^m ds}{2^m g a^m k^m}$; vel ſi totus arcus AMB, qui in vacuo deſcenſu abſolui ponitur, vocetur c erit $b = \frac{gcc}{2a}$; ideoque pro curua amb orietur iſta aequatio $dx = \frac{sds}{a} + \frac{g^{m-1}(cc - ss)^m ds}{2^m a^m k^m}$.

Ne igitur haec curua in puncto a fiat imaginaria, oportet ſit $g^{m-1} c^{2m} < 2^m a^m k^m$, vel altitudo arcus AB minor eſſe debet quam $\frac{k}{g} \sqrt[m]{g}$; nam ſi fuerit altitudo arcus $AB = \frac{k}{g} \sqrt[m]{g}$, tum curuae amb tangens in b erit verticalis. Si ergo B ſit cuſpis cycloidis, erit $\frac{cc}{2a} = \frac{a}{2}$ ſeu $c = a$: et ſi ſit praeterea $g^{m-1} a^m = 2^m k^m$, quo curuae amb in a tangens fiat verticalis, habebitur iſta aequatio $dx = \frac{sds}{a} + \frac{(aa - ss)^m ds}{a^{2m}}$; quae curua in duobus punctis a et b habebit tangentes verticales.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 9.

646. Cum igitur corpus in vacuo ſuper cycloide ita deſcendat, vt eius accelerationes ſint ſpatiis percurrendis proportionales; eandem proprietatem habebit deſcenſus in medio reſiſtente ſuper curua *bma*, ſi initium deſcenſus ſumatur in puncto *b*, quod per aequationem ad curuam *amb*, determinatur, erit ſcilicet $amb = c$.

Corollarium 10.

647. Si in curua AMB aliud deſcenſus initium B capiatur; tota curua *amb* alia reperietur, quia in eius aequatione longitudo arcus $AMB = c$ continetur. Quare etiamſi cyclois ſit curua tautochrona in vacuo, curua *amb* talis tamen non erit in medio reſiſtente: quia pluribus deſcenſibus ſuper AMB totidem curuae diuerſae in medio reſiſtente reſpondent.

Scholion 2.

648. Curuae hoc exemplo erutae ſunt eae ipſae, quas Clar. Hermannus in Comm. Tom. II. pro tautochronis in mediis reſiſtentibus inuenit; ſed ſimul ipſe demonſtrauit eas quaeſito ſatisfacere non poſſe. Ceterum ex his intelligitur, ſimili modo in medio reſiſtente curuam poſſe inueniri, ſuper qua corpus aſcendendo eodem modo moueatur, quo ſuper dato curua in vacuo. Sint

M.E.C.D. 2017

enim puncta Ae t *a* initia aſcenſus illud in vacuo hoc in medio reſiſtente; ſitque celeritas initialis debita altitudini b; habebitur pro curua amb iſta aequatio $dx = dt - \frac{(b-gt)^m ds}{gk^m}$; ex qua aequatione intelligitur, curuam amb non fieri poſſe imaginariam, niſi ipſa curua AMB talis fuerit. Nam quia, ne curua amb ſit imaginaria, eſſe debet $dx < ds$; hic dx minus eſt quam dt, quod per ſe minus eſt quam ds. Vt ſi linea AMB ſit linea verticalis, altera amb poterit aſſignari; nam poſita $AB = c$, erit $b = gc$, et $s = t$; quare pro curua amb inuenitur iſta aequatio $dx = ds - \frac{g^{m-1}(c-s)^m ds}{k^m}$, cuius integralis eſt $x = s + \frac{g^{m-1}(c-s)^{m+1} - g^{m-1}c^{m+1}}{(m+1)k^m}$. Accommodetur haec aequatio ad reſiſtentiam quadratis celeritatum proportionalem fiet $m = 1$, ideoque erit $x = s + \frac{(c-s)^2 - c^2}{2k} = \frac{2(k-c)s + ss}{2k}$, quae eſt ad cycloidem hoc modo: deſcribatur cyclois AMB circulo generatore diametri $AC = \frac{k}{2}$, ſuper baſi horizontali BC, tum capiatur arcus $AM = k - c$; erit M initium aſcenſus, ex quo puncto, ſi corpus MA aſcendat celeritate altitudini gc debita, in medio reſiſtente in duplicata ratione celeritatum eodem modo mouebitur, quo in vacuo eadem celeritate initiali ſurſum aſcendens verticaliter.

Fig. 7.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 73.

Problema.

649. *Si potentia fuerit vniformis et deorsum directa, mediumque in ratione quacunque multiplicata celeritatum resistat; determinare curuam* AM, *super qua corpus descendendo secundum horizontalem* AH *aequabiliter prograediatur.* Tab. XIV. Fig. 1.

Solutio.

Sit A curuae punctum supremum, per quod ducatur axis verticalis AP; celeritasque, qua corpus horizontaliter progreditur, sit debita altitudini b. Sumatur abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$; sitque corporis in M celeritas debita altitudini v; qua celeritate corporis elementum $Mm = ds$ percurret. Erit ergo vt ds ad dy ita corporis celeritas per Mm, quae est vt $\sqrt{v}$ ad celeritatem horizontalem $\sqrt{b}$, vnde oritur $v = \frac{bds^2}{dy^2}$. Iam sit potentia sollicitans $= g$; exponens resistentiae k, et ipsa resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$. His positis erit $dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m}$, quae aequatio, si loco v valor $\frac{bds^2}{dy^2}$ substituatur, exprimet naturam curuae quaesitae. Sit autem $ds = p\,dy$, erit $v = bp^2$ et $dx = dy\sqrt{(p^2-1)} - \frac{b^m p^{2m+1}\,dy}{k^m}$, quae separata dat $dy = \frac{2bk}{}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{2bk^m p\,dp}{gk^m\sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$. Curuae igitur quaesitae sequens erit constructio; sumto $y = \int \frac{2bk^m p\,dp}{gk^m\sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$ erit $x = \int \frac{2bk^m p\,dp\sqrt{(p^2-1)}}{gk^m\sqrt{(p^2-1)}-b^m p^{2m+1}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

650. Si loco pp restituatur $\frac{v}{b}$, atque per v definiantur y et x, erit $y = \int \frac{k^m dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$ atque $x = \int \frac{k^m dv\sqrt{(v-b)}}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$. Similique modo hinc erit arcus $s = \int \frac{k^m dv\sqrt{v}}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$. Sumto autem $\frac{v}{b}$ loco pp erit $ds = \frac{dy\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$ et $dx = \frac{dy\sqrt{(v-b)}}{\sqrt{v}}$ atque $ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{(v-b)}}$.

Corollarium 2.

651. Quia aequatio $dy = \frac{k^m dv\sqrt{b}}{gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v}}$ est separata; ex ea solutio particularis quaesito satisfaciens erui potest, faciendo denominatorem $gk^m\sqrt{(v-b)}-v^m\sqrt{v} = 0$, vnde erit ipsa celeritas $\sqrt{v}$ constans. Sit ergo $v = c$ erit $\sqrt{(v-b)} = \frac{c^m\sqrt{c}}{gk^m}$; atque

M.E.C.D. 2017

atque ideo $ds = \frac{gk^m dx}{c^m}$ pro linea recta inclinata vt ſupra iam inuenimus (627).

Corollarium 3.

652. Quo autem corpus data celeritate, quae debita eſt altitudini b horizontaliter progrediatur, ex aequatione $\sqrt{(c-b)} = \frac{c^m \sqrt{c}}{gk^m}$ definiri debet altitudo c. Qua inuenta habebitur inclinatio rectae ſatisfacientis, et celeritas corporis initialis $\sqrt{c}$ in A; qua aequabiliter per rectam deſcendet.

Corollarium 4.

653. Si reſiſtentia euaneſcat corpusque in vacuo moueatur fiet $k = \infty$ ideoque $x = \int \frac{dv}{g}$ ſeu $v = g(a+x)$, atque $dy = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(ga+gx-b)}}$. Integrando ergo fiet $y = \frac{2}{g}\sqrt{b(ga+gx-b)} - \frac{2}{g}\sqrt{b(ga-b)}$ quae eſt aequatio pro parabola, quam corpus proiectum libere deſcribit.

Exemplum.

654. Si medium fuerit rariſſimum, atque ideo k valde magnum, erit $\frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)} - v^m\sqrt{v}} = \frac{1}{gk^m\sqrt{(v-b)}} + \frac{v^m\sqrt{v}}{g^2k^{2m}(v-b)}$ q. pr. Hanc ob rem ha-

M.E.C.D. 2017

habebitur $y = \frac{2\sqrt{b(v-b)}}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{bv}}{g^2 k^m (v-b)}$ et $x = \frac{v}{g} + \int \frac{v^m dv \sqrt{v}}{g^2 k^m \sqrt{(v-b)}}$. Ex hac posteriori aequatione est quam proxime $v = gx - \int \frac{g^{m-1} x^m dx \sqrt{gx}}{k^m \sqrt{(gx-b)}}$, qui valor in aequatione $dy = \frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{(v-b)}}$ substitutus dat aequationem inter x et y pro curua quaesita.

PROPOSITIO 74.
Problema.

Tab. XIV. Fig. 2.

655. *Inuenire curuam* A M *super qua corpus descendens in medio quocunque resistente aequabiliter deorsum progrediatur existente potentia absoluta vniformi et deorsum directa.*

Solutio.

Posita abscissa AP $= x$, A M $= s$, sit celeritas qua corpus vniformiter descendere debet debita altitudini b. Potentia porro vniformis deorsum directa sit g, et altitudo debita celeritati M $= v$ atque resistentia $= \frac{v^m}{k^m}$, erit ergo $dv = g\,dx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Debebit autem esse vt Mm : M N $= \sqrt{v} : \sqrt{b}$, vnde erit $v = \frac{b ds^2}{dx^2}$. Ex hac ergo aequatione erit $ds = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$, quo valore in aequatione substituto habebitur $dx = g\,dx - \frac{v^{m+\frac{1}{2}} dx}{k^m \sqrt{b}}$ seu $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b} - v^m \sqrt{v}}$.

Quam-

M.E.C.D. 2017

Quamobrem erit $x = \int \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b - v^m \sqrt{v}}}$; $s =$
$\int \frac{k^m dv \sqrt{v}}{g k^m \sqrt{b - v^m \sqrt{v}}}$, atque applicata $PM = y =$
$\int \frac{k^m dv \sqrt{(v-b)}}{g k^m \sqrt{b - v^m \sqrt{v}}}$. Ex quibus aequationibus con-
ſtructio curuae quaeſitae conficitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

656. Ex his tribus aequationibus, ſi deſideretur aequatio ex x, y et s tantum conſiſtens, accipi poteſt ea, ex qua valor ipſius v commodiſſime poterit inueniri, isque deinceps in alterutra reliquarum ſubſtitui.

Corollarium 2.

657. Quia aequatio $dx = \frac{k^m dv \sqrt{b}}{g k^m \sqrt{b - v^m \sqrt{v}}}$ indetermitas a ſe inuicem habet ſeparatas, poterit ſolutio particularis obtineri ponendo $g k^m \sqrt{b - v^m} \sqrt{v} = 0$. Hinc igitur erit $v = g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{2m}{2m+1}} b^{\frac{1}{2m+1}}$
ideoque $ds = \frac{g^{\frac{1}{2m+1}} k^{\frac{m}{2m+1}} dx}{b^{\frac{m}{2m+1}}}$. Satisfacit ergo linea recta inclinata, ſi corpus data celeritate $\sqrt{v}$ ſuper ea moueatur.

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

658. Quod in praecedente et hoc problemate linea recta inclinata solutionem praebeat particularem, ex eo intelligi potest, quod in medio resistente recta inclinata inueniri possit, super qua corpus aequabiliter moueatur, vt supra (627) ostendimus. Hic autem ipse casus vtrique problemati satisfacit; si enim corpus super recta aequabili motu incedit, tam horizontaliter, quam verticaliter aequabiliter quoque promouetur; quin etiam secundum quamcunque plagam aequabiliter fertur.

Corollarium 3.

659. Pro vacuo fit $k = \infty$. Quamobrem erit $x = \frac{v}{g}$ seu $v = gx$ atque $ds = \frac{dx\sqrt{gx}}{\sqrt{b}}$ et $dy = \frac{dx\sqrt{(gx-b)}}{\sqrt{b}}$ quae aequatio integrata dat $y = \frac{2(gx-b)^{\frac{3}{2}}}{3g\sqrt{b}}$, et praebet parabolam cubicalem rectificabilem vt supra iam inuenimus.

Exemplum 1.

660. Ponamus resistentiam ipsis celeritatibus proportionalem erit $m = \frac{1}{2}$, ideoque $x = \int \frac{dv\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v} = \sqrt{bk}\, l \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v}$, si initium ascissarum in eo puncto accipiatur, vbi v euanescit. Ex hac autem aequatione prodit $e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}} = \frac{g\sqrt{bk}}{g\sqrt{bk}-v}$ seu $v = e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}$

$(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}}$

M.E.C.D. 2017

$(e^{\frac{x}{\sqrt{bk}}}-1)g\sqrt{bk}=g\sqrt{bk},(1-e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}})$. Valore hoc ipsius v substituto habebitur $ds=\frac{dx\sqrt{g}(1-e^{\frac{-x}{\sqrt{bk}}}\sqrt{bk}}{\sqrt{b}}$

Vel cum sit $ds=\frac{dv\sqrt{kv}}{g\sqrt{bk}-v}$, ponatur $v=u^2$ erit $ds=\frac{2u^2du\sqrt{k}}{g\sqrt{bk}-uu}=\frac{2gkdu\sqrt{b}}{g\sqrt{bk}-uu}-2du\sqrt{k}$, quae integrata dat $s=\sqrt[4]{g^2bk^3}\,l\frac{\sqrt[4]{g^2bk}+\sqrt{v}}{\sqrt[4]{g^2bk}-\sqrt{v}}-2\sqrt{kv}$, in qua valor ipsius v ante inuentus substitui potest, quo prodeat aequatio inter x et s.

Exemplum 2.

661. Resistat nunc medium in duplicata celeritatum ratione, erit $m=1$; ideoque $dx=\frac{kdv\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$ et $ds=\frac{kdv\sqrt{v}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$. Huius posterioris aequationis integrale est $s=\frac{2k}{3}l\frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$, ex qua oritur $e^{\frac{3s}{2k}}=\frac{gk\sqrt{b}}{gk\sqrt{b}-v\sqrt{v}}$; atque $v^{\frac{3}{2}}=gk(e^{\frac{3s}{2k}}-1)e^{\frac{-3s}{2k}}\sqrt{b}$ $=gk(1-e^{\frac{-3s}{2k}})\sqrt{b}$. Quocirca erit $\sqrt{v}=\sqrt[3]{gk}(1-e^{\frac{-3s}{2k}})\sqrt{b}$; qui valor in aequatione $dx=\frac{ds\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$ substitutus dat aequationem inter s et x pro curua quaesita.

Scholion 2.

662. Quemadmodum in his duobus problematibus curuas determinauimus super quibus corpus motum vel secundum horizontem vel deorsum aequabiliter feratur, ita simili modo proble-

M.E.C.D. 2017

ma reſolui poteſt, ſi corpus ſecundum quamuis aliam plagam aequabiliter progredi debeat; ipſam autem quaeſtionem, quia nihil concinni ex ſolutione deduci poteſt, hic omiſi; atque ob eandem cauſam problema iſochronae paracentricae in medio reſiſtente non attingo. Adiungam vero his, in quibus celeritatum quaedam lex proponitur, non parum curioſum problema, quod a nemine adhuc eſt tractatum, pro mediis reſiſtentibus; quod pro vacuo propoſitum ne problema quidem eſt. Quaeritur ſcilicet curua ſuper qua corpus ad datum punctum maxima celeritate pertingat; in vacuo enim corpus ſuper quacunque curua motum in eodem loco ſemper eandem obtinet celeritatem.

PROPOSITIO 75.

Problema.

Tab. XIV. Fig. 3.

663. *Inter omnes curuas puncta* A *et* C *iungentes determinare eam* A M C, *ſuper qua corpus ex* A *ad* C *deſcendens maximam acquirat celeritatem exiſtente reſiſtentia in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et potentia vniformi deorſum tendente.*

Solutio.

Quo corpus ad punctum C maxima cum celeritate perueniat, curuae quaeſitae A M C duo quaeque elementa M*m*, *m*μ ita poſita eſſe debent, vt corpus ea percurrendo maximum accipiat celeri-

M.E.C.D: 2017

leritatis incrementum. Nam ſi corpus per alia elementa $Mn\mu$ maius acquireret celeritatis augmentum, maiorem quoque in C habiturum eſſet celeritatem. Per methodum igitur maximorum poſitio elementorum $Mm, m\mu$ inuenietur, ſi elementa haec cum proximis Mn, $n\mu$ comparentur et celeritatis augmenta, quae per vtraque generantur, inter ſe aequalia ponantur. Ducantur ad hoc ad axem verticalem AP *plicatae* MP, nmp et $\mu\pi$ ſintque elementa axis Pp, $p\pi$ aequalia. Ducantur quoque verticales MF, mg, et in curuae elementa normales mf, ng. Iam ſit potentia ſollicitans $=g$, exponens reſiſtentiae $=k$, ipſa reſiſtentia in $2m$ multiplicata ratione celeritatum, et altitudo celeritati in M debita $=v$. His poſitis erit incrementum ipſius v per $Mm=g$. $MF - \frac{v^m Mm}{k^m}$ et incrementum altitudinis celeritati debitae dum corpus per $m\mu$ progreditur $=g.mG - \frac{(v+g.MF-\frac{v^m.Mm}{k^m})^m m\mu}{k^m}$. Dum ergo corpus elementa Mm et $m\mu$ conficit altitudo v accipit augmentum $=g(MF+mG)-\frac{v^m.Mm}{k^m} - \frac{(v+g.MF-\frac{v^m}{k^m}Mm)^m m\mu}{k^m}$. At elementa $Mn, n\mu$ percurrendo accipiet v augmentum $=g(MF+mG)-\frac{v^m.Mn}{}$

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$\frac{v^m \mathrm{M}n}{k^m} - \frac{(v+g.\mathrm{MF}-\frac{v^m}{k^m}\mathrm{M}n)^m n\mu}{k^m}$. Quibus ſibi aequalibus poſitis habebitur $o = v^m(\mathrm{M}n-\mathrm{M}m)+(v+g.\mathrm{MF}-\frac{v^m}{k^m}.\mathrm{M}n)^m n\mu-(v+g.\mathrm{MF}-\frac{v^m}{k^m}.\mathrm{M}m)^m m\mu$. Eſt vero $\mathrm{M}n-\mathrm{M}m = nf$ et $(v+g.\mathrm{MF}-\frac{v^m}{k^m}\mathrm{M}n)^m = v^m + mgv^{m-1}\mathrm{MF} - \frac{mv^{2m-1}}{k^m}\mathrm{M}n$ atque $(v+g.\mathrm{MF}-\frac{v^m}{k^m}.\mathrm{M}m)^m = v^m + mgv^{m-1}.\mathrm{MF} - \frac{mv^{2m-1}}{k^m}\mathrm{M}m$. Nunc vero his valoribus ſubſtituendis proueniet haec aequatio $v(nf-mg)-mg.\mathrm{MF}.mg + \frac{mv^m}{k^m}(\mathrm{M}n.n\mu-\mathrm{M}m.m\mu) = o$. At eſt $\mathrm{M}n.n\mu-\mathrm{M}m.m\mu = m\mu.nf-\mathrm{M}m.mg$, atque ob triangula nfm, $m\mathrm{FM}$ et mgn, $\mu\mathrm{G}m$ ſimilia eſt $nf = \frac{m\mathrm{F}.mn}{\mathrm{M}m}$ atque $mg = \frac{\mu\mathrm{G}.mn}{m\mu}$. His ſubſtitutis et per mn diuiſo prodit $v(\frac{m\mathrm{F}}{\mathrm{M}m}-\frac{\mu\mathrm{G}}{m\mu})-mg.\frac{\mathrm{MF}.\mu\mathrm{G}}{m\mu}+\frac{mv^m}{k^m}(\frac{m\mu.m\mathrm{F}}{\mathrm{M}m}-\frac{\mathrm{M}m\,\mu\mathrm{G}}{m\mu}) = o$. Huius aequationis duo priora membra ſunt differentialia primi gradus, tertium vero, quia differentiali ſecundi gradus aequipollet, reiici poteſt; fiet ergo $\frac{mg.\mathrm{MF}.\mu\mathrm{G}}{m\mu}+v(\frac{\mu\mathrm{G}}{m\mu}-\frac{m\mathrm{F}}{\mathrm{M}m}) = o$, ſiue $\frac{mg.\mathrm{MF}.m\mathrm{F}}{\mathrm{M}m}+v\,d.\frac{m\mathrm{F}}{\mathrm{M}m} = o$. Ex qua aequatione determinatur poſitio elementorum $\mathrm{M}m$ et $m\mu$.

M.E.C.D. 2017

$m\mu$. Quo autem ſymbolis vtamur, ſit $AP=x$, $PM=y$ et $AM=s$ erit $Pp=p\pi=dx$, $mF=dy$, et $Mm=ds$, prodibitque $\frac{mgdxdy}{ds}+vd.\frac{dy}{ds}=o$. Aequatio vero canonica eſt $dv=gdx-\frac{v^m ds}{k^m}$, in qua ſi loco gdx ex ſuperiore aequatione ſubſtituatur $\frac{-vds}{mdy}$ d. $\frac{dy}{ds}$ habebitur $dv+\frac{vds}{mdy}$ d. $\frac{dy}{ds}+\frac{v^m ds}{k^m}=o$, ſeu $\frac{mdvdy}{ds}+v$d. $\frac{dy}{ds}+\frac{mv^m dy}{k^m}=o$. Sit $dy=pds$ et $v^{1-m}=u$, erit vt ſequitur $pdu+\frac{(1-m}{m}udp+\frac{(1-m)pds}{k^m}=o$, ex qua integrata prodit $u=\frac{(m-1)p^{\frac{m-1}{m}}}{k^m}\int p^{\frac{1-m}{m}}ds$. Ex hoc u obtinebitur ergo viciſſim $v=u^{\frac{1}{1-m}}$, qui valor in ſuperiori aequatione $mgpdsV(1-pp)+vdp=o$ ſubſtitutus, dabit aequationem inter p et s, et conſequenter inter y et s. Ad curuam autem conſtruendam hoc modo computum inſtituì expedit: Poſito $dy=pds$ habentur hae duae aequationes $mgpdsV(1-pp)+vdp=o$ et $dv=gdsV(1-pp)-\frac{v^m ds.}{k^m}$ Ex illa eſt $ds=\frac{-vdp}{mgpV(1-p^2)}$ qui in hac ſubſtitutus dat $mpdv+vdp=\frac{v^{m+1}dp}{gk^mV(1-pp)}$. Haec diuiſa per $v^{m+1}p^2$ fit integrabilis eritque integrale

1=

M.E.C.D. 2017

$\frac{1}{v^m p} = C + \frac{\sqrt{(1-pp)}}{gk^m p}$ seu $v^m = \frac{gk^m}{\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}$ et $v = \frac{k\sqrt[m]{g}}{\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)}}}$. Quocirca erit $mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$ et $mgdx = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$ atque $mgdy = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{(1-pp)^{\frac{1}{2}}\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$. Ex quibus aequationibus facile eſt curuam quaeſitam conſtruere. Q. E. I.

Corollarium 1.

664. Si radius oſculi curuae in M verſus axem directus vocetur r, erit d. $\frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{r}$. Hocque valore ſubſtituto habetur $\frac{mgdy}{ds} = \frac{v}{r}$ ſeu $\frac{2mgdy}{ds} = \frac{2v}{r}$. Eſt vero $\frac{2v}{r}$ vis centrifuga corporis in hac curua moti, cuius directio eſt ab axe directa et $\frac{gdy}{ds}$ eſt vis normalis. Quare in curua quaeſita vis centrifuga eſt contraria vi normali et ſe habet ad vim normalem vt $2m$ ad 1, id eſt, vt exponens poteſtatis celeritatis, cui reſiſtentia eſt proportionalis ad vnitatem.

Corollarium 2.

665. Hae igitur omnes curuae parte concaua ſunt deorſum directae. Quia enim vis normalis

M.E.C.D. 2017

malis directio deorsum respicit, et radius osculi in eandem plagam tendit, concauitas curuae quoque deorsum respicere debet.

Corollarium 3.

666. In medio resistente in simplici ratione celeritatum erit $2m = 1$. Hoc ergo casu vis centrifuga aequalis est et contraria vi normali. Quamobrem curua quaesito satisfaciens, erit ipsa proiectoria, quam corpus proiectum libere describit.

Corollarium 4.

667. Quia in aequatione $mgds = \frac{-kdp\sqrt[m]{g}}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}m}\sqrt[m]{(\alpha p + \sqrt{(1-pp)})}}$ indeterminatae sunt separatae, tres solutiones particulares inde obtinentur. Primam dat aequatio $\alpha p + \sqrt{(1-pp)} = o$, quo casu celeritas fit infinita, et quaeuis recta satisfacit. Secunda est $p = 1$, seu $dy = ds$, quae est pro recta horizontali, et tertia est $p = o$, pro recta verticali; quae semper hanc habet proprietatem, vt corpus in ea descendens maxima celeritatis augmenta accipiat.

Exemplum 1.

668. Resistat medium in simplici ratione celeritatum erit $m = \frac{1}{2}$. Sumatur ex tribus inuentis

M.E.C.D. 2017

aequationibus ea, quae dy continet, erit $dy = \frac{-2gkdp}{(\alpha p+\sqrt{(1-pp)})^2\sqrt{(1-pp)}}$, cuius integralis est $y = C - \frac{2gkp}{\alpha p+\sqrt{(1-pp)}}$. Cum autem sit $p = \frac{dy}{ds}$ et $\sqrt{(1-pp)} = \frac{dx}{ds}$, erit $y = C - \frac{2gkdy}{\alpha dy+dx}$ seu neglecta constante C, quia curuam non immutat, erit $\alpha y\,dy + y\,dx + 2gkdy = o$. Quae aequatio per y diuisa et denuo integrata dat $\alpha y + x + 2gkly = C$. Quae est aequatio pro curua logarithmicali ea ipsa, quam Libr. I. proiectoriam in hac resistentiae hypothesi inuenimus.

Exemplum 2.

669. Sit nunc resistentia quadratis celeritatum proportionalis erit $m = 1$. Sumatur aequatio ista $ds = \frac{-kdp}{p(1-pp)^{\frac{1}{2}}(\alpha p+\sqrt{(1-pp)})}$. Huius autem integralis est $s = k\,l\frac{\alpha p+\sqrt{(1-pp)}}{\mathfrak{C}p}$, siue $e^{\frac{s}{k}} = \frac{\alpha p+\sqrt{(1-pp)}}{\mathfrak{C}p} = \frac{\alpha dy+dx}{\mathfrak{C}dy}$. Hinc fit $\mathfrak{C}e^{\frac{s}{k}}dy - \alpha\,dy = dx$, atque $ds = dy\sqrt{(1+(\mathfrak{C}e^{\frac{s}{k}}-\alpha)^2)}$. Quae est aequatio pro curua quaesita, quae hanc habebit proprietatem, vt vis centrifuga corporis sit duplo maior quam vis normalis. Curua igitur perpetuo sursum premetur vi aequali vel ipsi vi normali vel dimidio vis centrifugae. In hac vero curua corpus ita mouebitur vt altitudo celeritati in M debita fit $= \frac{gk}{e^{\frac{s}{k}}\mathfrak{C}p} = \frac{gkds}{\mathfrak{C}e^{\frac{s}{k}}dy} = \frac{gkds}{dx+\alpha dy}$.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion 1.

670. Cum in quauis reſiſtentiae hypotheſi peculiaris ratio inter vim centrifugam et vim normalem locum habeat; vacuum autem tanquam caſus cuiusque reſiſtentiae conſiderari queat: ſequitur in vacuo quamvis curuam ſatisfacere debere. Omnes enim curuae in vacuo hanc habent proprietatem, vt ſuper iis ex aequalibus altitudinibus aequales generentur celeritates; ideoque nulla poteſt definiri, quae potius quam reliquae quaeſito ſatisfaciant.

Scholion 2.

671. Notatu dignum eſt, quod in omnibus his curuis inuentis nusquam corporis celeritas ſit aequalis nihilo. Atque idcirco problema hac methodo non ita reſolui poteſt, vt determinetur inter omnes deſcenſus ex A ad C ex quiete factos is, in quo corpus maximam acquirit celeritatem; cui quaeſtioni ſola recta verticalis per C tranſiens et cum horizontali per A ducta coniuncta ſatisfacit. Noſtra autem ſolutio ita eſt comparata, vt duorum elementorum quorumque contiguorum poſitionem eam definiat, quae maximum vel minimum celeritatis augmentum producat. Quamobrem hac methodo ea curua inuenitur, ſuper qua corpus motum vel maius vel minus celeritatis augmentum acquirit, quam ſuper alia quacunque curua A et C iungente, ſi

M.E.C.D. 2017

corpus ex A eadem celeritate descensum inchoet. Ex inuentis autem colligi potest, hac ratione eam prodire curuam, super qua minimum celeritatis incrementum generetur, vel super qua corpus motu maxime vniformi feratur. Atque hoc sensu facile perspicitur, motum ex quiete incipere non posse. Quanquam enim certum est, si puncta A et C in linea verticali sunt posita, super hac verticali motu in A ex quiete facto maximam in C generari celeritatem; tamen calculus non hanc dat solutionem, etiamsi praebeat lineam verticalem; sed celeritatem initialem in A facit debitam alt. $k\sqrt[m]{g}$, quae celeritas tanta est, vt non amplius augmentum accipere queat. Hac igitur celeritate corpus aequabiliter ex A ad C descendet; hacque ratione nullum, hoc est minimum capit celeritatis incrementum. Problema ergo, vt solutioni consentaneum fuisset, ita proponi debuisset; inter omnes lineas puncta A et C iungentes eam determinare, super qua corpus motum minima accipiat celeritatis augmenta; atque simul celeritatem initialem in A huic quaesito accommodatam definire.

Scholion 3.

672. Secundum ordinem praescriptum sequi deberent nunc huiusmodi problemata, in quibus temporum quadam lege data curuae essent inuestigandae idoneae; sed cum temporum leges pleraeque

M.E.C.D. 2017

raeque ad celeritatum leges possint reduci, huiusmodi quaestiones non profero. Sed vnicam in hoc negotio quaestionem de curuis brachystochronis tractabo, quia ea etsi temporis praescripta est conditio ad celeritatum rationes, quas iam peruoluimus, reduci non potest. Qua in re iisdem praemissis vtar, quae supra circa brachystochronas in vacuo sunt tradita.

PROPOSITIO 76.
Theorema.

673. *In medio quocunque resistente et potentiarum absolutarum hypothesi quacunque ea curua* AMC *est brachystochrona seu breuissimum ab* A *ad* C *producit descensum; in qua vis centrifuga est aequalis vi normali, et in eandem plagam directa.* Tab. XIV. Fig. 4.

Demonstratio.

Quaecunque fuerint potentiae absolutae in corpus in M agentes, eae in duas inter se normales possunt resolui, quarum altera sit $ML = P$, altera $MN = Q$. Sumto curuae elemento $Mm = ds$, ductisque perpendiculis ml, mn, sit $Ml = mn = dx$ et $ml = Mn = dy$. Ponatur altitudo celeritati in M debita $= v$ et vis resistentiae $= R$, atque radius osculi in $M = r$, quem pono sursum directum, ita vt posito dx constante fit $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$. His positis erit $dv = P\,dx + Q\,dy - R\,ds$, quia

M.E.C.D. 2017

$\frac{Pdx+Qdy}{ds}$ eſt vis tangentialis ex potentiis P et Q orta. At ſupra ex natura brachyſtochronismi ſi fuerit $dv = Pdx + Qdy + Rds$ inuenimus fore $\frac{2v}{r} = \frac{Pdy-Qdx}{ds}$ (364), quae formulae ab hac noſtra tantum in ſigno literae R differunt, haecque in computum non venit. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam ſecundum normalem MO agentem atque $\frac{Pdy-Qdx}{ds}$ eſt vis normalis iuxta MO agens ex vtraque vi P et Q orta. Quare ſi fuerit vis centrifuga vi normali aequalis, et in eandem plagam directa, curua erit brachyſtochrona. Q.E.D.

Corollarium 1.

674. *Si* vis normalis, quae oritur ex reſolutione potentiarum abſolutarum corpus ſollicitantium, vocetur N et vis tangentialis ex eadem reſolutione orta ponatur T, erit $dv = (T-R)ds$ et $\frac{2v}{r} = N$, quae duae aequationes coniunctae dabunt curuam brachyſtochronam.

Corollarium 2.

675. Quaecunque igitur fuerit reſiſtentia, erit ſemper $v = \frac{Nr}{2}$, vnde celeritas corporis ſuper brachyſtochrona facile inuenitur. Erit enim vt vis grauitatis 1 ad vim normalem N ita dimidium radii oſculi ad altitudinem celeritati in M debitam.

Scho-

M.E.C.D. 2017

Scholion.

676. Haec eadem proportio quoque locum habet in motu corporum proiectorum libero, est enim pariter pro motu libero vis centrifuga aequalis vi normali. Discrimen autem in hoc consistit, vt in motu libero vires centrifuga et normalis sint inter se oppositae; pro curuis brachystochronis autem conspirantes. Siue in motu libero directiones radii osculi r et vis normalis N coincidunt; in brachystochronis vero inter se sunt contrariae. Hanc ob rem hic sumsimus $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ cum in motu libero sit $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$.

Corollarium 3.

677. Cum ex formula brachystochronismi indolem continente prodeat $v = \frac{Nr}{2}$; si hic valor vbique loco v in altera aequatione $dv = (T-R)\,ds$ substituatur, habebitur aequatio naturam curuae brachystochronae exhibens.

Corollarium 4.

678. In quocunque ergo medio resistente et quibuscunque sollicitantibus corpus potentiis, eae curuae omnes erunt brachystochronae, in quibus tota, quam sustinent, pressio duplo maior est quam vel sola vis centrifuga vel sola ex potentiarum sollicitantium resolutione orta vis normalis.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 77.

Problema.

Tab. XIV. Fig. 2.

679. *In medio vniformi quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, et potentia absoluta existente vniformi et deorsum directa; determinare curuam brachystochronam* A M, *super qua corpus descendens tempore breuissimo ex* A *ad* M *perueniat.*

Solutio.

Positis in axe verticali abscissa $AP = x$, eique respondente applicata $PM = y$, arcuque curuae quasitae $AM = s$; sit g potentia deorsum sollicitans, et $\frac{v^m}{k^m}$ resistentia in M, si quidem celeritas in M fuerit debita altitudini v. His positis erit vis normalis $= \frac{gdy}{ds}$; cui aequalis esse debet vis centrifuga, quae est $\frac{2v}{r} = \frac{2vdxddy}{ds^3}$ (676), sumto dx pro constante. Facta ergo aequatione est $v = \frac{gds^2dy}{2dxddy}$. Aequatio vero canonica pro descensu in hoc medio resistente dat $dv = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$. Prior autem aequatio posito $dsdds$ loco $dyddy$ propter dx constans abit in hanc $v = \frac{gdsdy^2}{2dxdds}$, ex qua fit $dv = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gdsdyddy}{axdds} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = \frac{gdy^2}{2dx} + \frac{gds^2}{dx} - \frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} = gdx - \frac{v^m ds}{k^m}$, quae aequatio reducta dat $\frac{gdsdy^2d^3s}{2dxdds^2} - \frac{3gdy^2}{2dx}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{3gdy^2}{2dx} = \frac{g^m ds^{m+1} dy^{2m}}{2^m k^m dx^m dds^m}$, seu $dsd^3s - 3ddds^2 =$
$\frac{g^{m-1} ds^{m-1} dy^{2m-2}}{2^{m-1} k^m dx^{m-1} dds^{m-2}}$; haecque aequatio exponit naturam curuae quaesitae. Quae aequatio quo reducatur et ad constructionem praeparetur, pono $ds = pdx$, vt sit $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$, eritque $dds = dpdx$ et $d^3s = dxddp$. His substitutis habebitur ista aequatio $pddp - 3dp^2 = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dx^m (pp-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m dp^{m-2}}$.

Nunc sit porro $dx = qdp$; erit $ddx = 0 = dqdp + qddp$ seu $ddp = \frac{-dpdq}{q}$; orieturque haec aequatio $-\frac{pdq}{q} - 3dp = \frac{g^{m-1} p^{m+1} q^m dp (p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$ seu $\frac{-pdq - 3qdp}{q^{m+1}} = \frac{g^{m-1} p^{m+1} dp (p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$. Multiplicetur haec aequatio quo integrabilis fiat per mp^{-3m-1} et habebitur $-mp^{-3m} q^{-m-1} dq - 3mp^{-3m-1} q^{-m} dp = \frac{mg^{m-1} p^{-2m} dp (p^2-1)^{m-1}}{2^{m-1} k^m}$, cuius integralis est $p^{-3m} q^{-m} = \frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \int \frac{(p^2-1)^{m-1} dp}{p^{2m}}$. Ponatur $\frac{mg^{m-1}}{2^{m-1} k^m} \int \frac{(p^2-1)^{m-1} dp}{p^{2m}} = P^{-m}$, erit P functio quaedam ipsius p, et proinde dabitur concessis saltem quadraturis. His igitur positis erit $p^3 q = P$, atque $q = \frac{P}{p^3}$. Quia vero est $dx = qdp$ erit $x = \int \frac{Pdp}{p^3}$

M.E.C.D. 2017

et $s = \int \frac{P dp}{p^2}$ atque $y = \int \frac{P dp \sqrt{(p^2-1)}}{p^3}$. Vnde constructio curuae brachystochronae sequitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

680. Sit A punctum in quo motus incipit atque celeritas est nulla; erit ibi $v = 0$ seu $\frac{g ds dy^2}{2 dx ddx} = 0$, vnde fit $dy = 0$, quia ds euanescere non potest. In puncto A ergo curua habebit tangentem verticalem.

Corollarium 2.

681. Quia in ipso motus initio motus in medio resistente a motu in vacuo non discrepat, curuae AM initium A a cycloidis cuspide, quae est brachystochrona in vacuo non discrepabit. Ideoque in A non solum tangens erit verticalis, sed etiam radius osculi in eo loco erit infinite paruus.

Corollarium 3.

682. Quia in A est $dy = 0$; atque est $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$, erit pro puncto A, $p = 1$. Ex data ergo curuae constructione punctum A obtinebitur, si fiat $p = 1$. Integralia ergo illa ita debebunt accipi vt x, s et y euanescant posito $p = 1$.

Corollarium 4.

683. Quoniam est $v = \frac{g ds dy^2}{2 dx ddx}$, erit propter $ds = p dx$ et $ds^2 = dp dx$; $v = \frac{g p dx (p^2-1)}{2 dp}$, atque ob

M.E.C.D. 2017

ob $dx = q\,dp$, erit $v = \frac{gpq(pp-1)}{2} = \frac{gP(pp-1)}{2p^2}$. Vnde patet v euanescere si sit $p = 1$.

Corollarium 5.

684. Radius osculi in puncto quocunque M est $= \frac{ds^3}{dx\,ddy} = \frac{ds^2\,dy}{dx\,dds}$. Quare ob $ds = p\,dx$ erit radius osculi $r = \frac{p^2 dx\sqrt{(p^2-1)}}{dp} = p^2 q\sqrt{(p^2-1)} = \frac{P\sqrt{(p^2-1)}}{p}$. In puncto ergo A vbi est $p = 1$ erit radius osculi $r = 0$.

Corollarium 6.

685. Sit B punctum brachystochronae, in quo tangens est horizontalis; erit ibi $dy = \infty$ ideoque $p = \infty$. Punctum igitur B inuenietur ponendo $p = \infty$. Erit ergo in hoc puncto $v = \frac{gP}{2}$ et radius osculi $r = P$.

Exemplum 1.

686. Ponamus resistentiam euanescentem ita vt motus fiat in vacuo, erit $k = \infty$, ideoque habebitur $ds\,d^3s - 3\,dds^2 = 0$. Quae aequatio diuisa per $ds\,dds$ et integrata dat $l\,dds - 3\,l\,ds = l\,C$ seu $\frac{dds}{ds^3} = \frac{1}{a\,dx} = \frac{dx}{a\,dx^2}$. Haec aequatio denuo integrata dat $-\frac{1}{2\,ds^2} = \frac{x}{a\,dx^2} + C$. Vel mutatis constantibue positoque $ds = p\,dx$; erit $-a = pp\,x + C\,pp$, quas quia posito $p = 1$, x debet euanescere, abit in hanc $x = \frac{a(pp-1)}{pp}$ seu $p = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$, ideoque $ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)}}$, quae est aequatio pro cycloide vt constat.

M.E.C.D. 2017

Exemplum 2.

687. Resistat medium in duplicata ratione celeritatum, erit $m = 1$; atque $\frac{1}{P} = \frac{1}{k}\int \frac{dp}{p^2} = C - \frac{1}{kp}$ Vnde fit $P = \frac{kp}{Ckp-1} = \frac{akp}{kp-a}$. Hanc ob rem erit $x = \int \frac{akdp}{p^2(kp-a)}$ et $s = \int \frac{akdp}{p(kp-a)}$. Fit ergo $s = k\,l\,\frac{kp-a}{(k-a)p}$ atque $e^{\frac{s}{k}} = \frac{kp-a}{(k-a)p} = \frac{kds-adx}{(k-a)ds}$ ob $ds = pdx$. Porro ergo habebitur $(k-a)\,e^{\frac{s}{k}}\,ds = kds - adx$, quae integrata dat $k(k-a)\,e^{\frac{s}{k}} = ks - ax + k(k-a)$. Vel eliminata quantitate exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ erit $ksds - axds - akds + akdx = 0$. At si exponentialem $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem exprimere velimus, erit $k(k-a)\,e^{\frac{s}{k}} - k(k-a) = k(k-a)\left(\frac{s}{k} + \frac{ss}{1.2k^2} + \frac{s^3}{1.2.3k^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4k^4} + \text{etc.}\right)$. Quae series substituta dat $\frac{a(s-x)}{k-a} = \frac{s^2}{1.2.k} + \frac{s^3}{1.2.3k^2} + \frac{s^4}{1.2.3.4k^3} + \text{etc.}$. In quouis puncto M est $v = \frac{gak(pp-1)}{2p(kp-a)}$. Pro puncto B vero in quo tangens est horizontalis erit $s = k\,l\,\frac{k}{k-a}$, atque $e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}$ et idcirco $x = -k + \frac{kk}{a}\,l\,\frac{k}{k-a}$. Continuetur nunc curua vltra B in BNC, cuius natura vt inueniatur in axe BQ ponatur abscissa $BQ = t$, et arcus $BN = z$. His positis erit $AP = x = -k - t + \frac{k^2}{a}\,l\,\frac{k}{k-a}$ et $AMN = s = z + k\,l\,\frac{k}{k-a}$. Erit ergo $e^{\frac{s}{k}} = \frac{k}{k-a}\,e^{\frac{z}{k}}$; quibus valoribus in superiore aequatione substitutis prodibit: $k^2\,e^{\frac{z}{k}} = kz + k^2 + at$, seu $at =$

Tab. XIV. Fig 5.

M.E.C.D. 2017

$at = k^2(e^{\frac{z}{k}} - 1) - kz$. Atque per ſeriem $at = \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3k} + \frac{z^4}{1.2.3.4k^2} +$ etc. pro curua BNC; at pro ramo BMA in quo erit arcus BM, z negatiuus erit $at = k^2(e^{\frac{-z}{k}} - 1) + kz = \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3.k} + \frac{z^4}{1.1\ 3.4.k^2} -$ etc. Curua vero BNC in C habebit quoque tangentem verticalem, quod punctum inuenitur ponendo $dz = dt$. Fiet vero hoc poſito $a = ke^{\frac{z}{k}} - k$, ſeu $z = k\,l\frac{a+k}{k} =$ BNC. Atque $t =$ CE $= k - \frac{kk}{a}\,l\frac{a+k}{k} = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} -$ etc. cum contra ſit AD $= \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3k} + \frac{a^3}{4k^2} +$ etc. Ex quo apparet punctum A eſſe altius poſitum quam punctum C; atque in A et E curuam habere cuſpides ſeu puncta reuerſionis, ita vt tam AD quam CE ſint curuae diametri; id quod ex hoc intelligitur, quod ſit $y = \int \frac{P dp \sqrt{(pp-1)}}{p^5}$, vbi $\sqrt{(p^2-1)}$ valorem habet tam affirmatiuum quam negatiuum.

Scholion 1.

688. Infra perſpicietur hanc curuam brachyſtochronam congruere cum curua tautochrona in eadem reſiſtentiae hypotheſi. Haec vero inter motus tautochronos et brachyſtochronos intereſt differentia; vt ad tautochronismum obtinendum corpus in ramo CND deſcendere in altero aſcendere debeat, cum e contrario pro brachyſtochronismo deſcenſus per AMB fieri debeat. Interim tamen

M.E.C.D. 2017

haec vtriusque curuae conuenientia attentione digna videtur, cum et in vacuo eadem congruentia obſeruetnr.

