CIENCIA MATEMÁTICA.

APUNTES

PARA UNA EXPOSICION RACIONAL

DE LOS PRINCIPIOS

DE LA

GEOMETRÍA ELEMENTAL,

POR

DON JULIAN DE LA REGUERA.

DOCTOR EN CIENCIAS.

En la enseñanza deben preferirse siempre los métodos generales, y exponiéndolos con la mayor sencillez, serán los más fáciles.

(LAPLACE.)

MADRID:
IMPRENTA DE PEDRO ABIENZO.
CALLE DE LA PAZ, NÚM. 6.

1877.

CIENCIA MATEMÁTICA

APUNTES

PARA UNA EXPOSICION RACIONAL

DE LOS PRINCIPIOS

DE LA

GEOMETRÍA ELEMENTAL,

POR

DON JULIAN DE LA REGUERA,

DOCTOR EN CIENCIAS.

> En la enseñanza deben preferirse siempre los métodos generales, y exponiéndolos con la mayor sencillez, serán los más fáciles.
>
> (LAPLACE.)

Julian de la Reguera

MADRID:
IMPRENTA DE PEDRO ABIENZO,
CALLE DE LA PAZ, NÚM. 6.

1877.

No es nuestro propósito escribir un tratado de la ciencia de la extension, ni siquiera hacer un estudio crítico sobre la manera de exponer los principios de la ciencia, seguida por los autores de más nota y nombradía. Trabajo es este, que si bien estéril para la ciencia en sí, seria fecundo en consecuencias, poco favorables á la verdad para obras y autores, sin cuyo conocimiento y familiaridad pudo tenerse en algun tiempo como imposible y casi un mito, todo conocimiento matemático: la moda, que tambien en la ciencia es señora de un dilatado imperio, impone sus caprichosos preceptos é infundadas novedades; (*) la reglamentacion, con su ineludible férula, marca el modo con que los conocimientos deben ser adquiridos; entre la aceptacion y el mandato, ó entre el lucro y el favor, se desenvuelven las obras que contienen los principios de la ciencia, medios á la verdad poco á propósito para una aceptable y racional exposicion de aquellos.

Impone toda produccion al autor ciertas ineludibles obligaciones, si ella ha de llenar y satisfacer las condiciones de trabajo intelectual. Buscamos sencillez en las obras de los autores más reconocidos y recomendables, y sus clasificaciones y subdivisiones ni son distintas ni están enlazadas de un modo natural y legítimo; en ellas no vé el espíritu con facilidad el encadenamiento de las partes, el motivo de cada una de ellas y la perfecta distincion de lo fundamental y secundario. Desconocemos la base de la division que existe entre las teorías designadas por los escritores con los

(*) Lacroix, Legendre, Vincent y Cirodde.

Siempre que mencionamos á este último favorecido autor, recordamos su famosa definicion de circunferencia de círculo, aceptada sin reparo alguno durante largo tiempo, hasta que fué corregida por su discreto traductor español.

nombres de *perpendiculares y oblicuas* y *paralelas*; es más, estamos convencidos que sólo el espíritu poco elevado de la rutina es la única razon que en pró de ello puede alegarse. El compilador Euclides trazó una ruta con sus *Elementos*, y este camino se ha seguido constantemente con escasas modificaciones; en vano es que cada dificultad no sea vencida en el momento mismo de su orígen, ni que se acepten como verdades axiomáticas, principios que necesitan rigurosa demostracion; las tradicionales frases se continúan repitiendo y un falso aparato sustituye al rigor en los teoremas.

No creemos que los medios de adquirir los conocimientos de una ciencia carecen de importancia si el objeto se realiza; en geometría tan cómoda opinion no puede tener partidarios más que en parte alguna; sus principios primeros necesitan revisarse y refundirse, y cuestion es esta que debe llamar la atencion de cuantos tienen aptitud para realizarlo. ¿Se sigue el precepto por nosotros recordado del ilustre Laplace? Examínese la teoría de la *medida de los ángulos en la circunferencia*, y respóndase despues; observemos la manera de considerar la *tangente* á está curva por la gran mayoría de los autores, y contéstesenos si dados los conocimientos de la época puede admitirse aquella. Los medios distintos para llegar á la posesion de la verdad son escasos y poco fecundos en la generalidad de los tratados, y en ellos aparece escluida toda consideracion de *movimiento*, idea no más compleja que la extension. Este movimiento geométrico, es decir, el movimiento abstraccion hecha del tiempo empleado en realizarlo, se acomoda perfectamente á la idea de extension y magnitud, pues precisamente por él llegamos á adquirir idea clara de éstas: nótase además que los mismos que rechazan el movimiento geométrico, le emplean realmente en casi todas las demostraciones de las verdades primeras, más ó ménos desfigurado.

Contribuir con nuestro débil esfuerzo á la reforma de la ciencia geométrica, es lo que motiva la publicacion de estos apuntes.

Madrid, Setiembre 1877.

J. R.

Expuestos de una manera rigurosa los principios fundamentales de la Geometría, suponemos demostrada la verdad siguiente:

—Todos los ángulos rectos son iguales.

Y como consecuencias:

—Por un punto de una recta, tan sólo puede pasar otra perpendicular á la primera.

—Dos rectas al cortarse forman cuatro ángulos, y de estos, dos cualesquiera adyacentes son suplementarios.

Recíprocamente:

—Si á dos ángulos suplementarios se les coloca de modo que confundiéndose sus respectivos planos, el vértice y uno de los lados de un ángulo coincidiendo con sus correspondientes del otro, se encuentran los otros dos lados en parte distinta del plano con relacion al lado coincidido, estos se hallarán en una línea recta.

O en otros términos:

—Si la suma de dos ángulos consecutivos es igual á dos ángulos rectos, los lados extremos están en línea recta.

—El valor límite de un ángulo, son dos ángulos rectos.

—La suma de todos los ángulos formados alrededor de un punto en un plano, es igual á cuatro ángulos rectos.

—Si dos rectas se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

—Las bisectrices respectivas de dos ángulos suplementarios, son perpendiculares.

I.

Recordados estos principios primeros de la Geometría plana, pasemos á la exposicion de nuestro trabajo.

Si dos rectas cualesquiera se cortan por una tercera, esta recibe el nombre de *secante ó transversal* de las dos primeras.

Este sistema de tres rectas origina ocho ángulos, que adquieren distinta denominacion, segun se tenga en cuenta para su clasificacion las dos primeras rectas, la secante ó todo el sistema.

El cuadro siguiente presenta esto con toda claridad.

Con relacion á las dos primeras rectas.... ángulos situados
- entre ellas.—*Internos*.......
- fuera de ellas.—*Externos*....

Con relacion á la secante. ángulos situados en.. el mismo.... diferente.... lado de la secante...

Con relacion al sistema. ángulos.
- internos
  - adyacentes... / no adyacentes — situados en.... el mismo / diferente lado de la secante — .... / *alternos-internos*.
- externos
  - adyacentes... / no adyaceutes — situados en.... el mismo / diferente lado de la secante — .... / *alternos-externos*.
- Uno interno y otro externo no adyacentes de diferente lado de la secante.. *correspondientes*..

A. Si dos rectas AB y CD al ser cortadas por la secante *ac*, se supone cumplen con una de las cinco relaciones siguientes:

$$\text{Ángulos....}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{alternos.}\left\{\begin{array}{l}\text{internos.}\\ \text{externos.}\end{array}\right.\\ \text{correspondientes..}\end{array}\right\}\text{iguales............}\\ \left.\begin{array}{l}\text{internos.}\\ \text{externos.}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\text{del mismo lado}\\ \text{de la secante..}\end{array}\right\}\text{suplementarios...}\end{array}\right\}\text{....(1)}$$

se verificará:

1.° Las cuatro restantes serán satisfechas.

2.° Las rectas AB y CD no pueden cortarse.

Lo primero se prueba inmediatamente fundándose en algunos de sus teoremas recordados.

Para lo segundo hemos de suponer móvil la parte izquierda de la figura con relacion á la secante, y fijando el punto medio *m* de la magnitud *ac*, hagamos girar aquella parte alrededor de este último punto, sin abandonar su plano durante este movimiento: al superponerse el punto *a* sobre el *c*, las dos partes de la figura total se habrán confundido, y de suponer que las dos rectas en cuestion se cortaban, al deshacer lo ejecutado, cuando la figura móvil vuelva á su posicion primitiva, encontrariamos al otro lado de la secante donde la supuesta interseccion se verificaba, otro segundo punto de la misma especie, y esta existencia simultánea de ambos puntos es opuesta á la naturaleza de la línea recta, que excluye que por dos puntos puedan pasar dos líneas distintas de esta especie.

