BOURDON

ARITMETICA

ELEMENTOS

DE

ARITMÉTICA.

ELEMENTOS

DE

ARITMÉTICA,

POR

M. BOURDON,

Comendador de la Legion de honor, Consejero honorario de la Universidad, antiguo Examinador de Admision á la Escuela Politécnica y Miembro de varias sociedades científicas.

TRADUCIDA POR

DON LOPE GISBERT,

Catedrático de Matemáticas del Instituto de Murcia.

Segunda edicion,

corregida con arreglo á la trigésima-segunda edicion del autor.

MADRID: 1866.

MADRID.
Libreria de D. Angel Calleja, editor.

LIMA.
Casa de los Sres. Calleja y compañía.

MADRID: IMPRENTA DE LOPEZ, *Cava-Baja*, 19, *bajo.*

ADVERTENCIA DEL AUTOR Á LA 32.ª EDICION.

Al publicar una nueva edicion de mis Elementos de Aritmética, he querido ponerla en relacion con los actuales programas de enseñanza, por lo cual conservando el método adoptado en mis anteriores ediciones, he tenido que revisar y completar algunas teorías.

He presentado la division como dependiente de sustracciones sucesivas, á la manera de Condorcet, y la he tratado de modo que sin dificultad se llega al *caso mas general.* Un *método de ensayo*, y que ya se habia indicado en las ediciones anteriores aunque sin esplanarlo suficientemente, dá el medio de conocer *à priori*, en cada division parcial, la verdadera cifra del cociente.

Las propiedades de los números, los principios sobre la *divisibilidad*, y las importantes teorías que de ello emanan, vienen *inmediatamente despues* de las cuatro operaciones fundamentales sobre los números enteros.

Adoptando este órden de ideas como el mas racional, he tenido cuidado de reducir el desenvolvimiento de dichas propiedades y de sus consecuencias á su parte verdaderamente esencial, á fin de evitar, cuanto es posible, el inconveniente de presentar desde el principio á los discípulos teorías demasiado abstractas.

Las FRACCIONES ORDINARIAS vienen en seguida de los principios en que se fundan sus principales operaciones, formando así un todo completo.

La teoría de los NÚMEROS COMPLEJOS, presentada como *apéndice* al cálculo de las FRACCIONES, queda reducida á las operaciones mas sencillas. Solo he tratado la *multiplicacion* por medio de *un ejemplo*, y como medio de iniciar á los principiantes en el método llamado de las *partes alicuotas*.

La teoría de las FRACCIONES DECIMALES se ha completado por medio de esplicaciones bastante estensas sobre las *aproximaciones*; la comparacion de los dos *sistemas de pesos y medidas* conduce naturalmente á la suposicion de un *método abreviado* para la *multiplicacion*.

Las *aproximaciones* ocupan igualmente un lugar importante en el capítulo de las ESTRACCIONES DE RAICES, que termina en unas nociones sobre el *cálculo de los radicales*, cuyo *indice* es una potencia cualquiera de 2. Solo la *raiz cuadrada* se trata con pormenores.

La teoría de las RAZONES Y PROPORCIONES, tan importante en GEOMETRÍA, está dividida en dos partes, la primera de las cuales va seguida de la resolucion de las cuestiones que dependen de las *cantidades proporcionales*, cuestiones que además se tratan por el *método de reduccion á la unidad*.

El complemento de esta teoría sirve de introduccion á la de las PROGRESIONES y de los LOGARITMOS.

Se han esplicado los *logaritmos* de modo que hacen concebir *aritméticamente* la posibilidad de la existencia de las *Tablas*, y evitando el empleo de los *logaritmos negativos*; de modo que quedan verdaderamente dentro del dominio de *la* ARITMÉTICA.

El *cálculo de los números aproximativos* constituye el principal objeto del último capítulo, donde se completan algunas de las teorías precedentes, y se esponen *métodos abreviados* para la *division* y para la *estraccion de la raiz cuadrada*.

Finalmente, he consagrado dos *Notas*, una á los *diferentes sistemas de numeracion*, y otra al desarrollo de un procedimiento para calcular la espresion $\sqrt{a^2+b^2}$, sin *estraccion de raiz y sin necesidad de* *formar mas cuadrado que el del menor* de los dos números a y b.

Con arreglo á esta esposicion sumaria, puede formarse juicio de las principales modificaciones que ha recibido mi obra.

Retirado hace mucho tiempo de la enseñanza, seguramente no habria emprendido este trabajo, á no haber sido por la inteligente y decidida colaboracion de mi hijo, Enrique Bourdon, antiguo discípulo de la Escuela Politécnica.

ELEMENTOS

DE ARITMÉTICA.

PARTE PRIMERA.

INTRODUCCION.

1. Se llama *cantidad* todo lo que es susceptible de aumento ó de disminucion. Así, las líneas, las superficies, el tiempo, el peso, son cantidades; y lo mismo toda coleccion ó conjunto de objetos de una misma naturaleza, como son los hombres, los árboles, las casas, etc., es una cantidad en cuanto semejante conjunto es susceptible de aumento ó de disminucion.

No es posible formarse idea exacta de una cantidad, sino refiriéndola á otra cantidad de la misma especie; y esta segunda cantidad destinada para servir de término de comparacion ó de medida á todas las cantidades de la misma especie, toma el nombre de UNIDAD. Así, cuando decimos que una pared tiene *veinte metros*, suponemos adquirida la idea de la unidad de longitud llamada *metro*, y que habiendo colocado el metro veinte veces á lo largo de la pared, hemos llegado exactamente á su estremo.

Por consiguiente, en Matemáticas se llama *unidad una cantidad de cualquiera especie, que sirve de término de compa-*

racion respecto de todas las demás cantidades de la misma especie; de donde se infiere que hay tantas especies de unidades, como las hay de cantidades.

La unidad es *arbitraria* cuando la especie de cantidad á que se refiere puede variar de una manera *continua*, es decir, tan poco á poco como se quiera; tales son las líneas, el tiempo, etc.: por el contrario, la unidad se encuentra *dada* por la naturaleza misma de la cantidad, cuando esta varía de una manera *discontinua*, como sucede en toda clase de colecciones ó conjuntos; así, en un grupo de árboles considerado como cantidad, la unidad es necesariamente el *árbol*.

Se llama *número* el resultado de la comparacion de una cantidad cualquiera con su unidad.

El número se llama *entero* si es el conjunto de varias unidades de la misma especie. Así, son números enteros *veinte* duros, *treinta* libras, *ocho*, *doce*, *quince* unidades de cualquier especie.

Un número se llama *fraccionario* cuando espresa *una parte* de la unidad, ó la reunion *de un entero y una parte de la unidad*.

Una *fraccion* ó *quebrado*, hablando propiamente, es una parte de la unidad; pero sin embargo, bajo el nombre genérico de fraccion ó quebrado suele tambien comprenderse el número fraccionario tal como se acaba de definir.

Y con mas generalidad se llama *número fraccionario* una parte de la unidad ó la reunion de varias unidades de una misma especie con alguna fraccion ó parte de unidad.—En este segundo caso se llama tambien *número misto*.

2. Se llama *número concreto* el que á la espresion de su magnitud añade la de su especie, como *cinco metros*, *quince horas*, *seis leguas*. La primera vez que se pronuncia un número, no es fácil formar de él exacta idea si no se representa á la vez una unidad de cierta especie con que compararlo; pero poco á poco el espíritu, que se acostumbra á las abstracciones, consigue representarse colecciones de varios objetos cualesquiera semejantes, que separadamente constituyen una unidad cada uno. Entonces la coleccion se llama *número abstracto*, porque al enunciarle hacemos abstraccion de la especie de unidades á que se refiere.

Bajo este punto de vista deben considerarse los números al exponer los procedimientos relativos á las diferentes operaciones que con ellos hayan de efectuarse, si se quieren fundar de modo que puedan aplicarse á todas las cuestiones y casos posibles.

De la numeracion.

3. El primer trabajo que los hombres hicieran con los números, debió ser darles nombres fáciles de retener. Observarian que *hay una infinidad de números*, porque dado uno cualquiera se le puede añadir siempre una unidad mas, resultando un nuevo número, susceptible de recibir el mismo aumento; y verian que era necesario buscar el medio de *expresar todos los números posibles por medio de un sistema de palabras combinadas entre sí de un modo conveniente:* tal es el objeto de la *numeracion hablada.*

Además, como la nomenclatura de los números se compone naturalmente de sonidos variables en los diferentes idiomas, debió inventarse para reemplazarla una escritura mas general y compendiosa, por cuyo medio pueda la imaginacion comprender con mas facilidad é independientemente de la palabra, los razonamientos que se hacen al investigar las propiedades de los números ó las leyes de sus varias combinaciones. Tal es el objeto de la numeracion *escrita*, que consiste en *espresar con pocas* CIFRAS Ó GUARISMOS *todos los números posibles.*

4. *Numeracion hablada.* Aunque la mayor parte de los jóvenes que han de ver estos Elementos conocen la nomenclatura de los números enteros, creemos, sin embargo, necesario esponer su análisis, sucinto, pero razonado.

Los primeros números son: *Uno* (ó la unidad considerada como número), *dos* (ó una unidad mas otra unidad), *tres* ó dos unidades mas otra unidad), *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*.

Añadiendo una unidad mas al número *nueve*, se forma el número *diez*, que se considera como una especie nueva de unidad, y se llama *decena*, ó *unidad de segundo órden* respecto de la unidad primitiva, la cual se llama *unidad simple* ó unidad de primer órden. Se cuenta por decenas como se contó por unidades simples; y así se dice: una decena, dos decenas, tres decenas, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve decenas, ó bien, *diez*, *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, y *noventa*. Entre diez y veinte hay nueve números, que son *diez y uno*, *diez y dos*, *diez y tres*, *diez y cuatro*, *diez y cinco*, *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *diez y nueve;* pero en vez de las cinco primeras denominaciones ha sustituido el uso las palabras *once*, *doce*, *trece catorce* y *quince*.

Entre veinte y treinta hay tambien nueve números, que se enuncian así: *veinte y uno*, *veinte y dos*, *veinte y tres*, *veinte y cuatro*,..., *veinte y nueve*. Y del mismo modo pueden enunciarse todos los números hasta *noventa y nueve*.

Si á noventa y nueve añadimos *uno mas*, resultan *diez decenas* ó el número *ciento*, que se considera como una unidad nueva, llamada *centena* ó *unidad de tercer órden*. Y se cuenta por centenas como se contó por *decenas* y por *unidades simples*. Así, *ciento*, *doscientos*, *trescientos*, *cuatrocientos*,...., *ochocientos*, *novecientos*, espresan colecciones de una centena, dos, tres,...., ocho, nueve centenas. Colocando sucesivamente entre las palabras *ciento* y *doscientos*, entre *doscientos* y *trescientos*,...., entre *ochocientos* y *novecientos*, y detrás de *novecientos* los nombres de los números comprendidos desde *uno* hasta *noventa y nueve*, se forman los nombres de todos los números desde *ciento* hasta *novecientos noventa y nueve*.

Ya podemos aquí hacer observar que en los enunciados de todos estos números, solo se emplean las palabras primitivas *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, *noventa* y *ciento*. No mencionamos las otras palabras *once*, *doce*, *trece*, *catorce*, *quince*, porque en rigor podriamos pasar sin ellas.

Añadiendo *una* unidad *mas* al número *novecientos noventa y nueve* se forma una coleccion de *diez centenas* ó el número *mil*, que constituye la *unidad de millar* ó *unidad de cuarto órden*. Para no multiplicar mucho las palabras, se ha convenido en considerar el *millar* como una nueva *unidad principal*, delante de la cual se colocan los novecientos noventa y nueve nombres de todos los números anteriores. Así, se dice *un mil*, *dos mil*, *tres mil*,..., *nueve mil*, *diez mil*, *once mil*,..., *veinte mil*, *veinte y un mil*,..., *cien mil*, *doscientos mil*,..., *novecientos noventa y nueve mil*.

Una decena de miles ó millares forma la *unidad de quinto órden:* una centena de miles ó millares forma la *unidad de sesto órden*.

Poniendo á continuacion de un número cualquiera de miles los nombres de todos los números inferiores á *mil*, es claro que pueden enunciarse todos los números hasta *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve*.

Añadiendo *una* unidad *mas* á este último número, resultan *diez cientos de miles*, ó sea *mil miles* ó *mil veces mil*, conjunto de unidades que se ha designado con el nombre *millon*. El millon representa una nueva unidad principal, ante la cual se colocan todos los números anteriores, contando *un millon*, *dos millones,...*, *cien millones,...*, *mil millones,...*, *cien mil millones,...*, *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones.*

Poniendo á continuacion de un número cualquiera de millones cada uno de los números inferiores á *millon*, se enunciarán sucesivamente todos los números hasta *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones, novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve.*

Añadiendo una unidad mas á este último número, resultan un *millon de millones*, á cuyo nuevo conjunto de unidades se ha dado el nombre de *billon*, que representa una nueva unidad principal. Ante ella se colocan todos los números desde *uno* hasta *novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve* lo mismo que se hizo con la unidad *millon*.

Añadiendo una unidad mas al número novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve billones, se tiene un número compuesto de *un millon de billones*, que toma el nombre de *trillon;* y así sucesivamente un *millon de trillones* se llama *cuatrillon*, etc., formándose de este modo todos los órdenes imaginables de nuevas unidades, que bastarán á nombrar cualquier número entero por grande que sea (*).

Para concluir observarémos que el *millon* es la unidad de *séptimo* órden, la decena de millon es la *unidad de octavo* órden, la centena de millon la *unidad de noveno* órden..., etc.

5. *Numeracion escrita.* Por sencilla que sea la numeracion verbal, habria mucho trabajo en combinar dos ó mas números algo crecidos si no se tuvieran medios de escribirlos abreviadamente.—Fácilmente se conseguirá esta abreviacion si se reflexiona un poco sobre la nomenclatura espuesta. En efecto, observemos que entre las palabras empleadas para espresar los números, unas, como *uno*, *diez*, *ciento*, *mil*, *cien mil*, *diez millones*, espresan las unidades de los diferentes órdenes,

---

(*) En estos dos últimos párrafos ha sido preciso separarnos un poco del testo original, pues los franceses llaman *billon* á lo que nosotros *millar de millon; trillon* á lo que nosotros *billon* y así sucesivamente. *(N. del T.)*

mientras las palabras uno, dos, tres,..., nueve, espresan cuántas veces entra en un número cada una de estas unidades.

Esto supuesto, si se conviene primero en representar los nueve primeros números por los caractéres ó cifras siguientes:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
uno,	*dos*,	*tres*,	*cuatro*,	*cinco*,	*seis*,	*siete*,	*ocho*,	*nueve*,

toda la dificultad consistirá en hallar el medio de que estas cifras espresen los diferentes órdenes de unidades que contenga el número propuesto. Para esto se ha establecido un principio de pura convencion que resuelve por completo la dificultad. Se ha admitido que *toda cifra colocada á la izquierda de otra, representará unidades del órden inmediatamente superior al de esta;* ó de otro modo, que, *cuando hay muchas cifras escritas en fila, la primera de la derecha representa unidades simples, la inmediata á la izquierda representa unidades de decenas, ó sean simplemente decenas, la tercera en el mismo órden representa centenas, la cuarta unidades de millar, la quinta decenas de millar,...*, y así sucesivamente.

Supongamos, por ejemplo, que queremos espresar en cifras el número *trescientos setenta y nueve*, que se compone evidentemente de 9 unidades, mas 7 decenas, mas 3 centenas. Podremos, pues, espresarle con arreglo á lo dicho, escribiendo 379.

Del mismo modo, el número *veinte y ocho mil doscientos cuarenta y siete*, que consta de 7 unidades, 4 decenas, 2 centenas, 8 millares, y 2 decenas de millar, deberá escribirse por medio de las cinco cifras 28247.

Cifra 0. Hay, sin embargo, números que no pueden escribirse haciendo solo uso de las nueve cifras indicadas.

Los números *diez*, *veinte*, *treinta*,..., *ochenta*, *noventa*,... que no tienen unidades simples, no pueden escribirse como se ha dicho de los demás, y ha sido necesario adoptar una cifra, que *no tenga en sí valor alguno*, pero que sirva para ocupar el lugar de los órdenes de unidades que falten en el enunciado del número. Tal es la cifra 0, que se llama *cero*, por cuyo medio los números diez, veinte, treinta, etc., se escriben 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Por la misma razon, los números *ciento*, *doscientos*, *tres-*

cientos,... que no tienen ni decenas, ni unidades simples, se escriben 100, 200, 300, 400,... 900.

En general, el *cero* es una cifra que no tiene por sí valor alguno, pero que sirve para llenar los huecos de las diferentes especies de unidades que pueden faltar en el enunciado de un número.

Las otras cifras se llaman *significativas* y tienen dos clases de valores: uno llamado *absoluto*, que es el de la cifra considerada enteramente sola; y otro llamado *relativo*, que es el que adquiere por el lugar que ocupa á la izquierda de otras cifras.

Si ahora observamos que todo número que se enuncia se compone de unidades simples, de decenas, de centenas, etc.: que la coleccion de unidades de cada órden llega á lo mas á *nueve:* que para el caso de faltar al número algunos órdenes de unidades hay una cifra que ocupa el lugar vacío, nos convenceremos de que no hay número entero que no pueda espresarse por una combinacion de las *diez cifras* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Sirva de nuevo ejemplo el número *doscientos ocho mil diez y nueve*, el cual contiene 9 *unidades simples*, 1 *decena*, 8 *unidades de millar*, y 2 *centenas de millar;* pero carece de *centenas simples* y de *decenas de millar.* Bastará, pues, escribir las cifras 9, 1, 0, 8, 0, 2, unas en pos de otras de derecha á izquierda, y el número estará representado por 208019.

Sea ahora el número *treinta y seis mil cien millones veinte mil cuatrocientos siete:* su enunciado consta de 7 *unidades simples*, 0 *decenas*, 4 *centenas;* 0 *unidades de millar*, 2 *decenas de millar*, 0 *centenas de millar*; 0 *unidades de millon*, 0 *decenas de millon*, 1 *centena de millon;* 6 *unidades de millar de millon*, y 3 *decenas de millar de millon:* luego su espresion en cifras deberá ser 36100020407.

El sistema de numeracion que acabamos de esponer ha recibido el nombre de *sistema decimal*, porque en él se necesitan diez unidades de cierto órden para formar una del inmediato superior, y por consiguiente se emplean *diez* cifras ó guarismos para espresar todos los números. El número *diez* se llama *base* del sistema.

6. Hagamos ahora una observacion importante. Resulta de la nomenclatura que todo número escrito en cifras se divide en centenas, decenas y unidades simples; en centenas, decenas y unidades de millar; en centenas, decenas y unidades de mi-

llon, etc., es decir, en *secciones* de unidades simples, de millares, de millones, de millares de millones, etc., cada una de las cuales ha de constar de *tres* cifras, escepto la última á la derecha ó sea la de las unidades mas altas que puede tener *dos* cifras ó solo *una*. En estando, pues, familiarizados con el modo de escribir los números de tres cifras, basta escribir sucesivamente unas en pos de otras, de derecha á izquierda, las secciones de las varias especies de unidades, hasta llegar á las unidades mas altas que haya.

Tambien puede comenzarse *por la izquierda*, es decir, *escribir lo primero la seccion de unidades superiores, y á la derecha las demás secciones por el órden gradual de la magnitud* de sus *unidades*. Así es como debe hacerse al escribir en guarismos un número dictado en palabras; pero debe cuidarse mucho de no olvidar los ceros destinados á llenar los huecos de las unidades que faltan, en lo cual nunca debe haber dificultad, porque se sabe ya que cada seccion, escepto la primera de la izquierda, debe precisamente tener tres cifras.

Sirva de ejemplo escribir el número *cuatrocientos seis mil veinte y ocho millones doscientos cincuenta mil cuarenta y ocho.*

Escríbanse unas á la derecha de otras las secciones de *millares de millon*, de *millones*, de *millares* y de *unidades simples*, y se tendrá 406,028,250,048.

7. En la observacion precedente se funda el medio de traducir en palabras un número escrito en cifras:

Divídase el número en secciones de á tres cifras empezando por la derecha, y léase sucesivamente cada seccion empezando por la de la izquierda y cuidando de dar á cada una la denominacion que le corresponda.

Sea, por ejemplo, el número 70345601.

Este número se distribuye así: 70.345,601, y se compone de *setenta* MILLONES, *trescientos cuarenta y cinco* MIL, *seiscientos uno.*

Del mismo modo se verá que 5302400056702, ó bien 5.302,400.056,702, espresa el número *cinco* BILLONES, *trescientos dos* MIL, *cuatrocientos* MILLONES, *cincuenta* y *seis* MIL, *setecientos dos.*

NOCIONES SOBRE LOS QUEBRADOS.

8. En la esposicion que acabamos de hacer de la numeracion solo hemos considerado los *números enteros:* fáltanos es-

plicar el modo de enunciar y escribir en cifras *las fracciones*.

Pero antes, es necesario dar una idea clara y exacta de esta clase de números, tales como se consideran en Aritmética.

Supongamos que se trata de determinar *la longitud* ó *lo largo de una pieza de tela*. Tomando por unidad el *metro* y colocándole desde el estremo una, dos, tres veces, ó tantas en fin cuantas se pueda, sucederá una de dos cosas: ó despues de colocar el metro un número cualquiera de veces, por ejemplo 15, á lo largo de la pieza, no quedará nada, ó quedará un pedazo sobrante menor que el metro. En el primer caso la pieza contiene un número entero, 15, de metros. En el segundo, para tener la longitud total, será necesario añadir á los 15 metros la fraccion ó parte de metro que restó.

Para valuar esta parte y compararla con la unidad podremos concebir el metro dividido en dos partes iguales ó *dos mitades*, y si el pedazo sobrante es igual á una de ellas, se dice que la pieza de tela tiene 15 metros y *medio* de larga.

Si el *resíduo* es menor ó mayor que la mitad del metro, se concebirá dicha mitad dividida en otras dos partes iguales, que se llaman *cuartos* ó *cuartas partes;* y si este cuarto puede colocarse *una* ó *tres veces* exactamente á lo largo del pedazo de tela sobrante, diremos que tiene de largo *un cuarto* ó *tres cuartos* de metro.

En vez de dividir la unidad en dos ó en cuatro partes, puede tambien concebirse dividida en *tres* partes iguales que se llaman *tercios*, en *cinco* partes iguales que se llaman *quintos*, en *seis* partes iguales que se llaman *sestos*, etc. —Admitamos para fijar las ideas que el metro se ha dividido en *doce* partes iguales llamadas *dozavos*, y que este dozavo cabe *siete* veces justas en el pedazo de tela sobrante; entonces se dirá que el resto es igual á *siete* veces la *dozava parte* del metro ó á *siete dozavos* de metro; y la pieza de tela tendria de larga 15 metros y *siete dozavos* de metro.

La cantidad *siete doceavos* de metro se llama una *fraccion* ó un *quebrado* de metro.

En general para formarse idea exacta de una fraccion ó quebrado de una unidad de cualquier especie, es necesario concebir la unidad dividida en un número cualquiera *entero* de partes iguales y suponer que se toman una, dos, tres, cuatro,..., de estas partes; y entonces se llama *fraccion* ó *quebrado* la reunion de dichas partes iguales. Por eso el enunciado de una fraccion comprende necesariamente dos números enteros: uno *que designa en cuántas partes se ha dividido la unidad, y se llama* DENOMINADOR, y otro *que indica cuántas de dichas partes contiene el quebrado, y se llama* NUMERADOR. Así, *cinco octavos* de metro, *trece veinte-avos* de libra, son quebrados: en el primero se indica que el metro está dividido en *ocho* partes iguales llamadas *octavos*, y que de las ocho se toman *cinco*; *cinco* es, pues, el numerador y *ocho* el denominador: en el segundo se supone la libra dividida en *veinte* partes iguales llamadas *veinte-avos*, y que de las veinte se toman *trece*: *veinte* es, pues, el denominador, y *trece* el numerador.

De aquí tambien se infiere que un quebrado es una cantidad que se refiere á una parte de la unidad principal, como á una nueva unidad especial que puede considerarse como secundaria. Así el quebrado *trece veinte-avos* de metro es un número compuesto de trece veces *un veinte-avo* de metro; luego el veinte-avo es una unidad particular que está contenida *trece* veces en la fraccion propuesta.

Esto supuesto, se dice que dos quebrados son de la misma especie cuando tienen un mismo denominador. Así, *cinco dozavos*, *siete dozavos*, *once dozavos*, son fracciones de la misma especie; pero *tres cuartos* y *dos tercios* son fracciones de especie diferente, porque tienen diferente denominador.

Para espresar en cifras un quebrado se ha convenido en escribir el numerador sobre el denominador, separándolos con una raya. Así, el quebrado *tres cuartos* se escribe $\frac{3}{4}$; *siete doce-avos* se escribe $\frac{7}{12}$; *veinte y tres treinta y cinco-avos* se escibe $\frac{23}{35}$.

Recíprocamente $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{47}{72}$, representan los quebrados *siete octavos*, *trece quince-avos*, *cuarenta y siete setenta y dosavos*. Para enunciar una fraccion se enuncia primero el numerador y despues el denominador, añadiéndole la terminacion *avos*, si pasa de diez; hasta diez, en vez del número cardinal se nombra el ordinal correspondiente.

Nociones sobre las cuatro operaciones fundamentales.

9. Las primeras necesidades del hombre en sociedad le conducen diariamente á resolver problemas ó cuestiones

que le obligan á combinar dos ó mas números, ya de la misma, ya de distinta naturaleza. Estas combinaciones constituyen *las operaciones de Aritmética* ó *el cálculo numérico.* A fin de manifestar su orígen y enlace, vamos á proponer algunas cuestiones relativas al comercio.

CUESTION PRIMERA. *Un comerciante en telas ha vendido á uno 5 metros $\frac{2}{3}$ de cierto lienzo; á otro 7 metros y $\frac{1}{2}$ de lo mismo, y á otro 12 metros $\frac{3}{4}$ de lo mismo: quiere saber cuántos metros ha vendido.*

Para esto es necesario que reuna en un solo número los tres números de metros vendidos; es decir, que haga la ADICION ó SUMA de aquellos tres números compuestos de enteros y quebrados.

CUESTION SEGUNDA. *El comerciante cortó los susodichos tres números de metros de una pieza que tenia 30 metros y $\frac{2}{3}$, y quiere saber cuánto lienzo le queda.*

Buscará la diferencia entre el número 30 $\frac{2}{3}$ que espresa la longitud primitiva de la pieza y el número total de metros vendidos; es decir, deberá SUSTRAER *el segundo número del primero.*

CUESTION TERCERA. *Se han comprado 48 metros de lienzo á 25 reales el metro; ¿cuánto debe pagarse por todos?*

Es claro que para obtener el precio total buscado se deben tomar 48 veces 25 reales, ó hacer un total de 48 números iguales á 25 reales. Esta operacion se llama MULTIPLICACION, y es una especie de *suma* que consiste en reunir muchos números iguales.

Volvamos á la misma cuestion, pero mudemos los números, es decir, los *datos.*

A razon de $\frac{17}{20}$ de real el metro, ¿cuánto cuestan $\frac{7}{12}$ de metro de un lienzo cualquiera?

Bien se comprende que si un metro cuesta $\frac{17}{20}$ de real, $\frac{7}{12}$ de metro, que son una parte del metro, habrán de costar una parte de $\frac{17}{20}$ espresada por $\frac{7}{12}$: es decir, que para obtener la respuesta á la cuestion deberian tomarse los $\frac{7}{12}$ de $\frac{17}{20}$, y esta operacion se llama *multiplicacion de quebrados*. Se llama así porque la cuestion que á ella conduce tiene la misma forma que otra cualquiera que condujese á una multiplicacion de números enteros, diferenciándose solo en la forma de los *datos*.

Al pronto el nombre de *multiplicacion*, que ofrece generalmente idea de aumento, no parece propio para indicar una operacion que consiste en tomar de un número la parte espresada por una fraccion. Pero se ha encontrado el medio de enlazar la multiplicacion de números enteros á la de números fraccionarios, diciendo que *multiplicar un número cualquiera por otro es formar un tercer número, que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad*. Si ambos números son enteros, es claro que segun esta definicion basta tomar el primero tantas veces como unidades tiene el segundo; y si son quebrados, es necesario tomar del primero la parte que indique el segundo.

CUESTION CUARTA. *Por* 84 *reales se han comprado* 12 *varas de lienzo; ¿á cómo sale la vara?*

Se comprende sin trabajo que si conociéramos el precio, tomándole 12 veces ó multiplicándole por 12, deberíamos tener un resultado igual á 84.—Luego la cuestion conduce á *buscar un número que multiplicado por el segundo*, 12, *reproduzca el primero*, 84; y esta operacion ha recibido el nombre de DIVISION.

Para esplicar este nombre, que dá idea de la distribucion de un número en varias partes iguales, supongamos que se tiene *que repartir con igualdad una suma de* 84 *reales entre* 12 *personas*. Es claro que si se conociera la parte de cada persona, multiplicándola por 12, deberia resultar 84.—Luego *dividir un número* 84 *en tantas partes iguales como unidades tiene otro*, 12, *y buscar un número que multiplicado por el segundo*, 12, *reproduzca el primero*, 84, *son dos operaciones idénticas*.

Volvamos á esta misma cuestion, pero con datos fraccionarios. *Con* $\frac{19}{20}$ *de real se han comprado* $\frac{5}{6}$ *de metro; se quiere saber el valor del metro.*

Tambien aquí se reduce la cuestion á buscar un número tal que multiplicado por $\frac{5}{6}$ reproduzca $\frac{19}{20}$; luego tambien en este caso hay una division que hacer, en el sentido que se acaba de dar á esta palabra, y no en el sentido de una distribucion en partes iguales.

Habiendo visto por lo que precede, que las combinaciones de los números entre sí constituyen operaciones de la ciencia llamada *Aritmética*, se puede comprender cuán importante es enseñar los procedimientos para ejecutar aquellas operaciones: tal es el objeto especial de esta ciencia.

De modo que la ARITMÉTICA *tiene por objeto enseñar reglas fijas y ciertas para ejecutar con los números todas las operaciones posibles.* Comprende además tambien una multitud de propiedades de los números que se han ido encontrando en el transcurso de las investigaciones hechas para inventar y establecer aquellas reglas y para facilitar su aplicacion. Vamos á esponerlas sucesivamente recordando (n.° 2) que para esponer las reglas con total independencia de las diversas especies de cuestiones, conviene considerar los números como *abstractos*. Sin embargo, propondremos á veces cuestiones sobre *números concretos* en las aplicaciones que hagamos para familiarizar á los principiantes con los procedimientos.

Para pasar de lo simple á lo compuesto empezarémos esponiendo las reglas para las operaciones con los números enteros.

CAPITULO PRIMERO.

Operaciones con los números enteros.

SUMA Ó ADICION.

10. *Sumar muchos números entre sí, es reunir todos los números dados en uno solo;* ó en otros términos, *formar un número que tenga por sí solo tantas unidades como todos los otros juntos.*

El resultado de esta operacion se llama *suma.*

La *adicion* de los números de una sola cifra no ofrece dificultad: los jóvenes, y aun los niños mas tiernos, aprenden á sumar contando por los dedos, y concluyen sabiendo al fin de memoria los resultados.

Así, pues, sea sumar los números 5, 7, 4, 8 y 6.

Se dice: 5 y 7 son 12 (*), y 4 son 16, y 8 son 24, y 6 son 30; luego 30 es la suma pedida.

Del mismo modo se hallaria que 42 es la suma de los números 7, 9, 6, 5, 8, 7.

Sea ahora buscar la suma de los números 7453 *y* 1534.

Despues de haberlos escrito como se ve al márgen, y de haber tirado una raya por debajo, se dice, empezando por las unidades simples: 3 y 4 son 7, que se escribe debajo de las unidades.

$$\begin{array}{r} 7453 \\ 1534 \\ \hline 8987 \end{array}$$

Pasando á las decenas, 5 y 3 hacen 8, que se escribe en el órden de decenas.

Despues, 4 y 5 son 9, que se escribe debajo de las centenas.

(*) El uso de los dedos para llegar á este 12, supone las adiciones sucesivas de la unidad. Así se dice: 5 y 1 son 6, y 1 son 7, y 1 son 8...; y así sucesivamente hasta añadir al 5 todas las unidades del 7.

En general es difícil fijar qué operaciones del espíritu dán los resultados de estas adiciones elementales; y puede decirse que hasta cierto punto cada uno tiene un modo diferente de hacerlas.

En fin, 7 y 1 hacen 8, que se escribe debajo de los millares.

El número 8987 hallado por este medio, es la *suma* de los dos números propuestos, pues contiene todas las unidades, decenas, centenas y millares que hemos ido reuniendo sucesivamente.

Propongámonos ahora sumar los cuatro números 5047, 859, 3507, 846.

Se escriben como se ve al márgen, y se dice, empezando por las unidades: 7 y 9 son 16, y 7 son 23, y 6 son 29: se escriben las 9 unidades simples bajo la primera columna, y se reservan las *dos* decenas para juntarlas con las cifras de la columna siguiente que espresan tambien decenas.

5047
859
3507
846
10259

Pasando á esta columna, se dice: 2 que se han reservado y 4 son 6, y 5 son 11, y 0 son 11, y 4 son 15; se escribe 5 debajo de las decenas, y la centena se reserva para llevarla á la columna de las centenas.

Procediendo con esta como con las precedentes, se hallarán 22 centenas ó 2 centenas que se escriben bajo las centenas, y 2 millares que se llevan á la columna inmediata de millares.

Finalmente, 2 que llevo y 5 son 7, y 3 son 10; se escribe el 0 bajo los millares, y la cifra 1 bajo las decenas de millar; por consiguiente, 10259 es la suma pedida.

Regla general. *Para sumar varios números entre sí, se escriben unos bajo de otros, de modo que las unidades de un mismo órden se correspondan en columna vertical, tirando luego una línea por debajo. Despues se suman sucesivamente las cifras que componen cada columna, empezando por la de unidades simples, y continuando hácia la izquierda: bajo la línea se escribe la suma de las unidades de cada órden, si consta de solo una cifra; pero si pasa de* 9 *(en cuyo caso está espresada por mas de una cifra) se escribe solamente la cifra de las unidades y se guardan las demas, que representan decenas, para sumarlas con la columna siguiente inmediata.*

Hecho esto con todas las columnas, se tendrá debajo de la raya la suma pedida, *pues segun la regla, procede el resultado de la reunion de todas las unidades, todas las decenas, todas las centenas, etc., de los números propuestos.*

11. *Advertencia.* Si la suma de las cifras que componen cada columna á lo mas sumára 9, sería indiferente empezar la operacion por las unidades simples ó por las de la especie su-

perior. Pero como sucede comunmente que la mayor parte de las sumas pasan de 9, si empezáramos por la izquierda nos veríamos precisados á volver atrás para rectificar la cifra precedente, añaniéndole tantas unidades como decenas procedieran de la columna siguiente. Por eso es preferible empezar siempre por la derecha.

DE LA SUSTRACCION.

12. La sustraccion ó resta tiene por objeto *buscar la diferencia entre dos números*. El resultado se llama *resta, diferencia* ó *esceso*.

Tambien puede decirse que resta es una operacion que tiene por objeto, *dada la suma de dos números y uno de estos, hallar el otro;* y bajo este punto de vista la sustraccion es la operacion inversa de la adicion.

La resta es fácil y puede hacerse de memoria, mientras los números propuestos tienen una sola cifra. Así, la diferencia entre 9 y 6 es 3; ó bien, si de 9 se quitan 6, quedan 3. Del mismo modo 7 menos 5 son 2.

Tambien es fácil restar un número de una cifra de otro cualquiera, cuando la resta ha de tener solo una cifra. Así, de 7 á 13 van 6; pues 7 y 6 hacen 13. Del mismo modo de 9 á 17 van 8; pues 8 y 9 hacen 17.

Estas operaciones sirven de base á la sustraccion de los números de mas de una cifra.

Sirva de primer ejemplo restar 5467 de 8789.

$$\begin{array}{r} 8789 \\ 5467 \\ \hline 3322 \end{array}$$

Colóquese el sustraendo debajo del minuendo, tírese una raya por debajo, y empiécese por las unidades simples, diciendo, de 7 á 9 van 2, y se escribe bajo la columna correspondiente; pasando luego á las decenas, se dice: de 6 á 8 van 2, que se escribe en el lugar de las decenas: lo mismo se hará con las centenas y millares: de 4 á 7 van 3, y de 5 á 8 van 3: resultando por *resta* 3322.

En efecto, de la naturaleza de las operaciones hechas resulta que el minuendo tiene 2 unidades simples, 2 decenas, 3 centenas y 3 millares mas que el sustraendo, luego escede al sustraendo en 3322.

Sírvanos de segundo ejemplo hallar la diferencia entre los números 83456 y 28784.

Habiendo dispuesto los dos números como en el ejemplo precedente, se dirá lo primero, de 4 á 6 van 2, que se escriben bajo la columna de las unidades.

$$\begin{array}{r} 83456 \\ 28784 \\ \hline 54672 \end{array}$$

Pero al pasar á la columna de las decenas, tropezamos con una dificultad: la cifra 8 del sustraendo es mayor que la del minuendo, y por consiguiente, no puede restarse. Para obviar esta dificultad, se toma con el pensamiento una centena de la cifra siguiente, que vale 10 decenas, y juntándolas con las 5, hacen 15; y despues se dice: de 8 á 15 van 7, que se escriben debajo de las decenas.

Pasando á la columna de las centenas, observamos que la cifra 4 del minuendo debe disminuirse en una unidad, que se le tomó en la resta precedente, y diremos de 7 á 3 no se puede restar, pero tomando como antes, un millar que vale 10 centenas y juntándolas con las otras 3, tendremos 13, y diremos, de 7 á 13 van 6, que escribiremos en la columna de las centenas.

Pasando á los millares, vemos que de 2, que quedan, no pueden quitarse 8; pero diremos de 8 á 12 van 4, y pondremos esta cifra en el órden de los millares.

En fin, la cifra 8 de las decenas de millar ha perdido una unidad y se ha convertido en 7: diremos, pues, de 2 á 7 van 5, y habremos concluido.

De modo que la *resta pedida* será 54672.

Para comprender bien cómo se llega por este medio al fin deseado, basta observar que, atendidos los artificios empleados para efectuar las sustracciones parciales, pueden disponerse los dos números de la manera siguiente:

	Decena de millar.	*Millares.*	*Centenas.*	*Decenas.*	*Unidades.*
Minuendo...	7	12	13	15	6
Sustraendo.	2	8	7	8	4
Resta. . . .	5	4	6	7	2

Donde se ve que el minuendo contiene dos unidades, 7 decenas, 6 centenas, 4 millares y 5 decenas de millar mas que el sustraendo, y por consiguiente le escede en 54672 unidades.

Sirva de tercer ejemplo restar 158429 de 300405.

Como 9, cifra de unidades del sustraendo, es mayor que 5 su correspondiente en el minuendo, debe tomarse una decena á la cifra superior inmediata; pero como esta cifra es 0, tenemos que recurrir á la de centenas y tomar 1 que vale diez decenas, y

$$\begin{array}{r} 99\ 9 \\ 300405 \\ 158429 \\ \hline 141976 \end{array}$$

como solo necesitamos 1, dejamos 9 encima del 0 y juntamos la otra con el 5; tendremos 15 y diremos; de 9 á 15 van 6, cuya cifra escribiremos en el lugar de las unidades simples.

Pasando á las decenas, diremos de 2 á 9 van 7.

Al llegar á las centenas, como la cifra del minuendo solo vale 3, por la que le hemos quitado, y como de 3 no se pueden quitar 4, recurriremos á la primera cifra de la izquierda; pero esta es 0 y la siguiente tambien; iremos, pues, á la de mas allá, que es el 3, y tomarémos una unidad. Esta vale 10 decenas de millar y 100 millares: solo necesitamos uno, dejaremos 99 sobre los dos ceros, y juntando 1 millar con 3 centenas, tendremos 13 y diremos, de 4 á 13 van 9, escribiendo esta cifra en la columna de las centenas.

Tenemos en las dos restas parciales siguientes un 9 en vez de cada 0 y diremos, de 8 á 9 va 1; y de 5 á 9 van 4.

Por último, llegando á la columna final de la izquierda, diremos, de 1 á 2 (porque hemos quitado al 3 una unidad) va 1: y por consiguiente, el resto pedido será 141976.

En efecto, pensando en la descomposicion que ha sufrido el minuendo, se verá que puede escribirse así la operacion:

	Cent. de millar.	*Dec. de millar.*	*Millares.*	*Centenas.*	*Decenas.*	*Unidades.*
Minuendo.. .	2	9	9	13	9	15
Sustraendo. .	1	5	8	4	2	9
	1	4	1	9	7	6

Luego el minuendo tiene 6 unidades, 7 decenas, 9 centenas, 1 millar, 4 decenas de millar y 1 centena de millar mas que el sustraendo, y por lo tanto le escede en 141976.

Regla general. *Para restar de un número entero otro número entero menor, escríbase el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan en columna las unidades de cada órden, tirando despues una raya. En seguida se restan sucesivamente todas las cifras del sustraendo de sus correspondientes del minuendo, empezando por las de especie inferior y escribiendo las restas parciales unas en pos de otras de derecha á izquierda*: el número que resulta debajo de la raya es la *resta total* ó el *resultado pedido.*

Cuando una cifra del sustraendo es mayor que su correspondiente del minuendo, se aumentan á esta 10 *unidades de su especie, y en la resta parcial siguiente se quita una unidad al minuendo de la especie inmediata superior.*

Si la cifra ó cifras inmediatas á la izquierda de la del minuendo que es menor que su correspondiente del sustraendo, fueran ceros, se aumentan sin embargo de memoria las 10 unidades á la cifra que las necesita; pero en las restas parciales siguientes los ceros se consideran como nueves y se disminuye una unidad á la primer cifra significativa que haya á la izquierda de los ceros.

Siguiendo esta regla se hallará que si de. .	603000401
se resta.	305724787
quedan.	297275614

13. *Observacion.* Si cada cifra del sustraendo fuera menor que su correspondiente del minuendo, sería indiferente empezar la operacion por la derecha ó por la izquierda. Pero como suele suceder que alguna de las cifras del sustraendo sea mayor que su correspondiente del minuendo, y entonces no se puede hacer la sustraccion parcial, sin recurrir á la inmediata superior, resulta que es preferible comenzar por la derecha para poder acudir cómodamente cuando sea necesario á los órdenes de unidades superiores.

14. *Otro procedimiento* para efectuar la sustraccion.

Empecemos por observar que *puede añadirse á los dos términos de la sustraccion un mismo* número de unidades sin *alterar la diferencia entre dichos términos.*

Porque si *por un lado*, añadiendo por ejemplo 10 unidades al minuendo, crece la resta en 10 unidades, claro es que *por otro lado* disminuye la resta en otras 10 unidades que se le han añadido al sustraendo.

Así, siendo 5 la diferencia entre 12 y 7, es tambien 5 la diferencia entre 12 *mas* 6, y 7 *mas* 6, ó sea entre 18 y 13.

Del mismo modo, siendo 7 la diferencia entre 24 y 17, tambien es 7 la diferencia entre 24 *mas* 9 y 17 *mas* 9; es decir, entre 33 y 26.

Esto entendido, veamos en lo que consiste el segundo procedimiento.

Volvamos al segundo ejemplo arriba puesto:

$$\begin{array}{r} 83456 \\ \underline{28784} \\ 54672 \end{array}$$

Despues de restar 4 de 6 y de obtener 2 que se escribe bajo las unidades, pasamos á la columna de las *decenas*, y decimos: de 8 á 5, no puede ser; pero de 8 á 15, van 7.

Pasando á la columna de las *centenas* (en vez de disminuir, como en el procedimiento primero, *una* unidad á la cifra 4), se la deja tal cual está, se *aumenta* á la cifra 7 del sustraendo *una* unidad, y se dice: de 8 á 14, van 6.

(Esa *unidad*, que se añade á la cifra 7, es precisamente la *centena* añadida á las 5 decenas del minuendo para hacer posible la segunda sustraccion parcial, por cuya causa hay compensacion.)

Pasando á la columna de los *millares*, en vez de decir: de 8 á 12 se dice: de 9 á 13, van 4.

(La unidad que se añade á la cifra 8, es precisamente la *unidad de millar* aumentada á la cifra 4 para hacer posible la tercera sustraccion parcial; de modo que hay compensacion.)

Pasando en fin á la última columna, se dice: de 3 á 8, van 5.

(La unidad que se añade á la cifra 2 es precisamente la *decena de millar*, aumentada á la cifra 3 para hacer posible la cuarta sustraccion parcial.)

Se obtiene, pues, por resultado 54672.

Pasemos ahora al tercer ejemplo:

$$\begin{array}{r} 300405 \\ 158529 \\ \hline 141876 \end{array}$$

Procediendo como en el anterior, diremos: de 9 á 15, van 6; de 3 á 10, van 7; de 6 á 14 van 8; de 9 á 10 va 1; de 6 á 10 van 4; en fin, de 2 á 3 va 1; y la *diferencia pedida* es 141876.

Esta segunda manera de operar puede figurarse por el cuadro siguiente:

SEGUNDO EJEMPLO.

Decen. de millar.	*Millares.*	*Centenas.*	*Decenas.*	*Unidades.*
8	13	14	15	6
3	9	8	8	4
5	4	6	7	2

TERCER EJEMPLO.

Cent. de millar.	Dec. de millar.	Millares.	Centenas.	Decenas.	Unidades.
3	10	10	14	10	15
2	6	9	6	3	9
1	4	1	8	7	6

Fácilmente se ve por esta disposicion, que en el segundo ejemplo el minuendo 83456 se aumenta en 11100 unidades, y el sustraendo 28784 en las mismas 11100; por consiguiente hay compensacion. Se ve tambien que en el tercer ejemplo el minuendo 300405 se aumenta en 11110 unidades, y el sustraendo 158529 se aumenta en la misma cantidad 11110; luego hay tambien compensacion.

El segundo procedimiento, generalmente mas sencillo y cómodo en la práctica que el primero, es particularmente ventajoso, cuando en el minuendo hay uno ó varios *ceros* entre dos cifras significativas; porque operando de este modo, nada hay que cambiar en las cifras del minuendo.

Advertencia. Debe cuidarse mucho de no añadir la unidad á la cifra del sustraendo mas que cuando la sustraccion parcial precedente no ha podido verificarse sin aumento del minuendo.

Despues se verá que donde es indispensable este procedimiento, es en la operacion de dividir.

De todos modos encargamos á los principiantes que se familiaricen con uno y otro modo de sustraer.

Pruebas de la adicion y sustraccion.

15. Se llama *prueba* de una *operacion aritmética otra operacion, cuyo objeto es asegurarnos de la exactitud de la primera.*

La prueba de la adicion se hace repitiendo la suma empezando por la izquierda. *Hecha la suma de las cifras de la primer columna de la izquierda, se resta de la parte que le corresponde en la suma total, se escribe debajo el resto que se reduce de memoria á unidades del órden inferior siguiente para juntarlas con las que haya del mismo órden en la suma* *total. Lo mismo se hace la suma parcial de la segunda columna de la izquierda, y se resta de la parte que le corresponde en la suma total; continuando de este modo hasta la última columna, cuya suma restada de la parte correspondiente no debe dar resto alguno.*

Así, habiendo visto que los cuatro números

	5047
	859
	3507
	846
dán la suma.	10259
	2120

para comprobar el resultado 10259, sumarémos los mismos números empezando por la izquierda, y diremos 5 y 3 hacen 8 millares, que quitados de 10 millares, dán 2 millares: estos dos millares unidos á la cifra 2 de las centenas, dán 22 centenas: sumo la columna de las centenas diciendo 8 y 5 son 13 y 8 son 21, que restado de 22, dá 1 centena de resta; unida esta centena con las 5 decenas de la suma, tengo 15 decenas: 4 decenas y 5 son 9 y 4 son 13; resto 13 de 15 y me quedan 2, que junto con el 9 forma 29; y concluyo diciendo 7 y 9 son 16, y 7 son 23, y 6 son 29; restando 29 de 29 queda 0: luego la operacion está bien hecha.

La prueba de la sustraccion se hace *sumando con el sustraendo la diferencia obtenida*, y es evidente que debe resultar el minuendo, pues la diferencia no es mas que el esceso de este sobre aquel.

Así, en el ejemplo adjunto.	83456
	28784
despues de haber hallado que la resta es. . . .	54672
la sumarémos con 28784, y obtendrémos. . . .	83456

que es el mismo minuendo.

16. Nuevos ejemplos de sumas y restas con sus pruebas.

Sumas.

83054	700548
256870	897597
748759	6588
90874	69764
130909	407300
8746	987847
1319212	1207046
324880	4276690
	3243340

Restas.

4073050062	20004001003
2803767086	8405128605
1269282976	11598872398
4073050062	20004001003

PROBLEMA. *Tenia en caja un banquero* 65750 *reales; pero ha hecho varios pagos. El primero de* 13259 *reales, el segundo de* 18704 *reales, el tercero de* 22050 *reales, y el cuarto de* 9850 *reales: quiere saber cuánto le queda en caja despues de los cuatro pagos.*

Solucion. Deberá el banquero sumar las cantidades de los cuatro pagos hechos y restar la suma de la cantidad que tenia en caja: el resultado de esta sustraccion le dirá el dinero que debe quedarle.

Disposicion de la operacion.

13259	65750 cantidad que habia en caja.
18704	63863 suma de los pagos.
22050	1887 cantidad sobrante en caja.
9850	
63863	

Quedan, pues, al banquero 1887 reales.

Se observará que al hacer las operaciones hemos considerado como *abstractos* á los números dados, á pesar de ser *concretos* segun el enunciado; pero obtenido el resultado 1887, le hemos considerado como de la especie correspondiente segun el problema. Así debe hacerse siempre en las aplicaciones; pues siendo los procedimientos de las operaciones completamente independientes de la naturaleza de los números, se consideran siempre estos como abstractos, debiendo dar despues al resultado final el nombre de la unidad que indica el enunciado de la cuestion.

DE LA MULTIPLICACION.

17. *Multiplicar un número por otro es* (n.º 9) *formar un tercer número que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad;* por consiguiente cuando ambos números propuestos son enteros, su multiplicacion equivale á *tomar el primero tantas veces como unidades tiene el segundo.*

Se llama *multiplicando* el número que se multiplica, *multiplicador* aquel por quien se multiplica, ó sea el que dice cuántas veces se debe tomar el otro, y *producto* el resultado de la multiplicacion: el multiplicando y multiplicador juntos se llaman *factores del producto.*

Llevando las cosas al estremo de la precision, la multiplicacion es una suma; porque para obtener el producto bastaria escribir en columna tantos números iguales al multiplicando como unidades tiene el multiplicador, sumándolos en seguida. Pero como esta operacion sería larguísima, cuando el multiplicador fuera algo crecido, se ha procurado simplificarla por medio de otra operacion que ha tomado el nombre de *multiplicacion.*

18. Mientras cada factor solo consta de una cifra, se obtiene fácilmente el producto por medio de sucesivas adiciones del multiplicando: así, para multiplicar 7 por 5 diremos: 7 y 7 son 14, y 7 son 21, y 7 son 28, y 7 son 35: y como 35 es el resultado de la suma de 5 números iguales á 7, espresa el producto de 5 veces 7 que se pedia.

Los estudiantes deben al principio ejercitarse en esa forma de la multiplicacion para grabar en la memoria sus resultados, y poder despues obtener fácilmente los productos de los números de mas de una cifra. Sin embargo, mientras no se adquiera el hábito, bueno será tener á la vista la tabla adjunta llamada de *multiplicacion ó de Pitágoras*, por el nombre de su inventor, ó al menos del que mas estendió su uso.

Tabla de la multiplicacion.

Direccion horizontal.

Direccion vertical.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primera línea horizontal de números se forma sumando 1 sucesivamente consigo mismo, hasta llegar á 9.

La segunda sumando 2; la tercera sumando 3, y así sucesivamente hasta sumar 9 consigo mismo, que dá la última.

Tambien podria formarse la tabla por columnas verticales, porque estas constan respectivamente de los mismos números que las horizontales. Así, la sesta línea horizontal consta de los números 6, 12, 18, 24,... 54; y la sesta columna vertical tiene exactamente los mismos 6, 12, 18, 24,... 54.

Para buscar en esta tabla el producto de dos números de una sola cifra, se busca el multiplicando en la primera línea horizontal, y se baja *verticalmente* hasta encontrarnos en frente del *multiplicador*, que se hallará en la primera columna vertical: el número que haya en la *casilla* correspondiente es el producto.

Por ejemplo, para hallar el producto de 8 por 5, se baja desde 8, tomado en la primera fila horizontal hasta en frente de 5 tomado en la primera columna vertical, y el número 40 contenido en la casilla es el producto pedido.

Tambien podria tomarse el 8 en la primer columna vertical y seguir *horizontalmente* hasta llegar debajo del 5 tomado en la primera fila horizontal; resultando tambien así que es 40 el producto.

19. Supongamos ahora *que el multiplicando conste de mas de una cifra y el multiplicador de una sola.* — Por ejemplo, multiplicar 8459 por 7.

Podria (n.º 17) obtenerse el resultado escribiendo unos debajo de otros 7 números iguales á 8459, como se ve al márgen, y sumándolos en seguida, con lo cual resultaria 59213, que es el producto.

$$\begin{array}{r} 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ 8459 \\ \hline 59213 \end{array}$$

Pero es evidente que esto equivale á tomar 7 veces las 9 unidades del multiplicando, 7 veces las 5 decenas, 7 veces las 4 centenas, etc., y á sumar todos estos productos.

A este fin se escribe el multiplicador debajo del multiplicando como se ve al lado, se tira una raya y se dice: 7 veces 9 son 63 (*véase* la Tabla de Pitágoras), es decir, 6 decenas y 3 unidades; se escriben las 3 unidades bajo las unidades y se guardan las 6 decenas para añadirlas al producto de las decenas del multiplicando por el 7.

$$\begin{array}{r} 8459 \\ 7 \\ \hline 59213 \end{array}$$

Se dice despues: 7 por 5 son 35 y 6, que se llevan, son 41 decena, ó 4 centenas y 1 decena: se escribe la 1 decena en su lugar y se llevan las 4 centenas.

7 por 4 son 28, y 4, que se llevan, son 32 centenas, ó 3 millares y 2 centenas: se escriben las 2 centenas en su sitio y se llevan los 3 millares.

En fin, 7 por 8 son 56, y 3 que se llevan son 59, que se escribe á la izquierda de las centenas, porque ya no hay mas cifras en el multiplicando.

Resulta, pues, el producto 59213.

Donde se ve que PARA MULTIPLICAR UN NÚMERO DE VARIAS CIFRAS POR OTRO DE UNA SOLA, *es necesario multiplicar sucesivamente las unidades, decenas, centenas, etc., del multiplicando por el multiplicador, escribiendo cada producto parcial* *en el sitio correspondiente, y guardando en cada multiplicacion parcial las decenas para juntarlas con las decenas, las centenas para juntarlas con las centenas, etc.*

SIRVA DE SEGUNDO EJEMPLO MULTIPLICAR 47008 POR 9.

Se dice lo primero: 9 por 8 son 72; se escribe el 2 en el órden de unidades y se guarda el 7.

Despues 9 por 0 es 0; pero como llevábamos 7 decenas, se escriben estas en el órden de decenas.

$$\begin{array}{r} 47008 \\ 9 \\ \hline 423072 \end{array}$$

9 por 0 es 0; se escribe 0 en el órden de centenas, porque no las hay y se debe sin embargo llenar el sitio.

Despues, 9 por 7 son 63; escribo 3 y llevo 6.

Por último, 9 por 4 son 36 y 6 que llevo son 42, que escribo á la izquierda de la cifra anterior.

Luego el producto pedido es 423072.

20. Antes de pasar al caso en que el multiplicador consta de mas de una cifra, indicarémos el medio de hacer un número 10, 100, 1000,..., veces mayor, ó multiplicarle por 10, 100, 1000,...

Del principio fundamental de la numeracion (n.º 5) resulta evidentemente, que si se coloca un 0 á la derecha de un número ya escrito, cada una de sus cifras significativas avanza un paso hácia la izquierda y espresa por lo tanto unidades diez veces mayores que antes. Del mismo modo si se escriben dos 0 á la derecha se hace 100 veces mayor, pues cada cifra significativa espresa unidades 100 veces mayores, y así sucesivamente.

Luego *para multiplicar un número entero cualquiera por* 10, 100, 1000,..., *basta escribir á su derecha* 1, 2, 3,... *ceros*.

Así, los productos de 439 por 10, 100, 1000, 10000,... son respectivamente 4390, 43900, 439000, 4390000,...

21. *Considerémos ahora el caso en que el multiplicando y el multiplicador constan de mas de una cifra.*

Nos proponemos multiplicar. 87468
por. 5847

$$\begin{array}{r} 612276 \\ 3498720 \\ 69974400 \\ 437340000 \\ \hline 511425396 \end{array}$$

Se empieza por escribir el multiplicador debajo del multiplicando, de modo que se correspondan en columna las unidades de cada órden, tirando despues una raya por debajo. Hecho esto, se observa que multiplicar 87468 por 5847, equivale á tomar el multiplicando 7 veces, mas 40 veces, mas 800 veces, mas 5000 veces, reuniendo despues los productos parciales.

Por la regla del n.º 19, encontrarémos primero el producto de 87468 por 7, y tendremos el producto 612276.

Pero ¿cómo obtendremos el de 87468 por 40?

Concibamos por un momento que se han escrito en columna 40 números iguales á 87468: sumándolos todos se tendria el producto pedido. Pero es evidente que esos 40 números forman diez grupos de á 4 números iguales á 87468; y estos 4 números sumados equivalen al producto de 87468 por 4, que se puede formar por la regla del n.º 19, y es igual á 349872: luego multiplicando este número por 10, ó lo que es lo mismo poniendo un 0 á su derecha (n.º 20), se tendria 3498720, que sería el producto de 10 veces, 4 veces 87468, ó sea 40 veces 87468.

Se ve, pues, que esta operacion equivale á multiplicar el multiplicando por la cifra 4 considerada como de unidades simples, escribiendo despues un 0 á la derecha y colocando el resultado 3498720 en columna debajo del primer producto parcial.

Del mismo modo, para efectuar la multiplicacion de 87468 por 800, basta multiplicar 87468 por 8, lo cual dá 699744, y añadir luego dos ceros á su derecha; de este modo se obtiene el tercer producto parcial 69974400, que se escribe debajo de los dos productos precedentes. En efecto, 800 números iguales á 87468, colocados unos debajo de otros, forman evidentemente 100 grupos de á 8 números iguales á 87468, ó bien 100 números iguales al producto de 87468 por 8, es decir á 69974400.

Por medio de un razonamiento semejante se probaria que para multiplicar 87468 por 5000, basta multiplicarle por 5, añadir tres ceros á la derecha del producto, y escribir el resultado 437340000 debajo de los tres productos precedentes.

Efectuando ahora la suma de los cuatro productos parciales, se halla por resultado ó *producto total* 511425396.

Advertencia. En la práctica se omiten por lo comun los ceros á la derecha de los productos parciales de decenas, centenas, millares, etc.; pero se escribe cada producto parcial debajo del producto precedente, corriéndole un lugar hácia la izquierda, es decir, *haciendo que su primera cifra ocupe el mismo lugar que el que ocupa la cifra correspondiente del multiplicador.*

Regla general. Para multiplicar un número de varias cifras por otro tambien de varias cifras, *se multiplica todo el multiplicando por la cifra de unidades del multiplicador* (segun la regla del n.º 19); *despues se multiplica sucesivamente todo el multiplicando por las cifras de decenas, de centenas, etc., consideradas como simples unidades, escribiendo unos debajo de otros los productos parciales de modo que se correspondan las cifras de igual órden, lo que se consigue corriendo á cada uno un lugar hácia la izquierda; por último, se suman los productos parciales, y se tiene el producto total pedido.*

22. Pueden ser ceros algunas de las cifras del multiplicador, y entonces debe modificarse al parecer la regla dada para la colocacion de los productos parciales.

Multipliquemos, por ejemplo. . .	870497
por.	500407
	6093479
	3481988
	4352485
	435602792279

Se multiplica primero todo el multiplicando por 7; lo cual dá el producto 6093479.

Ahora como no hay decenas en el multiplicador, pasamos á multiplicar por 4, cifra de las centenas del multiplicador, lo cual dá el producto 3481988, y como debe espresar *centenas*, le colocamos bajo el primer producto, corriéndole *dos* lugares hácia la izquierda.

Del mismo modo, no habiendo en el multiplicador ni *millares* ni *decenas de millar*, pasamos á multiplicar por 5, cifra de las *centenas de millar*; y el producto 4352485 se escribe debajo del anterior, corriéndole otros tres lugares hácia la izquierda.

En general *cuando se encuentran uno ó mas ceros entre dos cifras significativas del multiplicador, se corre el pro-*

ducto correspondiente á la primera cifra significativa, que viene á la izquierda de los ceros, tantos lugares mas uno hácia la izquierda, respecto del producto precedente, como ceros hay intermedios.

Para evitar cualquiera equivocacion puede comprobarse si la primera cifra de la derecha del producto parcial ocupa el mismo lugar que la correspondiente del multiplicador.

23. Si uno ó ambos factores terminan en ceros, puede abreviarse la multiplicacion, multiplicando como si los ceros no existiesen y escribiéndolos luego á la derecha del producto obtenido.

Multipliquemos por ejemplo. . . .	47000
por.	2900
	423
	94
	136300000

Despues de haber multiplicado 47 por 29 por la regla ya sabida, se escriben los cinco ceros á la derecha del producto, y se obtiene 136300000.

En efecto, si tuviéramos que multiplicar 47000 por 29, es claro que despues de haber multiplicado 47 por 29, tendríamos que hacer que el producto representára millares, es decir, unidades de la misma especie que el multiplicando; para lo cual deberíamos añadir *tres ceros*. Pero multiplicar un número por 2900, equivale (n.º 21) á tomar cien veces su producto por 29; luego deben añadirse otros *dos ceros*. La misma reflexion se haria respecto de cualquier otro caso.

24. A poco que se reflexione sobre el procedimiento de la multiplicacion, se comprende la necesidad de empezar la operacion por la derecha, *á lo menos en las multiplicaciones parciales por cada una de las cifras del multiplicador*, á causa de las unidades de órden superior que generalmente se forman al multiplicar una cifra del multiplicando por otra del multiplicador. Pero nada estorba invertir el órden de las multiplicaciones parciales por las diferentes cifras del multiplicador, como puede verse en el ejemplo siguiente.

Hemos empezado aquí la multiplicacion por las cifras de las centenas del multiplicador, y bajo la misma cifra se ha colocado la primera del producto parcial; pero en la operacion siguiente hemos cuidado de correr el producto un lugar *hácia la derecha*, es decir, hemos cuidado de colocarle de modo que su primera cifra corresponda en columna con las decenas de ambos factores. El tercer producto se ha corrido tambien un lugar hácia la derecha respecto del precedente. Pero ordinariamente se forman los productos de izquierda á derecha por ser mas natural y mas cómodo.

$$\begin{array}{r} 5704 \\ 487 \\ \hline 22816 \\ 45632 \\ 39928 \\ \hline 2777848 \end{array}$$

25. Terminarémos la teoría de la multiplicacion, demostrando una propiedad que hace un gran papel en la ciencia de los números, y es la siguiente: *en toda multiplicacion de dos números abstractos, puede invertirse el órden de los factores sin que se altere el producto.*

Así el producto de 37 por 29 es siempre el mismo, bien se multiplique 37 por 29, bien por el contrario, 29 por 37: así tambien el producto de 459 por 528 es igual al producto de 528 por 459, etc.

Para darnos cuenta de esta propiedad respecto de los dos números 37 y 29, podemos concebir que se forma un cuadro como aquí ponemos

1, 1, 1, 1, 1, 1 . . . . . | 37
1, 1, 1, 1, 1, 1 . . . . .
1, 1, 1, 1, 1, 1 . . . . .
1, 1, 1, 1, 1, 1 . . . . .
1, 1, 1, 1, 1, 1 . . . . .
. . . .
. . . .
.
.
29 . . . .

en el cual se ha escrito la unidad 37 veces en línea horizontal, y se han puesto así hasta 29 líneas parecidas.

Esto supuesto, es claro que la *suma total* de las unidades contenidas en este cuadro, es igual á *tantas veces* las 37 unidades de una línea horizontal, *como unidades hay* en una columna vertical, que son 29; es decir, que la *suma* será igual al producto de 37 por 29. Pero podria tambien decirse que la misma *suma* es igual á *tantas veces* las 29 unidades de una columna vertical *como unidades hay* en una línea horizontal, que son 37; es decir, que es igual al producto de 29 por 37. Luego el producto de 37 por 29 *es igual* al producto de 29 por 37.

Este razonamiento puede aplicarse á dos números cualesquiera: luego etc. (*).

26. Nos reduciremos por lo pronto á esponer dos aplicaciones de este principio.

1.ª Supongamos que la naturaleza de una cuestion nos conduce á multiplicar 75 por 5642.

Será preferible multiplicar 5642 por 75, puesto que el producto ha de ser igual y que así solo haremos *dos* productos parciales, cuando tendriamos que hacer *cuatro* si multiplicáramos 75 por 5642.

2.ª Por medio de este mismo principio podria esplicarse el procedimiento de la multiplicacion de dos números de *varias cifras*.

Para ello, volvamos al primer ejemplo (n.º 21) y sea multiplicar

87468 por 5847.

Despues de haber formado el primer producto parcial 612276, es necesario formar el de 87468 por 40.

Pero como multiplicar 87468 por 40, equivale, segun el principio recien demostrado, á multiplicar 40 por 87468, ó 4 *decenas* por 87468, resulta que el segundo producto parcial debe espresar *decenas*, y por lo tanto su *primera cifra de la derecha* debe colocarse bajo las decenas del producto total.—Del mismo modo, multiplicar 87468 por 800, equivale á multiplicar 800 ó sea 8 centenas por 87468; luego el producto de 87468 por 8, ó de 8 por 87468, debe espresar *centenas;* por consiguiente, su cifra primera de la derecha debe colocarse en el órden de las *centenas*, etc.

Podria tambien hacerse observar que el principio de la in-

(*) Podria deducirse esta proposicion de la Tabla de Pitágoras, observando la disposicion de los números (n.º 19): bastaria para esto concebir la Tabla prolongada convenientemente, por ejemplo, hasta 10000 veces 10000, si se consideráran dos factores inferiores á este límite, pero la demostracion puesta arriba nos ha parecido mas sencilla.

version de los factores de un producto es independiente de todo procedimiento para efectuar la multiplicacion, y por lo tanto podria establecerse antes de esponer la teoría de la multiplicacion.

DE LA DIVISION.

27. Dividir un número por otro, es (n.° 9) *hallar un tercer número que, multiplicado por el segundo, reproduzca el primero:* ó bien (n.° 25) *hallar un tercer número que, multiplicando por él el segundo, reproduzca el primero.*

Así, el objeto de la division es: *dado un producto de dos factores y uno de ellos, determinar el otro;* por consiguiente, es una operacion inversa de la multiplicacion.

Como en una multiplicacion de números enteros, el *producto* se compone de tantas veces el multiplicando como unidades tiene el multiplicador, puede tambien decirse que dividir un número entero por otro, es *buscar cuántas veces el primero,* considerado como producto, *contiene al segundo*, considerado como multiplicando: el número de veces es entonces el multiplicador. En fin, tambien se ha visto (n.° 9) que dividir un número entero por otro *es hacer el primero tantas partes como unidades tiene el segundo.*

Estos dos últimos aspectos que se dán á la division no convienen rigorosamente sino á los números enteros, mientras la primera definicion conviene á todos los números enteros ó fraccionarios. Y sin embargo, de esas últimas definiciones se han deducido los nombres puestos á los términos de la division.

Así, el primer número se llama *dividendo* (número que ha de dividirse); el segundo *divisor*, y el tercero *cociente*, de la palabra latina *quoties*, porque dice *cuántas veces* el dividendo contiene al divisor.

Resulta evidentemente de estas definiciones, que cuando se haya obtenido el cociente, para *probar* la operacion *bastará multiplicar el divisor por el cociente*, ó recíprocamente; y *si la operacion está bien hecha, deberá resultar el dividendo.*

Recíprocamente, en la multiplicacion el producto puede considerarse como *dividendo,* el multiplicando como *divisor* ó como *cociente,* y el multiplicador como *cociente* ó como *divisor:* y se hará *la prueba* de la multiplicacion *dividiendo el producto por uno de los factores: si la operacion está bien hecha, habrá de resultar el otro factor.*

Esplicadas estas nociones, pasemos á esponer el procedimiento de la division.

28. Así como la multiplicacion puede hacerse por medio de la *adicion* de varios números iguales entre sí, así tambien podria hallarse el cociente de una division por una série de sustracciones.

En efecto, que se trate, por ejemplo, de *dividir* 60 por 12: cuantas veces podamos quitar 12 de 60, otras tantas estará 12 contenido en 60; por consiguiente, el cociente es igual al número de sustracciones que puedan efectuarse hasta destruir el dividendo.

En este ejemplo, como hay que hacer 5 sustracciones sucesivas, se deduce que es 5 el cociente.

60	
12	
48	1.ª resta.
12	
36	2.ª resta.
12	
24	3.ª resta.
12	
12	4.ª resta.
12	
0	5.ª resta.

Pero este modo de obtener el cociente sería larguísimo en la práctica, principalmente cuando el dividendo fuera muy grande respecto del divisor. Lo que constituye esencialmente la regla de la division es otro procedimiento especial y abreviado para obtener el resultado apetecido.

29. Sabiendo de memoria todos los productos de dos números de solo una cifra contenidos en la tabla de Pitágoras (n.º 18), se puede *determinar* fácilmente *el cociente de la division de un número de una ó dos cifras, por otro número de una sola, con tal que el cociente no haya de tener tampoco mas de una.*

Por ejemplo, 35 dividido por 7 dá de cociente 5; ó bien se dice: 7 en 35, ó 35 entre 7, á 5 (porque se sabe que 5 veces 7 son 35); ó bien tambien la 7.ª parte de 35, son 5, porque 7 veces 5 son 35.

Dividir 68 *por* 9. Como 7 por 9 que son 63, y 8 por 9 que son 72, comprenden á 68, resulta que 68 dividido por 9, dará el cociente 7 y quedará un *resíduo* 5: lo cual se espresa diciendo la 9.ª parte de 68 es 7 y sobran 5.

Del mismo modo, ¿47 entre 8 á cómo les toca?— A 5; ó la 8.ª parte de 47 es 5 y sobran 7.

Mas adelante diremos lo que debe hacerse con el resíduo cuando el divisor no está exactamente contenido en el dividendo.

30. Consideremos el caso en que el *dividendo está com-*

puesto de un número cualquiera de cifras, teniendo el divisor una sola.

Sea por ejemplo *dividir* 6766453 *por* 8.

		Prueba por la multiplicacion.
6766453	8	845806
64	845806	8
36		6766448
32		5
46		6766453
40		
64		
64		
053		
48		
5		

Despues de haber escrito el divisor á la derecha del dividendo, y de haberlos separado por una raya vertical, se tira debajo del divisor otra raya horizontal.

Esto supuesto, desde luego se ve que si *mentalmente* colocamos á la derecha del divisor 8, *cinco* ceros, lo cual equivale á multiplicarle por *cien mil*, y despues *seis* ceros, lo cual equivale á multiplicarle por *un millon*, los dos productos 800000 y 8000000 son, el uno mas *pequeño* y el otro mas *grande* que el dividendo.

De donde ya puede deducirse que el *cociente pedido* está comprendido entre *cien mil* y *un millon*, es decir, está compuesto de *seis* cifras, de modo que sus unidades superiores han de ser *centenas de millar*, cuya *cifra* es necesario hallar.

Para esto, como el producto del divisor por la cifra buscada no puede dar unidades de órden inferior á *centenas de millar*, se infiere que todo ese producto ha de estar contenido en las 67 *centenas de millar* del dividendo; y así, si dividimos 67 por 8, lo cual dá el cociente 8 y el resíduo 3, podremos asegurar que 8 es la cifra de las *centenas de millar* del cociente total.

En efecto, 800000 veces 8 dá 6400000, número que puede restarse del dividendo 6766453; mientras que 900000 veces 8 ó 7200000, no puede restarse.

Determinada de esta manera la cifra 8, se coloca bajo el divisor; en seguida despues de sustraer de 67 el producto de 8 por 8 que son 64, se obtiene el resíduo 3, á cuya derecha pueden concebirse escritas las restantes cifras del dividendo, lo cual daria 366453 por resíduo total de esta primera operacion (*).

Pareceria necesario escribir á la *derecha* del cociente obtenido *cinco* ceros, á fin de darle su verdadero valor; pero se omite el hacerlo por la disposicion que se dá á las siguientes cifras del cociente.

Ahora es menester determinar la cifra de las *decenas de millar del cociente*. Para esto observemos que el producto del divisor por esta cifra, no puede dar unidades de órden *inferior á las decenas de millar*, y por consiguiente ha de encontrarse todo en las 36 *decenas de millar* del dividendo restante. Bajaremos, pues, al lado del resíduo 3 la cifra siguiente 6 del dividendo (como se ve en el cuadro de la operacion); despues dividiremos 36 por 8 y obtendremos el cociente 4 y el resíduo 4. Este cociente, que necesariamente espresa las *decenas de millar* del cociente total, se escribe á la *derecha* del primer cociente 8; despues se resta de 36 el producto de 4 por 8, que son 32, y al lado del resíduo 4, se baja la cifra siguiente del dividendo y tendremos 46 (**).

Para obtener la cifra de las *unidades de millar* del cociente total, se divide 46 por 8, y se obtiene el cociente 5 y el resíduo 6; se escribe este nuevo cociente 5 á la derecha de los dos primeros; se resta de 46 el producto de 5 por 8, que son 40, y al lado del resto 6 se baja la siguiente cifra 4 del dividendo, con lo cual tenemos 64 (***).

Para obtener la cifra de las *centenas* del cociente total, se divide 64 por 8, y se obtiene el cociente 8 sin resíduo alguno: se escribe el nuevo cociente á la derecha de los tres primeros; se resta de 64 el producto de 8 por 8, que tambien son 64, y

---

(*) Esta primera operacion equivale evidentemente á sustraer del dividendo 800000 veces el divisor, ó á hacer 800000 sustracciones sucesivas del divisor 8.

(**) Esta nueva operacion equivale á restar 40000 veces 8 ó sea 320000 de 366433, ó á hacer 40000 sustracciones sucesivas del divisor 8

(***) Esta tercera operacion equivale á 5000 sustracciones sucesivas del divisor 8.

al lado del residuo 0 se baja la siguiente cifra del dividendo, lo cual dá 05, ó simplemente 5.

Aquí se presenta una particularidad: como el nuevo dividendo parcial 05 ó 5, destinado á dar las *decenas* del cociente total, es menor que el divisor 8, debe inferirse que el cociente total no tiene *decenas* (y en efecto, el dividendo restante es 53, número menor que diez veces 8 ú 80.)

En este caso se pone un 0 en el cociente á la derecha de las cuatro cifras obtenidas, á fin de ocupar el lugar de las decenas que faltan, y de conservar á las cifras precedentes su *valor relativo;* despues se baja á la derecha del resto 5 la cifra siguiente, que es la última del dividendo, y se continúa la operacion.

El cociente de dividir 53 por 8 es 6, y queda el resíduo 5: se escribe el 6 á la derecha de los cinco primeros cocientes obtenidos; se resta de 53 el producto de 8 por 6 que son 48, y se obtiene finalmente 5 por *resíduo de la operacion total*, siendo 845806 (*) el *cociente pedido*, como puede comprobarse fácilmente multiplicando 8 por 845806, ó mejor (n.° 26) 845806 por 8, y añadiendo el resíduo 5 al producto obtenido.

Advertencia. En la práctica, se omite el escribir, en cada operacion, debajo del dividendo parcial correspondiente, el producto del divisor por el cociente obtenido: lo que se hace es escribir solamente el resto de la sustraccion y á su lado se baja la cifra siguiente del dividendo segun se ve en la operacion adjunta:

```
6766453 | 8
 36     |------
  46    | 845806
   64
    053
      5
```

31. Nos abstendremos de establecer para el caso de la di-

(*) Todas esas operaciones que acaban de ejecutarse, equivalen evidentemente á 800000, mas 40000, mas 5000, mas 800, etc.: mas 6 ó sea 845806 sustracciones sucesivas, en las cuales el sustraendo es constantemente el mismo divisor 8.

vision que acabamos de tratar, una *regla general* fundada en los razonamientos precedentes; porque existe, para este caso solamente, un procedimiento mas cómodo y sobre todo mas sencillo, bajo el punto de vista de la disposicion de los cálculos.

Para esplicarlo repetiremos el ejemplo precedente:

	6766453 ha de dividirse por		8;
cociente	845806;	resíduo,	5.

Sabemos ya (n.º 27) que dividir un número por 8, ó buscar las veces que 8 está contenido en aquel número, equivale á hacer del número dado 8 partes iguales, ó bien á tomar la octava parte.

Esto supuesto, tomando en el dividendo las dos primeras cifras de la izquierda, 67, se dice:

La *octava* parte de 67 (n.º 29) son 8 y sobran 3;

Se escribe el cociente 8 bajo la cifra 7 del dividendo; despues se coloca *mentalmente* el resíduo 3, que espresa 3 *centenas de millar* ó 30 *decenas de millar*, á la izquierda de la cifra 6 del dividendo, que espresa tambien *decenas de millar*, y se dice:

La *octava* parte de 36 es 4 y sobran 4;

Se escribe el segundo cociente 4 á la derecha del primero; colocando tambien *mentalmente* el resto 4, que espresa 4 *decenas de millar* ó 40 *unidades de millar*, á la izquierda de la cifra 6 de las *unidades de millar* del dividendo, se dirá igualmente:

La *octava* parte de 46 son 5 y sobran 6;

Se escribe este tercer cociente 5 á la derecha del precedente, y continuando de la misma manera se dirá:

La *octava* parte de 64 (número formado por el resto 6 y por la cifra 4 del dividendo) es 8 con el resto 0;

Se escribe este cuarto cociente á la derecha del tercero.

La *octava* parte de 05 ó simplemente 5 (cifra de las decenas del dividendo), es 0, con un resíduo 5;

Se escribe este quinto cociente á la derecha del cuarto.

Finalmente, la *octava* parte de 53 es 6 y queda de resíduo 5;

Se escribe á la derecha del quinto cociente este resto y este último cociente parcial, que así resulta colocado debajo de la cifra de las unidades del dividendo; y con esto se obtiene por resultado final:

El *cociente* 845806 con el *resíduo* 5.

2.° Ejemplo. Sea dividir 8230200409 por 6;
cociente 1371700068; resíduo 1.

Aquí siendo la primera cifra 8 de la izquierda del dividendo *mayor* que el divisor, se infiere que el cociente debe tener *unidades de la misma especie* que las de la cifra 8; y por eso se dice:

La *sesta* parte de 8 es 1, que se escribe bajo la cifra 8, y nos restan 2;

Despues se dice: la *sesta* parte de 22 es 3, que se coloca á la derecha de la cifra 1, y nos queda el resto 4;

La *sesta* parte de 43 es 7, con el resto 1;
La *sesta* parte de 10 es 1, con el resto 4;
La *sesta* parte de 42 es 7, con el resto 0;
La *sesta* parte de 0 es 0, con el resto 0;
La *sesta* parte de 0 es 0, con el resto 0;
La *sesta* parte de 4 es tambien 0, con el resto 4;
La *sesta* parte de 40 es 6, con el resto 4;
Finalmente, la *sesta* parte de 49 es 8, con el resto 1.

De modo que el cociente obtenido es 1371700068, con el resíduo 1.