Exemplum 3.

689. Reſiſtat medium in quadruplicata ratione celeritatum, ita vt ſit $m = 2$. Habebitur ergo pro curua quaeſita iſta aequatio: $ds\,d^2s - 3\,dds^2 = \frac{g\,ds^3\,dy^2}{2k^2\,dx}$. Ad conſtruendam vero curuam $\frac{1}{p^2} = \frac{g}{k^2}\int\left(\frac{dp}{p^2} - \frac{dp}{p^4}\right)$; vnde fit $P = \frac{kp\sqrt{3}}{\sqrt{g(p^3 - 3np^2 + n)}}$ atque $s = \int \frac{k\,dp\sqrt{3}\,n}{\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$; et $x = \int \frac{k\,dp\sqrt{3}\,n}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$ ac $y = \int \frac{k\,dp\sqrt{3}\,n(pp-1)}{p\sqrt{g(p^4 - 3np^3 + np)}}$. Huius ergo curuae conſtructio vti generalis habetur. Quia autem n numerum quemcunque denotat, ſit $n = \frac{1}{2}$ erit $y = \int \frac{k\,dp\sqrt{3}}{p\sqrt{g(2p^2 - p)}} = \frac{2k\sqrt{3}\,(2p-1)}{\sqrt{g}\,p} - \frac{2k\sqrt{3}}{\sqrt{g}}$; quam conſtantem ideo adiecimus, quo fiat $y = 0$ poſito $p = 1$. Atque poſito $p = \infty$ erit applicata $DB = \frac{2k(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{\sqrt{g}}$. Fit autem $p = \frac{12k^2}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$ atque $\sqrt{(p^2 - 1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}}{12k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2}$. Ex quo oritur $x = \int \frac{12k^2\,dy - 4ky\,dy\sqrt{3g} - gy^2\,dy}{\sqrt{(96k^3y\sqrt{3g} - 24gk^2y^2 - 8gky^3\sqrt{3g} - g^2y^4)}}$ $\int \frac{12k^2\,dy - 4ky\,dy\sqrt{3g} - gy^2\,dy}{\sqrt{(9y^2 + 4ky\sqrt{3g})(24k^2 - 4ky\sqrt{3g} - gy^2)}}$, quae eſt aequatio inter coordinatas x et y pro curua quaeſita.

Scholion 2.

690. In medio, quod in ſimplici celeritatum ratione reſiſtit, brachyſtochronam ſimplicius determi-

M.E.C.D. 2017

terminare non licet, quam ſtatim ex vniuerſali conſtructione conſequitur. Quamobrem hunc reſiſtentiae caſum exemplo non ſumus proſecuti. Quod autem ad reliquas huc pertinentes propoſitiones attinet, in quibus curua quaerirur, ſuper qua corpus deſcendens citiſſime ad datam lineam ſiue rectam ſiue curuam perueniat; ea ſimili modo pro reſiſtente medio ſoluuntur, quo pro vacuo. Cum ſcilicet ex eodem puncto A innumerabiles egrediantur curuae brachyſtochronae; ex iis ea eſt eligenda, quae datae lineae ſiue rectae ſiue curuae ad angulos rectos occurrat; ſuper hac enim corpus ad iſtam lineam breuiſſimo tempore peruenire capite praec. eſt demonſtratum. Simili ratione curua, quae omnes brachyſtochronas ad angulos rectos traiicit, ab omnibus arcus abſcindet iſochronos, ſeu quos corpus deſcendens aequalibus temporibus abſoluit. Haecque omnia eodem ſe habent modo, quaecunque fuerit reſiſtentia, et quaecunque potentiae abſolutae. Problema autem brachyſtochronarum generaliſſime conceptum euoluemus.

PROPOSITIO 78.
Problema.

591. *In medio reſiſtente quocunque; et potentiis ſollicitantibus quibuscunque; inuenire curuam brachyſtochronam* A M, *ſuper qua corpus deſcendens ex* A *ad* M *citiſſime perueniat.* Tab. XIV. Fig. 6.

So-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Sit A motus initium; per quod ducatur recta quaecunque AP pro axe habenda, in qua sumatur abscissa $AP = x$; cui respondeat applicata $PM = y$ et arcus $AM = s$. Sit porro corporis in M celeritas debita altitudini v; et resistentia vtcunque a celeritate pendens $= R$. Quaecunque nunc corpus sollicitent potentiae absolutae, earum loco duae potentiae substitui possunt in datis directionibus ML et MN, quarum illa axi AP sit parallela, haec vero ad illum normalis. Vis autem corpus secundum ML sollicitans sit $= P$ et vis secundum $MN = Q$. Ex his viribus oritur $dv = P\,dx + Q\,dy - R\,ds$. Atque natura brachystochronismi dat $\frac{2v}{r} = \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3} = \frac{P\,dy - Q\,dx}{ds}$ (673.) denotante r radium osculi curuae in M versus superiora directum; pro quo ergo sumto dx constante ponimus $\frac{+ds^3}{dx\,ddy}$, cum alias deberet esse $r = \frac{-ds^3}{dx\,ddy}$. Ex his ergo duabus aequationibus $dv = P\,dx + Q\,dy - R\,ds$ et $\frac{2v\,dx\,ddy}{ds^2} = P\,dy - Q\,dx$, si eliminetur v, habebitur aequatio pro curua brachystochrona quaesita; est nempe $v = \frac{P\,dy\,ds^2 - Q\,dx\,ds^2}{2\,dx\,ddy}$: cuius differentiale loco dv, atque ipsum v in resistentia R substitutum dabit aequationem pro curua quaesita. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

692. Aequatio pro curua, si dicto modo v eliminetur fit differentialis tertii gradus. Quare si triplex integratio adhibeatur, tres quoque constantes adiici poterunt, quibus effici potest vt euanescente x simul quoque y et s et v euanescant, atque praeterea curua per datum punctum M transeat.

Corollarium 2.

693. Quia igitur semper curua brachystochrona potest exhiberi, quae initium habeat in A et per datum punctum transeat; infinitae curuae brachystochronae ex puncto A educi possunt.

Corollarium 3.

694. Inuenta aequatione pro curua brachystochrona AM, innotescet simul corporis super ea descendentis celeritas in singulis punctis; erit namque $v = \frac{P dy ds^2 - Q dx ds^2}{2 dx ddy}$.

Corollarium 4.

695. Data celeritate determinari ex ea poterit tempus, quo corpus arcum AM absoluit: erit scilicet tempus per $AM = \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2 dx ddy}}{\sqrt{(P dy - Q dx)}}$; quod propter aequationem inter x et y iam inuentam poterit saltem per quadraturas exhiberi.

Corollarium 5.

696. Si igitur curua esset inuenienda, quae omnes brachystochronas ex A eductas ad angu-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

los rectos traiicere deberet; tum eius lineae conſtructio haberetur, ſi ab omnibus abſcinderetur $\int \frac{\sqrt{2}dxddy}{\sqrt{(Pdy-Qdx)}}$ eiusdem magnitudinis. Hac enim ratione ab iſtis curuis infinitis arcus iſochroni abſcinduntur, qui, quoniam omnes curuae ſunt brachyſtochronae, terminabuntur ad traiectoriam orthogonalem.

Exemplum.

697. Sit reſiſtentia quadratis celeritatum proportionalis; atque exponens reſiſtentiae vtcunque variabilis q; erit $R=\frac{v}{q}$. Cum ergo ſit $dv=Pdx+Qdy-\frac{vds}{q}$, erit integrando $e^{\frac{\int ds}{q}}v=\int e^{\frac{\int ds}{q}}(Pdx+Qdy)$. Cum autem ſit $v=\frac{Pdyds^2-Qdxds^2}{2dxddy}$ erit $2dx\,ddy\int e^{\frac{\int ds}{q}}(Pdx+Qdy)=e^{\frac{\int ds}{q}}ds^2(Pdy+Qdx)$, in qua aequatione non amplius ineſt v. Interim tamen haec aequatio ſit differentialis tertii gradus, ſi differentiatione ſigna integralia tollantur, Indeterminati praeterea ipſarum P, Q et q valores in cauſa ſunt, quo minus aequatio ad conſtructionem praeparari queat.

Scholion.

698. Quae hic ex duabus potentiis P et Q circa curuas brachyſtochronas ſunt deducta, latiſſime patent; quia, quotcunque potentiae corpus ſollicitauerint, eae omnes in huiusmodi duas poſ-

ſunt

M.E.C.D. 2017

ſunt reſolui; ſi modo omnium directiones in eodem plano fuerint poſitae. Quamobrem in hac quoque propoſitione continentur brachyſtochronae pro quacunque virium centripetarum hypotheſi, quas autem, quia neque concinnae, neque conſtruibiles aequationes proueniunt, vlterius non perſequimur. Miſſis igitur his, in quibus celeritatum quaedam lex praeſcribitur, progredimur ad ſequentes quaeſtiones, in quibus curuae requiruntur, quae a corpore ſuper iis moto datam ſuſtineant preſſionem.

PROPOSITIO 79.

Problema.

699. *In hypotheſi grauitatis vniformis, et medio vniformi, quod in ratione quacunque celeritatum reſiſtit, determinare curuam aequabilis preſſionis* AM, *quae a corpore ſuper ea deſcendente, vbique eandem ſuſtineat preſſionem.* Tab. XV. Fig. 1.

Solutio.

Poſitis $AP = x$; $PM = y$; $AM = s$, et celeritati in M altitudine debita $= v$; ſit potentia corpus deorſum ſecundum ML trahens $= g$ et vis reſiſtentiae in $M = \frac{v^m}{k^m}$. Erit ergo dum corpus per elementum Mm progreditur $dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m}$

Ponamus curuam deorſum eſſe conuexam, ita vt

M.E.C.D. 2017

MR sit radii osculi directio, atque ipse radius osculi $MR = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$ posito dx constante. Vis ergo centrifugae directio erit in normali MN; eiusque quantitas est $= \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$. Secundum eandem vero directionem curua premitur a vi normali ex resolutione potentiae $ML = g$ orta, quae est $= \frac{g\,dy}{ds}$. Tota ergo vis qua curua secundum MN premitur est $= \frac{g\,dy}{ds} + \frac{2v\,dx\,ddy}{ds^3}$; quae cum debeat esse constans ponatur ea aequalis αg, habebiturque $\alpha g\,ds^2 = g\,dy\,ds + 2v\,dx\,ddy$, atque hinc $v = \frac{\alpha g\,ds^3 - g\,dy\,ds^2}{2\,dx\,ddy}$. Sit $ds = p\,dx$, atque $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$; erit $ddy = \frac{p\,dp\,dx}{\sqrt{(p^2-1)}}$ His substitutis erit $v = \frac{(\alpha g p^3 dx - g p^2 dx \sqrt{(p^2-1)})\sqrt{(pp-1)}}{2p\,dp} = \frac{\alpha g p^2 dx \sqrt{(p^2-1)} - g p dx (p^2-1)}{2dp}$. Sit porro $dx = 2q\,dp$ erit $v = gpq(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1))$ vel $v = Pq$, posito $gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1) = P$. Erit ergo $dv = P\,dq + q\,dP$ et $v^m = P^m q^m$. Quibus valoribus in aequatione $dv = g\,dx - \frac{v^m\,ds}{k^m}$ substitutis prodibit $P\,dq + q\,dP = g\,dx - \frac{P^m q^m\,ds}{k^m}$. Est vero $dx = 2q\,dp$ et $ds = p\,dx = 2p\,dq\,dp$. Quamobrem proueniet ista aequatio: $P\,dq + q\,dP = 2g\,q\,dp - \frac{2P^m q^{m+1} p\,dp}{k^m}$, quae duas tantum continet variabilem p et q, quia P per p datur. Ad hanc aequationem construendam ponatur $q = \frac{1}{P^{\frac{1}{m}} u}$; quo facto obtinebitur ista aequatio $du + \frac{2mgu\,dp}{P} = 2mp$

M.E.C.D. 2017

$\frac{2mpdp}{k^m P}$; quae ducta in $e^{\frac{2mg\int dp}{P}}$ et integrata abit in hanc $u = \frac{2me^{\frac{-2mg\int dp}{P}}}{k^m} \int \frac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p\,dp}{P}$. Hinc ergo inuenitur u per p, atque u inuento erit $q = \frac{1}{P u^{\frac{1}{m}}}$ atque $x = \int \frac{2\,dp}{P u^{\frac{1}{m}}}$ et $s = \int \frac{2pdp}{P u^{\frac{1}{m}}}$ et $y = \int \frac{2dpV(p^2-1)}{P u^{\frac{1}{m}}}$.

Cum autem sit $P = gp(\alpha pV(p^2-1) - p^2 + 1)$ erit $\frac{gdp}{P} = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{\alpha V(p^2-1)} + \frac{(1-\alpha^2)dp}{\alpha^2 p - \alpha V(p^2-1)}$ atque $\int \frac{gdp}{P} = lp + \frac{1}{\alpha} l(p + V(p^2-1)) - \frac{(\alpha+1)}{2\alpha} l \frac{\alpha p - V(p^2-1)}{p - V(p^2-1)}$ et $e^{2mg\int \frac{dp}{P}} = p^{2m}(p - V(p^2-1))^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}} (\alpha p - V(p^2-1))^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}$.

Est vero $\int \frac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p\,dp}{P} = \frac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p}{2mg} - \frac{1}{2mg} \int e^{\frac{2m\int dp}{P}} dp$.

Quocirca erit $u = \frac{p}{gk^m} - \frac{e^{\frac{-2mg\int dp}{P}}}{gk^m} \int e^{\frac{2mg\int dp}{P}} dp = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int p^{2m}(p - V(p^2-1))^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}} (\alpha p - V(p^2-1))^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}} dp}{gk^m p^{2m}(p - V(p^2-1))^{\frac{m(\alpha-1)}{\alpha}} (\alpha p - V(p^2-1))^{\frac{-m(\alpha+1)}{\alpha}}}$

Cum igitur hoc modo ex p inueniri possit u, curuae quaesitae constructio hinc perficietur. Q.E.I.

Corollarium I.

700. Curua inuenta ergo hanc habebit proprietatem, vt in quouis puncto M prematur versus

M.E.C.D. 2017

ſus MN vi conſtanti, quae eſt ad vim grauitatis ML, g vt α ad 1.

Corollarium 2.

701. Si pro α ſumatur numerus negatiuus, curua vbique ſecundum MR directionem priori oppoſitam aequabiliter premetur. Hoc ergo caſu curua debet eſſe concaua deorſum, quia vis centrifuga contraria atque maior eſſe debet quam vis normalis, cuius directio ſemper in MN eſt ſita.

Corollarium 3.

702. Si $\alpha = 0$; tum curua prodibit, quae nullam omnino preſſionem a corpore ſuſtinet: Quae ergo curua eſt ea ipſa, quam corpus proiectum libere motum deſcribit.

Corollarium 4.

703. Si $\alpha = 1$ ſeu tota preſſio $= g$, tum curua erit conuexa deorſum vbique. Nam quia vis normalis ſola vbique eſt minor quam g niſi caſu quo $ds = dy$; vis centrifuga cum ea conſpirare debet, ideoque radius oſculi in plagam ipſi MN oppoſitam cadere.

Corollarium 5.

704. Si ponatur $k^m e^{\frac{2mg\int dp}{P}} u = 2mz$, erit $dz = \frac{}{e^{2mg}}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{e^{\frac{2mg\int dp}{P}} p\,dp}{P}$. Particularis ergo ſolutio, quia in hac aequatione indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae, habebitur ſi ponatur $P = o$. Hinc autem fit $gp(\alpha p\sqrt{(p^2-1)} - p^2 + 1) = o$, ſeu $\alpha p = \sqrt{(p^2-1)}$ ſiue $\alpha ds = dy$. Vnde prodit $\alpha s = y$. Satisfacit ergo recta angulum cum verticali AP conſtituens, cuius ſinus eſt α ſumto 1 pro ſinu toto. Hoc enim caſu vis centrifuga euaneſcit, et vis normalis fit $= \alpha g$.

Exemplum

705. Sit $\alpha = 1$, ſeu quaeratur curua, quae vbique vi $= g$ prematur; quo caſu integratio ipſius $\frac{g\,dp}{P}$ ſimplicior euadit: erit enim $e^{\frac{2mg\int dp}{P}} = p^{2m}$ $(p - \sqrt{(p^2-1)})^{-2m} = (\frac{p}{p-\sqrt{(p^2-1)}})^{2m} = (p^2 + p\sqrt{(p^2-1)})^{2m}$. Hanc ob rem erit $u = \frac{p}{gk^m} - \frac{\int (p^2 + p\sqrt{(p^2-1)})^{2m} dp}{gk^m (p^2 + p\sqrt{(p^2-1)})^{2m}}$. Quae aequatio quoties $2m$ eſt numerus integer integrationem admittit. Poſito enim $p^2 + p\sqrt{(p^2-1)} = \frac{r+1}{2}$; erit $p = \frac{r+1}{2\sqrt{r}}$ atque $u = \frac{r+1}{2gk^m\sqrt{r}} - \frac{1}{4gk^m(r+1)^{2m}} \int \frac{(r-1)(r+1)^{2m} dr}{r\sqrt{r}}$. Eſt autem haec poſitione $r = 2p^2 - 1 + 2p\sqrt{(p^2-1)}$, ſeu $\sqrt{r} = p + \sqrt{(p^2-1)}$. Vt ſi fuerit $m = \frac{1}{2}$ ſeu reſiſtentia celeritatibus proportionalis erit $u = \frac{r+1}{2g\sqrt{kr}} - \frac{1}{4g(r+1)\sqrt{k}} \int \frac{(r^2-1)dr}{r\sqrt{r}}$

M.E.C.D. 2017

$\int \frac{(r^2-1)dr}{r\sqrt{r}} = \frac{1}{2g\sqrt{k}}\left(\frac{r+1}{\sqrt{r}} - \frac{r^2+6\sqrt{r}-3}{3(r+1)\sqrt{r}}\right) = \frac{2rr+6r+6\sqrt{r}}{6g(r+1)\sqrt{kr}}$ seu mutata constante $\mathfrak{C}$ est $u = \frac{r\sqrt{r}+3\sqrt{r}+2\mathfrak{C}}{3g(r+1)\sqrt{k}}$. Posito autem loco r eius valore erit $u = \frac{p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)}}{3gp\sqrt{k}} + \frac{\mathfrak{C}}{3g(p^2+p\sqrt{(p^2-1)})\sqrt{k}}$. Sit $\mathfrak{C}=0$; erit $u^{\frac{1}{m}} = u^2 = \frac{(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2}{9g^2kp^2}$, et propter $P = gp(p-\sqrt{(p^2-1)})$ $\sqrt{(p^2-1)}$), erit $Pu^{\frac{1}{m}} = \frac{(p-\sqrt{(p^2-1)})(p^2+1+p\sqrt{(p^2-1)})^2\sqrt{(p^2-1)}}{9gkp}$ atque $x = \frac{2gk}{3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)}} - 2gkl(3p^2-1-3p\sqrt{(p^2-1)})$.

Scholion.

706. Similis integratio formulae, cui u est aequalis, etiam succedit si $\alpha=-1$, quo casu prodit, concaua deorsum in qua vis centrifuga contraria est et maior quam vis normalis, quippe excessus est $=g$. Eadem vero ipsa prodit aequatio, quae pro casu $\alpha=1$, nisi quod signum ipsius $\sqrt{(p^2-1)}$ debet immutari Quod ad reliquas quaestiones huc pertinentes attinet, in quibus aliae pressionum leges proponuntur; eae vel ad nimis prolixos calculos deducunt; vel iam sunt pertractatae. Vidimus enim curuas, in quibus pressio totalis sit duplo maior, quam vel sola vis centrifuga vel sola normalis, esse brachystochronas, atque curuas in quibus alia obtinet ratio, supra quoque iam pertractauimus, cum curuas inuestigaremus, super quibus motus quam minime acceleraretur. Sequitur ergo, vt ad curuas inuenien-

das

M.E.C.D. 2017

das progrediamur, ſuper quibus plures diuerſi deſcenſus vel aſcenſus datam inter ſe teneant leges, quae quaeſtiones plurimum difficultatis in ſe habent. Neceſſe enim eſt ad huiusmodi problemata ſoluenda, vt celeritas corporis in ſingulis locis poſſit exprimi per quantitates, quibus curuae natura determinatur. Quod autem cum non in quauis reſiſtentiae hypotheſi poſſit perfici, vti ſupra notauimus; tales quaeſtiones tantum pro ſpecialibus reſiſtentiae hypotheſibus poterunt proponi. Praecipue ergo iſta tractatio ad reſiſtentiam quadratis celeritatum proportionalem eſt accommodanda; quia hoc caſu aequatio canonica, qua celeritas determinatur, ſeparationem variabilium admittit, atque ipſa celeritas poteſt exhiberi. Tum etiam conſiderari poteſt reſiſtentia, quae biquadratis celeritatum eſt proportionalis; cum pro hac hypotheſi celeritas quodammodo cognoſcatur. Denique quaecunque fuerit reſiſtentiae lex, ſi modo reſiſtentia eſt valde parua, huiusmodi quaeſtiones ſolutu faciliores euadent. In his vero problematis vel ratio celeritatum, quae in diuerſis deſcenſibus ſuper eadem curua acquiruntur, inueſtigatur; vel temporum, quibus diuerſi deſcenſus aut aſcenſus abſoluuntur, ratio. Atque in vtroque genere, ex data vel temporum vel celeritatum variis deſcenſibus acquiſitarum ratione ipſae curuae ſunt inueniendae.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tab. XV. Fig. 2. 707. *In medio vniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum, atque potentia absoluta deorsum tendente; comparare inter se celeritates in puncto* A, *quae in diuersis descensibus corporis super curua* MA *acquiruntur.*

Solutio.

Sit celeritas in A quam vno descensu acquisiuit debita altitudini b, et celeritas in M debita altitudini v. Ponantur $AP = x$, $AM = s$, potentia sollicitans in M quae sit vtcunque variabilis $= P$; atque exponens resistentiae $= k$. His positis erit $dv = -P\,dx + \frac{v\,ds}{k}$, quae aequatio integrata dat $v = e^{\frac{s}{k}}\left(b - \int e^{\frac{-s}{k}} P\,dx\right)$ integrali $\int e^{\frac{-s}{k}} P\,dx$ ita accepto vt euanescat posito $x = o$. Sit nunc M initium descensus vbi est $v = o$, inuenietur hoc punctum ex aequatione $b = \int e^{\frac{-s}{k}} P\,dx$. Iam ponatur alius descensus fieri ex puncto proximo m, atque celeritas in A acquisita sit debita altitud. $b + db$. Erit ergo $b + db = \int e^{\frac{-s}{k}} P\,dx =$ summae omnium $e^{\frac{-s}{k}} P\,dx$ ab A vsque ad m; in aequatione vero priore $\int e^{\frac{-s}{k}} P\,dx$ significat summam omnium $e^{\frac{-s}{k}} P\,dx$ ab A vsque ad M tantum. Illa ergo summa superat hanc summam vltimo elemento $e^{\frac{-s}{k}} P\,dx$

M.E.C.D. 2017

Pdx existente AM$=s$ et P$p=dx$. Erit ergo $db=e^{-\frac{s}{k}}Pdx$. Ex qua aequatione datur relatio inter arcum MA descensu percursum et inter celeritatem in puncto infimo A acquisitam. Q.E.I.

Corollarium 1.

708. Dato ergo arcu descensus AM$=s$; erit altitudo celeritati in A acquisitae debita, $b=\int e^{-\frac{s}{k}}Pdx$. Seu si punctum M et celeritas in A tanquam variabiles quantitates considerantur, erit aequatio inter eas $db=e^{-\frac{s}{k}}Pdx$.

Corollarium 2.

709. Ex hac ergo aequatione, si proposita fuerit quaecunque ratio inter arcus descensus et celeritates in puncto A acquisitas; inuenietur aequatio pro curua AM propositae conditioni satisfaciens.

Corollarium 3.

710. Si medium non fuerit vniforme sed difforme vtcunque, existente eius exponente $=q$; loco aequationis inuentae prodibit ista aequatio $db=e^{-\int\frac{ds}{q}}Pdx$, cuius similis est vsus.

Corollarium 4.

711. Quia valor ipsius e est vnitate maior, quippe 2,71821828 4, erit $e^{-\frac{s}{k}}$ seu $e^{-\int\frac{ds}{q}}$ vnitate minor;

M.E.C.D. 2017

et hanc ob rem $db \lesseqgtr P\,dx$. In vacuo vero esset $db = P\,dx$.

Scholion I.

712. Simili modo res se habet in ascensu, quando corpus celeritate altitudini b debita ex A per arcum $AM = s$ ascendit. Tum enim erit $db = e^{\frac{s}{k}} P\,dx$ vel in medio difformi $db = e^{\frac{\int ds}{q}} P\,dx$. Quae formulae ex illis descensui inseruientibus inuenientur ponendo $-s$ loco $+s$; qua substitutione semper descensus in ascensum transmutatur. Hinc apparet quemadmodum pro descensu semper erat $db \lesseqgtr P\,dx$, ita fore pro ascensu semper $db \gtreqless P\,dx$, quia $e^{\frac{s}{k}}$ seu $e^{\frac{\int ds}{q}}$ est vnitate maior.

Corollarium 5.

713. In medio ergo resistente neque pro ascensu neque pro descensu esse potest $b = \int P\,dx$ vel $b = \alpha \int P\,dx$; tum enim foret $e^{\frac{s}{k}} = \alpha$; seu $s =$ const. in qua aequatione nulla linea continetur.

Corollarium 6.

714. Neque etiam curua poterit inueniri, pro qua vel in descensu vel in ascensu foret $b = \int Q\,dx$; denotante Q functionem quamcunq; ipsarum s et x; nisi Q ita sit comparata vt $\frac{Q}{P}$ fiat $= 1$ positis s et $x = 0$.

Fit

M.E.C.D. 2017

Fit enim $e^{\pm\int\frac{ds}{q}}P = Q$ et $e^{\pm\int\frac{ds}{q}}$ abit in 1 posito $s = 0$.

Scholion 2.

715. Ratio huius est, quod posuimus s euanescere euanescente x; atque hanc ob rem aequatio $db = e^{\pm\int\frac{ds}{q}}P\,dx$ ita debet integrari, vt euanescat posito $x = 0$. Si autem b ita detur, vt db per dx exprimatur, aequatio per dx diuidi poterit. Quocirca ea ad hanc legem non potest accommodari, nisi forte sponte aequatio hac proprietate iam gaudeat. Sin autem datus ipsius b valor talis fuerit, vt esset $db = R\,ds$, seu $b = \int R\,ds$ euanescente b facto $s = 0$; tum aequatio pro curua quaesita erit $R\,ds = e^{\pm\int\frac{ds}{q}}P\,dx$, quae semper est pro curua reali, dummodo $\int R\,ds$ habeat valorem affirmatiuum, prodeatque $ds > dx$ seu $e^{\pm\int\frac{ds}{q}} P > R$.

Exemplum 1.

716. Sit potentia sollicitans vniformis, seu $P = g$, et medium resistens vniforme, requiratur-que curua MA hanc habens proprietatem, vt corpus in singulis descensibus ad A vsque acquirat celeritates, quae sint in subduplicata ratione arcuum descensu percursorum. Erit ergo $V b$ vt $V s$ seu $b = \alpha s$; vnde fit $\alpha\,ds = g e^{-\frac{s}{k}} dx$ seu $\alpha e^{\frac{s}{k}} ds = g\,dx$

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$=gdx$, cuius integralis est $\alpha k(e^{\frac{s}{k}}-1)=gx$; addita constante, quo fiat $x=o$ euanescente s. Habebitur ergo $e^{\frac{s}{k}}=\frac{\alpha k+gx}{\alpha k}$ atque $\frac{s}{k}=l(\alpha k+gx)-l\alpha k$. Quae differentiata dat $\frac{ds}{k}=\frac{gdx}{\alpha k+gx}$; ex quo intelligitur curuam esse tractoriam filo longitudinis k super basi horizontali a puncto A deorsum

Tab. XV. Fig. 3. distante interuallo $\frac{\alpha k}{g}$. Constructur ergo curua hoc modo: super basi horizontali CE et filo $BC=k$ describatur tractoria BA; tum ducatur horizontalis DA a CE ad distantiam $DC=\frac{\alpha k}{g}$; quo facto satisfaciet curuae portio BA quaesito. Ponimus autem BC verticalem et B punctum tractoriae summum; ex quo intelligitur α necessario minus esse debere quam g. Si enim esset maior foret $CD>CB$, ideoque punctum A imaginarium. Sin autem esset $\alpha=g$, punctum A in B caderet, adeoque nonnisi punctum satisfaceret. Si fuerit $\alpha=o$, punctum A infinite distaret, et corpus descendens omnem amitteret celeritatem. Cum igitur debeat esse $\alpha<g$ erit $b<gs$.

Exemplum 2.

Tab. XV. Fig. 4. 717. In superiori tam resistentiae quam potentiae sollicitantis hypothesi quaeratur curua AMF super qua omnes ascensus ex puncto A facti ita se habeant; vt toti arcus ascensibus singulis absoluti sint quadratis celeritatum initialium in A proportionalibus.

M.E.C.D. 2017

portionales. Erit ergo vt ante $b = \alpha s$; atque $db = \alpha ds$. Cum autem pro aſcenſibus ſit $db = ge^{\frac{s}{k}} dx$, erit $\alpha e^{\frac{-s}{k}} ds = g dx$, atque integrando $\alpha k(1 - e^{\frac{-s}{k}}) = gx$. Hinc igitur habetur $e^{\frac{-s}{k}} = \frac{\alpha k - gx}{\alpha k}$; atque $\frac{ds}{k} = \frac{g dx}{\alpha k - gx}$ ſeu $(\frac{\alpha k}{g} - x)\frac{ds}{dx} = k$. Ex quo appareret curuam ſatisfacientem eſſe iterum tractoriam ſuper baſi horizontali CE filo longitudinis k conſtructam; ſed deorſum ſpectantem, cuius cuspis ſit in B exiſtente $BC = k$. Sumatur autem $CD = \frac{\alpha k}{g}$; ductaque horizontali DA erit A punctum in quo aſcenſus omnes incipere debent. Hinc ergo quoque intelligitur α non poſſe eſſe maius quam g; quia alias punctum A foret imaginarium. At ſi fuerit $\alpha = g$ ſeu $b = gs$ incidet A in B eritque arcus quolibet aſcenſu percurſus $= \frac{b}{g}$.

Scholion 3.

718. Plura huiusmodi exempla, quia tam facile ex vniuerſali formula inuenta reſolui poſſunt, hic praetermitto; neque etiam huiusmodi quaeſtiones pro aliis reſiſtentiae hypotheſibus, quibus ſolutio earum inueniri queat, affero; quoniam tales quaeſtiones neque iam ſunt agitatae, neque ſatis ſunt curioſae, vt earum ſolutiones requirantur. Ad dignioria igitur progredior problemata, in quibus curuae quaerunrur tautochronae, ſuper quibus omnes vel aſcenſus vel deſcenſus aequalibus abſoluantur temporibus.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 81.

Problema.

Tab. XV. Fig. 2.

719. *In hypothesi potentiae vniformis deorsum directae et medio vniformi, quod resistit in duplicata ratione celeritatum inuenire curuam tautochronam* AM, *super qua omnes descensus ad punctum* A *vsque absoluantur aequalibus temporibus.*

Solutio.

Considereretur quicunque descensus, in quo celeritas quam corpus in puncto infimo A acquirit, debita sit altitudini b. Ponantur $AP = x$; $AM = s$; altitudo celeritati in M debita $= v$; atque potentia sollicitans $= g$ et medii exponens $= k$, ita vt resistentia in M sit ad vim grauitatis vt $\frac{v}{k}$ ad 1. His positis erit $dv = -g\,dx + \frac{v\,ds}{k}$; quae aequatio integrata dat $v = e^{\frac{s}{k}}\left(b - \int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx\right)$ integrali $\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx$ ita sumto vt euanescat posito x vel $s = o$. Ex hac ergo aequatione initium descensus inuenitur ponendo $v = o$ seu $\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = b$. Tempus vero quo arcus M A absoluitur hinc erit $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} V\left(b - e^{\frac{-s}{k}} g\,dx\right)}$, ex quo prodibit totius descensus tempus, si post integrationem fiat $\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = b$. Ponamus breuitatis gratia $\int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = t$, et

M.E.C.D. 2017

et $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = du$, ita vt sit tempus totius descensus $= \int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$, posito post integrationem $t = b$. Quo nunc haec expressio perpetuo eundem obtineat obtineat valorem, debebit $\int \frac{du}{\sqrt{(b-t)}}$ esse functio nullius dimensionis ipsarum b et t, vt posito $t = b$ ex formula b euanescat. Hanc ob rem du debet esse functio dimidiae dimensionis ipsius t tantum, quia u a b pendere non potest. Fieri ergo necesse est $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}}$ existente α quantitate constante b non continente. Hoc posito erit tempus vnius descensus $= \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{(bt-tt)}}$, posito post integrationem $t = b$. Vel posita ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$ erit tempus vnius descensus $= \alpha\pi$; qui valor perpetuo idem manet quomodocunque b seu descensus initium mutetur. Curua ergo tautochrona quaesita determinabitur ex hac aequatione $du = \frac{\alpha dt}{\sqrt{t}} = \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}}$, cuius integralis est $2\alpha\sqrt{t} = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ seu $t = \frac{k^2}{\alpha^2}(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ addita scilicet constante, quae faciat t euanescere posito $s = o$. Cum autem sit $t = \int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx$, erit $dt = e^{\frac{-s}{k}} g\,dx = \frac{k}{\alpha^2}(1 - e^{\frac{-s}{2k}}) e^{\frac{-s}{2k}} ds$. Ponamus $\alpha^2 g = a$ seu $\alpha = \sqrt{\frac{a}{g}}$; erit $a\,dx = k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)\,ds$, cuius integralis est $ax = 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1) - ks$, quae quidem aequationes,

M.E.C.D. 2017

quia variabiles s et x a se inuicem sunt separatae ad curuam construendam sufficiunt. Sin autem aequatio ab exponentialibus libera desideretur, quia ex altera aequatione est $k\,(e^{\frac{s}{2k}}-1) = \frac{ax+ks}{2k}$; erit hoc valore in altera substituto $axds + ksds = 2akdx$. Q. E. I.

Corollarium 1.

720. Quia est $\alpha = \sqrt{\frac{a}{g}}$; erit tempus vnius descensus $= \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. In vacuo autem et grauitate $= 1$, est tempus descensus penduli $f = \frac{\pi\sqrt{2f}}{2}$ (166). Quare longitudo penduli isochroni in vacuo est $= \frac{2a}{g}$.

Corollarium 2.

721. Si igitur fuerit $\frac{2a}{g} = 3166$ part. millesimarum pedis Rhenani, descensus absoluetur dimidio minuto secundo; hoc ergo euenit si sit $a = 1583g$ serup. ped. Rhen.

Corollarium 3.

722. Altitudo celeritati in M debita seu v est $= e^{\frac{s}{k}}(b - \int e^{\frac{-s}{k}} g\,dx) = e^{\frac{s}{k}}(b-t)$ atque ob $t = \frac{gk^2(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2}{a}$ erit $v = e^{\frac{s}{k}}(-\frac{gk^2}{a}(1-e^{\frac{-s}{k}})^2) = \frac{abe^{\frac{s}{k}} - gk^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2}{a}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 4.

723. Posito $v=0$, prodibit totus arcus descensus ex hac aequatione $ab=gk^2(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Si ergo arcus descensus ponatur $=f$, erit $ab=gk^2(1-e^{\frac{-f}{2k}})^2$. Quare dato arcu descensus f erit $v=\frac{gk^2e^{\frac{s}{k}}}{a}((1-e^{\frac{-f}{2k}})^2-(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2)$.

Corollarium 5.

724. Aequatio pro curua haec $ax=2k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2-ks$ in seriem exponentiali $e^{\frac{s}{2k}}$ conuertendo, quae est $1+\frac{s}{2k}+\frac{s^2}{1.2.4k^2}+\frac{s^3}{1.2.3.8k^3}+$ etc. abit in hanc $ax=\frac{s^2}{1.2.2}+\frac{s^3}{1.2.3.4k}+\frac{s^4}{1.2.3.4.8k^2}+$ etc. seu $2ax=\frac{s^2}{1.2}+\frac{s^3}{1.2.3.2k}+\frac{s^4}{1.2.3.4.4k^2}+$ etc.

Scholion 1.

725. Notari hic conuenit hanc curuam simili aequatione exprimi, qua supra brachystochrona ascensui inseruiens exprimebatur; ibi enim erat $at=\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3k}+\frac{z^4}{1.2.3.4.k^2}+$ etc. (687), quae aequatio ab hac nostra pro tautochrona inuenta in hoc tantum differt, quod hic sit $2a$ quod ibi erat a, atque exponens resistentiae brachystochronae duplo maior est exponente resistentiae pro tautochrona. Curua ergo brachystochrona quoque ad tautochronismum producendum accom-

M.E.C.D. 2017

modari potest; arcu ascensus descensui tributo, in medio resistente, cuius exponens est duplo minor.

Corollarium 6.

726. Ad inueniendam continuationem curuae MA vltra A poni debet s negatiuum, quo facto habebitur $ax = 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1) + ks$ vel $2ax = \frac{s^2}{1.2} - \frac{s^3}{1.2.3.2k} + \frac{s^4}{1.2.3.4.4k^2} -$ etc. Quae eadem aequatio prodiisset, si k negatiuum fecissemus. Facto autem k negatiuo descensus mutatur in ascensum; quocirca curua MA vltra A continuata ascensui inseruiet atque super ea omnes ascensus eodem absoluentur tempore scilicet $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Corollarium 7.

Tab. XV. Fig 5.

727. Eadem ergo curua continua BMANC erit tautochrona tam pro descensu quam pro ascensu. Namque super arcu BMA omnes descensus eodem tempore absoluuntur, atque super arcu ANC omnes ascensus. Quare omnes dimidiae oscillationes, quae in arcu BMA incipiunt, erunt inter se isochronae, atque tempus vnius semioscillationis erit $= 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Corollarium 8.

728. Si resistentia euanescit, quo casu k fit ∞, curua haec in cycloidem abire debet, quae est

M.E.C.D. 2017

eſt curua tautochrona in vacuo. Hoc ipſum aequatio per ſeriem expreſſa indicat, fit enim $2ax = \frac{s^2}{1.2}$ ſeu $4ax = s^2$ aequatio pro cycloide.

Corollarium 9.

729. Curua ergo BMANC prout cyclois habebit cuſpides verticales in B et C, ad quas inueniendas ponatur $dx = ds$, eritque pro arcu BMA, $a = k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$ ſeu $s = 2kl\frac{a+k}{k} =$ AMB; atque eius altitudo BD erit $= 2k - \frac{2k^2}{a} l\frac{a+k}{k}$. Pro arcu aſcenſus vero ANC erit ANC $= 2kl\frac{k}{k-a}$, et CE $= \frac{2k^2}{a} l\frac{k}{k-a} - 2k$. Siue per ſeries erit BD $= a - \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} - \frac{2a^4}{5k^3} +$ etc. Atque CE $= a + \frac{2a^2}{3k} + \frac{2a^3}{4k^2} + \frac{2a^4}{5k^3} +$ etc.

Corollarium 10.

730. Ex his perſpicitur cuſpicem C arcus aſcenſus eleuatiorem eſſe cuſpide A arcus deſcenſus. Atque arcus ANC cuſpis in infinitum abit ſi $k = a$; et ſi $a > k$ cuſpis C erit imaginaria. Ceterum ex aequatione patet, tam BC quam CE eſſe diametros curuae inuentae.

Corollarium 11.

731. Si corpus in dimidia oſcillatione habuerit celeritatem altitudini b debitam, erit arcus deſcenſus $= 2kl\frac{k\sqrt{g}}{k\sqrt{g} - \sqrt{ab}}$ ſeu per ſeriem $= \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{g}} + \frac{2ab}{2gk}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} +$ etc. atque sequens arcus ascensus $=$
$2kl\frac{k\sqrt{g}+\sqrt{ab}}{k\sqrt{g}} = \frac{2\sqrt{ab}}{2gk} - \frac{2ab}{2gk} + \frac{2ab\sqrt{ab}}{3gk^2\sqrt{g}} -$ etc.

Corollarium 12.

732. Si ergo descensus fiat ex puncto B ita vt arcus descensus sit $=AMB=2kl\frac{a+k}{k}$ erit $b=\frac{ga\,k^2}{(a+k)^2}$, sequentis vero ascensus arcus erit $=2k\,l\frac{2a+k}{a+k}$.

Corollarium 13.

733. Ex aequatione pro hac curua apparet curuam in puncto A habituram esse tangentem horizontalem. Cum porro posito ds constante radius osculi in M sit $=\frac{ds\,dy}{d\,dx}=\frac{ds\sqrt{(ds^2-dx^2)}}{ddx}$; quia est $dx=\frac{k}{a}(e^{\frac{s}{2k}}-1)ds$, s erit $ddx=\frac{1}{2a}e^{\frac{s}{2k}}ds^2$ et $\sqrt{(ds^2-dx^2)}=ds\sqrt{(1-\frac{k^2}{a^2}(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2)}$; erit radius osculi in $M=\frac{\sqrt{(4a^2-4k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)^2)}}{e^{\frac{s}{2k}}}$. Posito ergo $s=0$ erit radius osculi in puncto infimo $A=2a$. In B vero et C radius osculi euanescit.

Corollarium 14.

734. Radius osculi non est maximus in puncto infimo A; sed per methodum maximorum maximus inuenitur in arcu ascensus, idque in puncto

M.E.C.D. 2017

cto O existente $AO = 2k\,l\frac{k^2}{k^2-a^2}$. In hoc enim puncto est radius osculi $= \frac{2ak}{\sqrt{(k^2-a^2)}}$. Ex quo concluditur nisi sit $k > a$, curuaturam curuae ANC perpetuo diminui, neque punctum O usquam existere.

Scholion 2.

735. Hoc igitur problemate duas inuenimus curuas, super quarum altera omnes descensus, sualtera vero omnes ascensus aequalibus absoluntur temporibus. Atque cum super tota curua BAC omnes itus seu semioscillationes aequalibus peraganturtemporibus, si quidem in curuae portione BA incipiant; haec curua ad oscillationes in fluido isochronas faciendas esset idonea, si modo reditus quoque inter se essent isochroni, de quo vero non constat. Quia autem in fluidis praeter resistentiam quadratis celeritatum proportionalem alia insuper obseruatur, quam momentis temporum proportionalem seu constantem esse probabile est; etiam coniunctim cum ista resistentia tautochronam determinare operae pretium est; quod vero facile ex praecedente effici potest. Sit enim resistentia constans $= h$, erit pro descensu $dv = -g\,dx + h\,ds + \frac{v\,ds}{k}$. Quare si in priore operatione tantum loco $g\,dx$ vbique $gdx - hds$ substituatur, tautochrona satisfaciens simili modo obtinebitur; pro descensu scilicet prodibit ita curua $ax = (\frac{ah}{g} - k)s + 2k^2(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$; atque pro ascensu vero haec

$ax =$

*M.E.C.D. 2017

$ax = (k - \frac{ab}{g})s + 2k^2(e^{\frac{-s}{2k}} - 1)$, quae curua quoque cum priore eandem curuam continuam conſtituit, abit enim altera in alteram ponendo s negatiuum. Notandum hic eſt ſi fuerit $k = \frac{ab}{g}$ fore curuam tautochronam tractoriam BAF aſymtotam habentem horizontalem CE, quae a puncto A diſtet interuallo $AE = \frac{2k^2}{a}$. Fili autem longitudo, quo haec tractoria deſcribitur, eſt $= 2k$. Quod autem ſuper huiusmodi curua tangentem horizontalem nusquam habente ſemioſcillatio abſolui poſſit, atque alicubi punctum aequilibrii A exiſtere, mirum non eſt; cum, vt ſupra iam obſeruauimus, in tali reſiſtentiae hypotheſi, corpus in loco ſubſiſtere queat decliui. His autem caſibus, quibus curua vltra A deſcendere pergit nulli reditus atque ideo nullae oſcillationes peragi poſſunt, quia corpus, quanquam ſuper plano decliui ad quietem peruenire poteſt, tamen ſuper eo aſcendere nequit; in quouis enim curuae portionis AF puncto corpus in quiete perſeuerare poteſt.

Scholion 3.

736. Non multo difficilior fit problematis ſolutio, ſi potentia deorſum tendens non conſtans, ſed variabilis vtcunque P, atque exponens reſiſtentiae etiam variabilis q ponatur. Habebitur enim pro elemento temporis in deſcenſu $\frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{ds}{q}}\sqrt{(b - \int e^{-\int\frac{ds}{q}} P\,dx)}}$. Si nunc vt ante ponatur $\int e^{-\int\frac{ds}{q}}$

M.E.C.D. 2017

$\int e^{-\int \frac{ds}{q} P dx} = t$; et $\frac{ds}{e^{\frac{1}{2}\int \frac{ds}{q}}} = du$; debebit quoque esse $du = \frac{\alpha dt}{dt}$ seu $t = \frac{\alpha^2 dt^2}{du^2} = \frac{\alpha^2 P^2 dx^2}{e^{\int \frac{ds}{q}} ds^2}$. Quae aequatio denuo differentiata posito ds constante et loco dt eius valore substituto dabit $\frac{q ds^2}{2\alpha^2} = P q\, ddx + q\, dP dx - 2 P dx ds$ pro curua descensus isochronos habente; Huiusque curuae continua vltra A ascensibus inseruiet.