Lo anteriormente recordado nos prueba que si una de las cinco relaciones (1) no se verifican, las otras cuatro tampoco se verificarán.

El anterior principio demostrado nos dá á conocer la existencia de *rectas situadas en un plano que no se encuentran*. De aquí la idea de *paralelismo* de las rectas y el designar con el nombre de *rectas paralelas* á las que satisfacen la condicion precedente.

Tambien podemos observar:

—Si se hace deslizar á un ángulo en su plano á lo largo de la prolongacion de uno de sus lados supuesta fija, el otro lado no conservará en cada una de sus posiciones sucesivas punto alguno de la precedente, y por ello estas posiciones serán paralelas.

De aqui el principio:

A′. Si dos rectas cualesquiera al ser cortadas por una secante cumplen con una de las condiciones (1), las rectas serán paralelas.

B. Por un punto c situado fuera de la recta AB, sólo puede pasar una recta paralela á la propuesta.

Supuesto unido el punto propuesto con otro a de la recta AB, al hacer que el ángulo $A'aB$ se deslice á lo largo de la ac, cuando a se superponga á c, el lado móvil aB habrá tomado *una* posicion paralela á AB.

De esta proposicion deducimos:

Ba. Si dos rectas son paralelas, toda recta que corte á una de ellas cortará tambien á la otra.

El método *ad absurdum* lo prueba inmediatamente.

Aunque es evidente la existencia de un sistema de dos rectas cualquiera cortadas por una tercera, secante ó transversal de las anteriores, porque siempre podemos considerar á esta última como el resultado de unir un punto de una con otro de la otra, y de aquí en particular la posibilidad de un sistema de dos rectas paralelas cortadas por una secante, esta proposicion confirma esta deduccion, y prueba la posibilidad del supuesto de la siguiente proposicion, recíproca de la (A).

A_1. Dos rectas paralelas AB y CD cortadas por una secante $A'c$, cumplen con una de las relaciones (1).

c. Dos rectas paralelas á una tercera, son paralelas entre si.

Se prueba trazando una secante que corte á las dos primeras, y por (Ba) cortará á la tercera.

Recíprocamente:

c_1 Si una recta es paralela á una de un sistema de dos paralelas, lo será tambien á la otra.

d. Si dos rectas se cortan, sus respectivas paralelas tambien se cortarán.

Y de este se deduce el siguiente:

da. Si dos rectas se cortan, sus respectivas perpendiculares tambien se cortarán.

Repitiendo lo hecho en (A) y en virtud de esta misma proposicion, al coincidir a con c el lado aB coincidirá con cD, y será $A'aB = A'cD$, y verificándose esta se verificará una cualquiera de (1).

De los ya enunciados, y consecuencia de ellos, se deducen los siguientes:

a. Dos rectas respectivamente perpendiculares á una tercera son paralelas.

De esta proposicion hacen partir varios autores la idea de paralelismo, para lo cual la enuncian bajo la forma siguiente:

a' Dos rectas respectivamente perpendiculares á una tercera no pueden encontrarse aunque se las prolongue indefinidamente.

b. Si una recta es perpendicular á otra, lo será tambien á la paralela de esta última.

De esta proposicion se deducen como consecuencias:

ba. Por un punto a fuera de una recta CD solo puede pasar una perpendícula aP á ella.

Pues de pasar dos aP y ac ellas tambien lo serian á aA, paralela á la propuesta, lo que se opone á uno de los principios recordados.

Tambien el principio (*b*) se enuncia diciendo:

b. Dos rectas paralelas han de ser perpendiculares á una misma recta.

bb. Dos rectas respectivamente perpendiculares á otras dos paralelas, son tambien paralelas.

baa. Si por un punto fuera de una recta pasan varias oblícuas á esta, ellas tendrán una perpendicular comun.

Observemos ahora que si la perpendicular P_1P al sistema de paralelas AB y CD, gira sin salir de un plano alrededor del punto a de tal modo que disminuya el ángulo recto P_1aB, y tome en este movimiento las dos posiciones C_2c_1 y $A'c$, tenemos las relaciones:

$$Cc_1a + cac_1 = AaC_2 + C_2aA' = 2 \text{ Rectos} - A'aB, \quad C_2aB = c_2aA' + A'aB,$$

ó lo que es lo mismo:

$$cc_1a + cac_1 < 2 \text{ Rectos.} \ (2) \quad ac_1D = cac_1 + acc_1. \ (3)$$

Además como

$$cc_1a + ac_1D + cac_1 + c_1aA' = 4 \text{ Rectos, en virtud de la (2) se tendrá;}$$

$$ac_1D + c_1aA' > 2 \text{ Rectos.} \ldots\ldots\ldots\ldots \ (4)$$

La relacion (2) nos dice que

C. Si dos rectas cA' y cD que se encuentran en c, se cortan por una secante c_1C_2, ellas formarán con esta del lado del punto de la interseccion de las dos primeras, dos ángulos internos cuya suma será menor que dos ángulos rectos.

Pero como si una cualquiera de las relaciones (1) no se cumple, las cuatro restantes tampoco quedan satisfechas, de aquí que podemos formular el anterior principio del siguiente modo, contrario del (A_1).

C′. Si dos rectas que se encuentran se cortan por una secante, este sistema de rectas no satisfará á ninguna de las relaciones (1).

El recíproco del (C) es el siguiente:

C_1. Si una recta C_2c_1 corta á otras dos $A'c$ y cD y forma con ellas ángulos internos del mismo lado de la secante no suplementarios, estas dos últimas rectas se encontrarán, y su punto de interseccion se hallará con relacion á la primera, del lado en que la suma de los citados ángulos es menor de dos rectos.

En primer lugar, las ultimas rectas del enunciado se cortarán, pues de no cortarse serian paralelas, y en este caso (A_1), formarian ángulos internos del mismo lado de la secante que serian suplementarios, lo que es contrario al supuesto. Además, de encontrarse su punto de interseccion al otro lado de la secante que indica el enunciado, por el principio directo se deberia tener

$$ac_1D + c_1aA' < 2 \text{ Rectos},$$

conclusion que es opuesta á lo que establece la relacion probada (4); luego la hipótesis que á ella nos ha conducido es falsa, y por tanto la segunda parte del principio enunciado es cierta (*)

Este principio le podemos formular diciendo:

C'_1. Si dos rectas cortadas por una tercera no satisfacen á una de las relaciones (1) las dos primeras rectas se cortarán.

Proposicion contraria á la (A′).

De los principios establecidos en (A′, A_1, C′, C'_1) se deduce que una cualquiera de las relaciones (1) es necesaria y suficiente para el paralelismo de dos rectas: la traduccion de cada una de estas relaciones al lenguaje vulgar, constituyen otras tantas definiciones de dos rectas paralelas.

Como caso particular del último principio se tiene.

(*) Este principio no es otro sino el famoso *Postulado de Euclides*, impropiamente así llamado, pues en la Geometría de este matemático griego ocupa el número XII y último de sus *axiomas*.

La mayor parte de los autores admiten sin demostracion este principio fundando y deduciendo de este otros varios. Esta marcha, tan poco conforme con el rigor filosófico que debe presidir á todo lo referente á la ciencia matemática, reconoce por causa sin duda alguna, el considerar las diversas demostraciones que de él se han imaginado como inadmisibles por varios conceptos. Entre las más notables que podemos citar se hallan las de Clavio (lib. I. prop. 28), Tacquet (lib. I. prop. 31) y la ideada por nuestro literato y matemático Lista.

c_1. Dos rectas, AB y c_1t, la primera perpendicular y la segunda oblícua á una misma recta PP_1, no son paralelas, y por tanto prolongadas suficientemente se deben encontrar.

Esta proposicion es para algunos autores el ***Postulado de Euclides***; para los que conocen su enunciado tal como nosotros lo hemos presentado, que es como le hemos visto enunciado en las más autorizadas traducciones de las obras de aquel autor, no hay dificultad alguna en aceptar este enunciado particular, presentado quizá bajo esta forma para hacer más palpable su pretendida evidencia; pero el que procede en órden inverso, es decir, aquel que conoce el particular y llega á poseer despues el conocimiento del verdadero y más general, necesita ver cómo de aquel depende este.