Es tanto mas importante comprender bien este procedimiento, cuanto que va á tener inmediata aplicacion en el caso de la division que nos falta que esponer.

Haremos observar además que, cuando se sabe de memoria la tabla de la multiplicacion estendida hasta el número 12, se pueden obtener muy fácilmente por el mismo medio la 10.ª, la 11.ª y la 12.ª parte de un número cualquiera.

Pondremos dos ejemplos para ejercicio.

1.°— 897614708497 se ha de dividir por 12. Cociente 74801225708; *resíduo* 1.

(La 12.ª parte de 89 es 7 y quedan 5; la 12.ª parte de 57 son 4 y restan 9; la 12.ª parte de 96 es 8, y queda 0; la 12.ª parte de 1 es 0 y resta 1; la 12.ª parte de 14 es 1 y quedan 2; etc.).

2.° ejemplo. Sea dividir 23054273896 por 11. Cociente 2095843081; *resíduo* 5.

(La 11.ª parte de 23 es 2 y queda 1; la 11.ª parte de 10 es 0 y quedan 10; la 11.ª parte de 105 es 9 y quedan 6; la

11.ª parte de 64 es 5 y quedan 9; la 11.ª parte de 92 es 8 y quedan 4; y así sucesivamente.)

Para hacer la division por 10, en lugar de aplicar el procedimiento anterior, es mas sencillo separar mentalmente en el dividendo la *última cifra de la derecha*. La parte que queda á la izquierda espresa el *cociente*, y la cifra *separada*, que puede ser 0, es el *resíduo de la division*. Este modo de proceder es consecuencia evidente del sistema de numeracion.

Así la 10.ª parte de 2710548 es 271054 y el resíduo 8; la 10.ª parte de 863005074 es 86300507 y el resíduo es 4; la 10.ª parte de 3805670 es exactamente 380567; resultados que se encontrarian igualmente aplicando el procedimiento anterior.

32. Pasemos al caso en que, *constando de varias cifras el dividendo y el divisor, ha de tener el cociente una cifra sola.*

Este caso merece particular atencion, pues ha de servirnos de base para la esplicacion del caso general.

Sea *dividir* 730465 *por* 87467:

730465	87467
699736	8
30729	

Observemos ante todas cosas que el producto del divisor por 10, es 874670, cantidad *superior* al dividendo; por consiguiente el cociente buscado es *menor* que 10 y no puede tener mas de *una sola cifra.*

En segundo lugar observemos que, el producto de las 8 *decenas de millar* del divisor por la cifra buscada no puede dar unidades de órden inferior á las mismas decenas de millar, y por lo tanto debe hallarse íntegro en las 73 decenas de millar del dividendo; de donde ya se infiere que la cifra buscada no puede ser mayor que el cociente de la division de 73 por 8.

Esto nos conduce á dividir las dos primeras cifras 73, de la izquierda del dividendo por la primera cifra 8 del divisor, lo cual dá el cociente 9 con un resíduo. Pero 9 es evidentemente *mayor* qne el cociente buscado; porque, en la multiplicacion del divisor total por esa cifra, hallariamos, al multiplicar por 9 la cifra 7 de las *unidades de millar* del divisor, 63 unidades de este órden, y por consiguiente llevariamos 6 decenas de millar para añadirlas á las 72 decenas de millar, producto de la primera cifra 8 del divisor por el supuesto cociente 9; y esto nos daria 78 *decenas de millar*, número *superior* al dividendo.

Debemos, pues, tomar 8 á lo mas como cifra del cociente buscado: y como, efectuando la multiplicacion de 87467 por 8 (cuya cifra se ha colocado debajo del divisor), se obtiene un producto 699736, menor que el dividendo, y que puede restarse de este, inferimos que 8 es el verdadero cociente. Sustrayendo ahora del dividendo el producto obtenido, segun indica el cuadro de la operacion, se encuentra el *resíduo* 30729.

Advertencia. Veremos en el número 34, que en la práctica se omite el escribir debajo del dividendo el producto del divisor por el cociente.

Sirva de nuevo ejemplo *dividir* 974065 *por* 189768:

$$\begin{array}{r|l} 974065 & 189768 \\ \underline{948840} & \overline{5} \\ 25225 & \end{array}$$

Como el dividendo y el divisor se componen de un *mismo número de cifras*, es claro que el cociente solo debe tener *una cifra*; y para hallarla se divide la primer cifra, 9, de la izquierda del dividendo por la primer cifra, 1, de la izquierda del divisor. El cociente es 9; pero esta cifra y las siguientes inferiores 8, 7, 6, son demasiado grandes, si se tienen en cuenta las dos primeras cifras, 18, de la izquierda del divisor; porque los productos de 18 por 9, 8, 7, 6, son 162, 144, 126 y 108, todos los cuales esceden á las 97 decenas de millar del dividendo; por consiguiente debemos ensayar la cifra 5.

Multiplicando el divisor por 5, se obtiene el producto 948840, que restado del dividendo, dá por resíduo 25225, número *menor* que el divisor; lo cual prueba que el cociente 5 no es menor de lo que debe.

33. *Primera observacion.*— En los dos ejemplos precedentes, hemos podido determinar sin gran trabajo cuál debia ser la verdadera cifra del cociente. Pero como esto no sucede siempre lo mismo, es importante tener un método para reconocer con seguridad sin efectuar la multiplicacion del divisor por el cociente, si la cifra tomada por buena, lo es en efecto.

Este método es el que ahora vamos á esplicar.

Método particular de ensayo.

Sea *dividir* 556428 *por* 69784:

$$\begin{array}{r|l} 556428 & 69784 \\ \underline{488488} & \overline{7} \\ 67940 & \end{array}$$

La division de 55 (conjunto de las dos primeras cifras de la izquierda del dividendo) por 6 (primera cifra de la izquierda del divisor), dá 9 por cociente con 1 de resíduo.

Para que 9 no sea *mayor* que el cociente buscado, es necesario, que 9 veces el divisor sea inferior ó igual al dividendo, ó lo que es lo mismo, que la *novena* parte del dividendo sea *superior ó á lo menos igual al divisor*. Si comenzamos, pues, á tomar la novena parte de 556428, segun el procedimiento indicado en el número 33, encontraremos que las dos primeras cifras serán 61 unidades de millar, número *inferior* á las 69 unidades de millar del divisor; lo cual indica que la *novena* parte del dividendo es menor que el divisor, y que por lo tanto debe desecharse el 9.

Ensayemos el 8 y encontraremos que las tres primeras cifras de la *octava* parte del dividendo son 695 *centenas*, número *inferior* á las 697 centenas del divisor; por consiguiente todavía 8 es demasiado grande.

Ensayemos el 7, y veremos que la primera cifra de la *sétima* parte del dividendo es 7, número de *decenas de millar superior* á las 6 *decenas de millar* del divisor; de donde se infiere que la sétima parte del dividendo es *superior* al divisor, ó en otros términos, que el producto del divisor por 7 es *inferior* al dividendo. Por consiguiente es buena la cifra 7.

Multiplicando el divisor por 7, escribiendo debajo del dividendo el producto 488488, y efectuando despues la sustraccion, se obtiene el resíduo 67940, número menor que el divisor.

Otro ejemplo.—Sea *dividir* 1148367 *por* 169987.

$$\begin{array}{r|l} 1148367 & 169987 \\ \underline{1019922} & \overline{6} \\ 128445 & \end{array}$$

La division de 11 por 1, daria 11 por cociente; pero el cociente buscado no puede ser mayor que 9, puesto que el divisor seguido de un 0, es decir, multiplicado por 10, sería un número superior al dividendo.

Ensayemos el 9: la *novena* parte del dividendo es 12... (*), número *menor* que el divisor 16...; así, 9 debe desecharse.

Ensayemos el 8: la *octava* parte del dividendo es 14..., número *menor* que el divisor 169...; luego el 8 debe tambien desecharse.

Ensayemos el 7: la *sétima* parte del dividendo es 164..., número *menor* que el divisor 169...; luego el 7 debe desecharse.

Ensayemos el 6: la *sesta* parte del dividendo es 19..., número *mayor* que el divisor 16...; luego el número 6 es *bueno*.

Multiplicando el divisor por 6, y restando del dividendo el producto 1019922, se obtiene el resíduo 128445 *menor* que el divisor.

El mecanismo de este *método* de ensayo se deriva directamente de la esposicion del último ejemplo: está reducido á detenerse así que se obtiene una cifra *mayor* ó *menor* que la correspondiente del divisor. Si es *mayor*, puede asegurarse que la cifra ensayada es *buena;* si es *menor*, la cifra ensayada es *demasiado grande* y debe disminuirse.

Añadamos además que todos estos ensayos pueden hacerse *mentalmente*, es decir, de cabeza, sin escribir nada.

Podria tambien suceder (pero raras veces) que procediendo de ese modo, se reprodujeran sucesivamente todas las cifras del divisor, llegando á un *resíduo final*, necesariamente *menor* que la cifra ensayada y que podria ser 0; entonces se tendria no solamente el cociente buscado, sino tambien el resíduo de la division propuesta, que sería aquel mismo *resíduo final*.

Recomendamos espresamente este método de ensayo, como medio de evitar cualquier dificultad en todos los casos posibles.

34. *Segunda observacion.*—Se ha visto en todo lo precedente, que despues de haber determinado una cifra del cociente, es necesario multiplicar por esta cifra el divisor, es-

(*) Aquí como en lo sucesivo reemplazamos las cifras *no escritas* por *otros tantos* puntos.

cribir el producto debajo del dividendo y efectuar la sustraccion colocando el resíduo debajo de aquel producto.

Pero tambien aquí se puede, como se hizo en el caso de la division, esplicado en el número 30 (*véase* la *advertencia*), emplear un procedimiento de abreviacion que vamos á esplicar.

Para esto volvamos al primer ejemplo del número 32:

730465	87467
30729	8

Este procedimiento de abreviacion consiste en no efectuar materialmente el producto del divisor por la cifra 8 del cociente, sino en efectuarlo solo de memoria, escribiendo únicamente el resíduo debajo del dividendo.

Para este fin, se deben restar sucesivamente de las *unidades*, *decenas*, *centenas*, etc., del dividendo, los productos de las unidades de los órdenes respectivos del divisor por el cociente, á medida que van formándose *mentalmente*.

Así, en el ejemplo anterior, se debe lo primero restar de las cinco *unidades del dividendo* el producto 56, del cociente 8 por las 7 *unidades del divisor*.

Pero como esta sustraccion es imposible (lo cual naturalmente ha de suceder casi siempre), se aplica el principio del n.º 14, añadiendo de memoria 6 *decenas* á las 5 *unidades* (número que debia servir de minuendo), teniendo luego el cuidado de añadir en compensacion estas mismas 6 decenas al producto (que despues ha de sustraerse) de las *decenas* del divisor por el mismo cociente 8; así se forma el número 65, del cual se resta 56, obteniendo un resto 9, que se escribe debajo de las unidades del dividendo.

Pasando á la cifra de las *decenas*, 6, del divisor, se dice: 8 veces 6 son 48 *decenas*, que aumentadas en 6 decenas, que se llevan de la operacion precedente, hacen 54 decenas, número que debe sustraerse de las 6 decenas del dividendo: para operar esta sustraccion, se añaden tambien 5 *decenas* (de *decenas*) á aquellas 6 *decenas;* lo cual dá 56 y despues se resta 54 de 56, obteniendo por resto 2, que se escribe bajo la cifra de las *decenas* del dividendo.

Continuando de este modo se dice: 8 veces 4 *centenas* son 32 y 5 (que se habian añadido en la operacion precedente) son 37; 37 no puede restarse de 4; pero se resta de 44 y quedan 7, que se escriben bajo las *centenas* del dividendo.

Decimos luego: 8 veces 7 son 56 y 4 (añadido en la operacion anterior) son 60; de 60 á 60, va 0, cuya cifra se escribe debajo de los *millares* del dividendo.

En fin, 8 veces 8 son 64, y 6 son 70; de 70 á 73 van 3. Por consiguiente el *resíduo total es* 30729.

Volvamos ahora al segundo ejemplo, pero abreviando el discurso y sirviéndonos de las locuciones usadas en la práctica, aunque algunas veces son impropias:

974065	189768
25225	5

Habiendo comprobado que 5 es la *verdadera* cifra del cociente, se dice: 5 veces 8 son 40; de 40 á 45 van 5 y llevo 4 (se sobreentiende que son para añadirlas al producto siguiente.)

Del mismo modo, 5 veces 6 son 30, y 4 son 34; de 34 á 36 van 2, y llevo 3;

5 veces 7 son 35 y 3 son 38; de 38 á 40 van 2, y llevo 4;

5 veces 9 son 45, y 4 son 49; de 49 á 54 van 5 y llevo 5;

En fin, 5 veces 18 son 90, y 5 son 95; de 95 á 97 van 2. El *resíduo total* es 25225.

Advertencia. Es muy importante, á cada operacion parcial, el decir *llevo tantas*, para no olvidar el número que, por compensacion, debe añadirse al producto siguiente.

Para ejercicio podrán los principiantes aplicar el mismo procedimiento á los dos ejemplos del n.° 33.

Hemos tratado con muchos pormenores los casos mas *sencillos de la division*, porque cuando una vez se comprende bien el procedimiento y los *métodos de ensayo y de abreviacion* espuestos, no se puede encontrar dificultad alguna en comprender el *caso general* que ahora vamos á esplicar, y es aquel en que el *dividendo y el divisor* y por lo tanto *el cociente*, tienen un número *cualquiera de cifras*.

Caso general de la division.

35. Sea *dividir* 9176298 *por* 2678:

9176298	2678	Prueba por la multiplicacion.
11422	3426	2678
7109		3426
17538		16068
1470		5356
		10712
		8034
		1470
		9176298

Disponemos aquí los términos de la *division*, el cociente y los restos sucesivos, segun las indicaciones que preceden; despues discurrimos como en el n.° 32:

Si colocamos *mentalmente tres* ceros, y en seguida *cuatro* ceros á la derecha del divisor, se obtienen dos productos, 2678000 y 26780000, uno *menor* y otro *mayor* que el dividendo; de modo que el cociente debe estar comprendido entre 1000 y 10000, ó bien, debe componerse de cuatro cifras, representando *unidades de millar* la primera de la izquierda.

Para encontrar esta cifra observaremos, que su producto por el divisor, debe espresar *unidades de millar*, y por consiguiente debe encontrarse necesariamente en la parte 9176, que son las *unidades de millar* del dividendo. Venimos así á parar á la necesidad de dividir 9176 (que se considera como *primer dividendo parcial*) por 2678; y el *mayor* número de veces que el segundo número está contenido en el primero, representa la cifra de las *unidades de millar* del cociente total.

Ahora bien, el *verdadero* cociente de 9176 por 2678, obtenido segun el método de ensayo indicado en el n.° 35, es 3. Se escribirá por consiguiente 3 debajo del divisor, despues se resta del dividendo el producto del divisor por 3, bien sea colocando este producto debajo del primer dividendo parcial, y restando el uno del otro; bien sea (como en el n.° 36) efectuando simultáneamente la multiplicacion y la sustraccion segun se indica en el cuadro de la operacion (*).

Siendo 1142 el resíduo de esta primera sustraccion, si á continuacion suya escribiéramos las restantes cifras del dividendo, resultaria un nuevo dividendo con el cual podria operarse, como con el dividendo primitivo; pero como ahora debemos determinar la cifra de las *centenas* del cociente, y el producto del divisor por esta cifra, no pudiendo dar *unidades* de órden inferior al de las *centenas*, ha de encontrarse completo en las 11422 *centenas* del dividendo restante, se baja á la derecha del resto 1142 *únicamente* la *cifra siguiente*, 2, del dividendo; lo cual dá un *segundo dividendo parcial*, 11422, con el que debe procederse como con el primero.

El *verdadero* cociente de la division de 11422 por 2678 es 4, que se escribe debajo del divisor y á la derecha del primer cociente obtenido (*véase* el n.º 30); despues se resta del *segundo dividendo parcial* el producto del divisor por el nuevo cociente.

Siendo 710 el resto de esta sustraccion, se baja á su derecha la cifra siguiente, 9, del dividendo; lo cual dá un *tercer dividendo parcial*, 7109, destinado á producir la cifra de las *decenas* del cociente total.

Dividiendo 7109 por 2678, se obtiene por verdadero cociente la cifra 2, que se escribe á la derecha de los dos primeros cocientes obtenidos; multiplicando el divisor por 2 y restando del tercer dividendo parcial este producto, se obtiene el resto 1753, á cuya derecha se baja la última cifra, 8, del dividendo, obteniéndose así el *cuarto dividendo parcial*, 17538.

Finalmente, siendo 6 el *verdadero* cociente de 17538 por 2678, se multiplica el divisor por 6 y el producto se resta del cuarto dividendo parcial, lo cual conduce al *resíduo final* 1470.

El *cociente pedido* es por lo tanto 3426, con el *resíduo* 1470; lo cual puede comprobarse multiplicando 2678 por 3426, y añadiendo 1470 al producto segun manifiesta el cuadro de la operacion (**).

(*) Esta primera operacion equivale evidentemente á sustraer del dividendo 3000 veces el divisor.

(**) Las cuatro operaciones que acaban de ejecutarse conducen al mismo resultado que si se hubiera sustraido sucesivamente del dividendo, 3000 veces, *mas* 400 veces, *mas* 20 veces, *mas* 6 veces, el divisor propuesto.

Otro ejemplo. Sea *dividir* 42206581591 *por* 569874:

42206581591	569874
2315401	74063
3590559	
1713151	
3529	

Colocando mental y sucesivamente, primero *cuatro* ceros y despues *cinco* ceros á la derecha del divisor, se obtienen dos productos, 5698740000 y 56987400000, que *comprenden* al dividendo; lo cual prueba que el cociente buscado está á su vez *comprendido* entre 10000 y 100000, ó bien, que se compone de *cinco* cifras, siendo *decenas de millar* la primera de la izquierda.

Las dos primeras cifras, 74, de la izquierda de este cociente, que se colocan debajo del divisor, se encuentran sin dificultad, como en el primer ejemplo.

Pero llegando al resto 35905, si para formar el *tercer dividendo parcial* destinado á producir la cifra de las *centenas del cociente total*, bajamos á la derecha de aquel resto la cifra siguiente, 5, del dividendo, obtenemos 359055, número *menor* que el divisor; lo cual prueba (véase el primer ejemplo del n.° 32) que el cociente no tiene *centenas*.

Debemos entonces escribir un *cero* á la derecha de los dos primeros cocientes obtenidos, y bajando despues á la derecha de 359055, la cifra siguiente, 9, del dividendo, tendremos el *cuarto dividendo parcial* 3590559, que dividiremos por 569874, á fin de sacar la cifra de las *decenas* del cociente.

Continuando la operacion, encontraremos por último el *cociente* total 74063, con el *resíduo* 3529.

36. Regla general. Para dividir un número entero cualquiera por otro, *escríbase el divisor á la derecha del dividendo, separándolos por una línea vertical y tirando otra horizontal debajo del divisor.*

Hecho esto, *tómese á la izquierda del dividendo, el número de cifras* NECESARIO *y* SUFICIENTE *para que en ellas esté contenido el divisor;* así se obtiene *el primer dividendo parcial, compuesto, ó de* TANTAS CIFRAS, *ó de* TANTAS MAS UNA *como tiene el divisor.*

Búsquese cuántas veces contiene al divisor este primer di-

videndo parcial, y escríbase el cociente resultante debajo del divisor; multiplíquese el divisor por la cifra obtenida, y el producto se resta del primer dividendo parcial.

A la derecha del resto se baja la cifra siguiente del dividendo, y se tendrá el SEGUNDO DIVIDENDO PARCIAL.

Búsquese cuántas veces contiene al divisor este segundo dividendo, y escríbase el nuevo cociente á la derecha del primero; multiplíquese el divisor por este segundo cociente y el producto réstese del segundo dividendo parcial.

A la derecha del segundo resto bájese la cifra siguiente del dividendo, y se tendrá el TERCER DIVIDENDO PARCIAL, *con el cual se operará como con los anteriores.*

Continúese esta série de operaciones hasta bajar la última cifra del dividendo, teniendo cuidado, en cada operacion, de escribir el cociente obtenido á la derecha de los precedentes (á fin de dar á estos su valor relativo.)

Si sucede que, despues de bajar una cifra, resulta un dividendo parcial menor que el divisor, se pone 0 *en el cociente, y despues se baja otra cifra para formar otro nuevo dividendo parcial.*

Cuando, terminadas todas estas operaciones, se llega á un resíduo *nulo*, se dice que el dividendo es *exactamente divisible por el divisor; si queda algun resíduo*, se añade EN LA PRUEBA *al producto del divisor por el cociente encontrado.*

37. De la naturaleza misma del procedimiento, se deducen las consecuencias siguientes:

1.ª Cada *division parcial* no puede dar un *cociente* mayor que 9, y debe conducir á un *residuo menor* que el divisor.

En virtud de esto puede conocerse, en el curso de la operacion, cuando se ha *determinado mal* una cifra del cociente, y si debe *aumentarse* en una ó mas unidades.

2.ª La *primer cifra de la izquierda* del cociente espresa unidades del *mismo órden* que las espresadas por la *primera cifra* de la derecha de la parte del dividendo, que ha debido separarse para formar el primer dividendo parcial; y por lo tanto el cociente contiene *tantas cifras mas una*, como quedan en el dividendo á la derecha de las separadas.

En otras palabras, el número de cifras del cociente es, segun los casos, la DIFERENCIA *entre el número de cifras del dividendo y el número de cifras del divisor, ó* ESTA MISMA DIFERENCIA AUMENTADA EN UNA UNIDAD.

Casos particulares de la division.

38. Observacion. — Cuando uno ó ambos términos de la division terminan en *ceros*, puede simplificarse el procedimiento general.

Examinaremos especialmente el caso en que *solo* el divisor termina en ceros, porque la misma regla de simplificacion puede aplicarse á todos los otros, escepto *uno solo.*

1.° Sea *dividir* 47543296 *por* 690000.

Procedimiento general.		Procedimiento particular.		
47543296	690000	4754	3296	69
6143296	68	614		68
resíduo 623296		*resíduo* 62; *verdadero resíduo* 623296		

Hé aquí la regla que debe seguirse: *suprímanse* los ceros que terminan el divisor, y *sepárense* á la derecha del dividendo *tantas cifras* como ceros hay á la derecha del divisor. Los términos de la division quedan con esto reducidos á 4754 y 69; *efectúese esta division* por el procedimiento ordinario. El cociente obtenido, 68, es el mismo que dá la division de los dos números propuestos. A continuacion del resíduo correspondiente, 62, escríbanse las cifras 3296, que se habian separado del dividendo; y se tendrá 623296, que será el resíduo *final* de la division.

Esta manera de operar se justifica del modo siguiente: se observa ante todas cosas que las 69 *decenas de millar* del divisor primitivo están contenidas en las 4754 *decenas de millar* del dividendo, *el mismo número de veces* que 69 *unidades simples* están contenidas en 4754 *unidades simples*. Por consiguiente, el cociente de 4754 por 69 debe ser *idéntico* al cociente de la division de los dos números dados.

En segundo lugar, el *resíduo* procedente de la division de 4754 por 69, ha de ser *menor* que el divisor 69; y en consecuencia este mismo resíduo seguido de las cifras, 3296, separadas del dividendo, será tambien *menor* que el divisor seguido de *cuatro* ceros, ó sea 690000; luego 623296 espresa el verdadero resíduo de los dos números 47543296 y 690000.

2.° El caso en que *solo* el dividendo termina en ceros, no dá generalmente lugar á ninguna simplificacion.

Sin embargo, si la parte de la izquierda de los ceros, hubiera de contener exactamente al divisor, podria por lo pronto hacerse abstraccion de los ceros; y despues de haber obtenido el cociente de la division de la parte de la izquierda por el divisor, se escribirian á la derecha de este cociente los ceros que terminan el dividendo.

Ejemplo. Sea *dividir* 375000 *por* 125.

La division de 375 por 125 dá 3 de *cociente exacto;* luego el cociente pedido será 3 seguido de los *tres ceros* del dividendo, ó 3000. Pero esta simplificacion no tiene importancia alguna.

3.° Puede ocurrir que haya *el mismo número de ceros* á la derecha del dividendo y del divisor.

En este caso, se *suprimen los ceros* en los dos términos de la division; se dividen despues una por otra las dos partes que quedan á la izquierda, y al *resíduo obtenido se añaden los ceros que terminaban el dividendo.*

Sea *dividir* 5679800 *por* 8600:

```
         56798 | 00 | 86
         519        | 660
residuo   38        verdadero resíduo 3800
```

Esta manera de operar está comprendida en el primer caso, con la única diferencia de que el resíduo de la division de 56798 por 86, que es 38, debe ir seguido de los *ceros* que terminan el dividendo primitivo, en vez de agregársele cifras *significativas.*

4.° *Menos ceros* á la derecha del dividendo, que á la derecha del divisor.

Sea *dividir* 68235947000 *por* 547600000:

```
         682359 | 47000 | 5476
         13475          | 124
          25239
residuo   3335          verdadero resíduo 333547000
```

Este caso es un compuesto del primero y del tercero.

5.° *Mas ceros* á la derecha del dividendo que á la derecha del divisor.

Sea *dividir* 25036900000 *por* 875000:

```
        25036900 | 000 | 875
         7536          | 28613
          5369
           1190
            3150
residuo      525        residuo verdadero 525000
```

Este caso propiamente hablando no es mas que una particularidad del primero.

39. Observacion general. — Como en las tres primeras operaciones de Aritmética se empiezan siempre los cálculos *por la derecha*, es natural preguntar por qué en la division se empiezan al contrario, *por la izquierda*.

Para responder á esta pregunta es necesario observar que siendo el dividendo la suma de los productos parciales del divisor por *las unidades*, *las decenas*, *las centenas, etc.*, del cociente, se confunden unos con otros todos esos productos parciales, y no es posible al pronto poner en evidencia el producto del divisor por las unidades, ó por las decenas, etc., mientras por el procedimiento seguido se determina al momento en qué parte del dividendo se halla *el producto del divisor por las unidades superiores;* despues se obtiene la cifra de las unidades del órden *inmediatamente inferior*, y así sucesivamente.

Hé aquí dos ejemplos para el ejercicio:

1.°	*Dividir*	12187610837	*por*	15619;
	Cociente,	780306;	*resíduo*,	11423.
2.°	*Dividir*	2487623393304	*por*	5076078;
	Cociente,	490068;	*resíduo,*	0.

Pruebas de la multiplicacion y division.

40. Hemos establecido en el n.° 27, que la definicion misma de la division nos ha conducido á hacer la prueba de la *multiplicacion* por la *division*, y la prueba de la *division* por la *multiplicacion*. En el discurso de la esposicion del procedimiento hemos dado el medio de efectuar esas pruebas, pero re-

servamos para en adelante esplicar medios mas fáciles de comprobar entrambas operaciones.

APLICACIONES.

41. En todo lo que hemos dicho hasta ahora sobre la multiplicacion y la division, hemos considerado los números bajo un punto de vista puramente *abstracto* (n.° 2).

Ahora pasamos á aplicar á números *concretos* los principios que hemos desarrollado.

PRIMER PROBLEMA. *Se quiere saber el precio de* 2564 *metros de cierta obra, suponiendo que cuesta el metro* 47 *reales.*

Supuesto que cada metro cuesta 47 reales, repitiendo este valor 2564 veces, se tendrá claramente el valor de los 2564 metros. Así, pues, basta efectuar el producto de 47 por 2564, ó mejor (n.° 25) de 2564 por 47, considerando ambos números como abstractos, segun se indicó en el número 16, para obtener el número de reales que se pide.

El producto es 120508;

luego los 2564 metros cuestan 120508 reales.

SEGUNDO PROBLEMA. *Costando* 39 *reales el metro de cierta obra, ¿cuántos metros podrán hacerse con* 8395 *reales?*

Es claro que cuantas veces esté el 39 contenido en 8395, otros tantos metros podrán construirse: bastará, pues, dividir 8395 por 39, considerándolos como números abstractos; y el cociente será el número pedido de metros.

$$\begin{array}{r|l} 8395 & 39 \\ \cline{2-2} 59 & \\ 205 & 215 \text{ metros } \frac{10}{39} \\ 10 & \end{array}$$

Como se obtiene, además del cociente 215, un resíduo 10, debemos de esplicar el uso que de él se hace.

Observemos para esto que si el dividendo tuviera 10 reales menos, sería el producto exacto de 39 por 215, y el número de metros pedido sería exactamente 215; pero como además hay 10 reales, se trata de determinar qué parte ó *fraccion* de metro podria construirse con los 10 reales.

Con *un* real se construiría evidentemente una 39.ª parte de metro ó $\frac{1}{39}$ de metro, puesto que se hace un metro con 39 reales; luego con 10 reales debe construirse 10 veces una 39.ª parte ó $\frac{1}{39}$ de metro, es decir, *diez* 39.ª partes de metro ó $\frac{10}{39}$ de metro (véase el n.° 8): luego 215 metros, mas $\frac{10}{39}$ de metro forman el resultado pedido.

Tal es *en general* el uso que debe hacerse del resíduo de una division, cuando al tiempo de efectuarla se trata de resolver una cuestion relativa á números concretos.

Se concibe la unidad del cociente (cuya naturaleza se determina siempre por el enunciado del problema) *dividida en tantas partes iguales como unidades tiene el divisor; se toma una de estas partes tantas veces como unidades tiene el resíduo de la division*, y la fraccion resultante *se junta al cociente entero obtenido.*

Esto es lo que se llama *completar* el cociente, que en estos casos es *fraccionario.*

Tercer problema. *Con* 21478 *reales se han comprado* 895 *varas de cierta tela: se desea saber el precio de la vara.*

Si se conociera el precio de la vara, y le repitiéramos 895 veces, obtendríamos los 21478 reales: luego, no conociéndole, será necesario *buscar un número, que multiplicado por* 895, *nos dé el producto* 21478; *y por consiguiente* (n.° 27), *dividir* 21478 *por* 895.

$$\begin{array}{r|l} 21478 & 895 \\ \cline{2-2} 3578 & \text{reales } \frac{893}{895} \\ 893 & 23 \end{array}$$

Como el dividendo, á mas del producto de 895 por 23, contiene todavía 893 reales, resulta que el precio de la vara es 23 reales, mas *una fraccion* que se trata de determinar.

Para conseguirlo observemos que $\frac{1}{895}$ repetido 895 veces produce 1; y $\frac{893}{895}$ repetido 895 veces reproducirá 893; luego 23 mas $\frac{893}{895}$ es *un número que multiplicado por* 895 *repro-*

duce 21478: luego el precio pedido es 23 reales mas $\frac{893}{895}$ de real.

Este resultado es conforme á la regla deducida del ejemplo precedente.

Cuarto problema. *Supongamos que hay que repartir por partes iguales* 1348708 *reales entre* 498 *personas, ¿á cómo les tocará á cada una?*

$$\begin{array}{r|l} 1348708 & 498 \\ \cline{2-2} 3527 & \quad\text{reales}\ \frac{124}{498} \\ 4108 & 2708 \\ 124 & \end{array}$$

Siendo 2708 el cociente de esta division y 124 el resíduo, puede inferirse que si la suma repartible disminuyera en 124 reales, cada persona recibiria 2708 reales. Pero como hay 124 reales mas, resulta que cada persona debe recibir 2708 reales, mas una parte de los 124. Para formarnos idea exacta de esa parte deficiente, se puede *considerar* primero *el número* 124 *como* UN TODO *que ha de dividirse en* 498 *partes iguales, siendo una de ellas la fraccion que ha de completar el cociente;* pero es mas fácil (n.° 8) concebir la *unidad*, que aquí es el real, *dividida en* 498 *partes iguales* llamadas 498.as partes, y tomar *de ellas* 124, resultando de este modo ser $\frac{124}{498}$ la fraccion que ha de añadirse al cociente entero.

Segun esto cada persona ha de recibir 2708 *reales mas* $\frac{124}{498}$ de *real.*

Advertencia. Se observará que las tres últimas cuestiones se han escogido de modo que presenten los *diferentes puntos de vista* bajo los cuales puede considerarse la division.

42. El último ejemplo nos proporciona ocasion de esponer la proposicion siguiente, cuya importancia se reconocerá mas adelante.

Dividir un número, por ejemplo, 124, *en tantas partes iguales como unidades tiene otro,* 498, *equivale á dividir la unidad en tantas partes iguales como unidades tiene el segundo, y á tomar una de estas partes tantas veces como unidades tiene el primero.*

En efecto, si en lugar de 124, tuviéramos que dividir solamente 1 en 498 partes iguales, cada parte sería $\frac{1}{498}$ de la unidad; pero como el número que ha de repartirse es 124 veces mayor, se concibe que el resultado de la reparticion debe ser tambien 124 veces mayor, ó igual á 124 veces $\frac{1}{498}$, ó bien por último á $\frac{124}{498}$ de la unidad.

Del mismo modo, dividir 15 en 28 partes iguales, equivale á tomar 15 veces la 28.ª parte de la unidad.

Porque si tuviéramos que dividir solamente 1 en 28 partes iguales, cada una de ellas estaria espresada por $\frac{1}{28}$ pero como tenemos que dividir 15, ó sea un número 15 veces mayor, el resultado debe ser igual á $\frac{1}{28}$ de 15, ó á $\frac{15}{28}$ de la *unidad*.

43. Los diversos problemas que acaban de resolverse demuestran que los razonamientos propios para dar respuesta á las cuestiones sobre *números concretos*, conducen siempre á operar con *números abstractos*, debiéndose despues dar al resultado la significacion indicada por la naturaleza de la cuestion.

Segun esto, es evidente que puede *estenderse* á los números *abstractos* lo que hemos establecido, al tratar de cuestiones relativas á números *concretos*, sobre el uso que debe hacerse del *residuo de una division* para completar el cociente, y que por lo tanto *el cociente* de la division de dos números enteros cualesquiera puede ser *entero ó fraccionario*.

Esta observacion es muy importante para la esposicion de los *principios* y de las *propiedades* de los números en general, que va á ser objeto del capítulo segundo, en el cual consideraremos esclusivamente números *abstractos*.

Ejercicios.

I. Enunciar el número 10030047089500476.

II. Enunciar el mismo número, *suprimiendo* la cifra de en medio.

III. ¿Cuántas cifras debe tener un número, cuya primer cifra de la izquierda representa *centenas de septillones?*

IV. ¿Qué número falta al número 2047035007 para formar la *unidad* seguida de *tantos ceros* como cifras tiene el mismo número?

V. Mandándose restar 58900564 de 62080347, si se sustituye al *sustraendo* lo que le falta para formar la unidad seguida de 8 ceros, y se suma este *complemento* con el *minuendo*, ¿qué deberia hacerse despues para obtener un resultado igual, al que nos daria la sustraccion directa?

VI. Componiéndose el dia de 24 horas, la hora de 60 minutos, y el minuto de 60 segundos, se pregunta: Cuántos segundos tiene un año, suponiéndole compuesto de 365 dias.

VII. Se pregunta qué *variacion* debe esperimentar el producto de 67084 por 3769, suponiendo: 1.° que el multiplicador se *aumente* en 10, permaneciendo sin variar el multiplicando; 2.° que el multiplicando se *aumente* en 10, permaneciendo invariable el multiplicador; 3.° *que se aumenten simultáneamente* en 10 unidades cada uno de los factores.

VIII. *¿Cuál es la poblacion* de un departamento, cuya superficie es de 16537 *hectáreas*, conteniendo cada hectárea por término medio 45 habitantes?

IX. La luz del sol viene á la tierra en 8 *minutos* y 13 *segundos* (cada minuto tiene 60 segundos), y la distancia recorrida por ella son 34600000 *leguas:* se desea saber *cuántas leguas anda en cada segundo.*

X. Se ha distribuido una suma de 24672 reales entre tres personas, de modo que la primera reciba la *tercera* parte de dicha cantidad, la segunda la *cuarta* parte de lo que queda *mas* 4112 reales; y la tercera la *octava* parte de lo que queda mas 7196 reales. *Se desea saber la parte de cada persona.*

CAPITULO II.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS.

§ I. *Principios sobre la multiplicacion y la division.*— § II.—*Máximo comun divisor.*—§ III. *Divisibilidad.*

44. INTRODUCCION.—A fin de hacer mas concisos, y á veces mas generales, los razonamientos sobre los números, que hemos de emplear en la esposicion de sus propiedades, nos serviremos de aquí en adelante, de ciertos signos *abreviativos*, que pasamos á enumerar.

PRIMERAMENTE, las letras a, b, c, etc. que se sustituyen á las cifras, ó para hacer resaltar mejor la generalidad de los razonamientos, ó para abreviar la escritura de los números.

Algunas veces tambien, suele ser ventajoso usar letras señaladas con acentos ($'$ $''$ $'''$) que se pronuncian *primera*, *segunda, tercera*, etc.

EN SEGUNDO LUGAR, los signos que se colocan entre dos números para espresar que son *iguales* entre sí, ó que el uno es *mayor* ó es *menor* que el otro, á saber:

El signo $=$, que se encuentra *igual á;* y los signos $>$, $<$, que se enuncian *mayor que*, ó *superior á*, y *menor que*, ó *inferior á*.

Así, la espresion $a=b$ quiere decir que el número representado por a, es *igual* al número representado por b; y por eso toma el nombre de *igualdad*.

Las espresiones $a>b$, $a<b$, se llaman *desigualdades*, y significan, en el primer caso, que a es *mayor que* b, ó *superior á* b; y en el segundo que a es *menor que* b, ó *inferior á* b.

La abertura del signo se dirige siempre hácia el lado del número mayor.

La parte de la *izquierda* de una *igualdad* ó de una *desigualdad* se llama *primer miembro*, y la parte de la *derecha*, *segundo miembro*.

En tercer lugar, los signos que indican las operaciones que han de ejecutarse con los números, ya estén estos espresados por medio de cifras, ya por medio de letras, á saber:

1.° El signo de la *adicion* $+$, que se enuncia *mas*.

Así, $27+19$, se lée 27 *mas* 19; $37+49+63+\ldots$, $a+b+c+\ldots$, indican la *adicion* de esos varios números entre sí.

Cuando los sumandos, espresados por letras, son *todos iguales* á a, por ejemplo, en lugar de escribir $a+a$, $a+a+a$, $a+a+a+a$, etc., se escribe $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, etc.; y el número particular escrito á la izquierda de la letra a, se llama COEFICIENTE.

2.° El signo de la *sustraccion*, $-$, que se lée *menos*.

Así, $63-38$ se lée 63 *menos* 38, y significa que debe *restarse* 38 de 63.

Del mismo modo, $a-b+c-d-e+f\ldots$ que indican la adicion y la sustraccion de varios números representados por las letras a, b, c, d, e, $f\ldots$.

3.° El signo de la *multiplicacion*, $\times$, ó un *punto*, que se sustituye á las dos palabras *multiplicado por*.

Así, 24×19, ó 24.19, significan 24 *multiplicado por* 19, é indican que ha de efectuarse el *producto* de la multiplicacion de 24 por 19, ó (para abreviar el discurso) el producto de 24 por 19.

Del mismo modo, $a\times b\times c\ldots$, $a.b.c\ldots$, espresan que es necesario multiplicar primero a por b, despues el producto resultante por c, y así sucesivamente.

Cuando los números están representados por letras, y *solo en ese caso*, pueden escribirse correlativos sin interposicion de signo alguno.

Así *abcd*... tendrá la misma significacion que

$$a\times b\times c\times d\ldots,\ \text{ó}\ a.b.c.d\ldots$$

Cuando un número debe ser la suma de otros varios, cuya *adicion* está indicada por medio del signo $+$, y despues se ha de *multiplicar* por otro número, conviene colocar la *suma* entre paréntesis, y escribir á continuacion el número *multiplicador*.

Así, $(37+23)\ 15$, $(a+b+c)\ m$, indican que la suma $37+23$ se ha de multiplicar por 15, y la suma $a+b+c$ se ha de multiplicar por m.

Del mismo modo, para indicar que la *diferencia* $a-b$ *se ha de multiplicar* por m, se escribe así $(a-b)\ m$.

Los paréntesis se sustituyen en estos casos al signo de la multiplicacion.

$(a+b+c+...)\ (f+g)$, $(a-b)\ (c-d)$, indican que se debe *multiplicar* la *suma* $a+b+c+...$ por la *suma* $f+g$, y la *diferencia* $a-b$ por la *diferencia* $c-d$.

4.° El signo de la *division* que es una raya —, encima de la cual se escribe el dividendo y debajo el divisor, ó bien *dos puntos*, :, que se colocan entre los dos términos de la division, quedando el dividendo á la izquierda y el divisor á la derecha.

Así, $\frac{89}{18}$, ó $89 : 18$, indican igualmente que 89 debe *dividirse* por 18.

La notacion :, se emplea con particular ventaja cuando ha de representarse la division de un número *fraccionario* por otro cualquiera entero ó fraccionario.

Así, $\frac{23}{19}$ ha de dividirse por $\frac{47}{15}$; mas fácil es representar esta operacion escribiendo $\frac{23}{19} : \frac{47}{15}$, que si escribiésemos $\dfrac{\frac{23}{19}}{\frac{47}{15}}$.

45. Además de las *cuatro operaciones fundamentales* de la Aritmética, hay otras dos que espondremos mas adelante y para las cuales se usan tambien signos abreviativos: tales son la *formacion de potencias* y la *estraccion de raices*.

Se llama POTENCIA de un número el producto de *multiplicar* varias veces este número por sí mismo; y *grado* de la potencia la cifra ó número particular que espresa *cuantas veces* debe entrar como *factor* en la potencia el número propuesto.

Se llama *raiz* de un número dado otro número que elevado á una *potencia*, reproduce el número primitivo; el *grado* de la raiz que ha de estraerse, es el mismo que el de la potencia que debe formarse para obtener el número primitivo.

Así, los números representados por

$$37 \times 37 \mid 37 \times 37 \times 37 \mid 37 \times 37 \times 37 \times 37 \ldots$$

se llaman la *segunda*, la *tercera*, la *cuarta*,... *potencia* del número 37; y recíprocamente, 37 se llama la *raiz de segunda, tercera, cuarta*,... de aquellos productos.

Esto supuesto, á los signos anteriormente indicados, hay que añadir aun los dos siguientes:

5.° *El esponente*, es decir, una cifra ó un número particular que se coloca á la derecha y *un poco más alto* del número que debe elevarse á cierta potencia; cuyo signo es el *grado* de la potencia que debe formarse.

Así, a^2, a^3, a^4, a^5,..., que se enuncian: *a elevado* á 2, *elevado* á 3, *elevado* á 4..., ó simplemente *a dos, a tres, a cuatro*,..., significan que es necesario elevar el número *a* á la 2.ª, 3.ª, 4.ª,... potencia, ó multiplicarle por sí mismo *una vez, dos veces, tres veces*,...; en una palabra, a^2, a^3, a^4,..., son la escritura abreviada de $a \times a$, $a \times a \times a$, $a \times a \times a \times a$...

Del mismo modo, $a^5\,b^3\,c^2$ espresan de una manera abreviada un producto, en el cual el número *a* debe entrar *cinco* veces por factor, el número *b tres* veces, y el número *c*, *dos* veces.

6.° El *radical* $\sqrt{}$, signo entre cuyos brazos se coloca el *índice* ó *grado* de la *raiz* que debe estraerse.

Por ahora no insistiremos en decir mas sobre este último signo que no hemos de utilizar hasta el capítulo quinto; si hemos dado algunas esplicaciones acerca del *esponente*, es porque habremos de utilizarle en este mismo capítulo.

Establecidos estos preliminares, vamos á esponer algunas propiedades elementales de los números *enteros*, en cuanto pueden servirnos para la simplificacion de las operaciones, espuestas anteriormente, y para la resolucion de ciertas cuestiones que constituyen parte esencial de la Aritmética.

Advertimos además que en todo este capítulo solo nos referiremos á *números enteros:* mas adelante señalarémos, cuáles de estas propiedades corresponden tambien á los *números fraccionarios*.

46. Definiciones.—Empezaremos por definir ciertas palabras ó espresiones, cuyo uso será muy frecuente en todo lo que vamos á esponer.

Ya se sabe que un número *entero* se llama *exactamente divisible* por otro *entero*, cuando existe un *tercer* número, tambien *entero*, que, multiplicado por el segundo, reproduce el primero.

Esto supuesto, se llama *múltiplo* de un número todo número que es *exactamente divisible* por el primero; y por contraposicion este se llama *submúltiplo* del otro.

Así, siendo 24 *exactamente divisible* por 6, es un *múltiplo* de 6, y 6 es *submúltiplo* de 24.

Así tambien, 72 es múltiplo de 9, y 9 submúltiplo de 72; porque 8 veces 9 dán 72. El número 8 es tambien submúltiplo de 72 y este múltiplo de 8.

A la espresion *submúltiplo* de un número se sustituye algunas veces la denominacion de *parte alicuota* del mismo número; pero en vez de ambos nombres, suelen usarse todavía con mas frecuencia los nombres de *factor* ó *divisor*, cuyo uso ha prevalecido, á pesar de que en las operaciones de la multiplicacion y division, tienen ya esas palabras mismas una significacion mas estensa.

Así, pues, de aquí en adelante diremos que 2, 4, 5, 10, son *factores* ó *divisores* de 20, en cuanto esos números están contenidos exactamente en 20.

Así tambien, 3, 5, 15, 6, 10, 12, son *submúltiplos*, *factores* ó *divisores*, ó *partes alicuotas* de 60; de modo que esas cuatro espresiones son sinónimas.

La investigacion de todos los divisores ó factores de un número es una de las cuestiones mas importantes de la Aritmética, y hará parte del capítulo presente.

Podemos ahora pasar á la esposicion de algunas propiedades.

§ I.—Propiedades relativas á la multiplicacion y a la division.

47. Primer principio.—*El producto de la suma* (indicada) *de varios números por otro, es igual á la suma* (indicada) *de los productos de los primeros números por el último.*

Así, dados los números 15, 12, 23 y 47, y otro número 8, digo que se tendrá

$$(15+12+23+47).8=15.8+12.8+23.8+47.8.$$

En efecto, si formamos el siguiente cuadro

$$\begin{array}{l} 15+12+23+47 \\ 15+12+23+47 \\ 15+12+23+47 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

que se supone tener *ocho líneas* horizontales, se ve que la suma de todas las unidades, contenidas en él, es igual, por una parte al producto de $15+12+23+47$ por 8; y por otra á la suma de 8 veces 15, *mas* 8 veces 12, *mas* 8 veces 23, *mas* 8 veces 47.

Luego, etc.; lo cual puede tambien comprobarse efectuando los cálculos indicados.

Como el razonamiento que acabamos de hacer, puede evidentemente aplicarse á otros números, cualquiera que sea el número de los términos dentro del paréntesis, puede concluirse en general que

$$(a+b+c+d+e+\ldots).m=a.m+b.m+c.m+d.m+e.m+\ldots$$

representando a, b, c, d,... los números dados.

48. Consecuencia.—*El producto de la suma* (indicada) *de varios números por la suma* (indicada) *de otros varios, es igual á la suma de los productos de cada uno de los números, que entran en la suma primera, por cada uno de los números, que entran en la suma segunda.*

Así, por ejemplo,

$$(49+37+25+13).(63+27+19)=\left\{\begin{array}{l} 49.63+37.63+25.63+13.63 \\ +49.27+37.27+25.27+13.27 \\ +49.19+37.19+25.19+13.19 \end{array}\right\}.$$

Porque multiplicar $49+37+\ldots$ por $63+27+\ldots$, equivale á tomar 63 veces la suma primera, mas 27 veces la misma suma, mas 19 veces la misma suma, y sumar despues todos esos productos.

En general:

$$\begin{aligned}(a+b+c+\ldots).(m+n+\ldots)=&\,a.m+b.m+c.m \\ &+a.n+b.n+c.n+\ldots\end{aligned}$$

Advertencia. El número total de los términos del segundo miembro de esta igualdad es evidentemente igual al producto del *número de términos* del multiplicando $a+b+c+\ldots$, por el *número de términos* del multiplicador $m+n+\ldots$

49. Segundo principio. —*El producto de la diferencia* (indicada) *de dos números por un tercero es igual á la diferencia* (indicada) *de los productos de cada uno de los dos números primeros por el tercero.*

Es decir que

$$(37-19)\,12=37\times12-19\times12.$$

Porque si se forma el cuadro siguiente

$$\begin{array}{c} 37 - 19 \\ 37 - 19 \\ 37 - 19 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

en el cual cada línea vertical se supone contener 12 números se ve que, para obtener el número total de unidades contenidas en el cuadro, que, tal cual está, representa el producto de 37 — 19 por 12, basta hacer la suma de las unidades contenidas en la primer columna vertical, lo cual equivale á multiplicar 37 por 12, restando despues del producto, 37 × 12, la suma de las unidades contenidas en la segunda columna vertical, ó sea el producto de 19 por 12.

Luego

$$(37-19)\,12=37\times12-19\times12.$$

Y en efecto,

$$(37-19)\,12=18\times12=216,$$

$$37\times12-19\times12=444-228=216.$$

50. Antes de pasar al *tercer principio*, que no es otra cosa mas que el principio del número 25 generalizado, demostraremos una *proposicion preliminar*, cuyo enunciado es el siguiente:

En una multiplicacion de varios números, puede invertirse el órden de los dos últimos factores sin cambiar el producto.

Sea la multiplicacion 43 × 19 × 27 × 15.

Digo que

$$43\times19\times27\times15=43\times19\times15\times27.$$

En efecto, designemos por P el producto 43×19 que podemos suponer ya formado; es necesario probar que

$$P \times 27 \times 15 = P \times 15 \times 27.$$

Tenemos

$$P \times 27 = P + P + P + P + \ldots,$$

y el segundo miembro de esta igualdad se compondrá de 27 números iguales á P y escritos unos en pos de otros.

Si se multiplican los dos miembros por 15, los dos productos resultantes serán evidentemente iguales (*) y tendremos

$$P \times 27 \times 15 = (P + P + P + \ldots) \times 15,$$

ó en virtud del primer principio (n.° 47),

$$P \times 27 \times 15 = P \times 15 + P \times 15 + P \times 15 + \ldots$$

Pero el segundo miembro de esta igualdad está formado de 27 veces el número $P \times 15$, ó es igual á $P \times 15 \times 27$.

Luego, finalmente,

$$P \times 27 \times 15 = P \times 15 \times 27.$$

L. C. D. D.

51. Tercer principio.—*En toda multiplicacion de varios factores*, cualquiera que sea el número de estos, *se puede, sin cambiar el producto, invertir el órden de los factores de todos los modos posibles.*

Sea un producto indicado y que debe efectuarse

$$49 \times 72 \times 137 \times 63 \times 54 \times 19 \times 224.$$

(*) Es claro que, si dos números son iguales, tambien son iguales sus *duplos*, sus *triplos*, etc., y sus *mitades*, sus *tercios*, sus *cuartos*, etc.; de donde resulta que pueden *multiplicarse* ó *dividirse* los dos miembros de una igualdad por *un mismo* número, sin que los nuevos miembros dejen de ser iguales. Esta doble proposision pertenece al género de las que en Matemáticas se llaman *intuitivas*. Muchas veces tendremos ocasion de servirnos de ella en el discurso de esta obra.

Segun la *proposicion preliminar*, el *último* factor 224 puede invertirse con el *penúltimo* 19, lo cual dá

$$49 \times 72 \times 137 \times 63 \times 54 \times 224 \times 19.$$

Tambien se puede invertir ahora el mismo factor 224 con 54, *considerado como el penúltimo término de un producto*; despues, por la misma razon, puede invertirse con 63, y así sucesivamente hasta haber llegado al *segundo* lugar, y entonces se tendrá

$$49 \times 224 \times 72 \times 137 \times 63 \times 54 \times 19.$$

Puede entonces considerarse como el *segundo* factor de un producto de *dos* factores, y pasar al lugar del *primer* factor 49, en virtud del principio del número 25.

Con esto se ve ya que es lícito hacer que el *último* factor del producto propuesto ocupe *todos* los lugares, sin que el producto deje de ser el mismo.

Tomemos ahora un factor situado en un lugar *cualquiera*, 63 por ejemplo; por lo pronto se puede, considerándole como el *último* factor de un producto, hacerle pasar sucesivamente á todos los lugares, *de derecha á izquierda*, y despues, con arreglo siempre á la PROPOSICION PRELIMINAR, considerándole como el *penúltimo* factor de un producto, se le puede hacer pasar, *de izquierda á derecha*, al lugar del factor 54, desde allí al lugar del factor 19, y por último, al lugar de 224. Luego, etc.

52. [Este principio dá lugar á la cuestion siguiente:

En un producto indicado de cualquier número de factores, ¿cuántas mudanzas ó PERMUTACIONES *pueden hacerse entre todos ellos?*

Para responder á esta pregunta, consideraremos sucesivamente los casos de haber *dos*, *tres*, *cuatro*, etc., factores que representaremos por medio de las letras a, b, c, d, etc.

Por lo pronto, respecto de DOS letras a y b, no puede haber mas que las *dos* permutaciones ab, ba; lo cual dá 2, ó 1×2.

Habiendo tres letras a, b, c, se podrá, en cada uno de los productos iguales ab, ba, introducir la tercera letra c, primero en el primer lugar de la derecha, despues en medio y despues á la izquierda; lo cual dá necesariamente los *seis* productos iguales (n.° 51):

$$abc,\ acb,\ cab \mid bac,\ bca,\ cba.$$

Así, pues, para TRES letras, se tienen 6 permutaciones, ó sea

$$2 \times 3 \quad ó \quad 1 \times 2 \times 3 \ \textit{permutaciones}.$$

Habiendo CUATRO letras, como en cada uno de los *seis* productos de tres letras, se puede colocar la cuarta letra en *cuatro* lugares diferentes, comenzando por la derecha, y avanzando hasta el primer lugar de la izquierda, se infiere que las cuatro letras darán 6 veces 4 ó 24 *permutaciones;* es decir, $1 \times 2 \times 3 \times 4$.

Del mismo modo se probaria que CINCO letras dán 24×5 ó sea 120 *permutaciones*, es decir, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$; y así sucesivamente.

En general, si n espresa el número total de letras, el *número total* de las permutaciones será

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \ldots \times n,$$

producto que se compone de la *série natural* de los números desde 1 hasta n.

Se quiere saber, por ejemplo, *de cuantos modos pueden colocarse* 10 *personas al rededor de una mesa suponiendo que cada una de ellas ha de ir ocupando sucesivamente todos los lugares.*

Solucion:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10,$$

ó efectuando los cálculos,

3628800 modos diferentes ó permutaciones.]

53. CONSECUENCIA I.—*Dados tres ó mas números, cuando se multiplica cada uno de ellos por el producto efectuado de todos los otros, los otros, los productos resultantes, son todos iguales entre sí.*

Sean, por ejemplo, los números 23, 49, 57, 19.

Digo que se tiene

$$\begin{aligned} 23 \times (49 \times 57 \times 19) &= 49 \times (23 \times 57 \times 19) \\ &= 57 \times (23 \times 49 \times 19) \\ &= 19 \times (23 \times 49 \times 57) \end{aligned}$$

[Para fijar las ideas, es cosa convenida poner entre paréntesis los productos que se suponen efectuados.]

Esto supuesto, tenemos, en virtud del principio del número 25,

$$23\times(49\times57\times19)=(49\times57\times19)\times23,$$

ó suprimiendo en el segundo miembro el paréntesis que ya es inútil,

$$23\times(49\times57\times19)=49\times57\times19\times23,$$

ó, volviendo á poner el factor 23 en su lugar primitivo, en virtud del tercer principio (n.° 51),

$$23\times(49\times57\times19)=23\times49\times57\times19. \qquad [1]$$

Del mismo modo tenemos

$$49\times(23\times57\times19)=(23\times57\times19)\times49,$$

ó, suprimiendo el paréntesis del segundo miembro,

$$49\times(23\times57\times19)=23\times57\times19\times49,$$

ó, volviendo á poner el factor 49 en su lugar primitivo,

$$49\times(23\times57\times19)=49\times23\times57\times19. \qquad [2]$$

Razonando de un modo análogo sobre los factores 57 y 19, llegariamos á las igualdades,

$$57\times(23\times49\times19)=57\times23\times49\times19, \qquad [3]$$
$$19\times(23\times49\times57)=19\times23\times49\times57. \qquad [4]$$

Y como los segundos miembros de las igualdades [1], [2], [3] y [4] son iguales, segun el principio del número 51, resulta evidentemente que los primeros miembros son tambien iguales entre sí, y la proposicion queda demostrada.

54. CONSECUENCIA II. — *Multiplicar un número por el producto efectuado de varios factores, equivale á multiplicar el número dado sucesivamente por cada uno de dichos factores.*

(Esta proposicion está contenida *implícitamente* en la anterior.)

Sea, en efecto, *multiplicar* 47 por 72, que es el producto efectuado de 8×9.

Si aplicamos aquí el razonamiento que antes nos ha conducido á las igualdades [1], [2], etc., tendremos

$$47\times72 \text{ ó } 47\times(8\times9)=(8\times9)47=8\times9\times47=47\times8\times9.$$

Sea tambien *multiplicar* 19 por 84, que es el producto efectuado de $7\times4\times3$. Tendremos

$$19\times84$$

ó

$$19\times(7\times4\times3)=(7\times4\times3)\times19=7\times4\times3\times19$$
$$=19\times7\times4\times3.$$

55. CONSECUENCIA III.—*Dividir un número por el producto efectuado de varios factores* (cuando la division debe resultar exacta, es decir, sin dejar resíduo alguno) *equivale á dividir el número dado por el primer factor; despues, el cociente obtenido por el segundo factor; despues el nuevo cociente obtenido, por el tercer factor; y así sucesivamente.*

Designemos por D el dividendo, y sea, por ejemplo, 140 el divisor, que puede considerarse como el producto efectuado de *tres* factores, 4, 5, 7; de modo que tenemos

$$140=(4\times5\times7).$$

[Recuérdese que segun se dijo en el número 53 los paréntesis indican aquí un producto efectuado.]

Puesto que la division de D por 140 debe ser *exacta*, tendremos, llamando q al cociente,

$$D=140\times q \text{ (siendo } q \text{ un número entero);}$$

ó poniendo en vez de 140 su valor $(4\times5\times7)$,

$$D=(4\times5\times7)\times q.$$

Pero de esta igualdad se deduce (n.º 53)

$$D=4\times(5\times7\times q);$$

lo cual prueba que D es *exactamente* divisible por el primer factor 4, puesto que $(5\times7\times q)$ es un número *entero*.

Designando por q' el cociente correspondiente obtenemos la nueva igualdad

$$q'=5\times7\times q;$$

ó bien, segun el número 53,

$$q' = 5 \times (7 \times q);$$

de donde se infiere, en segundo lugar, que q' es divisible por el segundo factor, 5, puesto que $(7 \times q)$ es un número *entero*.

Designando por q'' el *nuevo cociente*, tendremos la nueva igualdad

$$q'' = 7 \times q;$$

luego, finalmente, q'' es divisible exactamente por el tercer factor, 7, y dá por cociente q, es decir, el *cociente de la division* de los dos números dados.

L. C. D. D.

Advertencia. Uno de los factores, 5 por ejemplo, puede entrar varias veces en la composicion del producto efectuado; en este caso se dice que D es divisible por 5 varias veces seguidas.

56. Esta es la ocasion de dar á conocer una *locucion* muy usada en Matemáticas, y que en adelante habremos de emplear nosotros con frecuencia.

Cuando un número N está descompuesto en varios factores $a, b, c, d...$, de modo que se tiene

$$N = a \times b \times c \times d \times ...;$$

si se divide N por a, se tiene por cociente $b \times c \times d...$

En este caso se dice, que se *suprime* el factor a en el producto $a \times b \times c \times d...$, lo cual dá por resultado

$$b \times c \times d...$$

Suprimiendo del mismo modo el factor b, se tiene por resultado

$$c \times d...;$$

y así sucesivamente.

Luego, *suprimir* un factor en un producto, es *dividir* el producto por dicho factor.

57. Cuarto principio.—En una multiplicacion que ha de ejecutarse entre dos números, *cuando uno de los factores se hace* CIERTO NÚMERO DE VECES *mayor ó menor, y se efectúa despues la operacion, se obtiene un producto que es* EL MISMO NÚ-

MERO DE VECES *mayor ó menor que el producto de los dos números propuestos.*

En términos mas breves, *si se multiplica ó se divide* POR UN NÚMERO CUALQUIERA *uno de los factores de una multiplicacion de dos números, resulta el producto multiplicado ó dividido* POR EL MISMO NÚMERO.

[Aquí se supone, y lo mismo en los enunciados de los principios siguientes y de sus consecuencias, que el DIVISOR EMPLEADO es un *submúltiplo* (n.º 46) del número á que se refiere la operacion.]

Sean a y b los dos números dados.

Digo que si, *antes de efectuar la multiplicacion*, se hace por ejemplo, *el multiplicando* a 12 veces *mayor*, lo cual equivale á multiplicarle por 12, y despues se efectúa la multiplicacion, se obtendrá un producto 12 veces *mayor* que el producto $a \times b$ de los dos números propuestos.

En efecto, en virtud del número 50, tenemos

$$(a \times 12) \times b \text{ ó } a \times 12 \times b = a \times b \times 12, \text{ ó bien } (a \times b) \times 12\,;$$

lo cual indica que el producto de un número 12 veces *mayor* que a por b, es 12 veces *mayor* que el de a por b.

Razonemos ahora respecto de $a \times 12$, tomado por *multiplicando*, y conservando á b por *multiqlicador:* si hacemos 12 veces *menor* la cantidad $a \times 12$, ó si le *dividimos* por 12, tendremos el *nuevo multiplicando* a, que multiplicado por el *multiplicador* b, dá el producto $a \times b$, el cual es evidentemente 12 veces *menor* que el producto $(a \times b) \times 12$, resultante de la multiplicacion de $(a \times 12)$ por b.

Luego, haciendo el *multiplicando* 12 veces *menor*, ó *dividiéndole* por 12, se hace el *producto* 12 veces *menor*, ó en otros términos, se le *divide* por 12.

Lo que acabamos de decir respecto del multiplicando, se aplica necesariamente al multiplicador, pues se puede (n.º 26) tomar el multiplicando por multiplicador y recíprocamente.

Luego, etc.

58. CONSECUENCIA.—*No se cambia el valor de un producto de dos factores,* MULTIPLICANDO *el uno de ellos por un número, y* DIVIDIENDO *el otro por el mismo número.*

Porque es evidente que las dos operaciones que se ejecutan así, *antes de la operacion principal*, establecen en uno y en otro caso una verdadera *compensacion.*

Advertencia. De esta proposicion resulta la siguiente:

Si se MULTIPLICA ó *se* DIVIDE *uno de los dos factores de un producto* POR UN NÚMERO DADO, *es necesario en compensacion para que el producto subsista el* MISMO, DIVIDIR ó MULTIPLICAR *el otro factor por* EL MISMO NÚMERO.

59. QUINTO PRINCIPIO.—En una division que ha de ejecutarse entre dos números (suponiendo que ha de hacerse exactamente, es decir, sin dejar residuo), *si se hace el dividendo* CIERTO NÚMERO DE VECES *mayor ó menor*, ó bien el divisor CIERTO NÚMERO DE VECES *menor ó mayor*, *y se efectúa despues la division, se obtiene un cociente* EL MISMO NÚMERO DE VECES *mayor ó menor que el cociente de la division de los dos números propuestos.*

En otras palabras, si se *multiplica* ó se *divide* el dividendo de una division exacta, ó si por el contrario se *divide* ó se *multiplica* el divisor por un *número dado*, se *multiplica* ó se *divide* el cociente por el *mismo número*.

Sean D el dividendo, d el divisor y q el cociente de la division; tendremos la igualdad

$$D = d \times q \text{ (siendo } q \text{ un número entero).}$$

Digo, EN PRIMER LUGAR, que si, antes de efectuar la division se hace, el dividendo, por ejemplo, 15 veces *mayor*, lo cual equivale á multiplicarle por 15, y despues se efectúa la division, se obtendrá un cociente 15 veces *mayor* que q.

En efecto, si multiplicamos por 15 los dos miembros de la igualdad precedente, los dos productos resultantes son evidentemente iguales (véase la nota del n.° 50), y tendremos

$$D \times 15 = d \times q \times 15 = d \times (q \times 15) \qquad \text{(n.° 54)};$$

por consiguiente el cociente de la division de D × 15 por d es 15 veces *mayor* que el cociente de la division de D por d.

Razonemos ahora tomando á D × 15 por dividendo: si hacemos este dividendo 15 veces *menor*, es decir, si le *dividimos* por 15, tendremos el nuevo dividendo D, el cual, *dividido* por el divisor d, dá el cociente q, que es evidentemente 15 veces *menor* que el cociente $q \times 15$, resultante de la division de D × 15 por d.

Luego, si *multiplicamos* ó *dividimos* el dividendo por un *número cualquiera*, obtenemos un cociente *que es el mismo número de veces mayor ó menor.*

Digo, EN SEGUNDO LUGAR, que si se *divide* ó se *multiplica* el divisor por un *número*, el cociente resultante debe ser ese mismo número de veces *mayor* ó *menor*.

Esto se deduce evidentemente de la proposicion enunciada en la *Advertencia* del número 58, pues el dividendo debe ser siempre igual al producto del divisor por el cociente.

60. CONSECUENCIA. — *Multiplicar* ó *dividir* el dividendo por un número, produce el mismo efecto que *dividir* ó *multiplicar* el divisor por el mismo número.

Así acabamos de ver que el cociente esperimenta en uno y en otro caso la misma alteracion.

61. SESTO PRINCIPIO. — *El valor de un cociente no varía cuando se multiplican ó dividen el dividendo y el divisor por el mismo número; y el resíduo, si le hay, queda multiplicado ó dividido por el mismo número.*

PRIMERAMENTE. — Si la division es exacta, resulta del principio anterior (n.º 59) que por esta doble operacion, el cociente por una parte se hace CIERTO NÚMERO de veces *mayor* ó *menor*, y por otra parte se hace el MISMO NÚMERO de veces *menor* ó *mayor*; luego hay compensacion.

EN SEGUNDO LUGAR. — Supongamos que la division deja resíduo.

Sean D el dividendo, d el divisor, q el cociente y r el resíduo de la division; tendremos la igualdad

(1) $$D = d \times q + r.$$

Multiplicando los dos miembros por un número entero cualquiera, por ejemplo, 15, tendremos (n.º 47)

$$D \times 15 = d \times q \times 15 + r \times 15,$$

ó

$$D \times 15 = d \times 15 \times q + r \times 15,$$

ó bien tambien

(2) $$D \times 15 = (d \times 15) \times q + r \times 15.$$

Esta última igualdad, traducida al lenguage vulgar, espresa que el *cociente* de la division de $D \times 15$ por $d \times 15$ es q (cociente de la division de D por d), y que el *resíduo* es el producto de r (resíduo de la misma division de D por d) *multiplicado por* 15.

Discurramos ahora partiendo de la igualdad (2) á la igualdad (1); y reconoceremos que el *cociente* de la division de D por d es q (cociente de la division de $D \times 15$ por $d \times 15$), y que el *resíduo* es r, resíduo de esta última division, *dividido por* 15.

Con lo cual se encuentra demostrada completamente la proposicion enunciada.

Advertencia. Si, en vez de multiplicar ó dividir simultáneamente el dividendo y el divisor por un mismo número, se multiplica ó divide *solamente uno de los dos términos* por dicho número, cuando la division primitiva deja resíduo, es fácil conocer operando como antes sobre la igualdad

$$D = d \times q + r,$$

que nada puede concluirse respecto del cociente de la nueva division, considerado con relacion al primer cociente.

Aquí evidentemente solo se trata de la *parte entera* del cociente.

Observacion.—*El sesto principio* puede servir para justificar la simplificacion de cálculo que hemos indicado en el número 38, para efectuar la division *cuando el divisor termina en ceros;* porque, procediendo como allí se dijo, no se hace mas que dividir los dos términos de la division por un mismo número, 10, 100, 1000, de modo que no se altera el cociente; y el resíduo se reduce luego á su verdadero valor, agregándole á continuacion los ceros ó las cifras significativas separadas en el dividendo.

62. Sétimo principio.—*Cuando un número dado es la suma de varias partes, divisibles todas ellas exactamente por otro número dado, el primer número es tambien divisible por el segundo; y el cociente de la division del uno por el otro es igual á la suma de los cocientes parciales que produce la division de las diferentes partes por el segundo número dado.*

Designemos por a el primer número, que suponemos igual á la suma $a' + a'' + a''' + \ldots$ de otros varios; sea 12, por ejemplo, el número que, segun el enunciado, debe *dividir exactamente* á cada una de las partes a', a'', a''',... del primer número dado, y llamemos q', q'', q''',... los cocientes respectivos.

Tendremos las igualdades

$$a' = 12 \times q', \quad a'' = 12 \times q'', \quad a''' = 12 \times q''', \ldots,$$

las cuales, sumadas entre sí *miembro á miembro*, dán

$$a' + a'' + a''' + \ldots \text{ ó sea } a = 12 \times q' + 12 \times q'' + 12 \times q''' + \ldots,$$

ó bien (n.° 47)

$$a = 12 \times (q' + q'' + q''' + \ldots);$$

lo cual prueba que el número a es *exactamente divisible* por 12, y dá por cociente

$$q' + q'' + q''' + \ldots$$

63. Consecuencia.—*Todo múltiplo* (n.° 46) de un número *exactamente divisible* por otro número, es *tambien divisible* por este otro número.

Porque sea a un número exactamente divisible por b, y m veces a un múltiplo cualquiera de a; este múltiplo puede considerarse como igual á $a + a + a + \ldots$. Ahora bien, cada una de esas partes $a, a, a, \ldots$ se supone exactamente divisible por b; luego su *suma* ó m veces a es tambien divisible por b.

Así, siendo 48 divisible por 6 y dando 8 de cociente, 5 veces 48, ó sea 240, es divisible por 6 y dá de cociente 40 que son 5 veces 8.

64. Octavo principio.—*Si un número se compone de dos partes, siendo una de ellas divisible exactamente por otro número dado, y no siéndolo la otra, el primer número no es divisible por el segundo; y el resíduo de su division es igual al que resulta de dividir por este segundo número la parte no divisible del primero.*

Sea $a = a' + a''$, siendo a' divisible por un número cualquiera, por ejemplo, 15, y no siéndolo a'': tendremos las dos igualdades

$$a' = 15 \times q' \quad \text{y} \quad a'' = 15 \times q'' + r;$$

(q' y q'' son números enteros y r es el resíduo de la division de a'' por 15.)

De donde se deduce (n.° 47)

$$a' + a'' \quad \text{ó sea} \quad a = 15 \times (q' + q'') + r;$$

lo cual demuestra que la division de $a'+a''$, ó lo que es lo mismo de a por 15, dá un resíduo r, que es precisamente el de la division de a'' por 15.

Tambien se observa que el cociente de la division de a por 15 es igual á la suma de los cocientes resultantes de la division de las dos partes a' y a'' por 15.

65. CONSECUENCIA.—*Todo número que divide exactamente á una suma compuesta de dos partes, y á una de estas partes, debe dividir necesariamente la otra parte.*

Porque si esta segunda parte no fuera divisible por el número dado, la *suma*, segun lo que acabamos de decir, tampoco lo sería; lo cual sería contrario á la hipótesis.

Los dos últimos principios nos conducen naturalmente á esponer aquí los caractéres particulares, por cuyo medio se conoce que un número dado es *divisible por ciertos números;* y cuando la division *no puede hacerse exactamente*, ver el medio mas sencillo de obtener el resíduo.

Resíduos de la division por ciertos números.—Caractéres de la divisibilidad por los mismos.

66. 1.°—*El resíduo de la division de un número cualquiera por* 2, *ó por* 5, *es igual al que dá la* CIFRA DE SUS UNIDADES *dividida por* 2, *ó por* 5;

Cuando esta cifra es divisible por 2 *ó por* 5, *el número es tambien divisible por* 2 *ó por* 5.

En efecto, el número dado puede siempre descomponerse en dos partes, á saber: *la parte que está á la izquierda* de la cifra de las *unidades*, tomada con su valor *relativo*, y esta *última cifra* de las unidades.

Ahora bien, siendo la primera parte una coleccion de decenas, es un *múltiplo* de 10, número divisible por 2 ó por 5, pues se tiene $10=2\times5$; por consiguiente (n.° 63) esta primera parte es esencialmente divisible, tanto por 2, como por 5; y entonces ha de suceder una de dos cosas: ó la cifra de las unidades es divisible, sea por 2, sea por 5, ó no lo es. En el primer caso, el número total es divisible por 2 ó por 5 (n.° 62); en el segundo, el resíduo de la division del número total (n.° 64) es igual al que dá la cifra de las unidades dividida por 2 ó por 5.

L. C. D. D.

67. *Observaciones.*—1.ª Todos los números terminados en una de las cifras 0, 2, 4, 6, 8, son evidentemente divisibles por 2.

Por el contrario los números terminados en una de las cifras 1, 3, 5, 7, 9, no son divisibles, y dán 1 de resíduo, que es el mismo resíduo que dá por sí sola cualquiera de esas cifras.

Los números de la primera categoría, se llaman números *pares*, y pueden representarse de un modo general por la espresion $2n$ (siendo n un número entero cualquiera.)

Los números de la segunda categoría se llaman números *impares*, y tienen por espresion general $2n+1$.

2.ª Solo los números terminados en 0 ó en 5 son divisibles por 5. Todos los demás números dán un resíduo igual al de la última cifra.

68. 2.º—*El resíduo de la division de un número cualquiera por 4 ó por 25, es igual al que dá el* CONJUNTO DE SUS DECENAS Y SUS UNIDADES, *dividido por 4 ó por 25.*

Cuando dicho conjunto es divisible por 4 ó por 25, el número dado es tambien divisible por 4 ó por 25.

El razonamiento es análogo al del número 66.

El número dado puede siempre descomponerse en dos partes, á saber: *la parte situada á la izquierda de la cifra de las decenas*, tomada con su valor *relativo;* y la *coleccion* de sus decenas y sus unidades, ó sea *el conjunto de las dos últimas cifras* tomadas con su valor *relativo.*

Ahora bien, la parte primera, que es un número terminado en *dos* ceros, es un múltiplo de 100, número divisible tanto por 4 como por 25; pues se tiene $100=4\times25$; luego (n.º 63) esta primera parte es siempre divisible por 4 ó por 25: y entonces habrá de suceder una de dos cosas: ó la segunda parte es tambien divisible por 4 ó por 25, ó no lo es. En el primer caso, el número total es (n.º 62) divisible por 4 ó por 25; en el segundo, el resíduo de la division debe ser (n.º 64) igual al que produzca dicha segunda parte dividida respectivamente por 4 ó por 25. *L. C. D. D.*

Por ejemplo, 750628 es divisible por 4, pues la *cuarta* parte de 28 es exacta é igual á 7.

Del mismo modo, 123756 es divisible por 4; porque 56 es igual á 14×4.

Pero 263019 no es divisible por 4; y el resíduo es 3 que es el mismo que resulta de dividir 19 por 4.

Igualmente, 37234 no es divisible por 4; y dá por resíduo 2, es decir, el mismo que dá 34.

Advertencia. Solo son divisibles por 25 los números terminados en 00, 25, 75.

69. Los números 8 y 125, 16 y 625, etc., que equivalen á 2^3 y 5^3, 2^4 y 5^4, etc., gozan de propiedades enteramente análogas, que se demostrarian de la misma manera, fundándose en que $1000=8\times125$, ó $2^3\times5^3$; $10000=16\times625$, ó $2^4\times5^4$, etc. Pero como son de poco uso en la práctica nos abstenemos de entrar en pormenores.

70. 3.°— *El resíduo de la division de un número cualquiera por* 3 *ó por* 9 *es igual al que se obtiene haciendo la suma de las cifras del número, consideradas con su valor absoluto, y dividiendo esta suma por* 3 *ó por* 9.

Si esta suma es un múltiplo de 3 *ó de* 9, ó lo que es lo mismo, si dá 0 *por resíduo de su division por* 3 *ó por* 9, *el número dado es tambien divisible por* 3 *ó por* 9.

(Demostraremos especialmente la propiedad relativa á 9, porque es la parte importante de la proposicion, atendido el uso que se hace de ella; pero sería fácil aplicar los mismos razonamientos al número 3.)

Comencemos por observar que un número compuesto de la *unidad* seguida de *uno* ó de *varios* ceros, es igual á un *múltiplo* de 9, *aumentado* en 1.

Por ejemplo, $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$, etc.; todas las partes 9, 99, 999, etc., son evidentemente divisibles por 9; y los cocientes respectivos son 1, 11, 111, etc.

De aquí se sigue que todo número formado por una cifra significativa seguida de *uno* ó *varios* ceros, es tambien un *múltiplo* de 9, aumentado en el valor de dicha cifra significativa.

Por ejemplo,

$$70=7\times(9+1)=(9+1)\times7=9\times7+7,\ldots \quad (\text{n.}^\circ\,47),$$
$$80000=8\times(9999+1)=9999\times8+8,\ldots$$

Esto supuesto, tomemos un número cualquiera, por ejemplo,

6205473.

Podemos descomponerle de la manera siguiente:

$$6000000+200000+00000+5000+400+70+3;$$

y segun lo acabado de decir, contiene dos partes principales, á saber:

1.º *Una suma* de varios *múltiplos* de 9, cuya suma es tambien múltiplo de 9 (n.º 62);

2.º *La suma de las cifras* $6+2+0+5+4+7+3$.

Siendo la primera parte divisible por 9, pueden suceder dos casos: ó la segunda parte es divisible por 9, ó no lo es.

En el primer caso, el número propuesto es tambien divisible por 9; y en el segundo caso, el resíduo de la division de la suma de las cifras significativas por 9 es necesariamente igual (n.º 64) al que se obtendria dividiendo el número total por 9. *L. C. D. D.*

En el ejemplo anterior, la suma de los valores absolutos de las cifras es 27, número divisible por 9. Luego el número total es divisible por 9, como puede comprobarse fácilmente.

Respecto del número 3, la demostracion es absolutamente la misma, y para hacerla, bastaria sustituir en el discurso el nombre de la cifra 3 al de la cifra 9.

Debemos hacer, sin embargo, una observacion importante, y es que un número divisible por 9, lo es tambien necesariamente por 3; pero un número puede ser divisible por 3 sin serlo por 9. Así, 24, 147, 246, etc., son divisibles por 3, y no lo son por 9, siendo los cocientes 8, 49, 82, que ya no contienen al factor 3.

Advertencia. En la práctica en vez de determinar la suma total de las cifras para dividirla despues por 9, se pueden ir dejando fuera los nueves de cada suma parcial, cuando se haya obtenido un número igual ó superior á 9, continuando así la operacion hasta llegar á la última cifra. Las sustracciones parciales que de este modo se hacen, no cambian evidentemente el resíduo que se busca.

Tambien suele hacerse caso omiso de las cifras 9 que pueda haber en el número propuesto, al tiempo de hacer la suma.

Sirva de nuevo ejemplo el número

$$74683056743.$$

Diremos: 7 y 4 son 11; quito 9, quedan 2, y 6 son 8 y 8 son 16; quito 9, quedan 7, y 3 son 10; quito 9, queda 1, y 5 son 6 y 6 son 12; quito 9, quedan 3, y 7 son 10; quito 9, queda 1, y 4 son 5 y 3 son 8.

Luego 8 es el resíduo de la division del número propuesto por 9.

Así se evita el dividir por 9 una suma que puede ser bastante grande si el número contiene muchas cifras.

Prueba por 9 de la multiplicacion y de la division.

71. La propiedad del número 9 proporciona un medio muy sencillo de comprobar el resultado de una multiplicacion ó de una division, medio conocido bajo la denominacion de prueba por 9.

Hé aquí en lo que consiste esa prueba:

1.° En la multiplicacion, *se determina* el resíduo de la division del multiplicando por 9, como se ha hecho en el número precedente, y *se procede* lo mismo con el multiplicador.