Scholion 4.

737. Tautochronam hanc in hypothesi resistentiae quadratis celeritatum proportionalis primus ego dedi in Comment. Tomo IV. vbi eadem, qua hic, sum vsus methodo. Deinceps vero etiam Cel. *Ioh. Bernoulli* mihi per literas significauit, se quoque in eadem resistentiae hypothesi istam tautochronam reperisse; cuius methodus extat in Comm. Acad. Paris. A. 1730. In aliis vero resistentiae hypothesibus, excepta ea, quae ipsis celeritatibus est proportionalis, nemo adhuc, quantum mihi constat, tautochronas determinauit. Quod enim ad eas curuas attinet, quas in Act. Lips. A. 1726. tautochronarum nomine dedi; eae quaesito non satisfaciunt; vti Cel. *Hermannus*, qui primum in easdem inciderat, atque ego postea monstrauimus. Difficultas autem methodi huius tautochronas inueniendi in hoc

M.E.C.D. 2017

consistit, quod in aliis resistentiae hypothesibus celeritas non possit vniuersaliter ex aequatione canonica determinari. Quomodo vero nihilominus pro aliis resistentiis tautochronae inuestigari queant, ex sequente propositione colligi poterit; in qua pro mediis rarissimis in quacunque celeritatum ratione multiplicata resistentibus tautochronae inueniendae proponuntur.

PROPOSITIO 82.
Problema.

Tab. XV. Fig. 2.

738. *In medio rarissimo, quod resistit in quacunque multiplicata ratione celeritatum, et hypothesi potentiae vniformis deorsum tendentis, determinare curuam tautochronam* AM, *super qua vel omnes descensus vel ascensus aequalibus absoluantur temporibus.*

Solutio.

Positis abscissa $AP = x$ et arcu $AM = s$; sit totus arcus descensu aliquo descriptus $= f$. Potentia sollicitans deorsum ponatur $= g$ altitudo celeritati in M debita sit $= v$, exponens resistentiae $= k$, atque ipsa resistentiae vis $= \frac{v^m}{k^m}$, vbi k est quantitas valde magna ita vt fractiones, quae in denominatore k plurium quam m dimensionum habent, pro euanescentibus haberi queant. His positis erit ex natura descensus $dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{v^m ds}{k^m}$. Iam si resistentia prorsus abesset, curua quesita esset cyclois, cuius aequatio est $gx = \alpha s^2$; quia autem medium est rarissimum, curua quaesita non multum a cycloide differet; ponatur igitur aequatio pro curua quaesita haec $gx = \alpha s^2 + \frac{\mathfrak{C} s^n}{k^m}$. Quia vero est $dv = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m}$ propter terminum $\frac{v^m ds}{k^m}$ valde paruum erit proxime $v = C - gx = C\alpha s^2 - \frac{\mathfrak{C} s^n}{k^m}$, vbi constans C ex hoc determinatur, quod si fit $s = f$ fiat $v = 0$. Quocirca erit $v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\mathfrak{C}}{k^m}(f^n - s^n)$ quam proxime. Ponatur ergo $v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\mathfrak{C}}{k^m}(f^n - s^n) + Q$, erit $dv = -2\alpha s ds - \frac{n\mathfrak{C} s^{n-1} ds}{k^m} + dQ = -gdx + \frac{v^m ds}{k^m} = -2\alpha s ds - \frac{n\mathfrak{C} s^{n-1} ds}{k^m} + \frac{\alpha^m (f^2 - s^2)^m ds}{k^m}$, neglectis reliquis terminis qui pro v^m poni deberent; quia in iis k plures quam m in denomitatore habet dimensiones. Ex his iam sequitur fore $Q = \frac{\alpha^m}{k^m} \int (f^2 - s^2)^m ds$ integrali hoc ita accepto vt euanescat posito $s = f$. Erit ergo

$$v = \alpha(f^2 - s^2) + \frac{\mathfrak{C}}{k^m}(f^n - s^n) + \frac{\alpha^m}{k^m} \int (f^2 - s^2)^m ds ;$$

M.E.C.D. 2017

atque hinc $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}} - \frac{\mathfrak{C}(f^n-s^n)-\alpha^m\int(f^2-s^2)^m ds}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$

omittendis iterum terminis sequentibus ob memoratam rationem. Hinc nunc prodibit tempus $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} - \int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}$

$$-\frac{\mathfrak{C}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha^m}{2\alpha^{\frac{3}{2}}k^m}\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}},$$

quod ita integratum, vt euanescat posito $s=0$; dabit tempus, quo corpus descendens arcum MA $=s$ absoluit. Totum ergo descensus tempus per arcum f obtinebitur, si post integrationem ponatur $s=f$; quod tempus debet esse constans seu ita comparatum, vt non pendeat ab f. Primus autem temporis terminus $\int\frac{ds}{\sqrt{\alpha(f^2-s^2)}}$ posito post integrationem $s=f$ iam dat huiusmodi expressionem, in qua non amplius inest f; prodit enim $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$ Quamobrem si duo reliqui termini ita essent comparati, vt postquam positum est $s=f$ sese destruant; quaesito foret satisfactum; haberetur enim pro integro descensus tempore haec expressio $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$; quae est constans. Debebit ergo esse $\mathfrak{C}\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$

$$=-\alpha^m\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}},$$ posito post integrationem $s=f$. Dat autem $\int\frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ posito $s=f$, multiplum potestatis ipsius f, cuius exponens est $n-2$, atque alterum integrale $\int\frac{ds\int(f^2-s^2)^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ posi-

M.E.C.D. 2017

posito $s=f$ dat multiplum potestatis ipsius f, cuius exponens est $2m-1$. Fiat igitur $n=2m+1$, atque & ita sumatur vt hae duae potestates ipsius f, quarum vtriusque exponens erit $2m-1$, sese destruant. Quo autem appareat quales coefficientes habiturae sint istae ipsius f potestates; ex casibus simplicioribus concludemus. Integratis igitur sequentibus formulis ita vt euanescant posito $s=o$, tumque facto $s=f$ reperietur $\int \frac{(f-s)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = f^{-1}$; atque $\int \frac{(f^3-s^3)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1}f^1$; et $\int \frac{(f^5-s^5)ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.4}{1.3}f^3$; hincque erit generaliter $\int \frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.4.6.\text{---}2m}{1.3.5.\text{---}(2m-1)}f^{2m-1}$, vnde erit & $\int \frac{ds(f^n-s^n)}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2.4.6.\text{---}2m}{1.3.5.\text{---}(2m-1)}$ & f^{2m-1}. Alterius termini coefficiens ex eadem analogia innotescet. Est enim integratione ita instituta, vt integrale euanescat posito $s=o$; per seriem $\int (f^2-s^2)^m ds = -f^{2m}(f-s) + \frac{m}{1.3}f^{2m-2}(f^3-s^3) - \frac{m(m-1)}{1.2.5}f^{2m-4}(f^5-s^5) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.7}f^{2m-6}(f^7-s^7)$ — etc. Haec igitur series in $-\frac{\alpha^m ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$ ducta et integrata atque tum posito $s=f$, dabit $\alpha^m f^{2m-1}(1-\frac{2m}{1.3}+\frac{4m(m-1)}{1.3.5}-\frac{8m(m-1)(m-2)}{1.3.5.7.}+$ etc.$) = \frac{\alpha^m f^{2m-1}}{2m+1}$. His igitur duobus valoribus inter se aequatis prodit &

M.E.C.D. 2017

$\frac{1.3.5.7.---(2m-1)\,\alpha^m}{2.4.6.8.----\,2m(2m+1)}$, quo valore loco $\mathfrak{C}$ ſubſtituto habebitur pro curua tautochrona ad deſcenſus pertinente, poſito $\frac{1}{a}$ loco α homogeneitatis ergo, ſequens aequatio $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{1.3.5.----(2m-1)\,s^{2m+1}}{2.4.6.----2m(2m+1)a^m k^m}$. Vel ſi ex x deſideretur s hinc oritur iſta aequatio $s = \sqrt{gax} - \frac{1.3.5.---(2m-1)g^m a x^m}{2.4.6.---2m(2m+1)2k^m}$. Atque tempus vnius cuiusque deſcenſus ſuper hac curua erit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{2}$, ſeu longitudo penduli in vacuo a grauitate naturali $= 1$ ſollicitati, eodem tempore deſcenſus abſoluentis erit $= \frac{a}{2}$. Eadem aequatio pro curua tautochrona mutatur in aequationem pro curua ſuper qua omnes aſcenſus aequalibus temporibus, tempore ſcilicet $\frac{\pi\sqrt{a}}{2}$ abſoluuntur, ſi loco k^m ſcribatur $-k^m$. Q. E. I.

Corollarium 1.

739. Si $2m+1 > 2$ ſeu $m > \frac{1}{2}$, curuae radius oſculi in puncto A idem erit, qui pro aequatione $gx = \frac{s^2}{a}$; ſcilicet $\frac{ga}{2}$. In his ergo caſibus corpus minimum deſcenſum abſoluit eodem tempore quo in vacuo; ſeu deſcenſus ſuper infima curuae portiuncula infinite parua, idem erit in vacuo et in medio reſiſtente ſi modo $m > \frac{1}{2}$.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

740. Si $m = \frac{1}{2}$ in vtroque termino s habebit duas dimenſiones. Quare radius oſculi in A non amplius erit $\frac{gα}{2}$ ſed eo erit minor. In hoc ergo medio, quod in ratione celeritatum reſiſtit; tempus deſcenſus minimi per arculum circularem maius erit quam in vacuo; hocque in data ratione.

Corollarium 3.

741. Si m fuerit $< \frac{1}{2}$; verum tamen > 0, radius oſculi in A erit infinite paruus; ſuper hac ergo curua in vacuo minimus deſcenſus abſolueretur tempore infinite paruo; cum in medio reſiſtente finito tempore perficiatur.

Scholion 1.

742. Quod ad hunc caſum $m < \frac{1}{2}$ attinet, hoc quod diximus quidem ex aequatione ſequitur, quam in medio rariſſimo quaeſito plene ſatisfacere ponimus. In caſu autem quo $m < \frac{1}{2}$, tres termini, ex quibus aequatio conſtat, etiamſi medium ſit rariſſimum non ſatisfaciunt. Duo enim termini quibus gx aequatur, conſiderari debent tanquam duo termini initiales ſeriei conuergentis, in qua ſequentes prae primis euaneſcant. Tota vero ſeries huiusmodi habebit formam $gx = \frac{ss}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m+1} k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} +$ etc. in

qua

qua exponentes ipſius s in progreſſione arithmetica progrediuntur; haecque forma partim ex analogia partim ea ipſa ratione, qua ad ſecundum terminum inueniendum vſi ſumus, colligi poteſt. Ex hac iam forma apparet curuae in puncto infimo A conditionem, ſi $m < \frac{1}{2}$ ex duobus terminis primis cognoſci non poſſe, quantumuis k ſit magnum. Quia enim exponentes ipſius s decreſcunt, in ſequentibus terminis s tandem in denominatorem migrabit, ideoque poſito $s = 0$ fiet $x = \infty$, ex quo apparet curuam his caſibus in A, non terminari; neque radium oſculi in hoc loco poſſe definiri. Quod incommodum non habet locum, ſi exponentes ipſius s creſcunt.

Scholion 2.

743. Hinc igitur patet modus curuam tautochronam in medio in quacunque celeritatum ratione multiplicata reſiſtente inueniendi; etiamſi medium non fuerit rariſſimum. Cum enim aequatio pro tautochrona ſit huius formae $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{As^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{Bs^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} + \frac{Cs^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} +$ etc. quemadmodum ex conditione tautochronismi valorem coefficientis A determinauimus; eodem modo etiam coefficientes reliquorum terminorum poterunt definiri. At propter tantopere compoſitas formulas integrales labor fere fit inſuperabilis; qui autem forte ſubleuabitur, ſi quis tantum vnicum coef-

M.E.C.D. 2017

coefficientem B vel ad ſummum duos B et C determinandi operam adhibuerit, quoniam ſequentes ex analogia concludi poſſent. Ad haec accedit, quod haec ſeries in caſu, quo $m = 1$ cognita ſit; quippe ex ſuperioribus (724) habemus $gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6k} + \frac{s^4}{48ak^2} + \frac{s^5}{480ak^3} +$ etc. quae ſeries ad generalem inueniendam non parum ſubſidii afferet. Terminus vero B inueniri debet ex ſequente aequatione $B\int\frac{(f^{4m}-s^{4m})ds}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}A^2\int\frac{(f^{2m+1}-s^{2m+1})^2ds}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2}A\int\frac{ds(f^{2m+1}-s^{2m+1})\int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{4}\int\frac{ds(\int ds(f^2-s^2)^m)^2}{(ff-ss)^{\frac{5}{2}}} - mA\int\frac{ds\int ds(ff-ss)^{m-1}(f^{2m+1}-s^{2m+1})}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}} - m\int\frac{ds\int ds(ff-ss)^{m-1}\int ds(ff-ss)^m}{(ff-ss)^{\frac{3}{2}}}$, cuius aequationis integralia ita ſunt ſumenda vt euaneſcant poſito $s = f$, quo facto poni debet $s = 0$; atque tum valor ipſius B inuenietur. Coefficiens vero A iam cognitus eſt; inuenimus enim $A = \frac{1\ 3.5\ \cdots\ (2m-1)}{2.4.6\ \cdots\ 2m(2m+1)}$. Pro caſu quo $m = 1$, ſuperiorem aequationem euolui inuenique $B = \frac{1}{48}$; exiſtente $A = \frac{1}{6}$, id quod egregie congruit. Si autem valores coefficientium in infinitum innoteſcerent, tum haberetur quidem aequatio ſerie infinita conſtans pro tautochrona quaeſita; quae autem ſi eius lex cognita fuerit, per methodum meam ſeries ſummandi, in aequationem terminorum numero finito conſtantem transformari po-

M.E.C.D. 2017

terit. Atque hanc propemodum vnicam et tutissimam iudico methodum, cuius ope tautochronae in aliis resistentiae hypothesibus inueniri queant.

Corollarium 4.

744. Si igitur aequatio $gx = \frac{ss}{a} + \frac{A s^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{B s^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} +$ etc. exprimat tautochronam descensuum; ascensus tautochronos producet ista curua $gx = \frac{ss}{a} - \frac{A s^{2m+1}}{a^m k^m} + \frac{B s^{4m}}{a^{2m-1} k^{2m}} - \frac{C s^{6m-1}}{a^{3m-2} k^{3m}} +$ etc. quae oritur ponendo k^m negatiuum.

Corollarium 5.

745. Perspicitur hinc quoties m fuerit numerus integer, toties tautochronam ascensibus inseruientem ANC esse continuam tautochronae descensuum BMA. Eadem enim aequatio oritur siue k^m siue s ponatur negatiuum.

Corollarium 6.

746 Praeterea intelligitur curuam ANC, super qua omnes ascensus eodem tempore absoluuntur, quo descensus super curua BMA, minus esse curuam quam BMA, et cuspidem C altius habere positam quemadmodum in medio quod in duplicata celeritatum ratione resistit.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 7.

747. In medio quod in ſimplici ratione celeritatum reſiſtit, omnes ipſius s exponentes fiunt $= 2$; ex quo ſequitur tam tautochronam deſcenſuum quam aſcenſuum eſſe ſemicycloides. Ea vero pro aſcenſu, quia s^2 minorem habet coefficientem, quam pro deſcenſu maiore circulo erit genita; ſi quidem tempora aſcenſuum aequalia eſſe debeant temporibus deſcenſuum. Interim vero eadem cyclois continua ſemioſcillationes quoque producit iſochronas, aſcenſuum vero tempora erunt minora quam tempora deſcenſuum.

Scholion 3.

748. Si m eſt numerus integer facile ex data forma poteſt ipſius A valor definiri. Namque ſi $m = 1$ erit $A = \frac{1}{6}$; ſi $m = 2$ erit $A = \frac{3}{40}$ et ita porro. At ſi m non eſt numerus integer difficilius eſt valorem A exhibere; ſeries enim valorum ipſius A debet interpolari. Pro fractionibus quidem, quarum denominator eſt 2 valor ipſius A per quadraturam circuli poteſt definiri. Poſito enim π pro perimetro circuli, cuius diameter eſt 1, erit vt ſequitur:

m	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{2}$,	$\frac{7}{2}$,	etc.
A	$\frac{1}{\pi}$,	$\frac{2.1}{3.2\pi}$,	$\frac{2.4.1}{3.5.3\pi}$,	$\frac{2.4\ 6.1}{3.5.7.4\pi}$,	etc.

Ex quo patet ſi fuerit $m = \frac{2n+1}{2}$ fore $A = \frac{2.4\ 6 \cdots 2n.\ 1}{3.5.7 \cdots (2n+1)(n+1)\pi}$, atque adeo $g x^{\circ} = \frac{s^2}{a} + \frac{2.4.6}{}$

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$\frac{2.4.6\text{----}2n.}{3.5.7\text{----}(2n+1)(n+1)\pi a^m k^m} s^{2n+2}$ existente scilicet $m = \frac{2n+1}{2}$. Quaecunque autem m fuerit fractio, erit perpetuo $A = \frac{1}{(2m+1)\int dz(1-z)^m}$, hoc integrali ita accepto, vt euanescat posito $z = 0$; atque tum posito $z = 1$. Quemadmodum docui in Comment. A. 1730. in Diss. de progressionibus transcendentibus.

Corollarium 8.

749. Si nunc pro singulis mediis resistentibus rarissimis quaerantur tautochronae descensuum eae se habebunt vt sequitur:

$m = 0$	$gx = \frac{s^2}{a} + s$
$m = \frac{1}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^2}{\pi\sqrt{ak}}$
$m = 1$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^3}{6ak}$
$m = \frac{3}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{s^4}{3\pi ak\sqrt{ak}}$
$m = 2$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{3s^5}{40a^2k^2}$
$m = \frac{5}{2}$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{8s^6}{45\pi a^2k^2\sqrt{ak}}$
$m = 3$	$gx = \frac{s^2}{a} + \frac{5s^7}{112a^3k^3}$

Ex his formabuntur tautochronae ascensuum; si vltimi termini fiant negatiui.

Scholion 4.

750. Haec igitur sufficiant de tautochronis simplicibus, super quibus vel omnes descensus tantum

M.E.C.D. 2017

tum, vel omnes aſcenſus aequalibus abſoluuntur temporibus. Praeter has autem curuas etiam aliae tautochronarum nomine appellari poſſunt, ſuper quibus vel omnes ſemioſcillationes, vel etiam ſolum omnes integrae oſcillationes ſint iſochronae; quarum curuarum numerus vti etiam in vacuo eſt infinitus. Quod autem ad integras oſcillationes attinet, haec quaeſtio reſiſtentiae propria eſt, in vacuo enim omnes ſemioſcillationes inter ſe ſunt aequales. Quia autem in his quaeſtionibus duae curuae inueniendae proponuntur, quarum altera ad aſcenſus altera ad deſcenſus pertineat; antequam huiusmodi quaeſtiones pro tautochronismo ſoluamus, alias faciliores propoſitiones circa binas curuas aſcenſum et deſcenſum ſpectantes praemittemus.

PROPOSITIO 83.

Problema.

751. *In hypotheſi potentiae vniformis deorſum tendentis et medio vniformi, quod reſiſtit in duplicata ratione celeritatum, data curua* MA *inuenire alteram* AN *illi in* A *iungendam huius indolis; vt corpus per arcum quemcunque* MA *ſuper curua data deſcendens ſuper curua quaeſita aſcenſu conficiat arcum* AN, *qui aequalis ſit arcui* MA. Tab. XV. Fig. 6.

Solutio.

Poſitis potentia ſollicitante g; exponente reſiſtentiae k, et celeritate in A, quam ex deſcen-

M.E.C.D. 2017

ſu acquiſiuit, quaque ſuper curua quaeſita AN aſcenſum inchoat, debita altitudini b; ſit pro curua data abſciſſa $AP = x$; arcus $AM = s$; pro quaeſita vero ſit abſciſſa $AQ = t$ atque arcus $AN = r$. His poſitis erit altitudo celeritati corporis deſcendentis in M debita $= e^{\frac{-s}{k}}(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx)$ et altitudo celeritati corporis aſcendentis in N debita $= e^{\frac{-r}{k}}(b - g\int e^{\frac{r}{k}} dt)$. Integer ergo arcus deſcenſus prouenit ex hac aequatione $b = g\int e^{\frac{-s}{k}} dx$; integer vero arcus aſcenſus ex hac aequatione $b = g\int e^{\frac{r}{k}} dt$. Inter arcus igitur deſcenſus et aſcenſus haec habebitur aequatio: $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \int e^{\frac{r}{k}} dt$ ſeu huius differentialis $e^{\frac{-s}{k}} dx = e^{\frac{r}{k}} dt$. Quare cum arcus aſcenſus aequalis eſſe debeat arcui deſcenſus ponatur $r = s$; quo facto prodibit iſta aequatio $e^{\frac{-2s}{k}} dx = dt$. Cum autem curua MA data ſit, dabitur aequatio inter s et x; ex qua, ſi loco dx eius valor per s et ds ſubſtituatur, prodibit aequatio inter t et s ſeu inter t et r propter $r = s$; quae determinabit naturam curuae quaeſitae AN. Q. E. I.

Corollarium 1.

752. Si curuae datae MA portio infima exprimatur aequatione $x = \alpha s^n$; erit pro portione infi-

M.E.C.D. 2017

infima curuae AN haec aequatio $dt = \alpha n e^{\frac{-2s}{s}} s^{n-1} ds$. Eſt vero propter s arcum minimum $e^{\frac{-2s}{k}} = 1 - \frac{2s}{k}$, vnde erit $t = \alpha s^n - \frac{2\alpha n s^{n+1}}{(n+1)k}$ ſeu tantum $t = \alpha s^n$. Portiones ergo infimae vtriusque curuae erunt inter ſe ſimiles.

Corollarium 2.

753. Ex aequatione $e^{\frac{-2s}{k}} dx = dt$ intelligitur eſſe ſemper $dt < dx$ ſeu $t < x$. Punctum ergo N ſemper humilius erit poſitum, quam punctum reſpondens M. Ex quo ſequitur curuam AN minus eſſe curuam verſus AB, quam curuam AM.

Corollarium 3.

754. Hanc ob rem curua ANC non poterit eſſe ſimilis et aequalis curuae AM; quia hoc caſu puncta M et N arcus aequales AM et AN terminantia forent in eadem altitudine ſita.

Corollarium 4.

755. Si corpus ſuper curua MA ex altitudine infinita deſcenderet, quia in A celeritatem tantum finitam acquirit ad altitudinem tantum finitam aſcendere poterit. Hoc ergo caſu, quo curua AM in infinitum porrigitur, curua ANC non vltra datam altitudinem aſcendere poterit, ſed

afym-

M.E.C.D. 2017

asymtoton habebit horizontalem B C. Id quod etiam ex hoc apparet, si fit $s = \infty$; tum enim prodit $dt = o$.

Scholion 1.

756. Quemadmodum ex hac propositione intelligitur, quomodo ex data curua descensuum M A inueniri debeat curua ascensuum A N; ita vicissim hinc facile erit ex data curua A N alteram definire. Si enim detur aequatio inter t et s, erit $dx = e^{\frac{2s}{k}} dt$, aequatio pro curua A M.

Corollarium 5.

757. Quia curuae descensuum M A respondet curua ascensuum A N, cuius haec est aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Ita si haec curua A N pro curua descensuum accipiatur, erit respondentis curuae ascensuum abscissa $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dt = \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$.

Corollarium 6.

758. Si hoc modo vlteriores curuae respondentes quaerantur, obtinebitur sequens aequationum series.

Abscissa curuae respondens arcui s.

I $= x$

II $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dx$

III $= \int e^{\frac{-4s}{k}} dx$

M.E.C.D. 2017

$$\text{IV} = \int e^{\frac{-6s}{k}} dx$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$n = \int e^{\frac{-2(n-1)s}{k}} dx.$$

Corollarium 7.

759. Huius igitur ſeriei duae curuae contiguae hanc habebunt proprietatem, vt, iis in infimo puncto A coniunctis, corpus ſuper priori deſcendens, ſuper altera per arcum aſcendat aequalem arcui deſcenſus. Infiniteſima autem huius ſeriei curua facto $n = \infty$, fit recta horizontalis, quia euaneſcit $e^{\frac{-\infty s}{k}}$; ideoque ipſa curuae abſciſſa.

Exemplum 1.

760. Sit linea data recta verticalis, erit $x = s$. Pro curua ergo aſcenſuum quaeſita ANE exiſtente $AQ = t$ et $AN = s$ habebitur iſta aequatio $dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$ ſeu $t = \frac{k}{2}(1 - e^{\frac{-2s}{k}})$. Atque eliminata quantitate exponentiali erit $2t\,ds = k\,ds - k\,dt$ ſiue $\frac{(\frac{1}{2}k - t)\,ds}{dt} = \frac{1}{2}k$. Ex qua aequatione perſpicitur curuam ANE eſſe tractoriam ſuper aſymtoto horizontali BD filo longitudinis $\frac{1}{2}k$ genitam. Quare altitudo aſymtoti AB erit $= \frac{1}{2}k$. Si nunc haec ipſa tractoria ANE pro curua deſcenſuum accipiatur, ei reſpondebit curua quaeſita, cuius abſciſſa

Tab. XVI. Fig. 1.

M.E.C.D. 2017

ſciſſa arcui s reſpondens erit $= \int e^{\frac{-4s}{k}} ds$; quae ergo curua iterum erit tractoria aſymtoton horizontalem habens, cuius aſymtotos ſupra A eleuata eſt interuallo $\frac{1}{4}k$, cui longitudo fili aequatur. Seriei vero ſuperioris omnes curuae erunt tractoriae, quae filis generantur, quorum longitudines conſtituunt hanc ſeriem $\frac{k}{0}, \frac{k}{2}, \frac{k}{4}, \frac{k}{6}$ etc. Recta ſcilicet verticalis tanquam tractoria conſiderari poteſt, cuius filum generans eſt $\frac{k}{0}$ ſeu infinitum. Vltima autem huius ſeriei tractoria in rectam abit horizontalem per A ductam.

Exemplum 2.

761. Si linea deſcenſuum data fuerit recta vtcunque ad horizontem inclinata MA, ita vt ſit $MA(s) : AP(x) = \alpha : 1$, ſeu $dx = \frac{ds}{\alpha}$; habebitur pro curua quaeſita AN iſta aequatio $\alpha dt = e^{\frac{-2s}{k}} ds$, cuius integralis eſt $\alpha t = \frac{k}{2}(1 - e^{\frac{-2s}{k}})$. Ex quibus aequationibus coniunctis oritur $2\alpha t\, ds = k ds - \alpha k dt$ ſeu $\frac{(\frac{k}{2\alpha} - t) ds}{dt} = \frac{k}{2}$. Quae aequatio quoque eſt pro tractoria filo longitudinis $\frac{k}{2}$ ſuper aſymtoto horizontali BD genita; exiſtente $AB = \frac{k}{2\alpha}$; haecque tractoria per A transire debet. Seriei ſequentes curuae omnes ſunt quoque tractoriae, vt in praecedente exemplo, quarum fila generantia ſunt $\frac{k}{0}$, $\frac{k}{2}$, $\frac{k}{4}$, $\frac{k}{6}$, etc. earum vero aſymtotorm a puncto

A

M.E.C.D. 2017

A diſtantiae tenent hanc progreſſionem $\frac{k}{0\alpha}$, $\frac{k}{2\alpha}$, $\frac{k}{4\alpha}$, $\frac{k}{6\alpha}$ etc. Hae ſcilicet omnes tractoriae cum axe verticali AB angulum conſtituent aequalem angulo PAM.

Corollarium 8.

762. Tractoriarum harum ea, quae primam ſeu rectam MA praecedit, hanc ergo habebit proprietatem, vt corpus ſuper ea deſcendens, poſteaque ſuper recta AM aſcendens aequalia ſpatia percurrat.

Corollarium 9.

763. Ad curuam igitur deſcenſuum CA inueniendam, cui reſpondeat recta inclinata AM; ſuper aſymtoto horizontali filo longitudinis $\frac{k}{2}$ deſcribatur tractoria CA, in eaque ſumatur applicata $Ab = \frac{k}{2\alpha}$ et ex A conſtituatur recta inclinata AM; eritque CA curua deſcenſuum, cui reſpondet recta AM pro aſcenſibus. Tab. XVI. Fig. 2.

Scholion 2.

764. Inſeruire poteſt hic caſus inſtar exempli problematis inuerſi, quo ex data curua aſcenſuum, curua deſcenſuum requiritur.

M.E.C.D. 2017

Exemplum 3.

Tab. XV. Fig. 6. 765. Sit curua deſcenſuum data cyclois MA, cuius natura hac aequatione ſit expreſſa $2ax = s^2$, ſeu circuli genitoris diameter $= \frac{a}{2}$. Erit ergo $dx = \frac{s\,ds}{a}$, vnde pro curua altera aſcenſuum AN haec inuenitur aequatio $adt = e^{\frac{-2s}{k}} s\,ds$, cuius integralis eſt, $at = \frac{k^2}{4}(1 - e^{\frac{-2s}{k}}) - \frac{k}{2} e^{\frac{-2s}{k}} s$, quae propter $e^{\frac{-2s}{k}} = \frac{adt}{s\,ds}$, abit in hanc $at\,s\,ds = -\frac{ak^2 dt}{4} + \frac{k^2 s\,ds}{4} - \frac{aks\,dt}{2}$. Haec curua in A, vt iam eſt dictum, tangentem habebit horizontalem. Habebit vero etiam aſymtoton BC horizontalem; cuius altitudo BA reperietur ſi s fiat $= \infty$. Fiet autem hoc caſu $e^{\frac{-2s}{k}} = 0$; quare erit $t = AB = \frac{k^2}{4a}$. Ex hoc intelligitur curuam alicubi punctum flexus contrarii habere debere; quod inuenietur ſi poſito dt conſtante, ponatur $dds = 0$. Hinc vero prodibit $1 = \frac{2s}{k}$ ſeu $s = \frac{k}{2}$. Quare ſi ſumatur arcus $AN = \frac{k}{2}$ erit N punctum flexus contrarii; cui reſpondet abſciſſa $AQ = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2e}$ ſeu $BQ = \frac{k^2}{2e}$. Quo circa erit ſemper $AB : BQ = e : 2 = 2,71828 : 2$.

Scholion 3.

766. Problema hoc propoſitnm extat ab anonymo in Act. Lipſ. A. 1728. eiusque ſolutionem dedit in Comment. Acad. Petrop. A. 1729. Cl. D. *Bernoulli*, alia vſus methodo. Praeter hanc

M.E.C.D. 2017

hanc vero conditionem anonymus ille potiſſimum requirit vnam curuam continuam, cuius alter ramus deſcenſibus alter aſcenſibus inſeruiat, cuiusmodi curuae dantur innumerabiles, quas in ſequente propoſitione detegemus.

PROPOSITIO 84.
Problema.

767. *Iisdem poſitis vt ante, inuenire curuam continuam* MAN *huiusmodi, vt in quauis ſemioſcillatione, quae ſemper in arcu* MA *incipiat, ſuper ea facta arcus deſcenſus* MA *aequalis ſit arcui aſcenſus ſequentis* AN. Tab. XV. Fig. 6.

Solutio.

Propoſitio haec a praecedente in hoc tantum differt, quod ibi data fuerit curua MA; hic vero ea quoque quaeri debeat ex hac conditione, quod vtraque curua MA et AN vnam eandemque curuam continuam conſtituere debeant. Sumtis igitur arcubus AM et AN aequalibus $= s$, et poſita $AP = x$ atque $AQ = t$, erit $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Quia autem curua MAN debet eſſe continua, aequationem inter s et x ita oportet eſſe comparatam, vt ſi in ea loco s ponatur minus $-s$, quo caſu arcus AM in arcum AN abit, valor ipſius x fiat $= t$ ſeu $= \int e^{\frac{-2s}{k}} dx$. Pono igi-

M.E.C.D. 2017

tur $dx = Mds$, vbi M ſit functio quaedam ipſius s; eaque abeat in N, ſi loco s ponatur $-s$. Ponatur ergo $-s$ loco s quo caſu x abit in t, eritque $dt = -Nds$. Eſt vero quoque $dt = e^{\frac{-2s}{k}} dx = e^{\frac{-2s}{k}} Mds$, quocirca erit $N = -e^{\frac{-2s}{k}} M$. Sit porro $M = e^{\frac{+s}{k}} P$, abeatque P in Q poſito $-s$ loco s eritque $N = e^{\frac{-s}{k}} Q$. Quibus valoribus loco M et N ſubſtitutis prodibit $Q = -P$. Ex quo apparet P huiusmodi eſſe debere functionem ipſius s, quae abeat in $-P$ poſito $-s$ loco s, quas functiones impares appellare conſueui. Sit itaque P functio quaecunque impar ipſius s, cuiusmodi ſunt e.gr. αs, αs^3, αs^5 etc. eritque $M = e^{\frac{s}{k}} P ds$ ſeu $x = \int e^{\frac{s}{k}} P ds$. Quae eſt aequatio pro curua quaeſita. Q.E.I.

Corollarium 1.

768. Quia eſt $dx = e^{\frac{s}{k}} P ds$ erit ſumendis logarithmis $l dx = \frac{s}{k} + lP + l ds$. Differentietur haec aequatio denuo poſito ds conſtante, prodibitque $\frac{ddx}{dx} = \frac{ds}{k} + \frac{dP}{P}$ ſeu $kP ddx = P dx ds + k dx dP$. Quae aequatio ab exponentialibus eſt libera.

Corollarium 2.

769. Quoniam P per s dari debet aequatio inuenta non habet variabiles inter ſe permixtas; quamobrem ea ſufficit ad curuas in ea contentas conſtruendas.

Exem-

M.E.C.D. 2017

Exemplum.

770. Ponamus esse $P = \frac{s}{a}$, erit $ax = \int e^{\frac{s}{k}s} ds = ke^{\frac{s}{k}}s - k^2 e^{\frac{s}{k}} + k^2$, quae est aequatio pro vna et fortasse simplicissima curua satisfaciente. Haec vero aequatio eliminato exponentiali $e^{\frac{s}{k}}$ abit in hanc $axsds = aksdx - k^2 adx + k^2 sds$. Vel exposito $e^{\frac{s}{k}}$ per seriem prodibit ista aequatio $ax = \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{1.3k} + \frac{s^4}{1.2.4k^2} + \frac{s^5}{1.3.4.5k^3} +$ etc. Haec ergo curua in A habet tangentem horizontalem, eiusque radius osculi in hoc loco est a. Quia ne curua fiat imaginaria esse debet $dx < ds$ debebit esse $e^{\frac{s}{k}}s < a$. Quo ergo loco fit $e^{\frac{s}{k}}s$, quae expressio crescente s quoque crescit, aequalis a, ibi curua AM habebit tangentem verticalem atque punctum reuersionis. Pro ramo AN posito $-s$ loco $+s$ haec habetur aequatio $ax = \int e^{\frac{-s}{k}}s ds$, seu $dx = \frac{e^{\frac{-s}{k}}s ds}{a}$. Quare quamdiu fuerit $e^{\frac{-s}{k}}s < a$, curua non fit imaginaria. At si vsquam si $e^{\frac{-s}{k}}s = a$, ibi curua quoque habebit punctum reuersionis et diametrum verticalem. Fieri autem potest si a satis magnum accipiatur, vt $e^{\frac{-s}{k}}s$ semper minus fit quam a, quo casu curua AN in infinitum abibit, asymtotonque habebit horizontalem

M.E.C.D. 2017

lem BC. Fit autem $e^{\frac{-s}{k}} s = o$ casibus, $s = o$ et $s = \infty$, habebit ergo valorem maximum, si eius differentiale $= o$, hoc vero casu fit $k = s$, et $e^{\frac{-s}{k}} s = \frac{k}{e}$. Quare si fuerit $a > \frac{k}{e}$ curua habebit asymtoton BC, cuius altitudo BA erit $= \frac{k^2}{a}$. At si fuerit $a < \frac{k}{e}$ curua AN, vti alter ramus, habebit quoque punctum reuersionis, quod ex hac aequatione determinabitur, $a = e^{\frac{-s}{k}} s$. In priori casu curua AN habere debet punctum flexus contrarii, quod reperietur ex hac aequatione $1 = \frac{s}{k}$; erit scilicet in N sumto arcu $AN = k$.

PROPOSITIO 85.

Problema.

Tab. XV. Fig. 6.

771. *In hypothesi grauitatis et resistentiae praecedenti si data fuerit curua* MA, *super qua descensus absoluantur; inuenire pro ascensibus curuam* AN *huius proprietatis, vt ascensus cuiusque tempus aequale sit tempori descensus praecedentis.*

Solutio.

Positis vt ante potentia sollicitante $= g$; et medii exponente $= k$; sit pro curua MA abscissa $AP = x$; arcus $AM = s$; atque pro curua quaesita AN, abscissa $AQ = t$; arcus $AN = r$. Ponatur altitudo celeritati descensu quodam in A acquisito debita $= b$, qua celeritate sequentem ascensum in curua AN absoluet. His positis erit alti-

M.E.C.D. 2017

altitudo celeritati in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx)$ et altitudo in aſcenſu celeritati in N debita $= e^{\frac{-r}{k}}$ $(b - g\int e^{\frac{r}{k}} dt)$. Tempus ergo deſcenſus per arcum MA erit $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}} \sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx)}}$, et tempus aſcenſus per arcum AN $= \int \frac{e^{\frac{r}{2k}} dr}{\sqrt{(b - g\int e^{\frac{r}{k}} dt)}}$, quae duo tempora, ſi poſt integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = b$, atque $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = b$ debent eſſe aequalia. Ponatur ad hoc obtinendum $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = X$; $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = T$: atque $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS$ et $e^{\frac{r}{2k}} dr = dR$, vbi X, T, S et R ſint tales functiones, quae euaneſcant poſito x, s, t et $r = o$. Efficiendum ergo eſt, vt haec duo integralia $\int \frac{dS}{\sqrt{(b - X)}}$ et $\int \frac{dR}{\sqrt{(b - T)}}$ fiant inter ſe aequalia, ſi poſt integrationem ponatur $X = b$ et $T = b$. At S et R vti et X et T ſunt quantitates a b prorſus non pendentes, atque eandem inter ſe relationem tenere debent, quemcunque valorem b habuerit. Quaeſito ergo ſatisfiet, ſi R fuerit talis functio ipſius T, qualis S eſt ipſius X. Vel ſumto $R = S$ eſſe quoque debet $T = X$. Eſt vero $S = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$\frac{}{}$ 1); facto igitur $R = S$ erit $2 = e^{\frac{r}{2k}} + e^{\frac{-s}{2k}}$, atque $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Quia autem hoc posito esse debet $X = T$ seu $e^{-\frac{r}{k}} dx = e^{-\frac{s}{k}} dt$ fiet $t = \int e^{\frac{-s-r}{k}} dx$. Cum vero sit $e^{\frac{r}{k}} = (2 - e^{\frac{-s}{2k}})^2 = 4 - 4e^{\frac{-s}{2k}} + e^{\frac{-s}{k}}$, erit $t = \int \frac{dx}{e^{\frac{s}{k}}(2 - e^{\frac{-s}{2k}})^2}$ $\int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$. Ex quibus ergo constructio curuae innotescit, quia sumto arcu $AN = r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$ huic respondet abscissa $AQ = t = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}} - 1)^2}$; Aequatio vero pro curua AN commodius inuenietur ex data aequatione inter s et x. Nam quia est $s = -2kl(2 - e^{\frac{r}{2k}})$ et $x = \int \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)^2}$; si loco s et x hi valores substituantur, prodibit aequatio inter t et r pro curua quaesita AN. Q. E. I.

Corollarium 1.

772. Quia est $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$ erit $dr = \frac{e^{\frac{-s}{2k}} ds}{(2 - e^{\frac{-s}{2k}})}$. Cum vero ne curua AN fiat imaginaria esse debeat $dr > dt$; curua AN eousque erit

M.E.C.D. 2017

erit realis, quousque $ds > \frac{dx}{e^{\frac{s}{2k}}(2-e^{\frac{-s}{2k}})}$, seu $ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}}-1}$.

Corollarium 2.

773. Est vero $e^{\frac{s}{2k}}$ semper maius vnitate; ex quo sequitur vbi fuerit $ds > dx$ eo magis fore $ds > \frac{dx}{2e^{\frac{s}{2k}}-1}$. Quare si curua data fuerit realis, quaesita quoque semper erit realis.

Corollarium 3.

774. Cum sit $s = -2k\,l(2-e^{\frac{r}{2k}})$ erit $ds = \frac{e^{\frac{r}{2k}}dr}{(2-e^{\frac{r}{2k}})} = \frac{dr}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)}$, vnde facilius relatio inter ds et dx in computum duci potest.

Corollarium 4.

775. Ex solutione problematis simul apparet, quomodo eius inuersum sit soluendum. Si enim curua ascensuum A N datur, seu aequatio inter t et r, ex ea aequatio inter x et s formabitur ope aequationum $t = \int \frac{dx}{(2e^{\frac{s}{2k}}-1)^2}$ et $r = 2k\,l(2-e^{\frac{-s}{2k}})$.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

776. Ad curuae formam circa punctum A indagandam ponantur s et r valde exigua, erit-que $e^{\frac{-s}{2k}} = 1$, vnde fiet $dr = ds$ atque $dt = dx$. Ex quo perspicitur curuarum MA et NA infimas portiones esse inter se similes et aequales.

Exemplum 1.

Tab. XVI. Fig. 1.

777. Sit linea descensuum data recta MA, vtcunque inclinata, vt sit $s = \alpha x$ seu $ds = \alpha\, dx$. Cum nunc sit $ds = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}$ et $dx = \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}} - 1)^2}$ habebitur inter t et r pro curua quaesita ista aequatio, $dr = \frac{\alpha\, dt}{2e^{\frac{-r}{2k}} - 1}$ seu $\alpha dt = 2e^{\frac{-r}{2k}} dr - dr$ cuius integralis est $\alpha t = 4k(1 - e^{\frac{-r}{2k}}) - r$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $\alpha t = r - \frac{r^2}{1.2.k} + \frac{r^3}{1.2.3.2k^2} - \frac{r^4}{1.2.3.4\ 4k^3} +$ etc. ideoque in puncto infimo A est $dr = \alpha\, dt$. Curua haec alicubi habebit tangentem horizontalem, qui locus inuenietur ponendo $dt = 0$ tum vero erit $2 = e^{\frac{r}{2k}}$ seu $r = 2kl2$, cui respondet $\alpha t = 2k - 2kl2$. Atque si r fiat maius quam $2kl2$ valor ipsius dt fiet negatiuus, ideoque curua iterum descendet, donec $-dt$ fiat $= dr$, hoc autem accidit, si est $1 - \alpha = 2e^{\frac{-r}{2k}}$ seu $r = 2k\, l\frac{2}{1-\alpha}$.

M.E.C.D. 2017

$l\frac{2}{1-\alpha}$. At quia α non potest esse minus quam 1; si est $\alpha = 1$ tangens verticalis in infinitum ab A distabit; atque si $\alpha > 1$ vltra tangentem horizontalem nusquam habebit tangentem verticalem. Sed antrorsum vltra tangentem habebit verticalem, vbi est $r = -2kl\frac{1+\alpha}{2}$. Casu ergo quo linea data est verticalis, seu $\alpha = 1$ fit $r = 0$, seu tangens in A erit verticalis.

Corollarium 6.

778. Si s denotet totum arcum descensus, r exprimet totum arcum sequenti ascensu super curua AN descriptum. Quare si detur arcus descensus s reperietur arcus ascensus $r = 2kl(2 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Quoniam enim posuimus T = X integros arcus descensus et ascensus litterae s et r denotant. Tab. XV. Fig. 6.

Exemplum 2.

779. Sit curua data MA ipsa tautochrona descensuum, quam ante pro eadem resistentiae hypothesi inuenimus; habebit curua AN hanc proprietatem, vt omnes ascensus aequalibus quoque absoluantur temporibus; iisdem nempe quibus descensus super MA. Quare curua AN erit ipsa tautochrona ascensuum cum curua MA continua iam ante inuenta. Quo hoc autem ex isto calculo ostendatur, sumamus aequationem pro curua tautochrona descensuum, quae est vel $adx = k(e^{\frac{s}{2k}}$

M.E.C.D. 2017

$(e^{\frac{s}{2k}}-1)\,ds$ vel $ax = 2k^2(e^{\frac{s}{2k}}-1)-ks$. Cum nunc fit $ds = \frac{dr}{2e^{\frac{-r}{2k}}-1}$ et $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{e^{\frac{-r}{2k}}}{2e^{\frac{-r}{2k}}-1}$ atque $dx = \frac{dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}$, his substitutis erit $\frac{a\,dt}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2} = \frac{k\,dr(1-e^{\frac{-r}{2k}})}{(2e^{\frac{-r}{2k}}-1)^2}$ seu $adt = k(1-e^{\frac{-r}{2k}})\,dr$. Quae aequatio ex illa formatur, si pro x ponatur t atque $-r$ pro s. Quare haec curua AN est continua cum MA atque tautochrona ascensuum.