Esto se ve al momento, trazando por a una secante cualquiera c_1C_2 y por c_1 una paralela c_1c' á PP_1; tenemos de este modo:

$$Bat = Bac_1 = tac_1. \qquad atB' = c'c_1t = ac_1c' + ac_1t.$$

Sumando y observando que $tac_1 = ac_1t$, tendremos,

$$Bat + atB' = Bac_1 + ac_1c'.$$

D. Dos rectas paralelas al ser cortadas por una secante forman ocho ángulos, cuyas bisectrices satisfacen á las siguientes relaciones:

$$\text{ángulos}\ldots\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{alternos}\ldots\left\{\begin{array}{l}\text{internos}\ldots\\ \text{externos}\ldots\end{array}\right.\\ \text{correspondientes}\ldots\ldots\end{array}\right\}\text{paralelas.}\\ \begin{array}{l}\text{internos}\ldots\\ \text{externos}\ldots\end{array}\left\{\begin{array}{c}\text{del mismo lado}\\ \text{de la secante}\ldots\end{array}\right\}\text{perpendiculares.}\end{array}\right.$$

de cumplirse una se verifican las demás, é inversamente.

Por los principios ya recordados y probados se deduce la verdad de esto.

E. Las partes mn y pq correspondientes á dos rectas paralelas AB y CD interceptadas por otras dos paralelas ab y cd, son iguales.

Uniremos los puntos m y q, é indicaremos el punto medio m_1 de esta magnitud mq; si hacemos ahora, que alrededor de este punto gire sin abandonar su plano toda la parte izquierda de la figura con relacion á esta última recta trazada, cuando el punto m coincida con el punto q, las rectas ab y AB habrán coincidido respectivamente con las *cd* y CD, (A_1), y por tanto, el punto p perteneciendo á las dos primeras habrá tenido que coincidir con el de interseccion n de las dos últimas: así, las magnitudes mn y pq que tienen sus extremos coincidiendo, coincidirán en todos sus puntos, siendo por consecuencia iguales.

Como hubiéramos podido hacer con algun otro principio de los que anteceden, ampliemos el anterior.

Si en vez de las dos paralelas AB y CD cortadas por *ab* y *cd*, tienen un sistema de varias paralelas AB, A′B′, A″B″... cortadas por estas dos últimas, probariamos, segun el principio anterior, la verdad de las igualdades siguientes:

$$mn=m'n',\ m'n'=m''n'',\ m''n''=m'''n'''...,$$

y por tanto,

$$mn=m'n'=m''n''=m'''n'''...$$

Con esto podriamos pasar al caso de varias rectas paralelas que cortan á otras varias de la misma especie.

Tendremos así:

E′. Las partes de las paralelas interceptadas por otras paralelas son iguales.

E_0. Si por dos puntos n y q de la recta *cd* se trazan dos paralelas AB y CD, y á partir de ellos se toma sobre estas últimas y en la misma direccion, ó lo que es igual, en el mismo lado con relacion á la propuesta, una magnitud arbitraria pero la misma en las dos, los puntos m y p así determinados se encontrarán sobre una recta *ab* paralela á la propuesta.

Podremos demostrar este recíproco del (E) por medio del giro alrededor del punto m_1, como en la demostracion de la proposicion directa, pues al hacer girar la figura Dmq alrededor de m_1, ella coincidirá con Dmn cuando D coincida con m (A_1), y por tanto se verificará mDn=Dmp, luego (A′), las rectas *ab* y *cd* serán paralelas.

Ampliemos este principio diciendo:

E'_0. Si por los diversos puntos m, m', m'', m''', ..., de una recta *ab* se trazan varias rectas paralelas AB, A′B′, A″B″, A‴B‴, ..., y á partir de estos puntos y en una misma direccion, se toma sobre este sistema de paralelas una magnitud cualquiera, pero constante para todas ellas, los puntos n, n', n'', n''' que resultarán de este modo se hallarán sobre una paralela *cd* á la propuesta.

Demostrado para las dos rectas AB y BC, vamos á probar que será igualmente cierto para tres, y de esto deduciriamos que lo será para cuatro, y así sucesivamente, siendo por tanto cierto el principio para un número cualquiera de rectas paralelas.

Sean las tres paralelas AB, CD, y A′B′; en primer lugar, la A′B′ será cortada por la recta que une los puntos *n* y *q* (B*n*), y supongamos sea *n′* este punto de interseccion, punto que aplicando el principio para las solas dos paralelas AB y A′B′ debe estar determinado tambien por la relacion $mn = m'n'$. Así, el punto de interseccion de la A′B′ con la *nq* es tambien el que resultaria de tomar sobre la primera de estas á partir del punto *m′* y en la direccion A′, la magnitud constante para las otras dos AB y CD.

Hemos de observar que si *ab* y *cd* son dos paralelas, para todo punto tal como B ó D′ situado fuera ó en el interior de ellas, suponiendo trazadas sus respectivas paralelas BA y D′A′ á la CD, resultarán las magnitudes B*n* y D′*n′* desiguales á la *pq*.

Así vemos que *ab* es la recta formada por los dos puntos que perteneciendo á un sistema de paralelas, gozan de la propiedad de ser respectivamente un extremo de una magnitud constante sobre ellas, siendo sus puntos respectivos de interseccion con *cd* el otro extremo de las mencionadas rectas.

Dedúcese de esto que la cuestion de hallar un punto *m* tal que contado sobre una recta de direccion conocida AB, se verifique que $mn = l$, siendo *l* una magnitud dada, será un problema indeterminado, pues todos los puntos de la paralela *ab* á la *cd* trazada por el punto *m* satisfacen á la cuestion; este *conjunto de puntos, que tienen una propiedad comun ó soluciones de una misma cuestion*, es lo que recibe el nombre de *lugar geométrico*.

Cuando por un punto *p* pasan diferentes rectas *p*A, *p*P, *p*A′, *p*A″,... que cortan á una misma recta MN en los puntos respectivos A, P, A′, A″..., estos toman el nombre de *pie* de las rectas mencionadas, denominándose tambien *longitud* de cada una de ellas para este punto *p* y esta recta MN, á las magnitudes respectivas de las rectas comprendidas ó limitadas por el punto propuesto *p* y su pie correspondiente:

Suele decirse por abreviar que *la recta p*A *es menor que la p*A″, en vez de decir, la longitud de la recta *p*A es menor que la longitud de *p*A″.

F. Si por un punto *p* situado fuera de una recta AA″ pasan las diferentes rectas *p*A, *p*P, *p*A′, *p*A″, que cortan todas á la primera, se verificarán las relaciones siguientes para sus longitudes respectivas, así como para los ángulos que ellas forman con su perpendicular comun *p*P ó con la propuesta:

1.° Si $PA=PA''$, se tendrá $pA=pA'$, $ApP=A'pP$, $pAP=pA'P$.

2.° » $PA<PA''$ » $pA<pA''$, $ApP<A''pP$, $pAP>pA''P$,

3.° » $ApP=1$ Recto » $pA>pP$ » $pAP<pPA$.

Fα. 1.° Supongamos que la figura pPA' abandona su posicion, y girando á lo largo de la pP venga á caer del otro lado de esta última recta, coincidiendo en este caso el punto A' con A; como el punto p no ha cambiado de posicion durante el movimiento por pertenecer al eje de giro, resulta que las magnitudes pA' y pA teniendo sus extremos confundidos serán iguales, y toda la figura móvil ha coincidido con la pPA; por tanto queda con esto probada esta primera parte.

Deducimos de ello:

Fαa. La bisectriz pP del ángulo de las oblícuas iguales pA y pA' satisface á las condiciones siguientes:

1.° Pasa por el punto medio de la magnitud AA'.

2.° Es perpendicular á la direccion AA'.

Fαb. Si por un punto A del lado de un ángulo ApA' se traza una perpendicular AA' á su bisectriz pP, aquella cortará al otro lado pA' en un punto A', verificándose las relaciones siguientes:

$$PA=PA',\ pA=pA',\ pAP=pA'P.$$

Las rectas AA' y pP se cortarán; pues siendo $ApA'<2$ Rectos, se tiene

$$A'pP<1 \text{ Recto y } A'pP+A'Pp<2 \text{ Rectos.}$$

Para probar los demás que deseamos, haremos como hemos procedido en (Fα).

Fαc. Si dos rectas indefinidas se cortan por una secante y cumplen con una de las cinco relaciones:

ángulos...
- internos....... } del mismo lado... } iguales.
- externos....... } de la secante..... }
- alternos....... { internos..... } suplementarios.
- alternos....... { externos..... }
- Correspondientes............ }

tendremos:

1.° Las cuatro restantes tambien se verificarán.

2.° Las dos rectas primeras se cortarán y las partes de ellas comprendidas entre el punto de interrupcion y la tercera, serán iguales.