Se multiplican uno por otro los dos resíduos, y se *determina* el resíduo de la division por 9, del producto resultante.

Por último, *búsquese* el resíduo de la division del producto total por 9.

Si la operacion se ha hecho exactamente, *el último resíduo* obtenido debe ser igual al *tercero*.

Cuando uno de los dos primeros resíduos es 0, sucede lo mismo necesariamente con el tercero; y en consecuencia debe ser tambien 0 el cuarto. Esto equivale á decir que, si uno de los factores de la multiplicacion es divisible por 9, el producto total debe ser tambien divisible por 9; lo cual es conforme al principio del número 63.

Igualmente, cuando los dos primeros resíduos son iguales á 3, en cuyo caso el tercero es 0, el cuarto debe tambien ser 0; lo cual quiere decir que el producto total debe ser divisible por 9.

2.° En la division, es necesario comenzar por *sustraer* del dividendo propuesto el resíduo que deja la operacion; despues se ejecuta la *comprobacion* como se ha dicho antes, considerando al divisor y al cociente como factores de una multiplicacion, y el dividendo, *despues de rebajado el resíduo*, como el producto de aquellos dos factores.

Para darnos cuenta de este medio de comprobacion, empezaremos por observar que *los dos términos de la multiplicacion* pueden ponerse bajo la forma

$$9\times m+r \quad \text{y} \quad 9\times m'+r',$$

designando $9\times m$ y $9\times m'$ dos múltiplos cualesquiera de 9, y r y r' los resíduos de la division de los dos factores por 9.

Esto supuesto, si multiplicamos entre sí las espresiones precedentes, segun el principio del número 47, se obtienen cuatro productos parciales, siendo los tres primeros esencialmente *múltiplos* de 9, y siendo el cuarto $r \times r'$; de modo que el producto de aquellas dos espresiones, que no es sino el *mismo producto de la multiplicacion propuesta*, puede á su vez ponerse bajo la forma

$$9 \times m'' + r \times r'.$$

Ahora bien, el resíduo de la division de este último producto por 9, si le hay, solo puede provenir del producto $r \times r'$; luego, etc.

Apliquemos la regla al ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{r} 47659 \\ 8076 \\ \hline 285954 \\ 333613 \\ 381272 \\ \hline 384894084 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 4 & 3 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

Es costumbre trazar una cruz al lado de la operacion para ir colocando en ella los *cuatro* resíduos que dá de sí la prueba por 9.

Así, pues, efectuada la multiplicacion, se escriben á la izquierda de la línea vertical de la cruz, y uno debajo de otro, los dos resíduos 4 y 3 de la division del multiplicando y multiplicador por 9; despues *se hace el producto* de estos dos resíduos, que es 12, y se *divide* por 9; así se obtiene el tercer resíduo 3, que se coloca á la derecha de la línea vertical y al lado del primer resíduo 4. Se busca en fin, el resíduo de la division por 9, del producto de la operacion principal, y este cuarto resíduo, que se coloca debajo del tercero, debe ser igual á este, si la operacion está bien hecha.

Así se verifica en efecto, en el ejemplo que acabamos de poner.

Con un poco de costumbre, se hace esta comprobacion de memoria, y sin escribir cosa alguna.

72. Primera observacion.—La prueba por 9, que es muy

sencilla en su uso, está sujeta á varias causas de error: las principales son las siguientes:

1.ª Puede suceder que, tanto en los productos parciales, como en el producto total, se haya escrito un 0 en vez de un 9, ó vice-versa; ó bien por una parte, una cifra *disminuida* ó *aumentada* en cierto número de unidades, y por otra parte, otra cifra *aumentada* ó *disminuida* en el mismo número de unidades.

2.ª Es posible tambien que, cuando hay *ceros* entre las cifras significativas del *multiplicador*, no hayamos corrido los productos parciales los lugares necesarios hácia la izquierda.

Se comprende perfectamente que, en estos diversos casos, los errores cometidos, ó se compensan, ó al menos no influyen en los resíduos de la division por 9, de los términos de la operacion que se comprueba.

La prueba por 9 por lo tanto, y hablando con toda propiedad, solo es una *semi-prueba*, á la cual únicamente debe acudirse cuando no hay tiempo para mas; lo que es absolutamente cierto es que, cuando hay *divergencia* entre los resíduos tercero y cuarto, la operacion está mal hecha y debe repetirse. Pero, si los resíduos son iguales, solo se tiene una gran *probabilidad* de que la operacion está bien hecha.

73. SEGUNDA OBSERVACION.—Como el número 11 goza de una propiedad análoga á la del número 9, puede tambien utilizarse para la comprobacion de las multiplicaciones y divisiones, con la ventaja de estar sujeto á menos causas de error; pero dejamos para el capítulo último la esplicacion de esta propiedad.

74. TERCERA OBSERVACION.—Si se comprende bien el procedimiento de la prueba por 9, se reconocerá que es aplicable á todo número tal, que el resíduo de la division, cuando él es divisor, pueda determinarse fácilmente. Ahora bien, el método de la division (n.º 31) suministra un medio sencillo de dividir un número dado por otro número de una sola cifra, 7 por ejemplo; luego podria sustituirse la prueba por 7 á la prueba por 9, y aun emplear las dos, lo cual aun sería mas sencillo que recurrir á la operacion *inversa* de la operacion primitiva.

Así, en el ejemplo puesto arriba, si tomamos la 7.ª parte de cada uno de los factores, obtenemos los restos 3 y 5, que multiplicados entre sí, dán el producto 15; la 7.ª parte de 15 es 2 y queda 1.

Además, tomando la 7.ª parte del producto total, queda tambien 1 de resíduo; y como la prueba por 9 habia antes salido bien, podemos concluir casi con certeza, que el producto es exacto.

§ II.—Del máximo comun divisor.

75. *Definiciones preliminares.*—Se llama *número primo absoluto*, ó simplemente *número primo*, todo número que no tiene mas divisores que *á sí mismo* y á la *unidad*.

Un número es siempre divisible por *sí mismo* y dá 1 de cociente; tambien es todo número divisible por la *unidad* y entonces dá de cociente el mismo número.

Por ejemplo, 1, 3, 5, 7, 11, 13, son *números primos;* pero 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, etc., no lo son; porque se tiene

$$4=2\times 2,\quad 6=3\times 2,\quad 8=2\times 2\times 2, \text{ etc.}$$

Dos números se llaman *primos entre sí*, ó un número se llama *primo con otro*, cuando los dos números no tienen mas *divisor comun* que la *unidad.*

Así, 25 y 12 *son primos entre sí;* porque solo 1 puede dividir á los dos exactamente: 8 y 14, 12 y 27, no son primos entre sí, porque se tiene

$$8=4\times 2,\quad 14=7\times 2;$$

y

$$12=4\times 3,\quad 27=9\times 3.$$

Todo número *primo absoluto*, que no divide á otro número dado, es necesariamente *primo* con él.

Porque los dos números no tienen entonces mas *divisor comun* que la unidad.

Dos números, *que no son primos entre sí*, pueden tener varios diferentes *divisores comunes.*

Así, 72 y 48 tienen evidentemente por divisores comunes á 2, 3, 4, 6, 12 y 24.

La determinacion del *máximo comun divisor* de dos números constituye una operacion importantísima, que pasamos á tratar en seguida.

Del máximo comun divisor de dos números.

76. Comenzaremos por enunciar la regla general, y despues la desenvolverémos y demostrarémos en ejemplos particulares.

Regla general. Para hallar el máximo comun divisor de dos números:

Divídase el número mayor por el menor; si la division resulta *exacta*, el número menor es el máximo comun divisor buscado.

Pero si se obtiene un resíduo, *divídase el número menor por el resíduo;* y si esta nueva division resulta *exacta*, el resíduo de la primera operacion, que se ha tomado por divisor en la segunda, es el número pedido.

Si todavía se obtiene un resíduo, *divídase el primer resíduo por el segundo;* y si esta tercera division resulta exacta, el segundo resíduo es el número pedido; pero si, etc.

Continúense de este modo las operaciones hasta llegar á un resíduo que divida exactamente al resíduo precedente; el último resíduo obtenido es el máximo comun divisor buscado.

77. Sean por ejemplo los dos números

943 y 345.

Cuadro de los cálculos.

	2	1	2	1	3
943	345	253	92	69	23
253	92	69	23	0	

943	23
23	41
0	

345	23
115	15
0	

(Para mayor claridad, se coloca, variando el uso ordinario, cada cociente *encima* del divisor correspondiente.)

Es evidente que el máximo comun divisor buscado no puede ser mayor que el número menor de los dos dados, pues debe dividirle; pero puede ser igual á él.

Tenemos, pues, que dividir el número mayor, 943, por el menor, 345.

Aquí la division dá un resíduo; luego 345 *no es el máximo comun divisor.*

Y ahora digo, que este máximo comun divisor no puede ser mayor que el resíduo 253, y que debe dividirle exactamente.

En efecto, resulta de esta primera operacion, que

$$943 = 345 \times 2 + 253.$$

Ahora bien, como el máximo comun divisor debe dividir exactamente á 345, tambien debe dividir á su múltiplo 345×2 (n.º 63); debe dividir igualmente al mayor número 943. Donde se ve que el número buscado debe dividir á *un todo*, 943, y á *una* de sus partes, 345×2; luego (n.º 65), debe dividir tambien á *la otra* parte, 253, y por consiguiente no puede ser superior á 253.

Esto nos conduce á ensayar, si podria ser que el mismo 253 fuera el máximo comun divisor, y en consecuencia, á dividir el número menor, 345, por 253.

Pero ahora vamos nosotros á demostrar que el *máximo comun divisor buscado es el mismo* que existe entre el *número menor y el resíduo* de la primera division.

Para esto, llamemos por un momento D al máximo comun divisor buscado, y D′ al máximo comun divisor, cualquiera que sea, entre 345 y 253. Hemos dicho antes, que debiendo D dividir á 943 y una de sus partes, 345×2, debe dividir tambien á la otra parte 253. Por consiguiente, D no puede ser *superior* á D′, que se supone ser el máximo comun divisor entre 345 y 253.

Por otro lado, D′, que debe dividir á 253, debe tambien dividir á 345, y por consiguiente á su múltiplo, 345×2; luego (n.º 62), debe dividir igualmente á 943; por consiguiente D′ que debe dividir á la vez á 943 y á 345, no puede ser *superior* á D, que es el máximo comun divisor de esos dos números.

De aquí se sigue que los números D y D′ no pueden ser *superiores* uno á otro, y por consiguiente son *iguales.*

Con esto queda la cuestion reducida á buscar el máximo comun divisor entre 345 y 253; es decir, á proceder con dichos dos números, como con los números propuestos.

Dando la segunda division un nuevo resíduo, 92, se probaria como arriba, poniendo la igualdad

$$345 = 253 \times 1 + 92,$$

que el máximo comun divisor entre 345 y 253, es el mismo que puede existir entre 253 y 92.

Operando con estos dos últimos números, como con los anteriores, se encuentran sucesivamente los resíduos 69 y 23; pero á la quinta operacion, se obtiene *cero de resíduo.*

De donde puede concluirse, que 23 es el máximo comun divisor de 69 y de 23, y por consiguiente de 92 y de 69, de 253 y de 92, de 345 y de 253, y por último de 943 y de 345.

78. La division de 943 por 23, y de 345 por 23, dá por cocientes 41 y 15, segun manifiesta el cuadro.

Con este motivo haremos una observacion importante, y es que los dos cocientes 41 y 15 son *necesariamente* números *primos entre sí.*

En efecto, si pudieran tener un *factor comun*, 3 por ejemplo, de modo que tuviéramos $41 = 3 \times q$, $15 = 3 \times q'$, (siendo q y q' números enteros), resultaria

$$943 = 23 \times (3 \times q) = (23 \times 3) \times q,$$
$$345 = 23 \times (3 \times q') = (23 \times 3) \times q';$$

luego (23×3) ó sea 69, sería *comun divisor* de 943 y 345, y por consiguiente, no sería 23 su *máximo comun divisor*, lo cual sería contrario al resultado obtenido.

Como esta observacion y el razonamiento en que se apoya, son aplicables evidentemente á dos números cualesquiera, resulta que *los cocientes de la division de dos números por su máximo comun divisor, son siempre números* PRIMOS ENTRE SÍ.

Otros ejemplos.

2.° *Ejemplo.* 18225 y 7425

	2	2	5
18225	7425	3375	675
3375	675	000	

Cocientes.	18225	675	7425	675
	4725	27	675	11
	000		00	

(Los cocientes 27 y 11 son *primos entre sí.*)

3.er *Ejemplo.* 57792 y 14256.

	4	18	1	1	3	2
57792	14256	768	432	336	96	48
768	6576	336	96	48	0	
	432					

Cocientes.	57792	48	14256	48
	97	1204	465	297
	192		336	
	0		0	

(Los cocientes 1204 y 297 son *primos entre sí.*)

4.° *Ejemplo.* 5425 y 1727.

	3	7	12	1	5	3
5425	1727	244	19	16	3	1
244	19	54	3	1	0	
		16				

En el segundo ejemplo, hemos obtenido el resíduo 0, despues de tres operaciones, y por consiguiente, 675 ha sido el máximo comun divisor.

En el tercero hemos llegado al resíduo 0 despues de seis operaciones (en una de las cuales el cociente 18 está compuesto de dos cifras.)

El máximo comun divisor es 48.

Por último, el cuarto ejemplo ha dado tambien lugar á seis operaciones; pero no se ha encontrado 0 por resíduo, sino despues de haber obtenido la *unidad* por *resíduo precedente;* lo cual indica que 1 es el *único* divisor comun de los dos números propuestos, y que por consiguiente (n.º 75), estos dos números son *primos entre sí.*

79. En general, se reconoce que dos números dados son *primos entre sí*, cuando aplicándoles el procedimiento del máximo comun divisor, se obtiene la *unidad* por resíduo *antes de haber obtenido el resíduo* 0.

Este es el *signo característico;* porque á poco que reflexionemos sobre la naturaleza del procedimiento, veremos que como los resíduos van disminuyendo sin cesar, se debe por último llegar al resíduo 0.

Pero entonces sucederá una de dos cosas:

Ó el resíduo precedente es diferente de 1, en cuyo caso él es el divisor comun; y los números propuestos *no son primos entre sí:*

Ó bien, el resíduo precedente es 1; y entonces *solo la unidad es divisor comun* de los dos números.

La aplicacion de la regla general dá márgen á muchas observaciones, que, con la del número 78, constituyen propiedades esenciales del máximo comun divisor.

80. Primera observacion. — Cuando en la investigacion del máximo comun divisor de dos números, se llega á un resíduo, reconocido por *número primo* (como son 7, 11, 13, 17, 19; y ya en este capítulo daremos el medio de reconocer que un número es *primo absoluto),* que no divide al resíduo precedente, se podrá *asegurar*, sin pasar adelante en la operacion, que los dos números propuestos son *primos entre sí.* Porque el máximo comun divisor de estos dos números deberia, segun la demostracion del procedimiento, dividir el resíduo obtenido; lo cual es imposible, porque este resíduo es un *número primo.*

Es claro que, por la misma razon, si uno de los dos números propuestos, se reconoce ser *número primo*, se debe, ó no comenzar la operacion, ó terminarla en la primera division, segun que el número primo sea el mayor ó el menor de los dos números.

81. SEGUNDA OBSERVACION.—Si se multiplican por un número *entero cualquiera*, por ejemplo, 15, los dos números á que se supone ya aplicado el procedimiento, y se busca el máximo comun divisor de los dos productos resultantes, los nuevos *cocientes* serán respectivamente *los mismos* que los cocientes sucesivos obtenidos en la primera série de operaciones; pero *todos los resíduos* serán respectivamente iguales á los productos de la multiplicacion de los resíduos primitivos por 15.

Esta es una consecuencia evidente de la proposicion establecida en el número 61; porque el procedimiento del máximo comun divisor consiste en una série de divisiones tales que en la primera sirve de dividendo *el número mayor propuesto* y por divisor *el número menor*, en la segunda sirven de dividendo y divisor este mismo *número menor* y el *resíduo obtenido*, en la tercera á su vez sirven de dividendo y divisor *el resíduo primero y el segundo;* y así sucesivamente.

82. TERCERA OBSERVACION.—Todo *divisor comun* de dos números *divide exactamente todos los resíduos* á que conduce el procedimiento, y por consiguiente, *divide al máximo comun divisor* de los mismos números.

Volvamos, para demostrarlo, á la igualdad (n.º 77)

$$943=345\times2+253;$$

todo divisor *d* comun á 943 y 345, debe dividir á 345×2, múltiplo de 345; por consiguiente divide *á un todo*, 943, *y á una de sus partes*, 345×2; luego debe dividir á la *otra parte*, 253, ó sea, al *primer resíduo* de la operacion.

Se deduciria análogamente de la igualdad

$$345=253\times1+92,$$

que *d*, divisor comun de 345 y 253, debe dividir al *segundo resíduo*, 92; y continuando de este modo, se probaria sucesivamente que *d* divide á *todos los resíduos*, y por consiguiente al MÁXIMO COMUN DIVISOR, que no es mas que el *último de esos resíduos*.

Máximo comun divisor de mas de dos números.

83. La propiedad, esplicada en la observacion tercera, sirve de base á la *investigacion del máximo comun divisor entre mas de dos números* (*).

Sean A, B, C, E, F,... los números propuestos: se trata de buscar el *mayor* número que los divida *á todos* exactamente.

Hé aquí la REGLA GENERAL:

Búsquese el *m. c. d.* entre A y B, y supongamos que es D; despues búsquese el *m. c. d.*, D′ entre D y el tercer número C; despues el *m. c. d.* D″ entre D′ y E; y así sucesivamente.

El último *m. c. d.* obtenido es el número buscado.

Para demostrar esta regla, empecemos por considerar los *tres* números A, B, C; digo que el *m. c. d.* D′ entre D y C, es el *m. c. d.* de los tres números A, B, C.

En efecto, *por una parte*, dividiendo D′ á D, divide (número 63) *á sus múltiplos* A y B, y por consiguiente es *divisor comun* de A, B, C.

Por otra parte, el *m. c. d.* que buscamos para A, B, C, divide (n.° 82) á D, *m. c. d.* de A y B; y por consiguiente, por la misma razon divide á D′, *m. c. d.* entre D y C; por consiguiente, no puede ser superior á D′.

Luego D′ mismo es *el máximo comun divisor* de A, B, C.

Hagamos ahora el mismo razonamiento respecto de los *cuatro* números A, B, C, E.

Por una parte, D″, *m. c. d.* entre D′ y E, debiendo dividir á D′, dividirá tambien á los *múltiplos* de este D y C (número 63); por consiguiente divide á los *múltiplos* A y B de D, y por lo tanto es *comun divisor* de A, B, C, E.

Por otra parte, el *m. c. d.* que buscamos para A, B, C, E, divide (n.° 82) á D, *m. c. d.* de A y B; y por consiguiente por la misma razon divide á D′, *m. c. d.* de D y C; y tambien divide á D″ *m. c. d.* de D′ y E; y por lo tanto no puede ser superior á D″.

Luego el mismo D″ es el *m. c. d.* buscado.

(*) Usaremos con tanta frecuencia en todo lo sucesivo la espresion *máximo comun divisor*, que para abreviar sustituiremos en su lugar casi siempre las iniciales *m. c d.*

La misma série de razonamientos se aplicaria á *cinco, seis,*... números; con lo cual queda demostrada la regla general.

Advertencia. En la práctica conviene comenzar por buscar el *m. c. d.* de los dos números *menores;* despues se opera con el *m. c. d.* obtenido y el número menor de los restantes; porque el *m. c. d.* buscado no puede ser superior al que existe entre los números menores.

Sean, por ejemplo, los cuatro números

1260, 1512, 2016, 7350.

Operando lo primero con 1260 y 1512, se halla que el *m. c. d.* es 252.

Buscando despues el *m. c. d.* entre 252 y 2016, se ve que es el mismo 252.

Operando finalmente con 252 y 7350, se obtiene 42; luego 42 es el *m. c. d.* de los cuatro números dados.

84. PRIMERA OBSERVACION.—Cuando, despues de aplicar el procedimiento, se obtiene la unidad por último *m. c. d.*, es señal de que 1 *es el único número* que puede dividir á la vez á todos los números propuestos.

Estos números se llaman entonces *primos entre sí*, considerados todos juntos; pero varios de ellos tomados *dos* á *dos, tres* á *tres*, etc., pueden tener *factores comunes.*

Es claro que si, operando con los dos *números menores*, se halla 1 por *m. c. d.*, es completamente inútil toda operacion ulterior.

85. SEGUNDA OBSERVACION.—Todo *divisor comun* de varios números A, B, C, E, etc., *divide* necesariamente al MÁXIMO COMUN DIVISOR de los mismos; porque, segun la observacion del número 82, dividiendo á A y B, debe dividir á D, y por consiguiente á D′, D″, etc. Esta es la propiedad misma del número 82, *generalizada.*

86. TERCERA OBSERVACION.—Se demostraria absolutamente lo mismo que respecto de dos números se hizo en el número 78, que los *cocientes de la division de varios números* A, B, C, E, etc., *por su máximo comun divisor, son* PRIMOS ENTRE SÍ.

Para completar esta teoría del *máximo comun divisor*, deberíamos esplicar otros métodos para llegar á su determinacion, y los medios de simplificar los procedimientos que acabamos de esponer; mas para esto es necesario establecer diversos principios sobre la *divisibilidad de los números.*

§ III. Divisibilidad de los números.

87. Principio fundamental. — *Todo número que divide exactamente al producto de dos factores, y que es* primo con *uno de ellos, divide necesariamente al otro.*

Sean $A \times B$ el producto dado, P el número que *divide exactamente* á este producto; digo que si P es primo con A, por ejemplo, debe dividir á B.

En efecto, siendo A y P, por hipótesis, *primos entre sí,* si se les aplica la regla del máximo comun divisor, se llegará necesariamente (n.° 79) á un resto igual á 1; es decir, que designando por r, r', r'',..., 1, los restos sucesivos, se tendrá la série de números

$$A, P, r, r', r'', \ldots, 1, \quad \text{siendo } A > P;$$
$$[\text{sería} \quad P, A, r, r', r'', \ldots, 1, \quad \text{si fuera } P < A],$$

cuyas cantidades habrán de servir de términos en las divisiones que deben efectuarse.

Pero supongamos que antes de hacerlas se principia por multiplicar A y P por B, resultará (n.° 81) la nueva série

$$A \times B, \quad P \times B, \quad r \times B, \quad r' \times B, \quad r'' \times B, \ldots, \quad 1 \times B.$$

Ahora bien, todos estos términos son divisibles (n.° 82) por P, puesto que P es un *divisor comun* de los dos primeros términos, pues divide á $A \times B$ por hipótesis y divide evidentemente á $P \times B$.

Luego $1 \times B$, ó simplemente B es divisible por P.

L. C. D. D.

Advertencia. Es importante observar que la proposicion no es cierta sino cuando P es número *primo* con uno de los factores del producto.

Pues si por ejemplo, tenemos por una parte, 28×15, y por otra, 12, que no es *primo* con ninguno de los dos factores del producto, el cociente de la division de (28×15), ó 420, por 12, es *exacto* é igual á 35, aunque 12 no divide ni á 28 ni á 15.

Esto depende de que los dos factores del producto contienen reunidos *todos los factores primos*, que componen el divisor.

Así se tiene:

$$28\times15=4\times7\times3\times5=(4\times3)\times7\times5=12\times7\times5=12\times35.$$

88. CONSECUENCIA. — *Un número cualquiera* P, PRIMO *con todos los factores*, MENOS UNO, *de un producto* $A\times B\times C$..., *no puede dividir al producto, sino en cuanto divida exactamente al factor* ESCEPTUADO.

Porque, siendo *primo con* A, por ejemplo, no puede, segun el principio precedente, dividir al producto dado, sino dividiendo á $B\times C\times D$...; si es *primo con* B, no puede dividir á $B\times C\times D$..., sino dividiendo á $C\times D$...; y así sucesivamente. De este modo llegaríamos á concluir que debe dividir al *último factor* sino divide á ninguno de los precedentes.

89. SEGUNDO PRINCIPIO.—TODO NÚMERO PRIMO ABSOLUTO *que divide exactamente al producto de dos factores, divide necesariamente á uno de estos factores.*

En efecto, sea $A\times B$ el producto dado, y P un número primo absoluto que debe dividirle exactamente.

Si P no divide á A, por ejemplo, es primo con A (n.º 75); luego, en virtud del *primer principio*, debe dividir á B.

90. CONSECUENCIA I.—*Si un número* PRIMO ABSOLUTO P *divide al producto* $A\times B\times C$..., *de un número cualquiera de factores, divide á lo menos á uno de estos factores.*

Porque sino divide á A por ejemplo, debe dividir al producto $B\times C$...; sino divide á B, debe dividir á $C\times D$...; etc. Así llegaríamos hasta el *último* factor, que deberia ser divisible por P, sino lo habia sido ninguno de los precedentes.

91. CONSECUENCIA II.— TODO NÚMERO PRIMO ABSOLUTO P, *que divide á las potencias* A^2, A^3, A^4,... (véase el n.º 45) *de un número cualquiera* A, *divide necesariamente á este número.*

Porque siendo A^2, A^3,..., lo mismo que $A\times A$, $A\times A\times A$,..., no puede P dividir á estos diferentes productos, sino en cuanto divide á uno de los factores, y por consiguiente á A.

92. CONSECUENCIA III.—*Si dos números* A y B *son primos entre sí, sus potencias* A^2 y B^2, A^3 y B^3, *y en general*, A^n y $B^{n'}$, *son tambien números primos entre sí.*

Porque todo *número primo*, por ejemplo, *d* distinto de 1, que fuera divisor comun de A^n y $B^{n'}$, deberia dividir tambien á A, porque dividia á A^n, y dividir á B, porque dividia á $B^{n'}$: por consiguiente d sería *divisor comun* de A y de B; lo cual es imposible, pues se suponen A y B *primos entre sí.*

93. CONSECUENCIA IV. — *Cuando un producto se ha formado por medio de la multiplicacion de varios números, no sería posible formarle de nuevo, multiplicando otros números que contuvieran* FACTORES PRIMOS *diferentes de los que entraban en la composicion de los primeros números dados.*

Sea N un número igual á $a\times b\times c\times d$...; digo que el mismo número N no podria ser igual al producto $a'\times b'\times c'\times d'$..., si uno de estos últimos números contuviera uno ó mas factores primos *diferentes* de los que entran en a, b, c,...

Porque todo factor primo que no entre ni en a, ni en b, ni en c,..., no dividiendo exactamente á ninguno de estos números, tampoco podia (n.° 90) dividir á su producto $a\times b\times c$..., es decir á N.

Esto equivale evidentemente á decir que *un número cualquiera no puede formarse mas que con un* SOLO *sistema de factores primos, cada uno de los cuales puede estar elevado á una potencia.*

Advertencia. Resulta además del principio general establecido en el número 51, que las multiplicaciones de estos factores primos y de sus potencias pueden efectuarse en un órden cualquiera.

94. CONSECUENCIA V. — *Todo número* P, *primo con cada uno de los factores de un producto* A×B×C×..., *es tambien primo con dicho producto.*

Porque supongamos que un *número* primo d, diferente de 1, pueda dividir á la vez á P y al producto A×B×C×...; como d deberia (n.° 90), dividir á uno de los factores de este producto, este factor y el número P no serían *primos entre sí;* lo cual sería contrario al enunciado de la proposicion.

95. TERCER PRINCIPIO. — *Todo número divisible por dos números* PRIMOS ENTRE SÍ, *es divisible por su producto.*

Sea N un número divisible exactamente por otros dos números A y B, que suponemos *primos entre sí;* digo que N es divisible por el producto A×B.

En efecto, designemos por q el cociente de N por A; tendremos

$$N = A\times q \quad \text{(siendo } q \text{ número entero.)}$$

Por otra parte, B divide tambien á N, ó á su valor $A\times q$;

pero B es primo con A, por el supuesto; luego (n.º 87) debe dividir á q, y se tendrá

$$q = B \times q' \quad \text{(siendo } q' \text{ número entero.)}$$

Si se sustituye este valor de q en la primera igualdad, resulta

$$N = A \times (B \times q') \quad ó \quad N = (A \times B) \times q',$$

Luego N es divisible por $A \times B$.

L. C. D. D.

96. Consecuencia.—*Todo número divisible por otros varios que tomados dos á dos en un órden cualquiera, son* primos entre sí, *es divisible por el producto de los mismos.*

Sean por lo pronto tres números A, B, C, que suponemos ser primos entre sí *dos* á *dos*, de modo que, siendo A primo con B y con C, B lo es tambien con C.

Si otro número N es divisible por cada uno de esos tres números, digo que es tambien *divisible por su producto.*

Porque ya tenemos (n.º 95)

$$N = (A \times B) \times q' \quad \text{(siendo } q' \text{ } \textit{entero.)}$$

Ahora bien, C divide tambien á N por hipótesis ó á su valor $(A \times B) \times q'$; además, como le suponemos primo con A y con B, lo es tambien con el producto $A \times B$ (n.º 94); por consiguiente C debe dividir á q', y se tendrá

$$q' = C \times q'' \quad \text{(siendo } q'' \text{ } \textit{entero}).$$

Sustituyendo este valor de q' en la igualdad precedente, se obtiene la nueva igualdad

$$N = (A \times B) \times C \times q'' \quad ó \quad N = (A \times B \times C) \times q'';$$

lo cual prueba que N es divisible por $A \times B \times C$.

La demostracion sería enteramente análoga, si se refiriesen á *cuatro, cinco,* etc., números A, B, C, D, etc.; se deduciria de la proposicion demostrada para *tres,* como esta se ha deducido de la proposicion demostrada para *dos* números.

Advertencia. Es necesario distinguir cuidadosamente los números A, B, C,..., tales como acabamos de considerarlos, de los números A, B, C,..., definidos en el n.° 84, *primos entre sí*, por cuanto no existe mas número que la *unidad*, que pueda dividirlos á todos á la vez, aunque, considerados *dos á dos*, *tres á tres*, etc., puedan tener divisores comunes.

Los números *primos absolutos* y diferentes unos de otros, como 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc., son necesariamente *primos entre sí dos á dos;* y por consiguiente les son aplicables el tercer principio y su consecuencia.

97. Del tercer principio se deducen *caractéres de divisibilidad* para otros *números particulares*, distintos de los indicados en los n.os 66 á 70.

1.° *Todo número es divisible por* 6 *ó por* 18, *cuando termina* en una de las cifras 0, 2, 4, 6, 8, y *la suma de sus cifras* es múltiplo de 3 ó de 9.

Porque entonces (n.os 67 y 70), es divisible por 2 y por 3, ó por 2 y por 9; mas como 2 y 3, ó 2 y 9, son *primos entre sí*, resulta que 2×3, ó 6, y 2×9, ó 18, son *divisores* del número.

Igualmente, *todo número es divisible* por 12 ó por 36, si es á la vez divisible por 4 y por 3 (n.os 68 y 70), ó por 4 y por 9 ; pues siendo primos entre sí 4 y 3, ó 4 y 9, el número es divisible por 4×3, ó por 4×9.

Y en fin, todo número *es divisible* por 24 ó por 72, si es divisible por 8 (n.° 69), y por 3 ó por 9 ; porque siendo 8 y 3, ó bien 8 y 9, números primos entre sí, resulta que 8×3, ó bien 8×9, *son divisores* del número propuesto.

2.° *Todo número es divisible por* 15, 45, 75, 225, cuando, siendo divisible por 5 ó por 25, es al mismo tiempo divisible por 3 ó por 9; porque entonces es divisible, bien sea por 5 y por 3, y en consecuencia por 5×3, que son 15; bien sea por 5 y por 9, y en consecuencia, por 5×9, que son 45; bien sea por 25 y por 3 y en consecuencia, por 25×3, que son 75 ; bien sea finalmente por 25 y por 9, y en consecuencia, por 25×9, que son 225.

Así se obtienen *caractéres de divisibilidad* fáciles de comprobar, para la série de los números

6, 12, 18, 24, 36, 72, y 15, 45, 75, 225.

Estas propiedades unidas á las de los números 2, 3, 4, 5, 9, 25, son particularmente útiles en la *descomposicion* de un número *en sus factores primos*, cuestion que pasamos á tratar en seguida.

Investigacion de todos los divisores de un número.

98. Distribuiremos esta cuestion en dos partes:

La primera tendrá por objeto determinar todos los *factores primos* que entran en la composicion del número dado, así como el *número de veces* que cada *factor primo* se encuentra en él, es decir, el *esponente* de la potencia á que cada factor está elevado.

La segunda, determinar *todos* los divisores, *tanto simples como compuestos*, que contiene el número dado.

99. Primera parte. — *Descomponer un número dado en sus factores simples ó primos.*

Sirva de primer ejemplo el número 2820.

2820	2	
1410	2	
705	3	$2820 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 47.$
235	5	
47	47	
1		

Se comienza por trazar una línea vertical, á cuya izquierda se coloca el número dado, á fin de separarle de los divisores que se obtendrán sucesivamente, y que se irán escribiendo á la derecha de la misma línea.

Esto supuesto, se ve que 2820 es divisible por 2; se escribe este divisor á la derecha de la línea y enfrente del número dado; se efectúa la division de este número por aquel divisor y el cociente 1410 se escribe debajo de 2820.

Como 1410 es todavía divisible por 2 [lo cual prueba que 2820 es divisible por 2, dos veces seguidas (n.° 55, *advert.*)], se coloca este segundo divisor debajo del primero, y despues el cociente resultante, 705, debajo del anterior, con lo cual, segun las operaciones ejecutadas, tendremos

$$2820 = 2^2 \times 705.$$

Y ahora digo que la investigacion de los divisores primos de 2820 *diferentes de* 2, queda reducida á la de los divisores primos de 705. Porque: 1.° todo divisor de 705 debe dividir á su múltiplo $2^2 \times 705$ ó sea 2820; 2.° recíprocamente, todo divisor primo de 2820, *diferente de* 2, debe (n.° 89) dividir á 705.

Debe, pues, operarse con 705 como con el número propuesto.

Siendo 12, múltiplo de 3, la suma de las cifras de 705, este número es (n.° 70) divisible por 3: se escribe este nuevo divisor debajo del anterior; despues se coloca el cociente correspondiente 235 debajo del último obtenido; de aquí resulta la nueva igualdad

$$2820 = 2^2 \times 3 \times 235;$$

no siendo ya 235 divisible por 3, se demostraria como acaba de hacerse respecto del número 705, que la cuestion está reducida á la determinacion de los divisores primos de 235.

Ahora bien, este número es divisible por 5; se escribe, pues, este nuevo divisor debajo de los anteriores; se efectúa la division, y se obtiene un nuevo cociente 47, que se coloca debajo de 235.

De esta manera se tiene la nueva igualdad

$$2820 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 47.$$

Ahora deberiamos buscar los factores primos de 47; pero es fácil reconocer que 47 es número primo.

En efecto, el menor divisor primo que puede ensayarse despues de 2, 3, 5, es 7; pero este número no divide á 47; y como además 7 veces 7, ó 49, es un número *superior* á 47, se concibe que es inútil pasar adelante en los ensayos; porque, si un número primo *mayor que* 7 dividiera á 47, el cociente correspondiente sería por necesidad *menor que* 7 (porque en toda division exacta el producto del divisor por el cociente debe reproducir el dividendo); de donde se deduciria que hay un factor de 47 *inferior* á 7, lo cual no es cierto.

Luego 47 es *un número primo*, que solo es divisible por sí mismo, y que dá por cociente 1, cuyo cociente se escribe debajo de los otros.

Con esto se termina la operacion, y resulta que el número 2820 descompuesto en sus factores primos, tiene la forma

$$2820 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 47.$$

El factor 2 es el único que va afectado de esponente.

100. *Observacion importante.*—Antes de pasar mas lejos, generalizaremos lo que acabamos de decir para establecer que 47 es número primo; y haremos conocer que para cualquier número dado, hay un *límite* del cual no hay necesidad de pasar cuando se investigan *sus divisores primos.*

Sea N este número dado, y supongamos que se han ensayado inútilmente, como divisores, todos los números primos hasta cierto número a tal, que el cociente correspondiente sea un número q, *fraccionario* (n.º 43) y menor que a.

Digo que será inútil el ensayo de cualquier otro número, y que N es un *número primo.*

En efecto, en virtud del supuesto tenemos,

$$N = a \times q \quad \text{(siendo } q \text{ fraccionario y menor que } a\text{)}.$$

Ahora bien, si existiera un número a' *mayor que* a, que pudiera *dividir exactamente* á N, se tendria, designando por q' el cociente correspondiente

$$N = a' \times q' \quad \text{(siendo } q' \text{ número } \textit{entero}\text{)};$$

de donde se deduciria

$$a \times q = a' \times q'.$$

Pero, para que esta igualdad se verifique, siendo $a' > a$, es indispensable *en compensacion*, que el cociente q' número *entero*, sea $< q$, y por consiguiente, $< a$, que se supone *mayor que* q.

De aquí resultaria que un número entero q' *inferior* á a dividiria á N, lo cual es contrario al supuesto.

Tomemos por ejemplo el número 263. Ninguno de los números primos 2, 3, 5, le divide exactamente. Ensayando despues á 7, 11, 13, se encuentran tambien *cocientes fraccionarios*. Pero, llegando al número 17, se encuentra un cociente tambien fraccionario igual á $15 + \frac{8}{17}$, número < 17; de donde se concluye que 263 es *número primo.*

Del mismo modo encontraríamos que 631 es *número primo*; porque, llevando los ensayos hasta 29 inclusive, se obtiene como cociente correspondiente á este último número, $21 + \frac{22}{29}$, número < 29.

En general el *límite* de los ensayos para la determinacion de los divisores primos de un número, es el *menor número primo* que dá un cociente *fraccionario* MENOR QUE este número tomado por divisor de una division, cuyo dividendo es el número propuesto.

Advertencia. En el capítulo quinto daremos otra espresion del mismo límite.

101. Volvamos á la cuestion primitiva, y sirva de nuevo ejemplo buscar los divisores *primos* del número 38088:

38088	2
19044	2
9522	2
4761	3
1587	3
529	23
23	23
1	

Siguiendo la marcha indicada en el primer ejemplo, tendremos que 38088 es divisible *tres veces seguidas* por 2, y dá, por tercer cociente, 4761; que 4761 es divisible *dos veces seguidas* por 3, y dá por cociente correspondiente á la segunda division, 529. Obtenido ya este número se ensayan sucesivamente los números *primos* 7, 11, 13, etc.; y llegados al número 23, reconocemos que el cociente es el *mismo número* 23, el cual, dividido por 23, dá por último cociente 1: tal es el término de la operacion segun hemos indicado antes.

Hallamos por consiguiente:

$$38088 = 2^3 \times 3^2 \times 23^2.$$

102. *Generalicemos* ahora el procedimiento, que, para mayor claridad, hemos empezado á esplicar por medio de ejemplos *particulares*.

Sea *a* el número *primo* menor, empezando por 2, que divide á N. *Se efectúa la division* de N por dicho factor, *tantas veces seguidas* como sea posible (lo cual equivale á dividir primero N por *a*, despues el cociente obtenido por *a*, despues el nuevo cociente por *a*, etc.)

Llamando n el número de divisiones, que de este modo hayan podido ejecutarse, tendremos la igualdad

$$N = a^n \times N' \quad \text{(siendo } N' \text{ número } \textit{entero.})$$

Conducidos por un razonamiento análogo al que hicimos en el primer ejemplo (n.° 99), á operar con N', como hemos operado con N, tendremos, designando por b el número primo *menor* despues de a, que divide á N', y por n' el número de veces que N' es divisible sucesivamente por b; tendremos, digo

$$N = a^n \times b^{n'} \times N'' \quad \text{(siendo } N'' \text{ un número } \textit{entero}).$$

Admitiendo, para fijar las ideas que c, d, son los únicos factores simples que entran en N'', de modo que tengamos

$$N'' = c^{n''} \times N''' \quad \text{y} \quad N''' = d^{n'''};$$

obtendremos

$$N = a^n \times b^{n'} \times c^{n''} \times d^{n'''};$$

y el número N se encuentra de este modo *descompuesto* en sus factores primos, conociéndose tambien el número de veces que cada uno de estos entra en aquel.

Resulta además, de la proposicion general (n.° 93) que *esos factores primos, elevados respectivamente á las potencias marcadas por los esponentes* n, n', n'', n''', FORMAN EL ÚNICO *sistema de factores primos en que puede descomponerse el número* N.

103. SEGUNDA PARTE.— *Determinar todos los divisores, tanto simples como compuestos, de un número cualquiera.*

De la forma misma bajo la cual acaba de presentarse el número N, resulta un medio de resolver esta cuestion.

Escribamos, en cuatro líneas diferentes, los números

$$\begin{array}{llll}
1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ldots, & a^n, & \ldots, & (n\ +1 \text{ términos}),\\
1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ldots, & b^{n'}, & \ldots, & (n'\ +1 \text{ términos}),\\
1,\ c,\ c^2,\ c^3,\ c^4,\ldots, & c^{n''}, & \ldots, & (n''\ +1 \text{ términos}),\\
1,\ d,\ d^2,\ d^3,\ d^4,\ldots, & d^{n'''}, & \ldots, & (n'''+1 \text{ términos}),
\end{array}$$

y concibamos que se ha efectuado la multiplicacion, 1.° De los $(n+1)$ números de la primera línea por los $(n'+1)$ números de la segunda, lo cual dá una nueva série de $(n+1)\times(n'+1)$ números (*advert.* del n.° 48);

2.° De los números de la nueva série, por los $(n''+1)$ números de la tercera, lo cual dá otra nueva série de $(n+1)\times(n'+1)\times(n''+1)$ números;

3.° En fin, de los números de esta nueva série, por los $(n'''+1)$ números de la cuarta, de donde resulta una série que es la última y contiene $(n+1)\times(n'+1)\times(n''+1)\times(n'''+1)$ números.

Es evidente que esta última série, considerada *sola,* es decir, hecha abstraccion de todas las otras, contiene *todos los divisores buscados.*

Porque se compone de los factores 1, a, a^2, a^3,..., a^n; b, b^2, b^3,..., $b^{n'}$; c, c^2, c^3,... $c^{n''}$; d, d^2, d^3,..., $d^{n'''}$; así como de todos los productos, *dos* á *dos*, *tres* á *tres*, *cuatro* á *cuatro*, de estos mismos factores; cuyos productos son necesariamente *divisores* de N, pues todos son *submúltiplos* suyos, ó de su valor $a^n b^{n'} c^{n''} d^{n'''}$ (n.° 102).

Advertencia. Debe observarse que la espresion

$$(n+1)\,(n'+1)\,(n''+1)\,(n'''+1)$$

suministra un medio muy sencillo de determinar el número total de los divisores de un número:

Auméntese una unidad á cada uno de los esponentes de los factores primos que contiene este número; y despues, *multiplíquense entre sí las sumas que resultan.*

El producto espresa el *número total* de los divisores, comprendiendo en ellos la *unidad* y el mismo *número* dado.

Sea

$$N=a^3\times b^2\times c^5\times d\times f^2,$$

la espresion de arriba, en este caso, se convertirá en

$$4\times3\times6\times2\times3,\quad \text{ó sea}\quad 432;$$

por consiguiente el número N debe tener 432 divisores.

104. Siendo poco cómodo en la práctica el método que acabamos de indicar para obtener los divisores, tanto *simples* como *compuestos*, de un número, vamos á esponer, en otro nuevo ejemplo, un procedimiento mucho mas fácil.

	1			
5880	2			
2940	2, 4			
1470	2, 8			
735	3, 6, 12, 24			
245	5, 10, 20, 40	15, 30, 60, 120		
49	7, 14, 28, 56	21, 42, 84, 168	35, 70, 140, 280	105, 210, 420, 840
7	7, 49, 98, 196	147, 294, 588, 1176	245, 490, 980, 1960	735, 1470, 2940, 5880.
1				

(En todo, $4\times2\times2\times3$, ó sean 48 divisores.)

Esplicacion de este cuadro:

Despues de haber determinado los divisores *primos* de 5880, como se hizo en los n.^{os} 99 y 101, y de haber escrito á la cabeza y encima del factor 2, la *unidad*, que tambien debe entrar en cuenta en el cálculo del número total de divisores,

Se principia por el segundo divisor 2, *por el cual se multiplica* el anterior; lo cual dá el nuevo divisor 4, que se *coloca á la derecha del segundo divisor*.

Pasando al tercer divisor 2, se multiplica por él *solamente* el 4, y *se coloca el producto* 8 á la derecha del tercer divisor.

Pasando al divisor 3, *se multiplican* por 3 *todos los divisores* precedentes, á saber: 2, 4, 8; lo cual dá los nuevos divisores 6, 12, 24 que *se colocan á la derecha* del divisor 3.

En una palabra, cuando se desciende á un nuevo divisor, *se multiplican por él todos los que le preceden*, *teniendo mucho cuidado* de no repetir los productos ya obtenidos.

Se tiene seguridad de que los productos formados por este procedimiento, comprenden *todos los divisores* del número dado; porque son las combinaciones de los factores 2, 3, 5, 7, elevados respectivamente á potencias, cuyos esponentes son *á lo mas* iguales á 3 respecto del factor 2, 1 para el 3, 1 para el 5 y 2 para el 7.

En este ejemplo el número total de los divisores debe ser igual (n.° 103, *advert.*) á $4\times2\times2\times3$, ó sea 48.

Advertencia. Es conveniente hacer observar que en el cálculo de los productos sucesivos, se han agrupado estos productos, atendiendo al número de factores de que se componen, lo cual es un medio de ir formando mas fácilmente los unos por medio de los otros.

Además, cuando se llega al último producto, que debe ser el mismo número dado, conviene comprobar el número total de los divisores formados contándolos uno por uno; con lo cual se adquiere la seguridad de no haber olvidado ninguno.

Hé aquí el cuadro de los cálculos para los ejemplos de los n.os 99 y 101.

		1
1.°	2820	2
	1410	2, 4
	705	3, 6, 12
	235	5, 10, 20 | 15, 30, 60
	47	47, 94, 188 | 141, 282, 564 | 235, 470, 940 705, 1410, 2820.
	1	

En todo, 3×2×2×2, ó 24 divisores.

		1
2.°	38088	2
	19044	2, 4
	9522	2, 8
	4761	3, 6, 12, 24
	1587	3, 9, 18, 36, 72
	529	23, 46, 92, 184 | 69, 138, 276, 552 | 207, 414, 828, 1656
	23	23, 529, 1058, 2116, 4232 | 1587, 3174, 6348, 12696 | 4761, 9522, 19044, 38088.
	1	

En todo, 4×3×3 ó 36 divisores.

105. Siendo la investigacion de *todos los divisores* de un número, y particularmente su descomposicion en *factores primos*, una de las cuestiones mas importantas y mas útiles en Aritmética, encargamos mucho á los principiantes que se ejerciten en ella.

Proponemos, como nuevos ejemplos, los números:

1764, 1665, 56700, 122108;

que descompuestos en sus factores, resultan ser iguales á

$$2^2.3^2.7^2,\quad 3^2.5.37,\quad 2^2.3^4.5^2.7,\quad 2^2.7^3.89;$$

de donde se infiere que el número total de sus divisores, es respectivamente

$$27,\quad 12,\quad 90,\quad 24.$$

En cuanto á los números

$$113,\quad 719,\quad 777,\quad 3229,$$

aplicándoles el procedimiento para hallar los divisores *simples*, y la observacion del n.º 100, nos aseguraremos fácilmente de que son *números primos*.

Dejamos para el capítulo octavo el esplicar el medio de formar una tabla de *números primos;* y entonces tambien espondremos un método bastante fácil para asegurarnos si un número de tres ó mas cifras es *primo*.

Complemento de la teoría del máximo comun divisor.

Los principios sobre la *divisibilidad* de los números y los procedimientos esplicados para la determinacion de los *divisores* de un número, que de aquellos principios han dimanado, nos proporcionan el medio de completar, segun habíamos indicado al terminar el segundo párrafo de este capítulo, la teoría del *máximo comun divisor*.

106. Composicion del máximo comun divisor.— *El máximo comun divisor de varios números es el producto de todos los factores primos comunes á dichos números elevados respectivamente á la* menor *de las potencias que lleven entre todos ellos.*

Discurramos respecto de dos números A y B; llamemos D á su *m. c. d.*, y q y q' á los cocientes respectivos de su division por D: de modo que tendremos las igualdades

$$A = D \times q,\quad B = D \times q'.$$

En primer lugar, se reconoce que D no puede contener *factores primos diferentes* de los que entran á la vez en A y B; porque todo divisor de D debe dividir á sus múltiplos A y B.

Además, D contiene necesariamente *todos los factores primos comunes* á A y á B; puesto que siendo *primos entre sí* q y q' (n.° 78), todo factor primo que divida á la vez á A y á B, debe (n.° 89) dividir á D.

En tercer lugar, D no puede contener á esos *factores primos comunes*, elevados á una potencia *superior* á la que llevan en aquel de los dos números que los contiene *menos veces;* porque si así no fuera, no podria dividir á este número.

Por último, se ha visto que un número (n.° 93) no puede formarse mas que con un *solo* sistema de factores primos.

Queda, pues, completamente demostrada la proposicion relativamente á dos números.

Así, sean A y B los dos números dados, D su máximo comun divisor, y supongamos que se tiene

$$A=a^4.b^3.c^5.d.f.g,$$
$$B=a^2.b^4.c^3.f^2.g',$$

se tendrá necesariamente

$$D=a^2.b^3.c^3.f.$$

Respecto de los cocientes q, q' resultantes de la division de A y de B por D, para obtenerlos basta suprimir (n.° 56) en cada uno de los números A y B, los factores que entran en D; lo cual dá las espresiones

$$q=a^2.c^2.d^2.g, \quad q'=b.f.g';$$

donde se ve que estos cocientes son *primos entre sí* (n.° 78) y se componen de todos los factores de cada uno de los números A, B, que no son factores del otro número.

Hariamos razonamientos enteramente iguales, si se tratára de *tres*, *cuatro*, etc., números; pero lo creemos tan sencillo, que no nos parece necesario detenernos en ello.

107. De esta *composicion* del máximo comun divisor, se deduce, para llegar á su determinacion, el procedimiento siguiente:

Descompóngase cada uno de los números dados en sus factores primos, afectados respectivamente de los esponentes que les correspondan;

Compárense los resultados obtenidos, *y fórmese un producto de todos los factores primos comunes, afectado cada cual* *del* MENOR *de los esponentes que lleve en los diferentes números.*

Repitamos el ejemplo de los cuatro números del n.º 83, á saber :

$$1260, \quad 1512, \quad 2016, \quad 7350.$$

Cuadro de los cálculos.

1260	2	1512	2	2016	2	7350	2
630	2	756	2	1008	2	3675	3
315	3	378	2	504	2	1225	5
105	3	189	3	212	2	245	5
35	5	63	3	126	2	49	7
7	7	21	3	63	3	7	7
1		7	7	21	3	1	
		1		7	7		
				1			

$$2^2.3^2.5.7, \quad 2^3.3^3.7, \quad 2^5.3^2.7, \quad 2.3.5^2.7^2.$$

Luego

$$D=2.3.7=42.$$

Este método es mas sencillo y mas ventajoso en la práctica á poca costumbre que se tenga de descomponer un número casi á la simple inspeccion y con ayuda de los caractéres de divisibilidad propios de los números

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \quad 18, \quad 24, \ldots$$

Advertencia. Tambien podrian *determinarse todos los divisores* de cada uno de los números propuestos, *comparar despues las diferentes séries*, y tomar el mayor de todos entre los divisores comunes.

Pero es fácil ver que este modo de proceder sería en general muy laborioso.

108. Ahora vamos á esponer, apoyándonos en los principios de la divisibilidad de los números, el medio de *simplificar* en la práctica el procedimiento ordinario de la determinacion *del máximo comun divisor de dos números.*

Estas simplificaciones darán por resultado hacer generalmente preferible su empleo.

Primeramente. Hemos visto ya (n.° 80) que cuando en el curso de las operaciones, se llega á un resíduo *número primo* (y ya en el n.° 100 hemos espuesto el medio de conocer si es *primo* un número), que no divide al resíduo precedente, debe concluirse, sin ir mas lejos, que los números dados son *primos entre sí*.

En segundo lugar. Como el *m. c. d.* de dos números contiene todos los *factores primos* comunes á dichos números (n.° 106), y no puede contener otros, debe suceder lo mismo con dos resíduos *consecutivos* cualesquiera, puesto que el *m. c. d.* de estos dos resíduos es el mismo que el de los números propuestos. De aquí se sigue que, sin que resulte alteracion alguna en el *m. c. d.*, se puede *introducir* ó *suprimir*, ya en uno de los números, ya en uno de los resíduos, un factor *primo* que no entre en el otro número ó en el *resíduo* que precede inmediatamente á aquel en el cual se *introduce* ó *suprime* el factor.

Sea, por ejemplo, determinar el *m. c. d.* de los dos números 36935 y 5874.

Empecemos por observar que el primer número contiene al factor 5 que no entra en el segundo; y que este contiene los factores primos 2 y 3 y por consiguiente (n.° 97) al factor 6, producto de esos dos factores, que no entran en el primero. Pueden, pues, *suprimirse* los factores 5 y 6, respectivamente en los dos números propuestos; lo cual dá los cocientes

7387 y 979,

entre los cuales debemos buscar ahora el *m. c. d.*

	7	11
7387	979	89
354	89	
	0	

Despues de haber dividido 7387 por 979, lo cual dá el resíduo 534, se observa que este resíduo es divisible por 2 y por 3, ó sea por 6, cuyo factor no entra en 979; puede por consiguiente suprimirse y dividir despues 979 por el cociente 89, lo cual dá cociente exacto.

Luego 89 es el *m. c. d.* buscado.

Advertencia. Si 89 no hubiera dividido exactamente á 979, habriamos inferido inmediatamente (n.° 80) que los números dados eran *primos entre sí;* porque 89 es *número primo*, como puede comprobarse fácilmente.

Si hubiéramos aplicado sin modificaciones el procedimiento ordinario, habria sido necesario hacer *cuatro* operaciones.

Sirvan de segundo ejemplo los números 5827 y 4321.

Aquí no existe factor alguno primo *á primera vista*; debemos pues empezar por aplicar el procedimiento ordinario:

	1	17
5827	4321	251
1506	1811	
	54	

Siendo 1506, número divisible por 6, el resíduo de la primera operacion, se suprime el factor 6; y la cuestion queda reducida á operar con los números 4321 y 251.

El resíduo de la segunda operacion es 54, ó sea, 6×9, ó $2\times.3^2$, ninguno de cuyos factores entra en los números propuestos; luego estos son *primos entre sí.*

Por el procedimiento ordinario, se habrian necesitado *doce* operaciones, para llegar al mismo resultado.

En cuanto á la *introduccion* de un factor en uno de los números propuestos, ó en uno de los resíduos, no es en ARITMÉTICA de uso tan frecuente como la *supresion.* Donde tiene mas importancia es en la determinacion *del máximo comun divisor algébrico.*

EN TERCER LUGAR. Puede tambien *suprimirse* un factor que se vea *comun* á los dos números, con tal que despues *se tome en cuenta* en el resultado.

Sean los dos números 945 y 720. Siendo comun á ambos el factor 5, se suprime y quedan 189 y 144.

Pero estos dos números contienen todavía al factor 9. Se suprime tambien, y resultan 21 y 16, los cuales equivalen á 3×7 y 2^4, y por consiguiente, son *primos entre sí*.

Luego los dos números propuestos tienen por *m. c. d.* 5×9, ó sea 45.

Encargamos mucho á los principiantes que se ejerciten en estas modificaciones, con lo cual conseguirán abreviar considerablemente los cálculos.

Determinacion del múltiplo mas simple de varios números.

109. Se llama *múltiplo mas simple* de varios números el *menor número que á la vez es divisible por todos los números dados.*

Las teorías precedentes suministran *dos* métodos diferentes para obtenerle.

Primer método.—Empecemos por considerar solo *dos* números A y B.

Designando por D su máximo comun divisor, por q, q' los cocientes de la division de A y B por D, tendremos (n.° 106) las dos igualdades

$$A=D\times q,\quad B=D\times q',$$

siendo q y q' *primos entre sí* (n.° 78).

Digo ahora, que el *número buscado* es igual á

$$D\times q\times q'.$$

Porque por lo pronto este producto es *múltiplo* de A y de B, puesto que es *divisible* por $D\times q$ y por $D\times q'$: falta probar que es el *múltiplo menor* ó *mas simple* que puede obtenerse.

Llamemos por un momento M á *un múltiplo* cualquiera de A y B. Para que sea *divisible* por A, ó $D\times q$, es necesario que M contenga *todos* los factores que entran en la composicion de cada uno de los números D y q; del mismo modo, para ser *divisible* por B, ó $D\times q'$, debe contener *todos* los factores de cada uno de los números D y q'; y como q y q' son *primos entre sí*, es necesario que M contenga, no solamente *todos* los factores que componen á D, sino tambien *todos* los que entran en el cociente q y *todos* los que entran en el cociente q'. Luego M no puede ser *menor* que $D\times q\times q'$.

L. C. D. D.

Todos los otros *múltiplos* de A y B, se obtendrian multiplicando este producto por 2, 3, 4, 5, etc.

De aquí resulta el procedimiento siguiente para obtener *el múltiplo mas simple de mas de dos números* A, B, C, etc.

Determínese el máximo comun divisor D entre A y B; despues *divídanse* A y B por dicho *m. c. d.*

Multiplíquense por D los cocientes así obtenidos q y q'; con lo cual se tendrá el producto $D\times q\times q'$, ó M, que será *el múltiplo mas simple* de A y B.

Determínese del mismo modo *el múltiplo mas simple*, M' de M y C; con lo cual se tendrá *el múltiplo mas simple* de A, B, C.

Procédase del mismo modo con M' y E; y así sucesivamente.

Advertencia. Aquí conviene, al revés de lo que se practica cuando se trata del *m. c. d.*, empezar por los dos números *mayores;* pues el número buscado no puede ser *menor que el múltiplo mas simple* de dichos dos números.

SEGUNDO MÉTODO.— *Descompóngase cada uno de los números propuestos* A, B, C, etc., *en sus factores primos*, dando á estos factores los *esponentes* que les correspondan.

Fórmese en seguida el *producto de todos los factores primos, comunes ó no comunes á* A, B, C, etc., *afectando á cada factor con el esponente* MAYOR *que tenga en los diferentes números.*

Por este medio se obtiene un resultado, evidentemente *divisible* por todos los números A, B, C, etc.; y que además es el *múltiplo menor;* porque todo número que contuviera uno de los *factores* primos, con un esponente *inferior al mayor* de todos, no sería *divisible* por el número entre los propuestos que contuviera á aquel esponente *mayor.*

Advertencia. Si los números dados son *primos absolutos*, ó bien, si cada uno de ellos es *primo* con todos los otros, el *múltiplo menor* no puede ser otro que el producto de todos los números dados.

Propondremos, por ejemplo, formar el *múltiplo mas simple* M,

1.° De los números 136730 y 37224;
2.° De los números 19305, 10340 y 4158,

aplicando sucesivamente los dos métodos, lo cual puede servir de comprobacion.

Se hallará

1.° $M=231347160$,
2.° $M=25405380$.

El capítulo tercero proporcionará ocasion de poner en práctica estos procedimientos.

Conclusion.— Algunas de las teorías esplicadas en este capítulo habrán parecido acaso un poco difíciles para los principiantes: pero sin embargo, es muy importante comprenderlas bien, porque facilitarán en gran manera la inteligencia del capítulo inmediato, que tiene por objeto el cálculo de las fracciones ordinarias.

Ejercicios.

I. Demostrar que la *suma* de dos números cualesquiera, multiplicada por su *diferencia*, dá por producto la *diferencia de las segundas potencias* de los mismos números.

II. Siendo 255 la *suma* de dos números y 39 su *diferencia ¿cuáles son esos dos números?*

Generalizar la proposicion, es decir, establecer una regla general *para hallar dos números* cuando se conocen su *suma* y su *diferencia*, haciendo solo uso de los signos *abreviativos* del n.° 44 y únicamente por medio del raciocinio.

III. Probar que todo número entero es siempre la suma de varias potencias de 2, si es *par*, y la suma de varias potencias de 2, aumentada en *una* unidad, si es *impar*. Ejemplos, 876, 2539, 6750.

IV. Todos los *números primos*, diferentes de 2 y 3, están comprendidos en la espresion $6n \pm 1$ (pronúnciese el signo *mas ó menos*), siendo n un número entero cualquiera.

V. Todo número entero que no es *primo*, admite *por lo menos* un divisor *primo*, diferente de 1.

VI. El *resíduo* de la division por 9 del *producto* de un número cualquiera de factores, es *igual* al que dá el *producto de los resíduos* que dejan los diferentes factores.

Probar que esta propiedad corresponde á cualquier número, aunque no sea el 9.

VII. Hallándose colocados en una misma línea por *órden* *de magnitud* todos los divisores *simples* y *compuestos* de un número, probar que el *producto* de dos factores cualesquiera tomados á *igual distancia* de los estremos es CONSTANTE é *igual al producto* de los dos factores estremos.

VIII. Se sabe que, designando D el máximo comun divisor de dos números A y B, se tiene

$$A = D \times q, \quad B = D \times q' \text{ (siendo } q \text{ y } q' \textit{ primos entre sí.)}$$

Deducir de esto un medio de obtener el *m. c. d.* entre un número dado A, y el producto indicado $B \times C \times E...$, de otros varios, sin efectuar préviamente dicho producto.

La regla consiste: 1.° en buscar el *m. c. d.* D entre A y B, *dividiendo* despues A por D; 2.° buscar el *m. c. d.* D′ entre el cociente obtenido q y el tercer número C, *dividiendo* despues q por D′; 3.° buscar el *m. c. d.* D″ entre el segundo cociente q' y el cuarto número E, *dividiendo* despues q' por D″; y así sucesivamente.

El *m. c. d.* buscado es $D \times D' \times D'' \times ...$; *lo cual se demostrará.*

IX. Determinar cuál es el menor de los números que tienen 120 *divisores;* y cuál el menor de los que tengan 81 *divisores.*

X. El producto de tres números enteros consecutivos es siempre divisible por 6.

XI. La espresion $n(n+1)(2n+1)$ es siempre divisible por 6, siendo n un número entero cualquiera.

XII. Demostrar que siendo m y n dos números enteros cualesquiera, pero siendo $m > n$, la espresion

$$\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1.2.3.4...n}$$

es siempre número entero.

En otros términos, el producto de n números enteros consecutivos es siempre divisible por el producto $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times ... n$.

CAPITULO III.

§ I. *Fracciones ordinarias.*—§ II. *Números complejos.*

§ I. FRACCIONES ORDINARIAS.

Nociones y principios preliminares.

110. Hemos visto ya (n.os 1 y 8) lo que es una fraccion y qué idea debemos formarnos de ella.

En una fraccion ó quebrado se distinguen siempre dos términos, el *denominador* y el *numerador*. El denominador indica *en cuántas partes iguales está dividida la unidad*, y el numerador, *cuántas de dichas partes se toman:* el conjunto de las partes que se toman, constituye la fraccion ó quebrado.

Por ejemplo, en el quebrado $\frac{3}{4}$, que se enuncia *tres cuartos*, 4 es el denominador, é indica que la unidad está dividida en *cuatro* partes iguales; y 3 es el numerador, é indica que se toman *tres* de esas partes. Así tambien $\frac{11}{12}$, que se enuncia *once dozavos*, espresa *once partes* de *doce* en que se supone dividida la unidad.

Resulta igualmente del n.° 42, que una fraccion tal como $\frac{13}{15}$, ó 13 veces la 15.ª parte de la unidad, es equivalente á la 15.ª parte de un *todo* espresado por 13; es decir, que *un quebrado puede considerarse como el cociente de la division de su numerador por su denominador.*

Este último punto de vista conduce naturalmente á considerar espresiones fraccionarias tales como

$$\frac{19}{6}, \frac{23}{12}, \frac{47}{15}, \ldots$$

cuyo numerador *escede* al denominador.

Estas espresiones son fáciles de comprender, en cuanto se refieren á la division de los números 19, 23, 47, respectivamente en 6, 12, 15 *partes iguales*.

Pero ¿cómo podrá $\frac{19}{6}$ espresar 19 veces la 6.ª parte de la unidad?

Para esto se concibe, que se tienen *cuatro unidades principales*, cada una de las cuales está dividida en 6 partes; despues para formar 19 ó $6\times3+1$, se toman las 18 *sestas partes* de que se componen las *tres* primeras unidades principales, á las cuales se añade *una* de las partes de la cuarta. Así se obtiene

$$19 \text{ sestos ó } \frac{19}{6}.$$

Del mismo modo $\frac{23}{12}$ supone *dos* unidades principales, dividida cada una en 12 *dozavos;* se toman las 12 partes de la primera unidad principal, á las cuales se añaden 11 de las partes de la segunda.

El mismo razonamiento se haria respecto de la fraccion $\frac{47}{15}$.

Por estension puede tambien ponerse, ya sea la *unidad*, ya sea un número *entero* cualquiera en forma de quebrado.

Así 1 puede escribirse

$$\frac{12}{12}, \frac{15}{15}, \frac{23}{23}, \ldots$$

Igualmente, 10, 14, 25,... equivalen á

$$\frac{10}{1}, \frac{14}{1}, \frac{25}{1}, \ldots$$

Esto además es una consecuencia de la doble propiedad enunciada en el n.° 75, á saber: que todo número *es divisible por sí mismo* y que la *unidad* es *divisor* de todo número.

Tendremos muchas veces ocasion de hacer uso de estas dos últimas formas.

111. De la definicion que acabamos de dar del numerador y denominador, se deducen evidentemente las consecuencias siguientes:

1.° *Si*, sin alterar el denominador de un quebrado, *se multiplica ó divide su numerador por un número entero cualquiera, el nuevo quebrado será ese mismo número de veces mayor ó menor que el propuesto.*

En efecto, cuando se multiplica el numerador por 2, 3, 4,... se toman 2, 3, 4,... veces mas partes iguales, y como estas son de la misma magnitud, resulta el nuevo quebrado 2, 3, 4,... veces mayor. Sea la fraccion $\frac{6}{25}$: es claro que los quebrados $\frac{12}{25}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{24}{25}$,... son 2, 3, 4,... veces mayores que el primero.

Al contrario, dividiendo el numerador por 2, 3, 4,... se toman 2, 3, 4,... veces menos partes; luego, etc.... Así, $\frac{3}{25}$, $\frac{2}{25}$,... son quebrados respectivamente 2, 3,... veces menores que el propuesto $\frac{6}{25}$.

2.° *Si*, sin alterar el numerador, *se multiplica ó divide el denominador por un número entero cualquiera, queda el quebrado dividido ó multiplicado por el mismo número.*

En efecto, cuando se multiplica el denominador por 2, 3, 4,... se indica que la unidad está dividida en 2, 3, 4,... veces *mas* partes iguales, las cuales por consiguiente serán 2, 3, 4,... veces mas pequeñas; y como se toman siempre las *mismas*, el quebrado valdrá 2, 3, 4,... veces *menos*.

Al contrario, si se *divide* el denominador por 2, 3, 4,... la unidad queda dividida en 2, 3, 4,... veces *menos* partes iguales, que por lo tanto serán 2, 3, 4,... veces *mayores*; y como se toman las mismas, el quebrado resultante debe ser 2, 3, 4,... veces *mayor* que el propuesto.

3.° *El valor de un quebrado no se altera multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número entero.*

En efecto, resulta de los dos primeros principios que el efecto de la alteracion del denominador queda destruido por el efecto de la alteracion del numerador, habiendo por consiguiente *compensacion.*

Por ejemplo, los quebrados $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$,... son todos equivalentes al quebrado $\frac{3}{4}$, porque resultan de la multiplicacion de los dos términos de este, por 2, 3, 4, 5,... Así también, el quebrado $\frac{24}{36}$ es igual á cada uno de los quebrados $\frac{12}{18}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{9}$,... porque resultan estos dividiendo por 2, 3, 4,... los dos términos de aquel.

Estas proposiciones son análogas á los principios establecidos (n.os 59, 60 y 61) sobre la division de números enteros, y por consiguiente, deben considerarse como aplicacion de los mismos á los quebrados, en cuanto cualquiera de estos puede considerarse, como *el cociente de la division del numerador por el denominador.*

112. Como contínuamente se está aplicando la tercera proposicion, creemos oportuno demostrarla directa é independientemente de las dos primeras.

Tomemos, por ejemplo, el quebrado $\frac{5}{8}$, y multipliquemos por 3 sus dos términos 5 y 8; tendremos $\frac{15}{24}$, y digo que este quebrado es equivalente al propuesto.

En efecto, teniendo antes la unidad dividida en *ocho* partes iguales, dividamos ahora cada *octava parte* en *tres* partes iguales, y tendremos la unidad dividida en *veinte y cuatro* partes iguales. Cada *octava* parte vale por tanto *tres veinticuatro-avos*, y *cinco* octavas partes valdrán *quince veinticuatro-avos*, de modo que los quebrados $\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{24}$ valen exactamente lo mismo.

De la misma manera se demostraria que los quebrados $\frac{11}{12}$

y $\frac{55}{60}$ son iguales, porque el segundo resulta multiplicando por 5 los dos términos del primero.

Como recíprocamente se pasa del quebrado $\frac{15}{24}$ al quebrado $\frac{5}{8}$ tomando la *tercera* parte de cada uno de los términos de aquel, y tomando la *quinta* parte de los términos de $\frac{55}{60}$ se obtiene el quebrado $\frac{11}{12}$, puede concluirse que *un quebrado no muda de valor multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número.*

Operaciones con las fracciones.

Pasamos ahora á esplicar las diversas operaciones que pueden ejecutarse al resolver cuestiones cuyos *datos* sean quebrados ó fraccionarios. Pero antes de esponer las cuatro operaciones fundamentales, debemos enseñar dos *transformaciones* de uso muy frecuente, particulares y propias del cálculo de quebrados.

Reduccion de los quebrados á un comun denominador.

113. El objeto de esta transformacion es *reducir á una misma especie ó á un mismo denominador, dos ó mas quebrados propuestos con denominadores diferentes.* A esto conduce de un modo muy sencillo el principio ya esplicado de que un quebrado no muda de valor aunque se multipliquen sus dos términos por un mismo número.

Sirvan de ejemplo los quebrados $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$ *que tratamos de reducir á un comun denominador.*

Si multiplicamos los dos términos 3 y 4 del primero por 7 denominador del segundo, y los dos términos 5 y 7 del segundo por 4 denominador del primero, los quebrados propuestos se convierten respectivamente en $\frac{21}{28}$ y $\frac{20}{28}$.

Estos quebrados tienen el mismo valor que los propuestos, segun el principio del n.º 112; y además tienen iguales los denominadores, porque cada uno de ellos es el producto de los dos denominadores primitivos 4 y 7.

Sea ahora reducir á un comun denominador los quebrados $\frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{11}$.

Multiplíquense los dos términos 4 y 7 del primero por 88, producto de los denominadores 8 y 11 del segundo y tercero: despues multiplíquense los dos términos 5 y 8 del segundo por 77, producto de los denominadores 7 y 11 del primero y tercero; y finalmente, los dos términos 6 y 11 del tercero por 56, producto de los denominadores 7 y 8 del primero y segundo: con esto se obtendrán los nuevos quebrados $\frac{352}{616}$, $\frac{385}{616}, \frac{336}{616}$.

Estos quebrados tienen el mismo valor que los primitivos, y sus denominadores son iguales, porque cada uno de ellos es el producto de los tres denominadores 7, 8 y 11, con sola la diferencia de haberse multiplicado en diferente órden. (*Véase* el n.º 53).

REGLA GENERAL. *Para reducir un número cualquiera de quebrados á un comun denominador, multiplíquense sucesivamente los dos términos de cada uno por el producto efectuado de los denominadores de los demás.*

Hé aquí el modo de aplicar en la práctica la regla:

Sean los cinco quebrados $\frac{3}{8}, \frac{7}{11}, \frac{10}{13}, \frac{23}{25}$ y $\frac{29}{43}$.

Para mayor sencillez se dispone la operacion del modo siguiente:

$$\frac{3}{8}, \quad \frac{7}{11}, \quad \frac{10}{13}, \quad \frac{23}{25}, \quad \frac{29}{43},$$

$$153725, \quad 111800, \quad 94600, \quad 49192, \quad 28600,$$

$$\frac{461175}{1229800}, \quad \frac{782600}{1229800}, \quad \frac{946000}{1229800}, \quad \frac{1131416}{1229800}, \quad \frac{829400}{1229800}.$$

Despues de haber formado el producto de los cinco denominadores 8, 11, 13, 25 y 43, que dán 1229800, por denominador comun de los quebrados transformados, se divide dicho propucto sucesivamente por cada uno de los denominadores particulares; y se obtienen los cinco *cocientes* 153725, 111800, 94600, 49192, 28600, que respectivamente se colocan debajo de los cinco quebrados propuestos: se multiplica despues el numerador de cada fraccion por el *cociente* que le corresponde, obteniéndose de este modo los numeradores de los nuevos quebrados, y quedando reducidos á un comun denominador.

Es fácil de comprender la razon de este procedimiento; pues siendo el número 1229800 el producto de los cinco denominadores, el cociente 153725 de su division por 8 espresa necesariamente el producto de los otros cuatro denominadores 11, 13, 25 y 43. Así tambien, siendo 111800 el cociente de la division de 1229800 por el segundo denominador 11, equivale al producto de los otros cuatro denominadores 8, 13, 25 y 43: lo mismo podria decirse respecto de los demás cocientes. Este medio además es sin contradiccion mas espedito que si para cada quebrado se efectuára el producto de los denominadores de los otros cuatro. Pero en realidad no es ventajoso sino cuando hay que reducir á un comun denominador mas de tres quebrados.

114. Hay un caso en que puede hacerse muy sencillamente la reduccion á un mismo denominador; y es *cuando el mayor de los denominadores puede dividirse exactamente por cada uno de los otros.*

Sirvan de ejemplo los quebrados

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{23}{36},$$
$$12,\quad 9,\quad 6,\quad 3,\quad 1,$$
$$\frac{24}{36},\quad \frac{27}{36},\quad \frac{30}{36},\quad \frac{21}{36},\quad \frac{23}{36}.$$

Es fácil ver que 36 puede dividirse exactamente por los otros cuatro denominadores 3, 4, 6 y 12. Se efectúan, pues, esas divisiones sucesivamente, y se escriben los cocientes 12, 9, 6 y 3 debajo de los cuatro primeros quebrados y despues se multiplica el numerador de cada uno por el cociente que le corresponde, dejando intacto el quebrado $\frac{23}{36}$, y quedando así reducidos todos al comun denominador 36.

A veces sin que el mayor denominador sea divisible exactamente por todos los demás, se advierte que *puede serlo su producto por* 2, 3, 4,...; en cuyo caso tambien hay simplificacion.

Sean los nuevos quebrados

$$\begin{array}{cccccc} \frac{3}{4}, & \frac{7}{8}, & \frac{11}{12}, & \frac{13}{18}, & \frac{17}{24}, & \frac{25}{36}, \\ 18, & 9, & 6, & 4, & 3, & 2, \\ \hline \frac{54}{72}, & \frac{63}{72}, & \frac{66}{72}, & \frac{52}{72}, & \frac{51}{72}, & \frac{50}{72}. \end{array}$$

El denominador 36 es divisible separadamente por 4, 12 y 18, y no lo es por 8 ni por 24: pero duplicándole, se obtiene 72, número evidentemente divisible por esos dos denominadores.

Esto supuesto, se forman los cocientes de la division de 72 por cada denominador, y se van colocando debajo de los quebrados respectivos: se multiplica luego el numerador de cada uno por el cociente que le corresponde, y todos resultan con el comun denominador 72.

Formacion del menor denominador comun de varias fracciones.

115. Las simplificaciones que acabamos de indicar exigen cierto hábito de hacerlas; pero hay un medio *directo* de obtener en todos los casos el MENOR DENOMINADOR COMUN de varias fracciones.

Este número no es evidentemente otra cosa que el *mínimo múltiplo* de los denominadores, y ya hemos visto (n.° 109), cómo se determina el número múltiplo de varios números.

Así, en el ejemplo precedente, como tenemos

$$4=2^2;\quad 8=2^3;\quad 12=2^2.3;\quad 18=2.3^2;\quad 24=2^3.3;\quad 36=2^2.3^2,$$

se infiere que el múltiplo mas simple es

$$2^3 . 3^2 \text{ ó } 72;$$

que es el denominador comun antes obtenido.

Sirvan de nuevo ejemplo los quebrados

$$\frac{11}{15}, \frac{13}{18}, \frac{17}{24}, \frac{25}{28}, \frac{37}{44}, \frac{83}{140}, \frac{29}{175}, \frac{233}{480},$$

cuyos numeradores no contienen, al menos en apariencia, factores primos (como 2, 3, 5,...) que entren á la vez en los denominadores correspondientes; pues en caso contrario, sería necesario ante todas cosas *suprimir* esos factores en los dos términos.

Haciendo la descomposicion de los denominadores, sea á la simple inspeccion, sea por la aplicacion directa de la regla del n.° 102, se encuentran los resultados

$$3 . 5 \mid 2 . 3^2 \mid 2^3 . 3 \mid 2^2 . 7 \mid 2^2 . 11 \mid 2^2 . 5 . 7 \mid 7 . 5^2 \mid 2^5 . 3 . 5;$$

lo cual dá por mínimo múltiplo

$$2^5 . 3^2 . 5^2 . 7 . 11 \text{ ó } 554400.$$

Tal es el *denominador comun* menor ó mas sencillo que puede darse á las fracciones dadas; número incomparablemente menor que el que se obtendria aplicando la regla general del n.° 113.

Ahora solo nos resta determinar los números que han de multiplicar á los numeradores, para obtener los numeradores de las nuevas fracciones; y para esto basta, segun antes hemos dicho, dividir 554400 por cada uno de los denominadores dados.

Así se obtienen los cocientes respectivos: 36960, 30800, 23100, 19800, 12600, 3970, 3168, 1155, los cuales deberian multiplicarse por los numeradores correspondientes 11, 13, 17, 25, etc.

Relaciones de magnitud entre varios quebrados.

Hé aquí algunas aplicaciones de la transformacion precedente:

116. Primera cuestion.—*Se pregunta cuál de las dos fracciones* $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{12}$ *es la mayor.*

Al pronto no se puede responder á esta cuestion; porque si, por un lado, la unidad está dividida en la segunda fraccion en mayor número de partes que en la primera, por otro lado se toman mas partes en aquella que en esta, pues el numerador 7 es mayor que el numerador 3.

Pero se salva la dificultad reduciéndolas á un comun denominador; porque es evidente que *de dos fracciones que tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.*

Hecha esta reduccion, se convierte el primer quebrado en $\frac{36}{60}$, y el segundo en $\frac{35}{60}$; luego $\frac{3}{5}$ es el mayor de los dos siendo $\frac{1}{60}$ el esceso que lleva al otro.

Del mismo modo se averiguaria que, de las tres fracciones $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{13}$, la mayor es $\frac{8}{13}$, la menor $\frac{6}{11}$, y la media $\frac{4}{7}$; pues reducidas á un comun denominador, resultan respectivamente $\frac{572}{1001}$, $\frac{546}{1001}$, $\frac{616}{1001}$.

Tambien se podrian reducir las fracciones á un *comun numerador* (lo cual se haria aplicando á los numeradores lo que se ha dicho para los denominadores); y de las fracciones resultantes sería *mayor* la que tuviera *menor denominador*, pues siendo *mayor* la especie de las partes, se tomaba el mismo número de ellas. Pero el primer medio tiene la ventaja de hacer conocer al mismo tiempo las *diferencias* que existen entre las fracciones propuestas comparadas dos á dos.