Corollarium 7.

780. Dato ergo arcu descensus s super tautochrona descensuum; erit arcus ascensus sequentis super tautochrona ascensuum $r = 2kl(2-e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque si descensus a cuspide tautochronae descensuum incipiat, cuius locum dat $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{a+k}{k}$ (729.) erit arcus ascensus $r = 2kl\frac{2a+k}{a+k}$, vt supra inuenimus (732).

Scholion.

781. Cum itaque tautochrona in hac resistentiae hypothesi quaesito satisfaciat atque sit curua continua; hinc ansam arripimus inuestigandi plures

M.E.C.D. 2017

plures curuas continuas, quarum duo rami vices curuarum MA et AN sustinere queant; id quod in sequente propositione praestabimus.

PROPOSITIO 86.

Problema.

782. *Iisdem positis vt ante inuenire casus, quibus duae curuae* MA *et* AN, *super quibus descensus et sequentes ascensus aequalibus temporibus absoluantur, vnam curuam continuam constituunt.* Tab XV Fig. 6.

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quibus in praecedente propositione vsi sumus, scilicet AP$=x$; AM$=s$, AQ$=t$ et AN$=r$; praeter duas aequationes ibi inuentas $z=e^{\frac{r}{2k}}+e^{\frac{-s}{2k}}$ et $e^{\frac{-s}{k}}dx=e^{\frac{r}{k}}dt$ effici debet, vt aequationes inter s et x et inter r et t sub eadem aequatione comprehendantur. Sumamus ad hoc nouam variabilem z, ex qua punctum M in curua AM determinetur, ita vt si z fiat negatiuum, eodem modo obtineatur punctum N in altera curua. Hanc ob rem s huiusmodi esse oportet functionem ipsius z, vt eadem, si loco z ponatur $-z$, det arcum AN, qui ob positionem negatiuam est $-r$, ita vt s abeat in $-r$ posito $-z$ loco z. Ponatur $e^{\frac{r}{2k}}=1+Q$, erit $e^{\frac{-s}{2k}}=1-Q$ propter $z=e^{\frac{r}{2k}}+e^{\frac{-s}{2k}}$ ideo-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO

M.E.C.D. 2017

ideoque Q erit functio impar ipsius z, quae in sui negatiuam abit facto z negatiuo. Erit itaque $e^{\frac{-s}{k}} = (1+Q)^2$ et $e^{\frac{r}{k}} = (1-Q)^2$. Porro autem esse debet $dx\,(1+Q)^2 = dt(1-Q)^2$, atque x talis esse debet functio ipsius z, quae abit in t posito z negatiuo. Ponatur $dx = M\,dz$, abeatque M in N facto z negatiuo, erit ergo $dt = -N\,dz$. Quamobrem fiet $M(1+Q)^2 = -N(1-Q)^2$. Sit ergo $M = P(1-Q)^2$ existente P quoque = functioni impari ipsius z; atque tum fiet $N = -P(1+Q)^2$; ideoque aequalia inter se erunt $M(1+Q)^2$ et $-N(1-Q)^2$ vti requiritur. Sumtis ergo pro lubitu loco P et Q functionibus imparibus ipsius z, erit $dx = P\,dz(1-Q)^2$ seu $x = \int P\,dz\,(1-Q)^2$ atque $s = 2k\,l\frac{1}{1+Q}$ Vnde innumerabiles oriuntur curuae MA, quarum partes continuae AN ascensus producunt isochronos respectiue descensibus super MA factis. Quia autem duae functiones occurrunt P et Q, determinetur altera, vt sit $Q = -z$ erit $s = 2k\,l\frac{1}{1-z}$ atque $x = \int P\,dz(1+z)^2$. In quarum posteriore aequatione valor ipsius z ex priore, qui est $= 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ substituatur, habebiturque aequatio inter x et s pro curua quaesita. Q. E. I.

Corollarium I.

783. Si $z = 0$, fit quoque $s = 0$. Quare integrale ipsius $P\,dz(1+z)^2$ ita accipi debet vt euanescat posito $z = 0$. Nam euanescente arcu s abscissa quoque x euanescere debet.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

784. Cum fit $s = 2kl\frac{1}{1-z}$ erit $ds = \frac{2k\,dz}{1-z}$, et quia eſt $dx = P\,dz(1+z)^2$, erit $\frac{ds}{dx} = \frac{2k}{P(1-z^2)(1+z)}$, niſi ergo $P(1-z)^2(1+z)$ maius fuerit quam $2k$ curua erit realis.

Corollarium 3.

785. In puncto infimo A, quia euaneſcit z, erit $\frac{ds}{dz} = \frac{2k}{P}$. Quare P talis eſſe debet functio impar ipſius z, vt ea, ſi $z = 0$, minor ſit quam $2k$: hoc autem euenire non poteſt, niſi P talis fuerit functio ipſius z, quae euaneſcat poſito $z = 0$, hocque caſu tangens in A erit horizontalis.

Exemplum 1.

786. Quia P debet eſſe functio impar ipſius z, ponatur $P = \frac{az}{(1-z^2)^2}$. Quo poſito erit $x = \int \frac{azdz}{(1-z)^2}$ ſeu $dx = \frac{azdz}{(1-z)^2}$. Eſt vero $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $dz = \frac{1}{2k}e^{\frac{-s}{2k}}ds$, atque $1-z = e^{\frac{-s}{2k}}$. Quibus ſubſtitutis habebitur $dx = \frac{ae^{\frac{-s}{2k}}ds(1-e^{\frac{-s}{2k}})}{2ke^{\frac{-s}{k}}} = \frac{ads}{2k}(e^{\frac{s}{2k}}-1)$.

Quae eſt aequatio pro curua tautochrona ſupra inuenta, ſuper cuius parte MA omnes deſcenſus aequalibus abſoluuntur temporibus; ſuper parte autem altera AN omnes aſcenſus iisdem temporibus.

M.E.C.D. 2017

Exemplum 2.

787. Sit $P = \frac{6az - 2az^3}{(1-zz)^2}$; erit $x = \int \frac{6azdz - 2az^3dz}{(1-z)^2}$ $= \frac{3az^2 + az^3}{1-z}$. Cum autem sit $z = 1 - e^{\frac{-s}{2k}}$ et $1 - z$ $= e^{\frac{-s}{2k}}$; erit $x = \frac{a(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2 (4 - e^{\frac{-s}{2k}})}{e^{\frac{-s}{2k}}} = a(1 - e^{\frac{-s}{2k}})^2$ $(4\, e^{\frac{s}{2k}} - 1) = a(4e^{\frac{s}{2k}} - (3 - e^{\frac{-s}{2k}})^2)$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $\frac{4k^2x}{3a} = ss + \frac{s^3}{6k} - \frac{s^4}{48k^2}$ $+ \frac{s^5}{96k^3} - \frac{s^6}{640k^4} +$ etc. $= bx$ mutata constante a in $\frac{4k^2}{3b}$.

PROPOSITIO 87.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 3.

788. *In hypothesi grauitatis vniformis deorsum tendentis et medio vniformi in duplicata celeritatum ratione resistente, si detur curua quaecunque* MA, *super qua corpus descensus absoluat, inuenire curuam* AN *ei iungendam ad ascensus idoneam, ita vt omnes semioscillationes, quae super curua* MAN *fiunt, aequalibus absoluantur temporibus.*

Solutio.

Positis vt hactenus potentia sollicitante, g, et exponente resistentiae k; sit curuae datae MA abscissa $AP = x$; arcus $AM = s$; curuae vero quaesitae abscissa $AQ = t$; arcus $AN = r$. Incipiat nunc descensus in quocunque curuae MA puncto, fitque

M.E.C.D. 2017

que celeritas in A acquisita debita altitudini b, qua celeritate sequentem ascensum in curua AN absoluet. His positis erit altitudo celeritati corporis descendentis in M debita $= e^{\frac{s}{k}}(b - g\int e^{\frac{-s}{k}} dx)$, et altitudo celeritati corporis ascendentis in N debita $a = e^{\frac{-r}{k}}(b - g\int e^{\frac{r}{k}} dt)$. Ex his erit tempus, quo in hac semioscillatione arcus MA et AN percurruntur $= \int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b - g\int e^{\frac{-s}{2k}} dx)}} + \int \frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{(b - g\int e^{\frac{r}{2k}} dt)}}$, quae expressio integrum dabit semioscillationis tempus, si post integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = b$, atque $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = b$. Cum igitur hoc tempus debeat semper habere valorem constantem, qui non a quantitate litterae b pendeat, ex hac conditione determinari debebit aequatio inter t et r ope datae aequationis inter x et s. Ponamus breuitatis gratia $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = X$ et $g\int e^{\frac{r}{k}} dt = T$, atque $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dS$ et $\frac{dr}{e^{\frac{-r}{2k}}} = dR$. Quibus substitutis habere debebit $\int \frac{dS}{\sqrt{(b-X)}} + \int \frac{dR}{\sqrt{(b-T)}}$ valorem constantem si post integrationem ponatur $X = b$, et $T = b$. Fiat ergo generaliter $T = X$, quia T ab X non pendet, habebimus pro tempore hanc expressionem: $\int \frac{dS + dR}{\sqrt{(b-X)}}$, quae ita debet esse comparata, vt post integrationem facto $X = b$ littera b prorsus ex

M.E.C.D. 2017

calculo euaneſcat. Hoc autem fiet, ſi fuerit $dS + dR = \frac{\alpha dX}{\sqrt{X}}$, erit enim tempus ſemioſcillationis $= \int \frac{\alpha dX}{\sqrt{(bX - XX)}} = \pi\alpha$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$. Sit $\alpha = \frac{\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$, denotabit f longitudinem penduli in vacuo et grauitate $= g$ ſemioſcillationes minimas eodem tempore abſoluentis, quo hae ſemioſcillationes ſuper curuis MA et AN peraguntur (167). Cum igitur ſit $dS + dR = \frac{dX\sqrt{2f}}{\sqrt{X}}$, erit $S + R = 2\sqrt{2f}X = 2\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}} dx$. Eſt vero $S = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $R = 2k(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$, vnde erit $k e^{\frac{r}{2k}} - k e^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}} dx$, ſeu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}} dx$, ideoque fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}} dx)$. Huic vero valori ipſius r reſpondens valor ipſius t ex hac aequatione determinabitur $T = X$ ſeu $e^{\frac{r}{k}} dt = e^{\frac{-s}{k}} dx$. Ex quo inuenitur $t = \int \frac{dx}{(1 + \frac{1}{k} e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{2f}\int e^{\frac{-s}{k}} dx)^2}$ ex quibus conſtructio curuae innoteſcit. Aequatio autem pro curua quaeſita AN commodius ex data aequatione inter x et s obtinebitur, ſi loco s ſubſtituatur $-2k(l(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2f}\int e^{\frac{r}{k}} dt)$ et loco x hic valor $\int \frac{dt}{(1 - \frac{1}{k} e^{\frac{-r}{2k}}\sqrt{2f}\int e^{\frac{r}{k}} dt)^2}$. His enim ſubſtitutis orietur haec aequatio inter r et t, quae eſt pro curua quaeſita AN. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

789. Cum oſcillationes minimae congruant cum oſcillationibus in vacuo, ſi curuae MA tangens in A non fuerit horizontalis, vel ſi radius oſculi in A fuerit infinite paruus, curuae quaeſitae AN radius oſculi in A erit $4f$. Erit enim hoc caſu tempus deſcenſus minimi $= o$ et tempus aſcenſus $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 2.

790. Sin autem curuae MA in A radius oſculi fuerit finitae magnitudinis ſcilicet h, erit tempus deſcenſus minimi $= \frac{\pi\sqrt{2h}}{2\sqrt{g}}$ (166). Quo igitur tempus ſemioſcillationis ſit $= \frac{\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{g}}$ erit radius oſculi curuae AN in A $= (2\sqrt{f}-\sqrt{h})^2$; debet autem eſſe $h \leqq 4f$, ſeu $f \geqq \frac{1}{4}h$, ne curua AN fiat imaginaria.

Corollarium 3.

791. Curuae ergo MA et AN in A et tangentem horizontalem, et radium oſculi communem habebunt, ſi fuerit $f = h$. Hoc enim caſu curuae AN radius oſculi in A fiet quoque $= h$.

Scholion 1.

792. Quemadmodum hic ex data curua deſcenſuum curua aſcenſuum determinauimus; ita perſpicitur ſimili modo ex curua aſcenſuum data curuam deſcenſuum inueniri poſſe; ſi enim detur aequa-

M.E.C.D. 2017

tio inter t et r; quia eſt $s = -2k l(e^{\frac{r}{2k}} - \frac{1}{k}\sqrt{2}\int\int e^{\frac{r}{k}} dt)$ atque $x = \int \frac{dt}{(1-\frac{1}{k}e^{\frac{-r}{k}}\sqrt{2}\int\int e^{\frac{r}{k}}dt)^2}$; his valoribus ſubſtituendis aequatio pro curua deſcenſuum inter s et x obtinebitur.

Corollarium 4.

793. Cum f innumerabiles habere poſſit valores, modo ſit $f > \frac{1}{4}h$; ad quamuis curuam ſiue deſcenſuum ſiue aſcenſuum datam innumerae adiungi poſſunt curuae, eiusmodi, vt ſemioſcillationes ſuper iis factae ſint omnes iſochronae, omnino vti in vacuo fieri poteſt.

Corollarium 5.

794. Quia in ſolutione poſuimus $T = X$ hac aequatione relatio continetur, inter quemque arcum deſcenſus integrum et arcum reſpondentis aſcenſus. Ita ſi arcus deſcenſus fuerit s erit arcus aſcenſus $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{1}{k}\sqrt{2}\int\int e^{\frac{-s}{k}} dx)$.

Exemplum 1.

795. Sit linea deſcenſuum data recta verticalis PA pro qua eſt $s = x$. Erit ergo quoque $ds = dx$, atque $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = k(1 - e^{\frac{-s}{k}})$. Vnde igitur fiet $r = 2kl(e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}}(1 - e^{\frac{-s}{k}}))$ ſeu $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \sqrt{\frac{2f}{k}}(1 - e^{\frac{-s}{k}})$

Porro

M.E.C.D. 2017

Porro autem eſt $t = \int \frac{ds}{\left(1+e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{\frac{2f}{k}}\left(1-e^{\frac{-s}{k}}\right)\right)^2}$, ſeu $e^{\frac{r+s}{k}}dt = ds$. Eliminato ergo s prodibit pro curua aſcenſuum iſta aequatio: $(2f+k)^2 dt = k(2f-k)dr - \frac{2kf(2f+k)dr + 4fk^2 e^{\frac{r}{k}} dr}{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{(4ff+2fk-2fke^{\frac{r}{k}})}}$; in qua variabiles ſunt a ſe inuicem ſeparatae, quare ea ad curuam conſtruendam ſufficit. Integratio vero huius aequationis a quadratura circuli pendet. Pro vacuo ex hac aequatione elicitur faciendo $k = \infty$ iſta aequatio $dt + dr = \frac{dr\sqrt{2f}}{\sqrt{(2f-r)}}$ ſeu $t = 4f - r - 2\sqrt{2f(2f-r)}$, quae aequatio ad eam quam in cap. praec. inuenimus reduci poteſt.

Exemplum 2.

796. Sit linea deſcenſuum data ipſa tautochrona deſcenſuum ſupra inuenta, cuius aequatio eſt $adx = kds(e^{\frac{s}{2k}}-1)$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{k}{a}\int ds(e^{\frac{-s}{2k}}-e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{2k^2}{a}(\frac{1}{2}-e^{\frac{-s}{2k}}+\frac{1}{2}e^{\frac{-s}{k}}) = \frac{k^2}{a}(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2$ et $\sqrt{\int e^{\frac{-s}{k}}dx} = \frac{k(1-e^{\frac{-s}{2k}})}{\sqrt{a}}$. Quamobrem fiet $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + \frac{\sqrt{2f}-e^{\frac{-s}{2k}}\sqrt{2f}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2f}+e^{\frac{-s}{2k}}(\sqrt{a}-\sqrt{2f})}{\sqrt{a}}$ atque $e^{\frac{-s}{2k}} = e^{\frac{r}{2k}}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}-\sqrt{2f}}{\sqrt{a}-\sqrt{2f}}$ et $ds=\frac{e^{\frac{r}{2k}}dr\sqrt{a}}{\sqrt{2f}-e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}}$ atque $adx=$

$\frac{ake^{\frac{r}{2k}}dr(e^{\frac{r}{2k}}-1)}{(e^{\frac{r}{2k}}\sqrt{a}-\sqrt{2f})^2}$. Cum autem porro sit $e^{\frac{-s}{k}}dx$

$=e^{\frac{r}{k}}dt$, erit $ae^{\frac{r}{k}}dt=\frac{ake^{\frac{r}{2k}}dr(e^{\frac{r}{2k}}-1)}{(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2}$ siue $adt=$

$\frac{akdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})}{(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2}$ seu $(-\sqrt{a}+\sqrt{2f})^2dt=kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})$

vbi $\sqrt{2f}$ maius esse debet quam $\sqrt{a}$. Haec autem aequatio inuenta comprehendit omnes tautochronas ascensuum; quae enim harumcunque cum tautochrona descensuum iungatur, super curua ex iis composita omnes semioscillationes debent esse isochronae. Si sumatur $f=2a$, aequatio erit haec $adt=kdr(1-e^{\frac{-r}{2k}})$, quae est pro tautochrona ascensuum, super qua omnes ascensus eodem tempore absoluuntur, quo descensus super tautochrona descensuum data, atque ea est continuatio tautochronae descensuum.

Exemplum 3.

797. Sit linea descensuum data MA tautochrona ascensuum, et quaeratur quales curuae cum ea iunctae semioscillationes isochronas producant. Aequatio vero pro hac curua MA est $adx=kds$

$(1-e$

M.E.C.D. 2017

$(1-e^{\frac{-s}{2k}})$. Erit ergo $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = \frac{k}{a}\int ds(e^{\frac{-s}{k}} - e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{a}$
$(\frac{1}{3} - e^{\frac{-s}{k}} + \frac{2}{3}e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a}(1 - 3e^{\frac{-s}{k}} + 2e^{\frac{-3s}{2k}}) = \frac{k^2}{3a}$
$(1+2e^{\frac{-s}{2k}})(1-e^{\frac{-s}{2k}})^2$. Ex his oritur $e^{\frac{r}{2k}} = e^{\frac{-s}{2k}} + (1-e^{\frac{-s}{2k}})\sqrt{\frac{2f}{3a}}(1+2e^{\frac{-s}{2k}})$ atque $t = \frac{k}{a}\int \frac{ds(1-e^{\frac{-s}{2k}})}{s(1+(e^{\frac{-s}{2k}}-1\sqrt{\frac{2f}{3a}}(1+2e^{\frac{-s}{2k}}))^2)}$, ex quibus constructio curuae consequitur.

Scholion 2.

798. Hoc exemplum ideo attulimus, vt appareat, cum quanam curua tautochronam ascensuum coniunctam esse oporteat, quo semioscillationes omnes aequalibus temporibus absoluantur. Ex formulis autem inuentis apparet curuam quaesitam non esse tautochronam descensuum; aequatio enim $cdt = kdr(e^{\frac{r}{2k}} - 1)$ in illis formulis non continetur, quod periculum facienti statim patebit. Quamobrem si MA fuerit tautochrona descensuum et AN ascensuum, etiamsi omnes itus per MAN iisdem absoluantur temporibus, tamen reditus seu semioscillationes sequentes per NAM non erunt isochronae. Pendulum ergo, quod secundum curuas MA et AN oscillari efficitur, oscillationes non faciet isochronas etiamsi alternae semioscillationes, in quibus descensus in curua MA incipit, aequalibus peragantur temporibus. Haec

M.E.C.D. 2017

conſequenter curua compoſita MAN non eſt idonea ad pendulorum motum in medio reſiſtente aequabilem efficiendum. Optimum vero huic incommodo remedium afferretur, ſi caſus determinaretur, quo curua AN ſimilis et aequalis curuae MA prodiret.

PROPOSITIO 88.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 3.

799. *Si curuae* MA *et* AN *eam habuerint proprietatem, vt omnes ſemioſcillationes, quae in curua* MA *incipiunt, ſint inter ſe iſochronae in medio quod in duplicata ratione celeritatum reſiſtit; determinare caſus, quibus hae duae curuae coniunctae* MA *et* AN *vnam curuam continuam conſtituunt.*

Solutio.

Manentibus iisdem denominationibus, quas in praecedente Prop. adhibuimus; ſcilicet $AP = x$; $AM = s$; $AQ = t$; et $AN = s$, atque $f =$ longitudini penduli iſochroni in vacuo et grauitate $= g$: inuenimus ibi has duas aequationes $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = \sqrt{2ff}e^{\frac{-s}{k}}dx$ et $e^{\frac{r}{k}}dt = e^{\frac{-s}{k}}dx$, quibus relatio inter vtramque curuam continetur. Iam quia curuae MA et NA duo debent eſſe rami curuae continuae, aequatio inter x et s ita debet eſſe comparata, vt ſi x abeat in t, tum s fiat $= -r$ propter ſitum negatiuum. Ad hoc accipiamus nouam variabilem z, cuius s et x ſint tales functiones, vt facto

M.E.C.D. 2017

facto z negatiuo x abeat in t et s in $-r$. Sit $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = z^2$; erit $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f}$; facto enim z negatiuo, quo casu r in $-s$ et $-s$ in r transit, prodibit $ke^{\frac{-s}{2k}} - ke^{\frac{r}{2k}} = -z\sqrt{2f}$; quae aequatio cum priore congruit. Sit P functio quaecunque par ipsius z, quae non mutatur etiam si loco z ponatur $-z$; et ponatur $ke^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{1}{2}z\sqrt{2f} + \mathrm{P}$; quo posito quaesito satisfiet. Namque faciamus z negatiuum; abibit $-s$ in r; atque habebitur $ke^{\frac{r}{2k}} = \frac{1}{2}z\sqrt{2f} + \mathrm{P}$; ac $ke^{\frac{r}{2k}} - ke^{\frac{-s}{2k}} = z\sqrt{2f}$; vti requiritur. Alteri aequationi $\int e^{\frac{r}{k}} dt = \int e^{\frac{-s}{k}} dx$ per hanc $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = z^2$ iam satisfit; posito enim z negatiuo et dt loco dx atque r loco $-s$ prodit $\int e^{\frac{r}{k}} dt = z^2 = \int e^{\frac{-s}{k}} dx$. Ex variabili ergo z, cuius P est functio quaecunque par; curua quaesita AM, cuius continua est altera AN ita determinatur, vt sit $e^{\frac{-s}{2k}} = -\frac{z\sqrt{2f}}{2k} + \frac{\mathrm{P}}{k}$, atque $dx = 2e^{\frac{s}{k}} z\,dz = \frac{8k^2 z\,dz}{(2\mathrm{P} - z\sqrt{2f})^2}$. Erit ergo $x = 8k^2 \int \frac{z\,dz}{(2\mathrm{P} - z\sqrt{2f})^2}$ et $s = 2k\,l\frac{2k}{2\mathrm{P} - z\sqrt{2f}}$. Sit $z = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{f}}$ tum ad formulas simpliciores efficiendas tum ad homogeneitatem commodius producendam, quia debebit esse u vnius dimensionis, erit ergo P functio par ipsius u vnius dimensionis quoque. Quare habebitur $s = 2k\,l\frac{k}{\mathrm{P} - u}$ atque $x = \frac{4k^2}{f} \int \frac{u\,du}{(\mathrm{P} - u)^2}$. Q. E. I.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

800. Infinitae ergo curuae tautochronae MAN inuenientur; si infiniti varii valores loco P, qui omnes sint functiones pares ipsius u substituantur. Aequatio vero inter x et s obtinebitur, si ex duabus acquationibus inuentis $s = 2kl\frac{k}{P-u}$ atque $x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$, variabilis u quae etiam in P inest, eliminetur.

Corollarium 2.

801. Quia est $s = 2kl\frac{k}{P-u}$ erit $ds = \frac{2k(du-dP)}{P-u}$ et $e^{\frac{s}{2k}} = \frac{k}{P-u}$ seu $P-u = ke^{\frac{-s}{2k}}$. Atque $e^{\frac{s}{2k}}ds = \frac{2k^2(du-dP)}{(P-u)^2}$. Cum qua aequatione si altera $dx = \frac{4k^2udu}{f(P-u)^2}$ coniungatur, prodibit $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f(du-dP)}{2udu}$. Quae aequatio ad eliminandum u est saepe commodissima.

Scholion 1.

802. Quia euanescente s quoque x euanescere debet; primum inuestigandum est, quo ipsi u dato valore s euanescat. Deinde integrale $\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ ita accipi debet, vt euanescat, si loco u idem valor substituatur. Hocque obseruandum est, cum in constructione curuae, quae ope duarum inuentarum aequationum perfici potest, tum in concinnatione aequationis inter x et s; si quidem ea ex

M.E.C.D. 2017

ex aequatione integrata $x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ deducatur. Ceterum si loco u et P quaelibet eorum multipla adhibeantur, loco duarum inuentarum aequationum adhiberi possunt istae $s = 2kl\frac{c}{P-u}$ et $x = \frac{4k^2}{f}\int\frac{udu}{(P-u)^2}$ vbi constans c est arbitraria, et idcirco ita determinari potest, vt s eodem casu euanescat, quo euanescit x. At s euanescit si $u = 0$; quia est $\int e^{\frac{-s}{k}}dx = \frac{2u^2}{f}$; atque $\int e^{\frac{-s}{k}}dx$ euanescit euanescente s; quare c aequale esse debet valori ipsius P si in eo ponatur $u = 0$. Eodem ergo casu x debet euanescere, ex quo constans in integratione valoris ipsius x determinatur. Vel etiam loco P talis functio par ipsius u accipi debet, quae fiat $= c$ si ponatur $u = 0$.

Corollarium 3.

803. Cum longitudo penduli isochroni in vacuo et grauitate $= g$ sit $= f$; atque oscillationes minimae in medio resistente non discrepent ab oscillationibus in vacuo: erit radius osculi curuae in A $= f$; si quidem tangens curuae in A fuerit horizontalis.

Exemplum 1.

804. Quia P esse debet functio par ipsius u, sit P constans $= c = k$; quo posito $u = 0$ fiat $s = 0$. Erit ergo $k - u = ke^{\frac{-s}{2k}}$ seu $u = k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$. Atque ob $dP = 0$, habebitur $\frac{e^{\frac{s}{2k}}ds}{dx} = \frac{f}{2u}$ seu $u = \frac{\int e^{\frac{-s}{2k}}dx}{2ds}$.

M.E.C.D. 2017

Ex quibus aequationibus conficitur ista $\frac{fdx}{2} = kds$ $(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Quae aequatio est pro ipsa tautochrona descensuum; quae vltra A continuata dat tautochronam ascensuum; atque omnes semioscillationes super hac curua continua, si modo in ramo MA incipiant, erunt isochronae.

Exemplum 2.

805. Sit $P = k + \frac{u^2}{a}$; retinebit P eundem valorem facto u negatiuo. Hoc posito erit $k - u + \frac{u^2}{a} = ke^{\frac{-s}{2k}}$; et propter $dP = \frac{2udu}{a}$ erit $\frac{e^{\frac{s}{2k}} ds}{dx} = \frac{f(a-2u)}{2au}$; ex qua aequatione prodit $u = \frac{fadx}{2(ae^{\frac{s}{2k}} ds + fdx)}$. Qui ipsius u valor in altera aequatione substitutus dat $2fa^2 e^{\frac{s}{k}} dx\, ds = 4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$ $(ae^{\frac{s}{2k}} ds + fdx)^2 - f^2 ae^{\frac{s}{2k}} dx^2$; atque extracta radice

$$\frac{ae^{\frac{s}{2k}} ds}{fdx} = \frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)} - 1 \pm \sqrt{\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)}\left(\frac{ae^{\frac{s}{2k}}}{4k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)} - 1\right)}$$

In casu speciali si fuerit $a = 4k$ ista aequatio abit in hanc $\frac{4ke^{\frac{s}{2k}} ds}{fdx} = \frac{1 + e^{\frac{s}{4k}}}{e^{\frac{s}{2k}} - 1}$, quae duas aequationes in se complectitur, quarum altera est $fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}} ds(e^{\frac{s}{4k}} - 1)$, et altera $-fdx = 4ke^{\frac{s}{2k}} ds(e^{\frac{s}{4k}} + 1)$

M.E.C.D. 2017

$+1$). Harum autem posterior, quia posito $s=0$, non euanescit dx, et ob valorem ipsius dx negatiuum, est inutilis. Prior vero integrata dat $fx=16k^2\left(\frac{e^{\frac{3s}{4k}}}{3}-\frac{e^{\frac{s}{2k}}}{2}+\frac{1}{6}\right)$ seu $3fx=8k^2\left(2e^{\frac{3s}{4k}}-3e^{\frac{s}{2k}}+1\right)$. Quae vltra A continuata hac aequatione exprimitur $3ft=8k^2\left(2e^{\frac{-3r}{4k}}-3e^{\frac{-r}{2k}}+1\right)$. Per seriem vero habetur ista aequatio: $fx=\frac{s^2}{2}+\frac{5s^3}{24k}+\frac{19s^4}{384k^2}+$ etc. et pro altera curuae parte AN haec: $ft=\frac{r^2}{2}-\frac{5r^3}{24k}+\frac{19r^4}{384k^2}-$ etc.

Corollarium 4.

806. Quia est $z^2=\frac{2u^2}{f}=\int e^{\frac{-s}{k}}dx$, erit $u=V\frac{f}{2}\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Eliminato vero u est $P=ke^{\frac{-s}{2k}}+V\frac{1}{2}f\int e^{\frac{-s}{k}}dx$. Quare si ille valor ipsius u in hac aequatione substituatur, prodibit statim aequatio inter s et x.

Exemplum 3.

807. Ponamus esse $P=V(k^2+u^2)$, seu $P^2=k^2+u$; substitutis loco P et u^2 valoribus supra datis, $k^2e^{\frac{-s}{k}}+ke^{\frac{-s}{2k}}V2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx=k^2$, seu $V2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx=k(e^{\frac{s}{2k}}-e^{\frac{-s}{2k}})$. Hinc quadratis sumendis oritur $2f\int e^{\frac{-s}{k}}dx=k^2(e^{\frac{s}{2k}}-e^{\frac{-s}{2k}})^2=k^2(e^{\frac{s}{k}}+e^{\frac{-s}{k}}-2)$. Haec vero aequatio differentiata dat hanc $2fe^{\frac{-s}{k}}dx=kds$

(e

M.E.C.D. 2017

$(e^{\frac{s}{k}}-e^{\frac{-s}{k}})$ seu $2fdx=kds(e^{\frac{2s}{k}}-1)$, cuius integralis est $2fx=\frac{k^2e^{\frac{2s}{k}}}{2}-ks-\frac{k^2}{2}$. Quae aequatio in seriem conuersa dat $fx=\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{3k}+\frac{s^4}{6k^2}+\frac{s^5}{15k^3}+\frac{s^6}{45k^4}+$ etc.

Scholion 2.

808. Quas in his exemplis inuenimus curuas tautochronas pro medio quod resistit in duplicata ratione celeritatum, eae ita sunt comparatae, vt arcus MA et AN sint diffimiles. Cum igitur omnes descensus super curua MA incipere debeant, sequentes semioscillationes, quae in curua NA incipiunt, non erunt tautochronae, id quod in causa est, quod hae curuae ad motum oscillatorium accommodari nequeant. Huic autem in commodo remedium afferretur, si huiusmodi curuarum MA et NA par inueniretur, quae essent inter se similes et aequales, hoc enim casu perinde super vtraque curua descensus fieri posset. Dubium quoque nullum est, quin talis casus existat; eiusque inuentio, quia hae duae curuae forte non erunt continuae, ad praecedentem propositionem potius pertinet. Indagari scilicet debet curua descensuum, cui respondens curua ascensuum similis et aequalis sit; haec vero inuestigatio ob defectum analyseos ita est difficilis, vt dubitem, num quisquam ante insignem analyseos promotionem, ad hunc scopum pertingere possit. Haec vero quae-

stio

M.E.C.D. 2017

ſtio huc reducitur, vt inueſtigetur aequatio inter s et x huius conditionis, vt ſi in ea ponatur $-2kl(e^{\frac{s}{2k}}-\frac{1}{k}\sqrt{2\int\int e^{\frac{s}{k}}dx})$ loco s; et $\int\frac{dx}{(1-\frac{1}{k}\frac{-s}{e^{2k}}\sqrt{2\int\int e^{\frac{s}{k}}dx})^2}$ loco x, eadem prodeat aequatio, quae habebatur ante. Conditio quidem haec multis modis facilior effici poteſt; attamen quomodo ei ſatisfieri poſſit non video. Si medium fuerit rariſſimum, non difficile eſt ex allatis caſum inuenire, quo duae curuae MA et AN ſint inter ſe ſimiles et aequales. Ego quidem ad finem perducto calculo hanc inueni aequationem $fdx=sds+\frac{s^3ds}{9k^2}$, ſeu $fx=\frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{36k^2}$; quae curua ſimul vltra A continuata ramum habet AO ſimilem et aequalem arcui AM; quare pendulum in hac curua oſcillans ſingulas ſemioſcillationes abſoluet aequalibus temporibus. Erit autem $s^2=-9k^2+3k\sqrt{(9k^2+4fx)}$ et $s=\sqrt{(-9k^2+3k\sqrt{(9k^2+4fx)}}$. Quia vero k eſt quantitas valde magna, erit $s=\sqrt{2fx}-\frac{fx\sqrt{2fx}}{18k^2}$, atque $ds=\frac{fdx}{\sqrt{2fx}}-\frac{fdx\sqrt{2fx}}{12k^2}$. Hincque fit $dy=dx\sqrt{\frac{f-2x}{2x}}-\frac{f^2dx}{12k^2}\sqrt{\frac{2x}{f-2x}}$. Ponatur $f=2a$ erit $y=\int dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}-\int\frac{adx}{3k^2}\sqrt{\frac{x}{a-x}}=\int\frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}-\int\frac{a^2xdx}{3k^2\sqrt{(ax-xx)}}$

$=(1+\frac{a^2}{3k^2})\sqrt{(ax-xx)}+(1-\frac{a^2}{3k^2})\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$.

Quae ergo curua eodem fere modo, quo cyclois deſcribi poteſt ope rectificationis circuli.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 5.

809. Si ſumatur $a = k\sqrt{3}$ ſeu $f = 2^0 k\sqrt{3}$; curua haec abit in ellipſin, cuius axis horizontalis eſt duplo maior quam verticalis, qui eſt $= k\sqrt{3}$. Fieri ergo poteſt, vt ellipſis ſit tautochrona in fluido rariſſimo; atque magis ſatisfaciat quam cyclois.

Scholion 3.

Tab. XVI. Fig. 4.

810. Conſtructio autem curuae tautochronae in medio rariſſimo in praec. ſcholio datae eſt vt ſequitur. Super recta verticali $AB = a = \frac{1}{2}f$ deſcribatur ſemicirculus AOB, et ex hoc ſuper baſi BD cyclois AFD; quae eadem inuerſo ſitu deſcribatur AGD. Quibus factis curua quaeſita AMC conſtruetur ſumendis vbique eius applicatis $PM = PF - \frac{a^2}{3k^2}PG$; qua ratione curuae infinita puncta cognoſcuntur. Vel etiam accipi poteſt $PM = (1 + \frac{a^2}{3k^2})PO + (1 - \frac{a^2}{3k^2})AO$, ita vt cycloide non ſit opus. Curua autem haec alicubi habebit tangentem verticalem, ſeu applicatam PM maximam quae inuenitur poſito $dy = 0$. Prodibit autem $\frac{a-x}{x} = \frac{a^2}{3k^2}$ ſeu $x = \frac{3ak^2}{a^2+3k^2}$ cui valori ſi AP aequalis capiatur, inuenietur applicata maxima.

PROPOSITIO 89.

Problema.

Tab. XVI. Fig. 5.

811. *In hypotheſi grauitatis vniformis deorſum tendentis* g, *data curua quacunque* am *pro deſcenſibus*

M.E.C.D. 2017

bus in vacuo; inuenire curuam AM *pro deſcenſibus in medio reſiſtente vniformi in duplicata ratione celeritatum huius indolis, vt omnes deſcenſus ſuper* MA *ſint iſochroui reſpectiue omnibus deſcenſibus ſuper* ma; *ſi celeritates in punctis imis* a *et* A *fuerint aequales.*

Solutio.

Sit pro curua deſcenſuum in vacuo *am* abſciſſa $ap = t$; arcus $am = r$; pro curua vero deſcenſuum in medio reſiſtente ſit $AP = x$ et $AM = s$; reſiſtentiae vero exponens ponatur $= k$. Iam conſiderentur bini deſcenſus ſuper his curuis, in quibus celeritates in A et *a* acquiſitae ſint aequales et debitae altitudini *b*. Erit ergo tempus deſcenſus in vacuo $= \int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$, ſi poſt integrationem ponatur $gt = b$. At pro tempore deſcenſus in medio reſiſtente ſuper curua MA habebitur $\int \frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}\sqrt{(b-g\int e^{\frac{-s}{2k}}dx)}}$ ſi item poſt integrationem ponatur $g\int e^{\frac{-s}{k}} dx = b$. Quamobrem haec tempora erunt aequalia ſi fuerit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = t$; his enim poſitis pro vtroque tempore habebitur eadem expreſſio $\int \frac{dr}{\sqrt{(b-gt)}}$. Cum igitur ſit $\frac{ds}{e^{\frac{s}{2k}}} = dr$, erit integrando $2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}}) = r$ atque $e^{\frac{-s}{2k}} = \frac{2k-r}{2k}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{2k-r}{2k}$; vnde prodit $s = 2kl\frac{2k}{2k-r}$. Altera vero aequatio $\int e^{\frac{-s}{k}} dx = t$ dat $e^{\frac{-s}{k}} dx = dt$. Eſt autem $e^{\frac{-s}{k}} = \frac{(2k-r)^2}{4k^2}$ quo valore ſubſtituto habetur $dx = \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}$ ex quo oritur $x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k-r)^2}$. Data ergo aequatione inter t et r pro curua am ope duarum harum aequationum, quibus s et x per t et r determinantur, conſtrui poterit curua quaeſita AM. Aequatio vero inter x et s commodius inuenietur ex data aequatione inter t et r; ſi in ea loco r ſubſtituatur $2k(1-e^{\frac{-s}{2k}})$ et $\int e^{\frac{-s}{k}} dx$ loco t. Q. E. I.

Corollarium 1.

812. Circa punctum infimum A vbi t et r ſunt quantitates euaneſcentes fit $s = r + \frac{r^2}{4k}$; et $x = t + \int \frac{rdt}{k}$, ſeu $dx = dt + \frac{rds}{k}$ et $ds = dr + \frac{rdr}{2k}$. Quare inclinatio curuae MA ad axem in A aequalis erit inclinationi curuae ma in A.

Corollarium 2.

813. Porro radius oſculi in puncto infimo a ſi tangens fuerit horizontalis eſt $= \frac{rdr}{dt}$; et in A quia tangens quoque erit horizontalis $= \frac{sds}{dx} = \frac{rdr + \frac{3r^2dr}{4k}}{dt + \frac{rdt}{k}}$. Erit ergo $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt} - \frac{r^2dr}{4kdt} = \frac{rdr}{dt}(1 - \frac{r}{4k})$ Quare ob r infinite paruum erit $\frac{sds}{dx} = \frac{rdr}{dt}$.

Corollarium 3.

814. Si ergo curua ma in a habuerit tangentem horizontalem; erit curuae MA tangens in A

M.E.C.D. 2017

A quoque horizontalis; atque radius oſculi in A aequalis erit radio oſculi in *a*.

Corollarium 4.

815. Si igitur in vacuo inuenta fuerit curua *ma*; in qua tempora deſcenſuum quameunque habeant relationem ad celeritates in *a* acquiſitas; idem problema pro medio reſiſtente ſoluetur curua MA, quae praeſcripta ratione ex curua *ma* conſtruitur.

Corollarium 5.

816. Si igitur curua *ma* fuerit cyclois ſeu tautochrona in vacuo; AM erit tautochrona deſcenſuum in medio reſiſtente ſupra inuenta. Poſito enim $r^2 = 2at$ ſeu $rdr = adt$; prodibit ſubſtitutis loco r et t inuentis valoribus iſta aequatio $2ke^{\frac{-s}{2k}}ds(1-e^{\frac{-s}{2k}}) = ae^{\frac{-s}{k}}dx$ ſeu $adx = 2kds(e^{\frac{s}{2k}}-1)$.

Exemplum.

817. Sit *am* linea recta vtcunque inclinata, ita vt ſit $r = nt$; erit tempus deſcenſus, quo celeritas altitudini b debita generatur $= \int \frac{ndt}{\sqrt{(b-gt)}} = \frac{2n\sqrt{b}}{g}$. Eandem ergo habebit proprietatem curua MA, vt tempus cuiusque deſcenſus in medio reſiſtente quo celeritas $\sqrt{b}$ generatur, ſit $= \frac{2n\sqrt{b}}{g}$ ſeu proportionale ipſi celeritati genitae. Cum autem ſit $r = nt$; erit $dr = ndt$; in qua ſi loco dr et dt valores inuenti ſubſtituantur prodibit $e^{\frac{-s}{2k}}ds = \frac{ne^{\frac{-s}{k}}}{dx}dx$

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

dx seu $ndx = e^{\frac{s}{2k}} ds$; quae est aequatio pro tractoria filo longitudinis $2k$ generata, qualis repraesentatur in fig. 2. Tab. XVI. nempe curua CA, quae in A eam habet inclinationem quam recta data ma.

Scholion 1.

818. Quemadmodum hic curua MA est determinata, super qua omnes descensus in medio resistente iisdem absoluuntur temporibus, quibus descensus in vacuo super curua ma, si celeritates vltimae in A et a fuerit aequales; ita eodem modo curua MA potest definiri, super qua omnes ascensus in medio resistente iisdem temporibus absoluuntur, quibus similes iisdem celeritatibus incipientes ascensus in vacuo super curua am. Nam cum in medio resistente descensus in ascensum mutetur facto k negatiuo; si ponantur $AP = x$ et $AM = s$ habebitur $x = \int \frac{4k^2 dt}{(2k+r)^2}$ et $s = 2kl\frac{2k+r}{2k}$ seu inuerse $t = \int e^{\frac{s}{k}} dx$ et $r = 2k(e^{\frac{s}{2k}} - 1)$. Ex quibus tum facile curua AM potest construi et aequatio pro ea inueniri.

Scholion 2.

819. In hoc problemate ex curua descensuum in vacuo data determinauimus curuam descensuum in medio resistente. Facile autem apparet vicissim ex data curua AM pro medio resistente alteram am pro vacuo inueniri posse. Cum enim sit $r = 2k(1 - e^{\frac{-s}{2k}})$ et $t = \int e^{\frac{-s}{k}} dx$ constructio curuae am ope harum duarum aequationum perficitur. Aequatio vero pro curua

am

M.E.C.D. 2017

am inter *t* et *r* commodius ex data aequatione inter *x* et *s* reperitur; si in ea loco *x* substituatur $\int \frac{4k^2dt}{(2k-r)^2}$ et $2kl\frac{2k}{2k-r}$ loco *s*. Quod hic praeterea de descensibus dictum est, idem de ascensibus valet, si modo *k* ponatur negatiuum vti in Scholio I. monuimus.

Scholion 3.

420. Tradita hic inuentio alterius curuae duarum *am* et AM ex altera etiam locum habet, si datae curuae non habeatur aequatio, sed si manu vtcunque fuerit ducta; ex formulis enim inuentis constructio potest deduci, quae ab aequatione non amplius pendeat. Quamobrem cum in cap. praec. (432.) in casum inciderimus pro vacuo quo curuam *cm* inuenimus cum data *ac* iungendam, vt omnes descensus ex quouis puncto curuae *cm* vsque ad *a* aequalibus absoluantur temporibus; similia exempla ex iis pro medio resistente erui poterunt, quibus linea ex partibus duarum diuersarum curuarum composita sit tautochrona. Si enim curua *acm* fuerit huiusmodi curua tautochrona pro vacuo, ex ea per solutionem huius problematis similis curua composita pro medio resistente inuenietur. Scilicet ex *ac* methodo tradita curua AC definiatur; qua inuenta posita *bp* $=t$, $cm=r$; et BP$=x$, atque CM$=s$; et praeterea $ab=a$, $ac=c$ et AB$=$A et AC$=$C; tum enim cum data sit aequatio inter *t* et *r* erit AP $=$A$+x=\int \frac{4k^2dt}{(2k-c-r)^2}$ et AM$=$C$+s=2kl\frac{2k}{2k-c-r}$.