$F\beta$. 2.º Determinaremos sobre la AA'' á partir del punto P y á distinto lado de este, un punto A' por la condicion, $PA'=PA$, y uniremos este con p: como evidentemente $A'pP<A''pP$ y por lo anterior, $A'pP=ApP$, se tendrá

$$ApP<A''pP.$$

De la relacion (3) se obtiene $pA'P=A'pA''+pA''P$ y por tanto $pA'P>pA''P$: mas como tenemos por lo dicho $pAP=pA'P$, se deduce que,

$$pAP>pA''P.$$

Tracemos la bisectriz pP_1 del ángulo ApA'', y por lo que hemos dicho, $ApA''>2.ApP$, y para sus mitades se verificará, $ApP_1>ApP$, es decir, que ella estará colocada con relacion á pP en el mismo lado que A'': si por A trazamos la perpendicular á pP_1, la cual cortará á esta y á pA'' respectivamente en n y n'; ($F\alpha b$) cualquiera que sea la posicion del primero de estos dos puntos con relacion á las rectas de la figura, tendremos que siendo $pnn'=pPA''$, será

$$ApP_1+pAn=ApP+pAP,$$

y por la última desigualdad tendremos, $pAn<pAP$, y por tanto el punto n deberá hallarse en la parte superior de AA''; con esto se tendrá,

$$pn'=pA<pA''.$$

($F\beta a$.) Desde un punto p fuera de una recta AA' sólo se pueden trazar dos oblícuas á ella y tales que $pA=pA'$, estando situadas á uno y otro lado de la perpendicular pP.

Esta verdad nos manifiesta la posibilidad de la recíproca de la ($F\alpha$) que se prueba inmediatamente y enuncia diciendo:

$F_0\alpha$. Si dos oblícuas pA y pA' á una misma recta AA' parten de un mismo punto, y se verifica que $pA=pA'$, ellas satisfarán tambien las relaciones $PA=PA'$, $ApP=A'pP$, $pAP=pA'P$.

Hemos de observar con esto que cumpliéndose una cualquiera de las relaciones establecidas en (F) correspondientes á ($F\alpha$.), las restantes tambien se cumplen, constituyendo así las proposiciones que pudieran originarse, otros tantos teoremas recíprocos de este.

$F\beta b$. Observemos que siendo $pA''>pA$, con mayor razon se tendrá,

$$pA<pA''+AA''\ldots(5) \text{ ó } pA''>pA-AA''\ldots(6)$$

1.° Si $PA=PA''$, se
2.° » $PA<PA''$
3.° » $ApP=1$ Rect

Fα. 1.° Supongan
y girando á lo largo d
última recta, coincidie
el punto p no ha camb
pertenecer al eje de g
teniendo sus extremos
ra móvil ha coincidid
probada esta primera

Deducimos de ello

Fαa. La bisectriz
pA y pA' satisface á la
1.° Pasa por el pu
2.° Es perpendicul

Fαb. Si por un pun
una perpendicular AA
lado pA' en un punto A

$$PA=P$$

Las rectas AA′ y p
se tiene

$$A'pP<1 \text{ R}$$

Para probar los d
procedido en (Fα).

Fαc. Si dos rectas
cumplen con una de l

ángulos... interno / externo / alterno / Corresp

tendremos:
1.° Las cuatro rest
2.° Las dos rectas
comprendidas entre e
iguales.

Fβc. La parte de recta pP_1, que une dos puntos, es menor q
la poligonal convexa $pr'A'P_1$ que termina en los mismos.

Tenemos las desigualdades $pP_1<pA'+A'P_1$, $pA'<pr'+r'$
luego evidentemente $pP_1<pr'+r'A'+A'P_1$ (*).

La combinacion de los principios (Fαa) y (Fαb) da orígen á
principios siguientes.

Fαd. La recta pP que une el vértice del ángulo ApA' co
punto medio P de la magnitud AA′, es perpendicular á est
bisectriz de dicho ángulo.

Fαe. La perpendicular pP que pasa por el punto medio de
magnitud AA′, pasa por el vértice del ángulo ApA' y la divide
dos partes iguales.

Fαf. La perpendicular trazada á AA′ desde el vértice del
gulo ApA', divide á este y á la magnitud primera en dos pa
iguales.

Fαg. Si por el punto A de la recta AA′ determinado po
relacion $PA=PA'$, se traza una recta Ar tal que $PAr=PA'p$, e
pasará por el punto de interseccion de $A'p$ y pP, verificándose
relaciones $Ap=A'p$, $ApP=A'pP$.

Fαh. Si por dos puntos A y A′ de una misma recta se tra
oblícuas Ar y $A'r$ á esta, y tales que satisfagan la relacion rAA
$pA'A$, estas oblícuas al cortarse en un punto p verificarán la
lacion $Ap=A'p$.

Fγ. 3.° Puesto que por la relacion (3) tenemos

$$pPA=pPA'=pAP+ApP, \text{ será } pAP<APp,$$

si se traza ahora la bisectriz pQ del ángulo ApP, y por P la
pendicular Pr á aquella, estas dos se cortarán y cortará á
r (Fαb) y razonando como en (Fβ), tendremos

$$pr=pP<pA.$$

(*) Del mismo modo se procederia para una línea poligonal de ma
número de lados, y la proposicion siguiente es un caso particular de
más general que despues mencionaremos.

—Si de un punto á otro se considera una línea poligonal convexa co
puesta de rectas colocadas en tal disposicion, que una cualquiera prolo
da no penetra en el interior de la figura, la suma de estas rectas será
nor que la correspondiente á otra de la misma especie que termina en
puntos citados, situada fuera de aquella, y en la misma parte que
análoga, con relacion á la recta que une sus estremidades.

Sólo consignamos en este lugar este principio por ser una apl
cion de la verdad precedente y hallarse mencionada por algun autor;
adelante mencionaremos una proposicion más general.

De la igualdad anterior á esta y de (C_1) obtenemos:

Fγa. Si dos rectas forman un angulo agudo, la perpendicular
zada desde un punto de una de ellas á la otra, estará situada
parte en el interior del ángulo mencionado.

La recíproca de la proposicion (Fβ) se demuestra inmediata-
nte y puede enunciarse en los siguientes términos:

$F_0\beta$. Si dos rectas oblícuas pA y pA'' á una misma recta AA″,
rten de un mismo punto p y son tales que $pA<pA''$, satisfarán
nbien las condiciones: $PA<PA''$, $ApP<A''pP$, $pAP<pA''P$.

Notaremos aquí lo mismo que en ($F_0\alpha$).

Observaremos que las diversas oblícuas á una recta que pasan
r un mismo punto, dan lugar á longitudes de valor diferente,
ro todas ellas pueden tener otro valor igual que corresponderá
otra posicion colocada á diferente lado de la perpendicular tra-
da por el punto á la recta. Vemos tambien que la correspon-
nte á esta posicion particular es la menor y única para cuantas
ctas pasen por un mismo punto y corten á una recta. Por esta
zon á esta magnitud menor se la ha tomado para indicar *la dis-
ncia de un punto á una recta.* Así:

Fγb. La parte de perpendicular á una recta trazada por un
nto fuera de ella, comprendida entre este y el de su intersec-
n con la primera, es la que mide la distancia del punto á la
cta.

La aplicacion de esto al principio (E_0) nos da:

G. Dos rectas paralelas tienen todos los puntos de la una equi-
tantes de los de la otra.

Ga. El lugar geométrico de todos los puntos de un plano que
 igualmente de una recta, es otra paralela á esta.

Hs. La perpendicular pP que pasa por el punto medio P de la
gnitud AA′ tiene todos sus puntos equidistantes de A y A′, y to-
punto p' que no pertenezca á la primera no gozará de tal pro-
edad, siendo la distancia menor la que corresponde á la estre-
dad situada en el mismo lado que p' con relacion á la pP.

La primera parte es una consecuencia de (Fα.) Para la segun-
la relacion (5) da

$$p'A'<pp'+pA' \text{ ó } p'A'<p'A.$$

De aquí lo siguiente:

Ha. El lugar geométrico de todos los puntos de un plano equi-
stantes de otros dos, es la perpendicular á la recta que une es-
s dos puntos y pasa por el punto medio de la parte de recta
terceptada por ellos.

Hb. Si dos rectas se cortan y un punto de una equidista de otros dos de la otra, un segundo punto de la primera equidistará tambien de los dos mismos puntos anteriores de la segunda, y por tanto las propuestas serán perpendiculares.

El recíproco puede enunciarse del siguiente modo:

H_0b. En dos rectas perpendiculares, cada una es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de todos los sistemas de á dos puntos situados en la otra, y á distinto lado cada uno de la primera.

I. Si se une el punto p (fig. 4) exterior á un ángulo ADB con otros dos A y a correspondientes á cada uno de sus lados, de tal modo que $pA=pa$, la relacion $pAD=paB$ no puede verificarse.