117. Segunda cuestion.—*¿Qué alteracion sufre un quebrado, añadiendo un mismo número á los dos términos?*

Sirva de ejemplo el quebrado $\frac{7}{12}$, á cuyos dos términos se añaden 6, resultando $\frac{13}{18}$.

Reduciendo ambos quebrados $\frac{7}{12}$ y $\frac{13}{18}$ á un comun denominador, se convierte el primero en $\frac{126}{216}$, y el segundo en $\frac{156}{216}$: luego el quebrado propuesto ha aumentado su valor; y el esceso está espresado por la diferencia $\frac{30}{216}$.

Para darnos cuenta de este *hecho*, observemos que siendo la unidad igual á $\frac{12}{12}$, el esceso de la unidad sobre $\frac{7}{12}$ está espresado por $\frac{5}{12}$; y por igual razon el esceso de la unidad sobre $\frac{13}{18}$ está espresado por $\frac{5}{18}$. Los numeradores de estas dos diferencias son iguales; y así debia ser, porque habiéndose formado 18 y 13 por la adicion de 6 á los términos 12 y 7, ha de haber la misma diferencia entre los dos primeros que entre los dos segundos. Pero la diferencia $\frac{5}{18}$ es necesariamente menor que la diferencia $\frac{5}{12}$, porque el primer denominador es mas grande, siendo los numeradores iguales; luego el quebrado $\frac{13}{18}$ difiere menos de la unidad que el quebrado $\frac{7}{12}$, y es por consiguiente el primero mayor que el segundo.

Se concibe además, que cuanto mayor sea el número añadido á los dos términos del quebrado $\frac{7}{12}$, tanto menor será la diferencia entre la unidad y el quebrado resultante, pues siendo siempre 5 el numerador de la diferencia, va creciendo el denominador; por consiguiente, cuanto mayor sea el número añadido á los dos términos de un quebrado, tanto mayor será el nuevo quebrado.

Pudiendo evidentemente aplicarse este mismo razonamiento á cualquier otro quebrado, puede concluirse que *si á los dos términos de un quebrado se añade un mismo número, el quebrado resultante es mayor que el propuesto, y es tanto mayor cuanto mayor es el número añadido.*

Por razon inversa, *un quebrado disminuye de valor cuando se quita un mismo número á sus dos términos.*

Advertencia. Lo contrario sucederia, si el número fraccionario fuera mayor que la unidad, como $\frac{17}{14}$ (n.º 110).

Añadiendo 8 á los dos términos, tendriamos $\frac{25}{22} < \frac{17}{14}$. Porque $\frac{25}{22}$ escede á la unidad en $\frac{3}{22}$ solamente, mientras $\frac{17}{14}$ escede á la unidad en $\frac{3}{14}$, número $>$ que $\frac{3}{22}$.

Hemos creido oportuno detenernos en pormenores sobre esta proposicion, á fin de impedir que los principiantes confundan esta circunstancia con el caso en que se *multiplican ó dividen por un mismo número los dos términos de un quebrado.* En este caso no se altera (n.º 112) el valor del quebrado, mientras que añadiendo ó quitando un mismo número, aumenta ó disminuye el quebrado.

Reduccion de un quebrado á menores términos.

118. Con frecuencia resultan del cálculo de los quebrados algunos cuyos términos son bastante grandes, y cuanto mayores son el numerador y el denominador, tanto mas trabajo cuesta formarse idea clara del valor del quebrado.

Por ejemplo, el quebrado $\frac{12}{15}$ indica que debe dividirse la unidad en 15 partes iguales, tomando 12 de ellas. Pero siendo 12 y 15 divisibles por 3, si estas divisiones se efectúan, resulta $\frac{4}{5}$, quebrado (n.º 112) equivalente al propuesto; y entonces ya para formarse idea de él, basta concebir la unidad dividida en 5 partes y tomar 4 de ellas; lo cual es mucho mas sencillo.

Luego, cuando son de cierta magnitud los términos de una fraccion, es útil reducirla á otra, cuyos *términos sean menores.*

El primer medio que se ocurre es *dividir* los dos términos por los números 2, 3, 4,... mientras sea posible.

1.° *Sea el quebrado* $\frac{108}{144}$ *el que se quiere reducir á términos menores.*

Los dos términos de esta fraccion son evidentemente divisibles por 4 (n.° 68); y efectuando la division, resulta $\frac{27}{36}$; estos dos nuevos términos son divisibles por 9 (n.° 70), cuya division efectuada, dá por resultado $\frac{3}{4}$ fraccion que ya no puede simplificarse mas.

2.° *Sea la fraccion* $\frac{1288}{2632}$.

Siendo divisibles por 4 los dos términos, se efectúa la division y se obtiene $\frac{322}{658}$, fraccion cuyos dos términos pueden todavía dividirse por 2, resultando $\frac{161}{329}$.

Las divisiones por 3 y por 5 son imposibles (n.os 70 y 66); pero si se ensaya la division por 7, resulta exacta y dá $\frac{23}{47}$, fraccion cuyos dos términos no son ya divisibles por ningun número diferente de la unidad.

Estos ejemplos han sido fáciles; pero no siempre sucede lo mismo, sobre todo cuando los dos términos de la fraccion propuesta se componen de *tres* ó de *mayor* número de cifras; porque puede suceder que haya algun factor *primo* de *dos* ó de *tres* cifras, por ejemplo, *comun* á los dos términos de la fraccion, sin que pueda conocerse *à priori*, porque no exista carácter de divisibilidad para dicho factor; y sin embargo se concibe cuán útil sería tener un medio general de *reducir una fraccion dada á su menor espresion posible.*

Este medio es el que vamos á esponer.

Reduccion de un quebrado á sus menores términos.

Proposiciones preliminares.

119. Se llama FRACCION IRREDUCTIBLE la que no puede ser reemplazada por otra del *mismo valor*, pero espresada en *términos menores.*

PRIMERA PROPOSICION.— *Los términos de toda fraccion* IRREDUCTIBLE *son necesariamente* PRIMOS ENTRE SÍ.

Porque, si tuvieran un *factor comun*, dividiendo al uno y al otro por este factor, se obtendria un nuevo quebrado, cuyos términos serían respectivamente *menores* que los del propuesto; y entonces este no sería *irreductible;* lo cual es contra la hipótesis.

120. SEGUNDA PROPOSICION.—*Cuando una fraccion tiene primos entre sí sus dos términos, y hay otra fraccion que le es igual, los dos términos de la segunda son necesariamente* UN MISMO *múltiplo de los dos términos de la primera.*

En efecto, sea $\frac{a}{b}$ una fraccion cuyos dos términos se suponen *primos entre sí*, y $\frac{a'}{b'}$ otra fraccion equivalente á aquella; tendremos la igualdad

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}.$$

Si se multiplican los numeradores de estas dos fracciones *iguales* por el mismo número b' [lo cual hace á las dos (número 111) b' veces mayores], se tendrán resultados tambien *iguales;* tendremos, pues,

$$\frac{a'.b'}{b'}=\frac{a.b'}{b};$$

de donde, *suprimiendo* en la primera fraccion el factor b', comun á sus dos términos, se saca

$$a'=\frac{a.b'}{b}.$$

Esto supuesto, siendo *entero* el primer miembro de esta nueva igualdad, tambien debe serlo el segundo; es decir que b debe dividir al producto $a.b'$; pero b es *primo con a*, por hipótesis; luego b debe dividir á b' (n.° 87), y se tendrá

$$b'=b.m,\quad \text{(siendo } m \text{ número } \textit{entero}\text{)}.$$

Sustituyendo este valor de b' en la igualdad precedente, se obtiene

$$a' = \frac{a.b.m}{b};$$

de donde, suprimiendo el factor b, comun al numerador y denominador se saca esta otra

$$a' = a.m.$$

Donde se ve que a' y b' son el MISMO múltiplo $m.a$ y $m.b$ de los términos a y b de la fraccion propuesta.

L. C. D. D.

121. CONSECUENCIA de las dos proposiciones precedentes.— *Dos fracciones irreductibles iguales son necesariamente idénticas.*

Lo cual quiere decir que los numeradores son *iguales* y que tambien lo son los *denominadores*.

Sean en efecto, $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ dos fracciones *irreductibles*.

Supongamos que tenemos la igualdad

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Por lo pronto, puesto que $\frac{a}{b}$ es *irreductible* segun el supuesto, sus dos términos son *primos entre sí*, en virtud de la primera proposicion; luego, en virtud de la segunda, debemos tener

$$a' = ma, \ b' = mb,$$

siendo m un número *entero*, igual *por lo menos* á 1; de donde se sigue que a' y b' no pueden ser respectivamente *menores* que a y b.

Por otro lado, habiéndose supuesto tambien *irreductible* la fraccion $\frac{a'}{b'}$, se probaria del mismo modo que a y b no podrian ser respectivamente *menores* que a' y b'.

No pudiendo, pues, ser a y a', b y b', respectivamente *menores uno que otro*, son necesariamente *iguales;* y se tendrá

$$a=a', \quad b=b'.$$

L. C. D. D.

122. TERCERA PROPOSICION. — *Toda fraccion, cuyos términos son primos entre sí, es* IRREDUCTIBLE.

Porque, en virtud de la segunda proposicion, ninguna fraccion tal como $\frac{a'}{b'}$ podria ser igual á la propuesta $\frac{a}{b}$, cuyos términos se suponen *primos entre sí*, sino en cuanto se tuviera

$$a'=ma, \quad b'=mb.$$

Donde se ve que $\frac{a}{b}$ no puede ser reemplazada por ninguna otra fraccion de *menores términos* y del *mismo* valor.

123 De esta proposicion, recíproca de la precedente, deduciremos el medio de reducir un quebrado á *su menor espresion.*

Para esto vamos á demostrar que, *si se dividen los dos términos de un quebrado cualquiera por su máximo comun divisor, el quebrado resultante es igual al primero é* IRREDUCTIBLE.

Sea $\frac{a}{b}$ la fraccion propuesta, D el máximo comun divisor de a y b, a' y b' los cocientes respectivos de la division de a y b por D: tendremos

$$a=\mathrm{D}\times a', \quad b=\mathrm{D}\times b';$$

de donde se deduce necesariamente

$$\frac{a}{b}=\frac{\mathrm{D}\times a'}{\mathrm{D}\times b'};$$

y de aquí, *suprimiendo* en el segundo miembro el factor D *comun* á los dos términos, se saca

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}.$$

Luego ya tenemos que la fraccion $\frac{a'}{b'}$ es igual á $\frac{a}{b}$.

Además, es *irreductible* (n.° 122), porque siendo a' y b' los cocientes de la division de los números a y b por su máximo comun divisor, son (n.° 78) *primos entre sí.*

Luego, para *reducir un quebrado á su menor espresion, basta buscar el máximo comun divisor entre sus dos términos, y dividir despues por él cada uno de estos.*

Sea por ejemplo la fraccion $\frac{7665}{15184}$.

Aplicando á los dos números 15184 y 7665, el procedimiento ordinario del máximo comun divisor, con las modificaciones indicadas en el n.° 108, se halla que su máximo comun divisor es 73; dividiendo, pues, por 73 dichos dos números, resultan los cocientes 208 y 105; luego $\frac{105}{208}$ es la fraccion *irreductible* equivalente á la propuesta.

Segundo ejemplo, $\frac{29003}{36569}$.

Máximo comun divisor 1261; cocientes respectivos, 29 y 23; luego $\frac{23}{29}$ es la fraccion reducida á sus *menores términos.*

124. Observacion.—De lo que precede se deduce que, *si de los dos términos de una fraccion, se restan los* mismos múltiplos *de los dos términos de la fraccion* irreductible *equivalente, la fraccion resultante es tambien equivalente á la propuesta.*

Tomemos por ejemplo la fraccion $\frac{18}{24}$ que, reducida á sus *menores* términos, segun el procedimiento indicado en el número precedente, es igual á $\frac{3}{4}$.

Si, de los dos términos 18 y 24 de la fraccion propuesta, se restan respectivamente *cuatro* veces 3, ó 12 y *cuatro* veces 4 ó 16, se obtiene una nueva fraccion $\frac{6}{8}$, que es *igual* á la propuesta aun cuando se halla espresada en términos menores;

Porque, suprimiendo el factor 2, comun á 6 y á 8, se halla $\frac{3}{4}$, lo mismo que cuando se simplificó la fraccion propuesta $\frac{18}{24}$.

Es muy fácil darse cuenta de este resultado:

En efecto, si $\frac{18}{24}$ es igual á $\frac{3}{4}$, fraccion *irreductible*, cuyos dos términos son por consiguiente *primos entre sí*, es porque 18 y 24 son (n.º 120) *los mismos múltiplos* (*seis* veces 3 y *seis* veces 4) de los dos términos de la fraccion $\frac{3}{4}$; y cuando de 18 y de 24 se restan *cuatro* veces 3 y *cuatro* veces 4, se obtienen las diferencias *dos* veces 3 y *dos* veces 4, que son tambien *los mismos múltiplos* de 3 y de 4; de donde resulta la nueva fraccion $\frac{6}{8}$ igual á $\frac{3}{4}$.

Esta proposicion parece que debia suministrar un medio de *simplificar* una fraccion; pero se comprende que sería un medio completamente *ilusorio*, porque supone conocida de antemano la fraccion *irreductible* á que es equivalente la propuesta.

Advertencia. Conviene observar que aquí se restan de los dos términos de la fraccion *dos números diferentes*, cosa distinta de la operacion esplicada en el n.º 117, que consiste en restar *un mismo número* de los dos términos de una fraccion, lo cual necesariamente altera su valor.

Ahora pasamos á las cuatro operaciones fundamentales hechas con los quebrados.

Suma de quebrados.

125. La suma de quebrados tiene por objeto *hallar un número que valga él solo tanto como varios quebrados juntos*.

Pueden ocurrir dos casos: ó los quebrados que se van á sumar son de la *misma* especie, es decir, tienen el mismo denominador, ó son de especies *distintas*. En el primer caso, *se suman los numeradores y se pone á la suma por denominador el denominador comun*. En el segundo *se empieza por re-*

ducir los quebrados á un comun denominador, y queda la cuestion reducida á la anterior.

Así

$$\frac{2}{11}+\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=\frac{2+3+4}{11}=\frac{9}{11}.$$

Del mismo modo

$$\frac{5}{23}+\frac{2}{23}+\frac{7}{23}+\frac{4}{23}=\frac{5+2+7+4}{23}=\frac{18}{23}.$$

Sea ahora sumar los quebrados

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{7}{8}, \\ 8, & 6, & 3, \\ \hline \frac{16}{24}, & \frac{18}{24}, & \frac{21}{24}. \end{array}$$

Despues de haberlos reducido á un comun denominador (n.° 115), se hace la suma de los numeradores, lo cual dá 55, se le pone el denominador 24, y resulta la suma $\frac{55}{24}$.

Sacar los enteros de un número fraccionario y recíprocamente.

126. Este último ejemplo conduce á una espresion fraccionaria $\frac{55}{24}$, mayor que la unidad (n.° 110) y que conduce á una nueva operacion.

Se ha visto (n.° 110) que la *unidad* equivale á $\frac{24}{24}$, ó á *veinte y cuatro veinte y cuatro-avos;* de donde se sigue que cuantas veces contenga 55 á 24, otras tantas unidades hay en $\frac{55}{24}$. Dividiendo, pues, 55 por 24, se obtiene 2 por cociente y 7 de resíduo; luego $\frac{55}{24}$ es un número compuesto de 2 unidades mas una fraccion $\frac{7}{24}$.

En general, cuando se llega á un resultado fraccionario, cuyo numerador escede al denominador, para *sacar los enteros contenidos en él*, es necesario *dividir el numerador por el denominador*.

El cociente que se obtiene, representa el *entero*, y el resíduo es el numerador de la *fraccion* que debe agregarse al entero (n.° 43).

Por este medio se hallará

$$\frac{17}{12}=1\,\frac{5}{12};\quad \frac{153}{15}=10\,\frac{3}{15}=10\,\frac{1}{5};\quad \frac{654}{88}=7\,\frac{31}{89}.$$

Recíprocamente, cuando se tiene *un número misto* y se quiere convertir en *fraccionario*, es necesario *multiplicar el entro por el denominador, añadir al producto el numerador, y poner á la suma por denominador el del quebrado.*

Por ejemplo,

$$3\,\frac{2}{5}=\frac{3\times5+2}{5}=\frac{17}{5};$$

$$11\,\frac{7}{12}=\frac{11\times12+7}{12}=\frac{139}{12};\ 8\,\frac{17}{24}=\frac{8\times24+17}{24}=\frac{209}{24}.$$

Resta de quebrados.

127. La resta de quebrados tiene por objeto *hallar el esceso de un quebrado mayor sobre otro menor.*

Si los dos quebrados tienen el mismo denominador, *se resta el numerador menor del mayor, y á la diferencia se pone por denominador el denominador comun.* Si no tienen el mismo denominador, *se reducen á él y se procede despues como en el caso anterior.*

Así, sea por ejemplo restar $\frac{5}{12}$ de $\frac{11}{12}$: quedarán $\frac{6}{12}$ ó $\frac{1}{2}$.

Del mismo modo

$$\frac{17}{24}-\frac{7}{24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}.$$

Sea ahora restar $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$.

Estas dos fracciones equivalen (n.° 113) á $\frac{16}{24}$ y $\frac{21}{24}$; por consiguiente tendremos

$$\frac{21}{24}-\frac{16}{24}=\frac{21-16}{24}=\frac{5}{24}.$$

Del mismo modo

$$\frac{19}{20}-\frac{13}{17}=\frac{19\times17-13\times20}{20\times17}=\frac{63}{340}.$$

Puede ocurrir restar un *misto* de otro.

Sea por ejemplo restar $5\,\frac{11}{13}$ de $13\,\frac{3}{4}$.

$$13\,\frac{3}{4}=13\,\frac{39}{52}=11\,\frac{91}{52},$$
$$5\,\frac{11}{13}=\ 5\,\frac{44}{52}\ldots 5\,\frac{44}{52},$$
$$\overline{\qquad 7\,\frac{47}{52}.\qquad}$$

Para efectuar esta operacion se empieza por reducir los dos quebrados á un comun denominador resultando $\frac{39}{52}$ para el primero y $\frac{44}{52}$ para el segundo. Pero como no puede restarse $\frac{44}{52}$ de $\frac{39}{52}$, se añade á este último quebrado *una unidad*, que se reduce á su especie, convirtiéndose entonces en $\frac{91}{52}$ (número 126), del cual se resta el $\frac{44}{52}$, obteniéndose la diferencia $\frac{47}{52}$. Pasando á la resta de los enteros, se aumenta *una unidad* al sustraendo, y se dice: de 6 á 13 van 7: por consiguiente el resultado pedido es $7\frac{47}{52}$.

128. Hé aquí un ejemplo en que se hallan reunidas la suma y la resta de los números mistos.

Un comerciante de paños ha vendido de una pieza que tenia 30 metros y $\frac{7}{8}$, *primero un pedazo de* $7^{m.}\frac{3}{4}$ *despues otro de* $9^{m.}\frac{2}{3}$, *y finalmente* $11^{m.}\frac{5}{12}$: *desea saber cuántos metros le quedan de la pieza.*

Hará primero la *suma* de las tres ventas, y luego restará esa suma de los $30^{m.}\frac{7}{8}$: el resultado de la resta le dirá los metros de paño que le quedan.

Para mayor sencillez se dispone la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{llll}
 & \underline{12} & & \\
7^{m.} & \frac{3}{4} \ldots & 3 \ldots & 9 \\
9 & \frac{2}{3} \ldots & 4 \ldots & 8 \\
11 & \frac{5}{12} \ldots & 1 \ldots & 5 \\
 & & & \overline{22} \\
\hline
28\,\frac{10}{12} & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
30^{m.} & \frac{7}{8} \ldots\ldots & \frac{21}{24} \\
28 & \frac{10}{12} \ldots\ldots & \frac{20}{24} \\
\hline
2\,\frac{1}{24} & &
\end{array}$$

Despues de haber colocado unos sobre otros los tres sumandos, se observa que los quebrados no tienen el mismo denominador y pueden reducirse al denominador comun 12. Se escribe este número á la derecha, un poco mas alto que los quebrados, y se subraya. Despues se escriben debajo del 12, y respectivamente en la línea horizontal de cada quebrado, los cocientes 3, 4 y 1 de la division de 12 por cada denominador: se multiplica cada numerador por su respectivo cociente, y se obtiene 9, 8 y 5: se suman estos tres nuevos numeradores, que dán 22, y por consiguiente la suma de los tres quebrados propuestos es $\frac{22}{12}$, ó $1\frac{10}{12}$. Se escribe el $\frac{10}{12}$ debajo de los tres quebrados y se lleva el 1 para sumarlo con los enteros del modo ordinario. Así, resulta $28\frac{10}{12}$, suma total de metros vendidos.

Escríbese esta suma debajo de $30\frac{7}{8}$, se hace la sustraccion como antes se ha visto, observando para simplificar que los quebrados pueden reducirse al comun denominador 2 veces 12 ó 24.

Así, se ve que quedan de la pieza 2 metros y $\frac{1}{24}$, lo que fácilmente puede comprobar el comerciante midiendo el *retal* que le queda.

MULTIPLICACION DE QUEBRADOS.

129. La multiplicacion tiene en general por objeto (n.º 9) *dados dos números, hallar un tercero que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad.*

Esto supuesto, en la multiplicacion de quebrados se distinguen TRES CASOS principales. A saber:

1.º MULTIPLICAR UN QUEBRADO POR UN ENTERO.

Sea, por ejemplo, multiplicar $\frac{7}{12}$ *por* 5.

Segun la definicion de arriba, conteniendo *cinco veces* á la unidad el multiplificador 5, deberá el producto equivaler á 5 veces $\frac{7}{12}$ ó ser 5 veces mayor que $\frac{7}{12}$. Pero se vió (número 111) que un quebrado se hace 5 veces mayor multiplicando su numerador por 5; luego $\frac{5 \text{ veces } 7}{12}$ ó $\frac{35}{12}$ será el producto pedido.

Luego, *para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador del quebrado por el entero, dejando el mismo denominador.*

El producto $\frac{35}{12}$ equivale á $2\frac{11}{12}$, como puede verse sacando los enteros que contiene el número fraccionario (número 126).

Del mismo modo se vería que el producto de $\frac{13}{24}$ por 29 es igual á $\frac{377}{24}$ ó á $15\frac{17}{24}$.

Sea ahora multiplicar $\frac{11}{18}$ *por* 9. Siguiendo la regla, resulta el producto $\frac{99}{18}$, ó sacando los enteros, $5\frac{9}{18}$, ó $5\frac{1}{2}$.

Este resultado pudiera haberse obtenido mas sencillamente; pues para multiplicar $\frac{11}{18}$ por 9, se puede (n.º 111) en lugar de multiplicar el numerador por 9, *dividir* el denominador por 9, lo cual dá $\frac{11}{2}$ ó $5\frac{1}{2}$.

Para que sea posible este segundo modo de operar es menester que el denominador sea divisible por el multiplicador; pero esto no siempre sucede, mientras que la regla antes dada es aplicable en todos los casos: solo el uso puede hacer familiares estas simplificaciones.

2.º Multiplicar un entero por un quebrado.

Sea multiplicar 12 *por* $\frac{4}{7}$.

Siendo en este caso el multiplicador $\frac{4}{7}$ equivalente á 4 veces la *séptima parte* de la unidad, el producto habrá de equivaler á 4 veces la séptima parte de 12. Pero la séptima parte de 12 es (n.º 110) $\frac{12}{7}$, y para tomar este número 4 veces, ó tener un número 4 veces mayor que $\frac{12}{7}$, basta (n.º 111) multiplicar el numerador por 4; luego haciéndolo así tendremos $\frac{48}{7}$ ó $6\frac{6}{7}$, que será el producto pedido.

Luego, *para multiplicar un entero por un quebrado, basta multiplicar el entero por el numerador y poner al producto* *por denominador el del quebrado*: en seguida pueden sacarse los enteros si los hay.

Así

$$29 \times \frac{7}{8} = \frac{203}{8} = 25\frac{3}{8};$$

del mismo modo

$$24 \times \frac{5}{6} = \frac{120}{6} = 20;$$

resultado que tambien se hallaria empezando por *dividir* 24 por 6, lo cual daria 4, y *multiplicando* este resultado por 5.

Pero repetimos que no son siempre posibles semejantes simplificaciones.

3.° MULTIPLICAR UN QUEBRADO POR OTRO.

Sea multiplicar $\frac{3}{4}$ *por* $\frac{5}{8}$.

El razonamiento es análogo al del caso precedente; puesto que el multiplicador $\frac{5}{8}$ equivale á 5 veces la *octava parte* de la unidad, el producto debe ser tambien 5 veces la octava parte del multiplicando $\frac{3}{4}$: para tomar la octava parte de $\frac{3}{4}$, es menester (n.° 111) multiplicar el denominador por 8, lo cual dá $\frac{3}{32}$; y para tomar 5 veces esta octava parte, es menester multiplicar por 5 su numerador, lo cual dá $\frac{15}{32}$, que es el producto pedido.

Luego, *para multiplicar un quebrado por otro, se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, poniendo el segundo producto por denominador del primero.*

Así se encontrará:

$$\frac{7}{12} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{72};$$

del mismo modo

$$\frac{8}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Advertencia. En los dos últimos casos *el producto es siempre menor que el multiplicando;* y así debia ser, porque la operacion se reduce realmente á tomar del multiplicando la parte indicada por el *quebrado multiplicador*.

130. Finalmente, uno ó ambos factores pueden ser *mistos*, pero sus varios casos se reducen fácilmente á alguno de los anteriores.

Sea, por ejemplo, multiplicar $7\frac{2}{3}$ *por* $5\frac{7}{8}$.

Estos números reducidos á fraccionarios (n.° 126) equivalen respectivamente á $\frac{23}{3}$ y $\frac{47}{8}$; efectuando la multiplicacion por la regla de arriba, se obtiene el producto $\frac{1081}{24}$, ó sacando los enteros, $45\frac{1}{24}$.

Tambien podria efectuarse por partes la multiplicacion; es decir, multiplicar primero 7 por 5, $\frac{2}{3}$ por 5, 7 por $\frac{7}{8}$, y $\frac{2}{3}$ por $\frac{7}{8}$, sumando despues los *cuatro* productos; pero sería mucho mas larga la operacion.

Division de quebrados.

131 La division tiene por objeto (n.° 27): *dado un producto de dos factores y uno de estos, determinar el otro.* De esta definicion resulta evidentemente como de la de la multiplicacion (n.° 17) que el primer número, llamado *dividendo*, es respecto del tercero, llamado *cociente*, como el segundo, llamado *divisor*, es respecto de la unidad.

Esto supuesto, en la division de quebrados ocurren TRES casos principales como en la multiplicacion. A saber:

1.° Dividir un quebrado por un entero.

Sea, por ejemplo, dividir $\frac{5}{7}$ *por* 6.

Siendo el divisor 6 igual á 6 veces la unidad, se infiere que el dividendo $\frac{5}{7}$ debe valer 6 veces el cociente buscado; ó recíprocamente, que este cociente equivale á la sesta parte del dividendo $\frac{5}{7}$. Pero la *sesta* parte de un quebrado se toma (número 111) multiplicando por 6 su denominador; multiplicando, pues, por 6 el denominador 7, se obtendrá $\frac{5}{7 \text{ veces } 6}$, ó $\frac{5}{42}$, que será el cociente pedido.

Luego, *para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador del quebrado por el entero, dejando el mismo numerador.*

Así

$$\frac{11}{12} \textit{ dividido por } 8, \text{ ó (n.° 44)}, \ \frac{11}{12} : 8 = \frac{11}{12 \times 8} = \frac{11}{96};$$

del mismo modo

$$\frac{23}{30} : 12 = \frac{23}{30 \times 12} = \frac{23}{360}.$$

El cociente de $\frac{18}{25}$ por 6 es $\frac{18}{150}$; pero esta division puede tambien efectuarse tomando la sesta parte del numerador, lo cual dá $\frac{3}{25}$, resultado equivalente al primero simplificado por 6, factor comun á ambos términos.

2.° DIVIDIR UN ENTERO POR UN QUEBRADO.

Sea dividir 12 *por* $\frac{7}{9}$.

De ser el divisor $\frac{7}{9}$ igual á 7 veces la *novena parte* de la unidad, se infiere que el dividendo 12 ha de ser 7 veces la novena parte del cociente buscado. Luego tomando la séptima parte de 12, que es $\frac{12}{7}$, se tendrá la novena dél cociente buscado; y para obtener el cociente total bastará tomar 9 veces $\frac{12}{7}$, lo cual se hace multiplicando por 9 su numerador:

hecho así, resulta $\frac{9 \text{ veces } 12}{7}$ ó $\frac{108}{7}$, y sacando los enteros, $15\frac{3}{7}$, que es el cociente.

Luego, *para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador y se parte el producto por el numerador, sacando los enteros si los hay.*

Observemos que tomar la 7.ª parte de 12 y multiplicar el resultado por 9, equivale á multiplicar 12 por $\frac{9}{7}$: así podrá tambien decirse que *para dividir un entero por un quebrado, se multiplicará el entero por el quebrado invertido.* (Véase el n.º 129, 2.º).

3.º DIVIDIR UN QUEBRADO POR OTRO QUEBRADO.

Sea, por ejemplo, dividir $\frac{3}{5}$ *por* $\frac{8}{11}$.

El razonamiento es parecido al anterior. Siendo el divisor $\frac{8}{11}$ igual á 8 veces la 11.ª parte de la unidad, el dividendo $\frac{3}{5}$ debe tambien ser igual á 8 veces la 11.ª parte del cociente; luego la 8.ª parte de $\frac{3}{5}$, ó $\frac{3}{40}$, es la 11.ª del cociente; y 11 veces $\frac{3}{40}$, ó $\frac{33}{40}$, es el cociente pedido.

Luego, *para dividir un quebrado por otro, se multiplica el numerador del quebrado dividendo por el denominador del quebrado divisor, y el denominador de aquel por el numerador de este, poniendo despues el primer producto por numerador y el segundo por denominador;* ó mas simplemente, *se multiplica el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertido.* (Véase el n.º 129.)

Así,

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20};$$

del mismo modo,

$$\frac{23}{30} : \frac{13}{15} = \frac{23}{30} \times \frac{15}{13} = \frac{23 \times 15}{30 \times 13} = \frac{345}{390} = \frac{23}{26}.$$

(Antes de formar los productos indicados, 23×15 y 30×13, se habria podido *suprimir* el factor 15, que es evidentemente *comun* á los dos términos de la fraccion.)

Advertencia. Siempre que en la division de quebrados, es el divisor *menor que la unidad,* el cociente debe ser *mayor que el dividendo.*

Porque este cociente resulta de la multiplicacion del dividendo por el *divisor invertido,* que se convierte así en un número mayor que 1.

132. Finalmente, si hubiéramos de *dividir un misto por otro misto,* se reducirian ambos á fraccionarios y se operaria como en la division de quebrado por quebrado.

Sea dividir $12\frac{3}{4}$ *por* $6\frac{2}{3}$.

Tendremos:

$$12\frac{3}{4}:6\frac{2}{3}=\frac{51}{4}:\frac{20}{3}=\frac{51}{4}\times\frac{3}{20}=\frac{153}{80}=1\frac{73}{80};$$

del mismo modo

$$7\frac{8}{11}:15\frac{5}{8}=\frac{85}{11}:\frac{125}{8}=\frac{85}{11}\times\frac{8}{125}=\frac{680}{1375}=\frac{136}{275}.$$

Fracciones de términos fraccionarios.

133. Al esplicar la division de los quebrados, hemos hecho siempre uso de *dos puntos* (:), para indicar la operacion que debia ejecutarse, por ser esta notacion generalmente mas sencilla y mas cómoda que la *raya* (—). Sin embargo, hay circunstancias, en que el empleo de esta es útil y aun indispensable para la claridad de los razonamientos, como pronto veremos en algunos ejemplos.

Así, segun digimos en el n.° 44 (*signos* de la division),

$\dfrac{\frac{5}{7}}{\frac{8}{9}}$ tiene la misma significacion que $\frac{5}{7}:\frac{8}{9}$.

Del mismo modo $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ equivale á $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Solamente es necesario, para evitar toda confusion, cuidar de que la *raya* de la operacion principal sea *un poco mas larga* que las otras dos.

Además, si se hace uso de letras, como en el segundo ejemplo, al tiempo de pronunciarla, podria decirse para mayor claridad :

a *sobre* b, *dividido por* c *sobre* d.

De esta manera venimos á parar á la consideracion de espresiones *fraccionarias*, cuyo numerador y denominador no son ya números *enteros*, sino que son tambien á su vez números fraccionarios, á los cuales, atendida la naturaleza de los procedimientos establecidos, *se pueden aplicar en todo rigor los principios demostrados para el caso en que los dos términos* de un *número fraccionario* son *números enteros*.

Para justificar esta proposicion, hagamos ver por ejemplo, que: *si se multiplican por un número entero cualquiera, los dos términos de una espresion fracccionaria*, que se suponen tambien fraccionarios, *no se cambia el valor del cociente*.

Sea $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ el número propuesto: multipliquemos por m sus dos términos $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$: digo que el cociente será *el mismo* antes y despues de la multiplicacion.

En efecto, por lo pronto tenemos (n.° 131, 3.°)

$$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Ahora, si multiplicamos los dos términos del número propuesto por un número entero m, obtendremos, aplicando las reglas sobre la multiplicacion y division de las fracciones, la série de igualdades

$$\frac{\frac{a}{b}\times m}{\frac{c}{d}\times m}=\frac{\frac{a\times m}{b}}{\frac{c\times m}{d}}=\frac{a\times m}{b}\times\frac{d}{c\times m}=\frac{a\times m\times d}{b\times c\times m}=\frac{a\times d}{b\times c},$$

(esta última espresion resulta de la supresion del factor comun m).

Donde se ve que el resultado es absolutamente igual, sea *antes*, sea *despues* de la multiplicacion.

De los quebrados de quebrados.

134. A la multiplicacion de los quebrados se enlaza otra especie de operacion, conocida bajo el nombre de *regla de los quebrados de quebrados.*

Para dar idea clara de esta operacion, supongamos primero que de la fraccion $\frac{5}{7}$, se quiere tomar una parte indicada por la fraccion $\frac{2}{3}$.

Como esto equivale á tomar 2 veces la *tercera parte* de $\frac{5}{7}$, ó lo que es lo mismo (n.° 129, 3.°) á multiplicar $\frac{5}{7}$ por $\frac{2}{3}$, tendremos el resultado

$$\frac{5\times 2}{7\times 3}, \quad ó \quad \frac{10}{21}.$$

En segundo lugar, supongamos que, del nuevo quebrado $\frac{10}{21}$ se quiere tomar una parte indicada por la fraccion $\frac{8}{13}$.

Segun lo que acabamos de decir, tendremos por resultado

$$\frac{10\times 8}{21\times 13}, \text{ ó } \frac{80}{273};$$

y esta última espresion representará los $\frac{8}{13}$ de los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$.

Tomemos ahora los $\frac{3}{11}$ de $\frac{80}{273}$; obtendremos el nuevo resultado

$$\frac{80\times 3}{273\times 11}, \text{ ó } \frac{240}{3003},$$

espresion que representará los $\frac{3}{11}$ de los $\frac{8}{13}$ de los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$.

Donde se ve que:

Para tomar una fraccion de otra fraccion, es necesario *multiplicar todos los numeradores entre sí y lo mismo todos los denominadores, poniendo despues el primer producto por numerador y el segundo por denominador.*

Cuando han de tomarse fracciones de fracciones de un *entero*, debe ponerse el *entero* en forma de *quebrado*, escribiéndole 1 por denominador (n.º 110), aplicando despues la regla que acabamos de dar.

Así,

$$\text{los } \frac{2}{3} \text{ de los } \frac{3}{4} \text{ de los } \frac{5}{8} \text{ de los } \frac{6}{7} \text{ de } \frac{12}{1} = \frac{2\times 3\times 5\times 6\times 12}{3\times 4\times 8\times 7\times 1} = \frac{210}{672},$$

ó sacando los enteros igual á

$$3\,\frac{144}{672} = 3\,\frac{3}{14}.$$

Problema.—*Se preguntaba á un aritmético qué hora era, y respondió: son los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{6}$ de los $\frac{7}{12}$ de los $\frac{6}{7}$ de 24 horas. ¿Qué hora era en efecto?*

Para resolver esta cuestion, escríbanse primero en línea horizontal todos los numeradores, incluso el entero, y despues debajo en otra línea, todos los denominadores, incluso 1 (n.° 110):

$$\begin{array}{ccccc} 3, & 5, & 7, & 6, & 24, \\ 4, & 6, & 12, & 7, & 1. \end{array}$$

Esto supuesto, *hágase el producto* de los números de la primera línea y el de los números de la segunda, y *divídase* el primer producto por el segundo.

Así se obtiene por resultado $\frac{15120}{2016}$, ó, sacando los enteros $7\,\frac{1008}{2016}$, ó, reduciendo, $7\,\frac{1}{2}$.

Luego eran las *siete y media*.

Advertencia. Puede simplificarse la operacion, observando que: 1.° 7 debe ser evidentemente *factor comun* al producto de los numeradores y al de los denominadores, y por consiguiente nada impide que se suprima antes de efectuar las multiplicaciones; 2.° lo mismo sucede con el factor 6, y con el factor 12, que entra en el número de los denominadores y divide al mismo tiempo al numerador 24; y finalmente con el factor 2, cociente de 24 por 12, que está tambien comprendido en el denominador 4.

Hecha, pues, la *supresion* de todos los factores *comunes*, resultará $\frac{3\times5}{2}$, ó $\frac{15}{2}$, ó $7\,\frac{1}{2}$, como antes se encontró.

Esta clase de simplificaciones, que no deben descuidarse, exigen cierta costumbre para poderlas hacer.

Otras aplicaciones.—Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de un número forman los $\frac{6}{12}$ ó la *mitad* del número.

El *tercio* del *quinto* de un número es igual á la *décima-quinta parte;* la mitad de los $\frac{3}{4}$ es igual á los $\frac{3}{8}$, etc.

Valuacion aproximada de las fracciones ordinarias.

135. Para completar la teoría general de las fracciones, vamos á resolver una cuestion que tendrá útiles aplicaciones, y cuyo enunciado es el siguiente:

Dada una fraccion IRREDUCTIBLE, *cuyos términos sean bastante grandes para que sea difícil formarse idea clara de su valor, reemplazarla por otra que se le aproxime mas ó menos, pero cuyos términos sean mas simples.* (Tales son las que tienen por denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 24, etc.)

Sirva de *primer ejemplo* la fraccion $\frac{523}{949}$.

Propongámonos valuarla en *dozavos*, es decir, reemplazarla por otra fraccion cuyo *denominador* sea 12.

Empecemos por observar que, valiendo la unidad $\frac{12}{12}$, (número 110), los $\frac{523}{949}$ de la *unidad* valen los $\frac{523}{949}$ de 12 *dozavos*, ó (n.° 129, 2.°) $\frac{523\times 12}{949}$ de *dozavos* ó $\frac{\frac{523\times 12}{949}}{12}$ (número 133).

Si pues se efectúan las dos operaciones indicadas en la espresion $\frac{523\times 12}{949}$, la parte entera del cociente espresará el número de *dozavos* contenido en el número propuesto.

Ejecutada esta doble operacion

$$\begin{array}{r|l} 523 & \\ 12 & \\ \hline 6276 & 949 \\ \hline 582 & 6 \end{array}$$

se obtienen 6 como parte entera del cociente; lo cual dá $\frac{6}{12}$, ó $\frac{1}{2}$ por valor de $\frac{523}{949}$, *con menos de* $\frac{1}{12}$ de diferencia.

Porque la parte despreciada en el resultado es la *duodécima* parte de la fraccion $\frac{582}{949}$, que debia añadirse al cociente 6, y por consiguiente es *menor que* $\frac{1}{12}$.

Sirva de segundo ejemplo la fraccion $\frac{3179}{8764}$, cuyo valor se pide aproximado *en menos* de $\frac{1}{20}$.

Con arreglo á este procedimiento se tendrá

$$\frac{3179}{8764} = \frac{\frac{3179}{8764} \times 20}{20}.$$

Efectuando la doble operacion indicada en la espresion $\frac{3179 \times 20}{8764}$, se encuentra por resultado final, $7\,\frac{2232}{8764}$, luego $\frac{7}{20}$ es el valor de $\frac{3170}{8764}$, aproximado hasta $\frac{1}{20}$.

136. En general, para transformar una fraccion $\frac{a}{b}$ de una especie *dada* y marcada por su denominador b, en otra de *especie diferente*, marcada por n, ó bien, para sustituirle otra fraccion que lleve por denominador el número entero n:

Multiplíquese el numerador de la fraccion propuesta por n, *y divídase el producto por el denominador.*

Fórmese en seguida *un nuevo quebrado, que lleve por numerador la parte entera*, a′ *del cociente que resulte de la division, y por denominador*, n.

La fraccion $\frac{a'}{n}$ es la fraccion buscada.

137. *Advertencia.*— Siempre que el denominador de la fraccion que va unida al cociente obtenido, es *mayor que el duplo* de su numerador (lo cual se reconoce á la simple vista), puede concluirse que el error cometido sustituyendo $\frac{a'}{n}$ en vez de $\frac{a}{b}$, es menor que $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{n}$, ó $\frac{1}{2n}$, y se dice en este caso, que $\frac{a'}{n}$ es el valor aproximado, *por defecto*, ó *en menos*, de la fraccion $\frac{a}{b}$, á la cual no llega á faltar $\frac{1}{2n}$.

Sí por el contrario, el denominador es *inferior al duplo* del numerador, es costumbre *añadir* una unidad *á la parte entera* del cociente, resultando entonces $\frac{a'+1}{n}$ que será el valor aproximado, *por esceso*, sobrándole *menos* de $\frac{1}{2n}$.

Así, como en el primer ejemplo, la fraccion $\frac{582}{949}$ que completa el cociente, tiene el denominador *menor que el duplo* de su numerador, debe tomarse $\frac{7}{12}$ en vez de $\frac{6}{12}$, y entonces se tiene el valor de la fraccion propuesta, aproximado *por esceso*, sobrándole menos de $\frac{1}{24}$.

En el segundo ejemplo, el denominador de la fraccion $\frac{2232}{8764}$ *es mayor que el duplo* del numerador; por consiguiente $\frac{7}{20}$ es el valor aproximado, *por defecto*, faltándole menos de $\frac{1}{40}$.

Hay mas todavía: en este caso el denominador es aun mayor que el *triplo* del numerador; luego $\frac{7}{20}$ no difiere, *en menos*, de la fraccion propuesta, sino en una cantidad *menor que* $\frac{1}{60}$.

Añadirémos finalmente que para abreviar, se dice algunas veces: *Determinar en menos de* $\frac{1}{n}$ el valor de una fraccion $\frac{a}{b}$; y es muy conveniente para evitar cualquiera equivocacion, conservar en la memoria el significado de esta locucion.

Observacion general sobre las fracciones.

138. Digimos al comenzar el segundo capítulo (n.º 45),

que esplicaríamos cómo son susceptibles de aplicarse á los números *fraccionarios* los principios relativos á los números *enteros*.

Ahora bien, resulta de la naturaleza de los procedimientos establecidos para el cálculo de las *fracciones*, que las cuatro operaciones fundamentales, que se efectúan con esta clase de números, se reducen, en último análisis, á operaciones del mismo género ejecutadas con números *enteros*.

Luego, todos los principios sobre la *multiplicacion* y la *division*, que han sido objeto del primer párrafo del capítulo segundo, se estienden igualmente á los *números fraccionarios*.

Por ejemplo:

El producto de dos ó mas quebrados es el mismo, cualquiera que sea el órden en que se verifique su multiplicacion;

Multiplicar una fraccion por el producto efectuado de otras varias, equivale á multiplicar una de ellas sucesivamente por todas las otras;

Se pueden *multiplicar* ó *dividir* POR UN MISMO NÚMERO *los dos términos de una espresion fraccionaria cualquiera* (número 133) *sin que el cociente cambie de valor;*

Y lo mismo los demás principios.

Análogamente se deduciria de la definicion (n.° 46) de las espresiones MÚLTIPLO y SUBMÚLTIPLO ó DIVISOR de un número, que existen quebrados *múltiplos* y *submúltiplos* ó *divisores* de otros quebrados, lo cual significa que la division de la fraccion *múltiplo* por la fraccion *submúltiplo* dá un COCIENTE ENTERO.

Así, los quebrados $\frac{12}{23}$, $\frac{8}{23}$, $\frac{6}{23}$, son *múltiplos* de $\frac{2}{23}$; pues el primero contiene á este *seis veces exactamente*, el segundo *cuatro veces* y el tercero *tres*.

En general, todo quebrado tiene por divisores á su *mitad*, su *tercio*, su *cuarto*, etc.; de donde se infiere que el número de sus divisores es *infinito*, lo cual no sucede con los números *enteros* si solo se consideran los divisores *enteros*.

Dos fracciones pueden tambien tener *divisores comunes*; por ejemplo, $\frac{35}{48}$, $\frac{7}{24}$, tienen por *divisor comun* la fraccion $\frac{7}{48}$ y todos los *submúltiplos* de esta; porque los cocientes resultantes de dividir $\frac{35}{48}$ y $\frac{7}{24}$ por $\frac{7}{48}$ (segun la regla del número 131, 3.°), son respectivamente iguales á 5 y 2, *números enteros*.

Luego, generalmente pueden establecerse con relacion á las *fracciones* propiedades análogas á las que hemos espuesto sobre el máximo comun *divisor* y sobre el *mínimo múltiplo de dos ó mas* números. Al fin del capítulo propondremos varios ejemplos para ejercicio.

§ II.— DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Colocamos aquí la teoría de los *números complejos* por ser una aplicacion inmediata de la teoría de las *fracciones ordinarias*.

Pero como las operaciones que exige, han perdido su importancia despues del establecimiento del *sistema decimal de pesos y medidas* (*), nos reducirémos á dar las nociones indispensables para la resolucion de las cuestiones, que generalmente tienen por objeto la comparacion de las medidas antiguas con las nuevas, y á las que se refieren particularmente á la *division del tiempo*, á la *division del círculo* y á las principales *divisiones del termómetro*.

139. *Nociones preliminares.*— Hemos visto (n.° 8) que, para valuar las cantidades menores que la *unidad principal*, se concibe esta unidad dividida en cierto número de *partes iguales*, que se consideran á su vez como nuevas *unidades*.

En la teoría que nos ocupa, la unidad se divide al principio en un *pequeño* número de partes *iguales;* estas despues se dividen en otras, y estas en otras, etc.

Así, en la antigua moneda (francesa) la *libra* se dividia en 20 partes iguales llamadas *sueldos* y el *sueldo* en 12 partes iguales llamadas *dineros*. Del mismo modo, la unidad de longitud ó la *toesa* se dividia en 6 *pies*, el pie en 12 *pulgadas*, etc.

(*) Así dice el autor refiriéndose á Francia: nosotros lo dejamos así para ser fieles en la traduccion, á pesar de no tener aun establecido en el uso general el sistema de pesos y medidas.
(N. del T.)

140. Cada arte, cada industria, cada pais subdividia á su manera la unidad principal que le era propia (*).

El cuadro siguiente comprende *la lista de las unidades principales* y de sus subdivisiones.

Cuadro de las monedas, pesos y medidas españolas (**).

MONEDAS.

Monedas efectivas de cobre.

1 ochavo.	2 maravedís.
1 cuarto.	4 maravedís.
2 cuartos.	8 maravedís.

Monedas efectivas de plata.

1 real de vellon.	34 maravedís.
1 media peseta.	2 reales de vellon.
1 peseta.	4 reales de vellon.
1 medio duro.	10 id.
1 duro ó peso fuerte. . .	20 id.

Además de esta moneda hay la llamada *columnaria*, y consta de las piezas siguientes:

1 peseta columnaria.	5 reales de vellon.
1 media peseta columnaria. .	2 id., 17 mrs.
1 real columnario.	1 id., $8^1/_2$ id.

Moneda de oro efectiva.

1 escudito.	20 rs. vn.
1 escudo.	40 rs. vn.
1 doblon de á 2 escudos.	80 rs. vn.
1 doblon de á 4 escudos ó media onza.	160 rs. vn.
1 doblon de á 8 escudos ú onza de oro.	320 rs. vn.

(*) Para la historia y el orígen de estas clases de medidas, véase una obra de *M. Saigey*, titulada *Traitè de Mètrologie ancienne et moderne.*

(**) Hemos sustituido naturalmente las medidas, etc., españolas á las francesas que pone el autor. *(N. del T.)*

Además hay otras irregulares, y son las siguientes:

1 escudito de oro anterior al año 1785 vale.	21 rs. $8 \frac{1}{2}$ mrs.
1 onza de oro anterior al año 1772. . . .	321 rs., 6 mrs.

Por real decreto de 15 de Abril de 1848 se ha mandado que la moneda que en adelante se acuñe se componga de las piezas siguientes:

DE ORO.	—El doblon Isabel. . . .	5 duros ó 100 rs. vn.
DE PLATA.	—El duro.	20 rs. vn.
	El medio duro ó escudo.	10 rs. vn.
	La peseta.	4 rs. vn.
	La media peseta. . . .	2 rs. vn.
	El real.	10 décimas de real.
DE COBRE.	—El medio real.	5 décimas.
	La doble décima. . . .	2 id.
	La décima.	1 id.

Medidas de longitud.

1 vara.	3 pies.
1 pié.	12 pulgadas.
1 pulgada.	12 líneas.
1 línea.	12 puntos.

De aquí se inferirá el número de pulgadas, líneas y puntos que tiene una vara: lo decimos aquí en esta sola clase de medidas para ejemplo de las demás.

La vara tiene 3 piés, y cada pié tiene 12 pulgadas; luego la vara tendrá 36 pulgadas, y como cada pulgada tiene 12 líneas, la vara tendrá 36 veces 12 líneas, es decir, 432 líneas, y así sucesivamente respecto de las demás unidades.

Medidas itinerarias.

El grado medio de la tierra. . .	20 leguas.
La legua.	6666 $\frac{1}{3}$ varas.
La vara.	3 piés.

En la marina se usan las siguientes:

La legua marina.	3 millas.
La milla.	10 cables.

El cable.	111 brazas.
La braza..	6 piés.

Medidas de superficie.

Para medir superficies se usan los cuadrados de las medidas longitudinales en la siguiente forma:

La legua cuadrada. . . .	400000000	piés cuadrados.
La vara cuadrada.	9	piés cuadrados.
El pié cuadrado.	144	pulgadas cuadradas.
La pulgada cuadrada. . .	144	líneas cuadradas.
La línea cuadrada. . . .	144	puntos cuadrados.

Medidas agrarias.

La fanega de tierra de marco real.	12	celemines.
El celemin.	48	estadales cuadrados.
El cuartillo de celemin.	12	estadales cuadrados.
El estadal cuadrado.	144	piés cuadrados.
La aranzada..	400	estadales cuadrados.
La tahulla murciana.	1600	varas cuadradas.

Medidas de capacidad para áridos.

La fanega.	12 celemines.
El celemin.	2 medios celemines.
El medio celemin. .	2 cuartillos.

La media fanega equivale á un volúmen de 2220 pulgadas cúbicas, y caben en ellas 60,25 libras de agua destilada.

Medidas de capacidad para líquidos.

La cántara.	8 azumbres.
La azumbre.	4 cuartillos.
El cuartillo..	4 copas.

Las medidas para el aceite están arregladas al peso, y son:

La arroba.	4 cuartas ó cuarterones.
La cuarta.	$7 \frac{1}{4}$ libras de aceite.

La libra. . 4 panillas, ó cuartas, ó cuarterones (segun el pais varía el nombre).

La arroba de aceite contiene 27,25 libras de agua.

Medidas de solidez.

Para medir la solidez se usan los cubos de las unidades lineales ó longitudinales en la forma siguiente:

La vara cúbica. . .	27 piés cúbicos.
El pié cúbico. . . .	1728 pulgadas cúbicas.
La pulgada cúbica. .	1728 líneas cúbicas.

En la marina:

La tonelada de arqueo, $69\frac{155}{937}$ piés cúbicos de agua del mar.

El pié cubico de agua destilada pesa 46,8973 libras.

Pesos.

El quintal.	4 arrobas.
La arroba.	25 libras.
La libra.	16 onzas.
La onza. . , ...	16 adarmes.
El adarme. . . . . , . .	36 granos.

Hay otras pesas especiales en la forma siguiente:

El marco.	8 onzas.
La libra de botica. . .	12 onzas.
La onza.	8 dracmas.
La dracma.	3 escrúpulos.
El escrúpulo.	24 granos.

El tiempo.

Un siglo.	100 años.
El año.	365 dias.

El dia.	. . . .	24 horas.
La hora.	:	60 minutos.
El minuto.	. . . . . .	60 segundos, etc.

El año bisiesto tiene 366 dias.

El año se divide tambien en 12 meses desiguales; pero para las cuestiones de interés de dinero y descuento se suelen considerar los meses de á 30 dias y el año de 360.

141. Sentadas estas nociones, se llama *número complejo* todo número *concreto* (n.º 2) que contiene al mismo tiempo varias unidades principales de cierta especie, y una ó muchas *subdivisiones* de la misma unidad.

Así, 13 duros 17 reales 11 maravedises, 25 varas 2 pies 7 pulgadas 6 líneas, 41 libra 13 onzas 9 adarmes 15 granos, 63 dias 21 hora 53 minutos 29 segundos, son números *complejos*.

8 duros, 17 varas, 23 libras, considerados aisladamente, son números *incomplejos*.

La resolucion de las cuestiones siguientes sirve de base á las *cuatro* operaciones fundamentales de los números complejos.

142. Primera cuestion.—*Dado un número complejo reducirle á unidades de su menor especie.*

Sea, por ejemplo, 18 varas 2 pies 9 pulgadas 7 líneas.

Resulta del cuadro antepuesto que la *vara* vale 3 *piés*; por consiguiente deberemos tener

$$18 \text{ v. } 2 \text{ p.} = 18 \times 3 + 2 = 54 + 2 = 56 \text{ pies.}$$

Del mismo modo, como el pié vale 12 *pulgadas*, tendremos

$$18 \text{ v. } 2 \text{ p. } 9 \text{ pulg.} = 56 \times 12 + 9 = 672 + 9 = 681 \text{ pulgadas.}$$

Finalmente, valiendo la pulgada 12 *líneas*, se deduce que

$$18 \text{ v.} 2 \text{ p. } 9 \text{ pulg. } 7 \text{ lín.} = 681 \times 12 + 7 = 8172 + 7 = 8179 \text{ líneas.}$$

Luego

$$18 \text{ v. } 2 \text{ p. } 9 \text{ pulg. } 7 \text{ lín.} = 8179 \text{ líneas.}$$

Sea ahora 45 duros 13 reales 14 maravedises.

Tendremos sucesivamente:

$$45\text{ d. }13\text{ r.}=45\times20+13=913\text{ reales},$$

y

$$45\text{ d. }13\text{ r. }14\text{ m.}=913\times34+14=31042+14=31056\text{ mrs.}$$

Regla general.—*Multiplíquese lo primero el número de unidades principales por el número de veces que una de ellas* (segun el cuadro n.° 140) *contiene á la unidad de la primera subdivision, y al producto añádanse las unidades de esta primera subdivision que haya en el número dado;*

Multiplíquese en seguida el resultado así obtenido por el número de veces que la unidad de la primera subdivision contiene á la de la segunda, y al producto añádanse las unidades de esta especie que haya en el número dado;

Y así sucesivamente, hasta llegar á la *última* subdivision.

Por este medio se hallará:

1.° 12 libras 7 onzas 0 adarmes 3 granos.

$$18\text{ lib. }7\text{ on.}=18\times16+7=288+7=295\text{ onzas},$$

$$18\text{ lib. }7\text{ on. }0\text{ ad.}=295\times16+0=4720\text{ adarmes};$$

$$18\text{ lib. }7\text{ on. }0\text{ ad. }3\text{ gr.}=4720\times36+3=169920+3=169923\text{ granos.}$$

2.° 23 horas 55 minutos 19 segundos 23 terceros.

$$23\text{ h. }55'=23\times60+55=1380+55=1435',$$

$$23\text{ h. }55'\,19''=1435\times60+19=86119'';$$

$$23\text{ h. }55'\,19''\,23'''=86119\times60+23=5167163'''.$$

143. Segunda cuestion.— Recíprocamente, *dado un número de unidades pertenecientes á una subdivision de la unidad principal convertirle en número complejo.*

La regla que debe seguirse es una consecuencia evidente de lo que precede, y puede enunciarse así:

Comiéncese dividiendo el número propuesto por el número que espresa (segun el cuadro n.° 140) *cuantas veces está contenida la subdivision dada en la inmediatamente superior*; así se obtiene por *cociente* un número de unidades de esta subdivision superior, y por *resíduo*, las unidades de la subdivision *dada*, que deben entrar en el número complejo buscado;

Divídase despues el cociente obtenido por el número que espresa las veces que su unidad está contenida en su inmediata superior: así se obtiene *un nuevo cociente* que espresa cierto número de unidades de la tercera subdivision, y *un nuevo resíduo* que espresa las unidades de la penúltima subdivision que deben hacer parte del número complejo buscado;

Así se continúa hasta llegar á las *unidades principales.*

Advertencia. Si se obtiene 0 para alguno de los resíduos, es señal de que en el número buscado no hay unidades de la subdivision correspondiente, pero debe conservarse el lugar.

Apliquemos esta regla á los dos primeros ejemplos del n.º 142.

Respecto del primero tendremos:

$$8179 \text{ lín.} : 12 = 681 \text{ pulg.} + 7;$$

$$681 \text{ pulg.} : 12 = 56 \text{ piés} + 9;$$

$$56 \text{ piés} : 3 = 18 \text{ v.} + 2 \text{ piés.}$$

Luego

$$8179 \text{ lín.} = 18 \text{ v. } 2 \text{ p. } 9 \text{ pulg. } 7 \text{ lín.}$$

Para el segundo tendremos

$$31056 \text{ mrs.} : 34 = 913 \text{ rs.} + 14 \text{ mrs};$$

$$913 \text{ rs.} : 20 = 45 \text{ d.} + 13 \text{ rs.}$$

Luego

$$31056 \text{ mrs.} = 45 \text{ d. } 13 \text{ rs. } 14 \text{ mrs.}$$

De un modo análogo se tratarian los otros dos ejemplos.

144. Tercera cuestion.—*Convertir un número complejo dado en número fraccionario de la unidad principal.*

Esto es tambien una consecuencia de la regla del n.º 142.

Propongámonos por ejemplo el número 18 varas 2 piés 9 pulgadas 7 líneas.

Despues de haber reducido á *líneas* este número, lo cual dá 8179 líneas, se observa que segun el cuadro del n.º 140, una vara vale 432 líneas, ó sea, 1 línea vale $\frac{1}{432}$ de vara; luego 8179 líneas valen $\frac{8179}{432}$ de vara.

Del mismo modo hemos visto (n.º 142) que 45 duros 13 reales 14 maravedises equivalen á 31056 maravedises, y como el maravedí vale $\frac{1}{680}$ de duro (n.º 140), tendremos

$$31056^{\text{ms.}} = \frac{31056}{680} \text{ de duro.}$$

Regla general.—*Se empieza por reducir el número complejo propuesto á unidades de la ínfima especie que contiene;* y despues *se forma un número fraccionario que tenga por* numerador *el número obtenido, y por* denominador *el número de unidades de dicha ínfima especie, que componen una unidad principal.*

Por esta regla se hallará para los dos últimos ejemplos del n.º 142,

$$12 \text{ libras } 7 \text{ onzas } 0 \text{ adarmes } 3 \text{ granos} = \frac{169923}{9216} \textit{ de libra.}$$

$$23 \text{ horas } 55' \; 19'' \; 23''' = \frac{5167163}{60\times60\times60} = \frac{5167163}{216000} \textit{ de hora,}$$

ó

$$23 \text{ horas } 55' \; 19'' \; 23''' = \frac{5167163}{24\times216000} = \frac{5167163}{5184000} \textit{ de dia,}$$

tomando el dia por *unidad principal.*

145. Cuarta cuestion.—Recíprocamente, *dado un número fraccionario cualquiera de la* unidad principal *de una especie, convertirle en número complejo.*

Esta cuestion, que es la inversa de la precedente, exige algunas esplicaciones.

Sea, por ejemplo, el número $\frac{615}{23}$ de vara, que se trata de reducir á complejo de varas, piés, pulgadas, etc.

Se comienza dividiendo 615 por 23 (n.º 126), á fin de sacar el entero contenido en el número fraccionario: así se obtiene el cociente 26 y el resíduo 17; por consiguiente puede decirse que

$$\frac{615}{23} \text{ de 1 vara} = 26 \text{ varas} + \frac{17}{23} \textit{ de vara;}$$

es menester ahora valuar esta fraccion de vara en piés, pulgadas y líneas.

Como la vara vale 3 piés, $\frac{17}{23}$ de vara valdrán $\frac{17}{23}$ de 3 piés, ó $\frac{17\times 3}{23}$ de 1 pié; luego si multiplicamos 17 por 3 y dividimos el producto 51 por 23, el cociente entero 2 espresa los *piés*, y la fraccion $\frac{5}{23}$ correspondiente al resíduo 5, es una fraccion de *pié*, que debe reducirse á *pulgadas*.

Razonando sobre esta nueva fraccion como sobre la anterior, veremos que el resíduo 5 debe multiplicarse por 12, y el producto, 60, que resulta, dividirse por 23. Así se obtiene por cociente 2 pulgadas, y una fraccion correspondiente $\frac{14}{23}$ de *pulgada*, que debe reducirse á *líneas*.

Multiplicando del mismo modo 14 por 12, y dividiendo el producto resultante 148, por 23, se obtiene por cociente 7 *líneas*, y una fraccion de línea $\frac{7}{23}$.

Luego finalmente

$$\frac{615}{23} \text{ de vara} = 26 \text{ varas } 2 \text{ piés, } 2 \text{ pulgadas } 7 \text{ líneas } \frac{7}{23} \textit{ de línea.}$$

El cálculo se dispone en la forma siguiente:

```
615 | 23
155 |-----------------------------
 17 | 26 v., 2 p., 2 pulg., 7 l. 7/23
  3
---
 51
  5
 12
---
 60
 14
 12
---
168
 07
```

Regla general. — Para reducir un número fraccionario de una unidad principal cualquiera á número complejo: *se sacan lo primero*, si es posible, *los enteros contenidos en el número;* así se obtiene un número de unidades principales (que puede ser 0);

Multiplíquese en seguida el resíduo de esta division por el número de veces que la unidad principal contiene á la de la primera subdivision, y divídase el producto por el denominador del número dado; así se obtiene un cociente que es el número de unidades de la primera subdivision, y un segundo resíduo;

Multiplíquese este resíduo por el número de veces que la unidad de la primera subdivision contiene á la de la segunda, y divídase el nuevo producto por el denominador del número dado; el tercer cociente así obtenido representa las unidades de la segunda subdivision que deben entrar en el número buscado; despues *se opera con el resíduo de una manera análoga.*

146. Observacion I. — Las operaciones que exigen las dos últimas reglas pueden servirse mútuamente de comprobacion.

Así, aplicando la regla del n.° 145 á los *cuatro* números fraccionarios del n.° 144, deben reproducirse los cuatro números complejos que les corresponden.

(Encargamos sobre todo que se trabaje el cuarto ejemplo, porque en él se encuentra la ocasion de emplear las modificaciones del procedimiento de la division, indicadas en el número 38.)

Del mismo modo, puede comprobarse el resultado que se refiere al ejemplo particular del n.° 145, por medio de la regla del n.° 144. Pero importa bien fijar la atencion en la operacion que se necesita para terminar la comprobacion.

La division de 615 por 23 ha dado el cociente 26 varas 2 piés 2 pulgadas 7 líneas $\frac{7}{23}$ y se trata de reproducir el número $\frac{615}{23}$.

Siguiendo la regla del n.° 144, tendremos por lo pronto

$$26 \text{ v., } 2 \text{ p., } 2 \text{ pulg., } 7 \text{ líns.} = 11551 \textit{ líneas},$$

número de líneas á que se necesita añadir la fraccion $\frac{7}{23}$, cuya operacion dá (n.° 126, *recip.*)

$$\frac{265680}{23} \text{ de línea};$$

dividiendo ahora por 432, número de líneas que tiene la vara, tendremos

$$\frac{265680}{23} : 432 \text{ ó (n.° 131, 1.°) } \frac{265680}{23 \times 432}.$$

En esta última espresion se ve que el numerador 265680 es divisible por 432 y dá de cociente 615.

Dividiendo, pues, los dos términos de la fraccion por 432, ó, lo que es lo mismo, *suprimiendo*, (n.° 56) *este factor comun*, se encuentra por último $\frac{615}{23}$, que es el valor de 26 varas, 2 piés, 2 pulgadas, 7 líneas $\frac{7}{23}$.

147. Observacion II.—Los principios que acabamos de esplicar, deberian ser suficientes para poder efectuar las *cuatro* operaciones fundamentales de la Aritmética en los números complejos.

Para esto deberia adoptarse el método siguiente:

1.° *Transformar cada número complejo en un solo número fraccionario de la unidad principal correspondiente;* 2.° *ejecutar con estos números fraccionarios la operacion propues-*

ta (segun las reglas del cálculo de las fracciones comunes), lo cual daria por resultado un número fraccionario; 3.° *convertir este número fraccionario en número complejo*, de la especie indicada por la naturaleza de la cuestion.

Sin embargo, los procedimientos *directos* dán lugar á observaciones importantes, y ofrecen además aplicaciones útiles para las teorías que hemos de esplicar mas adelante; por cuya razon vamos á esponerlos tan sucintamente como sea posible, por medio de ejemplos muy sencillos, á cuya imitacion podrán despues resolverse otros mas complicados.

Adicion y sustraccion.

148. 1.° Adicion.—*Colóquense* (como se hace con los números enteros) *los números dados unos debajo de otros de modo que las unidades de la misma especie se correspondan en columna vertical, y tírese debajo una línea horizontal;* despues *hágase la suma de todas las unidades contenidas en cada columna, comenzando por la derecha.*

Si, como sucede ordinariamente, la *suma* de las unidades contenidas en una columna escede al *número* que espresa cuántas veces la unidad de la subdivision correspondiente está contenida en la especie inmediata superior, divídase (número 143) la *suma* obtenida por dicho *número;* así se obtiene *un resíduo* (que puede ser 0) el cual se *escribe* debajo de la línea horizontal y un *cociente* que se *lleva* para *añadirle* á las unidades de la columna siguiente; opérese del mismo modo con esta columna, y despues con la que siga, y así sucesivamente.

2.° Sustraccion.—*Escríbase el número menor debajo del mayor, de modo que se correspondan las unidades de una misma subdivision ó especie, y tírese una raya* por debajo de todo; despues, *réstense sucesivamente unas de otras las unidades de cada subdivision,* empezando por la inferior.

Cuando en una de las subdivisiones, el *número* de unidades del sustraendo es mayor que su correspondiente del minuendo, *añádase* (n.° 14) á este *una unidad* de la especie inmediata superior, *convertida* en unidades de la especie de que se trata; con esto se hace posible la sustraccion parcial; pero despues al pasar á la sustraccion siguiente, *debe tenerse el cuidado de aumentar* una unidad al nuevo sustraendo.

Hé aquí algunos ejemplos en los cuales nos reducirémos á presentar el cuadro de las operaciones:

Adicion.

$7^{du.}$	$18^{rs.}$	$24^{mrs.}$	$36^{arb.}$	$14^{lib.}$	$9^{on.}$	$13^{ad.}$	$9^{di.}$	$6^{hr.}$	$32'$	$14''$
5	12	30	40	20	10	14	14	19	55	20
6	8	22	25	14	6	11	7	10	44	34
10	19	14	16	23	10	8	12	6	10	45
9	10	6	20	18	12	4	20	4	20	4
$40^{du.}$	$9^{rs.}$	$28^{mrs.}$	$140^{arb.}$	$174^{lib.}$	$2^{on.}$	$2^{ad.}$	$63^{di.}$	$23^{hr.}$	$42'$	$57''$

Sustraccion.

	$132^{dur.}$	$18^{rs.}$	$19^{mrs.}$	$42^{v.}$	$2^{ps.}$	$11^{pul.}$	$7^{li.}$	$6^{di.}$	$7^{h.}$	$11'$	$19''$
	75	19	14	18	3	4	11	5	18	42	54
	$56^{dur.}$	$19^{rs.}$	$5^{mrs.}$	$23^{v.}$	$2^{ps.}$	$6^{pul.}$	$8^{li.}$	$0^{di.}$	$12^{h.}$	$28'$	$25''$
Pruebas.	132	18	19	42	2	11	7	6	7	11	19

Multiplicacion.

149. Para dar una idea clara de la manera de proceder en esta operacion, nos propondremos la cuestion siguiente:

Determinar cuánto cuestan 69 *varas* 2 *piés* y 7 *pulgadas de una obra cualquiera de mampostería, suponiendo que cada vara cuesta á* 5 *duros* 11 *reales* y 23 *maravedises.*

Se concibe que si el precio de la vara es $5^{dr.}$ $11^{rs.}$ y $23^{mrs.}$, el de $69^{vr.}$ y una *fraccion* de vara, debe ser igual á 69 veces dicho precio, mas *una parte* del mismo precio, indicada por la *fraccion*. Luego es necesario multiplicar primero $5^{dr.}$, $11^{rs.}$ y $23^{mrs.}$ por 69, y despues por la *fraccion* de vara.

Efectuemos sucesivamente estas dos multiplicaciones.

	5 dr.,	11 rs.,	23 mrs.	
	69 vr.,	2 p.,	7 pulg.	
	345			
Parte corresp. á 10 rs. .	34	10		
á 1 real.	3	9		
á 17 mrs.	1	14	17	
á 6 mrs.	0	12	6	
á 1 pié..	1	17	7	$\frac{2}{3}\ldots\frac{24}{36}$
á 1 pié..	1	17	7	$\frac{2}{3}\ldots\frac{24}{36}$
á 6 pul.	0	18	20	$\frac{5}{6}\ldots\frac{30}{36}$
á 1 pul.		3	3	$\frac{17}{36}\ldots\frac{17}{36}$
	390 dr.,	1 rl.,	32 mrs.	.... $\frac{23}{36}$

Esplicacion.—Podria comenzarse, para multiplicar el multiplicando por 69, tomando 69 veces los 23 *maravedises*, despues 63 veces los 11 *reales* y luego 63 veces los 5 *duros*, reduciendo despues *todos* los productos á un solo número complejo, segun la regla del n.° 143; pero es generalmente mas sencillo proceder del modo siguiente:

Se comienza por multiplicar 5 por 69 en la forma ordinaria.

Despues para obtener el producto correspondiente á los 11 reales, se descompone el número 11 en 10+1, es decir, en dos partes, de las cuales, la una es la *mitad* de la unidad principal, y la otra la *décima parte* de dicha mitad.

Esto supuesto, el producto de 10 reales, ó lo que es lo mismo, de $\frac{1}{2}$ duro por 69, no puede ser mas que la mitad del mismo 69; de donde resulta haber de considerar *momentáneamente* el entero del multiplicador como si espresára unidades de la *misma naturaleza* que el multiplicando, y haber de tomar la *mitad*, lo cual dá 34 duros y 10 reales que se colocan debajo del primer producto.

Ahora bien, como un 1 real, que es la otra parte, es la décima parte de la mitad del duro, para tener su producto por 69, bastará tomar la décima parte del anterior; lo cual dá 3 duros y 9 reales, que se escriben tambien como se ve en el ejemplo.

Procederemos de un modo análogo con los 23 maravedises, los cuales se descompondrán en 17+6, que son la *mitad* de 1 real y 6 veces la décima séptima parte de dicha mitad.

Para tomar el producto de 63 por 17 maravedises, tomaremos la mitad del producto que nos dió 1 real; con lo cual tendremos 1 duro 14 reales y 17 maravedises.

Ultimamente, como 6 no es parte alicuota de 17 ni de 34, no hay mas remedio para hallar la parte correspondiente á dichos 6 maravedises, que tomar la décima séptima parte del producto inmediato anterior y repetirlo 6 veces.

Pasemos ahora á la multiplicacion del multiplicando por la *fraccion*, ó mejor dicho, por las subdivisiones de la unidad principal del multiplicador.

Primeramente observaremos que dos piés son 1+1 *tercios* de vara; por consiguiente si 1 vara vale lo que dice el multiplicando, para tener el valor de dos piés tendremos que tomar la tercera parte de dicho multiplicando y repetirla dos veces. Así se ha hecho en la operacion, donde se ve dos veces repetida la cantidad 1 duro 17 reales 7 maravedises $\frac{2}{3}$.

Pasando á las 7 pulgadas, descompondremos el 7 en 6+1, es decir en $\frac{1}{2}$ pié y $\frac{1}{6}$ de dicho medio pié. Tomaremos, pues, la mitad del último producto obtenido y tendremos el valor de las 6 pulgadas que será 18 reales 20 maravedises $\frac{5}{6}$; y por último tomando la *sesta* parte de esta cantidad, que será 3 reales 3 maravedises $\frac{17}{36}$, tendremos el valor de la pulgada que nos restaba.

Falta ahora solo sumar todos los productos parciales empezando por las fracciones de maravedí, á cuyo fin deben reducirse todas á un comun denominador.

Para esto, reflexionando sobre el modo con que se han formado los denominadores, se conocerá que todos ellos deben ser submúltiplos del último obtenido que es 36.

En efecto, se tiene

$$36 = 6 \times 6 = 3 \times 12.$$

Multiplicando, pues, los dos términos de cada uno de los quebrados por el factor correspondiente se obtienen los nuevos quebrados, que en el ejemplo se ven al lado de los primitivos.

Se tira una raya por debajo de todo: se suman los quebrados: á la suma se sacan los enteros que contiene que son 2, los cuales se llevan para agregarlos á la columna de los maravedises; se suma esta segun la regla del n.° 148, y lo mismo se hace respectivamente con las columnas de reales y de duros; hecho lo cual se obtiene el producto total,

$$390 \text{ duros } 1 \text{ real } 32 \text{ maravedises } \frac{23}{36}.$$

150. Este método de multiplicacion, que se llama *de las partes alicuotas*, se puede enunciar así:

Despues de haber multiplicado los enteros ó unidades superiores de los dos factores (sin sumar los productos parciales, si los hay), *se descomponen las subdivisiones del multiplicando en* PARTES ALICUOTAS *de la unidad principal;* y *se toman del entero del multiplicador* (considerado por el momento como espresando unidades de la misma naturaleza que la unidad principal del multiplicando) *partes sucesivas, indicadas por las diferentes partes alicuotas;*

Del mismo modo, *se descomponen las subdivisiones del multiplicador en* PARTES ALICUOTAS *de la unidad principal, y unas de otras, y se toman de todo el multiplicando partes sucesivas, marcadas por esas diferentes partes alicuotas;*

Por último, *se suman todos los productos parciales así obtenidos, empezando por los quebrados ordinarios* que los acompañan.

151. OBSERVACION. —De esta manera de proceder resulta evidentemente:

1.° Que en todo el curso de las multiplicaciones parciales, aunque el multiplicador sea un número *concreto*, segun el enunciado de la cuestion, su unidad principal y sus subdivisiones deben considerarse como *números abstractos*, que espresan el *número de veces* que ha de tomarse el multiplicando, y *qué partes* han de tomarse de este para obtener el resultado apetecido, pero conservando siempre al multiplicando su cualidad esencial de *número concreto*. Solo de un modo ficticio, cuando se hace el producto de la subdivisiones del multiplicando por el multiplicador, es cuando se considera á este como espresando unidades de la misma naturaleza que la unidad principal del multiplicando;

2.° Que *todos los productos parciales y el producto total son siempre de la misma naturaleza del multiplicando* (*).

Division.

Insistiremos poco en esta operacion, en que por lo general es mas cómodo seguir la regla establecida en el n.° 147.

Consideraremos, sin embargo, sucesivamente los dos casos principales que pueden presentarse, empezando por el mas sencillo relativamente á la ejecucion de los cálculos.

152. Primer caso. —Cuando el dividendo y el divisor son *números complejos de la misma especie.*

Por ejemplo, podrá preguntarse: *¿cuántas varas de cierta tela podrán comprarse con* 72 *duros* 18 *reales* 17 *maravedises, suponiendo que una vara cuesta* 3 *duros* 7 *reales y* 12 *maravedises?*

O bien: *¿cuánto dinero habrá de pagarse por* 132 *varas* 3 *palmos y* 8 *pulgadas de un trabajo cualquiera, en el supuesto de que cada* 2 *varas y* 3 *palmos cuestan un duro?*

Es claro que, para la resolucion de estas dos cuestiones, se debe determinar *cuántas veces* está contenido el menor de los dos números complejos en el mayor; lo cual se consigue— 1.° *reduciendo* (n.° 142) *los dos números dados á unidades de*

(*) Ciertas cuestiones de Geometría, especialmente las que tienen por objeto la medida de las *superficies* y de los *volúmenes*, constituyen una escepcion á este principio general; pero esto procede de consideraciones que no pueden tener cabida en este sitio.

su ínfima subdivision ó especie;—2.° *dividiendo en seguida uno por otro los números enteros así obtenidos.*

El cociente es al pronto un simple *número abstracto*, que segun el enunciado de la cuestion, debe despues espresar *varas, palmos, pulgadas*, etc., en el primer ejemplo, y *duros, reales* y *maravedises* en el segundo.

Si se reducen á maravedises los complejos

72 duros 18 rs. 17 mrs. y 3 duros 7 rs. 12 mrs.

se obtienen

49589 y 2290 mrs.;

lo cual dá el número fraccionario $\frac{49589}{2290}$, que debe convertirse en complejo, segun la regla del n.° 145.

Hecha la operacion, se obtiene por resultado final

21 varas 2 palmos 5 pulgadas,

y una fraccion $\frac{1294}{2290}$ de pulgada que ordinariamente se desprecia.

Así la respuesta al primer problema propuesto es

21 varas 2 palmos 5 pulgadas.

Del mismo modo reduciéndose á pulgadas los dos números, 132 varas 3 palmos 8 pulgadas y 2 varas 3 palmos del segundo problema dán

4787 pulgadas y 99 pulgadas;

de donde se deduce el número fraccionario

$$\frac{4787}{99},$$

que convertido en *duros, reales* y *maravedises*, dá

48 duros 7 reales 2 maravedises.

Tal es la respuesta á la segunda cuestion.

153. Segundo caso.—*Cuando el dividendo y el divisor son de naturaleza diferente.*

En este caso, cualquiera que sea la cuestion propuesta, el *cociente* debe espresar unidades principales de la misma especie qne el dividendo, puesto que (n.° 151) el dividendo, considerado como un producto, ha de ser de la misma especie que uno de sus factores.

Pero entonces, el divisor complejo, siendo convertido (n.° 144) en un número fraccionario de la *unidad principal*, se transforma en un *número abstracto*, por el cual debe *ser dividido* el dividendo; lo que se hace (n.° 132) *multiplicando* á este por el número fraccionario invertido.

Ejemplo.— *Se han construido 75 varas 2 piés 6 pulgadas de una obra que han costado 497 duros 17 reales y 14 maravedises: se desea saber el precio de cada vara.*

Si fuera conocido el precio, multiplicándole por 75 varas 2 piés 6 pulgadas, deberia reproducirse la cantidad 497 duros 17 reales 14 maravedises; luego (n.° 27) es necesario dividir 497 duros 17 reales 14 maravedises por 75 varas 2 piés 6 pulgadas.

Convirtiendo este último número en fraccionario de la unidad principal (n.° 144), resulta $\frac{2530}{36}$.