Tab. XVI. Fig. 6.

At

At ſi pro medio reſiſtente data fuerit curua AC; atqne requiratur altera CM eius proprietatis, vt omnes deſcenſus ſuper MCA aequalibus abſoluantur temporibus; ſolutio non diſſimili modo effitur temporibus; ſolutio non diſſimili modo effitur. Nam ex data curua AC pro medio reſiſtente, inueniatur curua eiusdem proprietatis pro vacuo *ac* per Scholion 2. Qua inuenta quaeratur curua *cm* ei adiungenda, quae omnes deſcenſus in vacuo iſochronos producat (432.). Denique methodo modo tradita ex curua compoſita *acm* pro vacuo quaeratur ſimilis curua compoſita pro medio reſiſtente ACM, cuius quidem pars AC iam eſt cognita, quippe ex ea lineam *ac* definiuimus. Idem ergo problema quod in vacuo tantum in ſe habebat difficultatis, in medio quoque reſiſtente reſoluitur. Denique hinc caput hoc finiens Lectorem beneuolum rogo, vt antequam ad caput ſequens progrediatur, quae in Cap. I. ab §. 58. vsque ad finem cap. tradita ſunt, repetere velit.

CAPUT

M.E.C.D. 2017

CAPUT QUARTUM
DE
MOTU PUNCTI SUPER DATA SUPERFICIE.

PROPOSITIO 90.
Problema.

821.

Data via in ſuperficie quacunque M*m*μ; *inuenire eius poſitionem reſpectu plani dati* APQ, *et radii oſculi illius viae in* M *tam poſitionem quam longitudinem; nec non normalis in ſuperficiem ſitum.* Tab. XVII. Fig. 1.

Solutio.

Sumto pro lubitu plano APQ in eoque axe AP, quorum reſpectu poſitio curuae *M*mμ ſit determinanda; ex tribus punctis proximis M, *m* et μ datae viae in ſuperficie in planum APQ demittantur perpendicula MQ, *mq*, μϱ; atque ex punctis Q, *q*, ϱ ad axem AP perpendicula QP, *qp* et ϱπ. Poſito nunc initio abscisſarum in A, ſit AP$=x$; PQ$=y$ et QM$=z$. Quia porro ſuperficies data ponitur, dabitur aequatio eius naturam exprimens inter tres has variabiles x, y et z; quae aequatio ſit haec $dz=Pdx+Qdy$. Cum hac aequatione ſi coniungatur alia aequatio, exprimetur linea quaedam in iſta ſuperficie exiſtens; quare cum linea M*m*μ data

M.E.C.D. 2017

ponatur dabitur praeter aequationem $dz = Pdx + Qdy$ insuper alia aequatio, qua curua $Mm\mu$ determinatur, quam autem hic repraesentare non est opus. Sint elementa abscissae Pp, $p\pi = dx$ inter se aequalia, seu sumatur elementum dx constans. Erit ergo $pq = y + dy$; $\pi\varrho = y + 2dy + ddy$; atque $qm = z + dz$, et $\varrho\mu = z + 2dz + ddz$. His positis sit MN normalis in superficiem in puncto M, et N punctum quo haec normalis plano APQ occurrit, demittatur ex N in axem perpendiculum NH; erit $AH = x + Pz$ et $HN = -Qz - y$ (68). Sit nunc MR positio radii osculi curuae $Mm\mu$, et R incidentia eius in planum APQ; erit ex R in axem demisso perpendiculo RX; $AX = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} + x$; atque $XR = \frac{zdx^2ddy + zdz(dzddy - dyddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy} - y$ (68). Longitudo vero radii osculi scilicet $MO = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2 + ddz^2) + (dyddz - dzddy)^2)}}$ (72).

Denique concipiatur planum, in quo sita sunt elementa Mm, $m\mu$, productum, donec planum APQ intersecet sitque intersectio recta RKI, cui ex A erecta perpendicularis in K occurrat, et ex P in V; inuentum est supra esse $PV = \frac{zddy}{ddz} - y$ (68). Cum nunc sit $XR - PV : AX - AP = PV : PI$, erit $PI = \frac{(AX - AP)PV}{XR - PV}$. Est vero $AX - AP = \frac{zdx(dyddy + dzddz)}{(dx^2 + dy^2)ddz - dydyddy}$ atque $XR - PV = \frac{zddyddz(dz^2 - dy^2) + zdydz(ddy^2 - ddz^2)}{ddz((dx^2 + dy^2)ddz - dydzddy)}$. Quibus substitutis erit $PI = \frac{dx(dyddy + dzddz)(zddy - yddz)}{ddyddz(dz^2 - dy^2) + dydz(ddy^2 - ddz^2)}$

M.E.C.D. 2017

$= \frac{zdxddy-ydxddz}{dzddy-dyddz}$ atque $AI = PI - AP =$ $\frac{zdxddy-ydxddz-xdzddy+xdyddz}{dzddy-dyddz}$. Hinc reperitur $AK = \frac{PV.AI}{PI} = \frac{zdxddy-ydxddz-xdzddy+xdyddz}{dxddz}$. Plani vero in quo ſita ſunt elementa Mm et $m\mu$, inclinatio ad planum APQ inuenietur, demittenda ex Q perpendiculari QS ad interſectionem RI; erit enim tangens anguli inclinationis $= \frac{QM}{QS}$. At cum ſit IV : PI QV : QS erit illa tangens $= \frac{QM.IV}{PI.QV} = \frac{\sqrt{(dx^2ddz^2+(dzddy-dyddz)^2)}}{dxddy}$. Anguli vero NMR, quem radius osculi cum normali in ſuperficiem conſtituit, tangens eſt $= \frac{ddy(dx+Pdz)-ddz(Pdy-Qdx)}{(ddz-Qddy)\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ (71). Ex his igitur omnia deduci poſſunt, quae ad poſitionem curuae $Mm\mu$ cognoscendam requiruntur. Q.E.I.

Corollarium 1.

822. Curuae $Mm\mu$ proiectio in plano APQ eſt curua $Qq\varrho$, cuius natura exprimitur aequatione inter x et y. Quare iſta proiectio habebitur, ſi ope aequationum $dz = Pdx + Qdy$, et eius, qua ipſa curua in ſuperficie ducta determinatur, noua formetur aequatio eliminanda variabili z, quae ſit inter x et y tantum.

Corollarium 2.

823. Simili modo, ſi eliminetur x, vt prodeat aequatio inter y et z; hac aequatione definietur proiectio curuae $Mm\mu$ in plano quod eſt normale ad axem AX. Atque aequatio in qua non ineſt y,

M.E.C.D. 2017

sed tantum x et z dabit proiectionem curuae $M m \mu$ in plano, quod normaliter planum APQ secundum ax m AX intersecat.

Corollarium 3.

824. Curuae autem $M m \mu$ natura ex duabus eius proiectionibus in duobus planis inuicem normalibus distincte cognoscitur. Qualem cognitionem quoque suppeditat vnica proiectio vna cum ipsa superficie.

Corollarium 4.

825. Quamobrem ad curuam in superficie data quamcunque characteribus designandam requiritur, vt praeter aequationem $dz = P\,dx + Q\,dy$, qua superficies determinatur, detur aequatio duas tantum variabiles inuoluens pro proiectione quapiam curuae $M m \mu$.

Corollarium 5.

826. Si superficies secetur plano, simili modo, quo conus ad sectiones conicas producendas secari solet, curua ex hac sectione orta erit in eodem plano. Quare his casibus tam positio rectae IR erit constans, quam plani IMR inclinatio ad planum APQ.

Exemplum.

827. Si igitur detur superficies quaecunque eaque secetur plano IMR; quaeratur curua hac sectio-

M.E.C.D. 2017

tione orta. Ad hoc ponatur AI$=a$; AK$=b$; et anguli inclinationis plani IMR ad planum APQ tangens $=m$; eritque $a=\frac{zdxddy-ydxddz}{dzddy-dyddz}-x$ et $b=\frac{zdxddy-ydxddz-xdzddy+xdyddz}{dxddz}$, atque $m=\frac{\sqrt{(dx^2ddz^2+(dzddy-dyddz)^2)}}{dxddy}$. Ex quibus aequationibus coniunctis cum $dz=Pdx-Qdy$ natura curua hac sectione genitae determinabitur. Ex prioribus vero duabus aequationibus oritur $\frac{b}{a}=\frac{dzddy-dyddz}{dxddz}$ seu $ddz:ddy=adz:bdx+ady$; cuius aequationis integralis est $\frac{1}{a}ldz=\frac{1}{a}l(bdx+ady)-\frac{1}{a}lc$, seu $cdz=bdx+ady$, et porro $cz=bx+ay+ff$. In prima vero aequatione si loco ddz et ddy eorum proportionalia substituantur, prodibit $a+x=\frac{bzdx+azdy-aydz}{bdz}$ seu $abdz+bxdz=bzdx+azdy-aydz$, cuius per zz diuisae integralis est haec $c-\frac{ab}{z}=\frac{bx+ay}{z}$ seu $cz=bx+ay+ab$ quod ergo ante erat ff hic est ab seu $ff=ab$. Constantem vero c tertia aequatio definiet; erit autem $m=\frac{dz\sqrt{(a^2+b^2)}}{bdx+ady}$ seu $\frac{dz\sqrt{(a^2+b^2)}}{m}=ady+bdx$. Quare erit superior littera $c=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{m}$, atque praeter aequationem superficiei naturam exprimentem habetur ista $\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{m}=bx+ay+ab$, ex quibus natura quaesitae curuae est deriuanda. Quia autem tota curua quaesita est in plano IMR, commodissime ea exprimetur aequatione inter coordinatas orthogonales in eodem plano sumtas. Sumto ergo IR pro axe, ex M in eum demittatur perpendiculum MS et vocetur IS$=t$ et MS$=u$. Est vero IA:AK$=$IP:PV seu PV$=\frac{ab+bx}{a}$ et QV$=\frac{ab+bx+ay}{a}=\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{ma}$. Porro est

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$\sqrt{(a^2+b^2)}:a=\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{ma}:QS$; quare erit $QS=\frac{z}{m}$ et $SV=\frac{bz}{ma}$. Ex his prodibit $MS=u=\frac{z\sqrt{(1+m^2)}}{m}$ atque $IS=t=\frac{m(a+x)\sqrt{(a^2+b^2)}-bz}{ma}$. Ex quo oritur $z=\frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$ et $x=\frac{bu+at\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)(1+m^2)}}-a$ et substitutis his valoribus in aequatione $\frac{z\sqrt{(a^2+b^2)}}{m}=bx+ay+ab$ prodibit $y=\frac{au-bt\sqrt{(1+m^2)}}{\sqrt{(1+m^2)(a^2+b^2)}}$. His igitur valoribus loco x, y et z in aequatione superficiei substitutis proueniet aequatio inter t et u seu coordinatas orthogonales curuae quaesitae.

Corollarium 6.

828. Si intersectio plani secantis IR in ipsum axem AX incidat sumaturque I in A; erit $z=\frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$; $y=\frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}}$ et $x=t$.

Corollarium 7.

829. Si intersectio IR plani secantis SMR cum plano APQ fuerit normalis ad axem AX erit $b=\infty$. Quare prodibunt $z=\frac{mu}{\sqrt{(1+m^2)}}$; $x=\frac{u}{\sqrt{(1+m^2)}}-a$ et $y=-t$.

Corollarium 8.

830. Cum valores loco z, y et x substituendi sint vnius dimensionis ipsarum t et u, perspicuum est aequationem inter t et u non plures habere posse dimensiones, quam ipsam aequationem inter z, y et x.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 9.

831. Quare si aequatio inter z, y et x fuerit duarum dimensionum, cuiusmodi praeter conicam innumerabiles dantur superficies, omnes sectiones plano factae erunt sectiones conicae.

Scholion.

832. In Comment. Tom. III. ea dissertatione, in qua lineam breuissimam in superficie quacunque determinaui, tria praecipue superficierum genera sum persecutus, quae erant cylindrica, conica et tornata seu rotunda. Aequatio vero generalis $dz = P dx + Q dy$ dat superficies cylindricas si P euanescit et Q tantum ab y et z pendeat, ita vt aequationem pro hoc superficierum genere absciſſa x non ingrediatur; omnes enim sectiones inter se parallelae sunt quoque aequales; pro his ergo est aequatio $dz = Q dy$. Ad genus conoidicum refero omnes eas superficies quae genenrantur ducendis rectis ex singulis curuae cuiuspiam punctis ad punctum fixum extra planum eius curuae situm. Quae superficies hanc habent proprietatem, vt omnes sectiones parallelae sint inter se similes earumque latera homologa, vt distantiae sectionum a vertice coni. Aequationes vero pro huiusmodi superficiebus, si quidam vertex poli fuerit in A, ita sunt comparatae, vt x, y et z coniunctim vbique eundem dimensionum numerum constituant. Superficies denique tornatae seu rotundae mihi sunt, quae

gene-

M.E.C.D. 2017

generantur conuerſione cuiuscunque curuae circa axem, qui axis ſi fuerit AX, poſito x conſtante aequatio inter y et z dabit circulum centri P. Quare aequatio pro iis hanc habebit formam $dz = P dx - \frac{y dy}{z}$, ſeu $z dz + y dy = z P dx$, vbi Pz ab x tantum pendet; ſeu eſt $Q = -\frac{y}{z}$ et $P = \frac{X}{z}$ exiſtente X functione ipſius x. Quemadmodum autem in his ſuperficiebus tornatis omnes ſectiones axi normales ſunt circuli, ita tales ſuperficies concipi poſſunt, quarum ſectiones axi normales ſint curuae quaecunque ſimiles. Tales ſuperficies omnes hac continebuntur proprietate generali vt functio quaecunque ipſius x aequalis ſit functioni eiusdem vbique dimenſionum ipſarum y et z numeri. Vt ſi iſte dimenſionum numerus fuerit n; aequationis $P dx = R dz + Q dy$ pro ea haec erit proprietas vt ſit $Rz + Qy = n \int P dx$, vel $R dx + Q dy = \frac{z dR + y dQ}{n-1}$. Ex quo, an data aequatio ſit ad huiusmodi ſuperficiem, ſtatim concludi poteſt.

PROPOSITIO 91.

Problema.

833. *In ſuperficie quacunque data lineam determinare, quam corpus in ea motum et a nullis potentiis ſollicitatum deſcribit tam in vacuo quam in medio quocunque reſiſtente.*

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Quia corpus a nullis potentiis abſolutis ſollicitari ponitur, linea ab eo in ſuperficie deſcripta erit linea breuiſſima in vacuo (62.). Medii autem reſiſtentis vis celeritatem corporis tantum imminuit, neque directionem vllo modo afficit, quare etiam in medio reſiſtente via a corpore in quauis ſuperficie deſcripta erit pariter breuiſſima. Manentibus igitur vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, ſit $dz = P\,dx + Q\,dy$ aequatio ſuperficiei naturam exprimens, atque Mm, $m\mu$ duo lineae breuiſſimae cuiuspiam elementa. Ex his ſupra pro linea breuiſſima inuenta eſt haec aequatio $P\,dz\,ddy + dx\,ddy = P\,dy\,ddz - Q\,dx\,ddz$ (69.), vnde oritur $ddz = \frac{(P\,dz + dx)\,ddy}{P\,dy - Q\,dx}$. At aequatio ad ſuperficiem differentiata dat $ddz = d\,P\,dx + Q\,ddy + d\,Q\,dy$, ex quibus coniunctis fit $ddy = \frac{(P\,dy - Q\,dx)(dP\,dx + dQ\,dy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$ et $ddz = \frac{(P\,dz + dx)(dP\,dx + dQ\,dy)}{dx(1 + P^2 + Q^2)}$. Dato ergo elemento Mm, ſequens $m\mu$ in linea breuiſſima inuenietur; erit enim $\pi\varrho = PQ + 2\,dy + ddy$ et $\varrho\mu = QM + 2\,dz + ddz$, et ipſarum ddy et ddz valores ſunt inuenti. Quare hinc ſequentis cuiusque elementi poſitio determinatur, atque ipſius lineae breuiſſimae natura per quamcunque eius proiectionem cognoſcitur. Q. E. I.

Corollarium I.

834. Si in aequatione pro ſuperficie P et Q tantum per x et y dantur, aequatio $ddy =$

M.E.C.D. 2017

$\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ proiectionem lineae breuiſſimae in plano APQ denotat.

Corollarium 2.

635. Pro linea ergo breuiſſima $Mm\mu$ ſumtis elementis axis aequalibus erit $\pi\varsigma = y + 2dy + \frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ atque $\varsigma\mu = z + 2dz + \frac{(Pdz+dx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$, ex quibus aequationibus punctum μ ex duobus praecedentibus M et m cognoſcitur.

Corollarium 3.

836. Quia pro linea breuiſſima angulus RMN euaneſcit (71.), incidet R in N, poſitio ergo radii oſculi ita ſe habebit, vt ſit $AX = x + Pz$ et $XR = -Qz - y$. Longitudo vero radii oſculi erit $= -\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{dPdx+dQdy}$.

Corollarium 4.

837. Planum vero IMR in quo ſita ſunt elementa lineae breuiſſimae $Mm\mu$ ita determinabitur, vt ſit $AL = -x + \frac{y(dx+Pdz)-z(Pdy-Qdx)}{Qdz+dy}$; et $AK = -y + \frac{z(Pdy-Qdx)+x(dy+Qdz)}{dx+Pdz}$. Tangens vero anguli quem planum IMR cum plano APQ conſtituit erit $= \frac{\sqrt{((dx+Pdz)^2+(dy+Qdz)^2)}}{Pdy-Qdx}$. Huiusque anguli ſecans eſt $= \frac{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}{Pdy-Qdx}$, ſeu coſinus $= \frac{Pdy-Qdx}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}}$.

Exem-

M.E.C.D. 2017

Exemplum 1.

838. Sit ſuperficies cylindrica quaecunque axem habens AP, exprimetur eius natura hac aequatione $dz = Q\,dy$ euaneſcente P in generali aequatione $dz = P\,dx + Q\,dy$. Quare pro proiectione lineae breuiſſimae huius ſuperficiei in plano APQ habebitur ob $P = o$ et $dP = o$ haec aequatio $d\,dy = \frac{-Q\,dQ\,dy}{1+Q^2}$ ſeu $l\frac{\alpha\,dx}{dy} = l\sqrt{(1+Q^2)}$ et $\alpha\,dx = dy\sqrt{(1+Q_2)}$, ſi quidem Q tantum per y detur; at ſi Q per y et z detur variabilis z eſt eliminanda ope aequationis $dz = Q\,dy$. Vti in cylindro circulari in quo eſt $z^2 + y^2 = a^2$; erit $z = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, et $Q = \frac{y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Quare erit $\alpha\,dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. In genere autem $\int dy\sqrt{(1+Q^2)}$ exprimit arcum ſectionis ad axem AP normalis; quare dicto hoc arcu $= s$ erit $\alpha x = s$. Ex quo intelligitur, ſi talis ſuperficies in planum explicetur, fore lineam breuiſſimam rectam; vti conſtat.

Exemplum 2.

839. Sit ſuperficies propoſita conica quaecunque verticem habens in A; aequatio pro tali ſuperficie ita poterit adaptari, vt z aequetur functioni vnius dimenſionis ipſarum x et y. Quare in aequatione $dz = P\,dx + Q\,dy$, litterae P et Q erunt functiones nullius dimenſionis ipſarum x et y. Hanc ob rem, vti iam alibi oſtendi, erit $Px + Qy = o$, ſeu $Q = \frac{-Px}{y}$; vnde fiet $dQ = \frac{Px\,dy - Py\,dx - yx\,dP}{y^2}$;

M.E.C.D. 2017

et $Pdy - Qdx = \frac{P(ydy+xdx)}{y}$; atque $dPdx + dQdy = \frac{y^2dPdx+Pxdy^2-Pydxdy-yxdPdy}{y^2} - \frac{(ydx-xdy)(ydP-Pdy)}{y^2}$ et tandem $(1+P^2+Q^2) = \frac{y^2+P^2y^2+P^2x^2}{y^2}$. Quibus substitutis erit $ddy = \frac{P(ydy+xdx)(ydx-xdy)(ydP-Pdy)}{ydx(y^2+P^2y^2+P^2x^2)}$. Ponatur $y = px$; aequabitur P functioni cuidam ipsius p tantum, quia P est functio nullius dimensionis ipsarum x et y. Erit vero $dy = pdx + xdp$ et $ddy = xddp + 2dxdp = -\frac{P(p^2xdx+px^2dp+xdx)(pxdP-Ppdx+Pxdp)x^2dp}{px^3dx(p^2+P^2p^2+P^2)} = \frac{Pdp(p^2dx+pxdp+dx)(Ppdx+PxdP-pxdP)}{pdx(p^2+P^2+P^2p^2)}$. Ex qua aequatione quidem proiectio difficulter cognoscitur. Quomodo autem linea breuissima in tali superficie sit determinanda fusius docui in Comment. III. p. 120. Ceterum idem de linea breuissima est notandum quod ante, scilicet quod ea in planum explicata superficie conica abeat in rectam.

Scholion.

840. Simili modo in determinandis lineis breuissimis super aliis superficierum speciebus non hic immoror, quia in cit. loco hanc materiam plenius exposui. Progredior ergo ad inuestigationem linearum, quae in superficie a corpore a quibuscunque potentiis sollicitato describuntur. Antea vero necesse est, vt in effectus cuiusque potentiae curatius inquiramus.

DEFINITIO 4.

841. *Vim prementem vocabimus in sequentibus eam vim normalem, cuius directio est normalis ad ipsam superficiem in qua corpus mouetur.* Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium.

842. Haec vis premens ergo vel auget vim centrifugam vel minuit, prout eius directio directioni radii oſculi lineae breuiſſimae vel contraria eſt vel in eam incidit (79.).

DEFINITIO 5.

843. *Vim deflectentem vocabimus in ſequentibus eam vim normalem, cuius directio eſt in plano ſuperficiem tangente et perpendicularis in viam a corpore deſcriptam.*

Corollarium.

844. Haec ergo vis corpus a linea breuiſſima, quam a nullis potentiis ſollicitatum deſcriberet, deflectit, et vel cis vel vltra eam detrahit pro eius directione vel cis vel vltra tendente.

PROPOSITIO 92.
Problema.

845. *Determinare effectum vis prementis in corpus ſuper ſuperficie quacunque motum, quod praeterea a nullis potentiis ſollicitatur.* Fab. XVII. Fig. I.

Solutio.

Quia haec vis premens eſt normalis in ſuperficiem, ideoque eius directio MN; ea neque

M.E.C.D. 2017

celeritatem, neque directionem motus afficiet, ſed tota in preſſione ſuperficiei conſumetur, corpus igitur in eadem linea progredietur, in qua ſi haec vis abeſſet, moueretur; quae autem eſt linea breuiſſima in prop. praec. determinata. Moueбitur ergo corpus in linea $Mm\mu$, cuius radius oſculi MO incidet in normalem ſuperficiei MN. Sit ergo MN directio huius potentiae prementis, quae propterea ſuperficiem verſus interiora ſecundum MN premet. Ponatur haec vis premens $=M$; premetur ab ea ſuperficies ſecundum MN vi $=M$. At ſi radius oſculi MO in eandem plagam incidere ponatur, vis centrifuga vi prementi erit contraria eiusque effectum minuet. Cum autem $Mm\mu$ ſit linea breuiſſima, eſt radius oſculi $MO = -\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{dPdx+dQdy}$, per quem ſi diuidatur dupla altitudo v celeritati in M debita, prodibit vis centrifuga. Hanc ob rem erit vis, qua ſuperficies ſecundum MN premitur $= = = = + \frac{2v(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}} + M$. Poſitio tandem huius vis prementis per ſuperiora inuenta eſt $AH = x+Pz$ et $HN = -Qz-y$; demiſſo ſcilicet ex puncto N, in quo normalis MN plano APQ occurrit, ad axem perpendiculo NH. Q. E. I.

Corollarium I.

846. Cum neque altera vis normalis deflectens, neque vis tangentialis neque vis reſiſtentiae, ſi quae adeſt, preſſionem in ſuperficiem afficiant; per-

M.E.C.D. 2017

perſpicitur, a quibuscunque potentiis corpus praeterea ſollicitetur, preſſionem ſemper tantam eſſe quantam hic aſſignauimus.

Corollarium 2.

847. Quantumuis igitur via a corpore deſcripta a linea breuiſſima diſcrepet, tamen preſſio in ſuperficiem ſit ſecundum normalem in ſuperficiem, ſeu ſecundum radium oſculi lineae breuiſſimae, non vero ſecundum ipſius curuae deſcriptae radium oſculi, cuius longitudo etiam ad preſſionem non requiritur.

Scholion.

848. Ob hanc cauſam eam radii oſculi lineae breuiſſimae formulam adhibuimus, in qua differentialia ſecundi gradus non inſunt, ne is pendeat a poſitione duorum elementorum Mm et $m\mu$, per quae corpus reipſa mouetur. Sed iſte radius oſculi ex vnico elemento Mm innoteſcere debet: Si enim corpus propter vim deflectentem non lineam breuiſſimam deſcribat, differentialia ſecundi gradus ddy et ddz non amplius in radium oſculi lineae breuiſſimae ingredi debent.

PROPOSITIO 93.
Problema.

849. *Vis tangentialis, quae ſecundum tangentem* MT *corpus trahit, effectum in corpus in ſuperficie quacunque motum determinare.* Tab. XVII. Fig. 2.

So-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Sit haec vis tangentialis $=T$, corpusque per elementum Mm progrediatur celeritate altitudini v debita; quia haec vis motum diminuit, erit $dv=-T$. $Mm=-TV(dx^2+dy^2+dz^2)$, nentibus iisdem denominationibus, quibus ante ſumus vſi. Praeterea vero haec vis neque preſſionem neque deuiationem a linea breuiſſima afficit. Ad poſitionem vero directionis huius vis inueniendam, producatur tangens MT donec occurrat plano APQ in T; erit T punctum in elemento qQ producto. Fiat ergo $dz:V(dx^2+dy^2)=z:QT$; eritque $QT=\frac{zV(dx^2+dy^2)}{dz}$. Ex T demittatur in axem perpendiculum TF; erit $V(dx^2+dy^2):dx=QT:PF$; quare habetur $PF=\frac{zdx}{dz}$ et $AF=\frac{zdx-xdz}{dz}$. Porro ob $dx:dy=\frac{zdx}{dz}:y-FT$ erit $FT=y-\frac{zdy}{dz}$; ex quo punctum T determinatur. Q. E. I.

Corollarium.

850. Cum reſiſtentia ad vim tangentialem ſit referenda, ex his intelligitur, quomodo reſiſtentiae effectus ſit determinandus. Vt ſi fuerit reſiſtentia $=R$, erit $dv=-(T+R)V(dx^2+dy^2+dz^2)$.

PROPOSITIO 94.

Problema.

Tab. XVII. Fig. 3.

851. *Vis normalis deflectentis* N *effectum in corpus ſuper ſuperficie quacunque motum determinare.*

Solu-

M.E.C.D. 2017

Solutio.

Positis vt ante $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$, exprimatur superficiei natura hac aequatione $dz=Pdx+Qdy$; et moueatur corpus celeritate altitudini v debita per elementum Mm: quo percurso, nisi vis deflectens adesset, progrederetur per elementum $m\mu$ secundum lineam breuissimam; foretque $\pi\varrho=y+2dy+\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ et $\varrho\mu=z+2dz+\frac{(dx+Pdz)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}$ (835.). Iam accedat vis normalis deflectens N, quae directionem habeat antrorsum. Haec ergo vis efficiet, vt corpus descripto elemento Mm non per $m\mu$ incedat, sed ab hac directione antrorsum deflectat. Ponamus igitur pergere per $m\nu$, erunt Mm et $m\nu$ duo elementa curuae a corpore descriptae. Quare demisso ex ν in planum APQ perpendiculo $\nu\sigma$; erit $\pi\sigma=y+2dy+ddy$ et $\sigma\nu=z+2dz+ddz$. Hinc ergo habebitur $\sigma\varrho=\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}-ddy$ et $\mu\varrho-\nu\sigma=\frac{(dx+Pdz)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}-ddz$. Posito vero breuitatis ergo $\frac{(Pdy-Qdx)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}=dd\eta$ et $\frac{(dx+Pdz)(dPdx+dQdy)}{dx(1+P^2+Q^2)}=dd\zeta$, inuenietur radius osculi angulo elementari $\mu m\nu$ respondens $=$

$$\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{((dzdd\eta-dzddy-dydd\zeta+dyddz)^2+dx^2(dd\eta-ddy)^2+dx^2(dd\zeta-ddz)^2)}}$$

Hic ergo si dicatur $=r$ erit $N=\frac{2v}{r}$ seu $2v=Nr$, quia hic angulus eodem modo generatur, quo corpus a vi normali in plano a linea recta de-

M.E.C.D. 2017

flectitur. Est vero $dzddη - dyddζ = -\frac{(dy+Qdz)(dPdx+dQdy)}{(1+P^2+Q^2)}$. Atque loco $ddη$ et $ddζ$ debitis valoribus substitutis fit

$$r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(dx^2(ddy^2+ddz^2)+(dzddy-dyddz)^2-\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(dPdx+dQdy)^2}{1+P^2+Q^2})}}$$

Cum autem per aequationem $dz = Pdx + Qdy$ fit $dPdx + dQdy = ddz - Qddy$, erit in subsidium hac ipsa aequatione $dz = Pdx + Qdy$ vocata $r = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{-ddy(dx+Pdz)+ddz(Pdy-Qdx)}$. Hanc ob rem erit $ddz(Pdy-Qdx)-ddy(dx+Pdz) = \frac{N}{2v}(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Q. E. I.

Scholion I.

852. Congruit haec formula cum ea, quam supra (79) pro effectu huiusmodi vis determinando inuenimus. Differentia enim tantum est in signo litterae N, quam vim ibi negatiue accipiendam esse apparet. Atque hic etiam de signo non certi esse potuissemus, quia ex quantitate radix quadrata, quam hic extraximus, aeque potest esse negatiua ac affirmatiua. Hoc vero dubium, si calculus ad casum specialem accommodetur, statim tollitur; quia formula eiusmodi esse debet, vt punctum ν cis μ cadat si potentia N antrorsum, vt posuimus, fuerit directa. Ex quo ope exempli etiam signum radicis quadratae determinaui; atque hanc ipsam formulam inueni.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

853. Si vis deflectens N euaneſcat, corpus motum ſuum in linea breuiſſima continuabit; id quod ipſa aequatio quoque indicat. Poſito enim $N=o$, habebitur $ddy(dx+Pdz)=ddz(Pdy-Qdx)$, quae aequatio eſt pro linea breuiſſima.

Corollarium 2.

854. Quaecunque ergo vis premens, et vis tangentialis atque reſiſtentia corpus in ſuperficie motum ſollicitet, ſi modo nulla affuerit vis deflectens, corpus ſemper in linea breuiſſima mouebitur.

Scholion 2.

855. Quod autem ad poſitionem huius vis deflectentis N attinet, ea ex hoc deducetur, quod ea poſita ſit in plano tangente ſuperficiem, atque ſimul ſit normalis curuae deſcriptae; ſit ergo MG eius directio et G punctum, in quo plano APQ occurrit; ita vt vis N ſecundum MG trahere cenſenda ſit, dum eam ante antrorſum vrgere poſuimus. Primo ergo determinari debet interſectio plani ſuperficiem in M tangentis interſectio cum plano APQ, quae ſit recta TVG; Haec vero inuenietur, ſi duae tangentes ſuperficiem ad planum APQ vsque producantur, atque puncta, in quibus in planum APQ incidunt linea recta iungantur. Sit ergo MT tangens lineae deſcriptae, Tab. XVII. Fig. 4.

M.E.C.D. 2017

quae propterea ſuperficiem quoque tanget; erit vt iam inuenimus $AF = \frac{zdx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{zdy}{dz}$ (849.). Porro ſuperficies ſecta intelligatur plano PQM, ſitque MV ſectionis huius tangens; erit QV $= \frac{z}{Q}$, ex aequatione $dz = Pdx + Qdy$ poſito $dx = 0$. Innoteſcit ergo punctum V, quocirca recta TV producta erit interſectio plani tangentis ſuperficiem in M cum plano APQ. Punctum ergo G in quo recta MG plano APQ occurrit, poſitum erit in recta TV. Porro in recta TQ ſumatur $QS = \frac{z\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eritque MS normalis in elementum Mm deſcriptum. Atque ſi ad QS ducatur normalis SG, ex hac recta SG omnes rectae ad M ductae erunt in elementum Mm perpendiculares. Quare cum MG ſit quoque normalis in elementum deſcriptum, punctum G quoque poſitum erit in recta SG. Punctum ergo G erit in interſectione rectarum TV et SG. Eſt vero $PL = \frac{ydy+zdz}{dx}$, et ang. ELG = ang. PQT. Ponatur $GE = t$, erit $LE = \frac{tdy}{dx}$, et $PE = \frac{ydy+tdy+zdz}{dx}$. Deinde etiam propter triangula ſimilia eſt $FP : FT + PV = PE : GE - PV$, hoc eſt $\frac{zdx}{dz} : \frac{z}{Q} - \frac{zdy}{dz} = \frac{ydy+tdy+zdz}{dx} : t - \frac{z}{Q} + y$. Hinc prouenit $t = \frac{z(dx+Pdz)}{Qdx-Pdy} - y = GE$, et $AE = x + \frac{z(dy+Qdz)}{Qdx-Pdy}$, vnde punctum G determinatur. Si ergo ducatur recta QG erit $QG^2 = \frac{z^2(dx+Pdz)^2}{(Qdx-Pdy^2)} + \frac{z^2(dy+Qdz)^2}{(Qdx-Pdy)^2}$, et $QG = \frac{z\sqrt{(dy^2+dy^2+dz^2+dz^2(1+P^2+Q^2)}}{Qdx-Pdy}$

atque ipſa $MG = \frac{z(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{Qdx-Pdy}$.

PRO-

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 95.

Problema.

856. *Si corpus super superficie motum a quotcunque potentiis sollicitetur; definire vires normales prementem scilicet et deflectentem, atque vim tangentialem ex resolutione omnium ortam.*

Solutio.

Quaecunque fuerint potentiae sollicitantes eae ad tres reduci possunt, quarum directiones sint secundum tres coordinatas $x, y z$ Sit nunc vis corpus in M secundum parallelam abscissae PA trahens $=E$; vis secundum parallelam ipsi QP trahens $=F$, et vis secundum MQ trahens $=G$. Singulae ergo hae vires resoluendae sunt in ternas, normalem prementem scilicet, normalem deflectentem et tangentialem. Quia autem hae tres directiones sunt inter se normales, ex quaque ipsarum E, F et G vires normales et tangentialis prodibunt, si illae ducantur in cosinum anguli, quem illarum vitium directiones cum istis constituunt. Incipiamus a vi tangentiali, cuius directio est MT existente $AF = \frac{z dx}{dz} - x$ et $FT = y - \frac{z dy}{dz}$, atque $QT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$ et $MT = \frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dz}$. Vnde erit cosinus anguli QMT, quem directio vis G cum vi tangentiali constituit $= \frac{QM}{MT} = \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. In quem si ducatur vis G, prodibit vis tangentialis ex ea orta $= \frac{G dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Cosinus vero anguli, quem MT

Tab. XVII. Fig. 2.

M.E.C.D. 2017

constituit cum directione vis F, quae est ipsi QP parallela est $= \cos. PQT. \sin QMT = \frac{PQ-FT}{QT} \cdot \frac{QT}{MT} = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Vis ergo tangentialis ex F orta est $= \frac{Fdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$. Cosinus porro anguli, quem directio vis E constituit cum MT est $= \frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ ideoque vis tangentialis ex vi E orta $= \frac{Edx}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$

Tab. XVII. Fig. I. Iam consideretur vis premens, cuius directio est MN, existente $AH = x + Pz$ et $HN = -y - Qz$, seu $PH = Pz$ et $QP + HN = -Qz$. Ex quo erit $QN = z\sqrt{(P^2 + Q^2)}$ et $MN = z\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$. Anguli ergo, quem directio potentiae G cum MN constituit, cosinus est $\frac{MQ}{NM} = \frac{1}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$, ideoque vis premens ex G orta $= \frac{G}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Porro anguli, quem directio vis F, quae est parallela ipsi QP, cum MN constituit, cosinus est $= \cos. PQN. \sin QMN = \frac{(PQ+HN)QN}{QN.MN} = \frac{Q}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Ergo vis premens ex vi F orta est $= \frac{FQ}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$.

Tab. XVII. Tab. 4. Atque simili modo vis premens ex vi E orta est $= \frac{EP}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Denique cum vis deflectentis directio sit MG, atque $PE = \frac{z(dy+Qdz)}{Qdx-Pdy}$ et $QP + EG = \frac{z(dx+Pdz)}{Qdx-Pdy}$; erit anguli, quem MG cum directione vis G constituit, cosinus $\frac{Qdx-Pdy}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q_2)}}$; quare vis deflectens ex vi G orta est $= \frac{G(Qdx-Pdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$

Porro anguli, quem MG cum directione vis F con-

M.E.C.D. 2017

conſtituit, coſinus eſt $= \frac{PQ+EG}{MG}$ $= \frac{dx+Pdz}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$; quamobrem vis deflectens ex vi F orta eſt $= \frac{F(dx+Pdz)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+P^2+Q^2)}}$

Denique anguli, quem directio vis E cum MG conſtituit, coſinus eſt $= \frac{-PE}{MG}$ $= \frac{-dy-Qdz}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Vis ergo deflectens ex vi E orta eſt $= \frac{-E(dy+Qdz)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$.

Cum autem ante vim tangentialem vocauerimus T; vim prementem $= M$ et vim deflectentem $= N$: ad has vires tres propoſitas E, F, et G reduximus; erit namque $T = \frac{Edx+Fdy+Gdz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}$ et $M = \frac{-EP-FQ+G}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$ atque $N = \frac{-E(dy+Qdz)+F(dx+Pdz)+G(Qdx-Pdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$.

Q. E. I.

Corollarium I.

857. Si igitur corpus a tribus potentiis E, F et G ſollicitetur; erit, poſito v pro altitudine debita celeritati in M, $dv = -Edx - Fdy - Gdz$ (849.), ſi loco T ponatur vis tangentialis ex reſolutione potentiarum E, F et G orta.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

858. Si praeterea corpus in medio resistente moueatur, atque resistentia in M fuerit $=R$; erit $dv=-E\,dx-F\,dy-G\,dz-R\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$.

Corollarium 3.

859. Si in aequatione §. 851. inuenta, in qua effectus vis deflectentis N est determinatus, loco N substituatur vis deflectens ex resolutione virium E, F et G orta, prodibit $\frac{2v\,ddz(P\,dy-Q\,dx)-2v\,ddy(dx+P\,dz)}{dx^2+dy^2+dz^2}$ $=-E(dy+Q\,dz)+F(dx+P\,dz)-G(P\,dy-Q\,dx)$.

Corollarium 4.

860. Si ergo ex istis duabus aequationibus confletur vna eliminanda v; prodibit aequatio, quae cum locali ad superficiem $dz=P\,dx+Q\,dy$ coniuncta determinabit viam a corpore in superficie descriptam.

Corollarium 5.

861. Vis autem, qua superficies secundum normalem in eam premitur, tam ex vi normali premente M, quam ex vi centrifuga orta est $=\frac{(G-EP-FQ)(dx^2+dy^2+dz^2)+2v(dP\,dx+dQ\,dy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$ (845), substituto loco M valore inuento.

Corollarium 6.

862. Est vero ex aequatione coroll. 3. inuenta $2v=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(E(dy+Q\,dz)-F(dx+P\,dz)+G(P\,dy-Q\,dx))}{-ddz(P\,dy-Q\,dx)+ddy(dx+P\,dz)}$

quo

M.E.C.D. 2017

quo valore ibi ſubſtituto prodibit tota preſſio $= \frac{(Gdxddy - Fdxddz + Edyddz - Edzddy)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{ddz(Pdy - Qdx) - ddy(dx + Pdz)}$.

Scholion.

863. Quia tres potentiae E, F, G directiones habent inuicem normales, erit potentia iis aequiualens $= \sqrt{(E^2+F^2+G^2)}$. His vero tribus viribus aequiualere inuenimus tres M, N et T, quarum directiones ſunt quoque inuicem normales; quare iſtis tribus aequivalens vis erit $= \sqrt{(M^2+N^2+T^2)}$. Quamobrem ſi loco M, N et T ſubſtituantur valores inuenti ex E, F et G, prodire debet quoque $\sqrt{(E^2+F^2+G^2)}$; id quod calculo inſtituto re ipſa ſe habere deprehendetur. Inſeruit autem hoc inſtar probationis, vtrum calculus prolixus, quo haec reſolutio eſt abſoluta, recte fuerit inſtitutus, an vero ſecus. Hac vero probatione inſtituta reperientur ſe hae formulae recte habere.

PROPOSITIO 96.
Problema.

864. *In hypotheſi grauitatis vniformis et deorſum directae* g, *determinare lineam, quam corpus ſuper quacunque ſuperficie proiectum in vacuo deſcribit.*

Solutio.

Sit APQ planum horizontale, et M punctum tam in ſuperficie data, quam in linea a corpore Tab. XVII. Fig. 2.

M.E.C.D. 2017

descripta. Erit ergo MQ verticalis et propterea directio vis grauitatis g. Positis $AP=x$, $PQ=y$, et $QM=z$, atque aequatione superficiei naturam exprimente $dz=Pdx+Qdy$; sit celeritas in M, qua elementum Mm percurritur, debitā altitudini v. Cum igitur problema hoc sit casus praecedentis; fit enim $G=g$, $E=o$ et $F=o$; habebuntur hae duae aequationes $dv=-gdz$ (§57.), atque $2vddz(Pdy-Qdx)-2vddy(dx+Pdz)+g(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)=o$. Sit porro altitudo debita celeritati, quam corpus habiturum esset, si in planum horizontale APQ perueniret, $=b$; erit $v=b-gz$. Per alteram vero aequationem est $2v=\frac{g(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{ddy(dx+Pdz)-ddz(Pdy-Qdx)}$. Vnde erit $\frac{dv}{2v}=\frac{dzddz(Pdy-Qdx)-dzddy(dx+Pdz)}{(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Quae aequatio ope aequationis $dz=Pdx+Qdy$ transmutatur in hanc $\frac{dv}{2v}=\frac{dydy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}-\frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$; quae integrata dat $lv=l(dx^2+dy^2+dz^2)-2\int\frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$. In quouis ergo casu speciali inuestigari debet, an $\frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$ integrationem admittat. Quod si contigerit, habebitur v in differentialibus primi gradus; atque cum sit $v=b-gz$, orietur aequatio differentialis primi gradus curuae descriptae naturam exprimens. Pressio vero in superficiem secundum normalem erit $=\frac{gdxddy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{ddz(Pdy-Qdx)-ddy(dx+Pdz)}$, quae sublatis differentialibus secundi gradus abit in hanc $\frac{-g}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$ $\frac{2(b-gz)(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Q. E. I.

Co-

M.E.C.D. 2017

Corollarium 1.

865. Celeritas ergo corporis in hypotheſi grauitatis vniformis g et deorſum directae in ſuperficie quacunque moti ex ſola altitudine cognoſci poteſt, omnino vt ſi corpus in eodem plano moueretur.

Corollarium 2.

866. Si tempuſculum, quo elementum Mm abſoluitur, ponatur dt, erit $dt = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}}$. Per aequationem ergo inuentam erit $ldt = \int \frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$; atque $\frac{ddt}{dt} = \frac{Pddy}{Pdy-Qdx}$.

Corollarium 3.

867. Ex inuentis aequationibus reperietur $ddy = -\frac{g(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx+dQdy)(Pdy-Qdx)}{(1+P^2+Q^2)dx}$ atque $ddz = -\frac{gQ(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dx^2)}{2dx(b-gz)(1+P^2+Q^2)} + \frac{(dPdx+dQdy)(dx+Pdz)}{(1+P^2+Q^2)dx}$. Hinc erit $dzddy - dyddz = \frac{gP(Pdy-Qdx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{2(b-gz)(1+P^2+Q^2)} - \frac{(dPdx+dQdy)(dy+Qdz)}{1+P^2+Q^2}$. Curuae vero deſcriptae radius oſculi erit $= \frac{2(dx^2+dy^2+dz^2)(b-gz)\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}{\sqrt{(g^2(Pdy-Qdx)^2(dx^2+dy^2+dz^2)+4(b-gz)^2(dPdx+dQdy)^2)}}$

Scholion.

868. Harum formularum vſum in caſibus particularibus, quibus certa quaedam ſpecies ſuperficierum conſideratur, in ſequentibus problematis fuſius exponemus, quibus ſingularium ſuperficierum exempla adiungemus.

M.E.C.D. 2017

PROPOSITIO 97.
Problema.

Tab. XVIII. Fig. I.

869. *In hypotheſi grauitatis vniformis deorſum tendentis* g, *determinare motum corporis in ſuperficie cuiuscunque cylindri, cuius axis ſit verticalis.*

Solutio.