De ser ello así, observando que si unimos A con a, se tendrá,

$$pAD=pAa-aAD, \quad paB=paA+AaB,$$

y restando de la primera la segunda, resultará:

$$pAa=paA+AaB+DAa;$$

pero por ($F_0\alpha$) se tendria tambien $pAa=paA$, resultados incompatibles; luego la hipótesis no es aceptable y de aquí la verdad del principio.

Ia. Si en la hipótesis se tuviera $pAD=paB=1$. Recto, de este caso particular se deduciria que:

—Un punto exterior á un ángulo no puede equidistar de sus lados.

J. Todo punto P′ (fig 3) de la bisectriz pP' del ángulo ApA' equidista de sus lados, y todo punto interior que no pertenezca á la bisectriz distará desigualmente de aquellos, siendo menor la distancia que corresponde al lado del ángulo situado al mismo lado que dicho punto con relacion á la bisectriz.

Trazaremos por P′ la perpendicular P′A y por este punto A así determinado la AA′ perpendicular á la bisectriz, uniendo por último P′ con A′; tenemos las relaciones, (Fαb.),

$Ap=pA'$, $pAP=pA'P$, y por estas, ($F_0\alpha$),

$AP'=P'A'$, $PAP'=PA'P'$;

sumando la segunda con la cuarta será $pAP'=pA'P=1$ Recto, y esta y la tercera prueban la primera parte de la proposicion.

Para la segunda siendo el mismo ángulo y el punto P_1, trazaremos desde este las perpendiculares respectivas P_1A y P_1a á los lados del ángulo; de estas dos perpendiculares, la correspondiente al lado distinto del punto con relacion á la bisectriz pP'

cortará á esta última recta, es decir, en la disposicion de nuestra figura la P_1A cortará á pP; por la relacion (3) se tiene $A_1AP_1 = 1$. Recto$=A_1pP_1+AP_1p$, y como $A_1pP_1>P'pP_1$, tendremos $P'pP+AP_1p<1$ Recto, condicion para que se verifique dicha interseccion, (C_1). Determinado este punto P' trazaremos la perpendicular $P'A'$ al lado pA' del propuesto, y uniremos además A' con P_1; tendremos así las relaciones (Fγ.), (F. β. *b*.)

$P_1a<P_1A'$, $P_1A'<P_1P'+P'A'$; y por la primera parte

$$PA'=P'A, \text{ luego se tendrá, } P_1a<P_1A.$$

Con esta proposicion y la anterior podemos decir:

Ja. La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de sus lados.

Las proposiciones (*d*) y (*da*) prueban la posibilidad del siguiente enunciado.

K. Los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, son iguales ó suplementarios.

La primera parte de la proposicion dá lugar á que podamos presentar tres grupos distintos de á dos ángulos, á los cuales pueden referirse todas las posiciones de este género. Estos son (*fig* 2),

$$a'm_1A',\ mpD;\ a'm_1A',\ Bnd;\ a'm_1A',\ amB.$$

Para el primer grupo, prolongando el lado $a'm$ del primero hasta que corta en b' al otro lado pD del segundo ángulo (B*a*), estableceremos las relaciones (A_1), $a'm_1A'=a'b'D=mpD$.

Para el segundo, procediendo como en el primero y apoyándonos en los mismos principios, será $a'm_1A'=Ba'b'=bnd$.

Finalmente, para el tercero, prolongando el lado m_1A' del primero hasta que corta al lado am del segundo ó á su prolongacion en m' será $a'm'A'=am'A'=amA=$ 2 Rectos$-amB$.

Conclusiones que pueden traducirse al lenguaje vulgar.

(*Fig*. 3.ª) Para la segunda parte consideraremos los casos generales que pueden ocurrir. Cuando el vértice del uno sea interior al ángulo del otro, A_1pa' y AP_1a: siendo exteriores sus vértices respectivos, $A'An'$ y $P'pP_1$; y por último que siendo exteriores, un lado del primero corte otro del segundo y el segundo de aquel á la prolongacion del otro lado del segundo ángulo, $a'tn'$ y aP_1p.

En la primera posicion tenemos las relaciones (3),

$$a'aP_1= 1 \text{ Recto}=a'Pp_1+aP_1p,$$

$A_1AP_1=1$ Recto$=A_1pP_1+AP_1p$, y sumando resulta

$$A_1pa'+AP_1a=2 \text{ Rectos}.$$

En el segundo caso la misma relacion (3)

$$APP'=1 \text{ Recto}=At'P'+A'An'$$

$$pnn'=1 \text{ Recto}=n't'p+P'pP_1$$

Estableciendo la igualdad entre los segundos miembros de estas segundas igualdades y reduciendo se tiene:

$$A'An'=P'p\,P_1.$$

Finalmente, en el último caso, probariamos como antes que $Ata+aP_1p=2$ Rectos, y por tanto será Ata suplemento de los propuestos; luego

$$a'tn'=aP_1p. \text{ (*)}$$

L. Si desde un punto B (*fig.* 1) se traza una perpendicular BA y una oblícua Bc_1 á una misma recta PP_1, originándose con esto los puntos de interseccion a y t, y tomamos el punto medio de la magnitud Bt le unimos con a, se verificará la relacion $Bm=am=tm$.

Puesto que (3)$Bat=Aat=aBt+atB$, si trazamos por a una recta aD que cumpla con la condicion $Dat=atB$, como (3) $Aat=atB+aBt$, y $Aat=taB$, tendremos, $DaB=aBt$, luego por el principio ($F\alpha h$) el punto de interseccion de AD con tB' tendrá

(*) No deja de chocarnos la extraña clasificacion que en este punto hacen algunos autores.

Consideran los casos de que los ángulos sean los dos agudos, obtusos y uno agudo y otro obtuso; al aplicar por tanto estos principios habrá que hacer la prévia designacion de la especie de los ángulos, cosa á la verdad que sobre innecesaria es poco factible en varios casos, pues trazadas las figuras en una pizarra con la imperfeccion consiguiente, no sabremos si la especie que pueda resultar para cada uno de ellos sea producida por la imperfeccion del trazado ó no. Las demostraciones que hemos dado en cada uno de los casos de estas dos partes de la proposicion son independientes entre sí, probando con esto que puede darse principio por una cualquiera de ellas y no ser necesario un órden fijo y determinado de ellas. El no proceder de este modo la mayoría de los autores hace producir en el ánimo del que estudia la idea, que sólo el órden establecido por aquel autor es el único que puede seguirse en la exposicion de la doctrina.

que ser el punto medio m de esta última magnitud y satisfacer á la relacion que se queria probar. Tenemos con esto que

La. El punto medio de la magnitud tB, equidista de los tres puntos B, a, t producidos por la interseccion dos á dos de las tres rectas del sistema.

M. Si desde un punto a de una recta AB se traza una perpendicular aP y una oblícua ac_1 á la CD paralela á la primera, y por el punto c_1 así determinado, una oblícua c_1B á AB y tal que para los puntos de interseccion con esta última y con la $a\mathrm{P}_1$ designados respectivamente por B y t, y el punto medio m de la magnitud tB, se verifique la relacion $t\mathrm{B} = 2\, ac_1$, tambien se verificará $ac_1\mathrm{P} = 3.\mathrm{B}c_1\mathrm{P}$.

En primer lugar es posible que se cumpla la relacion supuesta, pues por el principio (C'_1) las rectas aP y c_1B se cortarán. Uniendo a con m, por el principio anterior tenemos,

$$ac_1 = am = \mathrm{B}m = tm_1.$$

Recordando ($\mathrm{F}_0\alpha$), (I) y (A_1) se tendrá, $ac_1\mathrm{B} = amc_1 = 2.\ a\mathrm{B}c_1 = 2.\mathrm{B}c_1\mathrm{P}$, y por consiguiente si añadimos á ambos miembros de la relacion el ángulo $\mathrm{B}'c_1\mathrm{P}$, obtendremos lo que se queria probar.

N. Si se unen los puntos B y C (*fig.* 4) de una recta con otros dos A y D situados al mismo lado de la primera, las relaciones AB=DB, AC=DC no pueden verificarse.

De ser ello así, uniendo A con D se tendrá:

$$\mathrm{BAD} = \mathrm{BDA},\ \mathrm{DAC} = \mathrm{CAD};$$

pero por la figura, $\mathrm{BAD} > \mathrm{DAC}$, $\mathrm{BDA} < \mathrm{CAD}$.

Resultados incompatibles con las igualdades anteriores, luego el supuesto es falso.

n. En el caso particular de tenerse para los puntos A, a, las relaciones compatibles con la verdad de la proposicion anterior, AB=aC, aB=AC, es fácil de ver que la recta Aa que une aquellos será paralela á la BC.