Multiplicando 497 duros 17 reales 14 maravedises por 72, por el método de las partes alicuotas (n.° 149), se obtiene 35746 duros 14 reales 22 maravedises, cuya cantidad, dividida por 2530 conduce al resultado final

$$14 \text{ duros } 2 \text{ reales } 19 \text{ maravedises } \frac{2068}{2530}.$$

Así, pues, despreciada la fraccion tendremos que el precio de la vara son 14 duros 2 reales 19 maravedises.

154. Primera observacion.—Concluyamos de aquí,

1.° Que en toda division que haya de ejecutarse entre números complejos, si los dos términos son *de la misma especie*, el cociente se considera por lo pronto como un *número abstracto*, que despues ha de espresar *unidades* y *subdivisiones* de estas unidades, determinadas por el enunciado de la cuestion;

Este cociente debe ser el *multiplicador* en la prueba de la operacion por medio de la mulplicacion.

2.° Que si por el contrario los términos de la division son de *especie diferente*, el cociente espresa necesariamente unidades de la *misma especie* que el dividendo, mientras que el divisor, aunque complejo, debe ser considerado como un *número abstracto* que hace el papel de multiplicador en la prueba de la operacion.

155. Segunda observacion. —Hasta aquí no hemos indicado mas medio que la division para probar la multiplicacion, ó recíprocamente (no hablamos de la prueba por 9 que solo puede aplicarse á los números enteros.) Pero en la práctica de las operaciones con números complejos suele ser mas cómodo, 1.° en la *multiplicacion*, *duplicar* uno de los factores y *tomar la mitad* del otro, multiplicando de nuevo los números resultantes; 2.° en la *division*, *duplicar* ambos términos. Así se evita el embarazo que causan las fracciones comunes que acompañan ordinariamente á los resultados obtenidos.

Es evidente que este medio de comprobacion puede tambien emplearse en las operaciones de números enteros. Pero no pudimos mencionarle en el primer capítulo, porque se apoya en principios que todavía no habiamos demostrado entonces.

Ejercicios.

I. Hallar un número tal, que su $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ reunidos, formen una suma que, disminuida en 139, dé 1279.

II. Un estanque puede llenarse por *cuatro* caños diferentes. Si solo está abierto el primero, se llena el estanque en 5 horas; si el segundo en 7; si el tercero en 9; si el cuarto en 11: se desea saber en cuánto tiempo se llenará el estanque si están abiertos á la vez los cuatro caños.

III. Suponiendo que la poblacion de Asia son 390257000 habitantes; hallar las de Europa, Africa y América, sabiendo que la poblacion de Europa es los $\frac{7}{13}$ de la del Asia, la de Africa los $\frac{3}{11}$ de los $\frac{7}{13}$ de esta misma poblacion, y la de América solo $\frac{1}{11}$.

IV. La mar cubre los $\frac{11}{14}$ de la superficie total del globo. La superficie de Asia es igual á $\frac{121}{27}$ de la de Europa; la de Africa los $\frac{22}{7}$, la de América los $\frac{111}{29}$ y la de Occeanía los $\frac{31}{17}$; se sabe además que la superficie de Africa son 2970000000 *hectáreas*.

Calcular las de las otras partes del mundo y deducir la superficie total del globo.

V. Demostrar que la suma de dos *fracciones irreductibles* de denominadores *diferentes* no puede ser un *número entero*.

VI. Demostrar que añadiendo *un mismo número* á los dos términos de un número fraccionario, se obtiene un resultado *tanto mas* aproximado á la unidad, en *mas* ó en *menos*, cuanto *mayor* es el número añadido. Hacer ver que la diferencia entre la unidad y el resultado puede ser *menor que cualquier cantidad dada*.

VII. Investigar el procedimiento para obtener *el máximo comun divisor* de dos ó de mas de dos fracciones.

Aplicacion á las fracciones $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{19}{24}$.

VIII. Investigar el procedimiento para obtener el *mínimo múltiplo* de varias fracciones.

Aplicarlo á los quebrados $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{19}{60}$.

IX. ¿Cuál es el *mayor múltiplo* de las fracciones $\frac{28}{57}$, $\frac{4}{21}$ y $\frac{48}{19}$, *inferior* á 100000?

X. Multiplicar 19 duros 19 reales y 19 maravedises por 19 duros 19 reales y 19 maravedises, —1.° en el caso en que el producto haya de espresar unidades de la misma especie que los factores, —2.° en el caso que el producto haya de espresar *varas, piés y pulgadas.*

XI. ¿Cuál será el precio de una pieza de tela de 23 varas y $\frac{7}{24}$ de vara, costando la vara á 35 reales 19 maravedises?

XII. Con 745 duros 11 reales y 20 maravedises se han comprado 87 libras y 12 onzas de un género: se quiere saber á cómo sale la libra.

CAPITULO IV.

§ I. De las fracciones decimales y de sus principales propiedades.—§ II. Sistema decimal de pesos y medidas; su comparacion con el sistema ordinario.

---

§ I. DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

156. INTRODUCCION.—La manera mas cómoda y sencilla de subdividir la unidad principal en el sistema ordinario de numeracion es subdividirla en *partes que van disminuyendo de diez en diez sucesivamente;* así resultan *fracciones que tienen por denominador la unidad seguida de ceros;* y que por eso se llaman *fracciones decimales.*

Este método tiene la gran ventaja de referir inmediatamente, ó por medio de transformaciones facilísimas, las operaciones de quebrados á operaciones de enteros, como tratamos de esplicar en este capítulo despues que hayamos espuesto la numeracion de las dichas *fracciones decimales*, es decir, su nomenclatura y el modo de escribirlas en cifras.

157. *Numeracion de los decimales.*—Así como decuplicando la unidad sucesivamente, se forman nuevas unidades que van tomando los nombres de *decenas*, *centenas*, *millares*, *decenas de millar*, *etc.*, así tambien de un modo análogo, aunque inverso, se ha concebido la unidad principal dividida en *diez* partes iguales que se han llamado *décimas;* cada décima en *diez* partes iguales que se han llamado *centésimas* (porque la unidad principal contiene *diez* veces *diez* partes ó *cien* partes de ellas); cada centésima en *diez* partes iguales que se han llamado *milésimas;* cada milésima en *diez* partes llamadas *diezmilésimas;* y así se han formado sucesivamente las *cien-*

milésimas, *millonésimas*, *diezmillonésimas*,..., *etc.*, con lo cual tenemos ya la denominacion de todas las especies de unidades en que la unidad principal puede irse subdividiendo.

Respecto de la manera de escribir esas fracciones en cifras, resulta del principio fundamental de la numeracion escrita de los números enteros (n.º 5) que, contando de derecha á izquierda, tienen las cifras *valores relativos* que van creciendo de diez en diez; y por consiguiente contando á la inversa, de izquierda á derecha, van disminuyendo de diez en diez.

Luego si á la derecha de un número entero ya escrito en cifras se escriben mas cifras, teniendo cuidado de separar estas de aquellas por medio de un signo cualquiera, por ejemplo una *coma*, tendremos con solo eso representadas las partes menores de la unidad en la disminucion progresiva de diez en diez, es decir, las *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, *etc.*

Así, el conjunto de cifras 24,75 espresará 24 unidades, 7 décimas y 5 centésimas; 5,478 espresará 5 unidades, 4 décimas, 7 centésimas y 8 milésimas.

158. Propongámonos *enunciar en lenguaje ordinario el número*... 56,3506.

Este número puede desde luego enuncirse así: 56 *unidades*, 3 *décimas*, 5 *centésimas*, 0 *milésimas* y 6 *diezmilésimas*.

Pero observemos que 3 *décimas* valen 30 *centésimas*, ó 300 *milésimas*, ó 3000 *diezmilésimas*; de la misma manera, 5 *centésimas* valen 50 *milésimas*, ó 500 *diezmilésimas*.

Luego el número total se enunciará 56 *unidades*, 3506 *diezmilésimas*.

De modo que para enunciar en lenguaje ordinario un número fraccionario decimal escrito en cifras, *es necesario enunciar separadamente la parte entera, es decir, la que está á la izquierda de la coma, enunciar en seguida la parte que está á la derecha como si espresára un número entero, y añadir al final del enunciado el nombre de la unidad de la última subdivision decimal.*

Así, 7,49305 representa 7 *unidades* y 49305 *cienmilésimas*.

Del mismo modo, 249,007056 se enuncia 249 *unidades* y 7056 *millonésimas*.

Se puede tambien si se quiere comprender en un solo enunciado la parte entera y la parte decimal.

En efecto, tomemos por ejemplo el número 56,3506.

Como una unidad vale 10 décimas, ó 100 centésimas, ó 1000 milésimas, ó 10000 diezmilésimas, se sigue que 56 unidades equivaldrán á 560000 *diezmilésimas*.

Y por consiguiente 56,3506 representa 563506 *diezmilésimas*.

De la misma manera 7 unidades valen 700000 *cienmilésimas*, por consiguiente el número 7,49305 vale 749305 *cienmilésimas*.

Es decir, *que basta despues de haber enunciado el número como si no hubiera coma, colocar al final del enunciado el nombre de la última subdivision*. Sin embargo, está mas en uso enunciar la parte entera separadamente (*).

159. Recíprocamente, *propongámonos escribir en cifras una fraccion decimal enunciada en lenguaje ordinario.*

Sea la cantidad *veintinueve* unidades, *trescientas cincuenta y cuatro* milésimas.

Se escribe desde luego la parte entera 29; despues, como 300 milésimas equivalen á 3 *décimas*, y 50 milésimas equivalen á 5 *centésimas*, se pone la coma á la derecha del 29 y se escriben en seguida sucesivamente las cifras 3, 5 y 4; resultará ser

29,354

la cantidad enunciada.

Del mismo modo *ciento nueve* unidades, *dos mil tres* diezmilésimas, se escribirán

109,2003.

(*) Para enunciar la parte decimal, propondremos tambien otro medio que en general suele ser mas cómodo en la práctica. Despues de enunciar la parte entera en la forma ordinaria, *divídase mentalmente la parte decimal en secciones de á tres cifras, empezando desde la coma* (la última seccion podrá á veces tener solo *una* ó *dos* cifras); *enúnciese en seguida cada seccion separadamente, añadiendo al fin de cada enunciado parcial el nombre de la unidad* de la especie de su *última cifra*.

Ejemplos.—El número 2,74986329 se enuncia: 2 *unidades*, 749 *milésimas*, 863 *millonésimas*, 29 *cienmillonésimas*.

14,023000764 se enuncia así: 14 *unidades*, 23 *milésimas*, 0 *millonésimas*, 76 *billonésimas*, 4 *diezbillonésimas*.

Propongámonos ahora escribir la cantidad ocho unidades, *treinta y siete* milésimas.

Como 30 milésimas hacen 3 centésimas, y no hay décimas en el enunciado, se escribe 8,037; es decir, que se pone á la derecha de la coma un *cero* para ocupar el lugar de las *décimas* y dar á las cifras que siguen su verdadero valor.

Regla general. Para escribir en cifras una cantidad decimal enunciada en lenguaje vulgar, *se empieza por escribir la parte entera, y se pone una coma; despues se escriben á la derecha de esta coma sucesivamente las cifras que representan las décimas, las centésimas, etc., que contiene el enunciado, cuidando de reemplazar con ceros los órdenes que falten.*

Si no hay parte entera, es decir, si el número propuesto es una fraccion propia, *se escribe un* 0 para ocupar el lugar de la parte entera, y *se continúa despues, segun acabamos de decir.*

Así, diez y siete *centésimas* se representan por 0,17.

Ciento veinticinco *diezmilesimas* por 0,0125.

Doce mil doscientas cuatro *millonésimas* por 0,012204.

Por último, puede suceder que en el enunciado no se distinga la parte entera de la parte decimal, en cuyo caso se *escribirá la cantidad como si espresára unidades enteras, y despues se colocará una coma de manera que la última cifra de la derecha esprese unidades de la especie que marca el enunciado.*

Por ejemplo, para escribir la espresion cuatro mil doscientas catorce *centésimas*, se escribe desde luego 4214; y como el último guarismo debe espresar centésimas, se pone la coma entre el 2 y el 1, lo que dá 42,14.

De la misma manera, doscientas cincuenta y tres mil veintinueve *diezmilésimas*, se representará por 25,3029; y así de los demás.

Ya pueden empezar á comprenderse ahora las ventajas que proporciona esta manera de escribir las fracciones decimales.

160. *Fracciones decimales puestas en forma de fracciones comunes.*—Un quebrado comun se compone de dos números colocados uno sobre otro, que son el *numerador* y el *denominador;* pero en los decimales el sitio de la coma basta para indicar el denominador, *que es igual á la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay*, es decir, como guarismos hay á la derecha de la coma.

El numerador consta de todas las cifras que hay á la derecha de la coma, y si se considera el entero reducido á la especie del quebrado, es dicho numerador el *mismo número propuesto, suprimida la coma.*

Así, la cantidad 23,5037 puesta en forma de quebrado ordinario será $23\,\frac{5037}{10000}$, ó $\frac{235037}{10000}$; la espresion 2,00409 es igual á $2\,\frac{409}{100000}$, ó á $\frac{200409}{100000}$; finalmente 0,0002154 equivale á $\frac{2154}{10000000}$.

Recíprocamente, $2\,\frac{53}{1000}$, ó $\frac{2053}{1000}$, se transforma en 2,053; $\frac{172049}{10000}$ en 17,2049.

Estas transformaciones de fracciones decimales en quebrados comunes, y vice versa, son de mucho uso en el cálculo.

161. *Variacion de lugar de la vírgula.*—Si *en una fraccion decimal* se corre *la coma uno ó mas lugares hácia la derecha, la cantidad se multiplica por* 10, 100, 1000, etc.; y al contrario, *corriéndola uno ó mas lugares hácia la izquierda, la cantidad se divide por* 10, 100, 1000...

Sea, por ejemplo, *la espresion* 153,07295.

Supongamos que se corre la coma 3 *lugares hácia la derecha*, lo que dá 153072,95: digo que la cantidad se ha hecho 1000 veces mayor. En efecto, la cantidad primitiva era igual á $\frac{15307295}{100000}$; cuando la coma ha variado de lugar, equivale á $\frac{15307295}{100}$, fraccion cuyo denominador es 1000 veces menor que el de la otra; luego (n.° 111) la segunda es 1000 veces mayor que la propuesta.

Por el contrario, si la coma se corre dos lugares hácia la izquierda, resulta 1,5307295, ó bien $\frac{15307295}{10000000}$, fraccion cuyo denominador es 100 veces mayor que el de la propuesta

$\frac{15307295}{100000}$, luego la nueva fraccion es 100 veces menor que la otra.

Se puede tambien demostrar esto observando que al variar de lugar la coma, *el valor relativo* de cada guarismo se hace 10, 100, 1000, etc., veces mayor ó menor.

Así, comparando 153072,95 con 153,07295, se ve que la cifra 3, que en estas espresaba unidades simples, espresa ahora *millares;* la cifra 5 á la izquierda del 3, que espresaba decenas, representa ahora *decenas de millar;* y así de los demás guarismos.

162. Ceros colocados á la derecha de una fraccion decimal.— *Añadiendo un número cualquiera de ceros á la derecha de una fraccion decimal, no se altera su valor.*

Así, 2,415 es igual á 2,4150 ó á 2,41500, ó á 2,415000, etc,...; en efecto, estas espresiones pueden (n.° 160) ponerse bajo la forma

$$\frac{2415}{1000}, \frac{24150}{10000}, \frac{241500}{100000}, \ldots$$

y bien se ve que las dos últimas fracciones no son mas que la misma primera, cuyos dos términos se han multiplicado por 10, 100, 1000,..., lo cual no altera su valor (n.° 112).

Luego, etc.

Tambien puede observarse que los ceros colocados á la derecha de los guarismos decimales no alteran *su valor relativo;* y como los ceros no tienen por sí valor alguno, claramente resulta que la fraccion no se altera por su adicion.

163. Reduccion de varias fracciones decimales á un comun denominador.—El principio, que acaba de establecerse, sirve para reducir varias fracciones decimales á que tengan el *mismo número de cifras decimales*, sin mudar de valor, ó en otras palabras, á tener *un denominador comun.*

(Usaremos ordinariamente, para abreviar, esta última espresion.)

Por ejemplo, las fracciones

$$12,407 \mid 0,25 \mid 7,0456 \mid 23,4$$

equivalen á estas otras

12,4070 | 0,2500 | 7,0456 | 23,400;

y bajo esta forma, todas tienen á 10000 por denominador comun.

Establecidos estos principios, podemos pasar á esponer las operaciones con fracciones decimales.

ADICION Y SUSTRACCION.

164. La suma de las fracciones decimales se efectúa lo mismo que la de números enteros, *despues de haberlas reducido todas á un comun denominador*, y teniendo cuidado *de separar en el resultado por medio de una coma tantas cifras decimales como hay en el sumando que mas tenga.*

Un solo ejemplo bastará para aclarar esta regla.

Propongámonos sumar las cantidades

32,4056 | 245,379 | 12,0476 | 9,38 | 459,2375.

Escribo lo primero *un* 0 á la derecha de la segunda cantidad, y *dos* á la derecha de la cuarta; despues coloco los números así preparados unos debajo de otros, de modo que las unidades del mismo órden se correspondan, y efectúo la suma como de ordinario.

Hallamos por resultado 7584497, ó bien, separando 4 cifras decimales á la derecha, 758,4497, porque todos los sumandos espresan unidades del órden de las *diezmilésimas.*

$$\begin{array}{r} 32,4056 \\ 245,3790 \\ 12,0476 \\ 9,3800 \\ 459,2375 \\ \hline 758,4497 \\ \hline \cancel{1212210} \end{array}$$

En la práctica puede omitirse el escribir ceros á la derecha de las cantidades que tienen menor número de cifras decimales, teniendo únicamente cuidado *de colocar en columna las unidades de la misma especie.*

La resta de decimales se hace tambien del mismo modo que la de enteros, *despues de haberlos reducido á un comun denominador* (n.º 87).

Por ejemplo, *restar* 23,0784 *de* 62,09.

Se escriben dos ceros á la derecha del 62,09, lo que dá 62,0900; despues se efectúa la resta como de ordinario, teniendo cuidado de separar cuatro cifras decimales á la derecha del resultado.

Estos procedimientos están fundados en que, teniendo entre sí las unidades de diversos órdenes en las fracciones decimales las mismas relaciones de magnitud que en los números enteros, debe verificarse con las unidades que se llevan de las inferiores ó con las que se toman de las superiores en las operaciones con aquellas, lo mismo que se verifica con las unidades que se llevan ó toman en las operaciones con estos.

$$\begin{array}{r} 62{,}0900 \\ 23{,}0784 \\ \hline 39{,}0116 \\ \hline 62{,}0900 \end{array} \textit{ prueba.}$$

MULTIPLICACION.

165. *Para efectuar esta operacion, se multiplican los dos factores entre sí sin hacer caso de la coma;* y despues de obtenido el producto total, *se separan á la derecha, por medio de una coma, tantas cifras decimales como hay en ambos factores.*

Sea, por ejemplo, *multiplicar* 35,407 *por* 12,54.

Hecha abstraccion de la coma, dán estos dos números el producto

44400378.

Separando ahora á la derecha de este número, *tres* mas *dos* ó sea *cinco* cifras, se obtiene

444,00378

que es el producto pedido.

Para darnos razon de este procedimiento, observarémos que las dos cantidades propuestas pueden ponerse bajo la forma

$$\frac{35407}{1000} \text{ y } \frac{1254}{100} \text{ (n.° 160);}$$

de donde se deduce, segun la regla del n.° 129, el producto

$$\frac{35407 \times 1254}{1000 \times 100};$$

es decir, que es necesario: 1.° *multiplicar* los dos números, haciendo abstraccion de las comas; 2.° *dividir* el producto así obtenido por 100000, ó sea por la unidad seguida de *tantos* *ceros* como cifras decimales hay en ambos factores, lo cual equivale á separar *cinco* cifras á la derecha del producto.

Así queda justificado el procedimiento.

De otro modo. Quitando la coma en el multiplicando, queda evidentemente multiplicado por 1000; pues antes espresaba milésimas y ahora espresa unidades principales, luego en virtud de los principios del n.º 57, el producto se ha hecho por esta razon 1000 veces mayor; del mismo modo, como quitando la coma en el multiplicando se le hace 100 veces mayor, se sigue que el producto se ha hecho tambien 100 veces mayor; por consiguiente, por la supresion de las dos comas se ha hecho este producto 100000 veces mayor; luego para darle su justo valor es necesario dividirle por 100000, ó separar 5 cifras decimales á la derecha.

Si hubiera un número mayor ó menor de cifras decimales en ambos factores, se haria un razonamiento análogo.

Puede suceder que solo uno de los dos factores tenga cifras decimales. En este caso *se separan á la derecha del producto tantas cifras decimales como hay en dicho factor.* La demostracion es demasiado fácil para que nos detengamos en ella.

Por estas reglas se hallará que

1.º *el producto de* 4,0567 *por* 9,503 *es igual á* 38,5508201;
2.º *el producto de* 4,0015 *por* 29 *es igual á* 116,0435;
3.º *el producto de* 0,03054 *por* 0,023 *es* 0,00070242.

Advertencia. Este último ejemplo merece fijar la atencion. Haciendo abstraccion de la coma en los dos factores, y efectuando la multiplicacion, se halla por producto 70242; pero como hay *cinco* cifras decimales en el multiplicando y *tres* en el multiplicador, necesita el producto tener *ocho*, y sin embargo no tiene mas que *cinco*.

Para resolver esta dificultad, observemos que debiendo espresar el producto unidades del octavo órden decimal, basta escribir á la izquierda de 70242 un número de ceros tal, que si se coloca en seguida la coma, la última cifra de la derecha ocupe el octavo lugar decimal. En este ejemplo se deben escribir *cuatro*, incluso el que ocupa el lugar de los enteros; así se obtiene 0,00070242.

DIVISION.

Valuacion del cociente en fraccion decimal.

166. Pueden presentarse dos *casos principales:*
O el dividendo y el divisor tienen el *mismo número* de cifras *decimales;* ó tienen *diferente número.*

En el primer caso, suprímase *la vírgula en el dividendo y en el divisor;* y despues, *opérese con los números enteros resultantes, en la forma ordinaria.*

En el segundo, *comiéncese por reducir los dos números propuestos á tener el mismo número de cifras decimales* (n.º 163); con lo cual el segundo caso queda reducido al primero.

PRIMER CASO. —*Sea dividir* 47,359 *por* 8,234.

Estos dos números pueden (n.º 160) ponerse bajo la forma

$$\frac{47359}{1000},\ \frac{8234}{1000};$$

de donde, dividiendo el uno por el otro, segun la regla de la division de las fracciones (n.º 131), se tiene

$$\frac{47359}{1000}\times\frac{1000}{8234}=\frac{47359\times1000}{1000\times8234}=\frac{47359}{8234},$$

suprimiendo el factor 1000, *comun* á los dos términos.

Se ve, pues, que el cociente pedido es igual al de los dos números propuestos, *hecha abstraccion de la coma;* lo cual justifica la regla arriba dada.

Tambien podria decirse: como las dos fracciones decimales tienen *el mismo denominador* (n.º 163), si se suprime la vírgula, *se multiplican* los dos términos de la division por *un mismo* número 1000; luego (n.º 61) el valor del cociente es *el mismo, antes* y *despues* de la supresion de la coma.

La division de 47359 por 8234 dá por *parte entera* del cociente, 5, y por *resíduo,* 6189; luego el *cociente total* es

$$5\frac{6189}{8234}.$$

167. *Valuacion del cociente en decimales.*—Teniendo bastante grande sus términos la fraccion ordinaria que acompaña la *parte entera* del cociente, es difícil *valuarla* en su estado actual, siendo además muy natural tratar de espresarla en partes de la *misma especie* que los números dados, lo cual se consigue por medio de la regla del n.° 136:

```
47359  | 8234
 61890 | 5,7516395...
  42520
   13500
    52660
     32560
      78580
       44740
        3570
         ....
```

Despues de haber sacado la *parte entera*, 5, del cociente, para convertir en *décimas* el resíduo, 6189, se *multiplica* (n.° 136) este resíduo por 10, lo cual se hace colocando un 0 á su derecha; despues se *divide* 61890 por 8234; el cociente espresará *décimas* y se escribe á la derecha del 5, poniendo en medio una coma.

A la derecha del nuevo resíduo, 4252, se coloca un 0 para convertirle en *centésimas;* despues se divide 42520 por 8234, lo cual dá el cociente 5, que se coloca á la derecha del anterior 7, y el resíduo 1350, al cual se añade tambien un 0; y así sucesivamente hasta obtener el *número de decimales* que parezca necesario segun el enunciado de la cuestion que ha dado lugar á la division propuesta.

Regla general.—Para espresar en *decimales* el cociente de la division de dos números *decimales del mismo denominador*, ó, lo que es igual despues de suprimida la coma, *de dos números enteros cualesquiera:*

Comiéncese por determinar la parte entera del cociente (que puede ser 0), *y póngase á su continuacion una vírgula;*

Colóquese un 0 *á la derecha del resíduo, y divídase el número asi formado por el divisor;* despues, *escríbase el nuevo cociente á la derecha de la coma;*

Colóquese un 0 á la derecha del nuevo residuo, y efectúese la division por el mismo divisor, escribiendo el cociente á la derecha de los dos primeros;

Continúese así hasta obtener el número de decimales pedido.

168. *Observacion sobre las aproximaciones.*—En el ejemplo precedente hemos prolongado la operacion hasta la *séptima* cifra decimal inclusive, á fin de fijar las ideas sobre los *diversos grados* de aproximacion que pueden obtenerse por medio del desarrollo de un número en *decimales.*

Tomando por el pronto únicamente las *dos* primeras cifras decimales, tenemos el cociente 5,75, al cual falta *menos de* 0,01, pues la parte despreciada es evidentemente *menor que* la unidad de este órden decimal.

Hay mas: como esta parte despreciada es *inferior á* 0,002, ó $\frac{2}{1000}$ ó $\frac{1}{500}$, se infiere que 5,75 espresa el valor del cociente, faltándole menos de $\frac{1}{500}$.

Ahora, si tomamos las *tres* primeras cifras decimales, tendremos por valor del cociente 5,751, faltándole *menos de* 0,001; pues la parte despreciada, 0,00063..., es inferior á 0,001.

Pero aquí debemos hacer una observacion importante:

Como la cifra 6 es mayor que 5, resulta que 0,0006 es mayor que 0,0005, ó que *media unidad* del órden de las *milésimas;* luego, tomando 5,752 en vez de 5,751, por valor del cociente, se comete un error, que á la verdad es *por esceso*, pero *menor* que el que se comete cuando se toma 5,751; de modo que puede decirse que 5,752 espresa el cociente, no solo aproximado *hasta* 0,001, sino hasta $\frac{1}{2}$ 0,001.

En general, siempre que la cifra siguiente á la última que tomamos es *menor* que 5, deben tomarse las cifras decimales *tales como se obtienen;* y entonces se tiene el valor del cociente aproximado *en menos de media unidad* del órden en que nos detenemos.

Si, por el contrario, la cifra siguiente es *igual* ó *superior* á 5, conviene *aumentar una unidad* á la última cifra obtenida, á fin de tener un valor *mas aproximado* del cociente; el error *cometido* es *por esceso*, pero es *menor que media* unidad del órden en que se detiene la operacion.

Así, en el ejemplo anterior, se tiene sucesivamente como cociente de la division propuesta:

5,752 *por esceso*, sobrando menos de *media milésima*,
5,7516 *por defecto*, faltando menos de *media diezmilésima*,
5,75164 *por esceso*, sobrando menos de *media cienmilésima*,
5,751640 *por esceso*, sobrando menos de *media millonésima*.

Para concluir añadiremos que, cuando la operacion se detiene en una cifra decimal cualquiera, el último resíduo obtenido hace conocer si la siguiente cifra del cociente debe ser *inferior*, *igual* ó *superior* á 5, sin que para ello sea necesario calcular dicha cifra.

En efecto, si el resíduo es *menor* que la *mitad* del divisor, que es constante, la cifra siguiente debe ser *menor* que 5.

Si el resíduo es *igual* ó *superior* á la mitad del divisor, la cifra siguiente debe ser *igual* ó *superior* á 5.

Así, en el ejemplo que hemos puesto, la octava cifra decimal debe ser *menor* que 5, porque el resíduo en que nos hemos detenido, 3570, es evidentemente *menor* que la mitad del divisor 8234.

Esta observacion es el resúmen de toda la teoría de las aproximaciones en la *valuacion* de los números fraccionarios en *fracciones decimales*.

169. Segundo caso.—Este caso se subdivide en otros dos:

Primeramente.—El dividendo *lleva menos cifras decimales* que el divisor.

Entonces, se escribe á la derecha del dividendo el número de ceros necesario para que haya el *mismo número* de decimales en los dos términos de la division; con lo cual la cuestion sin otras modificaciones entra en el caso primero.

Por ejemplo, sea *dividir* 2,405 *por* 0,03497.

Añadiendo *dos* ceros á la derecha del dividendo, lo cual dá 2,40500, suprimiendo despues la vírgula en ambos términos y efectuando la division de los dos números resultantes[1], 240500 y 3497, segun la regla del n.° 166, se halla por valor del cociente, aproximado hasta 0,0001, la cantidad 68,7732.

Este valor está aproximado *en menos*, y no le llega á faltar $\frac{1}{2}$ 0,0001.

En segundo lugar.—El dividendo tiene *mas cifras decimales* que el divisor.

Entonces pueden emplearse *dos* procedimientos:

1.° Sea *dividir* 3,470456 *por* 1,027.

Observemos que si *suprimimos la vírgula* en el divisor, lo cual le hace 1000 veces mayor, y si *la corremos* en el dividendo *tres* lugares hácia la derecha, lo cual equivale tambien (n.° 161) á hacerle 1000 veces mayor, el cociente de la division de los dos números resultantes será *el mismo* (n.° 61) que el de los números propuestos.

Con esto la cuestion queda reducida á dividir 3470,456 por 1027.

3470,456	1027
389 4	3,379217
81 35	
9 466	
2230	
1760	
7330	
141	

Despues de hallada la parte entera, 3, del cociente y el resíduo 389, en lugar de poner, como en el n.° 167, un 0 á su derecha, se baja la cifra 4 que espresa *décimas*, y se efectúa la division que dá el cociente, 3, el cual se coloca á la derecha del primero, separándolos con una coma; despues al lado del resíduo 813, se baja la cifra 5, que espresa *centésimas* y así se continúa hasta bajar todas las cifras decimales que quedaban en el dividendo.

Llegados al resíduo 223, se coloca un 0 á su derecha y se continúa la operacion como en el primer caso.

Se ve, pues, que este modo de proceder consiste en *suprimir la coma* en el divisor, teniendo cuidado de *correrla* en el dividendo *tantos lugares hácia la derecha* como cifras decimales tiene el divisor: hecho lo cual *se procede con los números resultantes* lo mismo que en el primer caso, con la única diferencia, de que en lugar de poner desde luego ceros á la derecha de los diferentes resíduos, se deben *ir bajando todas las cifras decimales* que quedan en el dividendo.

2.° Volvamos al mismo ejemplo, empezando por escribir á la derecha del divisor 1,027, *tres* ceros, es decir, el *número* de ceros necesario para que los dos términos tengan el mismo número de decimales.

Entonces tendremos que *dividir* 3470456 *por* 1027000.

$$\begin{array}{r|l} 3470456 & 1027\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \\ \cline{2-2} 389456 & 3,379217 \\ 81356 & \\ 9466 & \\ 2230 & \\ 1760 & \\ 7330 & \\ 141 & \end{array}$$

A fin de determinar la *parte entera* del cociente, se principia por aplicar la regla dada en el n.° 38 para la division de números enteros, y relativa al caso en que el divisor termina en *ceros*.

Así se obtiene el cociente 3, y el resíduo 389456.

Ahora para hallar la cifra de las *décimas*, se observa que, segun el principio del n.° 60, en lugar de colocar un 0 á la derecha del resíduo, lo cual sería *multiplicarlo* por 10, se puede *suprimir* el último 0 á la derecha del divisor, lo cual *divide* á este por 10.

Así se tiene el cociente 3, que espresa las *décimas* del cociente buscado, y el resíduo 81356.

Del mismo modo, en lugar de colocar un 0 á la derecha de este nuevo resíduo, se *suprime* otro 0 en el divisor, y se divide 81356 por 10270, aplicando tambien si se quiere la regla del n.° 38.

Así se obtiene el nuevo cociente 7 y el resíduo 9466.

Suprimiendo ahora el último 0 de la derecha del divisor, dividiremos 9466 por 1027; lo cual dá el cociente 9 y el resíduo 223.

A partir de este resíduo se sigue la regla del n.° 167 para obtener mas cifras decimales.

Este segundo procedimiento es evidentemente menos sencillo que el primero, y si le hemos espuesto, ha sido únicamente para tener ocasion de esplicar cómo debe *procederse cuando hay que poner* CEROS *á la derecha de los resíduos de una division, cuyo divisor termina en* UNO Ó VARIOS CEROS.

170. *Casos particulares.*—Son aquellos en que *solo uno de los términos* de la division que ha de efectuarse, tiene cifras decimales.

Por ejemplo, cuando sea necesario dividir 51,47876 por 849, ó bien 3145 por 23,479.

En el primer caso, se procede con arreglo al *primer* método indicado en el n.° 169, en el artículo que empieza: *en segundo lugar.*

En el segundo caso, *se suprime* la coma en el divisor, y se añaden al dividendo *tantos ceros* como decimales hay en el divisor; lo cual equivale á *multiplicar* los dos términos por un mismo *número*. Estos casos son sumamente sencillos y no necesitan mayores esplicaciones.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES DECIMALES PROCEDENTES DE FRACCIONES ORDINARIAS.

Conversion de las fracciones comunes en fracciones decimales.

171. Hemos visto (n.° 167) como nos conduce el cálculo á *convertir* un quebrado comun en quebrado decimal; esta operacion constituye una parte esencial de la teoría de la *division de las fracciones decimales.*

Pero aquí haremos una observacion importante que nos servirá para la esposicion de las propiedades de las fracciones decimales, que pasamos á establecer.

Esta observacion consiste en que, *en lugar de colocar ceros sucesivamente á la derecha de los diferentes resíduos, que se obtienen aplicando la regla* del n.° 167, para convertir en decimales un número fraccionario, *se pueden colocar desde luego todos los ceros á la derecha del dividendo, efectuando la division del número resultante,* por el divisor teniendo cuidado de que la *vírgula ocupe*, en el cociente obtenido *el lugar que le corresponde.*

Para darnos cuenta de este segundo modo de proceder, propongámonos convertir en decimales la fraccion $\frac{13}{47}$ y hagamos un cotejo de los dos modos de ejecutar la operacion.

$$
\begin{array}{r|l}
130 & 47 \\ \hline
360 & 0,276595 \\
310 & \\
280 & \\
450 & \\
270 & \\
35 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
13000000 & 47 \\ \hline
360 & 0,276595 \\
310 & \\
280 & \\
450 & \\
270 & \\
35 &
\end{array}
$$

En el primer procedimiento, despues de escribir un *cero* en el cociente para ocupar el lugar de la parte *entera*, se añade un *cero* al *numerador* 13, de la fraccion, para obtener las *décimas*; despues se agrega un *cero* á la derecha del *resíduo* de la division para obtener las centésimas; y del mismo modo se procede con los resíduos siguientes hasta obtener en el cociente *millonésimas*, por ejemplo, de modo que el número total de ceros bajados de esta manera es el de *seis*.

En el segundo procedimiento se multiplica primero el *numerador* 13 por 1000000, es decir, por la unidad seguida de *seis* ceros y se efectúa en seguida la division.

Es evidente que el cociente así obtenido solo difiere del obtenido por el primer procedimiento en ser 1000000 de veces *mayor*: se le reducirá, pues, *á su verdadero valor* dividiéndole por 1000000, ó separando con una coma *seis* cifras decimales hácia la derecha.

Fracciones decimales de número limitado ó ilimitado de cifras decimales; fracciones periódicas.

Ahora vamos á establecer las propiedades que sirven para demostrar que la operacion, cuyo desarrollo acabamos de completar, puede conducir á fracciones de un número *limitado ó ilimitado* de cifras decimales, y que la inspeccion sola del *denominador* de la fraccion ordinaria que debe convertirse en decimal, basta para caracterizar esas dos clases de fracciones.

172. Primera propiedad.—*Toda fraccion ordinaria cuyo*

denominador no contiene mas factores primos que 2 y 5 (factores de la base 10 del sistema decimal) *elevados respectivamente á ciertas potencias, dá lugar á una fraccion decimal de número* LIMITADO *de cifras decimales.*

Sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{A}{2^4 . 5^6}$, cuyo denominador contiene los factores 2 y 5, elevados el uno á la 4.ª y el otro á la 6.ª potencia; siendo A un número *entero* primo con 2 y 5.

Digo que esta fraccion comun convertida en decimal, dará lugar á una fraccion de un número *limitado* é *igual* á 6, de cifras decimales, siendo 6 el *mayor* de los esponentes de 2 y de 5.

En efecto, concibamos que, para hacer la conversion, se ha *comenzado*, segun la observacion del número precedente, por *multiplicar* el numerador A por 10^6 ó 1000000.

Como 10^6, ó sea $2^6 \times 5^6$, es esencialmente divisible por $2^4 \times 5^6$, su *múltiplo* $A \times 1000000$ tambien lo será (n.º 63); de donde se infiere que el cociente de la division de este producto por el *denominador* de la fraccion propuesta es un número *entero*; pero este cociente no es evidentemente otra cosa mas que el resultado de la conversion de la fraccion comun en fraccion decimal, *multiplicado* por 1000000; luego será necesario dividirle por 1000000 ó separar 6 cifras decimales hácia la derecha para obtener este resultado.

Por consiguiente en este caso la *conversion de la fraccion ordinaria en fraccion decimal* dá lugar á un número *limitado* de cifras decimales é igual á 6.

El mismo razonamiento se aplicaria evidentemente á cualquier otro producto de las potencias de 2 y de 5, que contenga el *denominador* con esclusion de todo otro factor *primo*.

Luego, etc.

Así es como las fracciones

$$\frac{7}{8}, \frac{13}{25}, \frac{11}{40}, \frac{317}{1250},$$

las cuales pueden ponerse bajo la forma

$$\frac{7}{2^3}, \frac{13}{5^2}, \frac{11}{2^3 \times 5}, \frac{317}{2 \times 5^4},$$

convertidas en decimales, producen los resultados:

0,875 | 0,52 | 0,275 | 0,2536.

La primera y la tercera dán lugar á *tres* operaciones, la segunda á *dos* y la cuarta á *cuatro*.

Sea ahora *dividir* 71,34 por 0,00375: segun la regla general de la division de las fracciones decimales, tendremos que dividir 7134000 por 375.

Pero $\frac{7134000}{375}$ equivale á $\frac{2378000}{125}$, por la supresion del factor 3 comun á los dos términos.

Aquí observamos que 1000 es divisible por 125, ó 5^3, y dá por cociente 8; luego el cociente de 2378000 por 125 debe ser *entero* é *igual* á 2378×8, ó 19024.

173. *Recíprocamente*, se podria proponer *pasar de una fraccion de número* LIMITADO *de cifras decimales á la fraccion ordinaria de donde trae su orígen*.

El medio de resolver esta cuestion consiste evidentemente: 1.° en *formar una fraccion cuyo numerador sea el número decimal dado, y que tenga por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay* en dicho número; 2.° en *reducir el quebrado comun resultante á su menor espresion*.

Por ejemplo, sea el número 3,475.

Este número equivale á $\frac{3475}{1000}$ (n.° 160); suprimiendo en los dos términos el factor comun 25 (n.° 68), se obtiene $\frac{139}{40}$ que será la fraccion pedida.

Tratando del mismo modo las fracciones decimales del número precedente, se obtendrian resultados análogos.

174. SEGUNDA PROPIEDAD. — *Toda fraccion comun, cuyo denominador contiene* UNO Ó VARIOS *factores primos diferentes de 2 y de 5, pero que no entran al mismo tiempo en el numerador dá lugar á una fraccion decimal de un número de cifras decimales* ILIMITADO Ó INFINITO.

Además, esta fraccion *decimal* es PERIÓDICA, es decir, que *al cabo de cierto número de operaciones, se reproducen las mismas cifras constantemente y en el mismo órden*.

En efecto, segun la observacion del n.° 171, sería necesario para que el número de las cifras decimales fuera *limitado*, que el denominador de la fraccion propuesta pudiera dividir al numerador seguido de un número *limitado* de ceros. Ahora bien, la multiplicacion del numerador por 10, 100, 1000, no puede introducir mas *factores primos*, que 2 y 5 elevados á cierta potencia; por consiguiente, los *factores primos* que se suponen existir en el denominador sin entrar en el numerador, tampoco se hallarán (n.° 93) en el producto del numerador por una potencia cualquiera de 10. Luego cualquiera que sea el número de ceros que se coloque á la derecha del numerador, no se podrá obtener un producto *exactamente divisible* por el denominador; y por consiguiente, las operaciones se continuarán al INFINITO.

Digo además que la fraccion será *periódica*.

En efecto, como cada resíduo que se obtiene aplicando el procedimiento de la conversion en decimales, es siempre *menor* que el divisor, es evidente que, cuando se hayan hecho *á lo mas* TANTAS operaciones como unidades hay en el *divisor* MENOS UNA, se deberá volver á encontrar uno de los resíduos ya obtenidos. Escribiendo entonces un *cero* á la derecha de este resíduo, se tendrá un nuevo *dividendo parcial* que será el *mismo* que el correspondiente al resíduo repetido; y, como el divisor es constante, el nuevo cociente y el nuevo resíduo serán tambien los *mismos* que los procedentes de la division del *primer dividendo repetido*, por el divisor; y así sucesivamente.

De donde se sigue que ciertas cifras del cociente deben reproducirse *periódicamente* y en el *mismo órden*.

Luego, etc.

Sean, por ejemplo, las fracciones

$$\frac{5}{7},\ \frac{19}{37},\ \frac{23}{148},\ \frac{428}{315};$$

50	7
10	$0{,}714285 \mid 714285\ldots$
30	
20	
60	
40	
5	
.	
.	
.	

190	37
50	$0{,}513 \mid 513\ldots$
130	
19	
.	
.	
.	

230	148
820	$0{,}15 \mid 540 \mid 540 \mid \ldots$
800	
600	
800	
.	
.	
.	

428	315
1130	$1{,}3 \mid 587301\ldots$
1850	
2750	
2300	
950	
500	
185	
.	
.	
.	

En el primer ejemplo, donde tenemos 7 por divisor, ha sido necesario ejecutar, 6 ó 7 — 1, operaciones antes de que se repita algun resíduo.

En el segundo ejemplo, se ha reproducido un resíduo, despues de tres operaciones, á pesar de que segun el divisor, debian haberse efectuado 36.

En el tercer ejemplo, han bastado cinco operaciones para que uno de los resíduos se reprodujera y el período se manifestara.

Finalmente, en el cuarto ejemplo, se ha manifestado el período inmediatamente despues de la octava operacion.

Pero lo que importa observar es que, en los dos primeros ejemplos, el primer período comienza inmediatamente despues de la vírgula, mientras que, en los otros dos ejemplos, no comienza sino despues de la *segunda* y despues de la *primera* cifra decimal.

El período es 540 en el tercer ejemplo, y 587301 en el cuarto.

Fracciones periódicas PURAS *y* MISTAS. — *Determinacion de la fraccion generatriz.*

175. La observacion final del número precedente manifiesta que deben distinguirse *dos* clases de *fracciones decimales periódicas*, á saber:

1.° Las *fracciones periódicas* PURAS que son aquellas cuyo primer *período* comienza en su *primera* cifra decimal;

2.° Las *fracciones periódicas* MISTAS, que son aquellas cuyo primer *período* está *precedido* de *una* ó de *varias* cifras decimales.

Esta distincion nos conduciria á establecer otras varias propiedades mas ó menos curiosas; pero nos reducirémos á esplicar la que debe proporcionarnos el medio de retroceder desde *una fraccion decimal periódica* á la *fraccion ordinaria* que le dió orígen, llamada *fraccion generatriz*, operacion análoga á la que hemos hecho en el n.° 173 respecto de una fraccion de número LIMITADO de cifras decimales.

Dejaremos para el capítulo octavo la esplicacion de las demás propiedades.

176. TERCERA PROPIEDAD. — *Toda fraccion periodica* PURA *sin* PARTE ENTERA, *es equivalente á un quebrado comun, que tiene por numerador uno de los períodos y por denominador un número compuesto de* TANTAS CIFRAS, 9, *escritas unas en pos de otras, coma cifras tiene el período.*

Sea, en efecto, la *fraccion periódica*

$$0{,}513513513\ldots,$$

y designemos por N el número de que procede, sea el que quiera; tendremos

$$(1) \qquad N = 0{,}513513513\ldots;$$

multipliquemos los dos miembros de esta igualdad por 1000, lo cual en el segundo miembro se hace (n.° 161), avanzando la coma *tres* lugares á la derecha; así resulta

$$N\times1000=513,513513$$

ó

(2) $$N\times1000=513+0,513513513...;$$

de donde se deduce, restando miembro á miembro la igualdad (1) de la igualdad (2),

$$N\times 999=513;$$

luego

$$N=\frac{513}{999}.$$

L. C. D. D.

Sea ahora la fraccion periódica

(1) $$N=0,714285714285...;$$

multipliquemos los dos miembros por 1000000, tendremos

(2) $$N\times1000000=714285,714285...;$$

de donde, restando la primera igualdad de la segunda

$$N\times999999=714285;$$

luego

$$N=\frac{714285}{999999}.$$

Reduciendo á *sus menores términos* las fracciones $\frac{513}{999}$ y $\frac{714285}{999999}$, ya sea inmediatamente por la *supresion de algunos factores comunes*, que, como el 9, estén á la vista, ya sea por el procedimiento del n.° 123, se obtendrian, como puede comprobarse, los quebrados $\frac{19}{37}$ y $\frac{3}{7}$ de los dos primeros ejemplos del n.° 174.

Así se encuentra esplicado el medio de *pasar de una fraccion periódica* PURA *sin* PARTE ENTERA *á la fraccion generatriz.*

177. Cuando la *fraccion periódica* tiene una *parte entera*, se determina del mismo modo *la fraccion generatriz,* aunque empleando un artificio de cálculo.

Sea, por ejemplo, la fraccion 8,26732673...

Segun lo dicho antes, tenemos

$$8{,}26732673... = 8 + \frac{2673}{9999}.$$

Para reducir esta espresion á un solo número fraccionario, se observa que

$$8 \times 9999 = 8 \times (10000 - 1) = 80000 - 8;$$

luego

$$8 + \frac{2673}{9999} = \frac{80000 - 8 + 2673}{9999} = \frac{82665}{9999},$$

y por consiguiente

$$8{,}26732673... = \frac{82665}{9999}.$$

Reduciendo esta última fraccion á sus menores términos, se halla $\frac{835}{101}$, que es la *fraccion generatriz.*

Este resultado puede comprobarse, haciendo la conversion en decimales:

$$\begin{array}{l|l} 835 & 101 \\ \hline \;\;270 & 8{,}26732673... \\ \;\;\;\;680 & \\ \;\;\;\;\;\;740 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;330 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;27 & \end{array}$$

La *fraccion periódica* así encontrada es la misma propuesta.

178. Finalmente, se puede pedir la *fraccion generatriz* de una *fraccion periódica* MISTA.

Sea, por ejemplo, la fraccion 3,45891891...

Multiplicándola por 100, tendremos

$$345{,}891891...;$$

ahora bien, segun el número precedente, el valor de esta espresion es

$$345+\frac{891}{999},\ \text{ó}\ \frac{345\times(1000-1)+891}{999},\ \text{ó}\ \frac{345546}{999}.$$

Pero como se ha multiplicado la fraccion propuesta por 100, será necesario, para reducir este resultado á su verdadero valor, dividirle por 100; y así se tendrá (n.° 111)

$$\frac{345546}{99900},$$

número fraccionario que, reducido á su menor espresion, se convierte en

$$\frac{6399}{1850}.$$

Tal es la *fraccion generatriz de la fraccion periódica* MISTA 3,45891891..., como puede comprobarse aplicando el procedimiento del n.° 167.

Citaremos como notables los ejemplos siguientes:

$$0{,}9999...=\frac{9}{9}=1,$$

$$0{,}012345679012345679...=\frac{1}{81},$$

$$0{,}987654320987654320...=\frac{80}{81}.$$

Segun hemos dicho antes, dejamos para el octavo capítulo el exámen de otras varias propiedades de las fracciones periódicas tanto PURAS como MISTAS.

§. II.—NUEVO SISTEMA DE PESOS Y MEDIDAS.

Ahora estamos ya en disposicion de apreciar la ventaja que lleva el cálculo de las fracciones decimales al de los quebrados de cualquier especie, y de juzgar cuán importante sería establecer un sistema de pesos y medidas que estuviese en relacion con el sistema decimal. Así lo han conseguido los sabios á costa de muchos esfuerzos, venciendo los obstáculos que oponian la ignorancia y las preocupaciones. Empezarémos por dar á conocer la nomenclatura de este sistema, que ha recibido la denominacion de *sistema métrico* (*).

Medidas lineales ó de longitud.

179. La unidad de longitud, que lleva el nombre de METRO, es la *diezmillonésima* parte de la distancia del polo al ecuador, contada en el meridiano que pasa por París.

En virtud de operaciones ejecutadas y comprobadas con la mayor precision, se ha visto que el *metro* valuado en piés, pulgadas y líneas, es igual á 3 piés, 7 pulgadas, 0,805 líneas; valor aproximado hasta milésimas de línea.

Para designar las medidas mayores y menores que el metro, se ha convenido en emplear las palabras (sacadas del griego y del latin):

MIRIA, KILO, HECTO, DECA, DECI, CENTI, MILI,

que significan:

diez mil, mil, ciento, diez, décima de, centésima de, milésima de,

y que acompañan á la palabra *metro*.

Así se ha formado el cuadro siguiente:

Miriámetro	ó medida de	diez mil metros.
Kilómetro	. . . . . .	mil metros.
Hectómetro	. . . . . .	cien metros.
Decámetro	. . . . . .	diez metros.
METRO	. . . . . .	*unidad* principal.
Decímetro	. . . . . .	décima de metro.
Centímetro	. . . . . .	centésima de metro.
Milímetro	. . . . . .	milésima de metro.

(*) Para la inteligencia completa de algunas espresiones que usa-

Advertencia. El miriámetro y el kilómetro son las medidas itinerarias adoptadas actualmente; el miriámetro es un poco menos de *doble* de la legua ordinaria, y el kilómetro un poco menos de la *quinta parte*.

Medidas de superficie.

180. La unidad natural de las superficies es el *metro cuadrado;* pero cuando se trata de grandes superficies agrarias, se toma por unidad un *decámetro cuadrado*, es decir, un cuadrado que tiene por lado un decámetro, ó sea diez metros; esta unidad se llama *área.*

Los múltiplos del área y sus subdivisiones se designan por medio de las palabras *miria, kilo, hecto..., deci, centi...* empleadas en el n.º 94.

Así *Miria-área* ó *miriárea*	significa	diez mil áreas.
Kilo-área ó *kilárea*	. . . .	mil áreas.
Hecto-área ó *hectárea*	. . . .	cien áreas.
Deca-área ó *decárea*	. . . .	diez áreas.
Área	. . . .	*unidad* principal.
Deciárea	. . . .	décimo de área.
Centiárea	. . . .	centésimo de área.
Miliárea	. . . .	milésimo de área.

Advertencia. La miriárea, hectárea, área y centiárea son las únicas medidas usadas; la *hectárea* vale poco mas ó menos fanega y media, y reemplaza á esta medida; la centiárea no es otra cosa que el *metro cuadrado.*

Medidas de volúmen.

181. La unidad de volúmen es el METRO CÚBICO; es decir, un cubo (ó dado) que tiene un metro de lado. Los múltiplos y submúltiplos del *metro cúbico* no han recibido en general denominaciones particulares; sin embargo, la 1000.ª parte del metro cúbico se llama *decímetro cúbico*, porque en efecto es un cubo que tiene un *decímetro* de lado: la 1000000.ª par-

---

remos en el curso de esta nomenclatura, nos vemos obligados á referirnos á la Geometría.

te del metro cúbico se llama tambien *centímetro cúbico*, porque es un cubo que tiene un *centímetro* de lado, etc....

Algunas veces la unidad principal ó *metro cúbico* toma el nombre de ESTERIO (*).

Medidas de capacidad para los líquidos y los granos.

182. La unidad de capacidad es el *decímetro cúbico*, que se llama LITRO. Sus múltiplos y submúltiplos mas usados son los siguientes:

Hectólitro ó medida de	cien litros.
Decálitro.	diez litros.
LITRO.	*unidad* principal.
Decílitro.	décima de litro.
Centílitro.	centésima de litro.

Advertencia. El litro reemplaza al cuartillo para los líquidos, y viene á valer el doble.

El *hectólitro* reemplaza la *fanega* para los áridos, y vale poco menos del doble.

El *kilólitro*, que tiene la capacidad de un metro cúbico, y el *miriálitro*, casi nunca se usan.

Pesos.

183. La unidad de peso es el de un *centímetro cúbico* de agua destilada y en su *maximum* de densidad, que toma el nombre de GRAMO.

Su equivalencia en adarmes es 0,556, es decir, poco mas de medio adarme.

Hé aquí el cuadro de sus múltiplos y submúltiplos decimales:

Miriágramo, que vale	diez mil gramos.
Kilógramo.	mil gramos.
Hectógramo.	cien gramos.
Decágramo.	diez gramos.
GRAMO.	*unidad* principal.
Decígramo.	décima de gramo.
Centígramo.	centésima de gramo.
Milígramo.	milésima de gramo.

(*) En nuestro sistema métrico legal no se ha adoptado esa palabra del sistema primitivo. *(N. del T.)*

Advertencia. El kilógramo es la unidad usual de peso, y vale poco mas de dos libras (*).

Monedas.

184. La unidad decimal monetaria no se ha establecido en España, habiéndose limitado el Gobierno á prescribir la nueva division del *real* que hemos notado en el capítulo precedente al tratar de nuestro sistema comun de pesos, medidas y monedas (**).

185. Tal es la esposicion de la nomenclatura de las nuevas medidas: con solo eso pueden ya conocerse las ventajas de este sistema sobre los antiguos.

1.° Es uniforme y sencillo, porque las unidades principales y sus subdivisiones siguen siempre entre sí la ley del sistema decimal de numeracion; y ya se sabe cuán fácil es el cálculo de los quebrados decimales.

2.° Es fijo, invariable y susceptible de ser adoptado en todos los paises, porque no pertenece á ningun clima ni nacion en particular.

(*) Los sabios á quienes se debe el sistema decimal de pesos y medidas, idearon al principio tomar por *unidad* de peso, el de un decímetro cúbico de agua destilada, porque este peso, que corresponde al *kilógramo* actual, era muy propio para reemplazar la unidad antigua, ó sea la *libra;* le habian dado el nombre de *grave*, pero no tardaron en reconocer los inconvenientes siguientes:

1.° Los múltiplos del grave eran el *decágrave*, el *hectógrave*, el *kilógrave* y el *miriágrave;* y siendo el peso de un decágrave igual á mas de 20 libras, los otros múltiplos eran muy superiores á los pesos empleados en las artes y en el comercio.

2.° Los submúltiplos eran el *decigrave*, el *centigrave* y el *miligrave*. Como este último peso no es otra cosa que el *gramo* actual, y equivale á 20 granos, poco mas ó menos, es muy superior á los que se emplean en pesos un poco delicados; por consiguiente era necesario formar nuevas subdivisiones, tales como el *diezmiligrave, cienmiligrave* y *millonigrave*. Los sabios discurrieron dar un nombre particular al *miligrave*, y habian formado una unidad secundaria llamada en el idioma en que se formó la nomenclatura *gravet*, y de aquí dedujeron el *decigravet*, el *centigravet* y el *miligravet*. Sin embargo, la regularidad de la nomenclatura estaba destruida. La nueva no ofrece estos inconvenientes, y comprende todos los pesos de que nos servimos ordinariamente.

(**) Por un real decreto de este año, se ha dispuesto que la unidad monetaria española sea el *escudo* que valdrá 10 rs. vn.

Todas las medidas proceden de una primitiva, el *metro*, que se ha tomado de las dimensiones del globo. En Francia hasta las monedas tienen su enlace con esa medida, porque el *franco*, que es la unidad monetaria, pesa *cinco gramos*, y el *gramo* es el peso del *centímetro cúbico* de agua destilada (*).

Operaciones sobre las medidas métricas.

Insistirémos poco en las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética aplicadas al nuevo sistema de pesos y medidas; puesto que, segun la nomenclatura, toda *coleccion de unidades* principales *y de subdivisiones* de dichas unidades, pueden espresarse por medio de una fraccion decimal, convirtiéndose por consiguiente todas aquellas operaciones en operaciones con fracciones decimales, consideradas como números *abstractos*, para las cuales hemos dado ya reglas fijas.

Nos propondremos sin embargo algunas cuestiones relativas á la multiplicacion y á la division, porque de ellas tomarémos motivo para hacer algunas observaciones importantes, relativas á los cálculos de aproximacion.

Multiplicacion.

186. PRIMERA CUESTION.— *Se desea saber cuánto valen* 35 *metros y* 429 *milímetros* (lo cual se escribe $35^{m.},429$) *de cierta tela, sabiendo que el metro cuesta* 10 *reales y* 76 *céntimos* (ó $10^{rs.},76$).

Multiplicando 19,76 por 35,429, ó mejor 35,429 por 19,76, se obtendrá un producto que, espresado en *reales, décimos* y *céntimos*, será el valor buscado.

El producto abstracto es 700,07704; luego 700 reales y 7 céntimos, ó sea $700^{rs.},07$, ó mas exactamente (n.° 168) $700^{rs.},08$ es el coste de los $35^{m.},429$.

Algunas veces la fraccion de metro está espresada por un

(*) Nos vemos en la precision de hacer algunas alteraciones en el testo de este y otros puntos si hemos de acomodarle al uso de los jóvenes de nuestro pais: escusamos decir que nada variamos de lo sustancial. *(N. del T.)*

quebrado comun y en este caso la operacion puede ejecutarse de dos maneras.

SEGUNDA CUESTION.—*¿Cuál es el coste de* 23 *metros y* $\frac{3}{4}$ *de cierta tela á* 8 *reales y* 25 *céntimos el metro?*

1.°—La reduccion de $\frac{3}{4}$ á decimales dá 0,75; y la cuestion queda reducida á multiplicar 8,25 por 23,75, ó 23,75 por 8,25; lo cual dá 195,9375; luego $195^{rs.},94^{c.}$ es el valor de los $23^{m.}\frac{3}{4}$ de tela valor aproximado hasta $\frac{1}{2}$ *centésima* por esceso (n.° 168).

2.°—Tambien se puede proceder del modo siguiente:

$$\begin{array}{lr}
 & 8,25 \\
 & 23^{3}/_{4} \\
\hline
 & 24\ 75 \\
 & 165\ 0 \\
\hline
 & 189,75 \\
\text{por } ^{1}/_{2}\ldots & 4,125 \\
\text{por } ^{1}/_{4}\ldots & 2,0625 \\
\hline
 & 195,9375
\end{array}$$

En esta operacion, despues de haber formado el producto de las dos partes enteras, se ha tenido el cuidado de sumar los dos productos parciales, y de poner inmediatamente la coma en el lugar correspondiente, á fin de evitar todo error en la colocacion de este signo en el resultado final.

En seguida hemos multiplicado 8,25 por $\frac{3}{4}\left(\text{ó } \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$, tomando primero la *mitad* de 8,25, lo cual ha dado 4,125, y despues la *mitad* de esta *mitad*, obteniendo 2,0625.

Hecho esto, lo hemos sumado todo y hemos llegado al resultado 195,9375, como por el primer procedimiento.

El último modo de operar es preferible, principalmente cuando la fraccion ordinaria no puede convertirse en un número *limitado* de cifras decimales.

TERCERA CUESTION.—*Hallar el valor de* $89^{m.}\frac{11}{12}$, *suponiendo que el metro cuesta á* $47^{rs.},19$.

Procedamos primeramente por medio de las *partes alicuotas:*

$$\begin{array}{lr}
 & 47{,}19 \\
 & 89\,^{11}/_{12} \\
\hline
 & 424\ 71 \\
 & 3775\ 2 \\
\hline
 & 4199{,}91 \\
\text{por } ^{6}/_{12}\ldots & 23{,}595 \\
\text{por } ^{3}/_{12}\ldots & 11{,}7975 \\
\text{por } ^{2}/_{12}\ldots & 7{,}8650 \\
\hline
 & 4243{,}1675
\end{array}$$

luego $89^{m.}\frac{11}{12}$ cuestan $4243^{rs.}$,17 aproximado hasta céntimos.

De otro modo.— Empezando por convertir en decimales el quebrado $\frac{11}{12}$, se encuentra 0,9166...; de modo que sería necesario multiplicar 89,916666... por 47,19:

$$\begin{array}{r}
89{,}91 \\
47{,}19 \\
\hline
8\ 09\ 19 \\
8\ 99\ 1 \\
629\ 37 \\
3596\ 4 \\
\hline
4242{,}85\ 29
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
89{,}916 \\
47{,}19 \\
\hline
8\ 092\ 44 \\
8\ 991\ 6 \\
629\ 412 \\
3596\ 64 \\
\hline
4243{,}136\ 04
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
89{,}9166 \\
47{,}19 \\
\hline
8\ 0924\ 94 \\
8\ 9916\ 6 \\
629\ 4162 \\
3596\ 664 \\
\hline
4243{,}1643\ 54
\end{array}$$

Este cuadro ofrece tres operaciones distintas, ejecutadas: 1.° con *dos* cifras decimales en el multiplicando; 2.° con *tres;* 3.° con *cuatro;* y se ha visto que esta última únicamente es la que dá la aproximacion *en menos de un céntimo.*

La dificultad aquí está en saber cuántas cifras decimales deben tomarse en el multiplicando, para tener seguridad de alcanzar el grado de aproximacion exigido por la naturaleza del problema; mientras que, por la primer manera de operar, se obtiene un resultado completo, en el cual pueden despues despreciarse mas ó menos decimales.

Al fin de este capítulo, espondremos un medio directo de salvar esta dificultad; pero el primer medio es preferible, al menos con relacion á las aproximaciones que pueden exigirse.

Advertencia. Tambien podria reducirse el número misto $89\frac{11}{12}$ á número fraccionario, multiplicando el resultado por 47,19 (n.º 129); pero el empleo de este medio sería en general mas complicado que la operacion por *partes alicuotas.*

Division.

187. Cuarta cuestion.—*Se ha comprado por* 83719$^{rs.}$,25 *una hacienda de* 23 *hectáreas* 9 *áreas y* 25 *centiáreas* (ó 23$^{h.}$,0925$^{c.}$); *se desea saber á cómo cuesta la hectárea.*

Para esto basta dividir 83719,25 por 23,0925; y el cociente valuado en *reales, décimos* y *céntimos*, representará el precio de la *hectárea.*

El resultado así obtenido es 2625$^{rs.}$,38.

Quinta cuestion. — 28 *kilógramos* $\frac{19}{24}$ *de kilógramo de cierta mercadería han costado* 519$^{rs.}$,35, *y se quiere saber cuál es el precio del kilógramo.*

Primer modo de operar. *Segundo modo.*

$$28\frac{19}{24}=\frac{691}{24}$$

```
 519,35
     24
-------
 2077 40
10387 0
--------
12464,40 | 691
 5554    |------
  26 40  | 18,038
   5 670
     142
```

```
190 | 24
220 | 0,79166
 40
160
 16
```

```
519,35 | 28,79
231 45 | 18,039
 1 1300
  26630
    719
```

La primer manera de operar consiste en *reducir* primero el número misto $28\frac{19}{24}$ á fraccionario, *multiplicando* despues

519,35 por la fraccion $\frac{691}{24}$ invertida (n.° 131); hallando así por resultado 18,038.

En el segundo modo, *se ha convertido en decimales* la fraccion $\frac{19}{24}$, lo cual ha dado 0,79166...; despues se ha dividido 519,35 por 28,79, tomando solo en cuenta las dos primeras cifras decimales del divisor; y así se ha obtenido por cociente 18,039.

De donde puede inferirse, segun una y otra operacion, que el precio del kilógramo de la mercancía comprada es $18^{rs.}$,04.

Advertencia. Es de notar que en la segunda operacion, ha sido suficiente dejar *dos* decimales en el divisor para obtener la aproximacion suministrada por la primera; pero no siempre sucede así, por lo cual habria sido mas conveniente para mayor seguridad, tomar *una* cifra mas, aumentándola en una unidad, y así habríamos tenido por divisor el número 28,792.

Mas adelante trataremos sobre la aproximacion de los cocientes en las divisiones.

Estos ejemplos bastan para manifestar cómo debe procederse cuando hayan de *multiplicarse* ó de dividirse entre sí números *concretos*, relativos al sistema decimal de pesos y medidas.

Conversion de las antiguas medidas métricas y vice-versa.

La comparacion de los dos sistemas ha perdido ciertamente su importancia, desde que el sistema métrico está mandado usar como *esclusivo* (*); sin embargo, como todavía encuentra su utilidad en muchas circunstancias, vamos á esponerla de una manera sucinta, reduciéndonos á las medidas *lineales y superficiales*, á los *pesos* y á las *monedas*.

(*) Esto dice el autor, refiriéndose á su pais: sabido es que en el nuestro no es todavía esclusivo el uso del sistema métrico decimal. *(N. del T.)*

Medidas lineales.

188. Sabemos (n.° 140) que el metro vale 3,5889221 piés de Burgos: luego si dividimos este número por 3, que son los piés que tiene una vara, hallaremos el valor del metro en varas. Hecho así resulta que el metro vale 1,1963073 varas, es decir, 1 vara y 1963073 *diezmillonésimas* de vara, valor que se diferencia del verdadero en menos de *una* diezmillonésima. Recíprocamente, dividiendo 3, número de piés que tiene la vara, por 3,5889221, número de piés que contiene el metro, se halla 0,8359056, que es el valor del metro en varas con la misma aproximacion.

Resulta, pues, que

(1) $1^{v.} = 0^{m.},8359056$, ó $1^{v.} = 0^{m.},836$,

con menos error de *un milímetro.*

(2) $1^{m.} = 1^{v.},1963073$, ó $1^{m.} = 1^{v.},196$,

con menos de *una milésima* de vara de error.

189. Las espresiones (1) y (2) bastan para la conversion de un número *complejo* de *varas* en *metros* y *subdivisiones decimales* del metro; y recíprocamente, de un número cualquiera de *metros* y *subdivisiones decimales* del metro en un número *complejo* de *varas.*

Sea, por ejemplo, *convertir* 85 *varas* 2 *piés* 6 *pulgadas* en *metros* y *subdivisiones decimales* de metro.

Puede seguirse el método de las *partes alícuotas:*

	0,8359056
	$85^{v.}\ 2^{pi.}\ 6^{pulg.}$
	4 1795280
	66 872448
	71,0519760
Parte correspte. á 1 pié. .	0,2786352
id. á 1 pié. .	0,2786352
id. á 6 pulg..	0,1393176
	$71^{m.},7485640$

Despues de haber formado los dos productos parciales del multiplicando por el entero 85 del multiplicador, hemos hecho la suma, y hemos separado por medio de una coma las siete primeras cifras de la derecha. Se hace así para evitar despues la posibilidad de equivocar la colocacion de la coma en el resultado final.

En seguida hemos procedido á la formacion de los productos correspondientes á los 3 piés y 6 pulgadas del multiplicador, tomando primero el *tercio* del multiplicando que es naturalmente el valor de *un* pié, y repitiéndole *dos* veces segun se ve en la operacion; y tomando despues la *mitad* del valor de *un* pié para tener el valor de las 6 pulgadas.

Finalmente hemos hecho la suma de todas estas partes y hemos obtenido que $85^{v.}, 2^{p.}, 6^{pulg.}$ equivalen á $71^{m.},748564$.

Para comprobar este resultado podrian convertirse las $85^{v.}, 2^{p.}, 6^{pulg.}$ á *pulgadas*, y dividir el resultado por 43,067 que son las pulgadas que tiene un metro.

Así se obtendrian $71^{m.},7486$, resultado que solo se diferencia del anterior en menos de *una diezmilésima*.

Recíprocamente sea *convertir* $71^{m.},7486$ en *varas, piés* y *pulgadas*.

Para esto no hay mas que multiplicar el número dado de *metros* y *subdivisiones decimales* de metro por 1,1963, que es el número de varas que el metro contiene.

Hecha esta multiplicacion y despreciados los tres últimos decimales se obtiene el producto 85,83285, el cual espresa en *varas* y *fraccion decimal* de vara el valor del número dado de *metros* y *subdivisiones decimales* de metro.

Tenemos, pues, que

$$71^{m.},7486 = 85^{v.},83285,$$

con menos de *una cienmilésima* de error.

Ahora nos falta convertir la fraccion 0,83285 en *piés* y *pulgadas*, para lo cual se procede del modo siguiente:

$$
\begin{array}{r l}
0{,}83285^{\text{v.}} & \\
3 & \\
\hline
2{,}49855 & \ldots\ 2\ \textit{piés} \\
12 & \\
\hline
99710 & \\
4\ 9855 & \\
\hline
5{,}98260 & \ldots\ 6\ \textit{pulgadas}
\end{array}
$$

se multiplica lo primero la fraccion dada por 3, que es el número de piés que tiene la vara, y se obtiene 2,49855, es decir, 2 *piés* y una *fraccion de pié* que debe valuarse en *pulgadas*. Para esto hemos multiplicado dicha fraccion por 12, número de pulgadas que tiene el pié, y hemos obtenido el producto 5,98260, es decir, 5 *pulgadas* y 0,982 de pulgada, por lo cual tomamos en números redondos 6 pulgadas.

Resulta, pues, por último que

$$71^{\text{m.}},7486 = 85^{\text{v.}} \ldots 2^{\text{p.}} \ldots 6^{\text{pulg.}};$$

que es precisamente la cantidad del primer ejemplo, con lo cual quedan recíprocamente comprobadas entrambas operaciones.

190. *Casos particulares.* — 1.° Siendo el pié la *tercera* parte de la *vara*, es igual á la *tercera* parte de 0,8359056 ó sea

$$1 \text{ pié} = 0{,}2786352,$$

es decir, en números redondos, 28 *centímetros* con cortísima diferencia.

Siendo la *pulgada* la *duodécima* parte del pié, valdrá en metros la *duodécima* parte del valor de este, ó sea

$$1 \text{ pulgada} = 0{,}0232196,$$

es decir, próximamente 23 *milímetros*.

Para hallar el valor de la línea se dividiria por 12 ese valor de la pulgada, y se veria que la línea vale un poco *menos* de 2 *milímetros*.

2.° *Recíprocamente*, considerando ahora los múltiplos del metro, tendremos

1 decámetro $= 11^{v.},963073$,
1 hectómetro $= 119^{v.},63073$,
1 kilómetro $= 1196^{v.},3073$,
1 miriámetro $= 11963^{v.},073$;

se ve, pues, que el miriámetro vale algo *menos* de 2 *leguas* españolas de á 6000 *varas* y 2 *piés*: y que el kilómetro viene á ser algo *menos* de la *quinta* parte de la misma legua.

Medidas de superficie y medidas agrarias.

191. Admitimos aquí (pues solo puede demostrarse en GEOMETRÍA) que, para *valuar* la superficie de un *cuadrado*, es necesario multiplicar por *sí mismo* el número que espresa el valor de su *lado* en *unidades principales* y *subdivisiones* de esta unidad.

Esto supuesto, 1.° el valor de la *vara cuadrada* en *metros* cuadrados, segun las correspondencias oficiales publicadas en el Anuario astronómico, es $0^{m.},6987$.

Este valor puede obtenerse multiplicando por sí mismo el valor de la vara en metros, que como sabemos, es 0,8359056; cuya multiplicacion dá por producto 0,69873817210136.

Tomando solamente seis cifras decimales de este producto, tendremos

$$1^{v.\ cuad.} = 0^{m.\ cuad.},698738\ ;$$

ó sea 69 *decímetros cuadrados*, 87 *centímetros cuadrados* y 38 *milímetros cuadrados*; puesto que (n.° 180) el decímetro cuadrado es la centésima parte del metro cuadrado; el *centímetro cuadrado* la diezmilésima parte del metro cuadrado, y así sucesivamente.

Recíprocamente, multiplicando por sí mismo el valor del metro en varas, que es 1,1963073, se obtendrá el valor del metro cuadrado en varas cuadradas; pero del producto tomaremos solo las cuatro primeras cifras decimales y tendremos

$$1^{m.\ cuad.} = 1^{v.\ cuad.},4312\ ;$$

para valuar la fraccion decimal, que acompaña á este valor del metro, en piés cuadrados, sería menester multiplicarla por 9 que son los piés cuadrados que tiene una vara; y luego la fraccion de pié que resultára se podria valuar en pulgadas cuadradas, multiplicándola por 144 que son las pulgadas cuadradas que tiene un pié cuadrado.

192. 2.°—Busquemos ahora el valor de la fanega agraria en hectáreas y recíprocamente.

Para esto recordemos que, teniendo la fanega de tierra 576 estadales cuadrados, y cada estadal 16 varas cuadradas, la fanega tendrá 9216 varas cuadradas.

Para valuarla, pues, en hectáreas, habremos de convertir en metros cuadrados las 9216 varas cuadradas, y el producto habremos de dividirlo por 10000 que son los metros cuadrados que tiene una hectárea.

Hecha esta operacion se hallará que

$$1^{\text{fang.}} = 0^{\text{hectá.}},6440.$$

Recíprocamente para valuar la hectárea en fanegas, habremos de convertir en varas cuadradas los 10000 metros cuadrados que tiene la hectárea, dividiendo el producto por 9216 que son las varas cuadradas que contiene una fanega.

De un modo análogo se procederia si se quisieran valuar *estadales cuadrados* en *áreas* ó *áreas* en *estadales cuadrados*.

Pesos.

193. La *libra castellana* equivale á $0^{\text{kilóg.}},4601$; y recíprocamente el *kilógramo* equivale á $2^{\text{lib.}},1735$.

La *onza* equivale á $28^{\text{grms.}},7558$; y el *gramo* á $0^{\text{onz.}},0348$: el *adarme* equivale á $1^{\text{grm.}},7972$; y recíprocamente el *gramo* equivale á $0^{\text{adms.}},5564$.

Con estas equivalencias es muy fácil convertir unas medidas en otras, y valuar caso necesario en subdivisiones de la unidad principal las fracciones decimales resultantes. No creemos necesario poner ejemplos, puesto que con los *pesos* se procederia en la misma forma que se ha hecho con las *unidades lineales* (n.° 188).

194. (Este párrafo le consagra el testo original á las monedas francesas, esplicando la conversion de *libras* en *francos* y *vice-versa:* En España no tenemos, segun antes se ha dicho, monedas relacionadas con el sistema métrico; por consiguiente nada tenemos que poner en sustitucion al testo.)

Aquí concluye, hablando propiamente, la esposicion del cotejo de las medidas usuales con las del sistema métrico decimal; pero sin embargo, nosotros vamos á añadir algunas nociones sobre las divisiones del *círculo* y del *termómetro*, como enlazadas á las teorías precedentes (*).

De las dos divisiones del círculo.

195. En Geometría se define la *circunferencia* de círculo, diciendo que es una línea *reentrante* y *cerrada*, cuyos puntos todos están á *igual distancia* de otro punto, que se llama *centro del círculo* ó de la circunferencia.

Antes de la reforma del sistema de pesos y medidas, el círculo, ó mejor dicho, la circunferencia se dividia en 360 *partes iguales* llamadas *grados*, cada grado en 60 partes iguales llamadas minutos, cada minuto en 60 *segundos*, cada segundo en 60 *terceros*, etc.; de aquí la denominacion de decimal dada á esta division.

En el mismo sistema, se supone la circunferencia dividida en 400 partes iguales llamadas grados, cada grado en 100 partes iguales llamadas *minutos*, cada minuto en 100 *segundos*, cada segundo en 100 terceros, etc.

(*) El autor ha omitido en el texto tratar de las unidades de *volúmen* y de las de *capacidad* para áridos y líquidos: á nosotros nos ha parecido oportuno poner aquí por nota las principales equivalencias.

Medidas de volúmen.

El *pié cúbico* valuado en *decímetros cúbicos* es igual á 21,6325: recíprocamente el *decímetro cúbico* equivale á 0,0462 piés cúbicos.—La *vara cúbica* equivale á 0,5841 *metros cúbicos;* y el *metro cúbico* á 1,7121 *varas cúbicas.*

Medidas de capacidad para líquidos.

El *cuartillo* equivale á 0,5042 *litros;* y el *litro* á 1,9835 *cuartillos.*—La *cántara* equivale á 1,6133 *decálitros;* y el *decálitro* á 0,6198 *cántaras.*

La *libra de aceite* equivale á 0,5025 *litros;* y el *litro* á 1,9900 *libras* de aceite.—La *arroba de aceite* equivale á 1,2563 *decálitros;* y el *decálitro* á 0,7960 *arrobas de aceite.*

Medidas de capacidad para áridos.

El *celemin* equivale á 4,6251 *litros;* y el *litro* á 0,2162 *celemines.*—La *fanega* equivale á 0,5550 *hectólitros;* y el *hectólitro* á 1,8018 *fanegas.*

De donde resulta el nombre de division centesimal dada á este segundo modo.

Esto supuesto, como en los usos ordinarios, y particularmente en los cálculos de la marina, se emplea mucho mas frecuentemente la primera division que la segunda, importa saber cómo puede *convertirse* un número complejo de la division *sexagesimal* en medidas *centesimales*, y recíprocamente.

Para esto, observemos, que segun lo dicho, la *cuarta* parte de la circunferencia (que siempre se llama *cuadrante)* está dividida en 90 grados *sexagesimales* y 100 grados *centesimales;* de donde se sigue que 1 grado sexagesimal vale $\frac{100}{90}$, ó $\frac{10}{9}$ de grado centesimal; y recíprocamente uno de estos vale $\frac{90}{100}$ ó $\frac{9}{10}$ de uno de aquellos.

De aquí se infieren las dos reglas siguientes:

1.ª Para *convertir* un número de *grados*, *minutos*, *segundos*, etc., *sexagesimales* en un número de *grados*, *minutos, segundos*, etc., *centesimales.*

Redúzcase el número dado á un solo número fraccionario de la unidad principal, multiplicando este número fraccionario por $\frac{10}{9}$, y *convirtiendo en decimales* el producto resultante.

Esta fraccion decimal espresará en *grados centesimales* y sus *subdivisiones* el número propuesto; es decir, que la *parte entera* representará los *grados*, y la *parte decimal* dividida en secciones de *dos* cifras, representará sucesivamente los *minutos, segundos*, etc., *centesimales.*

2.º Recíprocamente, para transformar un número dado de *grados, minutos*, *segundos*, etc., *centesimales* en un número de *grados, minutos*, *segundos*, etc., *sexagesimales*,

Réstese del número dado, que puede espresarse por una fraccion decimal, la décima parte del mismo número.

La *parte entera* del resultado representará el número de grados sexagesimales; y solo faltará, *convertir* la parte decimal en *minutos*, *segundos*, etc., siguiendo un procedimiento análogo al del n.º 189.

Ejemplo.—Sea el número 34 *grados* 59 *minutos* 17 *segundos* de la division sexagesimal, que para abreviar se representa por 34° 59′ 17″, el cual se quiere convertir en *grados, minutos, segundos*, etc., *centesimales*.

$$\begin{array}{r} 34^\circ 59' 17'' \\ \underline{60} \\ 2099' \\ \underline{60} \\ 125957'' \end{array} \qquad \frac{125957}{3600}\times\frac{10}{9}=\frac{125957}{3240} \qquad \begin{array}{r|l} 12595{,}7 & 324\cancel{0} \\ \hline 2875 & 38{,}875617 \\ 2837 & \\ 2450 & \\ 1820 & \\ 2000 & \\ 560 & \\ 2360 & \\ 92 & \end{array}$$

Esta tabla contiene *tres* operaciones distintas:

1.ª La *conversion* en *segundos* (n.° 142), lo cual dá 125957″;

2.ª La *multiplicacion* de 125957 por $\frac{10}{9}$, que produce, despues de reducida, $\frac{125957}{3240}$;

3.ª Finalmente, la *division* de 125957 por 3240, ó mas bien de 12595,7 por 324.