Quia axis cylindri ponitur verticalis, erunt omnes ſectiones horizontales inter ſe aequales; fit igitur ABQC baſis cylindri, in cuius ſuperficie mouetur corpus. Ponatur $AP=x$, $PQ=y$, ſitque z corporis altitudo ſuper puncto Q in ſuperficie cylindri. Natura ergo huius ſuperficiei cylindricae hac exprimetur aequatione $o=P\,dx+Q\,dy$ ſeu $Q\,dy=-P\,dx$. Haec autem aequatio orietur ex generali $dz=P\,dx+Q\,dy$, ſi P et Q fiant quantitates infinite magnae, ſeu euaneſcente coefficiente ipſius dz, ſi quem aſſumſiſſemus. Quamobrem in aequationibus ante inuentis P et Q quaſi quantitates infinite magnae conſiderari debent; etiamſi ſint finitae magnitudinis. Erunt autem P et Q functiones ipſarum x et y tantum, neque in iis inerit z. His ergo in calculum deductis, habebitur $v=b-gz$; atque $2v=\frac{g(P\,dy-Q\,dx)(dx^2+dy^2+dz^2)}{P\,dz\,ddy-P\,dy\,ddz+Q\,dx\,ddz}$ $=\frac{g(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}{dy\,dz\,ddy-dy^2\,ddz-dx^2\,ddz}$ propter analogiam $P:Q=dy:-dx$. At poſterior aequatio logarithmica erit $lv=l(dx^2+dy^2+dz^2)-2\int\frac{dy\,ddy}{dx^2+dy^2}=l(dx^2+dy^2+dz^2)$

M.E.C.D. 2017

$-l(dx^2+dy^2)+lc$. Vnde fit $\frac{v}{c}=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2}=\frac{b-gz}{c}=1+\frac{dz^2}{dx^2+dy^2}$. Hinc oritur $(b-c-gz)(dx^2+dy^2)=dz^2c$ seu $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dz\sqrt{c}}{\sqrt{(b-c-gz)}}$, cuius integralis est $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=-\frac{\sqrt{c}(b-c-gz)}{g}$, vbi $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ denotat arcum basis BQC motu horizontali percursum. Si tempusculum quo elementum Mm absoluitur ponatur dt, erit $\frac{ddt}{dt}=\frac{dyddy}{dx^2+dy^2}$ atque $\alpha dt=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, porroque $\alpha t=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Quare tempora erunt proportionalia arcubus in basi respondentibus. Aequatio autem $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=-\frac{\sqrt{c}(b-c-gz)}{g}$, dabit aequationem pro curua in superficie cylindrica descripta, si haec superficies in planum concipiatur explicata: denotabit enim tum $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ abscissam in axe horizontali et z applicatam verticalem. Proiectionem vero curuae descriptae in plano verticali planum horizontale iuxta AC secante habebimus, si ope aequationis $Pdx+Qdy=o$ eliminetur y, vt prodeat aequatio inter x et z, quae erunt coordinatae huius proiectionis. Scilicet ob $dy=-\frac{Pdx}{Q}$ erit $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dx}{Q}\sqrt{(P^2+Q^2)}$, ideoque $\int\frac{dx\sqrt{(P^2+Q^2)}}{Q}=\frac{\sqrt{c}(b-c-gz)}{g}$, vbi in P et Q loco y eius valor in x debet substitui. Pressio vero quam superficies sustinebit a sola vi centrifuga orietur, propter potentiam g in ipsa superficie sitam, erit-que $=\frac{2(b-gz)(dPdx+dQdy)}{(dx^2+dy^2+dz^2)\sqrt{(P^2+Q^2)}}$, qua vi corpus ab axe

M.E.C.D. 2017

cylindri recedere conabitur, si haec expressio fuerit affirmatiua. Q. E. I.

Corollarium 1.

870. Curua ergo, quam corpus in superficie cylindri describit, si superficies in planum explicetur, abibit in parabolam, ipsam scilicet proiectoriam, quam corpus proiectum in plano verticali describeret.

Corollarium 2.

871. Si motus corporis super superficie cylindrica compositus considereretur ex motu verticali, quod vel sursum vel deorsum progreditur, et ex horizontali; erit motus horizontalis aequabilis, quia tempora t proportionalia sunt $\int V(dx^2 + dy^2)$ i. e. arcubus horizontali motu percursis. Motus vero verticalis erit vel aequabiliter acceleratus vel retardatus.

Corollarium 3.

872. Si ergo motus horizontalis euanescit, corpus recta vel ascendet vel descendet, omnino ac si libere ascenderet vel descenderet. Hicque casus prodit, si fuerit $c = o$, quo $V(dx^2 + dy^2)$ euanescit.

Ex.

M.E.C.D. 2017

Exemplum.

§73. Sit basis cylindri circulus cuius, quadrans sit BQC et radius $AB=a$; erit $x^2+y^2=a^2$ et $x\,dx+y\,dy=0$. Fiet ergo $P=x$ et $Q=y=\sqrt{(a^2-x^2)}$. Proiectio vero lineae in superficie cylindrica hac descriptae in plano verticali ex AC erecto exprimetur aequatione $\int\frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{\sqrt{c(b-c-gz)}}{g}$. Si ergo fuerit $c=0$, fiet $dx=0$, atque $x=$ constanti; quare hoc casu proiectio erit linea recta. Curua vero, quae est proiectio pro quocunque ipsius c valore, ope rectificationis circuli construetur. Pressio autem, quam superficies cylindri sustinet est $=\frac{2(b-gz)(dx^2+dy^2)}{(dx^2+dy^2+dz^2)a}=\frac{2c}{a}$, propter aequationem $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2}=\frac{b-gz}{c}$. Quare pressio vbique erit constans et ipsi c proportionalis.

Corollarium 4.

874. Propter eandem aequationem erit generaliter pressio, quam cylinder quicunque sustinet $=$

$$\frac{2c(dP\,dx+dQ\,dy)}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(P^2+Q^2)}}=\frac{2Q^2c(dP\,dx+dQ\,dy)}{dx^2(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{2Qc(Q\,dP-P\,dQ)}{dx\,(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Scholion.

875. Non solum autem ope resolutionis motus super superficie cylindrica erecta corporis motus

M.E.C.D. 2017

tus facile poteſt determinari; ſed etiam ſi cylindri axis fuerit horizontalis eadem facilitate motus corporis cognoſcetur. Namque ſi corpus non habeat motum horizontalem iuxta axem cylindri corpus perpetuo in eadem cylindri ſectione permanebit, in eaque mouebitur tanquam ſuper linea data. Sin vero accedat motus horizontalis, is perpetuo idem manebit, neque alterum motum perturbabit; atque his motibus coniungendis verus corporis motus facile cognoſcetur.

PROPOSITIO 98.
Problema.

Tab. XVIII. Fig. 2.

876. *Si corpus moueatur in ſuperficie ſolidi rotundi, cuius axis eſt verticalis* AL, *in vacuo a grauitate vniformi* g *ſollicitatum; determinare motum corporis ſuper huiusmodi ſuperficie.*

Solutio.

Generetur ſolidum rotundum conuerſione curuae AM circa axem verticalem AL, erunt omnes eius ſectiones horizontales circuli, quorum radii ſunt applicatae curuae AM. Aequatio ergo naturam huius ſuperficiei exprimens erit $dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{Z}$ denotante Z functionem quamcunque ipſius z; erit enim $2\int Z\,dz = x^2 + y^2 = LM^2$. Si ergo detur aequatio pro curua AM, inter $AL = z$ et $LM = \sqrt{2\int Z\,dz}$; dabitur quoque Z. His praemiſſis erit itaque

M.E.C.D. 2017

itaque $P=\frac{x}{z}$ et $Q=\frac{y}{z}$; qui valores si substituantur, habebuntur duae sequentes aequationes, ex quibus tam curua descripta quam motus super ea cognoscetur, $v=b-gz$ atque $lv=l(dx^2+dy^2+dz^2)-2\int\frac{xddy}{xdy-ydx}=l(dx^2+dy^2+dz^2)-2l(xdy-ydx)+$ const. Quare erit $v=\frac{c^3(dx^2+dy^2+dz^2)}{(xdy-ydx)^2}=b-gz$. Ponatur $x^2+y^2=u^2$; erit u functio quaedam ipsius z, nempe $u^2=2\int Zdz$; atque superior aequatio abibit in hanc $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{\sqrt{(c^3dz^2+u^2du^2(b-gz))}}{\sqrt{(u^2(b-gz)-c^3)}}$. Proiectio vero in plano horizontali per aequationem inter x et y habebitur, si ex aequatione $x^2+y^2=2\int Zdz$ valor ipsius z in x et y substituatur; huiusque proiectionis arcus est $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. In plano autem verticali habebitur proiectio eliminanda y; quo facto prodit aequatio $\frac{udx-xdu}{c\sqrt{c(u^2-x^2)}}=\sqrt{\frac{du^2+dz^2}{u^2(b-gz)-c^3}}$, quae aequatio si per u diuidatur constructionem admittit. Pressio vero quam superficies sustinet axem versus erit $=\frac{-gZ}{\sqrt{(x^2+y^2+Z^2)}}-\frac{2c^3Z(dx^2+dy^2)+2c^3dZ(xdx+ydy)}{Z(xdy-ydx)^2\sqrt{(x^2+y^2+Z^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

877. Si tempusculum, quo elementum Mm absoluitur ponatur dt; erit $\frac{ddt}{dt}=\frac{xddy}{xdy-ydx}$, cuius integralis est $\alpha dt=xdy-ydx$. Ipsum ergo tempus erit vt $xy-2\int ydx$, denotante $\int ydx$ aream proiectionis in plano horizontali.

M.E.C.D. 2017

Corollarium 2.

878. Si corpus in proiectione in plano horizontali moueri concipiatur, erit celeritas eius in Q debita altitudini $\frac{c^3(dx^2+dy^2)}{(ydx-xdy)^2}$; ex quo motu in proiectione ipse motus in superficie inuenietur.

Corollarium 3.

Tab. XVIII. Fig. 3.

879. Sit igitur BQC proiectio curuae in plano horizontali, in qua moueatur corpus ita vt motus eius respondeat motui corporis in superficie ipsa; erit tempus quo arcus BQ absoluitur vt $\frac{xy}{2}-\int y\,dx$ seu negatiue vt $\int y\,dx-\frac{xy}{2}$ i. e. vt area BAQ ducto radio AQ.

Corollarium 4.

880. Areae autem BAQ elementum est $\frac{ydx-xdy}{2}$ Ducta ergo tangente QT et demisso in eam ex A perpendiculo AT erit $AT=\frac{ydx-xdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Quare altitudo celeritati in Q debita est $=\frac{c^3}{AT^2}=\frac{c^3}{p^2}$, posito $AT=p$.

Corollarium 5.

881. Corpus ergo in proiectione motum perinde in ea mouebitur, ac si libere moueretur attractum vi quadam centripeta ad centrum A.

Corollarium 6.

882. Respondeat punctum B motus in superficie facti initio, et cum detur directio prima

M.E.C.D. 2017

ma motus in ſuperficie, dabitur perpendiculum in tangentem in B. Sit ergo AB $=f$, et perpendieulum in tangentem $=b$; erit altitudo celeritati in B debita $=\frac{c^3}{b^2}$.

Corollarium 7.

883. Vis ergo centripeta verſus A tendens, quae faciet, vt corpus in proiectione BQC libere moueatur, erit $=\frac{2c^3dp}{p^3du}$, poſito u pro $\sqrt{(x^2+y^2)}$. Aequatio vero inter u et z exprimet naturam curuae, cuius conuerſione genita eſt ſuperficies propoſita, ideoque datur.

Corollarium 8.

884. Eſt porro $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{udu}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ et $ydx-xdy=\frac{pudu}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Hi valores ſi in aequatione inuenta ſubſtituantur, dabunt $c^3u^2du^2+c^3u^2dz^2-c^3p^2dz^2=(b-gz)p^2u^2du^2$, ſeu $p^2=\frac{c^3u^2(du^2+dz^2)}{c^3dz^2+u^2du^2(b-gz)}$.

Corollarium 9.

885. Huius ergo quantitatis $-\frac{c^3dz^2-u^2du^2(b-gz)}{u^2(du^2+dz^2)}$ differentiale per du diuiſum dabit vim centripetam in A requiſitam, vt corpus in proiectione BQC moueatur libere, motu reſpondente motui corporis in ſuperficie.

Corollarium 10.

886. Si $c=0$, fiet quoque $p=0$. Quare hoc caſu proiectio in plano horizontali erit recta per

M.E.C.D. 2017

A transiens. Super qua corpus ad A accedens ita attrahetur vt sit vis centripeta $\frac{1}{du}$ d. $\frac{-du^2(b-gz)}{(du^2+dz^2)}$.

Corollarium II.

887. Si corporis directio prima fuerit horizontalis tangens in B ad AB erit normalis; ideoque $b=f$. Hoc vero casu celeritas in superficie aequalis erit celeritati in proiectione; quare si fuerit i valor ipsius z, si est $u=f$; erit $b-gi=\frac{c^3}{fz}$.

Corollarium 12.

888. Si praeterea vis centripeta in B aequalis fuerit vi centrifugae, curua BQC erit circulus, et propterea ipsa quoque curua in superficie descripta, atque motus tam in superficie quam in proiectione aequabilis. Sit vbi est $u=f$ et $z=i$, $dz=m\,du$; erit ob $p=f$, et $u=f$ et $z=y$ in casu, quo circulus describitur, $2c^3=gmf^3$.

Corollarium 13.

889. Si ponatur $\pi:1$ vt peripheria ad diametrum erit circuli nostri peripheria $=2\pi f$, quae diuisa per celeritatem $\sqrt{\frac{c^3}{fz}}$ i. e. $\sqrt{\frac{gmf}{2}}$, dat tempus vnius periodi in circulo, quod ergo erit $=\frac{2\pi\sqrt{2f}}{\sqrt{gm}}$. Pendulum ergo integras oscillationes his periodis isochronas absoluens erit $=\frac{f}{m}$ in eadem grauitatis hypothesi.

Corollarium 14.

890. In superficie ergo, quae generatur conuersione curuae AM circa axem verticalem AL, Co-

M.E.C.D. 2017

corpus proiectum circulum radii LM describere potest eodem tempore, quo pendulum longitudinis = subnormali LS integram oscillationem absoluit.

Corollarium 15.

891. Si ergo curua AM fuerit parabola omnes periodi per circulos horizontales in conoide parabolica aequalibus absoluentur temporibus; atque penduli, iisdem temporibus oscillationes integras peragentis longitudo aequabitur dimidiae parti parametri.

Scholion 1.

892. Quaecunque assumatur curua AM; si vis centripeta motus in proiectione versus A ex data formula definiatur, eaque aequalis ponatur vi centrifugae, atque coniungatur cum aequatione $b-gi=\frac{cc}{ff}$; prodibit $2c^2=gmf^3$; hoc enim casu tam proiectio erit circulus, quam ipsa curua in superficie descripta. Quo vero hoc melius appareat ponatur $dz=qdu$, prouenietque vis centripeta $=\frac{2qdq(bu^2-gzu^2-c^3)}{u^2du(1+q^2)^2}+\frac{2c^3q^2+gqu^3}{u^3(1+q^2)}$. Iam ponatur $u=f$; $z=i$; et $bf^2=gf^2i+c^3$; atque $q=m$; erit vis centripeta $=\frac{2c^3m^2+gmf^3}{f^3(1+m^2)}$, aequalis posita vi centrifugae $\frac{23}{f^3}$ dat $2c^3=gmf^3$.

Exemplum.

893. Sit superficies conica circularis seu AM linea recta vtcunque inclinata ad axem AL; quare Tab. XVIII. Fig. 2. et 3.

M.E.C.D. 2017

erit $z = mu$ et $dz = mdu$. Vis ergo centripeta ad A tendens, quae faciet vt corpus libere in proiectione BQC moueatur, erit $= \frac{2c^3m^2 + gmu^3}{u^3(1+m^2)}$. Haec ergo vis erit composita ex vi constante et vi reciproce cubis distantiarum a centro A proportionali. Si $c = 0$, tum proiectio erit linea recta per A transiens, atque vis centripeta erit $= \frac{gm}{1+m^2}$ siue constans. Corpus ergo motu aequabiliter accelerato ad A accedet, motus vero in superficie conica congruet cum descensu vel ascensu super recta inclinata eritque pariter aequabiliter acceleratus. Sin autem proiectio fuerit curuilinea et tangens in B normalis ad AB, erit $i = mf$, atque $b - mf = \frac{c^3}{f^2}$, posito $AB = f$. Erit ergo hoc casu $b = \frac{c^3 + mf^3}{f^2}$ atque si corpus in circulo horizontali reuoluitur, erit insuper $2c^3 = gmf^3$. Quo ergo hoc accidat debet esse celeritas corporis debita altitudini $\frac{c^3}{f2} = \frac{gmf}{2}$. Atque periodi in hoc circulo iisdem absoluentur temporibus, quibus penduli longitudinis $\frac{f}{m}$ integrae oscillationes. At si non fuerit $2c^3 = gmf^3$, verum tamen $b = \frac{c^3 + mf^3}{f}$, curua BQC habebit quidem in B tangentem ad AB normalem, sed proiectio haec non erit circulus. At si $2c^3$ proxime aequale fuerit ipsi gmf^3, curua quoque a circulo non multum discrepabit; habebit autem absides varias, in quibus tangens ad radium est perpendicularis. Harum absidum vero positio per prop. 91 Libr. praeced. determinatur. Quoniam enim vis centripeta est $\frac{2c^3m^2 + gmu^3}{u^3(1+m^2)}$, si haec comparetur cum illa vi centripeta $\frac{P}{y^3}$ ob $y = u$, erit $P = \frac{}{2c^3}$

M.E.C.D. 2017

$\frac{2c^3m^2+gmu^3}{1+m^2}$, atque $\frac{dP}{P} = \frac{3gmu^2du}{2c^3m^2+gmu^3}$ atque $\frac{Pdy}{ydP} = \frac{2mc^3+gu^3}{3gu^3}$; ideoque posito $u = f$, distabit quoque linea absidum a praecedente absside angulo $180\sqrt{\frac{2mc^3+gf^3}{3gf^3}}$ graduum. Quoniam autem proxime est $2c^3 = gmf^3$, erit angulus inter duas absides interceptus $= 180\sqrt{\frac{m^2+1}{3}}$ graduum. Cum ergo $\frac{m^2+1}{3}$ semper sit maius quam $\frac{1}{3}$ erit angulus inter duas absides interceptus maior quam 103 grad. 55′.

Scholion 2.

894. Exemplum superficiei sphaericae hic non adiungo, sed motus super ea determinationi sequentem propositionem destino, quia haec materia particulari pertractatione est digna. Si enim pendulum non secundum planum verticale impellitur, tum corpus in superficie sphaerae mouebitur, et vel circulos describet vel alias curuas non parum elegantes, quemadmodum cuiuis experimentum instituenti innotescet. Casus quidem, quo pendulum circulos absoluit, a Cel. *Ioh. Bernoullio* in Act. Lipſ. A. 1719 iam est expositus sub titulo motus turbinatorii. At si curua non fuerit circulus, nemo quantum scio, hunc penduli motum vel considerauit vel determinauit.

DEFINITIO 6.

895. Motus turbinatorius vocatur penduli non in plano verticali impulsi motus. *Hoc ergo casu pendulum non in eodem plano verticali mouetur, sed curuam*

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

uam quandam deſcribet in ſuperficie ſphaerica, cuius radius eſt ipſa pendulo longitudo, ſitam.

PROPOSITIO 99.

Problema.

Tab. XVIII. Fig. 2, et 3. 896. *Penduli ad motum turbinatorium incitati, determinare motum et lineam curuam, quam in ſuperficie ſphaerica deſcribit.*

Solutio.

Quia corpus motum pendulo eſt alligatum in ſuperficie ſphaerica mouebitur, cuius radius eſt longitudo penduli. Sit haec longitudo ſeu radius ſphaerae $=a$, erit $z=a-\sqrt{(a^2-u^2)}$ ex natura circuli AM. Erit ergo $q=\frac{u}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$ et $dq=\frac{a^2 du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$ ideoque $\frac{2qdq}{u^2du}=\frac{2a^2}{u(a^2-u^2)^2}$. Ex his inuenitur vis centripeta ad A tendens, quae facit, vt corpus in proiectione BQC libere moueatur, $=\frac{2bu-2gau+3gu\sqrt{(a^2-u^2)}}{a^2}$. Atque pro curua BQC haec habebitur aequatio $p^2=\frac{a^2c^3}{c^3+(b-ga)(a^2-u^2)+g(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$, quae ad proiectionem BQC conſtruendam ſufficit. Sit tangens in B perpendicularis ad radium AB, id quod ſemper alicubi contingere debet, niſi proiectio ſit linea recta, quia vis centripeta decrescit, decrescente u. Ponatur $AB=f$; erit $i=a-\sqrt{(a^2-f^2)}$, atque $b-ga+g\sqrt$

M.E.C.D. 2017

$+g\sqrt{(a^2-f^2)}=\frac{c^3}{f^2}$. Si praeterea fuerit $2c^3=\frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, corpus in circulo reuoluetur, cuius radius eſt f, celeritate debita altitudini $\frac{c^3}{f^2}=\frac{gf^2}{2\sqrt{(a^2-f^2)}}$. Penduli vero integras oſcillationes iisdem temporibus abſoluentis longitudo eſt $=\sqrt{(a^2-f^2)}$. Sin autem non fuerit $2c^3=\frac{gf^4}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, differentia vero ſit valde exigua; curua BQC a circulo non multum diſcrepabit. Cuius curuae, quo poſitiones abſidum inueniantur, erit iuxta prop. 91. Libri praeced. $y=u$ et $P=\frac{u^4}{a^2}(2b-2ga+3g\sqrt{(a^2-u^2)}$. Hinc eſt $\frac{dP}{P}=\frac{4du}{u}-\frac{3gudu}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)}+3g(a^2-u^2)}$, atque $\frac{ydP}{Pdy}=4-\frac{3gu^2}{(2b-2ga)\sqrt{(a^2-u^2)}+3g(a^2-u^2)}$. Quia curua fere eſt circulus, ponatur $u=f$, atque $2b-2ga=\frac{gf^2}{\sqrt{(a^2-f^2)}}-2g\sqrt{(a^2-f^2)}=\frac{3gf^2-2ga^2}{\sqrt{(a^2-f^2)}}$, quo facto prodibit $\frac{ydP}{Pdy}=4-\frac{3f^2}{a^2}$. Hinc ſequitur interuallum inter duas abſides eſſe angulum $\frac{180a}{\sqrt{(4a^2-3f^2)}}$ graduum. Tanto ſcilicet angulo locus, in quo pendulum ab axe maxime diſtat, diſſitus eſt a loco, in quo pendulum axi eſt proximum. Q. E. I.

Corollarium 1.

897. Quo igitur pendulum $AB=a$ motu turbinatorio circulum BDCE deſcribat, oportet vt eius celeritas debita ſit altitudini $\frac{g\,BO^2}{2.AO}$. Tab.XVIII Fig. 4.

Corollarium 2.

898. Longitudo vero penduli, quod oſcillationes minimas integras eodem tempore abſol-

M.E.C.D. 2017

uit, quo periodus in circulo BDCE conficitur, eſt $= AO$.

Corollarium 3.

899. Tempora ergo, quibus diuerſi circuli motu turbinatorio a pendulo AB percurruntur, ſunt in ſubduplicata ratione altitudinum AO.

Corollarium 4.

900. Quo igitur pendulum longitudinis a circulum horizontalem maximum conficiat, cuius radius eſt a, celeritas infinite magna requiritur; atque quaeque periodus tempore infinite paruo abſoluitur.

Corollarium 5.

901. Si radius circuli BO fuerit valde paruus reſpectu penduli $AB = a$, congruent periodi motus turbinatorii cum oſcillationibus integris eiusdem penduli.

Corollarium 6.

902. Si curua deſcripta non fuerit circulus, ſed figura proxima, atque BO valde paruum; erit angulus inter duas abſides 90°, ſeu rectus.

Corollarium 7.

903. Hoc vero caſu curua a corpore deſcripta erit ellipſis centrum habens in A. Quod ex

vi

M.E.C.D. 2017

vi centripeta colligitur, quae tum ipſis diſtantiis ſit proportionalis.

Corollarium 8.

904. Quo maior autem eſt radius BO; eo maior quoque erit angulus inter duas abſides interceptus. Atque ſi fiat $BO = BA$, erit hic angulus $180°$.

Corollarium 9.

905. Si angulus BAO fuerit 30. grad. erit $BO = \frac{1}{2} BA$ ſeu $f = \frac{1}{2}a$. Angulus ergo inter duas abſides interceptus erit $\frac{360}{\sqrt{13}}$ graduum ſeu $99°$, $50'$. Proiectionis ergo in plano horizontali haec erit figura *abcdefghik* etc. in qua abſides ſummae ſunt in *a, c, e, g, i,* et imae in *b, d, f, h, k.* Fig.

Corollarium 10.

906. In hac igitur figura linea abſidum mouetur in conſequentia; ſingulis enim periodis circiter $39°$ progredietur in conſequentia.

Corollarium 11.

907. Sin autem ille angulus BAO minor fuerit quam 30. graduum; tum minor etiam erit abſidum progreſſio. Quae quo pro quouis angulo BAO ſtatim cognoſcatur, fractionem $\frac{a}{\sqrt{(4g^2-3f^2)}}$

M.E.C.D. 2017

in ſeriem reſoluo, quae erit ſequens; $\frac{1}{2} + \frac{3f^2}{16a^2} + \frac{27f^4}{256a^4} +$ etc. Vna ergo periodo linea abſidum promouetur angulo $\frac{135f^2}{a^2}$ graduum, q. pr. ſi f valde eſt paruum.

Corollarium 12.

908. Ex his apparet promotionem lineae abſidum in ſingulis periodis proxime eſſe in duplicata ratione ſinus anguli BAO.



M.E.C.D. 2017

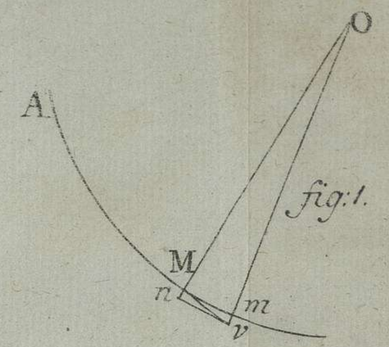


fig: 1.

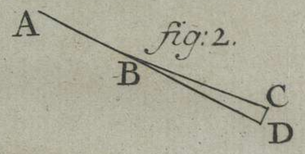


fig: 2.

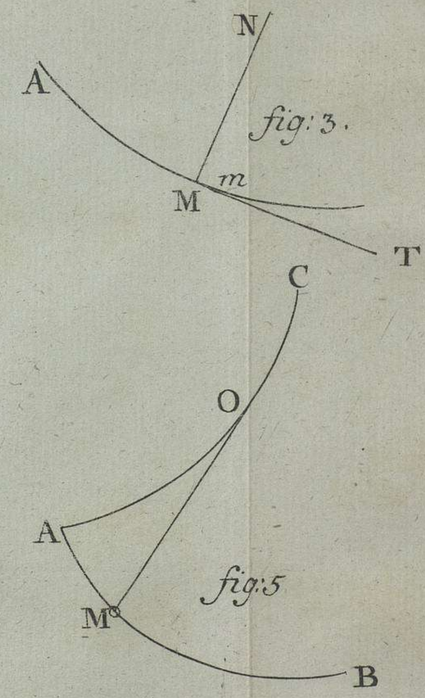


fig: 3.

fig: 5

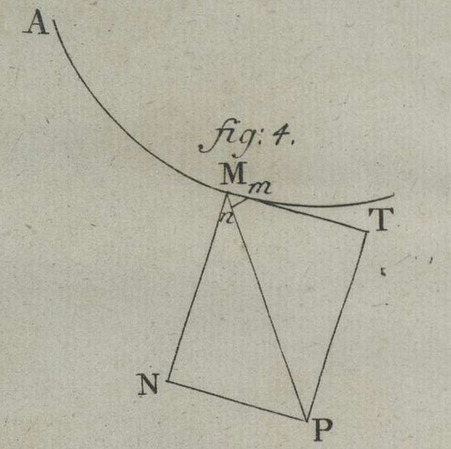


fig: 4.

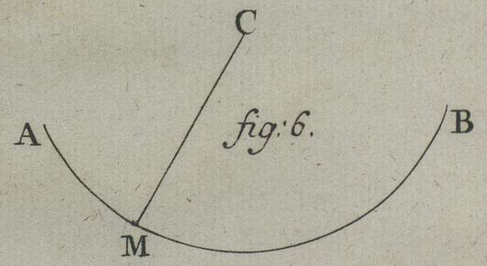
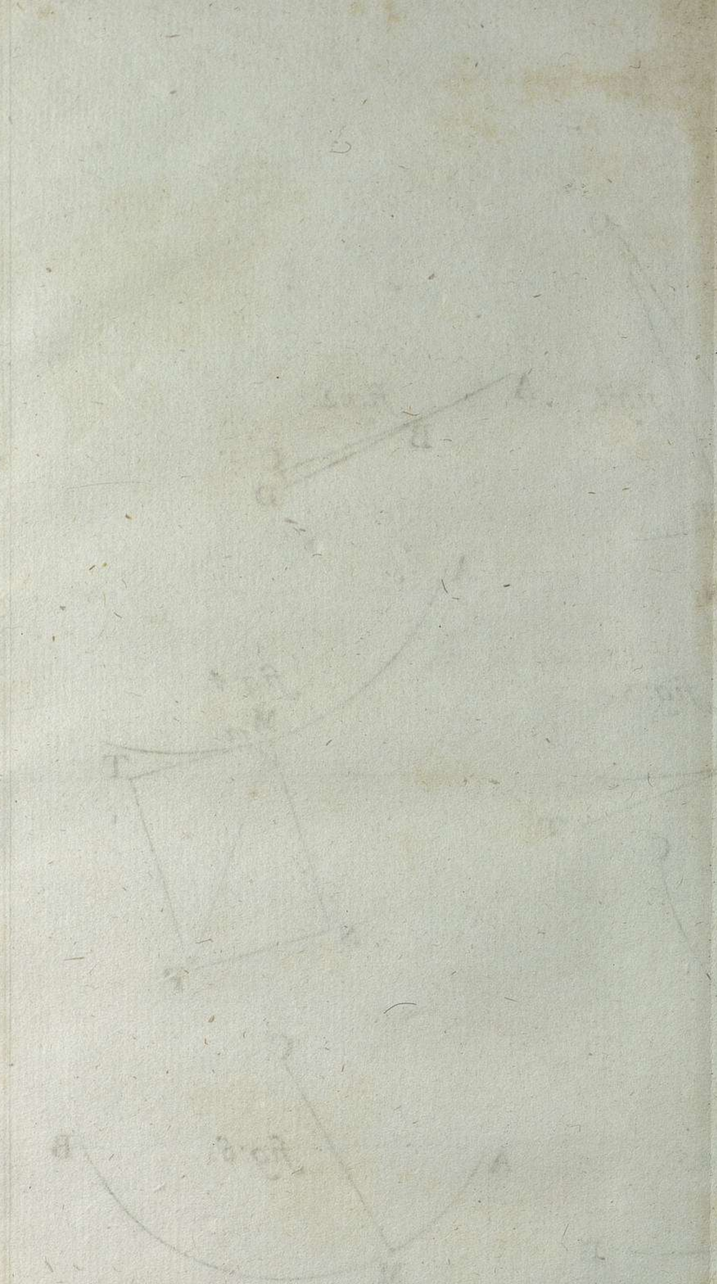


fig: 6.

Tom: II. Tabula I.

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

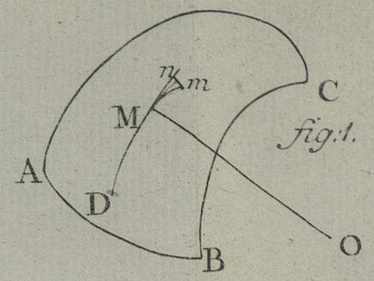


fig: 1.

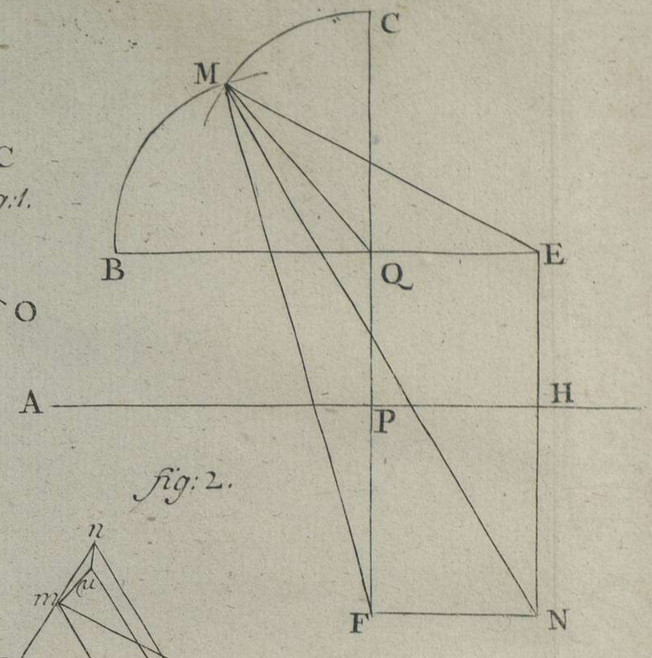


fig: 2.

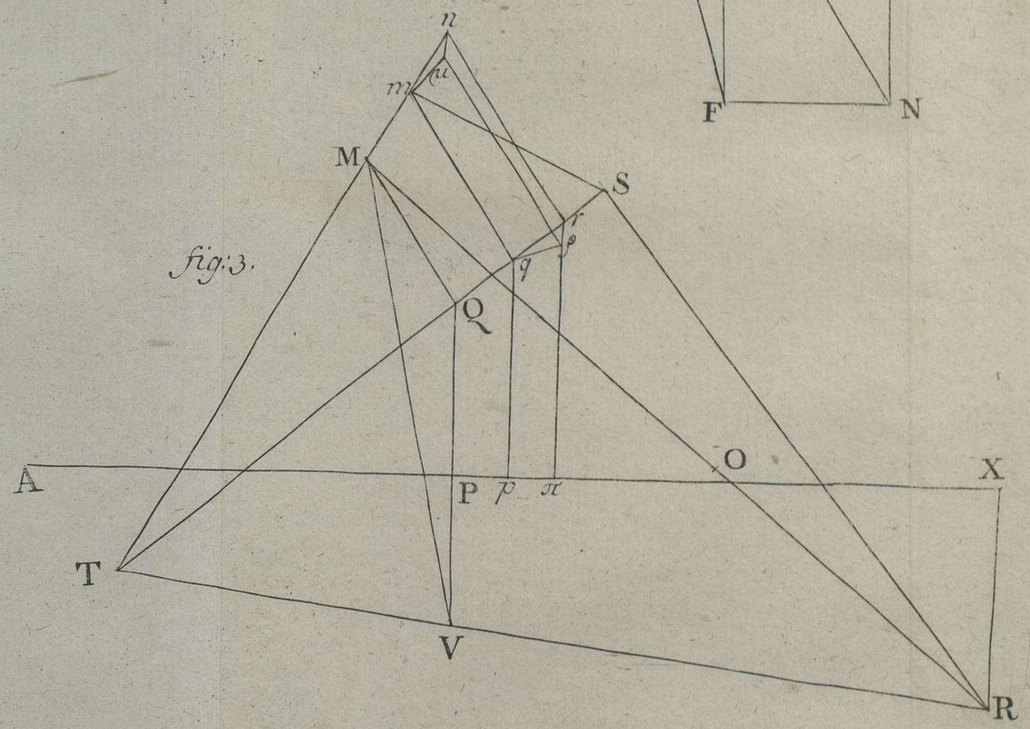


fig: 3.

Tom: II. Tab: II

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

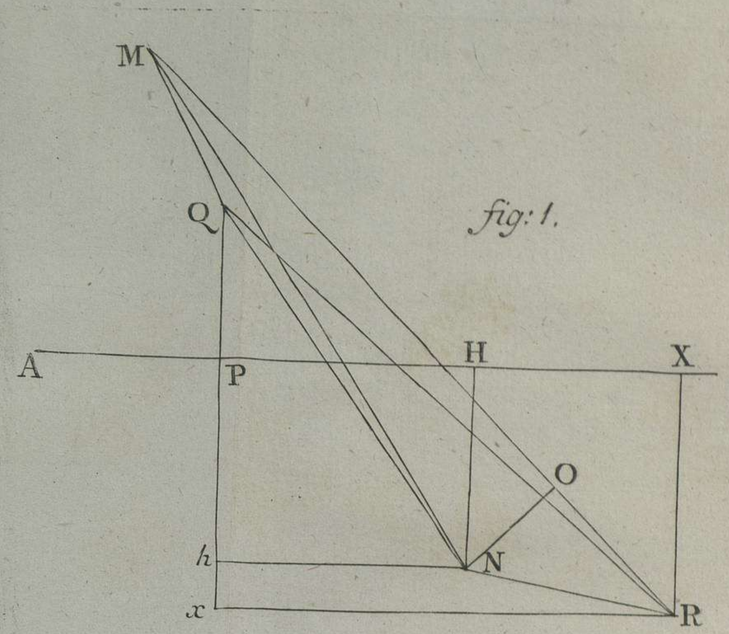


fig: 1.

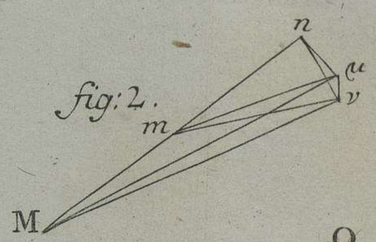


fig: 2.

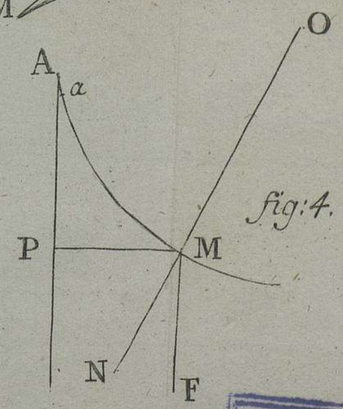


fig: 4.

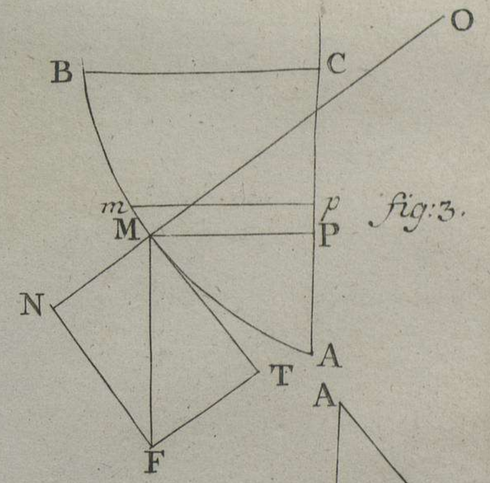


fig: 3.

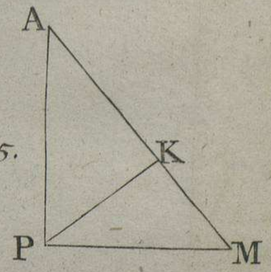
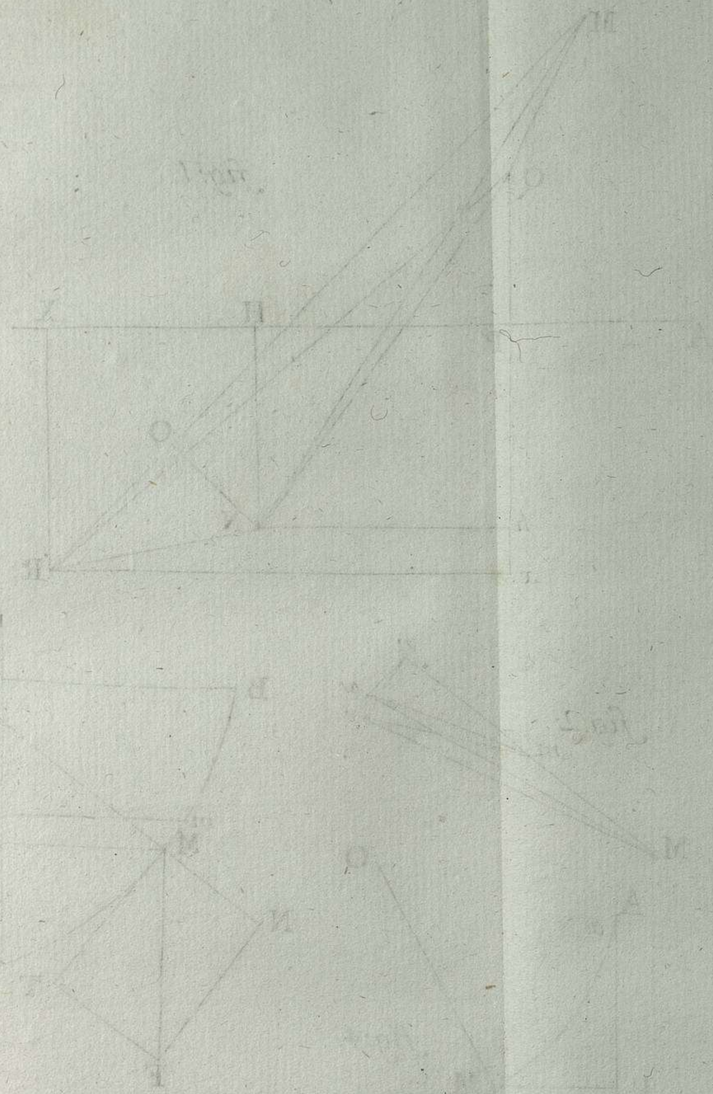


fig: 5.

Tom: II. Tab: III.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017



BIBLIOTECA
DEL
CONSERVATORIO DE LA HABANA

M.E.C.D. 2017

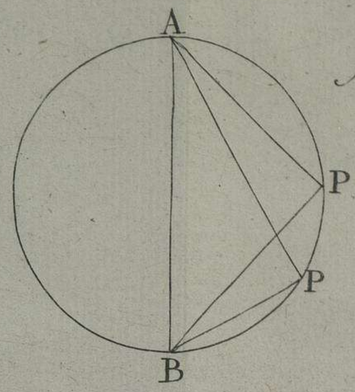


fig: 1.

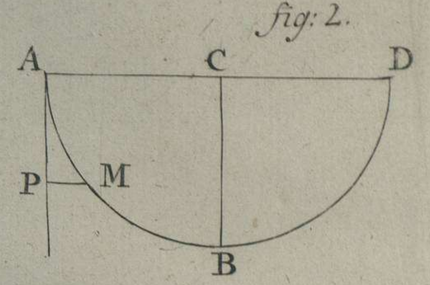


fig: 2.

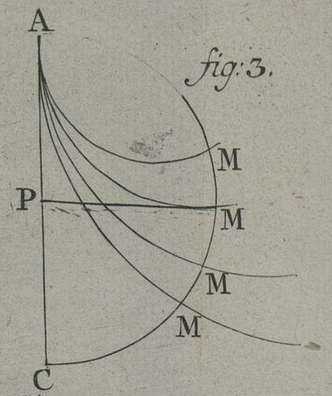


fig: 3.

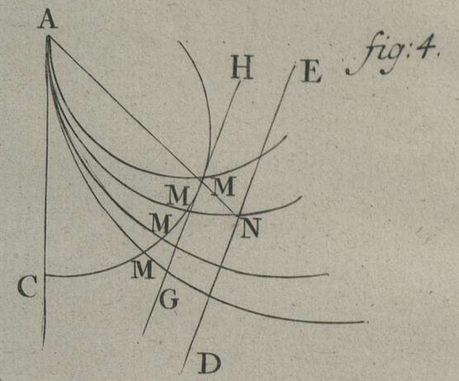


fig: 4.

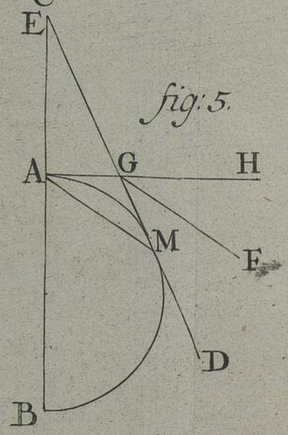


fig: 5.