Efectivamente; desde A y a bajemos las perpendiculares respectivas AP y aP′ á BC, y tendremos (G), AP=aP′: tomemos ahora sobre esta última recta un punto P_1 determinado por la relacion $\mathrm{PP}_1 = \mathrm{PB}$, y uniéndole con A, se tiene $\mathrm{AP}_1 = \mathrm{AB} = ac$.

Si suponemos segregada de la figura la parte aCP′, y hacemos que sin abandonar su plano se mueva á lo largo de P_1B hasta que P′ coincida con P_1, en cuyo caso por lo precedente, el punto a coincidirá con A y el C con P_1, pues caso de no verificarse esto último y ser b la posicion de P_1, se tendria $\mathrm{A}b = a\mathrm{C} = \mathrm{AB} = \mathrm{AP}_1$, resultado absurdo por la proposicion (Fβa); por tanto, coincidiendo C con P_1, la figura móvil se habrá confundido con APP_1, luego aCB=AP_1B, y así (A') las dos rectas aC y AP son paralelas é iguales, luego (E_0) Aa y BC son tambien paralelas.

Dedúcese tambien (Fαh) que las dos rectas AB y ac se cortarán en un punto p tal que Bp=pC, y por lo tanto, Ap=pa.

n'. Otro caso particular se nos presenta y es cuando entre los puntos p y a' se verifican las relaciones, tambien compatibles con la conclusion de la proposicion principal, a'B=a'C, pB=pC, y en este caso por la proposicion (Ha) la recta pa' y BC son perpendiculares.

De la conclusion del primer caso particular se deduce:

na. Si dos rectas paralelas Aa y BC interceptan dos magnitudes AB y aC que cumplen con la condicion AB=aC, perteneciente á dos rectas que se cortan en p, tambien se verificarán las relaciones pB=pC ó pA=pa.

Como los razonamientos que hemos hecho para llegar á esta proposicion han sido independientes de la posicion del punto p con relacion á las paralelas Aa y BC, y por tanto, cuanto hemos dicho tendrá aplicacion al caso de cortarse las rectas AB y aC en la parte de plano comprendido entre las paralelas: puede probarse esto directamente.

En efecto, sean ab y cd (*fig.* 2) las paralelas y las magnitudes $pq=m''d$ que se cortan en el punto r; tracemos por m'' la paralela $m''n''$ á pq, y será $m''n''=pq=m''d$, luego ($F_0\alpha$) (Fαh), $m''dn''=m''n''d=pqd$, luego $rd=rq$ ó $m''r=pr$.

Recíprocamente.

n_0a. Si dos rectas que se encuentran, Bp y pC ó $m''d$ y pq (*figs.* 4 y 2), en p para un caso y en r para el otro, se cortan por una tercera BC ó qd, y se verifica pB=pC ó $rd=rq$, tomando un punto A ó m''en una de estas magnitudes y trazando por él una paralela Aa ó $m''p$ á la BC ó qd, obteniendo en la otra magnitud el punto a y p, se verificarán las relaciones Ap=pa, AB=aC ó $rd=rq$, $rm''=rp$.

Su demostracion se obtiene inmediatamente.

O. Si dos ángulos BaC y BA'C (*fig.* 4) tienen sus lados dirigidos en sentido contrario, cortándose dos á dos en los puntos B y C, teniendo el segundo su vértice en el interior del primero, y verificándose por último las relaciones Ba=A'C, aC=A'B, deduciremos que las rectas que indican los primeros miembros de estas son respectivamente paralelas á las expresadas por los segundos.

Si suponemos que la parte del BA′C gire á lo largo de BC hasta que se superponga sobre la parte superior BAaC, el punto A′ tomará una posicion A tal que uniéndole con a la recta aA seria paralela á la BC (n), y por lo mismo aCB=ABC. Vuelta la figura móvil á su primera posicion y teniendo la relacion acB= A′BC, las rectas ac y A′B serán paralelas é iguales (A′) y por tanto (E_0) las aB y A′C tambien serán paralelas.

P. Si dos ángulos BpO y AaB son tales que cada lado de uno corta á los otros dos, dando lugar á los puntos a', m, A, B de interseccion y se unen estos por medio de rectas a'A, mB, se verificara:

1°. Estas dos últimas rectas se cortarán.

2.° El punto de interseccion se hallará en la parte de plano limitado por el sistema de rectas AB, Ba', $a'm$ y mA.

Para ello la relacion (3) dá,

$Bmp < 2$ Rectos, $Bmp = a'Bm + Ba'm$

y como

$ma'B > Aa'B$, será $a'Bm + Aa'B < 2$ Rectos,

relacion que no sólo nos expresa que Aa' y Bm se cortan (C'_1) sino que esta interseccion se verifica del lado de los puntos A y m con relacion á a'B. Del mismo modo podriamos deducir sucesivamente que la citada interseccion debe verificarse de la parte de los puntos m y a' con relacion á la AB del lado de los a' y B respecto á Am, y con relacion á ma del lado de los B y A; estos resultados distintos sólo son compatibles verificándose la interseccion donde indica la segunda parte.

Dedúcese inmediatamente de aquí el siguiente principio:

Q. Si tenemos una recta BD y dos puntos fuera de ella y situados cada uno á distinto lado, A y C, la recta que une estos y la propuesta satisfarán las condiciones siguientes:

1.° Ellas se cortarán, en a'.

2.° Su punto de interseccion a' estará comprendido entre los a y B puntos de interseccion de la primera con un sistema cualquiera de dos paralelas que pasan por los puntos A y C.

Para ello consideremos unidos A y B, a y C, y el principio se deduce enseguida por el principio anterior.

R. Si los lados de los ángulos BpC y BDC se cortan en los puntos B y C estando sus vértices al mismo lado de la recta BC y exterior uno á otro, la suma de los lados pB y DC que no se cortan será menor que la de los otros dos pC y BD en que esto se verifica.

El punto a de interseccion existirá para tales ángulos, pues los puntos p y C estarán siempre á distinto lado de BD; ahora por la proposicion (F. β. *b*.) tenemos,

$pB < pa + aB$, $DC < aC + aD$, y sumando se tiene,

$pB + DC < pC + BD$.

R. Si los dos ángulos $pA''P_1$ y $pA'P_1$ (*fig* 3.ª) son tales que cortándose sus lados en los puntos p y P_1, tiene el segundo de ellos su vértice en el interior del primero, unimos por una recta $A'A''$ sus vértices y por uno de los puntos p, trazamos la perpendicular pP á esta última, si $PA' < PA''$, se tendrá $pA' + A'P_1 < pA'' + A''P_1$.

Esto se deduce inmediatamente: si $PA' < PA''$, se tiene (F. β.), $pA' < pA''$; además (F. β. *b*.), $A'P_1 < A'A'' + A''P_1$ y por tanto, $pA' + A'P_1 < A'A'' + pA'' + A''P_1$; luego con mayor razon se verificará la que nos proponiamos probar.

Lo mismo se probaria cuando los vértices de los ángulos ApA' y AP_1A' estuviesen á lado distinto de la recta AA' que une los puntos de interseccion.

Tendremos que despues de haber trazado por A la perpendicular An á la recta pP_1 que une los centros, si $np > nP_1$, será $AP_1 < Ap$, y $P_1A' < pA' + pP_1$, luego

$AP_1 + P_1A' < Ap + pA' + pP_1$,

y por tanto con más motivo, $AP_1 + P_1A' < Ap + pA'$.

El primer caso considerado es lo que los autores enuncian diciendo:

—Dos líneas poligonales convexas compuestas de dos rectas que terminan en los mismos puntos, la línea envolvente es mayor que la envuelta.

De esto podriamos probar tambien que,

—Toda línea poligonal convexa compuesta de un número cualquiera de rectas, es menor que otra de la misma especie y tambien de un número cualquiera de rectas que envolviendo á la primera terminen ambas en los mismos puntos.

II.

De las proposiciones probadas se deducen los siguientes principios, con sólo modificar el enunciado ó aplicarlos inmediatamente sin ninguna otra demostracion. El buen talento de nuestros lectores suplirá las referencias que pudiéramos hacer.

Circunferencia.

—Una recta ó una circunferencia no pueden tener contactos con otra circunferencia más de dos puntos.

—El diámetro es la mayor de las cuerdas de una misma circunferencia de círculo.

—Tres puntos no situados en línea recta, determiuan la posicion de una circunferencia.

—Si en una circunferencia se unen los extremos de una cuerda con el centro, se verifica lo siguiente:

—Los dos rádios forman con la cuerda ángulos iguales.

—La bisectriz del ángulo de los dos rádios, bisectriz tambien de las correspondientes, es perpendicular á la cuerda.

—Esta bisectriz divide á la cuerda en dos partes iguales.

Recíprocamente.

—En una circunferencia, la recta que une el centro con el punto medio de una cuerda, es perpendicular á esta y bisectriz de la correspondiente.