Siendo 38,875617... el resultado de esta division, concluimos que

$$34^\circ 59' 17'' = 38^{gr.},875617,$$

ó segun notacion convenida

$$34^\circ 59' 17'' = 38^{gr.} 87^{m.} 56^{s.} 17^{l.}.$$

Recíprocamente,—Sea *convertir* $38^{gr.}87^{m.}56^{s.}17^{l.}$ en *grados, minutos, segundos*, etc., *sexagesimales*:.

$$\begin{array}{r} \overset{gr.}{38{,}8756170} \\ \underline{3{,}8875617} \\ 34{,}9880553 \\ \underline{60} \\ 59{,}283318 \\ \underline{60} \\ 16{,}99938 \end{array}$$

Despues de haber *restado* de 38,875617 la décima parte de este número y haber obtenido el resto 34,9880553, se *ha multiplicado* por 60 la *parte decimal* de este resto, lo cual ha dado 59,283318, cuyo producto tambien se *ha multiplicado* por 60, hecha abstraccion de la parte entera, habiendo así llegado al resultado 16,99908, ó sea 17.

Luego,

$$38^{gr.}87^{m.}56^{s.}17^{t.}=34^{\circ}59'17'';$$

lo cual comprueba la primera operacion.

Con este ejemplo basta para comprender lo que deberia hacerse en cualquiera otro.

De las dos divisiones principales del termómetro.

196. Solo vamos á ocuparnos de los dos termómetros mas conocidos que son el de Reaumur y el *Centígrado*.

En el *primero* se concibe el intérvalo que media entre el punto de *congelacion* del agua y el punto de *ebullicion dividido* en 80 *partes iguales* llamadas *grados* de Reaumur; y en el *segundo*, se concibe el mismo intérvalo dividido en 100 *partes iguales* llamadas *grados centesimales*.

De donde se sigue necesariamente que cada *grado* de Reaumur vale $\frac{100}{80}$, ó $\frac{5}{4}$ de *grado centígrado;* y recíprocamente, cada *grado centígrado* vale $\frac{4}{5}$ de *grado* de Reaumur.

Además, es cosa generalmente admitida que las fracciones de grado se espresen en uno y en otro caso en fracciones decimales; de modo que no hay cosa mas fácil que transformar unos en otros.

1.° Para *convertir* un número decimal de *grados* de Reaumur en *grados centígrados*, es necesario *añadir* al número dado la cuarta parte de sí propio.

El resultado de la adicion es el número buscado.

2.° Para *convertir* un número decimal de *grados centesimales* en *grados* de Reaumur, *réstese* del número dado la *quinta parte* del mismo, y se tendrá el número buscado.

Así, por ejemplo,

$$39^{g.\ R.},4716=39,4716+9,8679=49^{g.\ c.},3395;$$

recíprocamente,

$$49^{g.c.},3395 = 49,3395 - 9,8679 = 39^{g.R.},4716.$$

Del mismo modo,

$$119^{g.c.},23076 = 119,23076 - 23,84615 = 95^{g.R.},38461;$$

$$95^{g.R.},38461 = 95,38461 + 23,84615 = 119^{g.c.},23076.$$

Etc.

MÉTODO ABREVIADO PARA LA MULTIPLICACION CON UNA APROXIMACION DADA.

197. Terminarémos este capítulo con la esposicion de un *método abreviado* para obtener el producto de dos números con una aproximacion dada, método cuya utilidad hacen resaltar suficientemente las operaciones anteriores.

Hemos visto en efecto que, para valuar las antiguas medidas en nuevas, ó recíprocamente, hay que multiplicar fracciones decimales de gran número de cifras, aunque por lo comun solo se necesita tomar en cuenta un corto número de ellas en el producto.

Importa, pues, tener un medio de obtener el producto de dos números decimales cualesquiera con el grado de aproximacion que exige el enunciado de una cuestion, sin necesidad de calcular todos los productos parciales que supone el procedimiento ordinario de la multiplicacion.

Este medio es el que constituye el *método abreviado* que pasamos á esponer.

Sea, por ejemplo, *valuar* en menos de *una milésima* el producto de los dos números.

$$84,0783647 \quad \text{y} \quad 72,46538.$$

Se conseguiria evidentemente el objeto deseado, si pudiéramos formar un número que contuviera todas las *milésimas* y todas las *unidades* de órdenes superiores, contenidas en el producto total.

Esto es precisamente lo que se consigue operando en la forma que vamos á manifestar:

Operacion propuesta.	*Prueba de la operacion.*
84,0783647	72465380
8 356427	746387048
588 548548	579723040
16 815672	28986152
3 363132	507257
504468	57972
42035	2173
2520	434
672	28
6092,77047	4
	6092,77060

Se comienza por *colocar* al multiplicador debajo del multiplicando, escribiendo sus cifras en un *órden inverso*, de modo que la cifra 2 de sus *unidades simples* se encuentra *debajo* de la cifra de las *cienmilésimas*, es decir, debajo de la cifra que *ocupa el segundo lugar* hácia la derecha de aquella cuyo órden indica el grado de aproximacion exigido: despues la cifra 4 de sus *décimas*, bajo la cifra de las *diezmilésimas* del multiplicando; la cifra 6 de las *centésimas* bajo la cifra de las *milésimas;* y así sucesivamente.

Por medio de esta disposicion, cada cifra del multiplicador corresponde á la cifra del multiplicando, cuyo producto por el primero dá *cienmilésimas.*

Así, la cifra 7 de las *decenas* del multiplicador, corresponde á las cifras de las millonésimas del multiplicando, porque *decenas* multiplicadas por *millonésimas* producen *cienmilésimas.*

Del mismo modo, si hubiera *centenas* en el multiplicador, se colocaria su cifra debajo de las *diezmillonésimas* del multiplicando.

Esto supuesto, se multiplican sucesivamente *todas* las cifras del multiplicando empezando por la derecha, por cada una de las cifras del multiplicador, *no teniendo en cuenta* en cada operacion parcial, las cifras del multiplicando, que están colocadas á la derecha de aquella por la cual se multiplica; y los productos (considerados como resultantes de la multiplicacion de dos números enteros) se *colocan* unos debajo de otros de modo que sus *unidades simples* estén en *una misma* columna vertical. Se *suman* en seguida todos estos productos, y á la *derecha* de la suma, se separan *cinco* cifras decimales, cuyas dos últimas se *tachan*.

La *parte á la izquierda* de estas dos últimas cifras es el PRODUCTO PEDIDO.

Para darnos cuenta de este modo de proceder, y convencernos de que así se obtiene el *grado* de aproximacion deseado, basta observar que en cada multiplicacion parcial, no teniendo en cuenta las cifras del multiplicando, que están á la derecha de la respectiva cifra del multiplicador, se desprecian muchas *cienmilésimas*, cuya suma puede llegar á dar *diezmilésimas* de error. Pero admitiendo que por *término medio* se cometa un error de 5 *cienmilésimas* en cada multiplicacion parcial, se ve que se necesitarian diez multiplicaciones parciales, y por consiguiente, diez cifras en el multiplicador, para que el error cometido fuera de 50 *cienmilésimas*, ó de 5 *diezmilésimas*, y 20 cifras en el multiplicador, para que el error se elevara á 5×2 ó 10 *diezmilésimas*, ó *una sola milésima*.

198. PRUEBA DE LA OPERACION. — Para *comprobar* el resultado obtenido, hé aquí lo que conviene hacer en la práctica:

Se toma el *multiplicador* por *multiplicando*, y recíprocamente, segun indica la operacion del número precedente; y se dispone el nuevo *multiplicador* como en la operacion primitiva, efectuando las multiplicaciones parciales del mismo modo, salvas algunas *modificaciones* que es necesario indicar:

1.ª Se ha colocado un 0 á la *derecha del nuevo multiplicando*, á fin de que la última cifra 8, del nuevo *multiplicador* tenga su correspondiente en la multiplicacion por dicha cifra;

2.ª Se ha tachado la primera cifra á la izquierda, 7, del multiplicador, porque segun la regla antes establecida no debe dar lugar á ningun producto parcial;

3.ª En cada multiplicacion parcial, al *producto* de la cifra del *multiplicador* por la cifra *superior* que le corresponde inmediatamente, se ha tenido el cuidado (y esto es importante) de *agregar* las *unidades que se llevarian* del producto por dicha cifra, de la cifra que está á su derecha en el multiplicando.

Así, en la multiplicacion por la *cuarta* cifra 7 del multiplicador, se han añadido al producto de 5 por 7, ó 35, las 2 unidades *que se llevarian* del producto de la cifra 3 que está inmediatamente á la derecha del 5 por el mismo multiplicador 7.

Análogamente, en la operacion inmediata posterior, al producto de 6 por 8, se han añadido las 4 unidades, que se habrian llevado del producto de 8 por 5 ó 40, y así sucesivamente.

4.ª Por último, al llegar á la cifra 7, que se ha *tachado* en el multiplicador, se le ha multiplicado *mentalmente* por la cifra 7 que está á su derecha en el multiplicando, y se han escrito debajo del producto precedente las 4 unidades que se *llevan* de este producto *mental*.

Esta última *modificacion* ofrece dos ventajas: la primera, *atenuar* mucho los errores cometidos; y la segunda dar lugar á conocer si debe *aumentarse* una unidad á la cifra en que se detiene la aproximacion, á fin de obtener un resultado mas exacto.

En el ejemplo que acabamos de presentar, hemos hallado que son 47 las dos últimas cifras de la operacion primitiva, mientras que por la *prueba*, hemos hallado 60. Todas las demás cifras son las mismas.

Luego 6092,771 es el valor del producto pedido con menos de *media milésima* de error *por esceso*.

Hé aquí otro ejemplo un poco mas complicado:

Sean los dos números

1307,510300896472 y 256,10978641,

cuyo producto quiere obtenerse *aproximado* hasta *cienmilésimas*.

Operacion propuesta.	*Prueba de la operacion.*
1307,510300896~~472~~	256,1097864100
14 687901652	~~274~~698 0030157031
2615 020601792	256 1097864100
653 755150445	76 8329359230
78 450618048	1 7927685048
1 307510300	1280548932
117675927	25610978
9152570	768329
1046008	2048
78450	230
5228	15
130	
334866,18388~~92~~	334866,18389~~10~~

El resultado pedido es aquí 334866,18389, al cual falta menos de *una cienmilésima*.

Apliquemos el procedimiento que acabamos de esplicar á los ejemplos de los n.^{os} 186, 189 y 191.

1.° *Calcular* con menos de 0,01 de *error* el producto de los números

89,91666... y 47,19.

Disponiendo estos números segun el procedimiento, y tomando en cuenta cuatro decimales en el producto, se obtiene 4243,16~~37~~; luego el producto pedido es 4243 reales 16 céntimos como en el n.° 186.

2.° *Hallar el producto de* 0,5130740 *por* 47,1984 con cinco decimales exactos.

Se obtiene 24,21627~~09~~, como en el n.° 189.

3.° *Multiplicar* 1,949036 *por sí mismo* y obtener el producto con *seis* decimales.

Resultado: 3,798741~~32~~, como en el n.° 191.

199. OBSERVACION.—Este procedimiento puede aplicarse igualmente al cálculo *aproximativo* del producto de dos números *enteros*, compuestos de un gran número de cifras.

Ejemplo.—Se pide el producto de 470256497 por 2305687 con menos de *un millon* de error:

$$
\begin{array}{r}
470256497,00 \\
78650\ 32 \\
\hline
940512994\ 00 \\
141076949\ 10 \\
2351282\ 45 \\
282153\ 84 \\
37620\ 58 \\
3291\ 75 \\
\hline
1084264291\ \cancel{62}
\end{array}
\quad 1084264292 \textit{ millones.}
$$

Tendremos seguridad de obtener el producto con la aproximacion deseada, teniendo en cuenta las *centenas de millar* y *las decenas de millar*, es decir, calculando en el producto *dos* cifras mas que el número de ellas pedido.

Para esto, *se dispone* el multiplicador debajo del multiplicando, escribiendo sus cifras en un *órden inverso*, y de manera que la cifra 7, de sus *unidades simples*, caiga bajo la cifra de las *decenas de millar* del multiplicando; entonces, la cifra 8 de las *decenas* del multiplicador cae naturalmente bajo la cifra de las *unidades de millar* del *multiplicando;* y así respectivamente las otras cifras. Mas como las cifras de *centenas de millar y de millones* del multiplicador no tendrian cifras correspondientes en el multiplicando, se ha suplido esta falta con dos ceros, que se han colocado á la derecha de este, y que se *suponen* representar *décimas* y *centésimas.*

Hecho esto, se ejecutan las operaciones parciales como en el número precedente; y se llega al resultado 108426429162, cuyas dos últimas cifras deben ser tachadas ó suprimidas, obteniéndose por último

$$1084264292$$

que es el *número total* de millones que se obtendria siguiendo el procedimiento ordinario.

Del mismo modo se hallaria que el número de *decenas de millon* contenidas en el producto 3780954×68574 es igual á 17992.

Advertencia. En el capítulo octavo esplicaremos un *método abreviado* para obtener el cociente de la division de dos números decimales con una aproximacion dada.

Ejercicios.

I. Una propiedad rural de $540^1/_2$ fanegas ha costado 146500 reales: se desea saber: 1.° el número de hectáreas y áreas que contiene; 2.° el precio de cada hectárea.

II. Un arco de circunferencia contiene $47° 19' 30''$ (division antigua): se desea saber su valor: 1.° en segundos *sexagesimales;* 2.° en segundos *centesimales.*

III. Un camino de hierro cobra por el trasporte de los carbones $0^{rs.},388$ por tonelada (de 1000 kilógramos) y por kilómetro. Se paga además un derecho fijo de $7^{rs.},50$ por wagon que contiene 3240 *hectógramos.* ¿A cómo costarán $28275^{hectó.},65$ comprados al precio de $8^{rs.},25$ el *hectólitro,* y transportados en el camino de hierro á la distancia de $15^{miriá.},97$, pesando 82 kilógramos el hectólitro de carbon?

IV. A volúmen igual, pesa el agua 773 veces mas que el aire: se quiere saber el peso de $945^{lit.},479$ de aire.

V. Segun la ley francesa, un franco debe tener 5 gramos de plata; una moneda de 5 francos, que solo pesa $24^{gr.},467$, ¿tiene el peso debido? y si no lo tiene ¿cuánto ha perdido?

VI. Un platero funde 3 kilógramos de plata que contienen un *décimo* de cobre, con 5 kilógramos de plata que contienen un *octavo* de cobre. ¿Cuál es la cantidad de cobre que hay en el metal así obtenido?

VII. ¿Cuál es la capacidad de un vaso que contiene agua, siendo el valor de su peso 2 monedas de á 5 francos, 3 monedas de 1 franco y 1 de 20 céntimos?

VIII. A valor igual, la moneda de oro pesa 15,5 veces menos, y la de cobre 40 veces mas que la de plata.

Se pregunta: 1.° cuánto pesan 1000 francos en oro; 2.° cuántas monedas de oro de á 20 francos se necesitan para hacer el peso de un kilógramo; 3.° cuánto pesan 100 francos en cobre.

CAPITULO V.

Formacion de las potencias y estraccion de las raices segundas y terceras.

PRIMERA PARTE.

SEGUNDA POTENCIA Ó CUADRADO, Y RAIZ SEGUNDA Ó CUADRADA DE UN NÚMERO.

Nociones y principios preliminares.

200. Hemos visto (n.° 45) que la SEGUNDA POTENCIA de un número es el *producto de este número multiplicado por sí mismo*, ó el *producto de dos factores* iguales á dicho número, y que, recíprocamente, la RAIZ CUADRADA de un número es un segundo número que, *multiplicado por sí mismo*, ó *elevado á la segunda potencia*, dá *por resultado* el número propuesto.

Esta SEGUNDA POTENCIA y la SEGUNDA RAIZ se designan tambien con los nombres de CUADRADO y de RAIZ CUADRADA.

Así el CUADRADO de 7 es 49; recíprocamente, la RAIZ CUADRADA de 49 es 7.

Del mismo modo, 12 tiene por CUADRADO, 12×12 ó 144; recíprocamente, 144 tiene por RAIZ CUADRADA 12.

Los CUADRADOS de los *nueve primeros* números *enteros* se hallan en la tabla de Pitágoras (n.° 18); y los cuadrados de las diversas potencias de 10, se forman (n.° 20) *duplicando* el número de *ceros*.

La formacion del *cuadrado* de un número no exige mas que la aplicacion de las reglas de la *multiplicacion;* pero no sucede lo mismo con la ESTRACCION de la RAIZ CUADRADA, que tiene por objeto:

Dado un número, hallar otro, que multiplicado por sí mismo, reproduzca el número propuesto.

Esta cuestion no puede resolverse sino por una operacion esencialmente distinta de las espuestas hasta aquí; y es además de grandísima importancia en la Geometría y en el Algebra.

Los *diez* primeros números *enteros*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

tienen por CUADRADOS

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100;

por consiguiente los números de la segunda série tienen por RAICES CUADRADAS los números de la primera.

A la simple inspeccion de estas dos séries de números se conoce que, entre los números *enteros* de *una* ó de *dos* cifras, solo hay *nueve* que son CUADRADOS de otros números *enteros*, y que todos los demás tienen por RAIZ CUADRADA un número *entero*, mas una *parte de la unidad.*

Así, 53, que está comprendido entre 49 y 64, tiene por RAIZ CUADRADA, 7 mas una *parte de la unidad.* Del mismo modo, 91 tiene por RAIZ CUADRADA 9 mas una *parte de la unidad;* etc.

Los números 7, 9,... se llaman las PARTES ENTERAS de las *raices cuadradas* de 53, 91, etc.

201. NÚMEROS INCONMENSURABLES.—Tratando de valuar la PARTE DE LA UNIDAD que debe añadirse á la PARTE ENTERA de la *raiz cuadrada* de un número, se va á parar á la proposicion siguiente:

Un número entero que no es el cuadrado de otro número entero, no puede tener por raiz un número fraccionario exacto.

En efecto, para que un NÚMERO FRACCIONARIO EXACTO, tal como $\frac{a}{b}$, pueda espresar la *raiz cuadrada* de un número ENTERO, sería necesario que el producto $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, ó (n.° 129) $\frac{a^2}{b^2}$, fuera igual á un número ENTERO.

Pero esto es imposible; porque supongamos (como siempre es permitido) que la fraccion $\frac{a}{b}$ sea *irreductible*, ó en otros términos, que a y b sean *primos entre sí*: a^2 y b^2 serán tambien (n.º 92) *primos entre sí*, y por consiguiente $\frac{a^2}{b^2}$ no puede ser igual á un número ENTERO.

Luego, etc.

De aquí se sigue que la *raiz cuadrada de un número* ENTERO *que no es el cuadrado de otro número entero*, no puede medirse *exactamente* por medio de la unidad; en consecuencia, se llama número INCONMENSURABLE ó IRRACIONAL, por oposicion al número que puede medirse *exactamente* por medio de la unidad y que se llama número CONMENSURABLE ó RACIONAL.

Así las *raices cuadradas* de 7, 28, 65, números de *una* ó de *dos* cifras, diferentes de los números de la série arriba puesta (n.º 200), son números INCONMENSURABLES ó IRRACIONALES.

Para *representar* esta clase de números, se *conserva*, delante de las cantidades que los originan, el signo radical $\sqrt{}$ (n.º 45), indicador de que debe estraerse la raiz.

Se escribe, pues: $\sqrt{7}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{65}$, y se dejan los números bajo esa forma.

(Tratándose de la *raiz cuadrada*, se omite el colocar dentro del signo el índice de la raiz.)

No pudiendo estraerse *exactamente* las *raices cuadradas* de los números 7, 28, 65, se dice que estos números no son CUADRADOS PERFECTOS; y las PARTES ENTERAS de sus *raices* 2, 5, 8, son las *raices de los mayores cuadrados contenidos en estos números*, ó en otros términos, las *raices cuadradas* de dichos números APROXIMADAS HASTA EN MENOS DE UNA UNIDAD.

202. El exámen atento de las dos séries de números (n.º 200) enseña tambien que la DIFERENCIA antre *dos números consecutivos* de la segunda série es tanto mas considerable, cuanto mayores son sus *raices*; y si se sacan esas DIFERENCIAS, se advierte que siguen una ley *constante*.

Así se tiene:

$$100 - 81 = 19 = 2 \text{ veces } 9 + 1$$
$$81 - 64 = 17 = 2 \text{ veces } 8 + 1$$
$$64 - 49 = 15 = 2 \text{ veces } 7 + 1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

De esta observacion se deduce la proposicion general siguiente que vamos á demostrar:

La diferencia entre los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al duplo del menor de dichos números, mas una unidad.

Sean, en efecto, a y $a+1$ dos números *enteros consecutivos;* aplicando la regla del n.° 48 y observando que el *cuadrado* de 1 es 1, tendremos

$$(a+1)^2 \text{ ó } (a+1)(a+1) = a^2 + a \times 1 + 1 \times a + 1,$$

de donde

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

espresiones que difieren de a^2 (cuadrado de a), en la cantidad $2a+1$; lo cual justifica la proposicion enunciada.

Así, la DIFERENCIA de los *cuadrados* de 348 y de 347 es igual á 2 veces 347 mas 1, ó á 695.

De donde se sigue que entre los *cuadrados* de esos dos números hay 694 números que no son *cuadrados perfectos.*

Establecidas estas nociones, pasemos á las operaciones de la estraccion de la raiz cuadrada de un número.

§ I. ESTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA DE UN NÚMERO CON MENOS DE UNA UNIDAD DE ERROR.

Estraccion de la raiz cuadrada de un número entero.

203. Como la raiz cuadrada de un *número entero* puede ser (n.° 201) un número *conmensurable* ó *inconmensurable,* nosotros nos proponemos ahora buscar *esa raiz* si el número propuesto es un cuadrado perfecto, ó la PARTE ENTERA de esa raiz, ó en otros términos, *estraer la raiz del mayor cuadrado contenido en un número entero,* ó bien tambien *estraer la raiz cuadrada* de un *número entero con menos de una unidad de error.*

Si el número dado solo tiene *una* ó *dos* cifras, su *raiz* ó la PARTE ENTERA de su *raiz* se obtiene á la simple inspeccion de las dos séries de números del n.º 200.

204. Segun esto, solo debemos considerar los números que tienen mas de dos cifras.

Comencemos por observar que la *raiz* de todo número *entero* compuesto de *mas de dos* cifras, tiene necesariamente *mas de una cifra*, y por consiguiente contiene *decenas* y *unidades*.

Ahora bien, si designamos por a y b las *decenas* y las *unidades* de la *raiz*, el número propuesto, sea el que quiera, puede representarse por la espresion $(a+b)^2$, la cual, desarrollada con arreglo al principio del n.º 48, dá por resultado

$$a^2+ab+ba+b^2 \quad \text{ó} \quad a^2+2ab+b^2;$$

de donde se sigue que:

El *cuadrado* de un número compuesto de *decenas* y *unidades* contiene *tres* partes distintas, á saber: 1.ª *el cuadrado de las decenas;* 2.ª el *doble producto de las decenas por las unidades;* 3.ª el *cuadrado de las unidades.*

205. Sentado este principio general, sirva de primer ejemplo *estraer la raiz cuadrada* de 6084:

608 4	78
49	148
118.4	8
118 4	1184
0	

Constando este número de *mas de dos* cifras, pero siendo *mas pequeño* que 10000, cuadrado de 100, su *raiz* (la palabra *raiz* se toma aquí para abreviar, tanto para espresar la *raiz exacta*, como para espresar la *parte entera* de la *raiz*), no puede tener *ni mas ni menos* de *dos* cifras, es decir, que contiene *decenas* y *unidades*.

Si pudiéramos, pues, descubrir en 6084, el cuadrado de las *decenas* de la raiz, obtendríamos fácilmente estas *decenas*; pero como el cuadrado de las *decenas* no puede dar MENOS DE *centenas*, es claro que debe hallarse *íntegro* en la parte 60 del número dado, á la izquierda de sus dos últimas cifras, parte que además puede contener *centenas* y *millares* procedentes de los *otros términos*, *términos del cuadrado*.

Ahora bien, el número 60 está comprendido entre los dos *cuadrados perfectos* 49 y 64; por consiguiente, 6000 á su vez está tambien comprendido entre 4900 y 6400, que son los cuadrados de 70 y 80; lo mismo sucede con el número propuesto 6084; luego 7 es la *cifra de las decenas* que se buscaba.

Así, la RAIZ PEDIDA consta de 7 *decenas* y de un número de *unidades* MENOR QUE 10.

Hallada ya la cifra 7 de las *decenas*, se escribe á la derecha del número dado, separándola de él por una raya vertical; despues su cuadrado 49 se resta de 60, lo cual dá 11 de resto, á cuyo lado se bajan las otras dos cifras, 84.

El resultado, 1184, de esta primera operacion contiene todavía (n.º 204);

El doble producto de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades.

Ahora bien, *decenas* multiplicadas por *unidades* no pueden dar en el producto MENOS de *decenas;* por consiguiente la última cifra 4 no puede pertenecer al *doble producto de las decenas por las unidades;* así, pues, este *doble producto* se halla contenido en la parte de la izquierda, 118, que se separa del guarismo 4 por medio de un punto.

Luego, si despues de haber DUPLICADO las *decenas*, lo cual dá 14, dividimos 118 por 14, el cociente 8 es la cifra de las *unidades*, ó una cifra *mayor* que la de las unidades.

Este cociente no puede ser *menor* que la cifra de las *unidades* porque como 118 contiene el *doble producto de las decenas*, 14, por las *unidades*, es preciso que de esa cantidad pueda restarse el producto de 14 por la cifra en cuestion; pero puede ser *mayor*, porque 118, además de aquel doble producto, puede contener tambien *decenas* procedentes del *cuadrado de las unidades*.

Para comprobar si el cociente 8 espresa las *unidades*, basta escribirle á la derecha de 14, lo cual dá 148, y despues debajo de sí mismo, multiplicando luego 148 por 8. Si 8 es en efecto la cifra de las unidades, se forman de este modo evidentemente, 1.º el *cuadrado de las unidades;* 2.º el *doble producto de las decenas por las unidades*.

Efectuada esta multiplicacion, resulta el producto 1184, número igual al resultado de la primera operacion; restándole de dicho resultado, queda 0 de resto; luego 78 es la RAIZ PEDIDA.

En efecto, de las operaciones precedentes resulta, que de 6084 se han restado sucesivamente el *cuadrado* de 7 *decenas* ó de 70, mas el *doble producto* de 70 por 8, mas finalmente el *cuadrado* de 8, es decir, las TRES partes que entran en la composicion del cuadrado de 70 + 8 ó 78; y como el *resto* es 0, se infiere que 6084 es el cuadrado de 78, y por consiguiente es (n.º 201) un CUADRADO PERFECTO.

Sirva de segundo ejemplo el número 841:

84.1	29
4	4.9
44.1	9
44 1	44 1
0	

Hallándose este número comprendido entre 100 y 10000, su raiz se compone tambien de *dos* cifras ó de *decenas* y *unidades*.

Se probaria como antes, que la raiz del mayor CUADRADO contenido en 8, parte á la izquierda de las dos cifras que desde luego se separan, es la cifra de las *decenas* de la raiz pedida.

El MAYOR CUADRADO contenido en 8 es 4; luego la raiz es 2, la cual se coloca á la derecha del número propuesto; despues se resta 4 de 8, y se obtiene el resto 4.

Bajando al lado de este resto la seccion siguiente 41, se obtiene 441, número que contiene todavía el *doble producto de las decenas por las unidades*, mas el *cuadrado de las unidades*.

Haríamos ver ahora, como se hizo en el primer ejemplo, que, si se separa la última cifra de la derecha, 1, por medio de un punto, y se divide la parte de la izquierda, 44, por 4, *duplo de las decenas*, el cociente es la cifra de las *unidades*, ó una cifra *mayor*.

Pero aquí el cociente es 11, y es evidente que no puede haber mas de 9 *unidades simples*, pues lo contrario sería suponer que la cifra hallada de las *decenas* no era la verdadera.

Debemos, pues, ensayar la cifra 9: para esto, se escribe el 9 á la derecha de 4, *duplo de las decenas*, y despues debajo de sí mismo, y se multiplica 49 por 9. Esta multiplicacion dá el producto 441, que es igual al resultado de la primera operacion: por consiguiente, 29 es la *raiz pedida*, y el número propuesto es un CUADRADO PERFECTO.

Reflexionando sobre el procedimiento que acabamos de seguir para *estraer la raiz cuadrada* de un número de *tres* ó *cuatro* cifras, se ve que consta de *dos* operaciones principales:

La PRIMERA consiste, despues de haber separado las dos últimas cifras á la derecha, *en estraer la raiz del mayor cuadrado contenido en la parte de la izquierda, y en restar de ella dicho cuadrado.*

Esta raiz espresa necesariamente las *decenas* de la raiz total; porque el cuadrado de esta raiz seguida de un *cero*, y el cuadrado de la misma raiz *aumentada en una unidad* y seguida tambien de un *cero* comprenden evidentemente al número propuesto.

La SEGUNDA operacion consiste, despues de haber bajado las dos cifras á la derecha del resto, y separado por medio de un punto la última de ellas, consiste, digo, *en dividir la parte de la izquierda por el duplo de la cifra hallada.*

El cociente es la cifra de las *unidades*, ó una cifra *mayor;*

Y para asegurarnos si es la cifra buscada, se forma el *cuadrado* de dicho cociente, y el producto del *duplo de las decenas* por el mismo cociente. Si la suma que se obtiene es *igual* ó *inferior* al resultado de la PRIMERA operacion, se tiene seguridad de que el cociente espresa las *unidades*, y entonces se escribe á la *derecha* de las *decenas;* en el caso contrario, se *disminuye* el cociente en *una* ó *mas* unidades.

Advertencia. No es posible poner desde luego en evidencia el *cuadrado* de las unidades: porque este cuadrado dá en general (n.° 200) *decenas* que se combinan con las que proceden del doble producto de las *decenas* por las *unidades;* de modo que es imposible determinar de una manera precisa en qué parte del número propuesto se encuentra el *cuadrado de las unidades*.

Sirva de tercer ejemplo el número 3719:

$$\begin{array}{r|l} 371\,9 & 60 \\ \underline{36} & \overline{12} \\ 11.9 & \end{array}$$

La raiz del *mayor cuadrado* contenido en 37 es 6, cifra que se escribe á la derecha del número dado; se resta el cuadrado de 6, ó 36, de 37, lo cual dá 1, á cuyo lado se baja la seccion 19, separando por medio de un punto la última cifra de la derecha.

Se *duplica* la cifra 6 hallada para la raiz, despues se tendria que dividir por 12 la parte que está á la izquierda de la última cifra; pero como aquí el dividendo parcial 11 es MENOR que el divisor, debe concluirse que la raiz no tiene *unidades simples*, puesto que, si solo tuviera *una*, podria restarse de 119 el producto de 121 por 1; lo cual es imposible.

Se coloca, pues, un 0 á la derecha de las *seis decenas*, y tendremos que la *raiz buscada* es igual á 60, quedando un resíduo igual á 119.

De aquí se sigue que el número propuesto no es un CUADRADO PERFECTO, y que 60 es la *raiz* del MAYOR CUADRADO *contenido en dicho número*, ó en otros términos, la *raiz* del mismo número CON MENOS DE UNA UNIDAD DE ERROR.

El *resíduo* es lo que se deberia *rebajar* del número propuesto, para que el número resultante fuera CUADRADO PERFECTO; es dicho resto y *debe ser* en efecto (n.° 202) MENOR QUE *el duplo de* 60 *mas* 1.

Veremos mas adelante cómo puede valuarse *aproximadamente* la *parte de la unidad* que debe añadirse á la *parte entera* de la raiz.

206. Pasemos á la estraccion de la raiz cuadrada de un número de *mas de cuatro* cifras.

Sea 56821444 el número propuesto:

56.82.14.44	7538		
49	145	1503	15068
78.2	5	3	8
72 5	725	4509	120544
5 71.4			
4 50 9			
1 20 54.4			
1 20 54 4			
0			

Como el número propuesto es superior á 10000, su raiz debe ser *mayor que* 100, es decir, debe tener *mas de dos* cifras.

Pero, cualquiera que sea su número, puede siempre considerarse la raiz como compuesta de *dos* partes distintas: *decenas y unidades simples.* (Por ejemplo, 5367 es igual á 5360 ó 536 *decenas*, mas 7 *unidades*).

Desde luego, el *cuadrado de esta raiz*, ó sea el número propuesto, se compone de *tres* partes, á saber:

El *cuadrado de las decenas*, mas el *doble producto de las decenas por las unidades*, mas el *cuadrado de las unidades.*

Ahora bien, el cuadrado de las *decenas* dá por lo menos *centenas;* luego la última seccion, 44, no puede formar parte de él; luego dicho cuadrado deberá hallarse en lo que queda á la *izquierda.*

Ahora digo que si se busca la raiz del mayor cuadrado contenido en 568214, considerando á este número como si espresára *unidades simples*, se tendrá el NÚMERO TOTAL de las *decenas* de la raiz pedida.

En efecto, sea a la raiz del *mayor cuadrado* contenido en 568214; es claro por el pronto que la raiz pedida tiene á lo menos un número a de *decenas*, puesto que $a^2 \times 100$ puede restarse de 56821400, y con mayor razon, de 56821444.

Además, la raiz buscada no podria tener $(a+1)$ *decenas;* porque siendo $(a+1)^2$ *mayor que* 568214, $(a+1)^2 \times 100$ *escede* á 56821400 al menos en una *centena*, y por consiguiente es *mayor que* 56821444.

Luego finalmente, la raiz pedida se compone de a *decenas* mas cierto número de *unidades menor* que 10; y queda la cuestion reducida á estraer la raiz cuadrada del número 568214, considerado por un momento como espresando *unidades simples.*

Razonando sobre este número como sobre el número propuesto, vendremos á parar, para obtener las *decenas* de su raiz, á estraer la raiz del *mayor cuadrado* contenido en la parte que está á la izquierda de 14, es decir, en 5682; y para obtener las *decenas* de esta *nueva raiz*, es necesario tambien hacer *abstraccion* de las dos últimas cifras 82, y estraer la raiz del *mayor cuadrado* contenido en 56.

Estraigamos, pues, la raiz de 56; tendremos 7; escribimos esta cifra á la *derecha* del número propuesto, separándola por una raya; restamos de 56, el cuadrado de 7 ó sea 49, lo cual dá 7 de resto, á cuyo lado se baja la seccion siguiente 82 (porque ahora es necesario determinar la segunda cifra de la raiz del *mayor cuadrado* contenido en 5682). Separando la última cifra á la *derecha* de 782, y dividiendo despues 78 por 14, *duplo* de la raiz hallada, se obtiene por cociente 5, que se escribe á la derecha de 14, lo cual dá 145; se escribe tambien 5 debajo de 145; se multiplica 145 por 5, y el producto 725 se resta de 782. Las dos cifras halladas, 75, representan ahora la *coleccion* de las decenas de la raiz del número 568214.

Para obtener las *unidades*, se baja al lado del resto 57, la seccion 14, lo cual dá el número 5714, cuya última cifra se separa. Dividiendo 571 por 150, *duplo* de la raiz hallada, se obtiene el cociente 3 que se escribe á la *derecha* de 150, lo cual dá 1503; se escribe tambien el 3 debajo de 1503, se multiplica 1503 por 3, y el producto 4509 se resta de 5714; 753 representa entonces el número total de las *decenas* de la raiz pedida.

Finalmente, para obtener la cifra de las unidades, se baja al lado del resto 1205, la última seccion 44; despues, haciendo *abstraccion* de la última cifra, se divide la parte de la *izquierda* 12054 por 1506, *duplo* de la raiz hallada: se obtiene el cociente 8, que se escribe á la *derecha* de 1506, lo cual dá 15068. Multiplicando 15068 por 8, y restando al producto de 120544, se obtiene *cero* por resto.

Luego 7538 es la RAIZ PEDIDA.

Para *comprobar* esta operacion, basta multiplicar 7538 por sí mismo, segun las reglas de la multiplicacion.

207. REGLA GENERAL.—Si se han comprendido bien las diferentes partes de la operacion que acaba de esplicarse deduciremos de ellas con mucha facilidad la regla siguiente.

Divídase el número dado en secciones de á dos cifras, empezando por la derecha; la última seccion de la izquierda PUEDE *tener* UNA SOLA *cifra; trácense á la derecha del número dos líneas, una vertical y otra horizontal, dispuestas como para la operacion de la* DIVISION;

Hecho esto, *para obtener la* PRIMERA CIFRA *de la raiz, estráigase la raiz del mayor cuadrado contenido en la primera seccion de la izquierda;*

Escríbase esta PRIMERA CIFRA *á la derecha de la raya vertical, fórmese su cuadrado, réstese de la primera seccion de la izquierda y bájese á la derecha del resto la seccion siguiente;*

A fin de obtener la SEGUNDA CIFRA *de la raiz, sepárese por medio de un punto la última cifra de la seccion bajada; fór-*

mese el duplo de la primera cifra de la raiz, y escríbase debajo de la raya horizontal; divídase por dicho duplo la parte que queda á la izquierda de la cifra separada, teniendo cuidado de rebajar el cociente á 9 si por acaso resultára mayor; escríbase este cociente á la derecha del número formado por el duplo de la primera cifra de la raiz; multiplíquese el número resultante por el mismo cociente; ensáyese á ver si es posible restar el producto obtenido, del primer resto seguido de la segunda seccion, y si esta sustraccion no es posible, disminúyase al cociente el número de unidades necesario para que pueda efectuarse.

Escríbase la SEGUNDA CIFRA *de la raiz, así encontrada, á la derecha de la primera, y bájese á la derecha del resto de la última sustraccion la seccion tercera;*

Para obtener la TERCERA CIFRA *de la raiz, hágase absolutamente la misma série de operaciones que para obtener la* SEGUNDA, *separando por medio de un punto la última cifra de la tercera seccion bajada, dividiendo la parte que queda á la izquierda, por el duplo del número que forman las dos primeras cifras de la raiz, y operando sobre este cociente como sobre el anterior;*

Hágase lo mismo para obtener las cifras siguientes de la raiz, las cuales se irán escribiendo sucesivamente cada una á la derecha de la precedente, hasta que se hayan bajado todas las secciones del número dado.

El número propuesto es ó no es *cuadrado perfecto*, segun que el *residuo final* de estas operaciones es *cero* ó es diferente de cero.

208. OBSERVACION.— 1.ª De la naturaleza misma del procedimiento resulta que el *número de las cifras de la raiz es igual al número de las secciones hechas en el número dado;* lo cual además puede demostrárse directamente.

2.ª Se ha observado ya (n.º 205, 3$^{er.}$ ejemplo) que cuando el número dado no es *cuadrado perfecto*, el *resto* debe ser *menor* que el *duplo de la raiz mas una unidad.* Segun el mismo principio, el *resto de cada operacion parcial* debe *á lo mas* ser igual al *duplo* del número formado por las cifras de la raiz halladas hasta entonces, porque este número mismo, hablando con propiedad, es la *raiz* de la *parte* del número dado, que le corresponde, considerada como espresando unidades simples.

De este modo puede conocerse, en el curso de la operacion, si una cifra hallada para la raiz está *mal determinada* y debe *aumentarse* en una ó mas unidades.

3.ª Es evidente que, para hacer la *prueba* de la operacion, es necesario multiplicar por sí misma la raiz hallada, y si hay algun *resíduo*, añadirle al producto, para reproducir el número dado; todo lo cual es consecuencia de la definicion misma de la raiz cuadrada.

209. OTRA OBSERVACION. — Puede suceder, en la aplicacion del procedimiento á ejemplos particulares, que despues de haber bajado una seccion y separado por medio de un punto la última cifra de su derecha; se reconozca que la parte restante á la izquierda es *menor* que el *duplo* del número formado por las cifras halladas de la raiz. Esto es señal segura de que la *raiz pedida* no tiene unidades del órden siguiente al de la última cifra obtenida; se pone, pues, entónces un 0 en la raiz, á fin de conservar á las cifras precedentes su valor relativo, y despues se baja la seccion siguiente, continuando la operacion por la regla general.

De este modo se encuentra:

$$\sqrt{17698849} = 4207, \textit{ exactamente.}$$

210. *Manera de obtener la raiz con menos de* MEDIA UNIDAD *de error.* — Hemos visto que, cuando un número *entero* no es *cuadrado perfecto*, la aplicacion del procedimiento dá la raiz *con menos de una unidad de error*. Pero de la inspeccion misma del *resto* comparado con la *raiz*, se deduce el medio de obtener siempre esta raiz *con menos de* MEDIA UNIDAD *de error*, sin tener necesidad para ello de prolongar mas la operacion.

Sea, por ejemplo, estraer las *raices cuadradas* de los números

$$697685 \quad \text{y} \quad 18308009;$$

se obtiene por resultados,

835 con el *resto* 460;

4278 con el *resto* 6725.

Estos restos son, el uno *menor*, y el otro *mayor* que las PARTES ENTERAS de las raices correspondientes.

Digo pues que, en el primer caso la *raiz obtenida*, 835, espresa (EN MENOS) la *raiz* buscada, FALTÁNDOLE MENOS DE MEDIA UNIDAD, y que en el segundo, la *raiz obtenida mas* 1, ó 4279, dá EN MAS *la misma* aproximacion.

En efecto, sean a y $a+\frac{1}{2}$, dos números que difieren entre sí en MEDIA UNIDAD.

Si se desarrolla el cuadrado $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$, segun el principio del n.° 48 y las reglas dadas para las operaciones con los quebrados, tendremos

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=a^2+2a.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=a^2+a+\frac{1}{4},$$

espresion que prueba que la *diferencia* entre el *cuadrado de un número* y el *cuadrado de otro número que* ESCEDE *al primero en* MEDIA *unidad* es *igual á dicho primer número* AUMENTADO *en* $\frac{1}{4}$. De aquí se sigue, que si a representa la PARTE ENTERA de la *raiz* de un número, y r el *resíduo* de la operacion, la RAIZ TOTAL, será *inferior* ó *superior* á $a+\frac{1}{2}$, segun que r sea *inferior* ó *superior* á $a+\frac{1}{4}$, ó simplemente á a, puesto que a y r son necesariamente números *enteros*. Esta *raiz* es además necesariamente *menor* que $a+1$.

Luego, los números a ó $a+1$, segun los casos, difieren de la *raiz total*, uno EN MENOS, y otro EN MAS; pero siempre en una cantidad menor que MEDIA UNIDAD.

L. C. D. D.

Estraccion de la raiz cuadrada de un número fraccionario con menos de una unidad ó media unidad de error.

211. Cuando ha de estraerse la raiz cuadrada de un NÚMERO FRACCIONARIO compuesto de un *entero* y de un *quebrado*, y se tiene solo necesidad de la parte entera de dicha raiz, ó en otros términos, cuando solo se quiere estraer la raiz CON

MENOS DE UNA UNIDAD, ó de MEDIA UNIDAD DE ERROR, *no hay necesidad* de hacer caso de la fraccion.

En efecto, si el ENTERO del número *misto* dado no es un *cuadrado perfecto*, diferenciándose necesariamente *en menos de una unidad* los dos *cuadrados consecutivos* que le comprenden (n.° 202), dicho número *misto* está tambien comprendido entre aquellos *dos cuadrados*, y por consiguiente su *raiz* está comprendida entre las *de los dos cuadrados*, ó en otros términos, tiene la MISMA PARTE ENTERA que la *raiz del* ENTERO.

Así, $47\,\frac{11}{15}$ se halla comprendido entre los *dos cuadrados consecutivos* 36 y 49; y por lo tanto su *raiz* está comprendida entre 6 y 7, *raices de dichos cuadrados*, ó bien, tiene por PARTE ENTERA 6, lo mismo que la *raiz del* ENTERO 47.

Si el ENTERO fuera un *cuadrado perfecto*, el número *total* tendria por PARTE ENTERA de su *raiz* la *raiz* misma de dicho ENTERO, pues estaria comprendido entre este cuadrado y el cuadrado inmediatamente superior.

Caractéres particulares de un número entero que no es cuadrado perfecto.

212. Muchas veces se reconoce, á la simple inspeccion de un número entero, *que no es cuadrado perfecto;* y esto puede ser útil en la práctica de la *estraccion de la raiz cuadrada.* Hé aquí los signos principales:

1.° *Ningun número terminado en* 2, 3, 7, 8, *puede ser cuadrado perfecto.*

Porque, segun la composicion del cuadrado de un número que tiene *mas de una cifra* (n.° 204), *las unidades simples* de dicho cuadrado no pueden evidentemente provenir mas que del *cuadrado de las unidades* de la raiz; y la tabla de los cuadrados de los *nueve* primeros números (n.° 200) manifiesta que ninguno de ellos termina en 2, 3, 7, 8.

2.° *Ningun número terminado en el guarismo* 5 *puede ser cuadrado perfecto, á no ser que la cifra de sus decenas sea* 2.

Tambien esto es una consecuencia de la composicion del cuadrado de un número de *mas de una* cifra.

En efecto, las dos primeras cifras del número propuesto no pueden ser producidas mas que por el cuadrado de las *unidades simples*, pues, siendo 5 la cifra de *estas unidades*, el producto de las *decenas* por el *duplo* de 5, ó por 10, espresa necesariamente *centenas*. Pero el cuadrado de 5 es 25; luego el número propuesto debe *terminar* en 25 para poder ser cuadrado perfecto.

3.° *Un número terminado en un* SOLO CERO *ó en un número* IMPAR *cualquiera de ceros, no puede ser cuadrado perfecto.*

Porque, si la raiz fuera *exacta*, no podria menos de ser un número terminado en *uno ó varios* ceros; y su *cuadrado*, ó sea el producto de esta raiz por sí misma deberia (n.° 200) terminarse en *dos veces* tantos ceros como tuviera la raiz, es decir, en un número *par* de ceros; lo cual sería contrario al enunciado de la proposicion.

4.° *Si un número es divisible por un* FACTOR PRIMO d, *no puede ser cuadrado perfecto, si no es divisible por el cuadrado* d^2, *de dicho factor.*

En efecto, la *raiz*, si pudiera ser *exacta*, deberia contener al factor d; y multiplicándola por sí misma, se obtendria un producto, que contendria necesariamente al factor d^2; luego, etc.

Así, por ejemplo, todo número *par* debe ser *divisible* por 4, para que pueda ser *cuadrado perfecto.*

Del mismo modo, todo número *divisible* por 3, debe serlo tambien por 9, para ser *cuadrado perfecto.*

Advertencia. Estos diferentes caractéres no son, hablando con propiedad, mas que signos *negativos;* pero muchas veces pueden servir para evitar cálculos inútiles.

Aplicacion de la teoria de la raiz cuadrada á la investigacion de los factores primos de un número.

213. La estraccion de la raiz cuadrada de un número entero *en menos de una unidad* proporciona el medio de obtener una espresion distinta de la del n.° 100, como *límite* de los *ensayos* para la investigacion de los *divisores primos* de un número.

Es fácil ver en efecto, que el menor número *primo* que, tomado por divisor de una division cuyo dividendo es el número propuesto, dá un cociente fraccionario menor que dicho divisor, es precisamente el *número primo inmediatamente superior* á la raiz del mayor cuadrado contenido en el número dado.

La PARTE ENTERA de la *raiz cuadrada* de un número es por consiguiente el *límite de los ensayos* para la investigacion de sus *factores primos.*

Se llega *directamente* á esta espresion por una demostracion enteramente análoga á la del n.º 100; ya nos ocuparemos otra vez de ella en el capítulo 8.º

§ II.—ESTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA POR APROXIMACION, DE UN NÚMERO ENTERO Ó FRACCIONARIO.

Estraccion de la raiz cuadrada con un grado de aproximacion determinado.

Cuando el número cuya raiz cuadrada se pide, no es CUADRADO PERFECTO, siempre es posible obtener un valor de esta raiz *tan aproximado como se quiera.*

214. VALUACION APROXIMADA DE LA RAIZ CUADRADA EN UNIDADES DE UNA ESPECIE CUALQUIERA.—Dado un número cualquiera, determinar su raiz cuadrada *en menos de una fraccion* $\frac{1}{n}$, siendo n un número *entero;* ó en otros términos, espresar la raiz cuadrada de un número por *una fraccion que tenga el número* n *por denominador y que solo difiera de la raiz total en una cantidad* MENOR *que* $\frac{1}{n}$.

[Esta cuestion es análoga á la que se trató en el n.º 135 relativa á la valuacion aproximada de las *fracciones.*]

Sea a el número dado *(entero ó fraccionario);* siempre puede ponerse (n.º 135) bajo la forma $\frac{a \times n^2}{n^2}$, y si despues de haber efectuado el producto espresado por $a \times n^2$, se *determina el número entero* que contiene dicho producto; y en seguida *se busca la* PARTE ENTERA a' de la *raiz cuadrada* del número *entero*, haciendo *abstraccion* de la *fraccion* que puede acompañarle (n.º 211), digo que $\frac{a'}{n}$ será la *raiz pedida.*

En efecto, de estas diversas operaciones resulta, que $a \times n^2$ está comprendido entre a'^2 y $(a'+1)^2$; luego tambien $\frac{a \times n^2}{n^2}$ está comprendido entre $\frac{a'^2}{n^2}$ y $\frac{(a'+1)^2}{n^2}$; por consiguiente, la *raiz cuadrada* de $\frac{a \times n^2}{n^2}$, ó de a, está tambien comprendida entre los dos números

$$\frac{a'}{n} \text{ y } \frac{a'+1}{n},$$

cantidades cuya diferencia es igual á $\frac{1}{n}$.

Así pues, $\frac{a'}{n}$ y $\frac{a'+1}{n}$ no difieren de $\sqrt{a}$ sino en una cantidad *menor* que $\frac{1}{n}$, pudiendo ser n un número *tan grande como se quiera*.

215. La *aproximacion* que proporciona una ú otra de estas dos fracciones podrá tambien (n.° 210) ser espresada por $\frac{1}{2n}$, sea en *menos*, sea en *mas*, segun que el resíduo de la operacion ejecutada con $\sqrt{a \times n^2}$ sea *inferior* ó *superior* á la PARTE ENTERA obtenida en la raiz.

EJEMPLO.— *Se pide la raiz cuadrada del número*

$$379\,\frac{43}{59}, \text{ en menos de } \frac{1}{40}\ (^*).$$

Este número puede ponerse bajo la forma

$$\frac{\left(379\,\frac{43}{59}\right) \times (40)^2}{(40)^2} \text{ ó } \frac{\frac{22404}{59} \times 1600}{(40)^2}.$$

Efectuando la multiplicacion de 22404 por 1600, lo cual

(*) Usamos esta espresion abreviada que equivale á decir que la raiz buscada ha de diferenciarse de la verdadera en menos de $\frac{1}{40}$.

(N. del T.)

dá 35846400, y despues la division de este producto por 59, se obtiene el cociente

$$607566\,\frac{6}{59}.$$

La PARTE ENTERA de la *raiz cuadrada* de este último número, hecha *abstraccion* del quebrado $\frac{6}{59}$, es

779 con el *residuo* 725.

Luego $\frac{779}{40}$, ó $19\,\frac{19}{40}$ es el valor de $\sqrt{379\,\frac{43}{59}}$ *en menos de* $\frac{1}{80}$ (n.° 210): porque el resíduo 725 es *menor* que 779, PARTE ENTERA de $\sqrt{607566}$.

Del mismo modo se hallaria que

$\sqrt{\frac{13}{19}}$ aproximada hasta $\frac{1}{15}$ es igual á $\frac{12}{15}$ diferenciándose de la verdadera en menos de $\frac{1}{30}$ *(en menos)*;

$\sqrt{3\,\frac{41}{72}}$ aproximada hasta $\frac{1}{60}$ es igual á $\frac{113}{60}$, ó $1\,\frac{53}{60}$, diferenciándose de la verdadera raiz en menos de $\frac{1}{120}$ *(en menos)*.

216. VALUACION APROXIMADA DE LA RAIZ CUADRADA EN *decimales*.—El número cuya raiz cuadrada se quiere estraer puede ser un *número entero*, ó una *fraccion decimal* ó un *quebrado comun;* deberemos, pues, distinguir tres casos, que esplicarémos sucesivamente.

PRIMER CASO.—Sea *valuar* $\sqrt{4759}$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

Conforme á la regla del número precedente, es necesario *multiplicar* 4759 por $(1000)^2$, ó 1000000, lo cual equivale á escribir *seis* ceros á su derecha, y despues es necesario *estraer*, en menos de una unidad, la *raiz cuadrada* del número resultante.

Pero si se observa que, segun la regla general del n.° 207, debe la operacion comenzarse repartiendo el número en secciones de á *dos* cifras, comenzando por la *derecha*, se comprenderá que por el pronto es inútil al colocar los *seis* ceros á continuacion de 4759, y que bastará ir bajando una seccion de *dos* ceros á la derecha del resto de cada operacion parcial.

Esto supuesto, hé aquí cómo debe procederse:

47.6 9	68985			
11 5.9	12.8	136.9	1378.8	1379.65
1 3 50 0	8	9	8	5
1 17 90.0				
7 59 60.0				
69 77 5				

Despues de haber estraido, con arreglo al procedimiento ordinario la raiz del *mayor cuadrado* contenido en 4759, lo cual dá el *resto* 135, se escriben *dos* ceros á su derecha, separando el *último* de ellos, y operando despues en la forma ordinaria.

Siendo 1179 el resto de esta nueva operacion, se le añaden tambien *dos* ceros, el último de los cuales se separa, operando tambien en la misma forma que antes.

Obtenido el resto 7596, se escriben á su derecha los *dos* últimos ceros, y hecha lo operacion se encuentra 68985, que será la *parte entera* de la raiz.

Ahora es necesario dividir esta *parte entera* por 1000, ó separar *tres cifras decimales* á su derecha, con lo cual por último se encuentra

68,985 ó mas bien 68,986,

que será la RAIZ PEDIDA, diferenciándose de la verdadera *en menos de media milésima*, puesto que el resto 69775 ES MAYOR que la *parte entera de la raiz* (véase el n.° 210).

Advertencia. Segun este modo de proceder, que consiste en ir escribiendo las secciones de *dos* ceros á medida que se van necesitando, podria omitirse el fijar de antemano el grado de *aproximacion*; cada seccion de *dos* ceros, que se coloca á la derecha del resto de una operacion parcial, suministra una nueva aproximacion.

Podria tambien suceder que el número dado fuera *cuadrado perfecto*, lo cual no se conocería sino despues de haber aplicado la regla ordinaria de la estraccion de raices; y entonces serían enteramente inútiles los ceros que se hubieran escrito de antemano.

217. REGLA GENERAL.—Para valuar en decimales la raiz cuadrada de un número *entero*, *concíbanse escritos á la derecha del número* DOS VECES TANTOS *ceros como cifras decimales debe tener la raiz; estráigase, en menos de una unidad, la raiz cuadrada del número resultante, teniendo cuidado de colocar las* SECCIONES DE Á DOS *ceros á la derecha del número propuesto, si fuere necesario, ó de los restos sucesivos; y despues finalmente, sepárese con una coma á la derecha de la raiz obtenida, el número pedido de cifras decimales.*

Siguiendo esta regla, se hallará,

$\sqrt{2} = 1{,}4142136$, aproximada hasta *media diezmillonésima (en mas)*;

$\sqrt{7} = 2{,}64575$, aproximada hasta media *cienmilésima (en menos)*;

$\sqrt{227} = 15{,}0665$, aproximada hasta *media diezmilésima (en menos)*;

$\sqrt{98437} = 313{,}747$, aproximada hasta *media milésima (en mas)*.

218. SEGUNDO CASO.—La regla para la estraccion de la raiz cuadrada de *una fraccion decimal* es consecuencia inmediata de la regla precedente.

Comiéncese por hacer PAR *el número de cifras decimales*, si no lo es, lo cual se hace, sin alterar (n.° 162) el valor del número dado, *añadiendo un cero á su derecha;* esto se hace, á fin de que su denominador siendo entonces 100, 10000, 1000000,..., pueda ponerse bajo la forma

$$(10)^2,\quad (100)^2,\quad (1000)^2,\ldots;$$

hágase en seguida *abstraccion de la coma*, y *opérese* siguiendo la regla del número precedente.

Tomemos por ejemplo el número 7,14056. Este número equivale á 7,140560.

La *parte entera* de la raiz cuadrada de 7140560 es 2672; luego la raiz pedida es 2,672 en menos de una milésima.

Aquí el número de cifras decimales de la raiz está indicado por el número de decimales que tenia el número propuesto.

Si se quisiera una aproximacion mayor, bastaria (n.º 216) escribir á la derecha del resto de la operacion ya ejecutado, una seccion de *dos* ceros, despues á la derecha del resto de la nueva operacion otra seccion de *dos* ceros; y así sucesivamente.

Por este medio se obtendria que la raiz pedida, aproximada á menos de *media cienmilésima*, es 2,67218.

Algunas veces por el contrario el número de cifras decimales del número dado es *superior al duplo* del número de decimales que se piden en la raiz.

Entonces deben suprimirse, á la derecha del número, las cifras sobrantes del *duplo*, operando en seguida con la parte que queda á la izquierda de las cifras suprimidas.

Esto es consecuencia necesaria de que la cifra de las *décimas* de la raiz debe corresponder á las *dos* primeras cifras de la derecha de la coma en el número propuesto; la cifra de las *centésimas* á las *dos* cifras siguientes; y así de las demás.

Propongámonos hallar la raiz cuadrada de 0,27934 aproximada hasta *centésimas*.

Suprimiendo el guarismo 4, tenemos 0,2793, cuya raiz cuadrada aproximada hasta centésimas es 0,52.

La cifra siguiente de la raiz sería suministrada por la seccion 40 *millonésimas*, etc.

219. Tercer caso.— La operacion que debe hacerse para valuar en *decimales* la raiz cuadrada de un *quebrado comun*, se deduce de las dos precedentes:

Comiéncese por convertir la fraccion ordinaria en *fraccion decimal* (n.º 171) prolongando la operacion hasta obtener *dos veces tantas* cifras decimales como quieran tenerse en la raiz; despues *se opera* con la fraccion resultante en la forma antes esplicada.

Así

$$\sqrt{23+\frac{13}{15}}=\sqrt{23,866666}=4,885,\text{ en menos de }0,001;$$

del mismo modo

$$\sqrt{\frac{14}{19}}=\sqrt{0,73684210}=0,8568,\text{ en menos de }0,0001.$$

Hé aquí nuevas aplicaciones de la valuacion de las raices cuadradas en fracciones decimales:

$$\sqrt{31,027}=5,570,\text{ en menos de }0,001;$$

$$\sqrt{0,01001}=0,10004,\text{ en menos de }0,00001;$$

$$\sqrt{2\frac{29}{31}}=1,967,\text{ en menos de }0,001;$$

$$\sqrt{\frac{11}{14}}=0,856,\text{ en menos de }0,001.$$

Advertencia. El desarrollo en decimales de la raiz cuadrada de un número que no es *cuadrado perfecto*, conduce siempre á una *série infinita* de cifras decimales, de donde al pronto parece poderse inferir que la fraccion decimal deberia concluir por hacerse *periódica* (n.º 174); pero nunca sucederá así; porque, si eso pudiera ser, como toda *fraccion periódica*, es equivalente (n.os 176 y 178) á una *fraccion ordinaria*, resultaria que un número, *inconmensurable* por su naturaleza, sería igual á un número *conmensurable;* lo cual implica contradiccion.

Consideraciones sobre la estraccion de la raiz cuadrada de un número fraccionario.

Hasta aquí hemos espuesto los medios de *valuar* las raices cuadradas de los números, bien sea *exactamente,* si es posible, bien sea *aproximadamente*, en *unidades de una especie determinada.*

Pero, cuando se trata de estraer la raiz cuadrada de una *fraccion* en particular, ocurre muchas veces que no se fija de antemano el *grado de aproximacion*, en cuyo caso hay necesidad de establecer otras reglas.

220. Del procedimiento indicado en el n.° 129 para *multiplicar* un quebrado por otro, resulta que *el cuadrado de una fraccion*, que no es mas que el producto de la fraccion por si misma, *es igual á otra fraccion* cuyos términos son respectivamente *los cuadrados de los términos de la fraccion propuesta.*

Así,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25},\quad \left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{49}{144},\quad \left(\frac{17}{6}\right)^2=\frac{289}{36}$$

y en general

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}.$$

Luego recíprocamente

$$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5},\quad \sqrt{\frac{49}{144}}=\frac{7}{12},\quad \sqrt{\frac{289}{36}}=\frac{17}{6},\quad \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b}.$$

De aquí se concluye que, para estraer la raiz cuadrada de un *quebrado* cuyos términos son CUADRADOS PERFECTOS, es necesario *estraer la raiz cuadrada de cada uno de los términos, formando* despues *una nueva fraccion que tenga por* NUMERADOR *la primera raiz, y por* DENOMINADOR *la segunda.*

Además de la definicion misma de la multiplicacion se deduce tambien, que el *cuadrado* de una FRACCION PROPIAMENTE DICHA es siempre *menor que su raiz*, puesto que es *una parte* de la fraccion marcada por la fraccion misma;

Luego recíprocamente, *la raiz cuadrada* de una FRACCION PROPIAMENTE DICHA es *mayor que su cuadrado.*

Así, por ejemplo,

$$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}=\frac{15}{25},\ \text{número } \textit{mayor que } \frac{9}{25},$$

$$\sqrt{\frac{49}{144}}=\frac{7}{12}=\frac{84}{144},\ \text{número } \textit{mayor que } \frac{49}{144};$$

$$\sqrt{0{,}36}=0{,}6=0{,}60\ \text{número } \textit{mayor que } 0{,}36.$$

221. Pero, por lo comun sucede que los términos de la fraccion no son cuadrados perfectos; y entonces hay que considerar dos casos principales, segun que el denominador *es* ó *no es* CUADRADO PERFECTO.

Examinemos sucesivamente cada uno de estos casos.

Primeramente. — SOLO *el denominador es cuadrado.*

Sea la fraccion $\frac{53}{144}$.

Convengamos por el momento en aplicar á esta fraccion la regla antes establecida para el caso de ser cuadrados perfectos los dos términos.

Tenemos $\sqrt{53}=7$, *en menos de una unidad*, y $\sqrt{144}=12$; lo cual dá la fraccion $\frac{7}{12}$; pudiéndose probar fácilmente, como en el n.° 214, que $\sqrt{53}$ está comprendida entre $\frac{7}{12}$ y $\frac{8}{12}$; es decir, que cada una de estas fracciones espresa la raiz pedida *en menos de* $\frac{1}{12}$, la primera por *defecto* y la segunda por *esceso*. Esta puede reducirse á $\frac{2}{3}$, quebrado del cual podemos formarnos idea muy clara.

Sea ahora el número misto $12\frac{253}{400}$, que se reduce al fraccionario $\frac{5053}{400}$. Tendremos

$$\sqrt{5053}=71, \textit{ en menos de una unidad;}$$
$$\sqrt{400}=20;$$

lo cual dá

$$\sqrt{12\frac{253}{400}}=\frac{71}{30}=3\frac{11}{20}, \text{ en menos de } \frac{1}{20}.$$

REGLA GENERAL para el caso en que el DENOMINADOR es un CUADRADO PERFECTO:

Estráigase la PARTE ENTERA *de la raiz cuadrada del numerador, y la raiz exacta del denominador;* y despues *fórmese una nueva fraccion, que tenga por numerador la primera raiz y por denominador la segunda.*

Advertencia. —Muchas veces en la práctica no se hace mas que indicar la estraccion de la raiz cuadrada del numerador, y entonces se tiene, por ejemplo,

$$\sqrt{\frac{a}{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$$

dejando para mas tarde el efectuar la operacion indicada en el numerador.

222. EN SEGUNDO LUGAR. —*El denominador no es cuadrado perfecto*, siendo como quiera el numerador.

Este caso puede reducirse al precedente por medio de una simple transformacion que consiste en *multiplicar por el denominador los dos términos de la fraccion.*

Sea $\frac{19}{23}$ el quebrado propuesto. Tendremos

$$\frac{19}{23}=\frac{19\times 23}{(23)^2};$$

de donde

$$\sqrt{\frac{19}{23}}=\frac{\sqrt{437}}{23}=\frac{20}{23}, \text{ en menos de } \frac{1}{23};$$

del mismo modo

$$\sqrt{\frac{25}{48}}=\sqrt{\frac{25\times 48}{(48)^2}}=\frac{\sqrt{1200}}{48}=\frac{34}{48}=\frac{17}{24}.$$

Esta última fraccion que solo difiere de $\frac{18}{24}$ ó $\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{24}$, espresa la *raiz*, diferenciándose de la verdadera *en menos* de $\frac{1}{48}$.

223. La trasformacion que acabamos de indicar, es algunas veces susceptible de una *modificacion*.

Por ejemplo, $\frac{25}{48}$ puede ponerse bajo la forma $\frac{25}{16\times 3}$, fraccion cuyo denominador contiene el factor 16, que es CUADRADO PERFECTO; por consiguiente es claro que multiplicando los dos términos solamente por 3, haremos CUADRADO PERFECTO *al denominador*.

Así resulta

$$\frac{25}{48}=\frac{25\times 3}{16\times 9}=\frac{75}{144};$$

de donde

$$\sqrt{\frac{25}{48}}=\frac{\sqrt{75}}{12}=\frac{8}{12} \text{ ó } \frac{9}{12};$$

luego $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$, ó bien $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, espresan la raiz pedida aproximada hasta $\frac{1}{12}$, la primera *en menos*, y la segunda *en mas*.

Sea ahora la fraccion $\frac{2321}{4320}$.

El denominador, descompuesto en sus factores primos, equivale á

$$2^5\times 3^3\times 5, \text{ ó } 2^4\times 3^2\times 2\times 3\times 5;$$

y si se multiplican los dos términos de la fraccion por $2\times 3\times 5$, ó 30, tomará la forma siguiente:

$$\frac{2321\times 30}{2^6\times 3^4\times 5^2}, \text{ ó } \frac{2321\times 30}{(2^3\times 3^2\times 5)^2} \text{ ó } \frac{69630}{(360)^2}.$$

Luego

$$\sqrt{\frac{2321}{4320}}=\frac{\sqrt{69630}}{360}=\frac{263}{360},$$

en menos de $\frac{1}{360}$.

Advertencia. — Esta modificacion consiste, segun se vé fácilmente: 1.° *en descomponer el denominador en sus factores primos;* 2.° *en multiplicar los dos términos de la fraccion por el producto efectuado de las primeras potencias de los factores primos que entran en el denominador con una potencia de grado impar.*

Pero, si ofrece la ventaja de simplificar los cálculos, tiene tambien el inconveniente de proporcionar menos aproximacion que la que resulta multiplicando los dos términos de la fraccion por el denominador íntegro.

Así, en el último ejemplo, se tendria

$$\frac{2321}{4320} = \frac{2321 \times 4320}{(4320)^2} = \frac{10026720}{(4320)^2};$$

de donde se deduciria

$$\sqrt{\frac{2321}{4320}} = \frac{\sqrt{10026720}}{4320} = \frac{3166}{4320};$$

fraccion que solo se diferencia de la raiz pedida en una cantidad *menor que* $\frac{1}{4320}$, en lugar de $\frac{1}{360}$, que se obtiene aplicando la modificacion antes indicada.

Esta modificacion sin embargo suele ser *útil* en las aplicaciones, porque muchas veces se deja bajo la forma de *operacion indicada* la raiz cuadrada del numerador de la fraccion que se ha modificado.

224. Observacion. — La condicion de hacer cuadrado perfecto el *denominador* de la fraccion propuesta, debe cumplirse *indispensablemente*, antes de proceder á la estraccion de la raiz de los dos términos.

Porque supongamos, por ejemplo, que se quiere aplicar á una fraccion tal como $\frac{219}{530}$, la regla del n.° 221; tendríamos

$$\sqrt{\frac{219}{530}} = \frac{\sqrt{219}}{\sqrt{530}} = \frac{14}{23}.$$

Este resultado, $\frac{14}{23}$, será realmente un valor *aproximado* de la raiz pedida; pero no puede apreciarse el grado de su aproximacion, pues siendo *incompleto* el denominador, no estará la *unidad dividida* en un número *determinado* de partes iguales; mientras que, por medio de la preparacion indicada, la unidad se encuentra dividida en un número exacto de partes iguales, de las cuales debe tomarse un número *mayor* ó *menor*, marcado por la *parte entera* de la *raiz del numerador*.

Esto esplica porque, cuando se trata de *fracciones decimales*, es necesario siempre hacer PAR el *número* de las cifras decimales (n.º 218); á fin de que el denominador sea cuadrado perfecto.

Cumplida de *antemano* esta condicion por cualquier quebrado, cuya raiz cuadrada quiera sacarse, puede estenderse á todas las fracciones la regla del n.º 220, que solo se dió entonces para el caso de ser CUADRADOS PERFECTOS los dos términos de la fraccion.

Para extraer la raiz cuadrada de una fraccion, empiécese por hacer CUADRADO PERFECTO *el denominador;* y despues *estráigase la raiz cuadrada del numerador y del denominador de la fraccion trasformada.*

SEGUNDA PARTE.

FORMACION DEL CUBO Y ESTRACCION DE LA RAIZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS.

Nociones y principios preliminares.

225. Se llama *cubo* ó *tercera potencia* de un número, el producto de tres factores iguales al mismo número, y *raiz cúbica* ó *raiz tercera* de un número, el número que, elevado al cubo, ó á la tercera potencia, reproduce el número propuesto.

La formacion del *cubo* de un número entero ó fraccionario se reduce por consiguiente á *dos multiplicaciones* sucesivas que se efectuan segun las reglas establecidas.

Los diez primeros números son

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10;$$

y sus cubos

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729,\ 1000.$$

Por ejemplo, el cubo de 7, ha de ser igual á $7 \times 7 \times 7$; por consiguiente diremos, 7×7 son 49, y 49×7 son 343; lo mismo haríamos con los demás números.

Recíprocamente, los números de la segunda série tienen por *raices cúbicas* á los números de la primera.

Se reconoce, á la simple inspeccion de estas dos séries de números que entre los números enteros de *una*, de *dos*, ó de *tres* cifras, solo hay *nueve* que son *cubos perfectos;* cada uno de los otros tiene por *raiz cúbica* un número *entero* mas una *parte de la unidad.*

226. Esta *parte de la unidad* no puede espresarse por número alguno *exacto*.

Porque, admitamos por un momento que un número *entero* N tenga por raiz tercera *exacta* á un número *fraccionario* tal como $\frac{a}{b}$; en este supuesto, seria necesario que elevando al cubo el número $\frac{a}{b}$, pudiera reproducirse el número entero N. Pero esto es imposible, porque $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$ dá por resultado $\frac{a^3}{b^3}$ y como siempre puede suponerse que $\frac{a}{b}$ es un número fraccionario *irreductible*, se infiere que a y b son *primos entre sí;* luego (n.° 92) tambien lo son a^3 y b^3; y por consiguiente $\frac{a^3}{b^3}$ es un número fraccionario *irreductible*, que no podrá en manera alguna ser igual al número *entero* N.

Como esta demostracion se aplica á un número *entero cualquiera*, se infiere que *las raices cúbicas de los números enteros que no son cubos exactos de otros números enteros*, no pueden obtenerse exactamente, y son por lo tanto (n.° 201) *números* INCONMENSURABLES *ó* IRRACIONALES.

227. Así como para descubrir el procedimiento de la estraccion de la raiz cuadrada de un número entero cualquiera, hemos tenido necesidad de fundarnos en la espresion del cuadrado de la suma de dos números $(a+b)$, así tambien, para la estraccion de la *raiz cúbica*, es indispensable conocer la composicion del *cubo* de la misma suma $(a+b)$.

Para esto recordaremos que ya en el n.° 204 hemos visto que

$$(a+b)^2 \text{ ó } (a+b)\times(a+b)=a^2+2ab+b^2.$$

Si se multiplica este resultado $a^2+2ab+b^2$

por $a+b$. . . . . $a+b$

segun las reglas dadas (n.° 48) $a^3+2a^2b+ab^2$

$+a^2b+2ab^2+b^3$

tendremos, simplicando. . . . . . $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Luego

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

228. Hagamos en esta fórmula $b=1$; tendremos

$$(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1\,;$$

de donde se deduce

$$(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1\,;$$

lo cual manifiesta que la *diferencia entre los cubos de dos números enteros consecutivos, es igual al triplo del cuadrado del número menor, mas el triplo del mismo número, mas una unidad.*

Así la diferencia entre el cubo de 90 y el de 89 es igual á

$$3\times(89)^2+3\times 89+1=24031.$$

Con arreglo á esto puede juzgarse cuál será el intérvalo que separa á dos cubos perfectos consecutivos, cuando sus raices tomadas en la série natural de los números son números un poco considerables.

§. I. — ESTRACCION DE LA RAIZ CÚBICA DE UN NÚMERO EN MENOS DE UNA UNIDAD.

Extraccion de la raiz cúbica de un número entero.

229. Si el número solo tiene *tres* guarismos á lo mas, su *raiz cúbica* se obtiene inmediatamente á la simple inspeccion de los cubos de los nueve primeros números.

Así, la raiz cúbica de 125 es *exactamente* 5; la raiz cúbica de 72 es 4, mas una *parte de la unidad*, ó sea 4, *en menos* de una unidad.

La raiz cúbica de 841 es 9, *en menos de una unidad;* porque 841 está comprendida entre 729, cubo de 9, y 1000, cubo de 10.

Los números 4 y 9, *partes enteras* de las raices cúbicas de 72 y 841, son *las raices de los mayores cubos* contenidos en los dos números dados.

230. Considerémos un número de *mas de tres* cifras.

Sea, por ejemplo, 103823 el número propuesto:

103.823	4		
64			
398.23	48	48	47
		48	47
		384	329
		192	188
		2304	2209
		48	47
		18432	15463
		9216	8836
		110592	103823

luego 48 es *demasiado grande.*

Hallándose el número dado comprendido entre 1000, cubo de 10, y 1000000, cubo de 100, su *raiz cúbica* ha de componerse necesariamente de *dos* guarismos, es decir, de *decenas* y *unidades.*

Designemos por a las *decenas* y por b las *unidades;* tendremos (n.° 227)

$$103823 = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Donde se ve que el cubo de un número compuesto de *decenas* y *unidades*, contiene el *cubo de las decenas, mas el triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades, mas el triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de las unidades.*

Esto supuesto, como el *cubo* de las decenas no puede dar unidades de órden *inferior* al de las de *millar*, se infiere que las *tres* últimas cifras de la *derecha* del número no pueden pertenecer á dicho cubo; deberá pues hallarse en la parte 103 que queda á la izquierda (despues de separadas las otras cifras por medio de un punto).

Ahora bien, siendo 4 la raiz del *mayor cubo*, 64, contenido en 103, debe ser 4 la cifra de las *decenas* de la raiz buscada; porque 103823 está comprendido entre 64000 ó $(40)^3$ y 125000 ó $(50)^3$.

Luego la raiz está compuesta de 4 *decenas*, mas cierto número de *unidades* MENOR que DIEZ.

Hallada la cifra de las *decenas*, restemos su *cubo*, 64, de 103; queda 39, á cuyo lado se escribe la seccion 823, resultando el número 39823; en el cual se contienen todavía el *triple* producto del *cuadrado* de las decenas por las unidades, mas las otras dos partes antes enunciadas.

Ahora bien, el *cuadrado* de un número de *decenas* no puede dar unidades de *órden inferior* al de *centenas;* luego el *triple* producto del *cuadrado* de las *decenas* por las *unidades* no puede hallarse mas que en las tres cifras, 398, que quedan, despues de separar con un punto las dos primeras de la derecha.

Por otro lado, podemos formar el triplo del cuadrado de las 4 *decenas*, lo cual dá 48; luego, si dividimos 398 por 48, el cociente 8 será la cifra de las *unidades* de la raiz, ó un número *mayor;* porque las 398 *centenas* contienen, además del triple producto del *cuadrado* de las *decenas* por las *unidades*, las centenas procedentes de las otras dos partes.

Para comprobar si no es demasiado grande la cifra 8, podriamos, como en la raiz cuadrada, formar por medio de esa cifra 8 y de la cifra 4 de las *decenas*, las *tres partes* del cubo contenidas en 39823; pero en general es mas sencillo el elevar 48 al *cubo*.

Hecha esta operacion, encontramos 110592, número *mayor* que 103823; por consiguiente la cifra 8 es *demasiado grande.*

Formando el *cubo* de 47, se obtiene 103823; luego el número propuesto es un CUBO PERFECTO, cuya *raiz cúbica* es 47.

Advertencia. — No se puede comenzar por buscar la cifra de las *unidades;* porque, como el *cubo de las unidades* puede dar (n.º 225) *decenas* y aun *centenas*, estas *decenas* y estas *centenas* se encuentran confundidas con las que provienen de las otras partes del cubo.

Hé aquí el cuadro de los cálculos para el número 47954.

47.954	36		
27	27		
209.54		37	36
		37	36
		259	216
		111	108
47954		1369	1296
46656		37	36
1298		9563	7776
		4107	3888
		50633	46656

luego 37 es *demasiado grande.*

El número propuesto no es cubo perfecto, y su raiz, *en menos de una unidad*, es 36; en otros términos, la raiz del *mayor cubo*, 46656, contenido en 47954, es 36, quedando un resíduo de 1298, segun se ve en la operacion.

231. Propongámonos ahora estraer la raiz cúbica de un número de *mas de seis* guarismos, por ejemplo, 43725658:

43.725.658	352		
27	27		
16 7		35	352
		35	352
43725		175	704
42875		105	1760
850 6		1225	1056
		35	123904
43725658		6125	352
43614208		3675	247808
resto.....111450		42875	619520
			371712
			43614208

Cualquiera que sea la raiz buscada, tiene necesariamente *mas de una* cifra, y puede considerarse como compuesta de *unidades* y de *decenas* solamente, pudiendo tener *varias* cifras el *número de las decenas.*

Ahora bien, el cubo de las *decenas* dá por lo menos *millares;* así pues, este cubo se encuentra necesariamente en las cifras que quedan á la *izquierda*, despues de separar las *tres* primeras, 658.

Digo ahora, que si se estrae la raiz del mayor cubo contenido en 43725 considerado como unidades simples, se tendrá el *número total de las decenas* de la raiz pedida.

En efecto, sea a la raiz del mayor cubo contenido en 43725; por lo pronto se infiere que la raiz pedida tiene por lo menos un número a de decenas, puesto que $a^3 \times 1000$ puede restarse de 43725000, y *à fortiori*, de 43725658.

Además, la raiz no podria tener $(a+1)$ decenas; porque siendo $(a+1)^3$ *mayor* que 43725, $(a+1)^3 \times 1000$ es tambien *mayor* que 43725000 al menos en *un millar*, y por lo tanto ha de ser mayor que 43725658.

Luego la raiz pedida se compone de *a decenas*, mas cierto número de *unidades* MENOR que DIEZ.

Con esto queda la cuestion reducida á estraer la raiz cúbica de 43725; y como este número tiene *mas de tres* cifras, su raiz ha de tener *mas de una*, es decir, ha de constar de *decenas* y *unidades*.

Para obtener las decenas, es necesario separar las tres últimas cifras, 725, y estraer la raiz del *mayor cubo* contenido en 43.

(Ya se ve lo que deberia hacerse si todavía este número tuviera *mas de tres* cifras.)