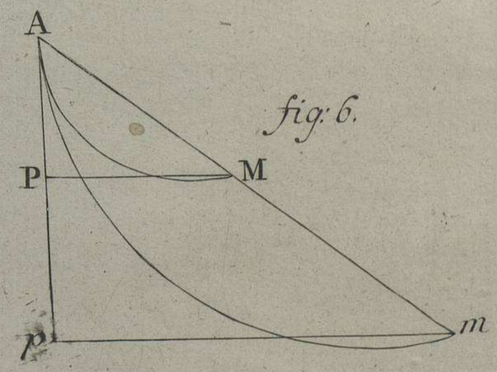
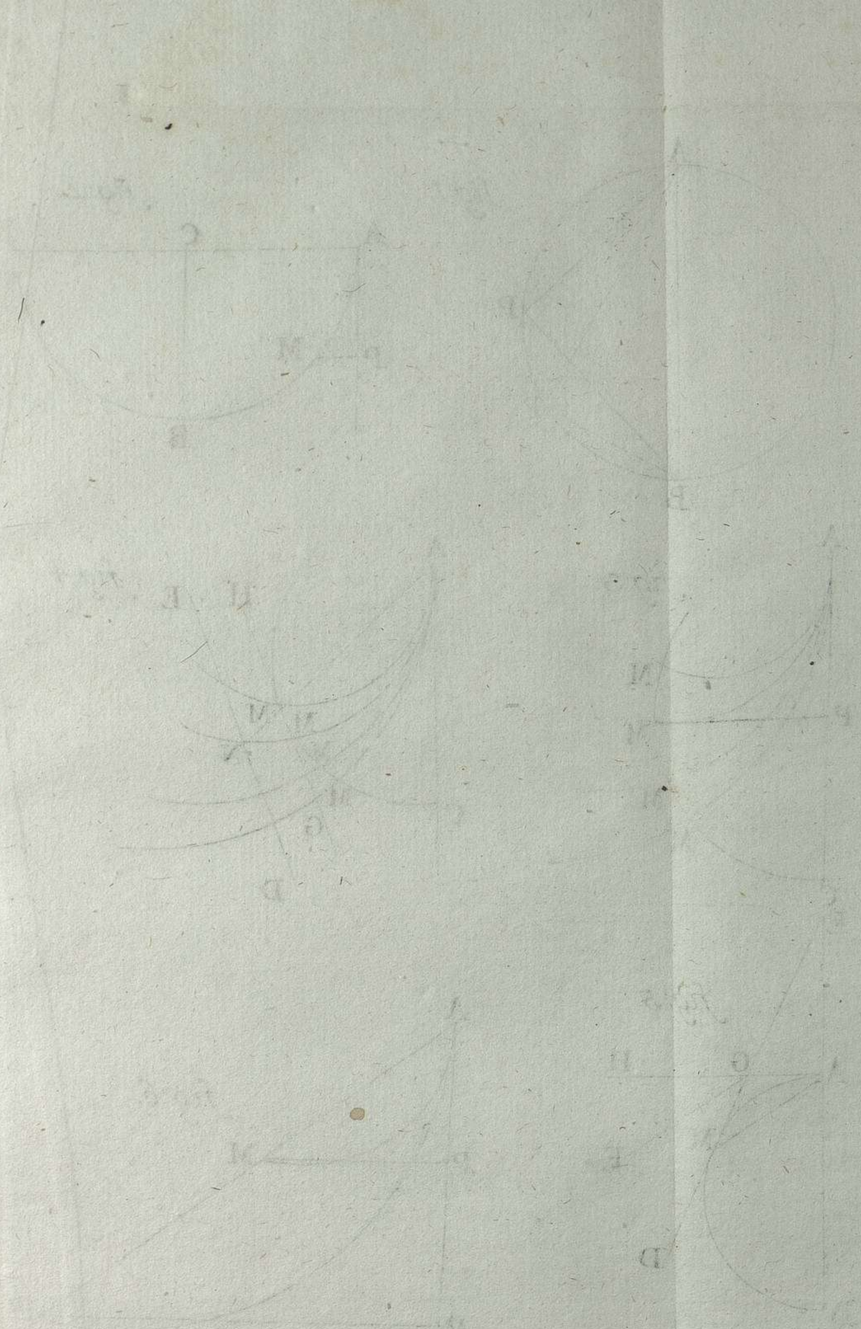


fig: 6.

Tom: II. Tab: IV.

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

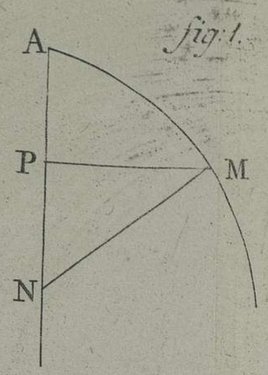


fig: 1.

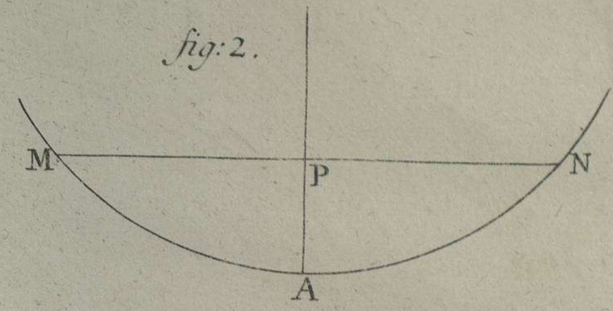


fig: 2.

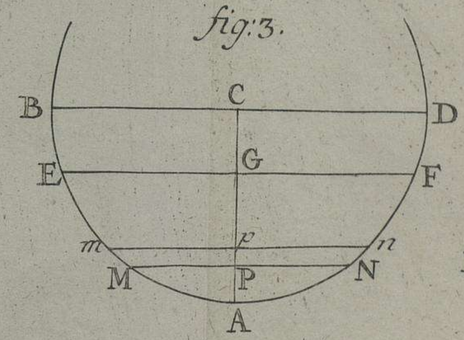


fig: 3.

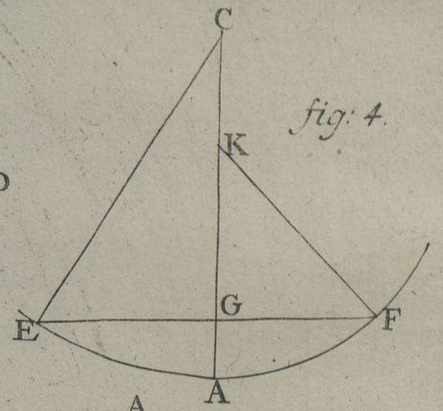


fig: 4.

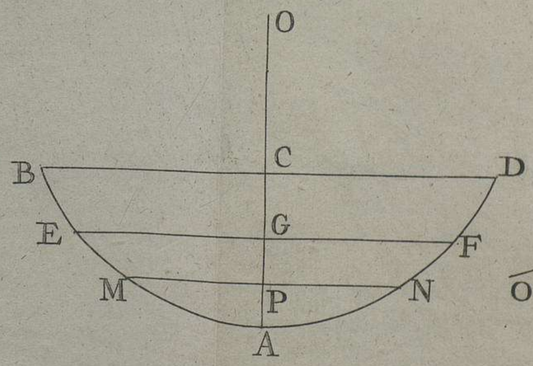


fig: 5.

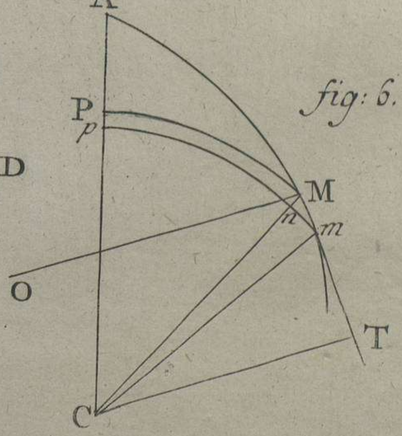
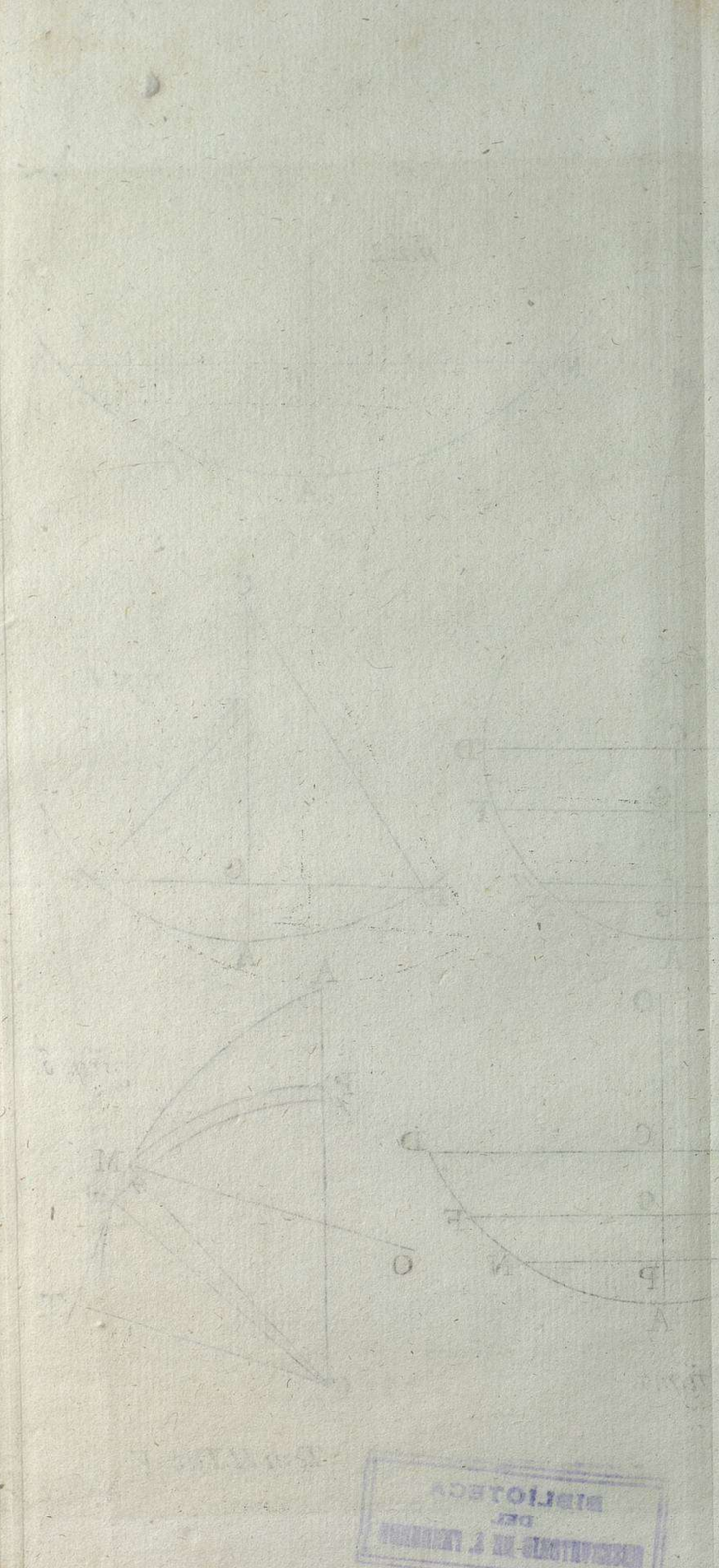


fig: 6.

Tom: II Tab: V.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

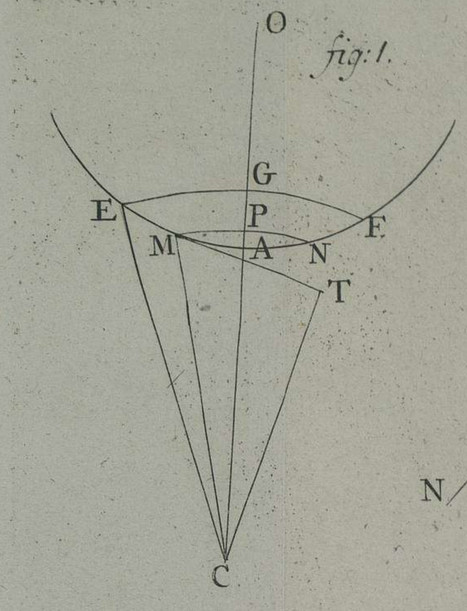


fig: 1.

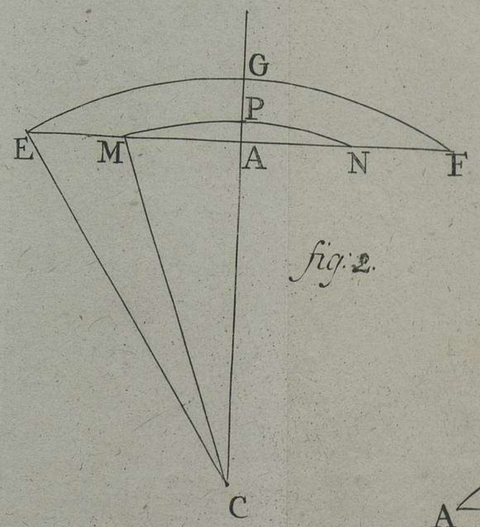


fig: 2.

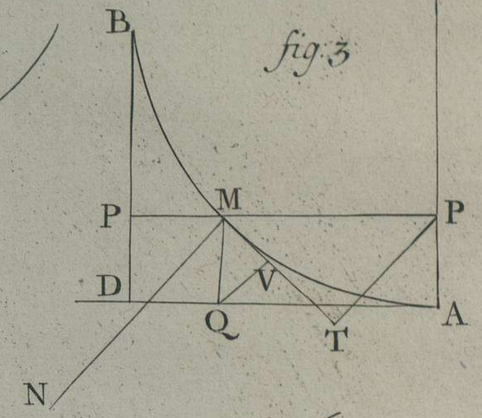


fig: 3

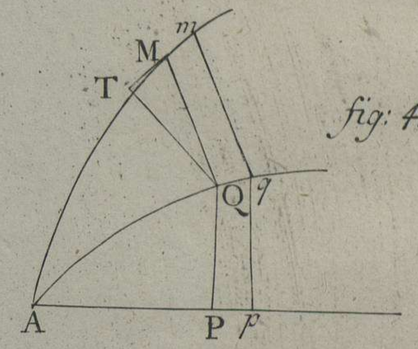


fig: 4.

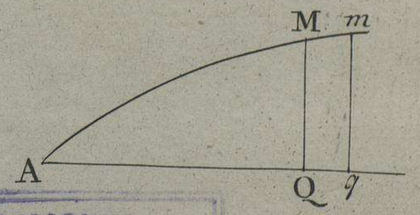
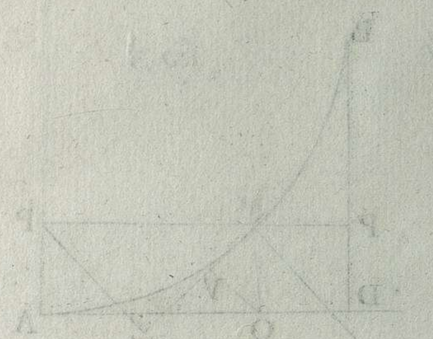


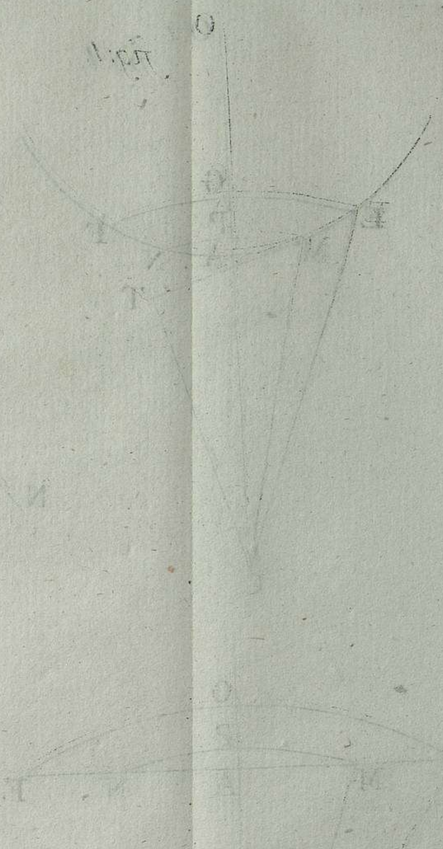
fig: 5.

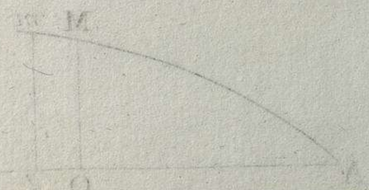
BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

Tom: II. Tab: VI.

M.E.C.D. 2017







M.E.C.D. 2017

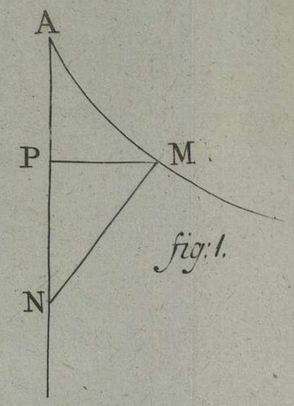


fig: 1.

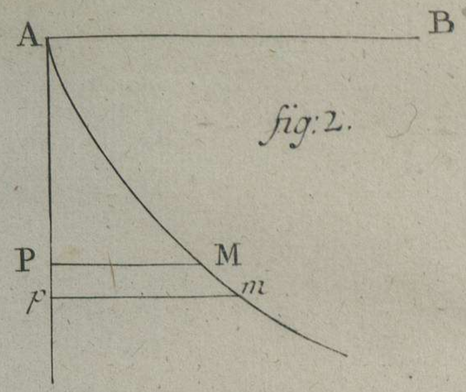


fig: 2.

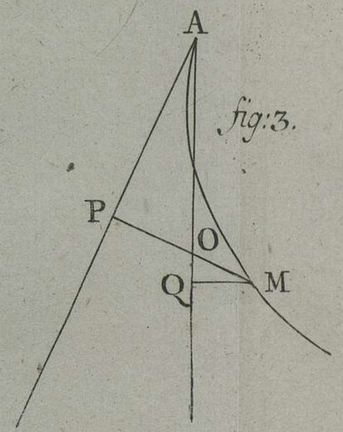


fig: 3.

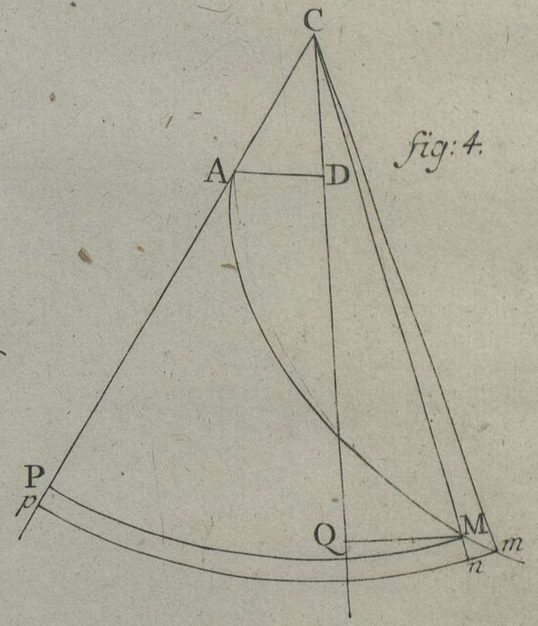
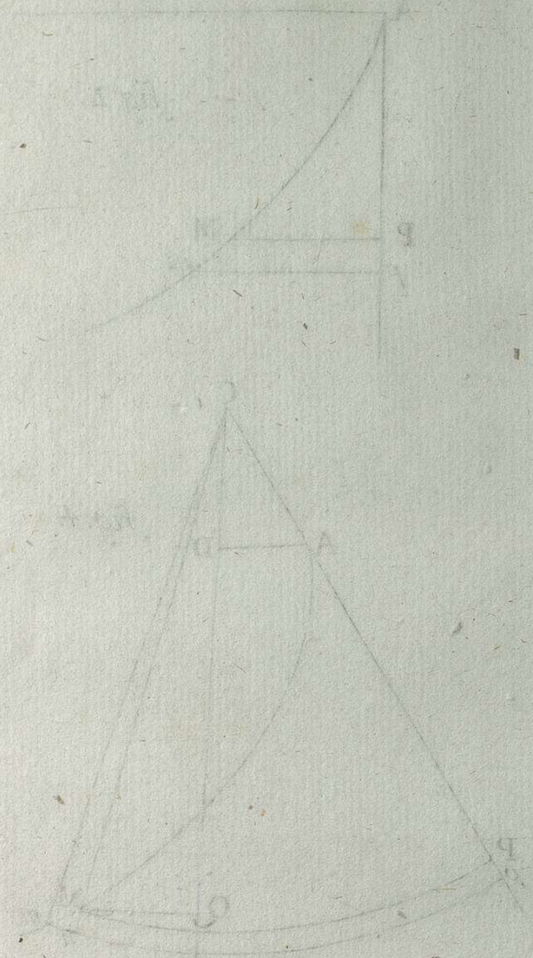
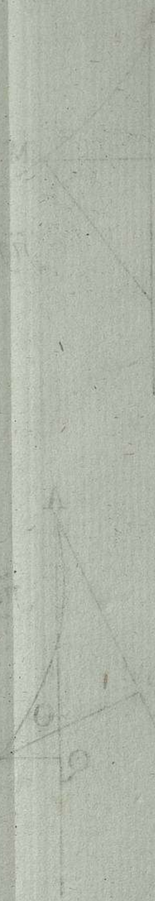


fig: 4.

Tom: II. Tab: VII.

M.E.C.D. 2017









M.E.C.D. 2017

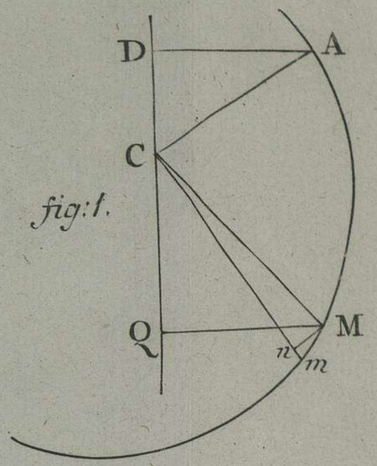


fig: 1.

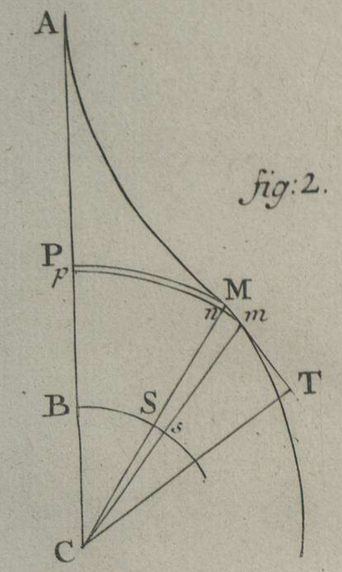


fig: 2.

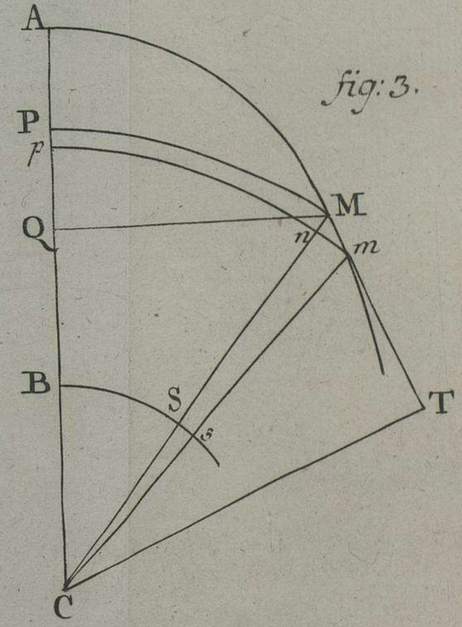


fig: 3.

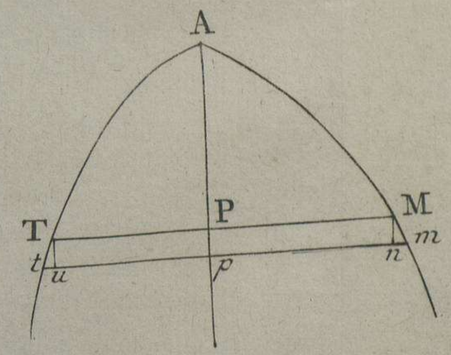
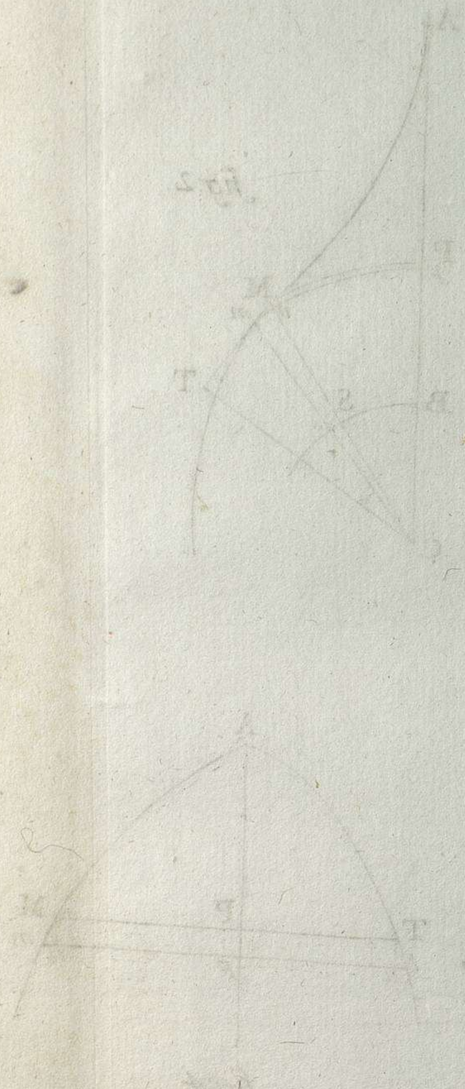
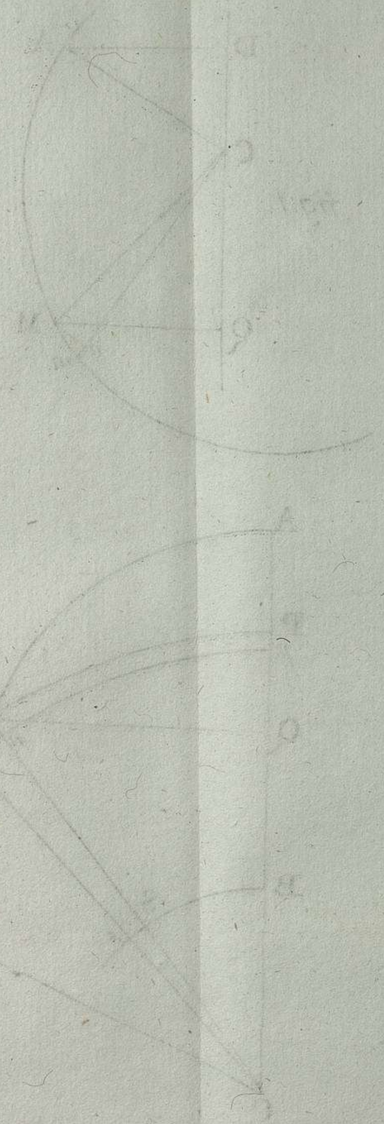


fig: 4.

Tom: II. Tab: VIII.

M.E.C.D. 2017





M.E.C.D. 2017

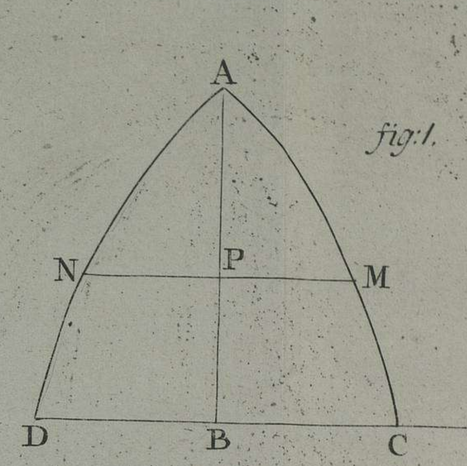


fig:1.

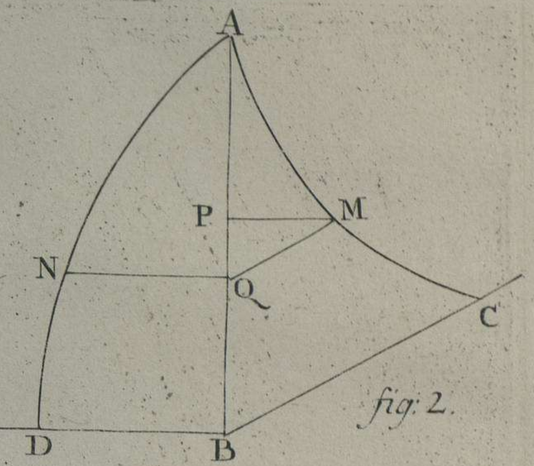


fig: 2.

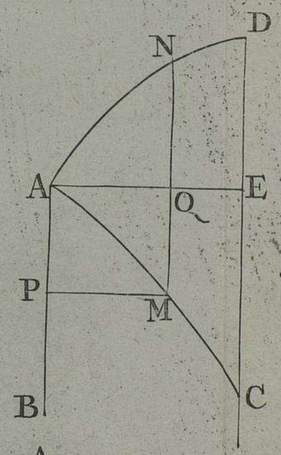


fig: 3.

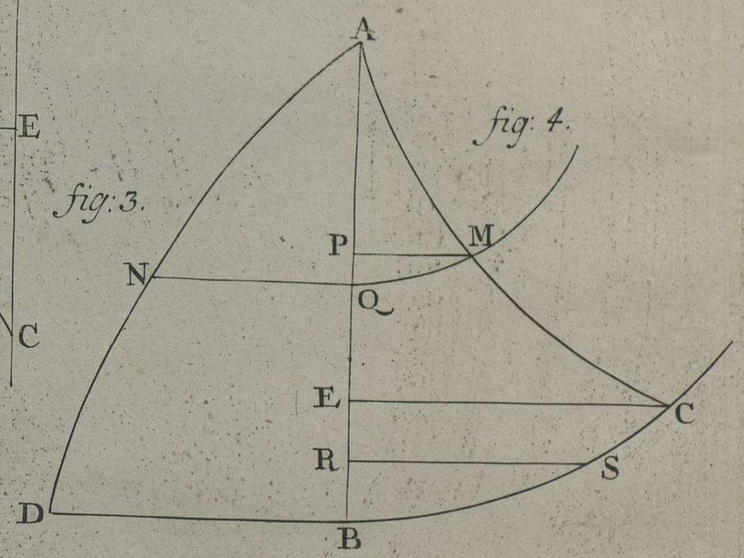


fig: 4.

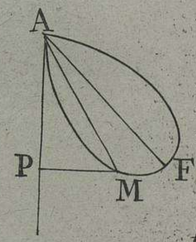
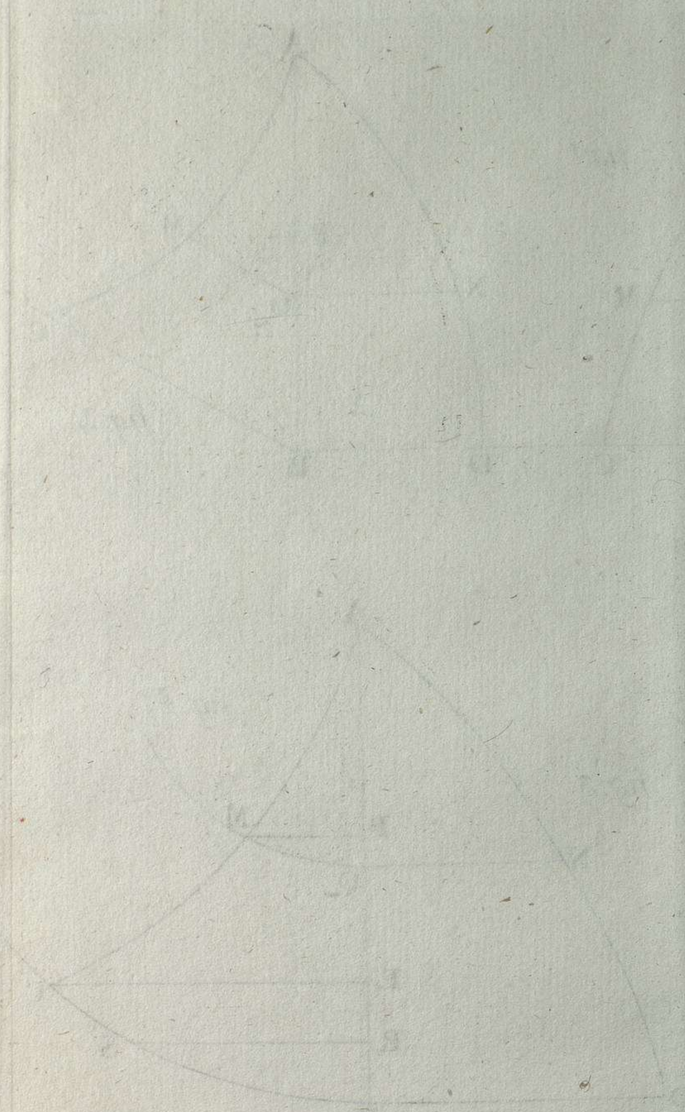


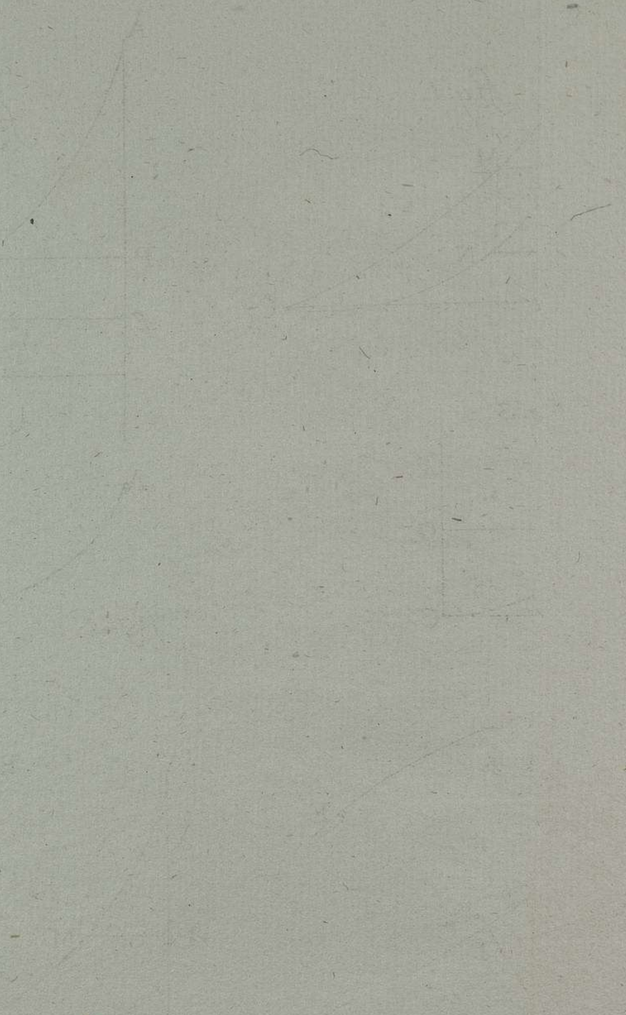
fig: 5.

Tom: II. Tab: IX.

M.E.C.D. 2017







M.E.C.D. 2017

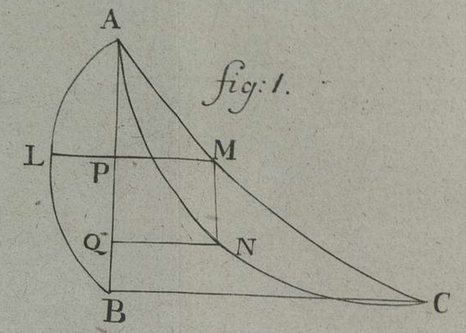


fig: 1.

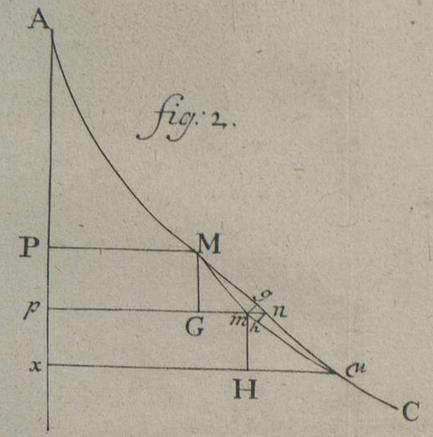


fig: 2.

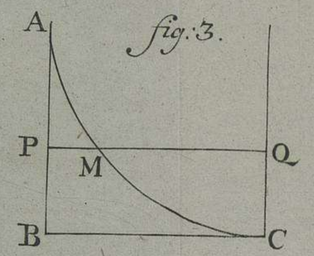


fig: 3.

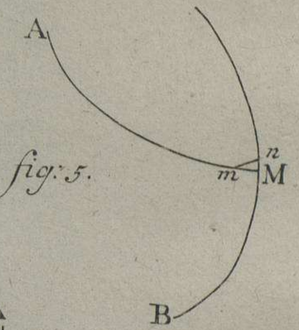


fig: 5.

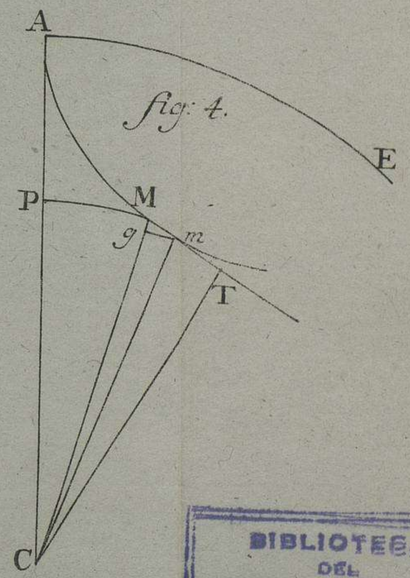


fig: 4.

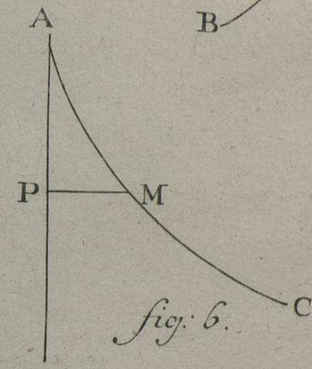


fig: 6.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

Tom: II. Tab: X.

M.E.C.D. 2017

BIBLIOTECA
DEL
MINISTERIO DE EDUCACION

M.E.C.D. 2017

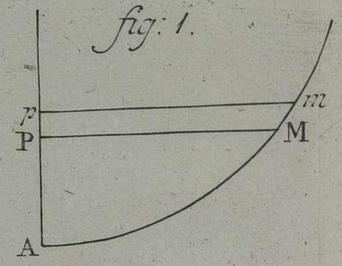


fig: 1.

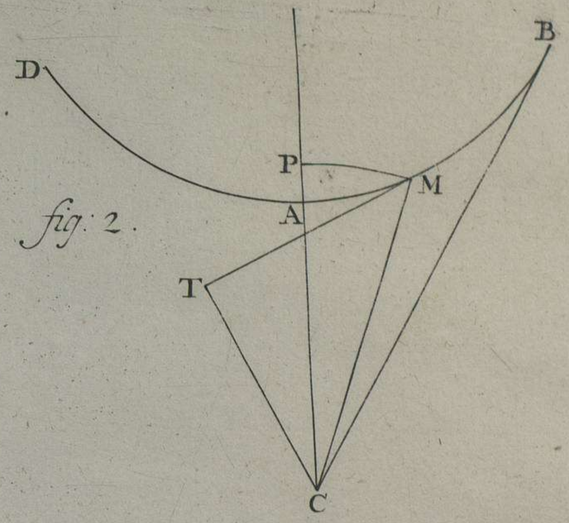


fig: 2.

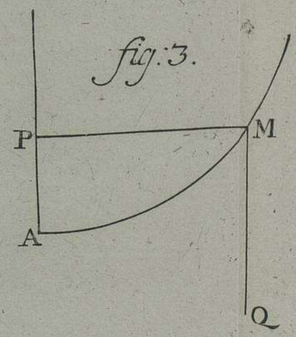


fig: 3.

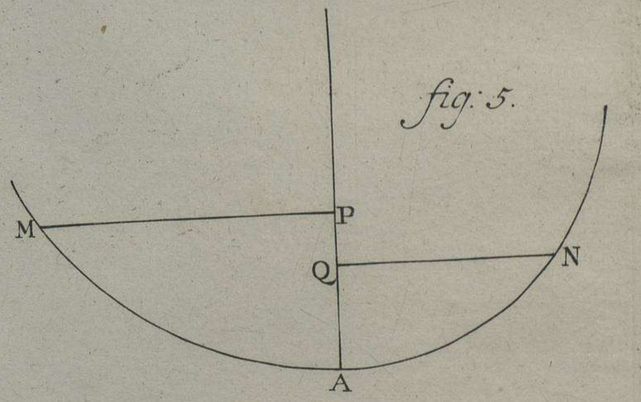


fig: 5.

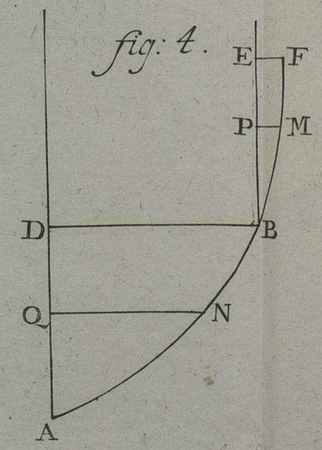


fig: 4.

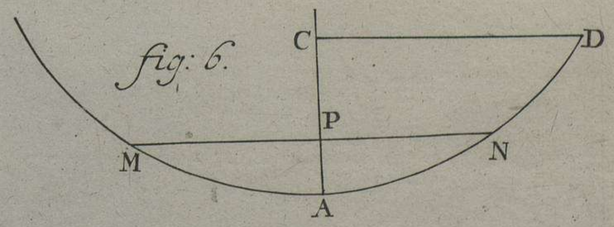
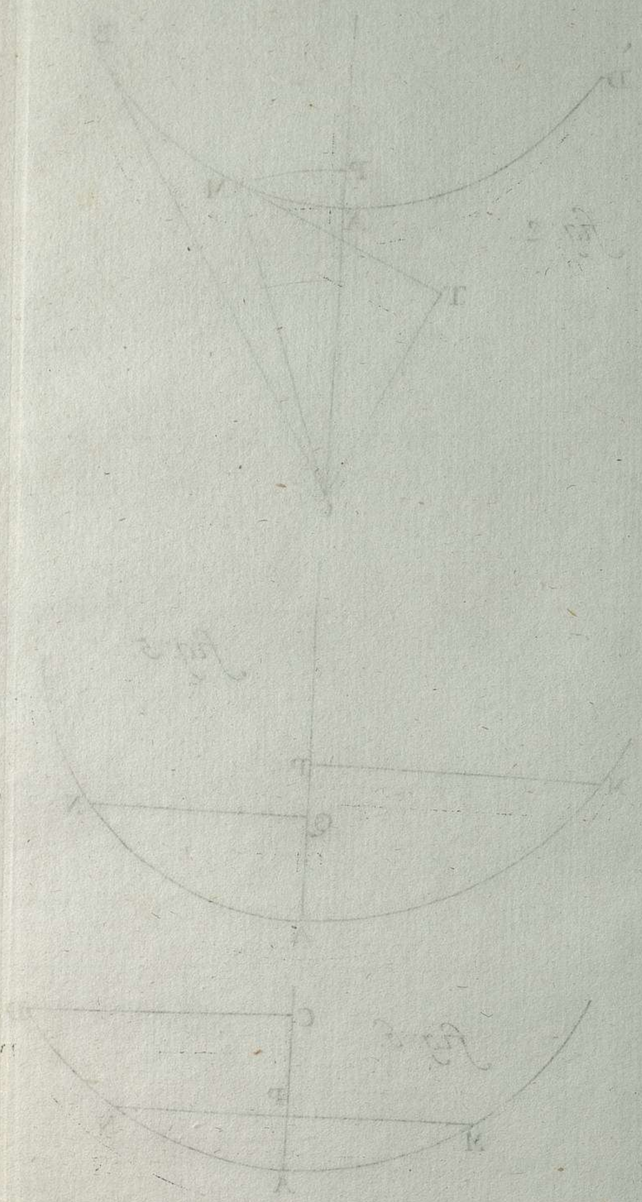
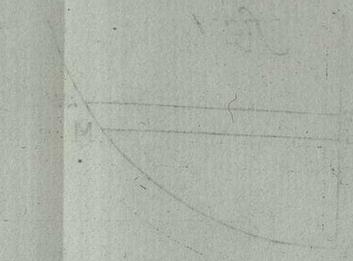


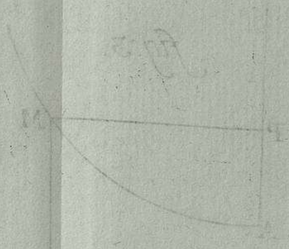
fig: 6.

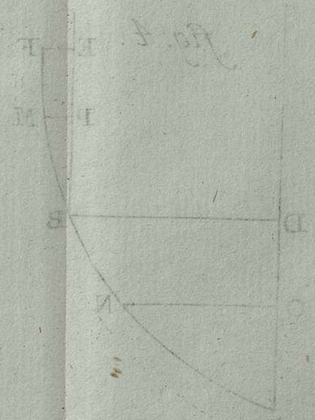
Tom: II. Tab: XI.