—La perpendicular trazada desde el centro de una circunferencia á una de sus cuerdas, divide á esta y á su arco correspondiente en dos partes iguales.

—La perpendicular á una cuerda que pasa por el punto medio de este, pasa además por el punto medio del arco y por el centro de la circunferencia.

—El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales.

—En dos circunferencias secantes, la recta que une sus centros respectivos es perpendicular á la cuerda comun y la divide en dos partes iguales.

—La perpendicular trazada por el punto medio de una recta limitada, es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por los extremos de las rectas.

—Las cuerdas de una circunferencia no están en la misma relacion que los arcos que subtienden.

—Si consideramos ahora que la secante B*p* sin abandonar su plano gira alrededor del punto B en el sentido *a*A, en las diversas posiciones que durante este movimiento vaya tomando, el punto A se irá aproximando al B, y cuando estos dos puntos hayan coincidido ó superpuesto, la secante recibe en esta posicion *particular* el nombre de *tangente*, y el punto B *punto de contacto* ó de *tangencia*.

Hemos dicho que la tangente es la posicion *particular* de la secante y no *límite* de ella como quieren algunos decir (*), porque este nombre recibe en la ciencia, la cantidad constante á la cual tiende ó puede acercarse indefinidamente otra cantidad variable, con la condicion además de que esta diferencia sea menor que esta magnitud en la série indefinida de valores que ella pueda tomar, y sin que aquella pueda ser nunca un valor de ella; en virtud de esto, se dice, *el valor límite de un ángulo son dos ángulos rectos* y en este ejemplo vemos que de tomar al límite por valor del ángulo, este se desvanece. (**) Ni en la acepcion vulgar, nunca conveniente ni propia en obras esencialmenie científicas, puede aceptarse el calificativo de los

---

(*) Dicen los autores franceses Rouché y Comberousse en su moderna y afamada *Geometría elemental*:

111. On peut considerer la tangente AC en un point A d'une circunference (*fig*. 72) *comme la position limite d'une sécante* AB *issue du point* A, *lorsque cette sécante tourne autour de* A *de manière que le second point d'intersection* B *vienne se confondre avec le premier*. Car, au moment oú les deux points d'intersection B et A sont ainsi réunis en un seul, la droite AC n'a plus qu'un point commun avec la circunference. (Premier partie.)

(**) Las condiciones á que sujetamos la definicion de *límite*, son necesarias, pues de no someterse á ellas, puede la variable, despues de tender hácia una constante, alejarse de ella para aproximarse á la otra y volver, despues de un cierto intervalo, á acercarse á la primera y de tal modo, que su diferencia con ellas sea menor que la cantidad asignada; con las restricciones enunciadas esto no puede verificarse, y por tanto, será verdadero el siguiente principio fundamental de la teoría de límites; *una variable no puede tener dos límites desiguales*.

Es notoria la ligereza con que los autores más recomendables tratan cuanto á los delicados principios de límites se refiere.

autores que tal sientan; en ella va envuelta la carencia ó imposibilidad de todo más, *mas allá*, y en el presente caso ninguna imposibilidad existe que despues de la coincidencia de A con B continúe Bp moviéndose alrededor del citado punto y por ello volver á su primitiva naturaleza de secante á la misma circunferencia. Para las circunferencias tangentes haremos las mismas consideraciones.

Esta manera de considerar la tangente es preferible á la que dan la inmensa mayoría de los autores, y es general para toda clase de curvas.

La tangente marca la division de las curvas ó un arco de ellas en *cóncavas* ó *convexas*, segun que estén ó no contenidas en un mismo lado de cada una de sus tangentes. Toda recta perpendicular á la tangente que pasa por el punto de tangencia, se dice que es *normal* á la curva en el citado punto. Toda recta que no es normal á la circunferencia, es *oblicua* respecto de esta.

—La circunferencia de círculo es una curva convexa.

Continuemos deduciendo principios, que de los precedentes se obtienen inmediatamente.

—La tangente es perpendicular al rádio correspondiente al punto de contacto, y recíprocamente.

—Por un punto de la circunferencia sólo puede trazarse una tangente á esta.

—Toda tangente es paralela á las cuerdas que el diámetro que pasa por el punto de contacto divide en dos partes iguales.

—El lugar geométrico de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas, es el diámetro perpendicular á la direccion comun de aquellas.

Diámetros conjugados.

—Dos diámetros conjugados en la circunferencia, son perpendiculares.

—Las tangentes á la circunferencia en los estremos de un diámetro son paralelas.

—Las normales á una circunferencia pasan por el centro.

—Por un punto de la circunferencia sólo puede trazarse una normal á ella.

—Por un punto fuera de una circunferencia pueden trazarse dos normales á aquella, y de ellas sus magnitudes comprendidas entre el punto y los de interseccion, miden la menor y la mayor distancia del punto á la circunferencia.

Si dos cuerdas iguales aC y AB ó aB y AC (*fig.* 4) se cortan en p ó en a', se verifica ap=Ap, pC=pB ó aa'=Aa', a'B=a'C, segun que las cuerdas se corten en un punto exterior ó interior de la circunferencia: si no se cortan, Aa y A_1a_1 los arcos interceptados por los estremos de las cuerdas son iguales, y sus cuerdas correspondientes AA_1 y aa_1 además de ser iguales son paralelas.

—Dos paralelas interceptan en la misma circunferencia arcos iguales ó cuerdas iguales.

—Dos cuerdas iguales equidistan del centro, y de dos cuerdas desiguales, la mayor dista, es la que dista ménos del centro.

—Si dos circunferencias son tangentes, la recta que une sus centros respectivos pasa por el punto de contacto, y la perpendicular que pasa por dicho punto á la recta anterior es una tangente comun á las dos propuestas.

Se denomina *ángulo de dos curvas* que tienen un punto comun al formado por sus tangentes respectivas en este punto. Si este ángulo es una cantidad diferente de cero, se dice que las dos curvas se cortan, y si es nulo, ó lo que es lo mismo, tienen las curvas una tangente comun, se dice que las curvas son tangentes. Cuando el ángulo es recto, se dice que las curvas son *ortogonales*.

Hemos indicado en el prólogo de nuestro trabajo, la escasa generalidad que se sigue por los autores en la teoría de la medida de los ángulos en la circuferencia. Efectivamente, despues de hallar la medida del ángulo central, dan principio una série inalterable de casos particulares para hallar la medida del ángulo formado por dos secantes de posicion cualquiera. ¿Existen sérias dificultades para que este caso general siga inmediatamente al anterior? Vamos á ver que no es esto cierto, que sólo el espíritu rutinario puede autorizar esta marcha.

Sean las dos secantes $A'A$ y $A'C$; tracemos los rádios correspondientes á los puntos de interseccion, y además desde el centro las perpendiculares respectivas á estas rectas. Tenemos evidentemente:

2 $(toA_1+m'ot')+m'oA_1=4$ Rectos$-AoC$, luego añadiendo á ambos miembros de la igualdad el ángulo $m'oA_1$, y reduciendo será

$$2.tot'=4 \text{ Rectos}+m'oA_1-AoC.$$

Pero como (k), $tot'=2$ Rectos$-AA'C$, se tendrá, reduciendo y cambiando de signos:

$$AA'C=\frac{1}{2}(AoC-m'oA).$$

En el caso de que el punto de interseccion esté dentro de la circunferencia, el procedimiento que hemos empleado es general y aplicable tambien por consiguiente á este caso.

Sean las rectas AC y aB, trazando los rádios y las perpendiculares or y or', tendremos:

$2\,(aor + Aor') - aoA = 4$ Rectos$-$BoC,

de donde, $2\,ror' = 4$ Rectos$-aoA-$BoC;

como $ror' = 2$ Rectos$-$Ba'C, tendremos

$$\mathrm{B}a'\mathrm{C} = \mathrm{B}a'\frac{1}{2}(\mathrm{B}o\mathrm{C} + ao\mathrm{A}).$$

Luego:

—El ángulo formado por dos secantes tiene por medida la semisuma ó semi-diferencia de los arcos cóncavo y convexo comprendidos entre sus lados, segun que el punto de interseccion de las primeras esté dentro ó fuera de la circunferencia.

Y de aquí que

—Todo ángulo inscrito tiene por medida mitad del arco comprendido entre sus lados, siendo iguales todos los ángulos de esta especie inscritos en un mismo arco.

—Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Polígonos.—Triángulos.

—El ángulo exterior de un triángulo es igual á la suma de los dos interiores no adyacentes.

—La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.

—En todo triángulo cada ángulo es menor que el suplemento de uno cualquiera de los otros dos.

—Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos exteriores no adyacentes.