El *mayor cubo* contenido en 43 es 27, cuya raiz es 3; esta cifra espresa las *decenas* de la raiz de 43725 (ó la cifra de las *centenas* de la raiz total). Restando de 43 el *cubo* de 3, ó 27, obtenemos el resto 16, á cuyo lado debe bajarse únicamente la primera cifra, 7, de la seccion siguiente, 725, lo cual dá 167.

Formando el *triplo del cuadrado de las* 3 *decenas*, se encuentra 27 *millares;* y si dividimos 167 por 27, el cociente es la cifra de las *unidades* de la raiz de 43725, ó un número *mayor*. Es fácil conocer aquí que el cociente, 6, es en efecto *demasiado grande;* por consiguiente es necesario ensayar la cifra 5, y para esto elevar 35 al *cubo;* lo cual dá por resultado 42875, número que, restado de 43725, dá el *resto* 850.

Este *resto* es evidentemente *menor* que

$$3\times(35)^2+3\times35+1,$$

porque el solo cuadrado de 35, segun se ve en el cuadro de operaciones es igual á 1225.

Así pues, 35 es la raiz del *mayor cubo* contenido en 43725; y por consiguiente es *el número total de decenas* de la raiz buscada.

Para obtener las *unidades*, se baja al lado del resto 850 la *primera cifra*, 6, de la última seccion 658, lo cual dá 8506; se forma aparte *el triplo del cuadrado de las* 35 *decenas* (lo cual es fácil, porque en la comprobacion de la cifra precedente, se formó ya el cuadrado de 35); despues se divide 8506 por dicho *triplo*, y el cociente, 2, se ensaya elevando 352 al *cubo*.

Así se obtiene, 43614208, resultado *menor* que el número propuesto; y restándole de este, se llega al *resíduo final* 111450.

Luego 352 es la *raiz cúbica* de 43725668, *con menos de una unidad de error.*

232. REGLA GENERAL. — Para estraer la raiz cúbica de un número entero EN MENOS DE UNA UNIDAD, *divídase el número en secciones de á tres cifras, comenzando por la derecha: la última seccion de la izquierda podrá ser que tenga solo una ó dos cifras.*

(EL NÚMERO DE LAS SECCIONES ES IGUAL AL NÚMERO DE LAS CIFRAS DE LA RAIZ).

Hecho esto, estráigase la raiz del mayor cubo contenido en la primera seccion de la izquierda, y se tendrá la PRIMERA CIFRA *de la raiz; réstese el cubo de esta cifra, de la primera seccion.*

A la derecha del resto se baja la primera cifra de la izquierda de la segunda seccion; el número así formado se divide por el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raiz; se escribe el cociente á la derecha de esta cifra, y se eleva al cubo el número que forman las dos.

Si como sucede generalmente el cubo obtenido es MAYOR *que el conjunto de las dos primeras secciones del número propuesto, disminúyase el cociente en* UNA *ó varias unidades, para tener la* SEGUNDA CIFRA, *hasta obtener un* CUBO *que pueda* RESTARSE *del conjunto de las dos primeras secciones.*

Efectuada la sustraccion, *se baja al lado del resto la primera cifra de la izquierda de la tercera seccion; y se divide el nuevo número así formado por el triplo del cuadrado del número que forman las dos cifras halladas de la raiz. El cociente,* SI NO ES DEMASIADO GRANDE, *es decir, si es la tercera cifra de la raiz debe ser tal que escribiéndole á la derecha de las* DOS PRIMERAS CIFRAS DE LA RAIZ, *y elevando al cubo el número resultante, se pueda restar este cubo del conjunto de las tres primeras secciones.*

Hecha esta nueva sustraccion, *se baja á la derecha del resto la primera cifra de la izquierda de la cuarta seccion, y se continúa la misma série de operaciones hasta bajar todas las secciones.*

Siguiendo estas reglas, se encontrará:

$$\sqrt[3]{483249} = 78, \text{ con el } \textit{resto } 8697\,;$$

$$\sqrt[3]{91632508641} = 4508, \text{ con el } \textit{resto } 20644129;$$

$$\sqrt[3]{32977340218432} = 32068 \textit{ exactamente.}$$

233. *Primera observacion.* — La regla general, tal como acabamos de enunciarla, dice que, para comprobar si una cifra obtenida en la raiz no es *demasiado grande*, es necesario *escribirla á la derecha de la parte hallada*, y *elevar al cubo* el número resultante.

Hay sin embargo otro medio de comprobacion, *análogo* al usado en el procedimiento de la *raiz cuadrada* y que consiste en formar las tres partes que quedan todavía en el conjunto de las secciones, hasta entonces tomadas en consideracion, despues de haber *restado de ellas el cubo de las decenas.*

Pero el primer medio nos parece muy preferible por varias razones:

1.ª Para obtener una nueva cifra de la raiz, se necesita conocer *el triplo del cuadrado* de la raiz hallada; y como para formar el cubo de esta raiz, ha sido necesario *elevarla antes al cuadrado*, es fácil tener el triplo de este cuadrado (cuyo *triplo* se encuentra tambien formado, siempre que una de las cifras de la raiz es igual á 3);

2.ª Como la *elevacion al cubo* consiste en dos multiplicaciones ordinarias sucesivas, pueden aplicársele cómodamente la prueba por 9 y otras análogas;

3.ª Cuando se emplea el segundo medio, no por eso puede omitirse el *comprobar* la raiz total por medio de la *formacion de su cubo;* comprobacion que forma parte esencial del primer medio.

234. *Segunda observacion.* —Muchas veces, en el curso de las operaciones, se llega á presumir que una cifra que debe ensayarse, es demasiado grande; y entonces se *disminuye* desde luego en *una* ó *mas* unidades. Pero, elevando al cubo el primero formado por las cifras halladas de la raiz, seguidas de la nueva cifra que se cree *buena*, y restando este cubo de las secciones consideradas hasta entonces en el número propuesto, se puede obtener *un resto* muy grande que haga sospechar, si será *demasiado pequeña* la última cifra hallada.

El medio de cerciorarnos es ver si el RESTO *es igual* ó *mayor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma raiz, mas una unidad.*

Si así sucede, es necesario añadir *una* ó *mas* unidades á la última cifra.

235. *Tercera observacion.* —Aquí tambien, como en el *cuadrado* (n.º 212), se puede reconocer á la simple vista de la cifra que termina un número dado, si este número es CUBO PERFECTO.

Se demostraria tambien del mismo modo que allí:

1.º *Que un número entero terminado en ceros, cuyo número no sea múltiplo de* 3, *no puede ser* CUBO PERFECTO;

2.º *Que cuando un número es divisible por un factor, no puede ser cubo perfecto, si no es divisible por el cubo de dicho factor.*

Estraccion de la raiz cúbica de un número misto en menos de una unidad.

236. Cuando ha de estraerse la raiz cúbica de un *número misto* y solo se necesita la PARTE ENTERA de dicha raiz, ó en otros términos, cuando ha de estraerse la raiz EN MENOS DE UNA UNIDAD, *no es menester tener en cuenta al quebrado.*

En efecto, si el ENTERO del número *misto* dado, no es *cubo perfecto*, diferenciándose necesariamente *en mas de una unidad* (n.º 228) los *dos cubos consecutivos* que le comprenden, dicho número *total* tambien deberá hallarse comprendido entre *los mismos dos cubos;* y por consiguiente, su raiz cúbica está comprendida entre las de los *dos cubos*, ó en otros términos, tiene la MISMA PARTE ENTERA que la *raiz cúbica* del ENTERO.

Si el ENTERO fuera *cubo perfecto*, el número *mixto* tendria por PARTE ENTERA de su *raiz cúbica*, la *raiz misma* del ENTERO, porque estaría comprendido entre este *cubo* y el cubo inmediatamente superior.

§ II. — Estraccion de la raiz cúbica por aproximacion de un número entero ó fraccionario.

Estraccion de la raiz cúbica con un grado determinado de aproximacion.

Cuando el número cuya raiz cúbica se pide no es CUBO PERFECTO, siempre es posible obtener un valor de su raiz, *tan aproximado como se quiera.*

237. VALUACION APROXIMADA DE LA RAIZ CÚBICA EN UNIDADES DE CUALQUIER ESPECIE.—Propongámonos en general estraer la raiz cúbica de un número cualquiera *a (entero ó fraccionario)* en menos de una fraccion $\frac{1}{n}$ (*véase* el n.° 135).

El número *a* puede ponerse bajo la forma

$$\frac{a\times n^3}{n^3};$$

y si se designa por r la raiz del mayor cubo contenido en $a\times n^3$, es decir la raiz cúbica de $a\times n^3$, *en menos de una unidad*, el número $\frac{a\times n^3}{n^3}$, ó a, estará comprendido entre $\frac{r^3}{n^3}$ y $\frac{(r+1)^3}{n^3}$.

Luego tambien $\sqrt[3]{a}$ se hallará comprendido entre

$$\frac{r}{n} \text{ y } \frac{r+1}{n};$$

y por consiguiente, $\frac{r}{n}$ ó $\frac{r+1}{n}$ espresan la raiz pedida, en menos de una fraccion, designada por $\frac{1}{n}$, pudiendo ser n un número tan grande como se quiera.

Así pues, para estraer la raiz tercera ó cúbica de un número con un grado de aproximacion espresado por la fraccion $\frac{1}{n}$.

Se multiplica el número por el cubo del denominador de la fraccion; se estrae la parte entera de la raiz cúbica del producto, y se divide el resultado por el mismo denominador.

PRIMER EJEMPLO.—Se pide la *raiz cúbica de* 15, *en menos de* $\frac{1}{12}$.

Tenemos

$$15 \times 12^3 = 15 \times 1728 = 25920:$$

ahora bien,

$$\sqrt[3]{25920} = 29, \text{ en menos de una unidad;}$$

luego

$$\sqrt[3]{15} = \frac{29}{12}, \text{ ó } 2\frac{5}{12}, \textit{ en menos de } \frac{1}{12}.$$

SEGUNDO EJEMPLO.—*Estraer la raiz cúbica de* $37\frac{8}{13}$, *en menos de* $\frac{1}{20}$.

Tenemos por lo pronto

$$\left(37 + \frac{8}{13}\right) \times 20^3 = \frac{489 \times 8000}{13} = 300923\frac{1}{3}:$$

ahora bien

$$\sqrt[3]{300923\frac{1}{3}},$$

ó (n.° 236)

$$\sqrt[3]{300923} = 67\text{, en menos de una unidad;}$$

luego

$$\sqrt[3]{37\frac{8}{13}} = \frac{67}{20},\quad \text{ó}\quad 3\frac{7}{20},\ \textit{en menos de}\ \frac{1}{20}.$$

Del mismo modo se hallaria

$$\sqrt[3]{47} = \frac{72}{20} = 3\frac{3}{5},\ \textit{en menos de}\ \frac{1}{20};$$

$$\sqrt[3]{23\frac{7}{8}} = \frac{37}{13} = 2\frac{11}{13},\ \textit{en menos de}\ \frac{1}{13};$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15},\ \textit{en menos de}\ \frac{1}{30}.$$

238. VALUACION APROXIMADA DE LA RAIZ CÚBICA EN DECIMALES.—La aproximacion en *decimales* es consecuencia de la regla precedente.

Propongámonos valuar $\sqrt[3]{25}$ *en menos de* 0,001.

Es necesario para esto (n.° 237) multiplicar 25 por el cubo de 1000, ó por 1000000000, es decir, colocar *nueve* ceros á la derecha de 25, lo cual dá 25000000000. La raiz cúbica de este número es 2924, en menos de una unidad; luego 2,924 es la raiz pedida, diferenciándose de la verdadera *en menos de* $\frac{1}{1000}$.

En general, *para valuar la raiz cúbica de un número entero en decimales, se escriben á la derecha del número* TRES VECES *tantos ceros, como cifras decimales se quieran en la raiz; se estrae, en menos de una unidad, la raiz cúbica del nuevo* *número, y se separa á la derecha del resultado el número pedido de cifras decimales.*

Advertencia. Aquí se puede tambien, como en la raiz cuadrada (n.° 216), dejar de escribir por el pronto todas las secciones de tres ceros, colocándolas despues sucesivamente, á medida que se quieran obtener nuevas cifras decimales en la raiz.

239. Cuando el número propuesto es *fraccionario*, hay que considerar *dos* casos, segun que sea *decimal* ó *quebrado comun*.

Primer caso.—Sea *estraer la raiz cúbica de* 3,1415, *en menos de* $\frac{1}{100}$.

Como, en virtud de la regla del n.° 237, es necesario *multiplicar* el número dado por $(100)^3$ ó 1000000, basta evidentemente para esto, *escribir dos ceros á la derecha de* 3,1415 y *suprimir* despues *la vírgula*, lo cual dá 3141500.

La raiz cúbica de este número, en menos de una unidad es 146.

Luego 1,46 es la raiz pedida en menos de $\frac{1}{100}$.

Si se quisiera otra cifra decimal en la raiz, bastaria colocar á la derecha del resto obtenido, una nueva seccion de tres ceros, continuando en seguida la operacion.

Regla general. Para estraer la raiz cúbica de una fraccion decimal con un grado determinado de aproximacion, *hágase de modo que el numero de cifras decimales sea* TRIPLE *que el número de decimales que se quieran en la raiz* (lo cual se consigue colocando á la derecha de la fraccion propuesta un número conveniente de ceros); *suprímase la coma; estráigase despues la raiz cúbica del número resultante, en menos de una unidad, y sepárese á la derecha de la raiz hallada el número pedido de cifras decimales.*

Cuando se trata de un quebrado comun, *se le convierte lo primero en fraccion decimal* (n.° 171), *prolongando la operacion hasta tener en el cociente* TRES VECES *tantas cifras decimales, como se quieren tener en la raiz: despues se opera como en el caso precedente.*

Hé aquí nuevas aplicaciones:

$$\sqrt[3]{79}=4,2908,\ \textit{en menos de}\ \frac{1}{10000};$$

$$\sqrt[3]{3,00415}=1,4429,\ \textit{en menos de}\ \frac{1}{10000};$$

$$\sqrt[3]{0,00101}=0,10,\ \textit{en menos de}\ \frac{1}{100};$$

$$\sqrt[3]{\frac{14}{25}}=0,824,\ \textit{en menos de}\ \frac{1}{1000}.$$

Consideraciones sobre la estraccion de la raiz cúbica de un número fraccionario.

240. Aquí, lo mismo que en la raiz cuadrada, deben distinguirse varios casos *(véanse los n.^{os} 220 y siguientes):*

O los *dos* términos son *cubos perfectos*; ó el denominador *solo* es cubo perfecto; *ó bien* el denominador *no es* cubo perfecto, siendo como quiera el numerador.

En el *primer caso*, puesto que tenemos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3},$$

tendremos recíprocamente

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}=\frac{a}{b};$$

de donde se sigue que, para estraer la raiz cúbica de una fraccion, cuyos dos términos son cubos perfectos, es necesario y basta *estraer la raiz cúbica del numerador, y la del denominador, poniendo la segunda por denominador á la primera.*

Así

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3},\quad \sqrt[3]{\frac{343}{125}}=\frac{7}{5},\quad \sqrt[3]{\frac{729}{64}}=\frac{9}{4}.$$

SEGUNDO CASO.—Sea $\frac{a}{b^3}$ la fraccion propuesta, siendo a y b números enteros cualesquiera.

Designando por a' la parte entera de $\sqrt[3]{a}$, tendremos

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}=\frac{a'}{b},$$

valor aproximado que se diferencia del verdadero *en menos de una fraccion* $\frac{1}{b}$.

Si solo se quiere dejar indicada la operacion que debe efectuarse en el numerador, se tendrá

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{b}.$$

TERCER CASO.—Cuando el denominador no es cubo perfecto, *se multiplican los dos términos por el cuadrado del denominador;* y con el resultado se opera, como en el segundo caso.

Sea, por ejemplo, *la fraccion* $\frac{19}{24}$ *cuya raiz cúbica se pide.*

Tendremos

$$\frac{19}{24}=\frac{19\times576}{(24)^3}=\frac{10944}{(24)^3},$$

de donde $\sqrt[3]{\frac{19}{24}}=\frac{\sqrt[3]{10944}}{24}=\frac{22}{24}$, ó $\frac{11}{24}$ *en menos de* $\frac{1}{24}$.

En general,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}=\frac{a'}{b},$$

designando a' la *parte entera* de $\sqrt[3]{ab^2}$.

Advertencia. Esta trasformacion admite modificaciones análogas á las que se han hecho tratándose de la raiz cuadrada.

Así, en el ejemplo anterior $\frac{19}{24}$, como 24 es igual á $2^3 \times 3$, se ve que basta multiplicar los dos términos por 3^2, para que el denominador se haga, cubo perfecto, con lo cual se tendrá

$$\frac{19}{24} = \frac{19 \times 9}{(2 \times 3)^3} = \frac{171}{(6)^3};$$

de donde

$$\sqrt[3]{\frac{19}{24}} = \frac{\sqrt[3]{171}}{6} = \frac{5}{6} \textit{ en menos de } \frac{1}{6}.$$

Propongámonos ahora el número $21\frac{13}{72}$.

Tendremos

$$21\frac{13}{72} = \frac{1525}{72} = \frac{1525}{2^3.3^2} = \frac{1525.3}{(2.3)^3} = \frac{4575}{(6)^3}:$$

lo cual dá

$$\sqrt[3]{21\frac{13}{72}} = \frac{\sqrt[3]{4575}}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}, \textit{ en menos de } \frac{1}{6}.$$

Esto basta para hacer ver lo que deberia practicarse en cualquiera otro ejemplo: la consecuencia á que se va á parar, es aquí, como en la raiz cuadrada, que para estraer la raiz *cúbica* de una fraccion, es necesario *estraer la raiz cúbica* de cada uno de los *términos*, *despues de haber hecho*, por cualquier medio, *cubo perfecto al denominador.*

Observacion general sobre las estracciones de raices.

241. No podemos en este tratado elemental esponer los procedimientos de la estraccion de las raices de grado superior al tercero, porque están fundados en la composicion de

una potencia cualquiera de la suma indicada de dos cantidades, cuya *fórmula* ó espresion exige, para demostrarse completamente, nociones de Algebra bastante estensas.

Pero los principios esplicados en la estraccion de las raices *cuadrada* y *cúbica*, bastan para hacer presentir que, cuando se trata de la *estraccion de las raices de cualquier grado*, si el número propuesto no es potencia perfecta del *grado* de la raiz pedida, en cuyo caso la raiz es *un número inconmensurable*, siempre es posible al menos *aproximarnos* á dicha raiz de modo que *el error cometido* sea *menor que cualquier cantidad dada*.

Por consiguiente, en los cálculos numéricos, nada impide *equiparar* esa clase de números á *números conmensurables*, puesto que siempre se les puede concebir reemplazados por números conmensurables que difieran de ellos *tan poco como se quiera*.

Terminarémos lo concerniente á las estracciones de raices esponiendo la *proposicion siguiente*, que tendremos ocasion de recordar en el capítulo 7.°.

Consiste en que las raices *cuartas*, *octavas*, *décimas-sestas*, y en general todas aquellas cuyo índice es una potencia de 2 espresada por 2^n, pueden obtenerse por medio de estracciones de *raices cuadradas sucesivas*; de modo que se tendrá

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}},\quad \sqrt[8]{a}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}},\quad \sqrt[16]{a}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}},\ldots$$

En efecto, segun la definicion dada en el n.° 200, a es el producto de *dos* factores iguales á su *raiz cuadrada*, $\sqrt{a}$; pero esta raiz es tambien á su vez el producto de *dos* factores iguales á su *raiz cuadrada* $\sqrt{\sqrt{a}}$; luego a es el producto de *cuatro* factores iguales á $\sqrt{\sqrt{a}}$; por otra parte, a es tambien igual (n.° 45) al producto de *cuatro* factores iguales á $\sqrt[4]{a}$. Por consiguiente

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}.$$

Razonando del mismo modo respecto de $\sqrt[8]{a}$, se diria: a

es el producto de *dos* factores iguales á su *raiz cuadrada;* esta al producto de *dos* factores iguales á su *raiz cuadrada;* esta última al producto de *dos* factores iguales á su *raiz cuadrada;* por consiguiente, a es, á la vez, el producto de *ocho* factores iguales á $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$, y el producto de *ocho* factores iguales á $\sqrt[8]{a}$.

Luego

$$\sqrt[8]{a}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}.$$

Del mismo modo se demostraria que

$$\sqrt[16]{a}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}};$$

y así sucesivamente: luego la proposicion es general.

En el octavo capítulo daremos aplicaciones de esta proposicion, y espondremos además *medios abreviados* para la estraccion de *raices cuadradas* en particular.

Ejercicios.

I. ¿Cuántos *decímetros cuadrados*, *centímetros cuadrados*, *milímetros cuadrados* hay en el cuadrado de 429 *milímetros?*

II. Hallar la suma de los cuadrados de $0^{m.},69$ | $1^{m.},25$ | $3^{m.},029$, y valuar el resultado en *metros cuadrados*, *decímetros cuadrados*, etc.

III. Todo cuadrado impar dá 1 por resíduo de su division por 8.

IV. Hallar la espresion general del cuadrado de la diferencia de dos números.

V. Si un número par es la suma de dos cuadrados su mitad es tambien la suma de dos cuadrados.—Caso particular en que los dos cuadrados son iguales.

VI. Si un número entero divisible por 5 es la suma de dos cuadrados, su *quinta parte* es tambien la suma de dos cuadrados.

VII. Cuando hay *varios* números, formados cada uno de ellos por la adicion de dos cuadrados, el producto de todos es tambien la suma de dos cuadrados.

VIII. Hallar, aproximada hasta *milésimas*, la *raiz cúbica* del cociente de la division de 429 por el cuadrado de 2,59.

IX. Dado un número entero, averiguar si es la diferencia entre dos cubos perfectos consecutivos, y determinar dichos cubos.

X. Demostrar que un número entero no puede ser cubo perfecto: 1.° si, siendo 2 ó 6 la cifra de las unidades, es *par* la cifra de las decenas; 2.° si, siendo 4 ú 8 la cifra de las unidades, es *impar* la cifra de las decenas; 3.° si, siendo 5 la cifra de las unidades, no es ni 2 ni 7 la cifra de las decenas.

CAPITULO VI.

§ I. *De las razones y proporciones y de sus principales propiedades.*—§ II. *Resolucion de las cuestiones que de ella dependen y de algunas otras usuales.*

242. Introduccion.—En el discurso de la esposicion de las diversas operaciones de la Aritmética, hemos visto que estas operaciones dán lugar á *dos clases principales* de cuestiones, á saber: 1.° las que tienen por objeto *demostrar* la existencia de ciertas propiedades pertenecientes á números *conocidos y dados;* 2.° las que tienen por objeto *hallar ciertos números* por el conocimiento de otros unidos á los primeros con relaciones determinadas.

Las cuestiones de la *primera clase*, que generalmente hemos designado con el nombre de principios ó proposiciones cuando las hemos presentado como *ejercicios*, se llaman tambien teoremas. Si hasta aquí no las hemos designado con este título, es porque las otras denominaciones nos han parecido mas adecuadas al órden de ideas que hemos adoptado para iniciar á los principiantes en la ciencia matemática.

Las cuestiones de la *segunda clase*, que no son sino aplicaciones particulares de las *reglas* y de los *principios*, á las cuales en general hemos conservado el nombre genérico de *cuestiones* y que son el objeto principal de los *ejercicios* colocados al fin de cada capítulo, se llaman problemas.

Los problemas que hasta aquí hemos resuelto ó propuesto eran fáciles de resolver, porque los datos eran sencillos, y porque las relaciones entre las cantidades *conocidas* y las cantidades *desconocidas*, estaban, por decirlo así, en evidencia.

Pero no sucede generalmente de ese modo; por lo comun, sus *enunciados* son tales que, para llegar á la *solucion*, se necesita una operacion bastante difícil que consiste en *descubrir* *y determinar la série de operaciones que deben ejecutarse con los números dados y conocidos para llegar al conocimiento de los números buscados:* esta operacion constituye el ANÁLISIS del problema.

Sin embargo, existe una clase de cuestiones, cuya resolucion puede someterse á *reglas fijas y ciertas;* y estas son en particular aquellas en que se consideran CANTIDADES PROPORCIONALES.

La mayor parte de estas cuestiones son precisamente las que nacen de las necesidades generales de la sociedad, en lo tocante á los intereses comerciales, industriales, financieros, etc., sea de las particulares entre sí, sea de las naciones y de su gobierno; se conocen generalmente con los nombres de *regla de tres*, *regla de interés*, *regla de descuento*, *regla de compañía*, *regla de aligacion*, etc.

Para llegar fácilmente á su resolucion, comenzaremos por esponer la teoría de las *razones* y las *proporciones.*

§ I.—DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES Y DE SUS PRINCIPALES PROPIEDADES.

De las razones.

243. Cuando se comparan dos cantidades entre sí, se puede tener necesidad de saber *cuánto* escede la *mayor* á la *menor*, ó *cuántas veces* la una *contiene* á la otra ó está *contenida* en ella.

De aquí resultan dos especies de razones entre los números comparados; una que se llamaba *razon* ARITMÉTICA, y otra que se llamaba *razon* GEOMÉTRICA.

Pero estas locuciones están casi abandonadas, habiéndose convenido en sustituir la palabra *diferencia* á la *denominacion* de *razon aritmética*, para espresar el *resultado* de la comparacion de dos números por *sustraccion*, consagrando especialmente el nombre de RAZON al *resultado* de la comparacion de dos números por medio de la DIVISION.

En todo el discurso de este capítulo, solo trataremos de la *razon* considerada bajo este último punto de vista.

Así, la razon de dos cantidades cualesquiera es el resultado ó el *cociente de la division* de dichas cantidades ó de los números que las espresan.

Esta *razon* puede ser un número *entero*, ó un número *fraccionario*, *mayor* ó *menor* que 1.

Por ejemplo, la razon de 24 á 6, es $\frac{24}{6}$ ó 4, y la de 6 á 24 es $\frac{6}{24}$ ó $\frac{1}{4}$.

Del mismo modo, la razon de 75 á 18 es $\frac{75}{18}$, ó $\frac{25}{6}$; y la de 18 á 75 es $\frac{18}{75}$, ó $\frac{6}{25}$.

Por lo demás, en este sentido hemos entendido hasta ahora el resultado de la comparacion de una cantidad cualquiera con su *unidad* (*véase el* n.° 1);

En la teoría de los *números complejos*, la *razon* de la *unidad principal* á una de sus *subdivisiones* ó de *dos subdivisiones* entre sí, es el *número de veces* que la una contiene á la otra;

En la comparacion del *sistema decimal* de pesos y medidas con el sistema comun, la *razon* del *metro* á la *vara*, ó de la *libra* con el *kilógramo*, ó recíprocamente, etc., es el *cociente* de la division de dos números espresados en *unidades* ó partes de la unidad de la misma especie.

244. La razon de dos cantidades *concretas* (n.° 2) supone siempre que las cantidades son de una *misma especie*, pues no se pueden comparar entre sí cantidades de *especies diferentes*.

Pero la *razon* en sí misma, segun su definicion, es esencialmente *número abstracto*, porque espresa *cuántas veces* una de las cantidades contiene á la otra, ó está *contenida* en ella.

Las cantidades que deban formar la razon se llaman *los dos términos* de la razon; el que se enuncia *primero* se llama *antecedente*, y el otro, *consecuente*.

Estos términos son propiamente hablando el *numerador* y el *denominador* de la espresion *fraccionaria* que se obtiene *indicando* la division de las dos cantidades, cuya razon se busca.

Así, en las razones espresadas por $\frac{24}{8}$ ó 24 : 8, $\frac{56}{27}$ ó 56:27, $\frac{12}{18}$ ó 12:18, 25, 56, 12, son los *antecedentes*; 8, 27, 18 son los *consecuentes* de las tres razones, cuyos valores *efectivos* son $3, 2\frac{2}{27}$, y $\frac{2}{3}$.

De las proporciones.

245. Cuando la *razon* de dos cantidades comparadas entre sí es *igual á la razon* de otras dos cantidades, se dice que estas cuatro cantidades están *en proporcion*, ó que son *proporcionales.*

UNA PROPORCION es por consiguiente la espresion de la *igualdad de dos razones*, ó la espresion de *dos razones iguales.*

Por ejemplo, la *razon* de 48 á 12 es 4 y la de 36 á 6 es tambien 4; tenemos, pues, la igualdad $\frac{48}{12} = \frac{36}{9}$; ó $48:12 = 36:9$; y los cuatro números 48, 12, 36 y 9 se dice que están *en proporcion.*

Muchas veces es mas cómodo presentar la proporcion bajo la forma

$$48 : 12 :: 36 : 9 ;$$

y entonces se enuncia de la manera siguiente;

48 *es á* 12 *como* 36 *es á* 9.

Los dos términos 48 y 36 de la proporcion así escrita se llaman los *antecedentes* de la proporcion ; los términos 12 y 9 son los *consecuentes*, porque en efecto, el primero y el tercer términos, 48 y 36, son los *antecedentes* de las dos razones, así como el segundo y cuarto son los *consecuentes.*

El *primero* y el *último* términos, 48 y 9, se llaman ESTREMOS; el *segundo*, y el *tercero*, 12 y 36, se llaman MEDIOS DE LA PROPORCION.

246. PROPIEDAD FUNDAMENTAL. — Las *proporciones* todas gozan de una propiedad que puede servir de base para la resolucion de los problemas cuyos enunciados contienen *cantidades proporcionales.*

Esta propiedad consiste en que:

En toda proporcion el producto de los estremos es igual al producto de los medios.

Sea la proporcion

(1) $$24 : 18 :: 20 : 15,$$

en la cual una y otra razon $\frac{24}{18}$ y $\frac{20}{15}$, se reducen al número fraccionario $\frac{4}{3}$.

Digo que debemos tener

$$24 \times 15 = 18 \times 20.$$

En efecto, la propiedad sería evidente, si tuviéramos la proporcion

$$(2) \qquad 24 : 24 :: 20 : 20$$

(que se llama proporcion *idéntica*, lo mismo que lo sería esta 48 : 48 :: 48 : 48).

Para reducir la proporcion (1) á la proporcion (2), basta evidentemente multiplicar cada consecuente por la razon comun $\frac{4}{3}$; pero de este modo uno de los medios y uno de los estremos se encuentran multiplicados por un *mismo* número; luego (n.° 57) lo mismo sucede con el producto de los estremos y el producto de los medios; y como hecho esto los dos productos resultan *iguales*, se infiere que los productos primitivos lo *eran tambien*. *L. C. D. D.*

247. Recíprocamente. — *Si cuatro números enunciados ó escritos en cierto órden son tales, que el producto* del *primero* por el *último* es *igual* al del *segundo* por el *tercero*, *estos números forman una proporcion* en el órden en que *están enunciados ó escritos.*

Porque sino hubiera proporcion entre estos cuatro números, sería necesario, para hacer al *segundo* y al *cuarto* respectivamente *iguales* al *primero* y al *tercero*, multiplicarlos cada uno por un número *diferente*, que espresaria, el uno la razon del *primero* al *segundo* y el otro la razon del *tercero* al *cuarto;* y como los dos productos serían entonces *iguales*, resultaria que no lo eran antes de la multiplicacion, lo cual sería contrario al enunciado de la proposicion.

Luego, etc.

248. *Otra demostracion* de la propiedad fundamental y de su recíproca.

(Empleamos las letras para hacer mas concisos y generales los razonamientos).

Sean a, b, c, d, cuatro números en proporcion, de modo que se tenga

$$a : b :: c : d \text{ ó bien } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Si se *multiplican* los dos miembros de esta igualdad por $b \times d$, producto de los dos *consecuentes* resulta

$$\frac{a \times b \times d}{b} = \frac{c \times b \times d}{d}.$$

Suprimiendo en cada miembro el factor comun á los dos términos de la fraccion, se tiene

$$a \times d = c \times b;$$

luego *el producto de los estremos* es igual *al de los medios.*

Recíprocamente, sean cuatro números a, b, c, d, tales que se tenga

$$a \times d = b \times c.$$

Dividamos los dos miembros de esta igualdad por $b \times d$, producto de un factor del primer miembro por un factor del segundo; tendremos

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{b \times c}{b \times d}, \text{ ó simplificando, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

y por consiguiente

$$a : b :: c : d.$$

Luego, *los cuatro números forman una proporcion cuyos* ESTREMOS *son los factores del primer producto dado, y los* MEDIOS, *los factores del segundo producto.*

249. PRIMERA CONSECUENCIA. — *En toda proporcion pueden cambiarse: 1.° los medios entre sí; 2.° los estremos entre sí; 3.° los medios con los estremos, sin que en ninguno de estos casos deje de haber proporcion entre los cuatro números, en el órden en que resultan nuevamente escritos.* Porque es evidente que todas estas mudanzas en nada turban la *igualdad*

de los dos productos que dán los *estremos* y los *medios* de la proporcion primitiva; y puesto que, en las nuevas espresiones, el producto del *primer número* por el *último* permanece constantemente *igual* al producto del *segundo* por el *tercero*, hay siempre proporcion entre los cuatro números, despues de efectuadas las mudanzas.

Sea, por ejemplo, la proporcion

(1) $$48 : 36 :: 72 : 54,$$

cuya *razon comun* es $\frac{4}{3}$.

Tendremos:

Cambiando los medios,

(2) $$48 : 72 :: 36 : 54,$$

cambiando los estremos,

(3) $$54 : 36 :: 72 : 48;$$

poniendo los medios en lugar de los estremos,

(4) $$36 : 48 :: 54 : 72.$$

En las espresiones (2), (3), (4), el producto del *segundo* número por el *tercero* es

$$36 \times 72 \quad ó \quad 48 \times 54,$$

y el producto del *primer* número por el *último*,

$$48 \times 54 \quad ó \quad 36 \times 72.$$

Pero estos productos son *iguales*, en virtud de la proporcion (1); luego (n.° 247) estas tres espresiones son tambien proporciones.

La *razon comun* es $\frac{4}{3}$ en la proporcion (1), $\frac{2}{3}$ en la proporcion (2), $\frac{3}{2}$ en la proporcion (3), y $\frac{3}{4}$ en la proporcion (4).

Advertencia. Tambien se podria en cada proporcion *invertir el órden de los términos* de cada razon; pero es fácil conocer que se recaeria en alguna de las proporciones ya obtenidas, ó bien que solo se habria logrado *invertir el órden de las razones* en una de ellas.

Así, la proporcion (1) se convierte por la inversion de los términos de cada una de sus razones, en

$$36 : 48 :: 72 : 54,$$

proporcion idéntica á la (4).

Operando lo mismo con la proporcion (2), tendremos

$$72 : 48 :: 54 : 36,$$

proporcion equivalente á la (3) puesto que ambas pueden ponerse bajo la forma de dos igualdades que solo difieren en que el *primer* miembro de la una es el *segundo* de la otra, y *recíprocamente.*

250. *Segunda consecuencia.*—En toda proporcion se puede MULTIPLICAR ó DIVIDIR, por una parte un *estremo* y por otra un *medio*, por UN MISMO NÚMERO, *sin alterar la proporcion;*

Lo cual significa que *habrá proporcion* entre los cuatro números resultantes.

Porque siendo *iguales* los dos productos de los *estremos* y de los *medios* de la proporcion dada, *los nuevos productos* que resultarán de la *multiplicacion* ó de la *division* de *un estremo* y de *un medio* POR UN MISMO NÚMERO, serán TAMBIEN IGUALES; luego (n.° 247) habrá siempre proporcion.

Dejamos para el séptimo capítulo la esposicion de otras propiedades de las proporciones, siendo las que acabamos de esplicar las únicas necesarias para la resolucion de los problemas que se refieren á esta teoría.

§ II.—RESOLUCION DE LAS CUESTIONES DEPENDIENTES DE LAS CANTIDADES PROPORCIONALES.

Regla de tres.

251. Una multitud de problemas concernientes al comercio, á la industria, á la banca, etc., comprenden en su enunciado números ligados entre sí por relaciones susceptibles de ser espresadas por medio de *proporciones;* y entre estos nú-

meros, unos son *conocidos* y *dados*, otros son *desconocidos* y deben determinarse.

Esto supuesto, se designa con el nombre de REGLA DE TRES la operacion por cuyo medio,

Dados TRES *términos de una proporcion cuyo* CUARTO *es desconocido* (*), *se trata de determinar este cuarto término.*

Ahora bien, de ser el producto de los estremos iguál al de los medios en toda proporcion, resulta necesariamente que, para obtener el valor del término desconocido,

Es necesario, si es *un estremo*, DIVIDIR *el producto de los medios por el estremo conocido;*

Y si es *un medio*, DIVIDIR *el producto de los estremos por el medio conocido.*

Así, sean las dos proporciones

$$24 : 9 :: 32 : x; \quad 45 : 36 :: x : 24.$$

Como en la primera debemos tener,

$$24 \times x = 9 \times 32,$$

resultará

$$x = \frac{9 \times 32}{24} = \frac{288}{24} = 12;$$

en la segunda tendremos

$$36 \times x = 45 \times 24,$$

de donde se deduce

$$x = \frac{45 \times 24}{36} = \frac{1080}{36} = 30.$$

Las proporciones entonces son

$$24 : 9 :: 32 : 12; \quad 45 : 36 :: 30 : 24;$$

la *razon comun* es $\frac{8}{3}$ en la primera y $\frac{5}{4}$ en la segunda.

Pasemos ahora á la resolucion de algunos problemas respecto de los cuales los del n.° 41 pueden ser considerados como casos particulares.

252. PRIMER PROBLEMA.—Se pide *el coste de* 384 *kilógramos de cierta mercadería*, *suponiendo* que 25 kilógramos de ella hayan costado *seiscientos cincuenta reales.*

(*) Es costumbre designar, en la resolucion de los problemas, las cantidades *desconocidas* con las *últimas* letras del alfabeto, x, y, z.

Análisis. — Puesto que 25 kilógramos cuestan 650 reales, es claro que 2, 3, 4, ... *veces* 25 kilógramos deben costar 2, 3, 4,... *veces* mas; así, los dos números dados de kilógramos están en la misma *razon* que sus *precios respectivos*.

Luego, si designamos por x el precio desconocido de los 384 kilógramos, y consideramos por un momento, como números abstractos á los tres números dados y á x, tendremos la proporcion

(1) $$25 : 384 :: 650 : x;$$

de donde (n.° 251)

$$x = \frac{384 \times 650}{25} = \frac{249600}{25} = 9984;$$

con lo cual concluimos que los 384 kilógramos de aquella mercadería deben costar 9984 reales.

Advertencia. — Antes de buscar el valor x, por medio de la proporcion (1), puede simplificarse esta observando que los *antecedentes*, es decir *un estremo* y *un medio* son, *divisibles* por 25 (n.° 68), factor que puede *suprimirse* (n.° 250), resultando

$$1 : 384 :: 26 : x, \quad \text{de donde} \quad x = 384 \times 26 = 9984.$$

Es muy conveniente aprovechar semejantes simplificaciones siempre que se presentan.

Otro método de resolucion. — Si 25 kilógramos cuestan 650 reales, *un solo* kilógramo debe costar 25 *veces menos*, ó $\frac{1}{25}$ de 650 reales, es decir $\frac{650}{25}$ reales.

Luego, 384 kilógramos costarán 384 *veces mas*, ó $\frac{650}{25} \times 384$; lo cual, hechos todos los cálculos, dá 9984 reales.

Segundo problema. — 135 *hombres han gastado* 20 *dias para hacer cierta obra; se desea saber cuántos dias gastarán* 300 *hombres para hacer la obra misma.*

Análisis. — Si cierto número de hombres ha necesitado 20 dias para hacer la obra supuesta, es claro que un número de hombres, 2, 3, 4, ... *veces mayor*, necesitará 2, 3, 4, ...

veces menos tiempo, siendo todas las demás cosas iguales; luego, cuántas veces el *primer* número de hombres, 135, está contenido en el *segundo*, 300, otros tantos el número de dias necesario al *segundo* número de hombres, ó sea el número buscado, x, estará contenido en el número de dias necesario al *primer* número de hombres.

Tendremos, pues, la proporcion

$$135 : 300 :: x : 20,$$

ó poniendo los *medios* en lugar de los *estremos* (n.° 249), á fin de tener á x como último término

$$300 : 135 :: 20 : x,$$

de donde

$$x = \frac{135 \times 20}{300} = \frac{2700}{300} = 9;$$

luego los 300 hombres han necesitado 9 dias para hacer la obra convenida.

En la segunda proporcion se habrian podido suprimir, 1.° el factor 15 comun á los dos términos; 2.° el factor 20 comun á los dos antecedentes, con lo cual se habria convertido en esta otra

$$1 : 9 :: 1 : x, \quad \text{de donde} \quad x = 9.$$

Otro modo de resolucion. — Si 135 hombres han gastado 20 dias en hacer la obra, es claro que *un solo* hombre necesitaria para hacerla 135 *veces mas* tiempo ó 20 × 135, y 300 hombres necesitarian un número de dias 300 *veces menor* que 20 × 135, es decir

$$\frac{20 \times 135}{300} = \frac{2700}{300} = 9 \text{ dias.}$$

RAZONES DIRECTAS É INVERSAS.

253. Antes de tratar problemas mas complicados, debemos dar á conocer algunas denominaciones á que dá lugar la consideracion de las *cantidades proporcionales*.

En toda cuestion cuyo enunciado contiene *cuatro* números en *proporcion*, dos de estos números son de *cierta especie*, y los otros dos de otra *especie distinta;* pero cada uno de los términos de esta *segunda* especie está ligado íntimamente, por las condiciones del enunciado, con uno de los términos de la *primera*.

Así es como, en el primer problema del n.º 252, dos de los cuatro números espresan *pesos* de cierta mercadería, y los otros dos son los *precios respectivos* de dichos pesos.

Así tambien, en el segundo problema, donde se trata de dos números de *hombres* y de dos números de *dias*, estos espresan los *tiempos respectivos* que deben emplear los dos números de *hombres* en hacer *la misma* obra.

Por esta razon se ha convenido en llamar CORRESPONDIENTES los dos términos de *especies diferentes, ligados entre sí* por el enunciado de la cuestion.

Por ejemplo, en el primer problema, *los precios* se llaman los CORRESPONDIENTES de los *kilógramos*, y *vice-versa*, los números de *kilógramos* son los CORRESPONDIENTES de los *precios* que deben costar.

Del mismo modo, en el segundo problema los números de *dias* son los CORRESPONDIENTES de los números de *obreros*, y *vice-versa*.

Esto supuesto, se dice que hay RELACION DIRECTA entre los números de la primera especie y los de la segunda, ó bien, que los cuatro números son *directamente proporcionales*, cuando, siendo en efecto proporcionales, se reconoce además, que *aumentando* ó *disminuyendo* un número, *aumenta* ó *disminuye* su CORRESPONDIENTE; y se dice por el contrario que hay RELACION INVERSA; ó que los cuatro números son *inversamente* (ó *recíprocamente*) *proporcionales*, cuando, *aumentando* ó *disminuyendo* cada número, disminuye ó aumenta su CORRESPONDIENTE.

El enunciado del primer problema ofrece el ejemplo de una *relacion directa;* porque cuanto *mas* kilógramos de mercadería hay que pagar, *mas* considerable ha de ser el precio.

El segundo problema dá lugar á una *relacion inversa;* porque cuantos *mas* hombres hay para hacer una obra, *menos* dias necesitan.

Si la *relacion* es *directa*, y se quiere escribir la proporcion bajo la forma

$$a : b :: c : d,$$

es necesario que *uno* de los números y su *correspondiente* formen los dos *antecedentes*, y los otros los dos *consecuentes;* en otras palabras, que cada número y su *correspondiente* formen un *estremo* y un *medio.*

Por el contrario, si la relacion es *inversa*, *uno* de los números y su *correspondiente* deben formar los *dos estremos*, mientras que el *otro* número y su *correspondiente* forman los *dos medios.*

Cuando se escribe la proporcion bajo la forma *equivalente* (n.° 245) de dos fracciones *iguales*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

es necesario en el caso de una relacion *directa*, que uno de los números y su *correspondiente* formen los *dos términos* de la *primera fraccion*, ó los *numeradores* de las dos fracciones, formando los otros números los *dos términos* de la *segunda fraccion*, ó los *denominadores* de las dos fracciones: y, en el caso de una relacion *inversa*, que cada número y su *correspondiente* formen, bien sea el *numerador* de la primera fraccion y el *denominador* de la segunda, bien sea el *denominador* de la primera y el *numerador* de la segunda.

Advertencia. Todas estas distinciones en la manera de *escribir* las proporciones resultantes de los enunciados de los problemas deben tenerse muy presentes, sopena de cometer graves errores.

254. Se dice tambien, cuando una relacion es *directa*, que una cantidad de cada especie está en RAZON DIRECTA de su correspondiente; y si la relacion es *inversa*, que cada cantidad está en RAZON INVERSA de su correspondiente.

Así, por ejemplo, *dos fracciones del* MISMO DENOMINADOR *están en razon directa de sus numeradores.*

Porque se ha visto (n.° 111) que, si el numerador se hacia *doble*, *triple*, *cuádruple*, ó la *mitad*, el *tercio*, el *cuarto*,.... de lo que era, la fraccion se hace *doble*, *triple*, *cuádruple*,...., ó *dos*, *tres*, *cuatro*.... veces *menor* de lo que era.

Por un razonamiento análogo se probaria que *dos fracciones* de IGUAL *numerador* están en *razon inversa de sus denominadores.*

Cuando las fracciones tienen numeradores y denominadores *diferentes*, se comienza por reducirlas al *mismo denomi-*

nador ó al *mismo numerador;* y la cuestion queda con esto reducida á uno de los casos precedentes.

De aquí se va á parar á una nueva *locucion* que consiste en decir que las fracciones dadas están en RAZON COMPUESTA, *directa* ó *inversa*, de los *dos productos* del *numerador* de la primera por el *denominador* de la segunda, y del *numerador* de la segunda por el *denominador* de la primera.

Para justificar esta locucion considerémos, por ejemplo, las dos fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{11}$.

Reduciéndolas á un *comun denominador*, se obtiene

$$\frac{3\times 11}{7\times 11} \text{ y } \frac{4\times 7}{7\times 11};$$

y estas dos fracciones están en *razon directa* de 3×11 á 4×7, ó de 33 á 28.

Si por el contrario las reducimos al *mismo numerador*, resulta

$$\frac{3\times 4}{7\times 4} \text{ y } \frac{3\times 4}{3\times 11};$$

en cuyo caso la razon de las dos fracciones es *inversa*, é igual á la de 3×11 á 7×4, ó de 33 á 28, como antes.

Pero se ve que los dos términos de esta razon son, el *uno el producto del numerador* de la primera fraccion por el *denominador* de la segunda, el *otro el producto del numerador* de la segunda por el *denominador* de la primera.

Por consiguiente, esta *razon compuesta* es en cierto modo el resultado de la multiplicacion de dos *razones simples*, que son *directas* ó *inversas* una de otra, segun los casos.

255. Aplicaciones. — Como aplicacion de lo que acabamos de decir, debemos indicar el medio de hacer entrar en *cálculos de proporcion* ciertas *superficies* y ciertos *volúmenes*, porque hay una multitud de cuestiones en que son necesarias semejantes *valuaciones numéricas*.

Supongamos que deben compararse entre sí las *estensiones superficiales* de dos piezas de tela, una de las cuales tenga

24 metros de *larga* por $\frac{2}{3}$ de *ancha*,

y la otra

$$17 \text{ metros de } \textit{larga} \text{ por } \frac{5}{4} \text{ de } \textit{ancha}.$$

Por un razonamiento análogo al hecho en el n.º 252, se reconoce fácilmente que 24 metros de *largo* por $\frac{2}{3}$ de *ancho* equivalen á $24 \times \frac{2}{3}$ de *largo* por 1 de *ancho*.

Del mismo modo, 17 metros de *largo* por $\frac{5}{4}$ de *ancho* equivalen á $17 \times \frac{5}{4}$ de *largo* por 1 de *ancho*.

Por consiguiente, supuesto que las anchuras son ya las mismas, la *razon* de las estensiones superficiales es *igual* al de las dos *longitudes;* cuya razon será

$$24 \times \frac{2}{3} : 17 \times \frac{5}{4},$$

$$\text{ó} \quad \frac{24 \times 2}{3} : \frac{17 \times 5}{4}, \quad \text{ó} \quad \frac{24 \times 2 \times 4}{3 \times 4} : \frac{3 \times 17 \times 5}{3 \times 4},$$

ó bien, simplificando,

$$64 : 85.$$

Sean ahora dos rollos de papel pintado, uno de los cuales tenga

$$15 \text{ metros de } \textit{largo} \text{ por } \frac{4}{5} \text{ de } \textit{ancho},$$

y el otro

$$19 \text{ metros de } \textit{largo} \text{ por } \frac{7}{8} \text{ de } \textit{ancho}.$$

La *razon* de las *estensiones superficiales* de los dos rollos, sería

$$15 \times \frac{4}{5} : 19 \times \frac{7}{8},$$

$$ó\ \frac{15\times 4}{5} : \frac{19\times 7}{8},\ ó\ \frac{15\times 4\times 8}{5\times 8} : \frac{19\times 7\times 5}{5\times 8}$$

ó simplificando,

$$96 : 133.$$

Concluyamos de aquí que, siempre que el enunciado de una cuestion dá lugar á la comparacion de estensiones superficiales, *para reducirlas á la* UNIDAD *de anchura*, es necesario *formar el producto de la longitud por la anchura, y comparar en seguida las dos cantidades resultantes.*

Respecto de los *volúmenes*, nos bastará tomar un ejemplo para determinar la marcha que debe seguirse.

Sea *determinar la razon en* METROS CÚBICOS *de las estensiones de dos muros de mampostería.*

Suponemos que el primero tiene

60 metros de *largo* por $\frac{3}{4}$ de metro de *grueso* y 3 metros de *alto;*

y el segundo,

125 metros de *largo* por $\frac{7}{8}$ de metro de *grueso* y $4\frac{1}{2}$ metros de *alto*.

Razonando como antes hicimos, hallaremos que, respecto del primer muro, es como si tuviéramos $60 \times \frac{3}{4} \times 3$ metros de *largo* por 1 metro de *grueso* y 1 metro de *alto;* y respecto del segundo $125 \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{2}$ metros de *largo* por 1 metro de *grueso* y 1 metro de *alto*. En otras palabras, los dos muros deben contener,

el 1.°, $60 \times \frac{3}{4} \times 3$ metros cúbicos;

el 2.°, $125 \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{2}$ metros cúbicos.

Luego la *razon* de las dos estensiones en volúmen es *igual* al de

$$60 \times \frac{3}{4} \times 3 \text{ á } 125 \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{2},$$

ó de

$$\frac{60 \times 3 \times 3 \times 4}{16} \text{ á } \frac{125 \times 7 \times 9}{16},$$

ó bien finalmente, de 48 á 175.

Donde se ve que, para obtener el volúmen de los dos muros espresado en *metros cúbicos*, basta hacer para cada uno de ellos *el producto de lo largo por lo grueso y por lo alto*, ó como se dice en Geometría, *el producto de las tres dimensiones*, hecho lo cual se encuentra fácilmente la *razon* de las obras ejecutadas ó que deben ejecutarse.

Regla de tres compuesta. — *Método general de* REDUCCION Á LA UNIDAD.

256. Muchas veces el enunciado de una cuestion encierra *mas de cuatro números* entre los cuales hay que establecer razones sea *directas*, sea *inversas;* y de aquí han nacido las denominaciones de *regla de tres* SIMPLE ó COMPUESTA, *directa* ó *inversa.*

Estas denominaciones se derivan del modo de resolucion á que se refieren, y que es una aplicacion de la teoría de las *proporciones.*

Pero generalmente se ha reemplazado ese método por otro llamado de REDUCCION Á LA UNIDAD, que vamos á esplicar en nuevas cuestiones, haciendo antes observar que el segundo modo de resolucion de los problemas del n.º 252, no es mas que un caso *particular* del mismo.

257. TERCER PROBLEMA. — *Se han necesitado* 1800 *metros de paño de* $\frac{5}{4}$ *de metro de ancho para vestir* 500 *hombres;* se desea saber *el número de metros de paño de* $\frac{7}{8}$ *de ancho necesarios para vestir* 960 *hombres.*

Tabla de los cálculos.

$$\begin{array}{ccc} 1800^{\text{m. larg.}} & \dfrac{5}{4}^{\text{ancho}} & 500^{\text{hombr.}} \\ x & \dfrac{7}{8} & 960 \\ \hline 1800 \times \dfrac{5}{4}^{\text{m. larg.}} & 1^{\text{ancho}} & 500^{\text{hombr.}} \\ x \times \dfrac{7}{8} & 1 & 960 \\ \hline \dfrac{1800 \times 5^{\text{m.}}}{4 \times 500} & 1^{\text{ancho}} & 1^{\text{hombr.}} \\ \dfrac{x \times 7}{960 \times 8} & 1 & 1 \end{array}$$

luego $\dfrac{x \times 7}{960 \times 8} = \dfrac{1800 \times 5}{4 \times 500}.$

Análisis. — Despues de haber dispuesto en *dos líneas*, los *seis* números que comprende el enunciado, contando entre ellos el número de metros buscado, x, se razona de la manera siguiente:

1800 metros de *largo* por $\frac{5}{4}$ de *ancho*, y x metros por $\frac{7}{8}$, son lo mismo que $\dfrac{1800 \times 5}{4}$ y $\dfrac{x \times 7}{8}$ por 1 metro de *ancho* (n.° 255).

Se escriben pues estos números en otras *dos líneas*, conservando los números 500 y 960, y despues se sigue razonando:

Puesto que con $\dfrac{1800 \times 5}{4}$ metros de *largo* por 1 metro de *ancho*, se han podido vestir 500 hombres, *un solo* hombre se vestirá con $\dfrac{1800 \times 5}{4 \times 500}$.

Del mismo modo, si con $\dfrac{x \times 7}{8}$ metros, se han podido vestir 960 hombres, *uno solo* se vestirá con $\frac{x \times 7}{8 \times 960}$; y esta espresion y la de arriba se escriben en otras *dos líneas* debajo de las anteriores.

Pero las dos últimas espresiones acabadas de obtener representan, una y otra, la cantidad de tela necesaria para vestir *un solo* hombre; por consiguiente son *iguales*. Luego tendremos

$$\frac{x \times 7}{8 \times 960} = \frac{1800 \times 5}{4 \times 500};$$

ó, reduciendo al mismo denominador y suprimiéndole despues,

$$x \times 7 \times 4 \times 500 = 1800 \times 5 \times 8 \times 960.$$

Diviviendo los dos miembros de la igualdad por el multiplicador de x, simplificando despues por la supresion de los factores comunes y efectuando las operaciones que resulten indicadas, tendremos

$$x = \frac{1800 \times 5 \times 8 \times 960}{7 \times 4 \times 500} = \frac{36 \times 960}{7} = \frac{34560}{7} = 4937\,\frac{1}{7};$$

lo cual significa que se gastaron 4937 metros y $\frac{1}{7}$ para vestir 960 hombres.

Comprobacion.

$\frac{1800 \times 5}{4 \times 500}$ se reduce evidentemente á $\frac{18}{4}$ ó á $4\frac{1}{2}$: por otro lado $\frac{34560}{7} \times \frac{7}{8 \times 960}$ se reduce tambien á $\frac{3456}{768}$ ó á $4\frac{1}{2}$.

El número $4\frac{1}{2}$ ó $4^{m},50$ esprese en ambos casos la cantidad de tela necesaria para vestir un solo hombre.

258. Cuarto problema.—*500 hombres, trabajando 12 horas cada dia, han gastado 57 dias en abrir un canal de 1800 metros de largo por 7 de ancho y 3 de profundidad;* se pregunta *cuántos dias gastarán 860 hombres, trabajando 10 horas al dia, para abrir un canal de 2900 metros de largo,*

12 *de ancho y 3 de profundidad en un terreno 3 veces mas difícil que el primero.*

(Esta cuestion es una de las mas complicadas que pueden proponerse.)

Tabla del cálculo.

$$\begin{array}{llll} 500^{\text{hom.}} & 12^{\text{hor.}} & 57^{\text{ds.}} & (1800 \times 7 \times 3 \times 1)^{\text{mc.}} \\ 860 & 10 & x & (2900 \times 12 \times 5 \times 3) \\ \hline 1^{\text{hom.}} & 1^{\text{hor.}} & 1^{\text{ds.}} & \left(\dfrac{1800 \times 7 \times 3 \times 1}{500 \times 12 \times 57}\right)^{\text{mc.}} \\ 1 & 1 & x & \left(\dfrac{2900 \times 12 \times 5 \times 3}{860 \times 10}\right) \end{array}$$

$$\text{luego } \frac{x}{1} = \frac{2900 \times 12 \times 5 \times 3}{860 \times 10} \times \frac{500 \times 12 \times 57}{1800 \times 7 \times 3 \times 1}$$

$$\text{ó} \quad x = \frac{2900 \times 12 \times 5 \times 3 \times 500 \times 12 \times 57}{860 \times 10 \times 1800 \times 7 \times 3 \times 1}.$$

Análisis. — Ante todas cosas y con arreglo al n.º 255, es necesario convertir en *metros cúbicos* las dos obras, la ya ejecutada y la que va á ejecutarse; lo cual se hace multiplicando entre sí sus respectivas dimensiones.

Además, como, segun el enunciado, el terreno es 3 *veces mas difícil* de cavar que el primero, si se espresan por 1 y 3 *las dificultades relativas*, conviene introducir en los dos productos mencionados, los factores 1 y 3 que en cierto modo pueden *equipararse* á una *cuarta* dimension, respecto de cada obra.

Esto supuesto, despues de haber colocado, como en el problema anterior, en dos líneas diferentes, todos los números comprendidos en el enunciado, y haciendo razonamientos enteramente iguales á los hechos en la resolucion del tercer problema, formaremos dos nuevas líneas que representarán:

La *una*, el trabajo hecho por 1 hombre *solo*, en 1 hora y en 1 dia;

La *otra*, el trabajo hecho por 1 hombre *solo*, en 1 hora y en x dias.

Ahora es claro que estas dos cantidades de trabajo deben estar en *razon directa* de los dos números de dias empleados en ejecutarlas: tendremos pues la igualdad

$$\frac{x}{1}=\frac{2900\times12\times5\times3}{860\times10}:\frac{1800\times7\times3\times1}{500\times12\times57};$$

de donde se deduce (n.° 131)

$$x=\frac{2900\times12\times5\times3}{860\times10}\times\frac{500\times12\times57}{1800\times7\times3\times1},$$

ó

$$x=\frac{2900\times12\times5\times3\times500\times12\times57}{860\times10\times1800\times7\times3\times1};$$

y si se ejecutan todas las *simplificaciones* y en seguida se efectuan los cálculos indicados, se obtiene finalmente

$$x=549\frac{51}{301};$$

es decir que los 860 hombres necesitan 549 dias y $\frac{51}{301}$ ó próximamente $\frac{1}{6}$ de otro dia para abrir el segundo canal.

259. Los problemas precedentes bastan en nuestro juicio para enterar al lector de la marcha que debe seguirse cuando se emplea el método llamado de *reduccion á la unidad*, método que tendremos ocasion de aplicar á otras reglas ulteriores dependientes de la *regla de tres*.

Pero creémos útil, para terminar todo lo concerniente á esta, volver á considerar los resultados de los dos últimos problemas, á fin de deducir de ellos algunas consecuencias sobre el uso de las razones *directas* ó *inversas*.

El *análisis* del problema del n.° 257 ha conducido á una primera espresion del número de metros buscado,

$$x=\frac{1800\times5\times8\times960}{7\times4\times500}.$$

Si ahora retrocedemos al enunciado de la cuestion para buscar en él los términos *correspondientes*, de cada especie, y separamos por medio del signo × las diferentes razones de cada término á su *correspondiente*, podremos poner la espresion anterior bajo la forma

$$\frac{x}{1800}=\frac{5}{4}\times\frac{8}{7}\times\frac{960}{500},$$

ó bien bajo esta otra (n.° 131)

$$\frac{x}{1800}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{8}}\times\frac{960}{500}.$$

Reflexionando sobre la composicion del producto indicado en el segundo miembro, se vé que el segundo factor, que es el de los dos *números de hombres* que deben vestirse, está en *razon directa* con los dos números de metros de paño, $\frac{x}{1800}$; mientras que el primer factor de dicho segundo miembro, ó sea la razon de los dos anchos, es *inversa* respecto de la razon indicada, $\frac{x}{1800}$; por consiguiente esta razon, que se llama *compuesta* (n.° 254), *es igual al producto de las razones* de los dos números de hombres y de las dos anchuras, *directa* respecto de los hombres, é *inversa* respecto de las anchuras.

Y en efecto, cuantos mas hombres hay que vestir, *mas* tela se necesita; pero *cuanto mas* anchura tiene la tela, *menos* debe tener de larga, para que la cantidad de tela sea la misma.

La espresion de x obtenida en el problema del n.° 258, es

$$x=\frac{2900\times 12\times 5\times 3\times 500\times 12\times 57}{860\times 10\times 1800\times 7\times 3\times 1},$$

y puede presentarse bajo la forma

$$\frac{x}{57}=\frac{2900}{1800}\times\frac{12}{7}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\times\frac{500}{860}\times\frac{12}{10};$$

donde tambien se ve que la *razon* de los dos números de dias necesarios para la ejecucion de los trabajos *es igual al producto de las razones de los números correspondientes* de cada especie, *directas* respecto de las dimensiones de los canales y de la dificultad del terreno, pero *inversas* respecto de los números de trabajadores y de las horas diarias de trabajo.

De aquí podria concluirse esta especie de REGLA GENERAL para resolver cualquier cuestion cuyo resultado contenga razones:

Fórmese un producto de todas las razones DIRECTAS *ó* INVERSAS, *de los números correspondientes de cada especie, escepto aquella en que entra la incógnita;* y despues *iguálese este producto á la razon entre la incógnita y la cantidad de su misma especie.*

Así se obtiene la espresion de la *igualdad de dos razones*, donde fácilmente se sacará el valor de x, cuidando sin embargo, de no efectuar los cálculos indicados sino despues de todas las simplificaciones, que á simple vista se descubran.

Recordaremos además que (n.º 253) las razones serán *directas* ó *inversas*, segun que en el *análisis* del problema hayamos visto que *á mas* corresponde *mas*, ó *á menos*, *menos;* ó por el contrario *á mas* corresponde *menos*, ó *á menos*, *mas.*

REGLA DE INTERÉS SIMPLE.

260. Se llama INTERÉS SIMPLE de una suma de dinero, el beneficio resultante del *préstamo* que se hace de *dicha suma* durante *cierto tiempo;* la cantidad prestada ó colocada se llama CAPITAL.

El *interés* de una suma depende del importe del *capital*, del *tiempo* que dura el préstamo ó la colocacion, y de lo que se llama el *tanto* de interés, ó sea el *beneficio* que produce una suma determinada y *constante* en un espacio de tiempo tambien *determinado.*

Ordinariamente, el *tanto* de interés es el beneficio que deben producir 100 reales colocados durante 1 año.

Este *tanto*, que puede considerarse como una especie de *unidad* de interés, es de pura convencion entre el *prestador* y el *tomador;* depende generalmente de la abundancia ó de la escasez de los *capitales.* Hay sin embargo en el comercio y en la banca ciertos límites (fijados, ya por el uso, ya por la ley) mas allá de los cuales, no puede elevarse el tanto de interés sin pasar á ser *usura*.

Es evidente que los *intereses* de dos *capitales* colocados durante el *mismo tiempo*, deben ser *proporcionales* á dichos capitales, y que los intereses de un *mismo capital* son tambien *proporcionales* al *tiempo* que dura el préstamo ó la colocacion.

De donde resulta que la *regla de interés* no es mas que un caso particular de la *regla de tres:* así, las cuestiones que á ella se refieren, deben tratarse del mismo modo que las precedentes.

261. Primer ejemplo. — Se desea saber *el interés de una suma de* 4500 *reales, colocada durante* 2 *años* y 5 *meses, á razon de* 7 *reales por cada cien reales al año* $\left(\text{ó, por abreviacion, á 7 p. } \frac{0}{0}\right)$.

Este enunciado equivale á este otro:

Si 100 *reales producen* 7 *reales en* 1 *año*, ó 12 *meses*, ¿cuánto deberán producir 4500 reales en 2 años y 5 meses, ó sea 29 meses?

Los números pueden disponerse en la forma siguiente:

$$\begin{array}{lccc} & 100 & 12^{m} & 7^{r} \\ & 4500 & 29^{m} & x \\ \hline \text{de donde} & 1^{r} & 1^{m} & \dfrac{7}{100 \times 12} \\ & 1^{r} & 1^{m} & \dfrac{x}{4500 \times 29}. \end{array}$$

Las cantidades $\frac{7}{100 \times 12}$ y $\frac{x}{4500 \times 29}$, espresan una y otra la que produce 1 real en 1 mes y deben por consiguiente ser iguales; tendremos pues

$$\frac{x}{4500 \times 29} = \frac{7}{100 \times 12};$$

lo cual dá

$$x = \frac{4500 \times 29 \times 7}{100 \times 12} = \frac{45 \times 29 \times 7}{12} = \frac{15 \times 29 \times 7}{4},$$

ó, efectuando los cálculos y reduciendo á decimales,

$$x = 761^{r},25.$$

Tal es el interés de 4500 reales colocados al 7 p. $^0/_0$ durante 2 años y 5 meses.

Comprobacion.

$$\begin{array}{ccc} 100^{r} & 12^{m} & 7^{r} \\ 4500^{r} & 29^{m} & 761^{r},25 \\ \hline \end{array}$$

1.° $\dfrac{7}{1200} = \dfrac{0,07}{12} = 0,005833\ldots;$

2.° $\dfrac{761,25}{4500 \times 29} = \dfrac{7,6125}{45 \times 29} = \dfrac{7,6125}{1305} = 0,005833\ldots.$

Segundo ejemplo. — Se desea saber *el interés de una suma* de $2524^{r},65$ colocada durante 8 años y 7 meses al $4\frac{1}{2}$ p. $^0/_0$.

$$\begin{array}{ccc} 100^{r} & 12^{m} & 4^{r},50 \\ 2524,65 & 31 & x \\ \hline 1^{r} & 1^{m} & \dfrac{4,50}{1200} \\ 1 & 1 & \dfrac{x}{2524,65 \times 31} \end{array}$$

luego $x = \dfrac{2524,65 \times 31 \times 4,50}{1200} = \dfrac{25,2465 \times 31 \times 4,5}{12}$

ó efectuando los cálculos,

$$x = 293,4905325.$$

Así, el interés pedido es $293^{r},49$ *en menos de un céntimo.*

Comprobacion.

$$\frac{4,50}{1200} = \frac{0,0450}{12} = 0,00375,$$

$$\frac{293,49}{2524,65 \times 31} = \frac{29349}{7949175} = 0,003749.$$

262. En general, designemos por a un capital prestado durante un tiempo t, á razon de i por $^0/_0$, y por I el interés del capital a.

Tendremos

$$\begin{array}{ccc} 100^{r} & 1^{an} & i^{r} \\ a & t & \mathrm{I} \\ \hline 1 & 1 & \frac{i}{100}, \text{ interés de } 1^{r} \text{ por 1 año,} \\ 1 & 1 & \frac{\mathrm{I}}{a\times t}, \text{ interés de } 1^{r} \text{ por 1 año;} \end{array}$$

luego

$$\frac{\mathrm{I}}{a\times t}=\frac{i}{100},$$

y por consiguiente,

$$\mathrm{I}=\frac{a\times t\times i}{100}=\frac{a\times i\times t}{100}.$$

Esta espresion de I es lo que en matemáticas se llama una fórmula, porque representa, en términos simples y concisos, las operaciones que deben ejecutarse en cada caso particular.

Hace pues las veces del enunciado de una regla; pero es necesario observar que el tiempo t puede ser muy bien un número *fraccionario* de la unidad *año*, llevando por denominador bien sea el número de *meses*, bien sea el número de *dias* comprendidos en el año.

Por lo demás, presentada bajo la forma $\mathrm{I}=\frac{a\times i}{100}\times t$, puede traducirse en la regla siguiente:

Para determinar el interés I, *multiplíquese* el capital dado por el tanto de interés en 1 *año*, y *divídase* el producto por 100, *buscando* despues en *partes alícuotas*, (n.° 150), el resultado para el tiempo t.

Apliquemos esta regla al segundo ejemplo.

Tendrémos primero

$$2524,65 \times 4,5 = 11360,925,$$

y dividiendo por 100.	113,60925
buscando en seguida el interés de.	$2^{ans}\ 7^{m}$
se hallará primero para 2^{ans}.	227,21850
despues para 6^{m}	56,804625
despues para 1^{m}	9,467437
	293,490562 ó 293^{r},49

que es el mismo resultado de antes.

263. Este segundo modo de operar es particularmente preferible cuando se trata de *determinar el interés* de una suma en *cierto número de dias*, como sucede muchas veces en la banca y en el comercio.

Propongámonos *determinar el interés de* 1748 *reales* 19 *céntimos en* 113 *dias á razon de* $4^{3}/_{4}$ p. $^{0}/_{0}$ *al año* (que para simplificar supondremos de 360 dias, dando 30 dias á cada mes).

Se puede comenzar por *multiplicar* 1748,19 *por* $4^{3}/_{4}$, siguiendo el método de las *partes alicuotas;* y despues, *descomponiendo* 113 en 60 + 30 + 20 + 3, aplicarémos de nuevo el método de la multiplicacion de las *partes alicuotas* á la *multiplicacion* del primer producto obtenido, por las diferentes partes de 113.

Cuadro del cálculo.

		1748,19
		$4\,^{3}/_{4}$
		6992,76
	$^{1}/_{2}$	874,095
	$^{1}/_{4}$	437,0475
		8303,9025
y dividiendo por 100		83,039025
para	60^{dias}	13,839837
	30	6,919918
	20	4,613279
	3	0,691992
		26,065026

(Para 20 dias, se ha tomado el *tercio* del producto hallado para 60, y para 3 dias se ha tomado la *décima parte* del producto hallado para 30.)

Así, el interés de $1748^r,19$ en 113 dias, es $26^r,06$.

Fácilmente se reconocerá, aplicando al mismo ejemplo el primer procedimiento, que el que acabamos de seguir es mas espedito.

264. *Advertencia.* — En ciertos tantos de interés, en lugar de referirse al capital 100, suele variarse el capital cuando es parte alícuota de dicho 100, representando por 1 el interés correspondiente á cada parte alícuota.

Así sucede cuando el tanto por ciento es 10, ó 5, ó 4, ó $2\frac{1}{2}$; en cuyos casos se dice respectivamente que el dinero se ha dado al *décimo*, ó al 20°, ó al 25°, ó al 40° (*).

265. La fórmula (1) del n.° 262 comprende *implícitamente* las *soluciones* de *cuatro* problemas generales diferentes.

1.° *Conociendo á* a, t *é* i, *hallar á* I.

Este es el problema resuelto en los varios ejemplos puestos hasta ahora.

2.° *Conociendo á* I, t *é* i, *hallar á* a.

3.° *Conociendo á* I, a *y* t, *hallar á* i.

4.° Finalmente, *conociendo á* a, I *é* i, *hallar á* t.

Propondrémos como ejercicios, al fin de este capítulo, varias aplicaciones de estos diversos problemas; y nos limitarémos por ahora, á poner un ejemplo del *cuarto*, tratándole por los dos métodos que hemos espuesto anteriormente:

Una suma de $2524^r,65$ *ha producido* $293^r,49$, *á razon de* $4^1/_2$ p. $^0/_0$ AL AÑO: *se desea saber cuánto tiempo habrá estado prestada dicha suma.*

(*) Este párrafo es realmente intraducible en el original, porque se refiere á fórmulas vulgares en Francia que no tienen equivalentes en nuestro pais: por decir algo y no alterar la numeracion del testo, hemos traducido esas pocas líneas, usando denominaciones poco acostumbradas entre nosotros. (N. del T.)

Primer método.

$$\begin{array}{ccc}
100 & 1^{\text{año}} & 4\tfrac{1}{2} \\
2524,65 & 1 & 293,49 \\
\hline
1 & 1 & \dfrac{4,50}{100} \\
1 & 1 & \dfrac{294,49}{2524,65}
\end{array}$$

$$\frac{t}{1} = \frac{293,49}{2524,65} \times \frac{100}{4,5} = \frac{29349}{252,465 \times 45} = \frac{29349000}{11360925}.$$

$$\begin{array}{r|l}
29349000 & 11360925 \\
\cline{2-2}
6627150 & 2^{\text{años}}\, 7^{\text{meses}} \\
\text{reduccion á meses} \quad 12 & \\
79525800 & \\
9325 &
\end{array}$$

La fraccion despreciada es *menor que* 0,001 de *mes*.

Segundo método.

$$\begin{array}{lr}
 & 2524,65 \\
 & 4\tfrac{1}{2} \\
\hline
 & 10098,68 \\
\text{para } \tfrac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots & 1262,325 \\
\hline
 & 11360,925 \\
\text{ó dividiendo por } 100, \ldots & 113,60925
\end{array}$$

ó dividiendo por 100, . . 113,60925 *intereses* de 1 año;

y como segun el enunciado, 293,49 es el interés de t años, para obtener el tiempo buscado, es necesario dividir 29349000 por 11360925, como antes.

REGLA DE DESCUENTO.

266. *Descuento* es la parte que se desquita del *importe* de una letra de comercio, que no es pagadera sino al cabo de *cierto tiempo*, y que se quiere cobrar antes del *vencimiento*.

El descuento se hace ordinariamente á *tanto* por *ciento* al año, y eso es lo que se llama tanto de descuento.

El *banquero* es el que paga la letra *anticipadamente*.

Es fácil reconocer que la *regla de descuento*, se comprende en la *regla de interés*, con la diferencia de que en esta el *tomador* está obligado á devolver al *prestador* la suma prestada y además el interés correspondiente; mientras que en el descuento el *poseedor de la letra* solo debe recibir el *escedente* entre el *importe* de la letra y el *descuento* que se le hace por causa del anticipo del pago.

PRIMER EJEMPLO. — *Se quiere descontar á razon de* 4,80 p. $^0/_0$ *al año una letra de* $875^r,49$, *pagadera á los* 18 *meses.*

Primer método.

$$\begin{array}{lll} 100^r & 12^{ms} & 4^r,80 \\ 875,49 & 18 & x \\ \hline 1 & 1 & \dfrac{4,80}{1200}, \text{ descuento por } 1^r \text{ y por } 1^{año} \\ 1 & 1 & \dfrac{x}{875,49\times 18} \quad \text{id.} \end{array}$$

luego

$$\frac{x}{875,49\times18}=\frac{4,80}{1200};$$

de donde

$$x=\frac{4,80\times875,49\times18}{1200}=\frac{40\times87549\times18}{1000000},$$

ó efectuando los cálculos, $x=63,035280=63,04$.

Así pues, el descuento que ha de hacerse á la letra es de 63 reales y 4 céntimos.

Importe de la letra. . .	$875^r,49$
Descuento.	63 ,04
Diferencia.	812 ,45

Luego el *portador* de la *letra* solo debe recibir del banquero 812 reales y 45 céntimos.

Comprobacion.

$$\begin{array}{ccc} 100 & 12 & 4{,}80 \\ 875{,}49 & 18 & 63{,}04 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{4{,}80}{1200}=\frac{48}{12000}=0{,}004$$

$$\frac{63{,}04}{875{,}49\times 18}=\frac{6304}{87549\times 18}=\frac{6304}{1578882}=0{,}004\ldots..$$

Segundo método.

Importe de la letra	875,49
descuento por °/₀ y por $1^{año}$	4,8
	700 392
	3501 96
	4202,352
dividiendo por 100	42,02352
descuento por	$1^{año}$ 6^{meses}
$1^{año}$	42,02352
6^{meses}	21,01176
	63,03528 como arriba.

Este ejemplo basta para hacer ver que hay identidad, bajo el punto de vista de los cálculos, entre las dos reglas de *interés* y de *descuento*.

La cuestion siguiente vamos á tratarla solo por el segundo método.

SEGUNDO EJEMPLO. — *Descontar una letra de* $3478^r,19$ *pagadera á los* 286 *dias, siendo el tanto de descuento* $6^r,25$ *en* 360 *dias.*

Comencemos por descomponer el número 286 en

$$180+90+10+5+1.$$

Esto supuesto, hé aquí el cuadro del cálculo:

	3478,19
	6,25
	1 7390 95
	6 9563 8
	208 6914
descuento por 360	217,3868 75
180	108,6934 37
90	54,3467 19
10	6,0385 24
5	3,0192 62
1	0,6038 52
	172,7017 94
importe de la letra	3478,19
descuento	172,70
suma que debe recibirse	3306,49

La operacion podria *probarse*, volviendo á hacer la misma operacion con el *duplo* de 3478,19 y *dividiendo* por 2 el nuevo resultado.

267. La generalizacion de la regla de descuento conduciria á la fórmula

(2) $$E = \frac{a \times e \times t}{100}$$

en la cual e, E designan los descuentos para 100 reales y para el *importe* de la letra: dichos signos reemplazan á i, I de la fórmula del n.° 162.

Tambien se podria, á consecuencia de la fórmula (2), establecer los enunciados de *cuatro* problemas generales, análogos á los del número 265; pero dejamos todas las aplicaciones para el fin de este capítulo.

268. Existe *otra regla de descuento* de la cual no podemos menos de hablar; porque aunque generalmente no se usa, parece mas *racional*, y sobre todo mas *justa* con relacion al que quiere descontar en papel.

Un ejemplo bastará para dar una idea de este segundo modo de descontar.

No siendo pagadera sino á 15 *meses una letra de* 1500 *reales, un banquero consiente en abonarla mediante un descuento de 4,60 p. %. Se desea saber cuanto debe recibir el propietario de la letra.*

Análisis. — Admitamos por un momento, que 4,60, que es aquí *el tanto* de descuento, sea tambien *el tanto* de interés de una cantidad que se prestára.

Es claro que el *poseedor de la letra* deberia recibir es este dia una cantidad que, colocada al interés de 4,60 p. % al año, durante 15 meses, le produjera, reunidos el capital y los intereses, el valor del *importe* de su letra.

Ahora bien, siendo 4,60 el interés de 100 reales al año, en 15 meses será $4,60 + \frac{1}{4}$ de 4,60, ó sea 5,75.

Lo cual prueba ya, que 100 reales colocados ahora, producirian á los 15 meses $105^r,75$, reunidos el capital y los intereses.

Por consiguiente, $105^r,75$ *pagaderos dentro de* 15 *meses* equivalen á 100 reales *pagaderos á la vista;* luego 1 *solo* real pagadero dentro de 15 meses equivale á $\frac{100}{105,75}$ pagaderos á la vista, y por lo tanto finalmente, 1500 reales *pagaderos á los* 15 *meses* pueden estar representados por

$$\frac{100 \times 1500}{105,75}, \text{ ó } \frac{15000000}{10575}, \text{ ó } 1418^r,4397,$$

pagaderos á la vista.

De donde resulta que el *poseedor* de la letra deberia recibir del banquero una cantidad de 1418,4397, por el *importe* de su letra descontada.

En efecto, si se calcula, segun la regla de interés, aplicando el segundo método por ejemplo, lo que deben producir $1418^r,4397$ al cabo de 15 meses, á razon de $4^r,60$ al *año*, se obtiene

	$I = 81^r,5603$
cuya cantidad sumada con	$1418^r,4397$
dá	$1500^r,0000$

que es el *importe* de la letra.

Ahora bien, en lugar de seguir este procedimiento ¿qué hace el banquero?

Determina el interés de 1500 reales en 15 meses, y al tanto de 4,60 p. %,

lo cual dá	$86^r,25$
cuya cantidad *restada* de	1500
dá	$1413^r,75$

que es lo que entrega al poseedor de la letra.