M.E.C.D. 2017









M.E.C.D. 2017

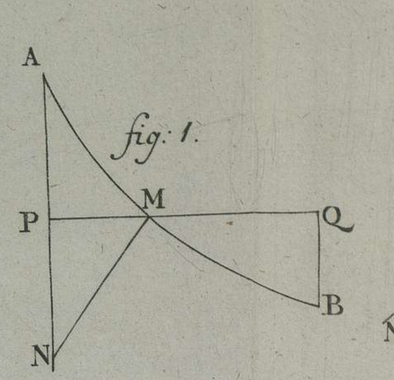


fig: 1.

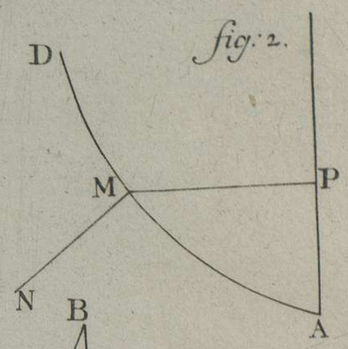


fig: 2.

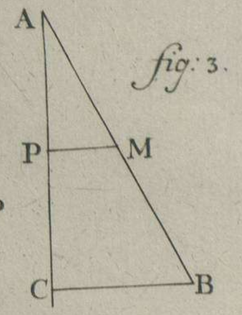


fig: 3.

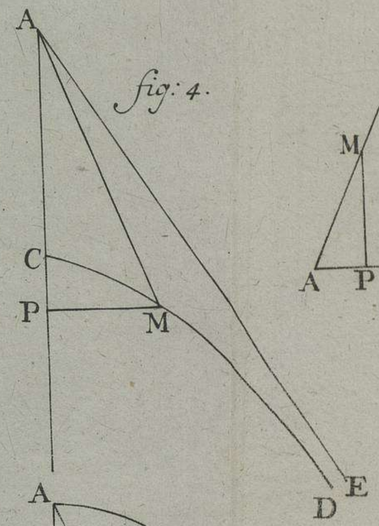


fig: 4.

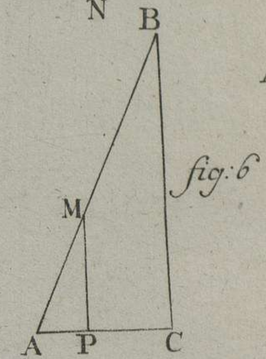


fig: 6

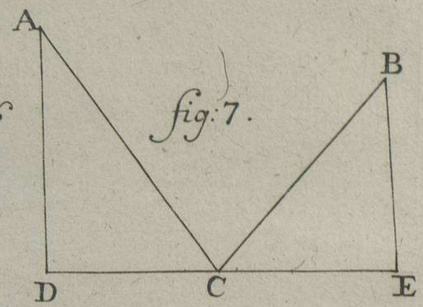


fig: 7.

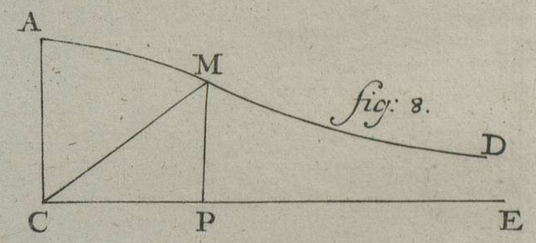


fig: 8.

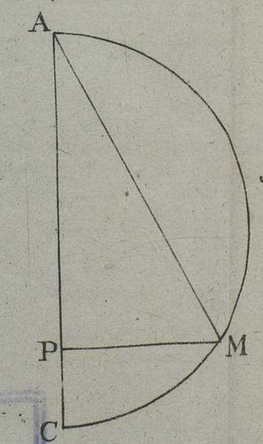


fig: 5.

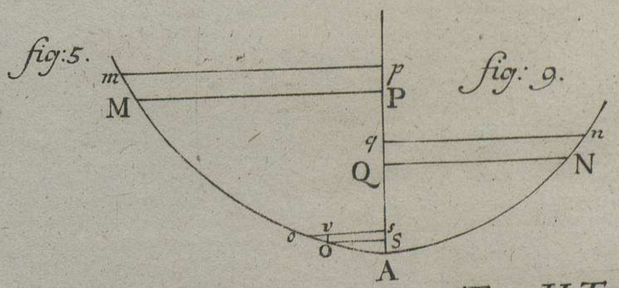
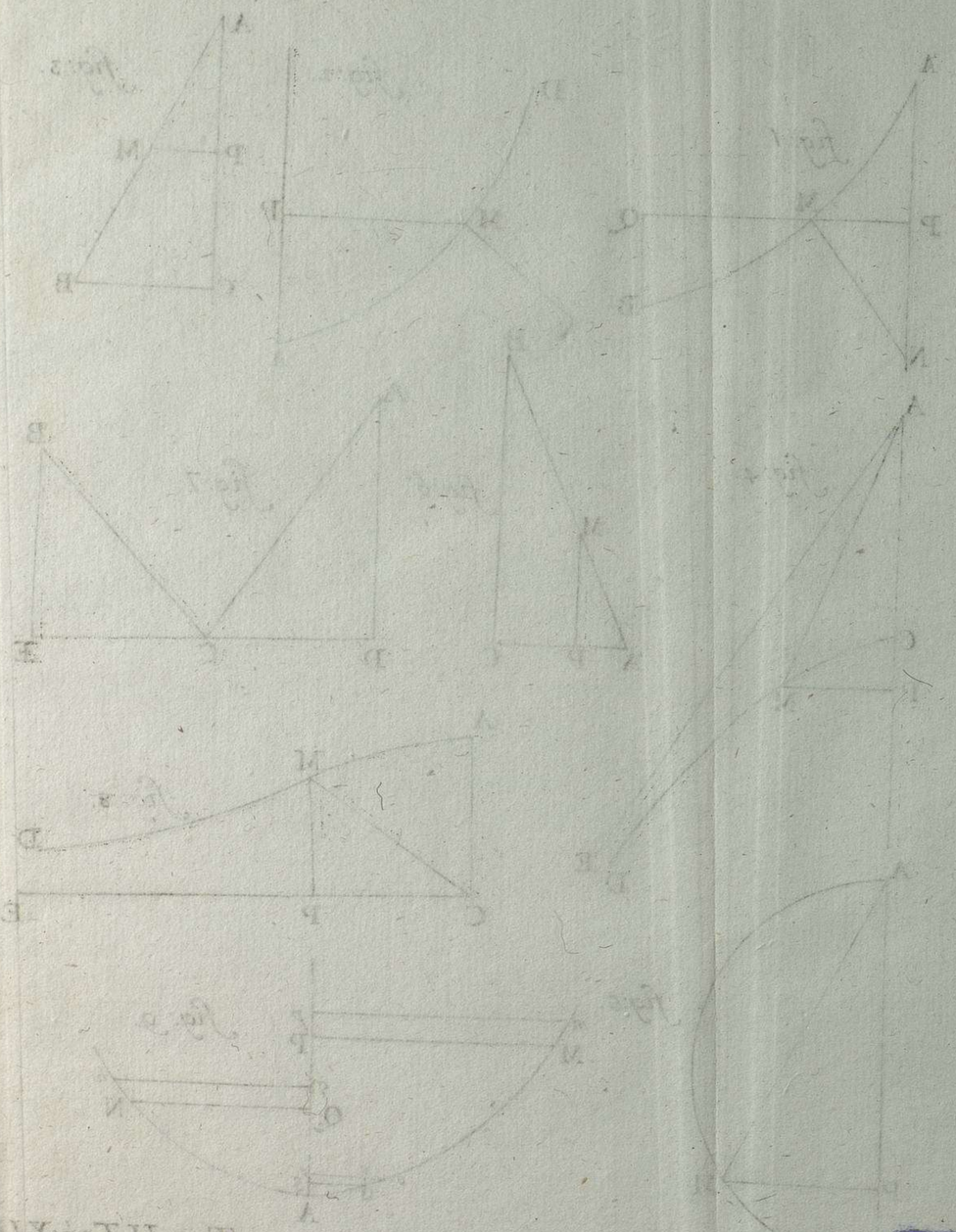


fig: 9.

Tom: II. Tab: XII.

M.E.C.D. 2017



BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

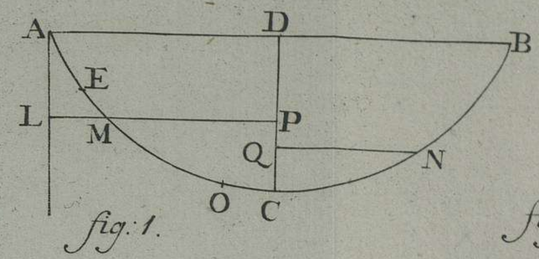


fig: 1.

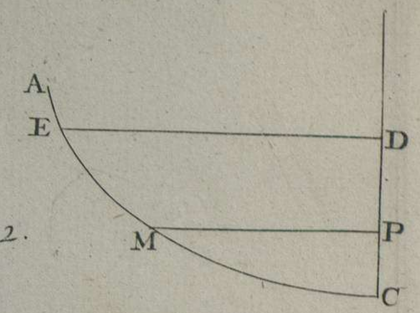


fig: 2.

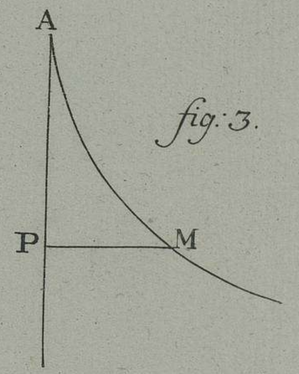


fig: 3.

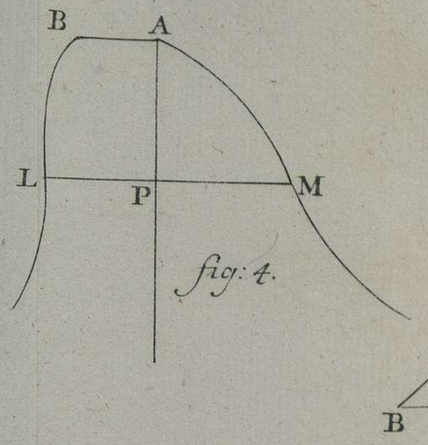
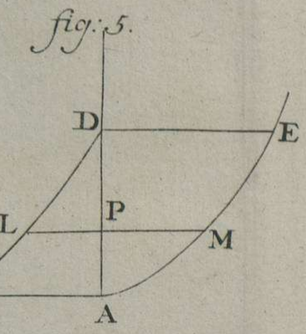


fig: 4.

fig: 5.



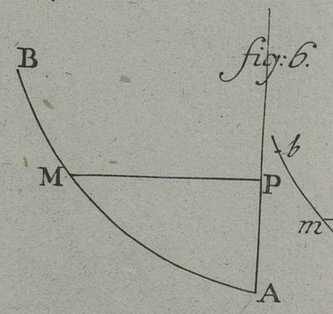
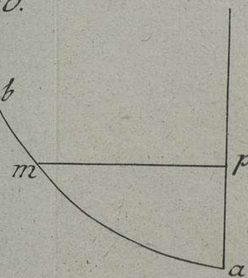


fig: 6.



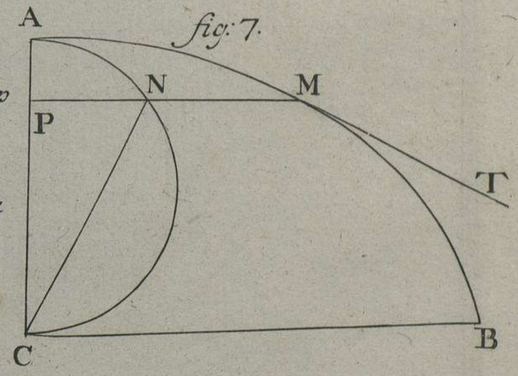
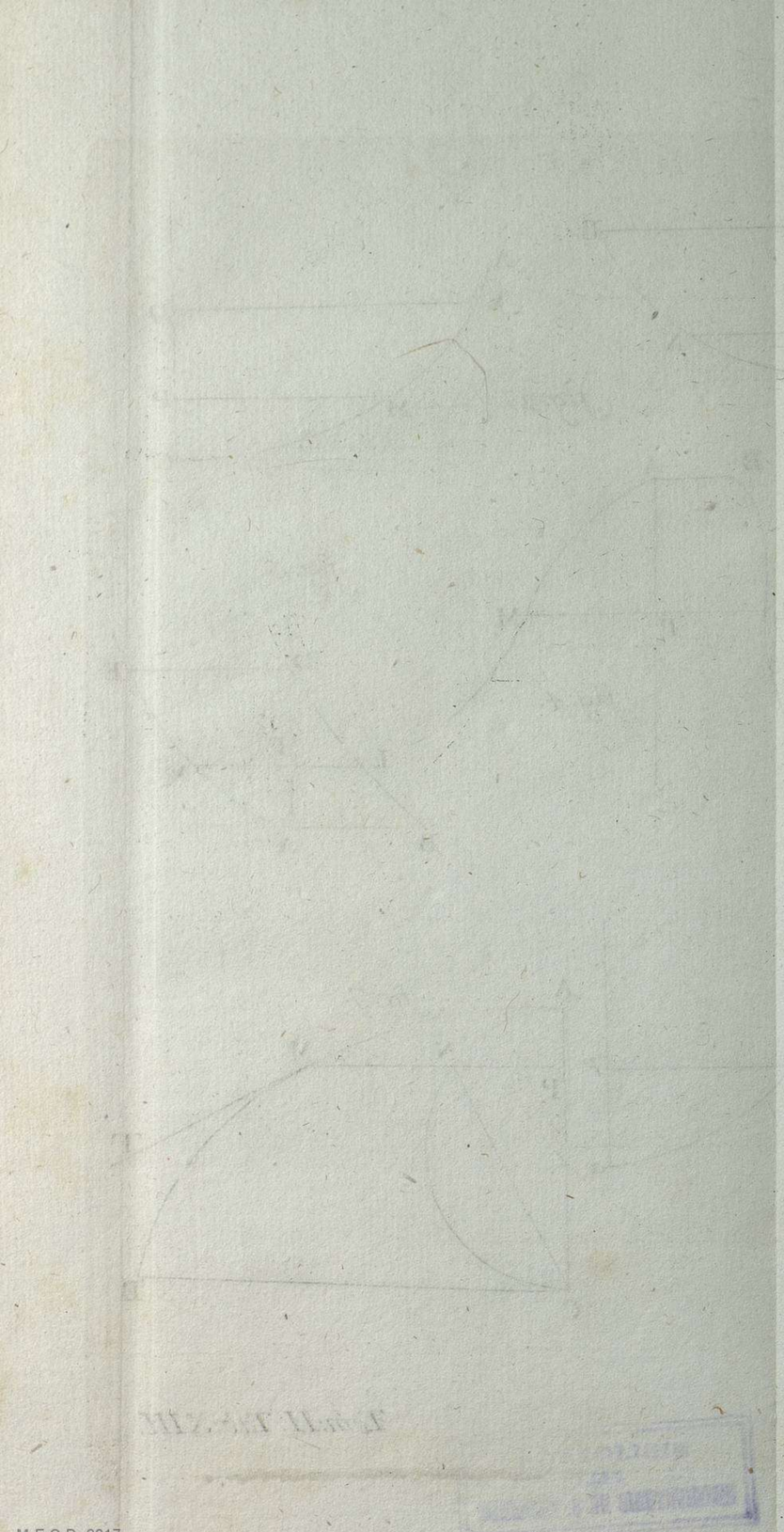


fig: 7.

Tom: II. Tab: XIII.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

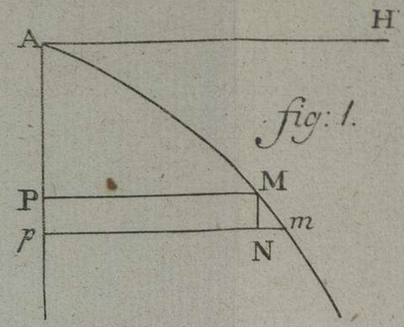


fig: 1.

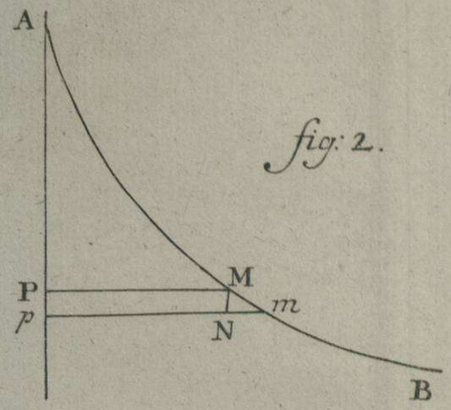


fig: 2.

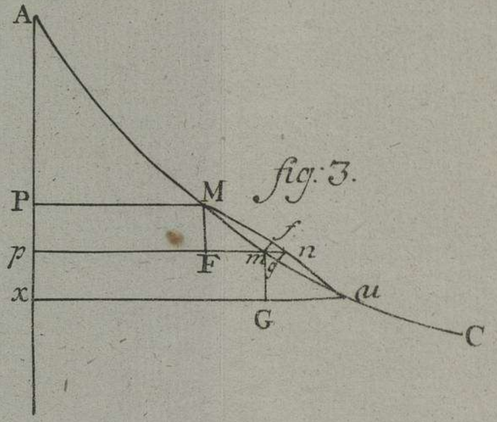


fig: 3.

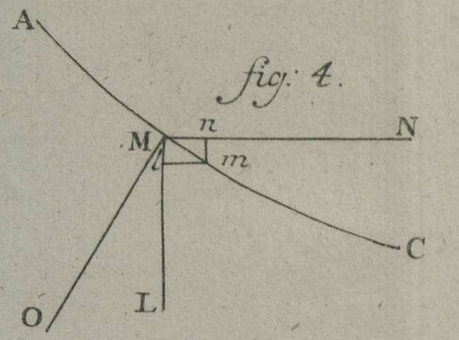


fig: 4.

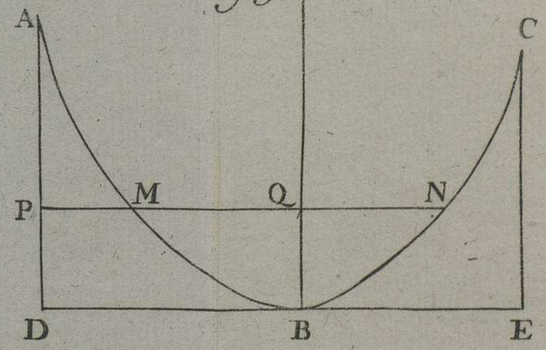


fig: 5.

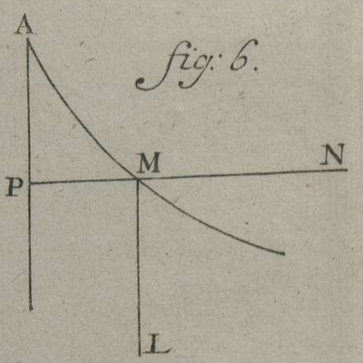
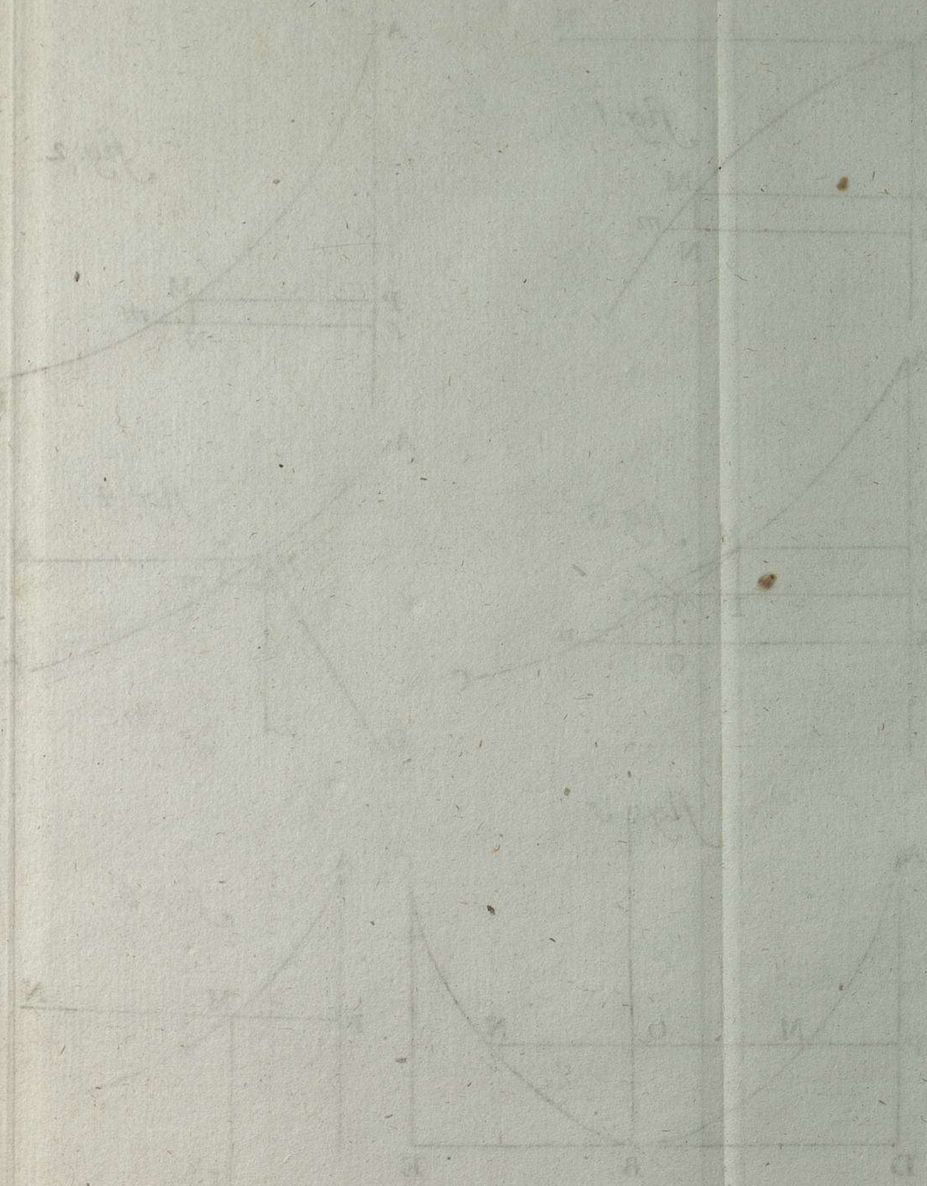


fig: 6.

Tom: II. Tab: XIV.

BIBLIOTECA DEL

M.E.C.D. 2017





M.E.C.D. 2017

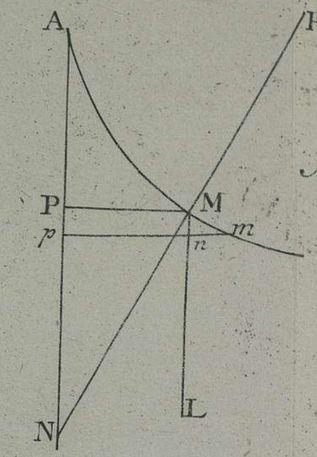


fig: 1.

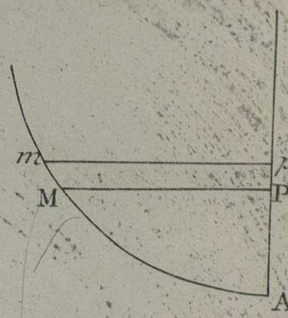


fig: 2.

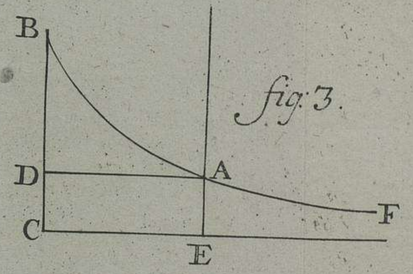


fig: 3.

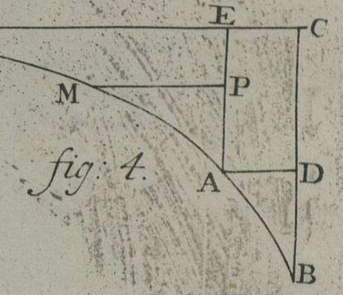


fig: 4.

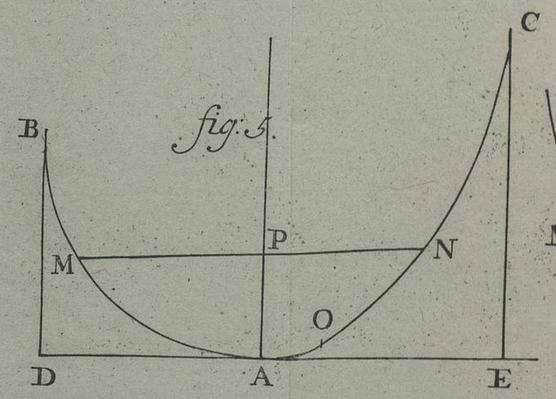


fig: 5.

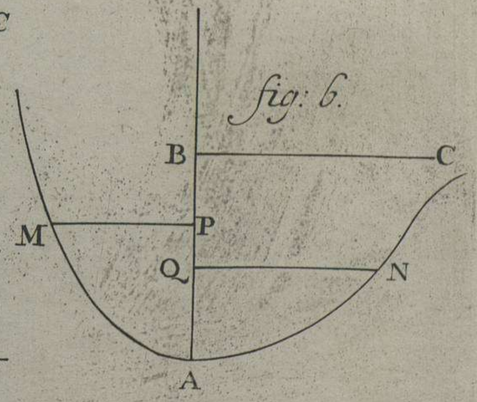
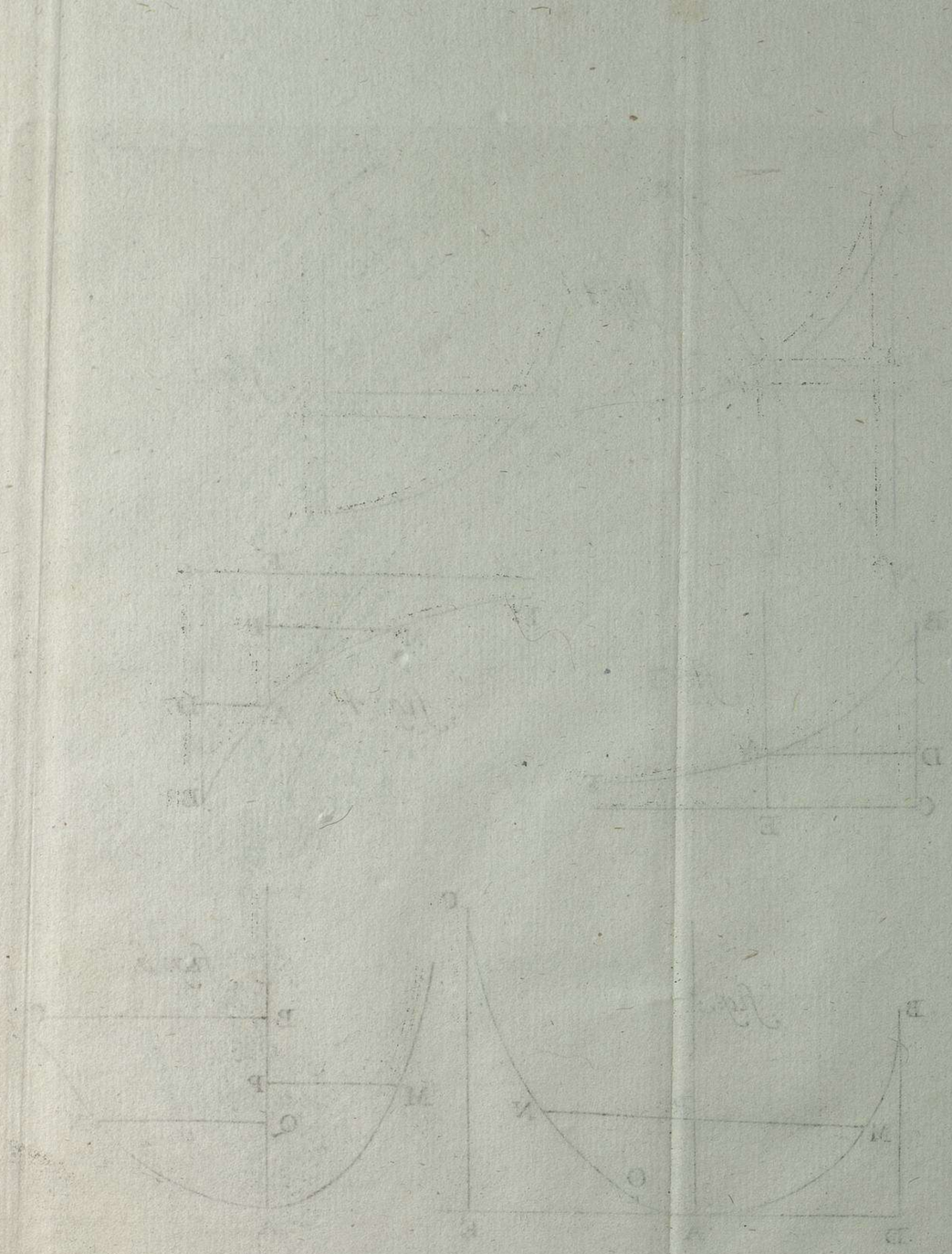


fig: 6.

Tom: II. Tab: XV.

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

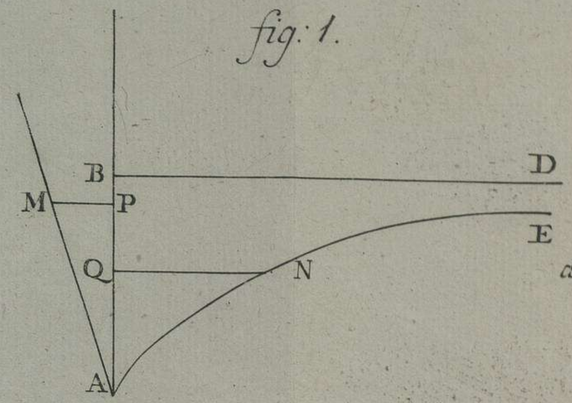


fig: 1.

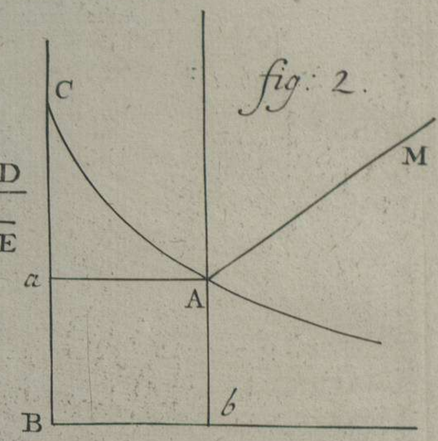


fig: 2.

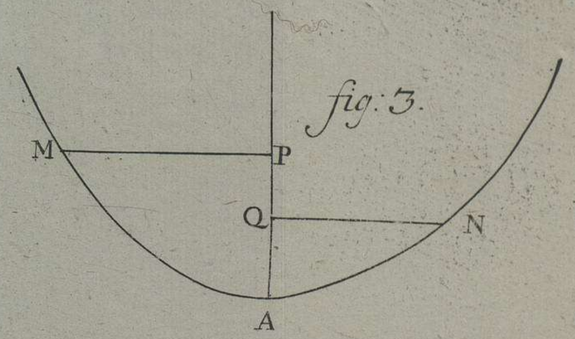


fig: 3.

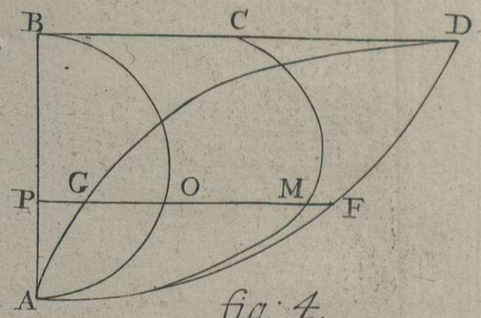


fig: 4.

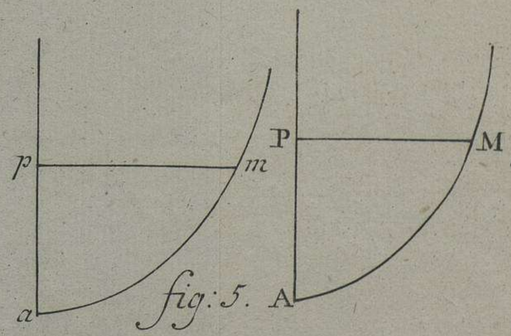


fig: 5.

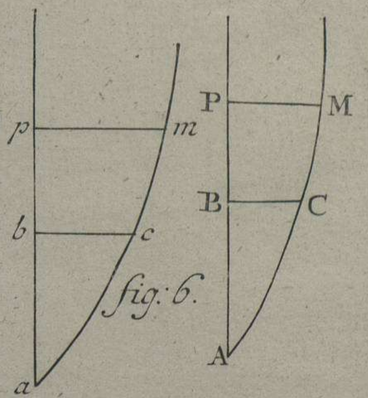


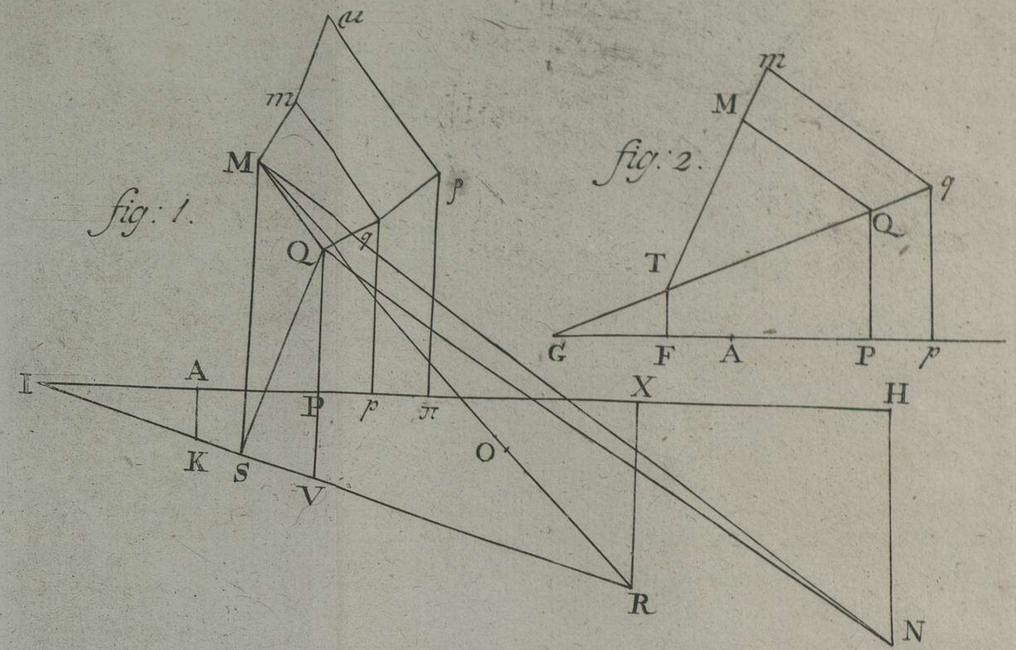
fig: 6.

Tom: II. Tab: XVI

M.E.C.D. 2017

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017



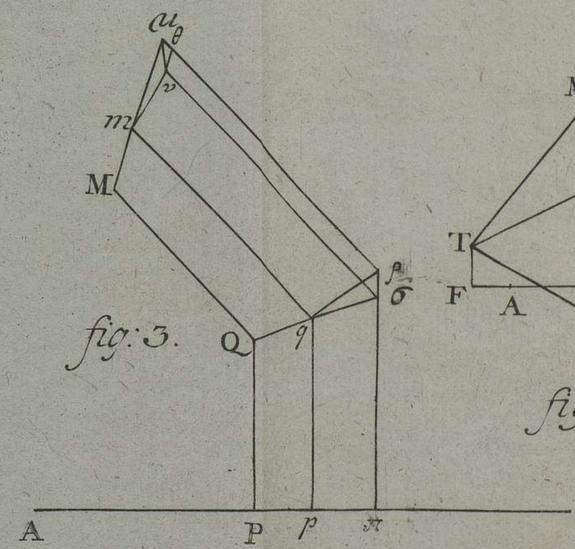


fig: 3.

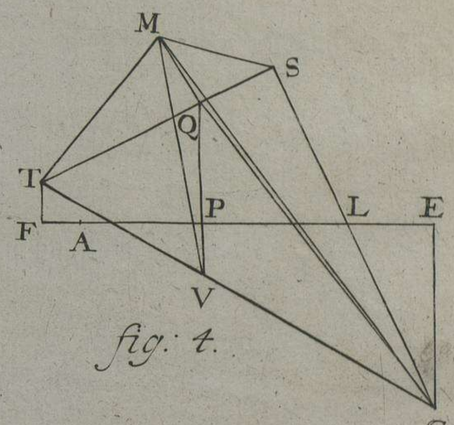
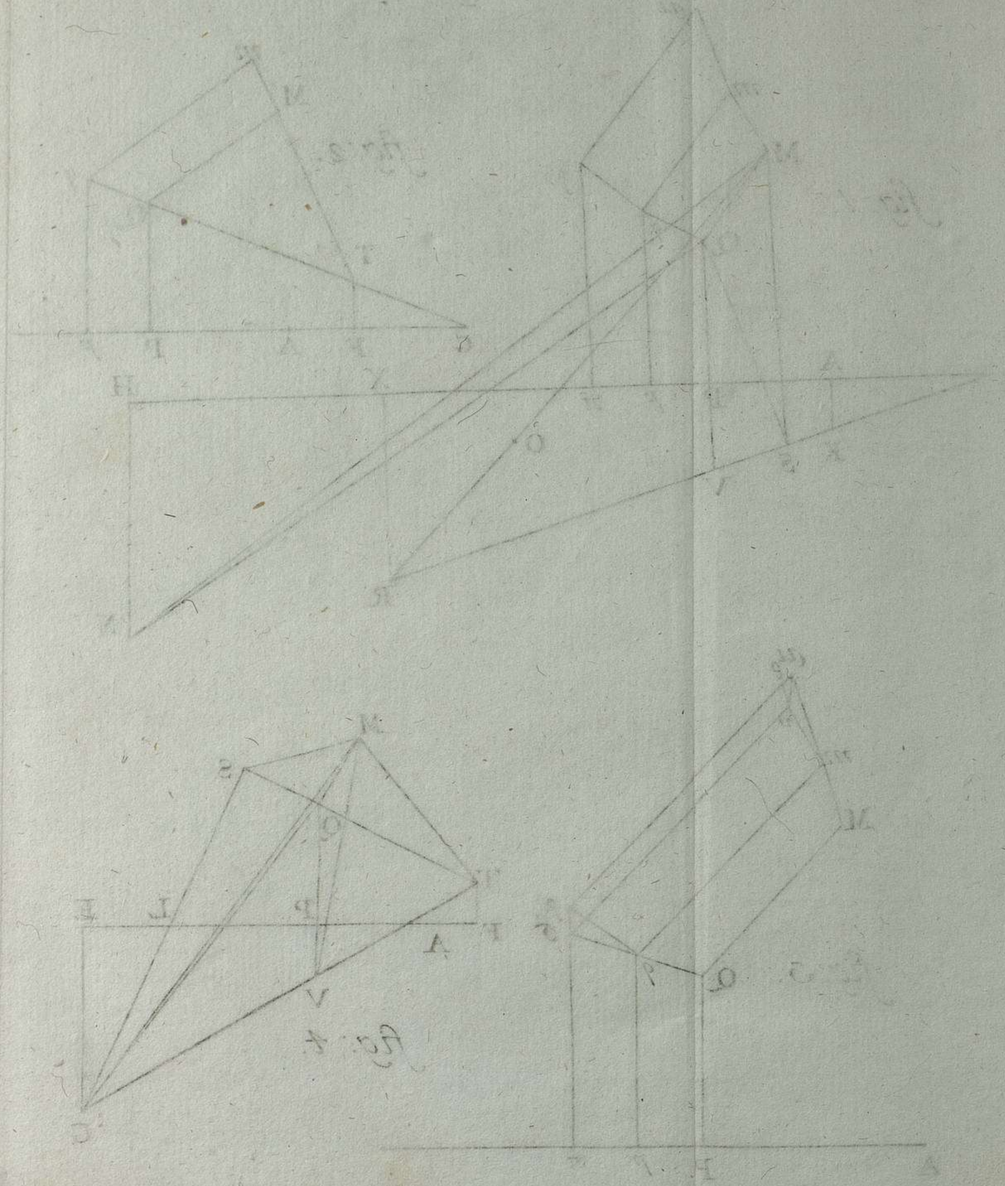


fig: 4.

Tom: II. Tab: XVII

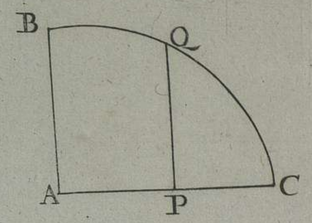
BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017



M.E.C.D. 2017

fig: 1.



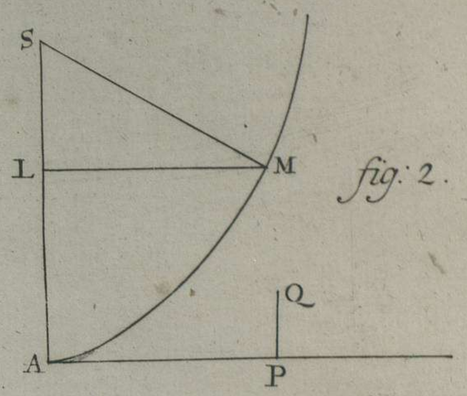


fig: 2.

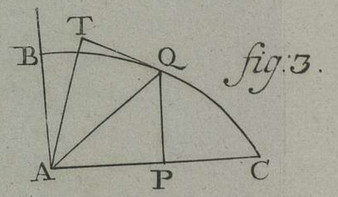


fig: 3.

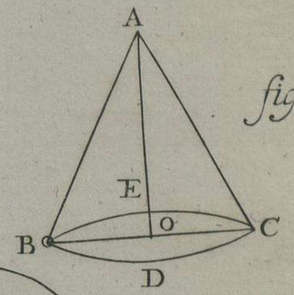


fig: 4.

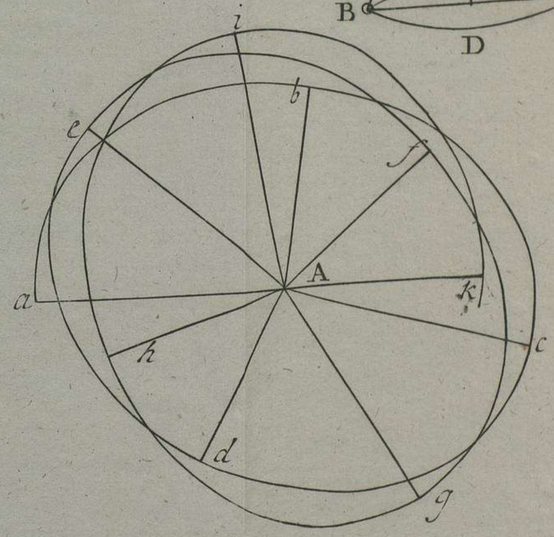
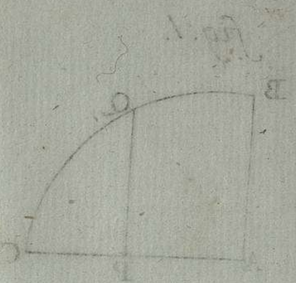


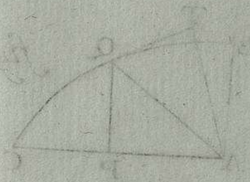
fig: 5.

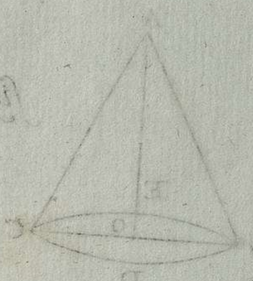
Tom: II. Tab: XVIII.

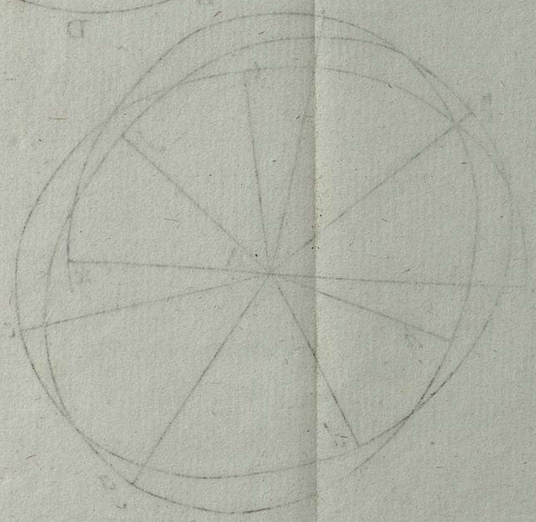
M.E.C.D. 2017











M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

BIBLIOTECA
DEL
M.E.C.D. 2017

BIBLIOTECA
DEL
M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

1462

Real Observatorio de la Armada
BIBLIOTECA

01499

.....

M.E.C.D. 2017