—Un triángulo tiene por lo ménos dos ángulos agudos.

—El conocimiento de dos ángulos de un triángulo nos basta para determinar el valor del tercero.

—En un triángnlo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios.

—En un triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales y recíprocamente: á mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

—Si dos ángulos son iguales en un triángulo, sus lados opuestos tambien lo serán recíprocamente.

—El triángulo equilátero es equiángulo y vice-versa.

—En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

—Tres rectas de longimagnitudes arbitrarias no siempre podrán ser los tres lados de un triángulo.

—En un triángulo rectángulo el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.

—Si desde el vértice del ángulo de un triángulo se traza una perpendicular al lado opuesto, el lado mayor de los otros dos es el adyacente al mayor de estos dos segmentos en que queda dividido el lado.

Y su recíproco expresado en términos diferentes.

—En un triángulo la altura se aproxima más al lado menor de los otros dos.

—Si dos triángulos son tales que teniendo un lado comun, uno está comprendido dentro del otro:

1.° La suma de los otros dos lados del triángulo envuelto es menor que la desenvolvente.

2.° El ángulo opuesto al lado comun del primero de estos es mayor que el correspondiente en el segundo.

3.° La diferencia entre ellos es igual á la suma que los otros dos lados de los triángulos dichos forman entre sí.

Triángulo isosceles.

—La recta que une el vértice con el punto medio del lado desigual, considerado como base, es perpendicular á esta y bisectriz de su ángulo opuesto.

—La perpendicular trazada á la base desde el vértice del ángulo opuesto, divide á este y aquella en dos partes iguales.

—La perpendicular á la base trazada por su punto medio pasa por el vértice del ángulo opuesto y le divide en dos partes iguales.

—Si dos rectas no paralelas cortadas por una tercera satisfacen á una de las condiciones

$$\text{Angulos..}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{internos.......}\\ \text{externos.......}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\text{del mismo lado}\\ \text{de la secante...}\end{array}\right\}\text{iguales.}\\[2ex] \left.\begin{array}{l}\text{correspondientes........}\\ \text{alternos..}\left\{\begin{array}{l}\text{internos.......}\\ \text{externos.......}\end{array}\right.\end{array}\right\}\text{suplementarios.}\end{array}\right.$$

las tres rectas formarán un triángulo isosceles.

—Las bisectrices de los ángulos iguales forman un ángulo opuesto á la base del triángulo isosceles que excede al desigual de este en uno de sus ángulos iguales.

—Si por un punto de uno de los lados iguales se traza una paralela al lado desigual ó sea la base, el triángulo parcial que resulta será tambien isosceles.

Continuando con los triángulos en general, se tiene:

—Si dos triángulos aBC y A′BC son tales que aB=A′C, BC=BC, aC=A′B, estos triángulos superpuestos no coincidirán, y haciendo que esto se verifique para un lado, los vértices respectivos de los ángulos opuestos se hallarán sobre una recta paralela al lado coincidido.

Triángulos equivalentes.

—Si dos triángulos ABC y A′BC son tales que AB=A′B, BC=BC, AC=A′C, superpuestos tendrán que coincidir.

Estas condiciones para la igualdad de los triángulos que tienen sus lados respectivamente iguales y semejantemente dispuestos, se deducen de la proposicion (A). Tambien se probará directamente que los ángulos que tales condiciones cumplen, si se coloca en la disposicion marcada por la figura, en la cual se observará al unir A con A′ que esta queda dividida por la perpendicular BC en dos partes iguales, luego levantando el segundo y haciéndole girar hasta que se superponga sobre el otro, por coincidir A con A′ coincidirán los triángulos.

De haber tenido presente esta observacion un renombrado autor francés, no hubiera asegurado en esta cuestion lo que es completamente inexacto (*).

Cuadriláteros.

—Las diagonales de un cuadrilátero se cortan en un punto interior.

Identidad de las dos definiciones del paralelógramo. Cuadri-

(*) Il est un troisième cas d'égalité qui ne peut se démontrer pour la superposicion immediate: c'est celui où les deux triangles ont les trois còtés respectivement egaux. On ne peut alors faire coïncider qu'un seul coté avec son homologue; et comme on n'a pas de donnée sur les angles, la direction des autres cotés reste incertaine, et la possibilité de leur superposition n'est pas établie, (Duhamel.—*Des méthodes dans les sciences de raisonnement*. Deuxième partie; pag. 311.—1866).

látero que tiene sus lados opuestos paralelos dos á dos.—Cuadrilátero que tiene sus lados opuestos iguales dos á dos.

—En todo paralelógramo los ángulos opuestos son iguales y los adyacentes suplementarios.

En todo rombo sus diagonales son perpendiculares, se cortan mútuamente en partes iguales y son bisectrices de los ángulos opuestos.

Recíprocamente:

—En todo cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.

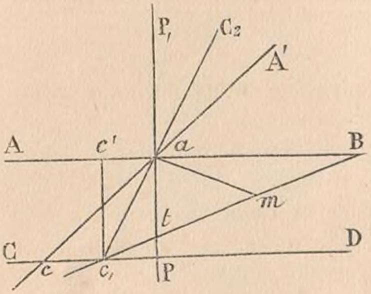
—En todo polígono regular inscrito de un número par de lados, los dos de estos opuestos son paralelos.

Pues si Ao y A$_1a$ son estos lados, se tiene: $AaA_1=aA_1a_1$.

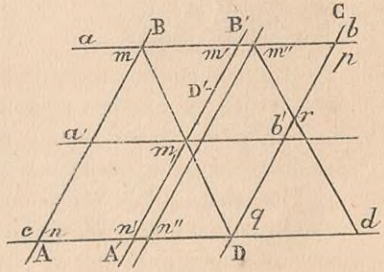
—El lado del exágono regular inscrito es igual al rádio de la circunferencia circunscrita.

Si a_1A_1 es este lado, los ángulos a_1oA_1 y oa_1A_1 son iguales por tener la misma medida.

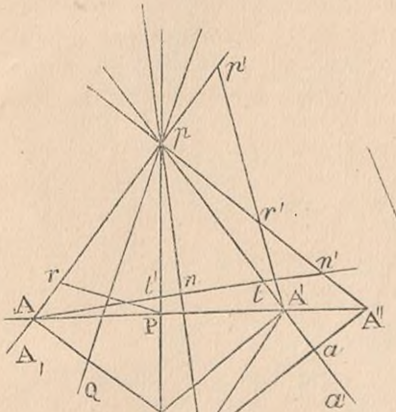
Al dar por terminado nuestro trabajo, debemos advertir que el órden que hemos seguido en la colocacion de las teorías en la segunda parte, es la que siguen los autores más comunmente conocidos; pero en manera alguna creemos que ella sea la más acertada ni conveniente. Entrar en el exámen y presentar la que tenemos por más racional, nos conduciria á escribir un tratado de Geomctría, y hoy por hoy son más modestas nuestras aspiraciones.



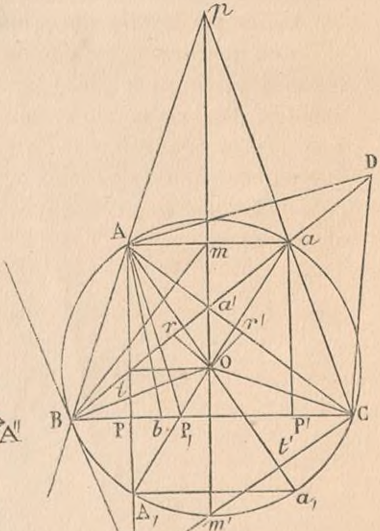
P,
C2
A'
A
c'
a
B
m
t
C
c
c,
P
D



a
B
B'
C
b
m
m'
m''
p
D'
a'
b'
r
m,
c
n
n'
n''
q
d
A
A'
D



p'
p
r'
n'
r
l'
n
l
A
A'
A''
P
A1
a
Q
a'
P'
P,



p
D
A
a
m
a'
r
r'
O
l
B
P
b
P,
P'
C
t'
A1
a,
m'
A'

Se vende á 3 pesetas en las principales librerías del reino. Los pedidos se dirigirán á la librería de los *Sres. Viuda é hijos de Poupart*, calle de la Paz, núm. 6.

OBRAS DEL MISMO AUTOR.

Desarrollo de las ideas en las ciencias de razonamiento.—Discurso leido en la solemne inauguracion del curso académico de 1871 á 1872 en la Universidad literaria de Valencia.

Fuentes de conocimiento.—Estudio filosófico.

EN PREPARACION.

Resúmen de las lecciones de Geometría superior, dadas en la Universidad Central en el curso libre de 1873 á 1874.

Parte primera.—*Geometría superior plana.*

Esta obra constará de tres partes.