Advertencia. — Es de notar que el esceso de $86^r,25$ sobre $81^r,56$ ó sea $4^r,69$, que el banquero beneficia, no es otra cosa que el *interés* de los $81^r,56$, ó sea el *interés del interés* de los 1500 reales importe de la letra. Porque, multiplicando 81,56 por 5,75 y dividiendo por 100, se obtiene 4,6897 ó 4,69.

Este beneficio que se atribuye el banquero, aparte del que le corresponde de derecho, por causa del anticipo del pago, es una verdadera pérdida sufrida por el tenedor de la letra.

Habria un medio de operar segun la primera regla, sin perjudicar los intereses del que presenta á descontar un efecto de comercio; y sería establecer un tanto de *descuento* un poco menos elevado que el tanto de *interés;* pero la dificultad sería proporcionar el uno al otro en los casos que ocurriesen.

Sea sin embargo lo que quiera, la *primera regla* está generalmente admitida en el comercio, porque es mas cómoda y espedita en la práctica. Además es negocio de convenio entre el banquero y el tenedor de la letra, y este consigue de todos modos la ventaja de realizar inmediatamente el valor de su letra para atender á sus necesidades.

Dejamos para el séptimo capítulo las cuestiones de interés y de descuento *compuestos*, porque exigen para tratarse completamente, el conocimiento y el uso de las tablas de logaritmos.

Rentas sobre el Estado y Seguros.

269. Aunque las cuestiones que se refieren á las operaciones, tanto sobre *papel del Estado*, como sobre los *Seguros*, no ofrecen mas que aplicaciones muy sencillas de la regla de interés, no podemos pasarlas en silencio, y vamos á tratar algunas.

Primera cuestion. — *Una persona posee 400 francos de renta sobre el Estado en papel de $4^1/_2$ p $^0/_0$, y quiere realizar el capital ¿qué cantidad debe recibir?*

Puesto que se tiene $4^1/_2$ ó $\frac{9}{2}$ francos por 100 francos, 1 *solo* franco es la renta de $100 : \frac{9}{2}$, ó $\frac{200}{9}$; luego 400 francos expresan la renta de $\frac{200}{9} \times 400$, es decir $\frac{80000}{9}$ ó 8888,888.....

Luego la persona debe recibir 8888,89 (*).

Segunda cuestion. — *¿Qué cantidad habrá que colocar en papel del* 3 p $^0/_0$ *á* 45, *para tener una renta de* 12000 *reales?*

Si 45 reales producen 3 reales, 1 *solo* real será el interés de $\frac{45}{3}$, y 12000 reales serán el interés de $\frac{45}{3} \times 12000$, ó sea de 180000 reales.

Por consiguiente, para tener 12000 reales de renta, es necesario emplear 180000 reales en papel del 3 p. $^0/_0$ cotizado á 45.

Tercera cuestion. — *Con* 130000 *reales empleados en papel del* 3 p. $^0/_0$ *cotizado á* 49 *¿qué renta podria tenerse?*

Puesto que 49 reales producen 3 de renta, 1 *solo* real deberá producir $\frac{3}{49}$, y 130000 reales deberán producir 130000 veces $\frac{3}{49}$, ó sea 7959^r,18 de renta.

Pero como los cupones de las láminas no comprenden fracciones de real, deberá el capital aumentarse ó disminuirse convenientemente para que resulten números redondos con arreglo á las cantidades de interés expresadas en los cupones.

Entiéndase tambien que el cálculo está aquí efectuado sin tener en cuenta los *derechos* del agente de cambio, persona

(*) Hemos dejado este ejemplo en francos como se halla en el texto, porque sabido es que en España no hay papel al $4^1/_2$.

que por necesidad legal interviene en estos casos entre el comprador y el vendedor.

270. Las cuestiones sobre los *Seguros* no son menos fáciles de resolver.

PRIMERA CUESTION. — *Una casa valuada en* 150000 *reales está asegurada, mediante una* PRIMA *de* $0^r,15$ *por* 1000 *reales al año. Se desea saber el importe del Seguro.*

Puesto que 1000 reales exigen una *prima* de $0^r,15$, resulta que 1 *solo* real exigirá $0^r,00015$; y 150000 reales exigirán

$$0,00015 \times 150000, \text{ ó sea } 22,5;$$

luego el importe de la prima total es

$$22^r,50.$$

SEGUNDA CUESTION. — *¿Cuál es el valor de una casa por la cual se pagan* 18 *reales de prima al año, al tanto de* $0^r,20$ *por* 1000^r*?*

Puesto que 1000 reales pagan $0^r,20$ de prima, 1 *solo* real debe pagar 0,0002; luego buscando *cuantas veces* los 18 reales *de la prima anual* contienen á 0,0002, se obtendrá el valor de la casa.

Tenemos

$$\frac{18}{0,0002} = \frac{180000}{2} = 90000.$$

Luego la casa vale 90000 reales.

TERCERA CUESTION. — *Un buque que lleva* 250000 *reales de mercaderías, está asegurado al* 6 p. % *hasta llegar á su destino; pero en el viage, esperimentan los géneros una* AVERÍA *estimada en* 40000 *reales de que deben hacerse cargo los aseguradores. ¿Cuál es la situacion de estos con relacion á los dueños del cargamento?*

Siendo 6 p. % el tanto de seguro, los aseguradores deben cobrar una *prima* de $\frac{250000 \times 6}{100}$, ó sean 15000 reales; pero deben abonar los 40000 reales de la avería; luego en definitiva, los propietarios del cargamento deben recibir 25000 reales de los aseguradores.

No presentarémos ya mas ejemplos de estas aplicaciones, las cuales, segun se ve, no ofrecen dificultad alguna.

REGLA DE COMPAÑÍA.

271. La regla llamada de *compañía* tiene por objeto *Repartir entre varias personas asociadas para un negocio comercial ó industrial, la* GANANCIA *ó la* PÉRDIDA *que resulte de su empresa.*

Está generalmente admitido (y es cosa además conforme á la equidad) que la parte de *ganancia* ó de *pérdida* de cada socio es: 1.º *proporcional á su puesta*, cuando los *tiempos son iguales;* 2.º *proporcional al tiempo*, cuando las *puestas son iguales.*

De aquí resulta que, cuando las puestas y los tiempos son *diferentes*, las partes son *proporcionales á los productos* de las *puestas* por los *tiempos*, puesto que multiplicando las puestas por los tiempos respectivos, se reducen á haber estado colocadas durante el *mismo tiempo.*

Así pues, la cuestion considerada bajo el punto de vista mas general, equivale á *repartir un número dado en partes* DIRECTAMENTE *proporcionales á otros números dados.*

Tratarémos primero algunos ejemplos particulares.

PRIMER PROBLEMA. — *Tres personas se asociaron para una empresa, con igual trabajo en la gestion; pero poniendo la primera* 15000 *reales, la segunda* 22540, *y la tercera* 5600. *Al cabo de un año ganaron* 12000 *reales: se desea saber cuánto corresponde á cada socio.*

ANÁLISIS. — Como la *ganancia total* se ha conseguido con las *tres* puestas ó capitales reunidos, se hace necesario sumar dichos capitales ante todas cosas, para deducir la ganancia que ha podido producir un real, y por consiguiente la que corresponde á cada una de las tres cantidades puestas.

La suma de dichas cantidades es 63140 reales: deberemos pues razonar del modo siguiente:

63140 reales han dado una ganancia de 12000 reales; luego 1 *solo* real habrá debido producir $\frac{12000}{63140}$ de ganancia.

$$15000\ldots\ \frac{12000}{63140}\times 15000=\frac{18000000}{6314}=2850{,}807$$

$$22540\ldots\ \frac{12000}{63140}\times 22540=\frac{27048000}{6314}=4283{,}813$$

$$25600\ldots\ \frac{12000}{63140}\times 25600=\frac{30720000}{6314}=\underline{4865{,}378}$$

$$11999{,}998$$

Así pues, el primer socio debe recibir $2850^r{,}81$; el segundo, $4383^r{,}81$; y el tercero $4865^r{,}38$.

En efecto, sumadas estas tres cantidades reproducen la ganancia total.

Segundo problema. — *Un particular comienza un negocio con un capital de* 25000 reales.

Cinco meses *mas tarde, queriendo ampliar su empresa, interesa á un capitalista que le proporciona* 40000 *reales.*

Seis meses *despues de este préstamo primero, encuentra otro capitalista que le proporciona* 60000 *reales.*

Al cabo de dos *años, se disuelve la compañía, habiendo realizado una ganancia de* 80000 *reales: se habia convenido además que el antedicho particular, quedando solo encargado de las operaciones, recibiria una prima de* 5 *p.* °/₀ *del beneficio total, sin contar la parte proporcional al capital por él aportado.*

Se desea saber la parte de cada socio.

La primera operacion que debe ejecutarse, es la de rebajar de los 80000 reales ganados, el 5 p. °/₀, ó sea la vigésima parte de ese número, que son 4000 reales, los cuales corresponden al empresario por la *prima* estipulada.

Quedan 76000 reales que repartir entre los tres socios *proporcionalmente* á los *productos* de sus *capitales puestos* por los *tiempos respectivos*, durante los cuales han permanecido en la empresa.

Ahora bien: 1.° 25000 reales colocados durante 24 meses, equivalen á 25000×24, ó sea 600000 reales colocados durante 1 mes;

2.° 40000 reales colocados durante 19 meses, equivalen á 760000 reales;

3.° 60000 reales colocados durante 13 meses, equivalen á 780000 reales: y con esto la cuestion queda reducida al primer problema.

Despues de haber hecho la *suma* de las tres puestas, lo cual dá 2140000 reales, se obtienen sucesivamente las tres partes del modo siguiente:

Primera parte... $\frac{76000}{2140000}\times 600000 = \frac{4560000}{214} = 21308,411$

á lo cual es necesario añadir los 4000 rs. de la prima.. 4000

$25308,411$

Segunda parte... $\frac{76000}{2140000}\times 760000 = \frac{5776000}{214} = 26990,654$

Tercera parte... $\frac{76000}{2140000}\times 780000 = \frac{5868000}{214} = 27700,934$

$79999,999$

Luego estas partes son respectivamente

$$25308^{r},42;\quad 26990^{r},65;\quad 27700^{r},93.$$

Advertencia. El medio de hacer la prueba de la operacion total se ofrece á la imaginacion naturalmente: consiste en *sumar* todas las partes obtenidas; y la *suma* debe ser igual á la *ganancia* que se repartia.

272. Sea en *general*, un número cualquiera, a, que se quiere distribuir en *partes proporcionales* á otros números dados, $m, n, p, q, \ldots$

Hágase lo primero la suma de los números $m, n, p, q, \ldots$, y despues *multiplíquese sucesivamente* por cada uno de estos números la razon

$$\frac{a}{m+n+p+q+\ldots}$$

Así se obtiene

$$\frac{a\times m}{m+n+p+\ldots},\quad \frac{a\times n}{m+n+p+\ldots},\quad \frac{a\times p}{m+n+p+\ldots},\ldots,$$

fracciones que, teniendo el mismo denominador, están necesariamente entre sí (n.° 254) en la *razon directa* de sus numeradores ó á causa del factor comun a, que se puede suprimir, en la *razon directa* de los números m, n, p, q,...

Cuando los números m, n, p,... son *fraccionarios*, se comienza por reducirlos al mismo denominador, con lo cual la cuestion se reduce á la anterior.

Distribuir 360 en *cuatro* partes que sean entre sí como los números $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{32}$.

Estas fracciones, reducidas al mínimo comun denominador (n.° 115) se convierten en $\frac{64}{96}$, $\frac{84}{96}$, $\frac{88}{96}$, $\frac{51}{96}$.

Luego las cuatro partes deben ser respectivamente *proporcionales* á los números 64, 84, 88, 51.

Siendo 287 la *suma* de estos cuatro números, tendremos sucesivamente:

para la *primera parte*, $\frac{360}{287} \times 64 = \frac{23040}{287} = 80,28$

para la *segunda parte*, $\frac{360}{287} \times 84 = \frac{30240}{287} = 105,37$

para la *tercera parte*, $\frac{360}{287} \times 88 = \frac{31680}{287} = 110,38$

para la *cuarta parte*, $\frac{360}{287} \times 51 = \frac{18360}{287} = 63,97$

360,00

273. Las *contribuciones* percibidas anualmente á nombre del Estado, se determinan por medio de la regla de *compañía*.

La *contribucion territorial*, por ejemplo, despues de haberse fijado en su totalidad, se distribuye entre las provincias en *razon directa* de la renta territorial de cada una; despues cada cupo provincial se distribuye análogamente entre las municipalidades de cada provincia; y por último cada cupo municipal se reparte guardando la misma proporcion entre los propietarios del suelo.

274. Las cuestiones siguientes se enlazan mas ó menos directamente con la regla de compañía.

Tercer problema. — *Se quiere repartir una suma de*

36000 *reales entre* CUATRO *personas, de modo que la segunda tenga* DOS VECES *tanto como la primera; que la tercera tenga*, por sí sola, TANTO *como las dos primeras juntas; y por último que la cuarta tenga* TRES VECES *tanto como la tercera.*

Llamemos x á la *primera* parte; la *segunda*, segun el enunciado, será $2x$; la *tercera*, $2x + x$, ó $3x$; y la *cuarta*, $3x \times 3$, ó $9x$.

Las *cuatro* partes habrán de ser proporcionales á los números $x, 2x, 3x, 9x$, ó, suprimiendo el factor comun x, á los números 1, 2, 3, 9.

La cuestion por consiguiente entra en el caso del n.° 272. De este modo se obtiene para las cuatro partes:

$$\textit{primera parte.}\ \frac{36000}{1+2+3+9} \times 1, \text{ ó } \frac{36000}{15} = 2400$$

$$\textit{segunda parte}\ldots\ldots \frac{36000}{15} \times 2, \text{ ó } \frac{72000}{15} = 4800$$

$$\textit{tercera parte}\ldots\ldots \frac{36000}{15} \times 3, \text{ ó } \frac{108000}{15} = 7200$$

$$\textit{cuarta parte}\ldots\ldots \frac{36000}{15} \times 9, \text{ ó } \frac{324000}{15} = \underline{21600}$$

$$36000$$

CUARTO PROBLEMA. — Una persona al morir deja cuatro herederos, y ha hecho este singular testamento:

El *primero* debe percibir el 6.° de la herencia total, el *segundo* los $\frac{2}{5}$, el *tercero* los $\frac{4}{9}$ y el *último* el $\frac{1}{3}$: la herencia total son 20000 duros. Se desea saber qué es lo que en realidad corresponde á cada heredero.

ANÁLISIS. — Si la suma de las *cuatro* fracciones fuera igual á 1, las condiciones del testamento se cumplirian fácilmente: no habria mas que tomar sucesivamente el $\frac{1}{6}$, los $\frac{2}{5}$, los $\frac{4}{9}$, y el $\frac{1}{3}$ de 20000 duros.

Pero si reducimos las fracciones $\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}$, al mismo denominador, se halla $\frac{15}{90}, \frac{36}{90}, \frac{40}{90}, \frac{30}{90}$, cuya suma hace $\frac{121}{90}$ ó $1\,\frac{31}{90}$, resultado *mayor* que 1; donde se ve que en esta forma no habria herencia ni aun para los tres primeros.

Pero si se reflexiona sobre el enunciado de la cuestion, se comprenderá que las intenciones del testador eran que sus bienes se distribuyeran *proporcionalmente* á los cuatro números $\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}$, y por consiguiente á los números 15, 36, 40, 30.

Por consiguiente este problema entra igualmente en el caso del n.° 272. Al fin de este capítulo se encontrarán otras aplicaciones de la *regla de compañía*.

Pondremos tambien aquí dos reglas usadas en las operaciones comerciales, y conocidas con los nombres de regla CONJUNTA ó de CAMBIO, y regla de ALIGACION.

REGLA CONJUNTA Ó DE CAMBIO.

275. Esta regla tiene por objeto *determinar la relacion de las monedas de dos paises, conociendo de antemano las relaciones de estas monedas con las de otros paises.*

Se llama *regla conjunta*, porque consiste en reducir á una sola razon, por via de multiplicacion, varias razones dadas, de donde resulta una *razon compuesta*.

Los dos ejemplos siguientes bastarán para dar una idea de esta regla y del modo de practicarla.

Primer ejemplo.

Suponiendo que

48 *francos* valen. . . . . 39 *chelines de Inglaterra;*
13 *chelines de Inglaterra*. . . . . 8 *florines de Alemania;*
50 *florines de Alemania*. . . . . . 9 *ducados de Hamburgo;*
15 *ducados de Hamburgo*. . . . . 43 *rublos de Rusia;*
se desea saber 2500 *francos* cuánto valdrán en *rublos de Rusia.*

Advertencia. — Hacemos notar que los números arriba puestos no son las espresiones exactas de las relaciones entre las diversas monedas; cuyas relaciones además, segun se sabe, están sometidas á variaciones, dependientes de los cambios de unas plazas de comercio con otras.

ANÁLISIS. — Designemos por a, b, c, d, e, *los valores intrínsecos* (*) de las cinco monedas que entran en el enunciado, y por x el número de rublos que se necesitan para formar 2500 francos; tendremos evidentemente, con arreglo al enunciado, las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 48\,a &= 39\,b, \\ 13\,b &= 8\,c, \\ 50\,c &= 9\,d, \\ 15\,d &= 43\,e, \\ x \times e &= 2500\,a, \end{aligned}$$

de donde, multiplicando estas igualdades miembro á miembro, y suprimiendo los factores comunes a, b, c, d, e,

$$48 \times 13 \times 50 \times 15 \times x = 39 \times 8 \times 9 \times 43 \times 2500.$$

Luego

$$x = \frac{39 \times 8 \times 9 \times 43 \times 2500}{48 \times 13 \times 50 \times 15} = 645 \textit{ rublos}.$$

Cuídese mucho de no efectuar los cálculos indicados en el numerador y en el denominador, sino despues de haber *suprimido los factores comunes* á los dos términos.

Hé aquí como en la práctica se ejecutan estas simplificaciones.

$$\begin{aligned} 1\ldots2\ldots16\ldots48\,a &= 39\,b\ldots13\ldots1 \\ 1\ldots13\,b &= 8\,c\ldots1 \\ 1\ldots50\,c &= 9\,d\ldots3 \\ 1\ldots5\ldots15\,d &= 43\,e \\ x \times e &= 2500\,a\ldots50\ldots5 \end{aligned}$$

Despues de haber dispuesto unas debajo de otras las cinco igualdades, como antes se hizo, se comienza por *suprimir* los factores comunes a, b, c, d, e.

(*) Se llaman VALORES INTRÍNSECOS los valores de diferentes clases de monedas, referidas á una misma unidad, por ejemplo en este caso al FRANCO.

Se *suprime* en seguida el factor 3, comun á 48 y 39, lo cual dá los cocientes respectivos 16 y 13.

Se *suprime* tambien el factor 8, comun á 16 y 8, lo cual dá los cocientes respectivos 2 y 1.

Así se continúa, hasta haber *suprimido* todos los factores comunes á los primeros y segundos miembros de las igualdades; y hecha toda simplificacion, se llega al resultado

$$x = 3 \times 43 \times 5 = 645.$$

Estas operaciones piden un poco de costumbre; pero no son difíciles. Es necesario para hacerlas con claridad *tachar* cada uno de los números que se dividen por un factor, escribiendo en su línea el cociente correspondiente.

Segundo ejemplo.

Un fabricante francés quisiera hacer pasar á Lóndres, sin desembolsar nada una suma de 1200 *libras esterlinas, precio de las primeras materias que ha comprado; no teniendo relaciones comerciales con dicha plaza, recurre á un corresponsal suyo de San Petersburgo, el cual á su vez recurre á un corresponsal de Hamburgo, y este á otro de Madrid.* Se desea saber, en FRANCOS, *la suma pagada por el fabricante francés, atendidos los cambios de una plaza con otra.*

Se supone que segun el curso de la época,

26 *libras esterlinas valen.*	165 *rublos de Rusia;*
75 *rublos. . . . .*	26 *ducados de Hamburgo;*
20 *ducados de Hamburgo.*	42 *duros españoles;*
12 *duros españoles. . . .*	65 *francos.*

Designando por a, b, c, d, e, los *valores intrínsecos* de las monedas, y por x la suma buscada, tendremos las igualdades siguientes:

$$\begin{array}{rcl} 1 \ldots 26\,a & = & 165\,b \ldots\ 11, \\ 1 \ldots\ 5 \ldots 75\,b & = & 26\,c \ldots\ 1, \\ 1 \ldots 10 \ldots 20\,c & = & 42\,d \ldots\ 21, \\ 1 \ldots 12\,d & = & 65\,e \ldots\ 13, \\ x \times e & = & 1200\,a \ldots 100 \ldots 10; \end{array}$$

de donde se saca, efectuando las reducciones en la forma indicada arriba,

$$x = 30030,$$

que será la suma en FRANCOS, pagada por el fabricante francés.

276. Esta regla, hablando propiamente, no es mas que un caso particular de la regla de los *quebrados de quebrados* (n.° 124).

En efecto, volvamos al primer ejemplo:

Decir que 48 francos valen 39 chelines de Inglaterra, equivale á decir que 1 franco vale $\frac{39}{48}$ del chelin. Del mismo modo, si 13 chelines valen 8 florines de Alemania, un chelin valdrá $\frac{8}{13}$ del florin de Alemania; y por consiguiente, 1 franco vale $\frac{39}{48}$ de $\frac{8}{13}$ del florin de Alemania. Así tambien, si 50 florines valen 9 ducados de Hamburgo, 1 florin vale $\frac{9}{50}$ del ducado de Hamburgo; y por consiguiente 1 franco vale los $\frac{39}{48}$ de los $\frac{8}{13}$ de los $\frac{9}{50}$ de un ducado de Hamburgo.

Continuando este razonamiento, hallaríamos que

2500 fr. = 2500 veces los $\frac{39}{48}$ de los $\frac{8}{13}$ de los $\frac{9}{50}$ de los $\frac{43}{15}$ del *rublo*.

Luego (n.° 134),

$$2500 \text{ fr.} = \frac{39 \times 8 \times 9 \times 43 \times 2500}{48 \times 13 \times 50 \times 15} \text{ del } \textit{rublo};$$

espresion hallada anteriormente.

DE LA REGLA DE ALIGACION.

277. Las cuestiones que pertenecen á esta regla son de dos especies:

O tiene por objeto *hallar el valor medio de varias clases* *de cosas, conociendo el número y el valor particular de cada clase;*

O bien tiene por objeto *determinar las cantidades de cada clase de cosas que deben entrar en una mezcla ó* ALIGACION, *conociendo de antemano el precio ó el valor de cada especie, y el precio ó el valor total de la mezcla.*

Solo nos ocuparémos de la primera clase de cuestiones, porque la segunda corresponde enteramente al Algebra.

PRIMER EJEMPLO.— *Un vendedor de vino ha mezclado vinos de diversas calidades, á saber; 250 arrobas á 16 reales la arroba, 180 arrobas á 22 reales y 200 á 30 reales: se desea saber á qué precio resulta la arroba de* MEZCLA.

Empecemos por observar que

250 arrobas á 16 reales importan.	4000 rs.
180 arrobas á 22 reales importan.	3960
y 200 arrobas á 30 reales importan. . . .	6000
Luego el total valor de las tres cantidades de vino reunidas, será.	13960 rs.

Si ahora hacemos la suma de los tres números de arrobas, tendremos que son 630: con lo cual la cuestion quedará reducida á esta otra:

630 *arrobas de vino cuestan* 13960 *reales; ¿á cómo sale la arroba?*

Para obtener este precio, basta dividir 13960 por 630, y el cociente 22 reales y 15 céntimos, será el precio pedido con una pequeñísima diferencia por el resíduo despreciado en la division.

REGLA GENERAL.—Para obtener el precio de la unidad de mezcla, es necesario, 1.° *multiplicar el precio de la unidad de cada especie que se quiere mezclar, por el número de unidades de la misma, sumando despues todos los productos;* 2.° *hacer la suma de los números de unidades de las diferentes especies de cosas;* 3.° *dividir la suma de los productos, ó sea el precio total, por la suma de los números de unidades.*

SEGUNDO EJEMPLO.—*Se quieren fundir juntos 23 kilógramos de plata á 826 milésimas de ley; 14 kilógramos á 910; y 19 á 845: se desea saber el título de la* ALEACION *de los tres lingotes.*

Advertencia.—Para comprender este enunciado, es necesario saber que en el uso de la platería, el oro y la plata están siempre combinados con otros metales, tales como el cobre.

Esto supuesto, se dice que un lingote de oro ó de plata tiene *tal título* ó *tal grado de ley*, cuando en un peso determinado, por ejemplo, en un kilógramo, contiene tal peso de oro ó de plata puros.

Así una barra tiene la ley de $\frac{9}{10}$, cuando en 1 kilógramo de dicha barra hay $\frac{9}{10}$ de kilógramo de plata ó de oro puro. Así tambien, una barra tiene la ley de 825 *milésimas*, cuando en 1 kilógramo, contiene $\frac{825}{1000}$ de plata ó de oro puro.

Ahora resulta del enunciado que

1.°	$23^{k.}$	á $825^{\text{miles.}}$. . . .	hacen 23×825 ó	$18975^{\text{miles.}}$
2.°	14	á 910.	14×910 ó	12740
3.°	19	á 845.	19×845 ó	16055
	56			47770

Luego, los 56 kilógramos aleados contienen $47^{k.},77$ de plata pura.

Así, la ley de la barra ó lingote resultante estará espresada por $\frac{47,770}{56}$, ó sea 0,853; es decir que el lingote resultante de la aleacion de los tres primeros tiene la ley de 853 *milésimas*.

Tercer ejemplo.—*Se han empleado* 500 *trabajadores, de los cuales* 160 *cobraban á* 8 *reales diarios*, 200 *á* 6 *rs.*, y 140 *á* 5 *rs.: se desea saber á cómo salen en cada dia uno con otro los trabajadores.*

$160^{\text{trab.}}$	á $8^{\text{rs.}}$ cuestan.	$1280^{\text{rs.}}$
200	á 6.	1200
140	á 5.	700
500		$3180^{\text{rs.}}$

Luego, si el pago de 500 trabajadores ha costado 3180 rs., el de *uno solo* costará $\frac{3180}{500}$ ó sea $6^{rs.},36$.

278. *Valores medios y medidas medias.*—La determinacion de los *valores medios* de varias cosas de valores diferentes, es un caso particular de la primera especie de *regla de aligacion.*

Se llama *valor medio* de varias cosas cuyos valores particulares son conocidos, *la suma de los valores de dichas cosas, dividida por la suma de tantas unidades como cosas hay,* ó mas sencillamente, *dividida por su número.*

Así, en el caso de haber solo *dos* cosas, el *valor medio* es la *semi-suma* de sus dos valores.

CUARTO EJEMPLO.—*Se ha repetido cuatro veces la operacion de medir la longitud de un parque. La primera vez se halló que tenia de largo* $250^{m.},439$; *la segunda,* $250^{m.},695$; *la tercera,* $249^{m.},750$; *por último, la cuarta,* $251^{m.},158$. *Se desea saber la longitud del parque.*

Puesto que, no resultan conformes las medidas de las cuatro operaciones, es claro que el único medio de responder á la cuestion es buscar la *medida media* entre las cuatro medidas.

La suma de estas es 1002,042; cuyo resultado dividido por 4 dá 250,5105, que será la medida media.

De algunos problemas que, sin depender de REGLAS FIJAS Y GENERALES, *pueden resolverse* ARITMÉTICAMENTE.

279. En las cuestiones precedentes los medios de llegar á la solucion buscada son fijos y generales, es decir, susceptibles de aplicarse á todas las cuestiones de la misma especie. Pero pueden proponerse otros muchísimos, que solo en parte se enlazan con estas, ó que no dependen de ellas en manera alguna. En este caso, solo el *Algebra* suministra métodos seguros y directos de resolucion. Sin embargo, vamos á manifestar cómo puede tratarse esta clase de cuestiones sin mas auxilio que el razonamiento, ó en otros términos, cómo pueden resolverse *aritméticamente.*

Recordemos que resolver ó analizar un problema, es (n.º 242), *tratar de descubrir, reflexionando sobre su enunciado, en las relaciones establecidas entre los números que* *forman parte de él, la série de operaciones que con ellos deben efectuarse para sacar los valores de los números desconocidos.*

Primer problema.—Se pide *un número cuya mitad, tercio, cuarto y dos séptimos reunidos, formen una suma* igual al número 575.

Comencemos por notar que tomar sucesivamente la *mitad*, el *tercio*, el *cuarto* y los $\frac{2}{7}$ de un número, y sumar despues todas estas partes, equivale á multiplicar dicho número por la suma de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{7}$, es decir por $\frac{115}{84}$. Ahora bien, puesto que el producto del número buscado, por $\frac{115}{84}$, debe ser igual á 575, resulta de la definicion de la division, que dicho número es igual al cociente de 575 dividido por $\frac{115}{84}$, y por consiguiente (n.º 131) á $575 \times \frac{84}{115}$.

Efectuando el cálculo indicado, se encuentra finalmente ser 420 el número buscado.

Comprobacion.		420
	la mitad	= 210
	el tercio	= 140
	el cuarto	= 105
	el 7.º	= 60
	el 7.º	= 60
	Total. . . .	575

Segundo problema.—*Se piden tres números cuya suma sea igual á* 96, *y que además sean tales, que el segundo esceda al primero en dos unidades, y el tercero esceda en* 4 *á la suma de los otros dos.*

Por lo pronto es evidente que si se disminuyera el segundo número en 2 unidades, se haria igual al primero, y que si se disminuyera el tercero en $2+4$ ó 6 unidades, se haria igual al duplo del primero; por consiguiente, la suma de los tres números, despues de hechas esas dos sustracciones, sería igual al cuádruplo del primer número.

Ahora bien, la diferencia de 96 á 2 + 6 ó sean 8, son 88; donde se ve que

el *primer* número es igual al *cuarto* de 88, ó.	22
luego el *segundo* es igual á 22 + 2 ó.	24
y el *tercero* será 22 × 2 + 6 ó.	50
Comprobacion.	96

TERCER PROBLEMA.—*Se emplean* TRES *obreros para hacer cierta obra: el* PRIMERO *la haria* SOLO *en* 12 *dias, trabajando* 10 *horas por dia; el* SEGUNDO *en* 15 *dias, trabajando* 6 *horas por dia; el* TERCERO *en* 9 *dias trabajando* 8 *horas por dia. Se pide,* 1.° *en cuánto tiempo harán la dicha obra los tres obreros, trabajando juntos;* 2.° *qué parte hará cada uno;* 3.° *qué ganará cada uno, si el total de la obra se paga con* 108 *duros.*

SOLUCION.—Observemos, que segun el enunciado, el primer trabajador haria solo la obra en 12 × 10, ó 120 horas; luego en 1 hora haria $\frac{1}{120}$ de la obra.

El segundo la haria en 15 × 6, ó 90 horas; luego en 1 hora haria $\frac{1}{90}$.

El tercero la haria en 9 × 8, ó en 72 horas; luego en 1 hora haria $\frac{1}{72}$.

Luego los tres trabajando juntos, harian en 1 hora $\frac{1}{120} + \frac{1}{90} + \frac{1}{72} = \frac{12}{360}$, es decir $\frac{1}{30}$ de la obra.

Ahora bien, si necesitan 1 hora para hacer $\frac{1}{30}$ de la obra es claro que gastarán 30 horas para hacer la obra entera.

En este supuesto, como en 1 hora hace el primer obrero $\frac{1}{120}$, en 30 horas hará $\frac{1}{120} \times 30$, ó $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Del mismo modo el segundo hará en 30 horas, $\frac{1}{90}\times 30$, ó $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$. Por último, el tercero hará en 30 horas, $\frac{1}{72}\times 30$, ó $\frac{5}{12}$.

Ahora ya no queda mas que saber lo que gana cada trabajador en razon del trabajo que hace. Para esto basta distribuir los 108 duros en partes proporcionales á los tres quebrados $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{12}$, ó mejor, á los tres números 3, 4, 5; lo cual dá (n.° 272)

$$27^{d.},\quad 36^{d.}\quad y\quad 45^{d.},$$

que serán las ganancias respectivas de los obreros.

Las diversas cuestiones que acabamos de resolver pertenecen al género de aquellas que muchos autores tratan por la regla llamada de *falsa posicion*, *simple* ó *compuesta*.

Ejercicios.

I. Un buque solo tiene víveres para 19 dias, y sin embargo está obligado á permanecer 25 dias en el mar. Se pregunta á cuánto deberá reducir la racion ordinaria.

II. 20 obreros trabajando durante 15 dias, 10 horas al dia, han abierto un foso de 65 metros de largo por $2^{m.},30$ de ancho y $0^{m.},75$ de hondo. Se pregunta *cuántos dias necesitarán* 36 obreros, trabajando 12 horas al dia, para abrir un foso de 200 metros de largo, 3 de ancho y 1,25 de hondo; graduándose la dificultad del primer terreno á la del segundo en la relacion de 3 á 4.

III. ¿Durante *cuánto tiempo* habrá estado en casa de un banquero un capital de 3000 escudos para producir al propietario un interés de 1325 escudos y 50 céntimos á razon de 6 p. °/₀?

IV. ¿Cuál es el tanto de descuento de una letra de 2500 escudos pagadera á 18 meses, por la cual se ha pagado una cantidad de 1860 escudos 45 céntimos?

V. Cuatro socios han puesto el *mismo* capital en una empresa: el *primero* dejó su dinero en ella durante 8 meses, el *segundo* durante 7 meses, el *tercero* durante 10 meses, y el *cuarto* durante un año. Se quiere repartir la ganancia de 1800 duros, *proporcionalmente* al capital puesto, aumentado en cada caso con el interés de 4 p. $^0/_0$.

VI. Se quieren repartir 60000 reales entre *tres* personas, de modo que la *segunda* tenga dos veces *tanto* como la *primera*, menos 2500 reales; y la *tercera* tenga *tres veces* tanto como la *primera* menos 5000 reales. ¿Qué toca á cada persona?

VII. Se funden 2 kilógramos de *cobre* á 6 reales; 7 kilógramos de *zinc* á $3^{rs.},50$, y 9 kilógramos de antimonio á 7 reales. ¿Cuál es el precio del kilógramo de la aleacion?

VIII. Se pregunta á una persona cuánto dinero tiene en el bolsillo, y responde: si á la cantidad que tengo se añadiera el $\frac{1}{3}$, los $\frac{2}{7}$ y los $\frac{3}{4}$ de la misma, tendria 175 reales. ¿Qué cantidad tenia?

CAPITULO VII.

§ I. Complemento de la teoría elemental de las proporciones y principales propiedades de las equidiferencias.—§ II. De las progresiones por diferencia y por cociente.—§ III. De los logaritmos y de su aplicacion á la resolucion de algunas cuestiones que dependen de las cantidades proporcionales.

---

280. Introduccion. — En el capítulo precedente, hemos indicado que, de la comparacion de dos cantidades entre sí, resultan dos clases de *razones*, razones por *diferencia* y razones por *division*.

Pero allí solo hemos considerado las de la segunda especie, así como tambien las *proporciones* que de ellas proceden, y nos hemos reducido entonces á esponer las propiedades que pueden servir para la resolucion de las cuestiones que comprenden espresiones de *razones iguales*.

Aquí vamos ahora á completar la teoría elemental de las proporciones que hace un gran papel en el estudio de la Geometría, y en seguida espondremos las principales propiedades de las *equidiferencias* á que dán lugar las *razones* de la primera especie. Los principios que vamos á esplicar, deben servir de base á las teorías de las progresiones y de los logaritmos.

§ I.—Complemento de la teoría elemental de las proporciones y principales propiedades de las equidiferencias.

De las proporciones.

Comenzarémos por recordar el principio esencial que se enlaza á la propiedad fundamental de las proporciones y á su recíproca, á saber que:

Toda mudanza puede operarse en una proporcion, sin dejar de existir proporcion entre los números resultantes de ella, con tal que dichos números estén siempre dispuestos de tal modo que el producto del primero por el último sea igual al producto del segundo por el tercero.

Insistimos en este principio, porque suministra un medio seguro de reconocer la exactitud ó falsedad del enunciado de una proposicion relativa á las proporciones.

Pasémos ahora á esponer las principales propiedades que deben añadirse á las anteriormente esplicadas.

281. PRIMERA PROPIEDAD.—En toda proporcion, *la suma ó la diferencia de los dos primeros términos es al segundo, como la suma ó la diferencia de los otros dos términos es al cuarto.*

Así en la proporcion

$$72 : 24 :: 45 : 15,$$

se tiene, por *adicion*

$$72+24 : 24 :: 45+15 : 15,$$

y, por *sustraccion*

$$72-24 : 24 :: 45-15 : 15,$$

proporcion cuya exactitud sería fácil probar *efectuando el producto de los estremos* y *el de los medios.*

Pero para darnos cuenta de esta propiedad de un modo general, es decir, independiente de todo ejemplo particular, basta notar, que *añadiendo* ó *quitando* á cada *antecedente su consecuente* (n.° 245), no se hace mas que añadir ó quitar *una unidad* á cada una de las razones; y como las razones primitivas eran iguales, las razones resultantes, tambien lo son.

De la proporcion

$$72 \pm 24 : 24 :: 45 \pm 15 : 15,$$

($\pm$ se pronuncia *mas ó menos*), se deduce, mudando de lugar los medios (n.° 249)

$$72 \pm 24 : 45 \pm 15 :: 24 : 15;$$

pero ya teniamos

$$72 : 24 :: 45 : 15,$$

ó bien

$$72 : 45 :: 24 : 15;$$

luego como la razon 24 : 15 es comun á la primera y á la tercera de estas proporciones, tendremos necesariamente

$$72 \pm 24 : 45 \pm 15 :: 72 : 45,$$

ó bien

$$72 \pm 24 : 72 :: 45 \pm 15 : 45.$$

Por consiguiente puede decirse tambien que en toda proporcion, *la suma* ó *la diferencia de los dos primeros es al* PRIMER TÉRMINO *como la suma* ó *la diferencia de los dos últimos es al* TERCERO; enunciado que podria comprenderse en uno solo con el enunciado primitivo de la propiedad.

Advertencia.—La parte de este último enunciado, que corresponde á la palabra *diferencia*, parece suponer que cada antecedente es *mayor* que su consecuente, como sucede en la proporcion tomada por ejemplo. Pero si tuviéramos

$$16 : 48 :: 32 : 96,$$

sería necesario de antemano mudar de lugar los medios y los estremos (n.° 249); lo cual daria

$$48 : 16 :: 96 : 32;$$

y entonces podria decirse

$$48 \pm 16 : 16 :: 96 \pm 32 : 32,$$

proporcion cuyo enunciado sería el mismo que el enunciado primitivo. Por consiguiente la propiedad es siempre *verdadera*, en el sentido en que se ha fijado.

282. SEGUNDA PROPIEDAD.—En toda proporcion, *la suma* ó *la diferencia de los antecedentes es á la suma* ó *la diferencia*

de los consecuentes, como uno cualquiera de los antecedentes es á su consecuente.

Tomemos la primera proporcion del n.º 281,

$$72 : 24 :: 45 : 15,$$

y mudemos los medios de lugar; tendremos

$$72 : 45 :: 24 : 15,$$

nueva proporcion á la cual puede aplicarse la propiedad precedente, resultando

$$72 \pm 45 : 45 :: 24 \pm 15 : 15,$$

ó, mudando los medios,

$$72 \pm 45 : 24 \pm 15 :: 45 : 15, \quad \text{ó} \quad :: 72 : 24,$$

y esta proporcion, traducida al lenguaje ordinario y comparada con la proporcion primitiva, dá lugar evidentemente á la nueva propiedad tal cual la hemos enunciado.

283. Consecuencia I.—En toda proporcion, *la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.*

Si, en la última proporcion acabada de obtener, consideramos sucesivamente los signos *superiores* y los signos *inferiores*, resulta

$$72 + 45 : 24 + 15 :: 45 : 15,$$
$$72 - 45 : 24 - 15 :: 45 : 15;$$

luego, á causa de la razon comun 45 : 15,

$$72 + 45 : 24 + 15 :: 72 - 45 : 24 - 15,$$

ó, mudando de lugar los medios

$$72 + 45 : 72 - 45 :: 24 + 15 : 24 - 15.$$

L. C. D. D.

284. Consecuencia II.—*En una série de* razones iguales,

la suma de todos los antecedentes ó de cierto número de ellos es á la suma de sus consecuentes, como cualquiera de los antecedentes es á su consecuente.

Sea la série de razones iguales

$$84 : 56 :: 75 : 50 :: 72 : 48 :: 45 : 30 :: 36 : 24.$$

(Aquí la razon *simplificada* es $\frac{3}{2}$).

Considerando primero únicamente las dos primeras razones, tendremos la proporcion

$$84 : 56 :: 75 : 50;$$

de donde, en virtud de la propiedad del n.° 282, sacamos

$$84+75 : 56+50 :: 75 : 50.$$

Pero como $75 : 50 :: 72 : 48$, podremos poner $72 : 48$ en vez de $75 : 50$, y tendremos

$$84+75 : 56+50 :: 72 : 48;$$

de donde, aplicando de nuevo la misma propiedad,

$$84+75+72 : 56+50+48 :: 72 : 48,$$

ó bien tambien

$$84+75+72 : 56+50+48 : 45 : 30;$$

y por consiguiente,

$$84+75+72+45 : 56+50+48+30 :: 45 : 30;$$

y así sucesivamente.

Los antecedentes que se *suman* pueden ser en número cualquiera, con tal que se haga al mismo tiempo la *suma* de los respectivos consecuentes.

Puede tambien decirse que, *en una série de razones iguales, la* DIFERENCIA *entre la* SUMA *de varios antecedentes y la* SUMA *de otros varios, es á la* DIFERENCIA *entre la* SUMA *de los* *consecuentes de los primeros y la suma de los consecuentes de los segundos, como un antecedente es á su consecuente.*

En efecto, en virtud de lo acabado de decir, tenemos

$$84+75+72 : 56+50+48 :: 72 : 48,$$

y

$$45+36 : 30+24 :: 45 : 30 :: 72 : 48;$$

de donde, á causa de la razon comun 72 : 48,

$$84+75+72 : 56+50+48 :: 45+36 : 30+24;$$

y, aplicando la parte de la propiedad del n.° 282, que corresponde al signo inferior —,

$$(84+75+72)-(45+36) : (56+50+48)-(30+24) :: (45+36) : (30+24),$$

ó

$$:: 45 : 30.$$

Aplicacion á las fracciones ordinarias.—Sea una série de fracciones iguales

$$\frac{24}{56}=\frac{21}{49}=\frac{12}{28}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7},$$

las cuales forman una série de *razones iguales*, cuyos numeradores son los *antecedentes*, y los denominadores los *consecuentes*.

De la proposicion precedente resulta que, *si hacemos la suma de todos los numeradores* ó *de varios de ellos*, y despues *la suma de los denominadores correspondientes, se formará con estas dos sumas una nueva fraccion equivalente á cualquiera de las fracciones propuestas.*

Así se tendrá

$$\frac{24+21}{56+49}=\frac{24+21+12}{56+49+28}=\frac{24+21+12+6}{56+49+28+14}=\frac{3}{7},$$

lo cual puede comprobarse ejecutando los cálculos.

Del mismo modo tendremos

$$\frac{24-21}{56-49}=\frac{3}{7},\ \frac{24-12}{56-28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7},\ \frac{24-6}{56-14}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}.$$

Estos resultados concuerdan con el *modo de simplificar las fracciones*, indicado en el n.° 124.

285. TERCERA PROPIEDAD.—*Si se tienen varias proporciones*, y *se multiplican ordenadamente*, *es decir*, *término á término*, *los productos resultantes formarán tambien proporcion.*

Sean las proporciones

$$3 : 8 :: 12 : 32 \mid 7 : 15 :: 28 : 60 \mid 40 : 12 :: 50 : 15;$$

pueden ponerse bajo la forma

$$\frac{3}{8}=\frac{12}{32},$$
$$\frac{7}{15}=\frac{28}{60},$$
$$\frac{40}{12}=\frac{50}{15}.$$

Si se multiplican entre sí respectivamente las fracciones que componen los primeros miembros, y las fracciones que componen los segundos miembros, de estas igualdades, se tendrán necesariamente *productos iguales*; y resultará

$$\frac{3}{8}\times\frac{7}{15}\times\frac{40}{12}=\frac{12}{32}\times\frac{28}{60}\times\frac{50}{15},$$

ó, aplicando la regla de la multiplicacion de las fracciones,

$$\frac{3\times 7\times 40}{8\times 15\times 12}=\frac{12\times 28\times 50}{32\times 60\times 15},$$

ó bien por último,

$$3\times 7\times 40 : 8\times 15\times 12 :: 12\times 28\times 50 : 32\times 60\times 15.$$

Las fracciones que componen los dos miembros de la última igualdad, hechas todas las simplificaciones, quedan en efecto reducidas á

$$\frac{7}{12}=\frac{7}{12},$$

proporcion *idéntica*.

La razon $\frac{7}{12}$ proviene, segun se ve, de la multiplicacion de otras tres razones pertenecientes cada cual á una proporcion diferente; es por lo tanto una *razon compuesta*, en el sentido que hemos atribuido (n.° 254) á esta denominacion.

286. Consecuencia.—*Si cuatro números están en proporcion, sus cuadrados, sus cubos, sus cuartas, sus quintas,... potencias forman tambien proporcion.*

Esta consecuencia no es evidentemente mas que un caso particular de la proposicion precedente: basta suponer que todas las proporciones, que se multiplican entre sí *término á término*, son *idénticas*.

Tambien puede decirse: sea la proporcion

$$a : b :: c : d, \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Puesto que las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ son iguales, sus *cuadrados*, sus *cubos*, etc., son tambien iguales y se tiene

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{c}{d}\right)^2; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{c}{d}\right)^3; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^4=\left(\frac{c}{d}\right)^4 \ldots$$

Pero

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3},\ldots;$$

análogamente

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{c^2}{d^2}, \left(\frac{c}{d}\right)^3=\frac{c^3}{d^3}, \left(\frac{c}{d}\right)^4=\frac{c^4}{d^4},\ldots;$$

luego

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}, \quad ó \quad a^2 : b^2 :: c^2 : d^2,$$

$$\frac{a^3}{b^3}=\frac{c^3}{d^3}, \quad ó \quad a^3 : b^3 :: c^3 : d^3;$$

y así sucesivamente.

Obsérvese que esta demostracion no supone otra propiedad de las proporciones, mas que su misma definicion.

Recíprocamente, la misma proporcion

$$a : b :: c : d, \quad ó \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

dá

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{c}{d}}, \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{c}{d}}, \sqrt[4]{\frac{a}{b}}=\sqrt[4]{\frac{c}{d}}, \ldots;$$

de donde aplicando las reglas establecidas en los n.os 224 y 240 para la estraccion de las *raices cuadradas* y *cúbicas* de las fracciones,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}, \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{d}}, \text{ y por } \textit{estension}, \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{c}}{\sqrt[4]{d}}, \ldots,$$

ó

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d}; \quad \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}; \ldots$$

Luego, *las raices cuadradas, cúbicas, cuartas, quintas...* de CUATRO *números en proporcion forman tambien proporcion.*

287. OBSERVACION.—Cuando los números a, b, c, d, no son *cuadrados* ó *cubos perfectos*, las cantidades $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, y $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[3]{d}$, son números *irracionables* ó *inconmensurables*, y por consiguiente vamos á parar á la consideracion de

las razones entre números inconmensurables, razones que en general son tambien inconmensurables.

En este caso se tratará de saber si pueden atribuirse á proporciones de esa especie todas las propiedades anteriormente establecidas.

La respuesta no puede menos de ser afirmativa, si se recuerda lo dicho en el n.° 241, á saber: que un número *irracional* (*) puede reemplazarse siempre, *mentalmente*, por un número *fraccionario exacto* que no difiera del número propuesto sino en una cantidad *tan pequeña como se quiera* y pudiendo, por consiguiente, tomarse de tal modo pequeña, que no deba tenerse cuenta alguna con el error cometido al despreciarla, y entonces las razones se suponen establecidas entre los números *conmensurables* sustituidos á las cantidades *irracionales*.

En cuanto á las razones entre números *fraccionarios exactos*, es fácil conocer que siempre pueden ser reemplazadas por razones entre números enteros.

Por ejemplo, la razon de $\frac{3}{7}$ á $\frac{5}{11}$, siendo (n.° 243) el cociente de la division de esas dos fracciones, equivale (n.° 231) á $\frac{3}{7} \times \frac{11}{5}$ ó $\frac{33}{35}$.

Del mismo modo, la razon de $3 + \frac{7}{8}$ á $1 + \frac{15}{23}$, ó de $\frac{31}{8}$ á $\frac{38}{23}$, equivale á $\frac{31}{8} \times \frac{23}{38}$, ó $\frac{953}{304}$.

Así, pues, todas las propiedades demostradas acerca de las proporciones para el caso de ser los términos números *enteros*, son siempre *verdaderos*, cualquiera que sea la naturaleza de dichos términos.

(*) Aquí no puede tratarse sino de números irracionales procedentes de las estracciones de *raices cuadradas* y *cúbicas;* pero se concibe que la observacion puede *estenderse* á todos los números irracionales suministrados por estracciones de raices de *cualquier grado*, y en general, á toda clase de números irracionales, de que encontraremos nuevos ejemplos hácia el fin de este capítulo.

DE LAS EQUIDIFERENCIAS.

288. Definiciones.—Cuando la diferencia de dos números es igual á la diferencia de otros dos, se espresa esta propiedad con la palabra equidiferencia.

Una *equidiferencia* es por consiguiente *la espresion de la igualdad* de dos diferencias.

(Se llamaba en otros tiempos *proporcion aritmética*, como se llamaba *proporcion geométrica* la igualdad de dos *razones geométricas*.)

Sean cuatro números a, b, c, d, tales que a esceda á b, ó sea escedido por b, en la *misma* cantidad que c escede á d, ó es escedido por d.

Estos cuatro números constituyen una *equidiferencia*, que puede escribirse de dos modos:

1.° $a.b:c.d;$

2.° $a-b=c-d$, ó $b-a=d-c$,

segun se tenga

$$a>b,\ c>d, \text{ ó bien } a<b,\ c<d.$$

Bajo la *primera* forma, se enuncia como una proporcion; á saber: a *es á* b *como* c *es á* d.

El primero y el tercer término se llaman los *antecedentes*, y el segundo y el cuarto se llaman los *consecuentes* de dichos antecedentes.

Finalmente, lo mismo que en las proporciones, el primero y el cuarto términos son los *estremos*, y el segundo y el tercero son los *medios* de la equidiferencia.

En cuanto á la *segunda* forma, las denominaciones precedentes pueden conservarse, mientras se tiene

$$a>b \text{ y } c>d.$$

Pero al contrario, en el caso de ser $a<b$, $c<d$, como la equidiferencia debe escribirse

$$b-a=d-c,$$

para que su enunciado tenga un sentido en aritmética, deben invertirse aquellas denominaciones; es decir, que los que se llaman *antecedentes* deben llamarse *consecuentes*, y recíprocamente, convirtiéndose los *estremos* en *medios*, y viceversa.

En las proporciones, no hay necesidad de hacer esta distincion, porque las *razones* que la constituyen pueden ser, ARITMÉTICAMENTE, *mayores* ó *menores* que la unidad.

289. PRIMERA PROPIEDAD.—*En toda equidiferencia, la suma de los estremos es igual á la de los medios.*

Sea la equidiferencia

$$47.19:63.35;$$

digo que debemos tener

$$47+35=19+63.$$

En efecto, si tuviéramos

$$47.47:63.63$$

(equidiferencia que se llama *idéntica*), la proposicion sería evidente, porque los estremos serían entonces respectivamente los *mismos* que los *medios*.

Ahora bien, para reducir la equidiferencia á este estado, basta *añadir* á cada consecuente la *diferencia comun*, 28, que existe entre el primero y el segundo términos, y entre el tercero y el cuarto: y supuesto que *despues* de esta adicion de *un mismo* número, hecha á uno de los medios y á uno de los estremos, *la suma de los medios* es igual á *la suma de los estremos*, se infiere que eran tambien iguales *antes* de aquella adicion.

Advertencia.—Si se tuviera la equidiferencia

$$7.24:19.36,$$

bastaria, á fin de conservar la misma demostracion, *añadir*, no ya á los dos *consecuentes*, sino á los dos *antecedentes*, *el mismo número* 17, para hacerlos iguales á sus consecuentes.

290. SEGUNDA PROPIEDAD.—Recíprocamente, si *cuatro* números, escritos en una misma línea ó enunciados en cierto

órden, *son tales, que la suma* del *primero* y del *último sea igual á la suma* del *segundo* y del *tercero, los cuatro números forman una equidiferencia* en el órden en que están escritos ó enunciados.

Porque sino hubiera *equidiferencia*, es decir, si la diferencia entre los dos primeros números no fuera igual á la diferencia entre los otros dos, sería necesario para hacer los consecuentes *iguales* á sus antecedentes, *añadir* á cada consecuente (ó á cada antecedente) *un número distinto;* y como *despues* de esta adicion, las dos *sumas* serían necesariamente iguales, resultaria que *antes* de la adicion, dichas sumas *no eran* iguales; lo cual sería contrario al enunciado de la proposicion.

291. Consecuencia.— *En toda equidiferencia* se puede (como en las proporciones): 1.° *trocar los medios entre sí;* 2.° *poner los medios en lugar de los estremos*, sin que deje de existir la equidiferencia.

Porque es evidente que despues de estas diversas mudanzas, la suma del *primero* y el *último* términos no deja de ser igual á la del *segundo* y el *tercero;* luego, en virtud de la recíproca precedente, subsiste siempre la *equidiferencia.*

Así, volviendo á la equidiferencia

$$47 . 19 : 63 . 35,$$

de ella se deducen sucesivamente

$$47 . 63 : 19 . 35$$
$$19 . 47 : 35 . 63$$
$$63 . 47 : 35 . 19$$
. . . .
. . . .

292. *Equidiferencias y proporciones continuas.*—Sucede algunas veces que en una *equidiferencia*, *los dos medios son iguales*, como en esta,

$$75 . 49 : 49 . 23$$

(aquí la diferencia comun es 26).

En este caso, la equidiferencia recibe el nombre de *equi-*

diferencia continua, y es costumbre ponerla bajo la forma

$$\div 75 . 49 . 23,$$

y se enuncia así: *como* 75 *es á* 49, 49 *es á* 23, ó simplemente, 75 *es á* 49 *es á* 23.

Del mismo modo, puede haber una *proporcion*, cuyos *medios* sean *iguales*, por ejemplo

$$48 : 12 :: 12 : 3.$$

Entonces toma el nombre de *proporcion continua*, se escribe

$$\div\!\!\div 48 : 12 : 3,$$

y se enuncia diciendo:

como 48 *es á* 12, 12 *es á* 3; ó simplemente 48 *es á* 12 *es á* 3.

En toda *equidiferencia contínua*, la suma de los estremos es DOBLE del *término medio* (n.° 289);

Luego este, que entonces se designa bajo la denominacion de MEDIO DIFERENCIAL (antiguamente *medio proporcional aritmético*), tiene, por espresion de su valor, *la* SEMI-SUMA *de los estremos*.

En toda *proporcion continua*, el producto de los estremos es igual al CUADRADO del *término medio* (n.° 246);

Luego este, que se llama MEDIO PROPORCIONAL (antiguamente *medio proporcional geométrico*), tiene, por espresion de su valor, la RAIZ CUADRADA del producto de los estremos.

De aquí podemos concluir que, siempre que un problema dá lugar á una *equidiferencia contínua* entre dos números dados, considerados como *estremos*, y un tercer número *desconocido* que ha de formar los *dos medios*, es necesario, para obtener el término medio, *formar la* SEMI-SUMA *de los dos estremos*.

Si la relacion suministrada por el enunciado del problema es una proporcion contínua, cuyos *dos medios* forma el número *desconocido*, es necesario *multiplicar los dos estremos entre sí*, y despues *estraer la* RAIZ CUADRADA *del producto*.

1.° De la *equidiferencia continua*

$$a . x : x . b,$$

se deduce

$$2x = a + b, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{a+b}{2};$$

2.° De la *proporcion contínua*

$$a : x :: x : b,$$

se saca

$$x \times x \text{ ó } x^2 = a \times b; \text{ de donde } x = \sqrt{a \times b}.$$

Por ejemplo, la *equidiferencia* $64 . x : x . 36$ dá

$$x = \frac{64 + 36}{2} = 50;$$

y por consiguiente

$$64 . 50 : 50 . 36; \textit{ diferencia comun } 14.$$

Del mismo modo, la proporcion $64 : x :: x : 36$ dá

$$x = \sqrt{64 \times 36} = \sqrt{2304} = 48;$$

por consiguiente

$$64 : 48 :: 48 : 36; \textit{ razon comun } \frac{4}{3}.$$

Advertencia.—Hemos creido conveniente reunir en un *mismo número* lo concerniente al *medio diferencial* y al *medio proporcional* entre dos números, á causa de la comparacion inmediata que puede hacerse de ellos.

El uno se obtiene *sumando* los dos números dados y *dividiendo* la suma por 2; el otro, multiplicando los dos números entre sí y *estrayendo la raiz segunda* ó *cuadrada* del producto.

No tardaremos en ampliar esta clase de consideraciones.

§ II.—De las progresiones por diferencia y por cociente.

Progresiones por diferencia (ó aritméticas.)

293. Definiciones.—Se llama progresion por diferencia, una série de números tales, que cada uno *escede* al que le precede ó al que le sigue en un número constante que se llame *razon* ó *diferencia* de la progresion.

Así, sean las dos séries

$$\div\ 2\ .\ 5\ .\ 8\ .11\ .14\ .17\ .20\ .23\ .26\ .29...,$$
$$\div\ 60\ .55\ .50\ .45\ .40\ .35\ .30\ .25\ .20....$$

En la primera, llamada progresion *creciente*, cada término *escede* al que le *precede* en el número constante 3, que es por lo tanto la *razon* de la progresion.

En la segunda, llamada *decreciente*, cada término *escede* al que le *sigue*, en el número constante 5; de modo que 5 es la *razon* de la progresion.

Para escribir una progresion por *diferencia*, se coloca ordinariamente á la cabeza el signo $\div$, y despues se pone *un punto* entre los términos consecutivos.

Esta notacion está fundada en que, hablando con propiedad, una progresion por *diferencia* no es mas que una série de *equidiferencias continuas* (n.° 292), en las cuales cada término es á la vez *antecedente* y *consecuente*, escepto el *primero* que solo es *antecedente*, y el *último* de los términos considerados, que solo es consecuente.

La progresion se enuncia así:

Como 2 *es á* 5, 5 *es á* 8, 8 *es á* 11,..., ó simplemente: 2 *es á* 5, *es á* 8, *es á* 11, *es á*....

294. Primera propiedad.—En toda progresion por diferencia, *un término cualquiera es igual al primero* mas ó menos *tantas veces la razon como términos hay delante de él*, segun que la progresion es *creciente* ó *decreciente*.

Sea en general la progresion

$$\div\, a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.\,e...\ i\,.\,k\,.\,l,$$

y sea r la razon de esta progresion.

Segun la definicion, tendremos sucesivamente:

1.° En el caso de una progresion *creciente*,

$$\begin{aligned} b &= a+r, \\ c &= b+r = a+r+r = a+2r, \\ d &= c+r = a+2r+r = a+3r, \\ e &= d+r = a+3r+r = a+4r, \end{aligned}$$

. . . .

. . . .

luego si n designa el número total de términos hasta l inclusive,

(1) $$l = a + (n-1)r,$$

fórmula que, traducida al lenguage ordinario, equivale al enunciado de arriba en lo relativo á la primera especie de progresion.

2.° En el caso de una progresion *decreciente*,

$$\begin{aligned} b &= a-r, \\ c &= b-r = a-r-r = a-2r, \\ d &= c-r = b-r-r = a-2r-r = a-3r, \end{aligned}$$

. . . .

. . . .

y por último

(2) $$l = a - (n-1)r.$$

Se vé que estas dos fórmulas pueden servir para determinar un término cualquiera en la série, sin necesidad de calcular *todos* los precedentes, puesto que basta conocer el primer término a, la razon r y el número n de los términos comprendidos desde el primero hasta el que quiera formarse.

Sea, por ejemplo, la progresion $\div 2 . 5 . 7 . 11 \ldots$; tendremos, para el *vigésimo* término,

$$l = 2 + 19 \times 3 = 59;$$

para el *sexagésimo*,

$$l = 2 + 59 \times 3 = 179.$$

Del mismo modo, en la progresion $\div 80 . 74 . 68 \ldots$, tendremos, para el *duodécimo* término,

$$l = 80 - 11 \times 6 = 14.$$

295. Observacion.—Tal es la naturaleza de las progresiones por diferencia, que cuando una série de términos de esta especie está escrita, nada impide considerarla como *principiando* en un término cualquiera, a' por ejemplo, y terminando en otro término l'.

Aceptado esto, puede desde luego aplicarse á los dos términos a' y l' lo acabado de decir con relacion al primer término a, y al último término l de la progresion propuesta; de donde se sigue que, si se designa por n' el número de los términos comprendidos desde a' inclusivamente hasta l' exclusivamente, tendremos

$$l' = a' + n' \times r, \text{ si la progresion es } \textit{creciente},$$

y

$$l' = a' - n' \times r, \text{ si es } \textit{decreciente}.$$

296. Segunda propiedad.— En toda progresion por diferencia, *la suma de dos términos, tomados á igual distancia de los estremos, es constante é igual á la suma de los estremos.*

Volvamos, en efecto, á la progresion general

$$\div a . b . c . d \ldots i . k . l,$$

y llamemos x é y dos términos cualesquiera de esta série, pero de lugares relativos tales, que el uno, x, tenga un número p de términos *delante*, y el otro, y, tenga el mismo número de *términos* detrás.

En virtud de la observacion precedente, tendremos

$$x = a + p \times r, \quad \text{y} \quad l = y + p \times r, \quad \text{ó} \quad y = l - p \times r;$$

de donde se deduce, sumando miembro á miembro la primera y la tercera igualdad,

$$x + y = a + l,$$

pues los dos términos $+p \times r$ y $-p \times r$ se destruyen.

Luego, etc.

Así, sea la progresion

$$\div 2 . 7 . 12 . 17 . 22 \ldots 47 . 52 . 57 . 62.$$

Si se considera el término 17 que tiene 3 *delante* y el término 47 que tiene 3 *detrás*, se reconoce que

$$17+47=2+62=64;$$

del mismo modo

$$12+52=2+62=64.$$

Advertencia.— Podria tambien deducirse esta propiedad de la demostrada en el n.º 289, acerca de las *equidiferencias*.

En efecto, los *cuatro* términos a, x, y, l de la progresion son evidentemente tales, que x escede á a en la *misma* cantidad $p \times r$, que l escede á y; así estos cuatro números forman una *equidiferencia* á la cual es aplicable la propiedad del n.º 289.

297. Consecuencia.—Cuando el número de los términos que se consideran en una progresion es *impar*, el término del *medio* es igual á *la semi-suma de los dos estremos*.

En efecto, dicho término es el *medio diferencial* (n.º 292) de una equidiferencia *contínua* cuyos estremos son los de la progresion.

298. Tercera propiedad.—*La suma de los términos de una progresion por diferencia, es igual al producto de la suma de los estremos por la mitad del número de los términos, ó al producto de la semi-suma de los estremos por el número de los términos.*

Consideremos otra vez la progresion general

$$(1) \qquad \div a . b . c . d \ldots i . k . l,$$

y escribamos esta série de términos debajo de sí misma, pero en un órden inverso; tendremos

$$(2) \qquad \div l . k . i \ldots d . c . b . a.$$

Esto supuesto, sumemos término á término estas dos séries, y designemos por $2S$ la suma total de los números que las componen; se halla

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\dots$$
$$+(i+c)+(k+b)+(l+a).$$

Ahora bien, todas las sumas parciales colocadas entre paréntesis son iguales entre sí é iguales á $a+l$ (n.° 296); luego si designamos por n el número de términos de la primera progresion, tendremos la nueva igualdad

$$2S=(a+l)n,$$

y por consiguiente,

$$S=\frac{(a+l)n}{2}=(a+l)\times\frac{n}{2}=\frac{(a+l)}{2}\times n;$$

lo cual demuestra que la *suma* S de los términos de la progresion dada tiene por *valor numérico* una espresion que, en lenguage ordinario, puede enunciarse de tres maneras diferentes, siendo las dos últimas conformes al enunciado.

Segun esto se ve, que para obtener la *suma de un número cualquiera de términos* de una progresion por diferencia, basta conocer el *primer* término, el *último* y el *número* de términos; y ya en el n.° 294 se dió el medio de hallar el *último* término, conociendo el *primero* la *razon* y el *número* de los términos.

Sea, por ejemplo, la progresion

$$\div 3\,.\,7\,.\,11\,.\,15\dots,$$

en la cual se pide la *suma* de los 60 términos primeros.

Tendremos de antemano

$$l=3+59\times 4=239;$$

y por consiguiente,

$$S=(239+3)\times 30=242\times 30=7260.$$

Del mismo modo obtendriamos, llegando hasta el 100° término,

1.° $l=3+99\times 4=399$; 2.° $S=402\times 50=20100$.

299. Casos particulares de la espresion de la suma de una progresion por diferencia.—Tomemos para aplicaciones particulares de la fórmula que dá el valor de S, la série de los *números naturales* y la de los *números impares*, á saber:

$$\div 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots n,$$
$$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 \ldots 2n-1.$$

Observemos que, en la primera série, el *último* término l es necesariamente igual al número n de términos considerados, y que la segunda dá, en virtud de la fórmula (1) del n.º 294,

$$l = 1 + 2(n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$$

De donde se deduce, para espresion de la suma S,

1.º $$S = (1+n) \times \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2};$$

2.º $$S = (2n-1+1)\frac{n}{2} = n^2.$$

Esta última espresion es particularmente notable porque la *suma* S es igual al *cuadrado del número* de los términos que se consideran.

Así, la suma de los 12 primeros términos es 144; la suma de los 20 primeros es 400; la de los 30 primeros, 900.

300. Insercion de medios diferenciales entre dos números dados.—Propongámonos insertar entre dos números dados a y b un número m de *medios diferenciales*.

Así se llaman otros números que deben formar una *progresion por diferencia* con los números a y b, considerados como *estremos* de dicha progresion.

Por lo pronto es evidente que si conociéramos la *razon* r de la progresion buscada, todo estaria determinado, pues bastaria, siendo $a<b$ por ejemplo, ir *añadiendo* al primer término, la razon, *dos veces* la razon, *tres veces* la razon, etc., para ir obteniendo sucesivamente el *segundo*, el *tercero*, el *cuarto*, etc., términos de la progresion, ó sea el primero, el segundo, el tercero, etc., *medio diferencial*.

Ahora bien, llamando n el número de términos, inclusos los dos a y b, lo cual dá $n=m+2$, tendremos (n.º 294)

$$b=a+(n-1)\times r=a+(m+1)\times r;$$

de donde

$$b-a=(m+1)\times r;$$

y por consiguiente

$$r=\frac{b-a}{m+1}.$$

Así pues, la *razon buscada* es igual al *cociente de la division de la diferencia de los dos números dados por el número de términos que se quieren interpolar* MAS UNO.

Una vez conocida la razon, los diferentes términos de la progresion se obtienen fácilmente y son

$$\div a\,.\,a+\frac{b-a}{m+1}\,.\,a+\frac{2(b-a)}{m+1}\,.\,a+\frac{3(b-a)}{m+1}\cdots\cdot$$

[La fórmula (1) del n.º 294, $l=a+(n-1)\times r$, sustituyendo en ella $m+1$ y $\frac{b-a}{m+1}$, en vez de $n-1$ y r, se convierte en

$$l=a+(m+1)\times\frac{b-a}{m+1}=a+b-a=b;$$

lo cual comprueba el valor $\frac{b-a}{m+1}$ hallado para r.]

Sea, por ejemplo, interpolar *ocho medios diferenciales* entre los números 3 y 48.

Tendremos desde luego

$$r=\frac{48-3}{9}=5;$$

de donde

$$\div 3\,.\,8\,.\,13\,.\,18\,.\,23\,.\,28\,.\,33\,.\,38\,.\,43\,.\,48.$$

Del mismo modo hallaríamos, siendo $m=50$,

$$r=\frac{48-3}{51}=\frac{45}{51}=\frac{15}{17};$$

de donde

$$\div 3 \,.\, 3\frac{15}{17} \,.\, 4\frac{13}{17} \,.\, 5\frac{11}{17} \ldots 48, \text{ ó } \left(3+\frac{15}{17}\right)\times 51.$$

Advertencia.—Caso particular : $m=1$ dá

$$m+1=2; \text{ de donde } r=\frac{b-a}{2};$$

luego el *medio diferencial* que puede interpolarse entre a y b es

$$a+\frac{b-a}{2}=\frac{2a+b-a}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

(Véase el n.° 292.)

301. Cuarta propiedad.— *Si entre dos términos, consecutivos*, á partir del *primero*, y hasta el *último* inclusive, *se interpola* UN MISMO NÚMERO *de medios diferenciales, todas las progresiones parciales de este modo formadas constituyen una sola y misma progresion*, cuya *razon* es la de una cualquiera de las *progresiones parciales*.

Sea la progresion

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots i \,.\, k \,.\, l;$$

que para fijar las ideas, supondremos creciente, y propongámonos interpolar sucesivamente *m medios diferenciales* entre a y b, despues entre b y c, despues entre c y d..., y por último entre k y l.

Para la primera progresion tendremos,

$$r=\frac{b-a}{m+1},$$

para la segunda,

$$r'=\frac{c-b}{m+1},$$

para la tercera,

$$r''=\frac{d-c}{m+1};$$

y así sucesivamente.

Pero, segun la definicion misma de una progresion por diferencia,

$$b-a=c-b=d-c...;$$

de donde

$$\frac{b-a}{m+1}=\frac{c-b}{m+1}=\frac{d-c}{m+1}=....$$

Luego, por el pronto todas las progresiones así formadas tienen la misma *razon*.

Además, es evidente que cada *último* término b, c, d, etc., de la primera, segunda, tercera, etc., progresion parcial es al mismo tiempo el *primero* de la progresion siguiente.

Luego, etc.

302. OBSERVACION.—Aquí debe hacerse una observacion importante, y es que la fraccion que espresa la razon de cada progresion parcial, tiene *un numerador constante*, y que su denominador puede suponerse *tan grande como se quiera;* de donde se sigue que se puede concebir aquella razon *menor que toda cantidad dada*, asignando al número m de los medios diferenciales que deben interpolarse, un valor *suficientemente grande*.

Por ejemplo, sean $a=6, b=7$; tendremos

siendo $m=9$, $\quad b-a=\frac{1}{10}$;

siendo $m=99$, $\quad b-a=\frac{1}{100}...$;

y así sucesivamente.

Progresiones por cociente (ó geométricas.)

303. Se llama PROGRESION POR COCIENTE una série de términos tales, que la *relacion* de un término cualquiera al que le precede es *constante* en toda la estension de la série.

Esta *relacion constante*, que existe entre un término y el que inmediatamente le precede, se llama la RAZON de la progresion.

Sean las dos séries de números

$$2,\quad 4,\quad 8,\ 16,\ 32,\quad 64,\ldots,$$
$$256,\quad 64,\quad 16,\quad 4,\quad 1,\quad \frac{1}{4},\ldots;$$

de la primera se deduce la série de *razones iguales*,

$$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}\ldots=2;$$

y de la segunda

$$\frac{64}{256}=\frac{16}{64}=\frac{4}{16}=\ldots=\frac{1}{4}.$$

La RAZON puede ser *entera* ó *fraccionaria*, *mayor* ó *menor* que la unidad, segun que la progresion es *creciente* ó *decreciente*.

Las progresiones por cociente se escriben así:

$$\div\!\!\div 2:4:8:16:32:64\ldots,$$
$$\div\!\!\div 256:64:16:4:1:\frac{1}{4}\ldots,$$

y se *enuncian* como las progresiones por diferencia, siendo el único carácter distintivo de su escritura el número de puntos puestos entre los términos.

Una progresion *por cociente* no es mas que una série de *proporciones continuas* (n.° 292), en donde cada término es á la vez *antecedente* y *consecuente*, á escepcion del *primero* que solo es *antecedente* y del *último* que solo es *consecuente*.

304. PRIMERA PROPIEDAD.—En toda progresion por cociente, *un término cualquiera es igual al producto del primer término por una potencia de la razon cuyo esponente es igual á* TANTAS VECES *la unidad como términos haya antes de él.*

Sea, en general, la progresion

$$\div\!\!\div a:b:c:d:e:f:\ldots i:k:l:$$

y designemos por q la *razon* de un término al que le precede.

Tendremos necesariamente, segun la definicion,

$$b=a\times q,\quad c=b\times q=a\times q^2,\quad d=c\times q=a\times q^3,\quad e=a\times q^4,\ldots;$$

luego, designando n el número total de los términos hasta el término l inclusive, se llega á la fórmula

$$(1)\qquad l=a\times q^{n-1},$$

en la cual, segun hemos dicho antes, q es $>$ ó <1, segun que la progresion es *creciente* ó *decreciente*.

Tomemos, por ejemplo, las dos progresiones

$$\div\div 2:6:18:54:\ldots,$$

$$\div\div 12:6:3:\frac{3}{2}:\frac{3}{4}:\ldots.$$

En la primera, la razon es 3, y el octavo término será

$$2\times 3^7=2\times 2187=4374;$$

el 12.° término será

$$2\times 3^{11}=2\times 2187\times 81=354294.$$

En la segunda, cuya razon es un medio, el 10.° término será,

$$12\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=12\times\frac{1}{512}=\frac{3}{128};$$

el vigésimo término será,

$$12\times\left(\frac{1}{2}\right)^{19}=12\times\frac{1}{512}\times\frac{1}{1024}=12\times\frac{1}{524288}=\frac{3}{131072}.$$

305. SEGUNDA PROPIEDAD.—En toda progresion por cociente, *el producto de dos términos cualesquiera, tomados á igual distancia de los estremos*, es CONSTANTE é *igual al producto de los estremos.*

Sean x é y dos términos que tienen, el uno un número p

de términos *delante* de él, y el otro el mismo número p de términos *detrás*. Es evidente que los cuatro números a, x, y, l, de los cuales el segundo es igual á $a \times q^p$, y el cuarto es igual á $y \times q^p$, forman entre sí una proporcion, cuyos estremos son a, l, y cuyos medios son x, y; luego (n.° 246)

$$x \times y = a \times l.$$

Esta propiedad comparada con la del n.° 296, manifiesta que lo que es la *adicion* relativamente á la progresion *por diferencia*, es la *multiplicacion*, relativamente á la progresion *por cociente*.

Mas adelante tendremos ocasion de sacar partido de esta comparacion.

306. TERCERA PROPIEDAD.—Para obtener la SUMA de los términos de una progresion por cociente, es necesario, si la progresion es CRECIENTE, *multiplicar el último término por la razon, restar del producto el primer término*, y despues *dividir la diferencia por la razon disminuida en una unidad;* y si la progresion es DECRECIENTE, *restar*, por el contrario *del primer término el producto del último por la razon*, y despues *dividir la diferencia por la diferencia entre la unidad y la razon.*

Sea en efecto la progresion general

$$\div\!\div a : b : c : d : e : f \ldots : k : l,$$

la cual puede ponerse (n.° 304) bajo la forma

$$\div\!\div a : a \times q : a \times q^2 : a \times q^3 : a \times q^4 \ldots : a \times q^{n-2} : a \times q^{n-1}.$$

Designando por S la suma de los n primeros términos, pongamos

$$(1) \quad \begin{cases} S = a + a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + \ldots \\ \quad + a \times q^{n-2} + a \times q^{n-1}; \end{cases}$$

y despues multipliquemos los dos miembros de esta igualdad por q; con lo cual resultará

$$(2) \quad \begin{cases} S \times q = a \times q + a \times q^2 + a \times q^3 + \ldots \\ \quad + a \times q^{n-1} + a \times q^n. \end{cases}$$

Esto supuesto, si la progresion es *creciente*, se *resta* la igualdad (1) de la igualdad (2), y se obtiene

$$S \times q - S \quad \text{ó (n.}^\circ 49) \quad S \times (q-1) = a \times q^n - a,$$

observando que en la sustraccion, todos los términos de los segundos miembros se destruyen uno á otro, á escepcion del último término $a \times q^n$, de la série (2), y del primer término a de la série (1).

Deduciremos pues

(3) $$S = \frac{a \times q^n - a}{q-1}.$$

Si la progresion es DECRECIENTE, se *resta*, por el contrario, la igualdad (2) de la igualdad (1); lo cual dá

$$S - S \times q \quad \text{ó} \quad S \times (1-q) = a - a \times q^n;$$

y por consiguiente,

(4) $$S = \frac{a - a \times q^n}{1-q}.$$

Finalmente, reemplazando en una y otra de las dos espresiones (3) y (4), $a \times q^{n-1}$ por su valor l (n.º 304) se llega á estas otras

(5) $$S = \frac{l \times q - a}{q-1},$$

(6) $$S = \frac{a - l \times q}{1-q},$$

que, traducidas al lenguage ordinario, dán lugar al enunciado arriba puesto para la *suma de los términos de una progresion por cociente.*

Advertencia.—Esta doble espresion es útil especialmente en la resolucion de las cuestiones relativas al *interés compuesto.*

Volvamos á las dos progresiones del n.° 304 :

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : \ldots,$$

$$\div 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \ldots.$$

El octavo término de la *primera* tiene por valor $l=4374$; luego la suma de los *ocho* primeros términos, será

$$S=\frac{4374\times 3-2}{3-1}=\frac{13120}{2}=6560;$$

del mismo modo, el duodécimo término es 354294 ; luego

$$S=\frac{354294\times 3-2}{2}=531440.$$

El décimo término de la *segunda* es $l=\frac{3}{128}$; luego

$$S=\frac{12-\frac{3}{128}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{12\times 256-3}{128}=\frac{3069}{128}=24-\frac{3}{128}.$$

(Como $128=2^7$ la conversion de la fraccion $\frac{3069}{128}$ en decimales puede hacerse exactamente (n.° 172), y se halla

$$S=23,9765625).$$

Análogamente, el vigésimo término es $\frac{3}{131072}$; luego

$$S=\frac{12-\frac{1}{2}\times\frac{3}{131072}}{\frac{1}{2}}=\frac{3145725}{131072}=24-\frac{3}{131072}.$$

Se vé fácilmente que la parte laboriosa del cálculo en esta clase de cuestiones, es la *determinacion del valor numérico* del último término á que se llega.

307. INTERPOLACION DE MEDIOS PROPORCIONALES ENTRE DOS NÚMEROS DADOS.—Propongámonos *interpolar entre dos números* a y b *un número* m *de medios proporcionales*, es decir, m *números que formen una progresion por cociente* con los números a y b considerados como *estremos*.

Tenemos, como en las progresiones por diferencia (n.º 300),

$$n=m+2, \quad \text{de donde} \quad n-1=m+1.$$

Pero de la fórmula (1) del n.º 304, se deduce

$$b=a\times q^{n-1}=a\times q^{m+1}; \text{ de donde } q^{m+1}=\frac{b}{a};$$

luego tendremos (n.º 45), para razon de la progresion,

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

Una vez *determinada* la razon, resulta sucesivamente

$$\div a : a\times\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a\times\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2 : \ldots : b.$$

Caso particular.—Sea

$$m=1; \quad \text{de donde} \quad n-1=m+1=2,$$

la razon es igual á $\sqrt{\frac{b}{a}}$; luego el *medio proporcional* único tiene por valor

$$x=a\times\sqrt{\frac{b}{a}}=a\times\sqrt{\frac{a\times b}{a^2}} \quad (\text{n.º } 224),$$

y por consiguiente

$$x = \frac{a}{a} \times \sqrt{a \times b} = \sqrt{a \times b},$$

como en el n.º 292.

No insistimos mas en esto de los *medios proporcionales*, á causa de la imposibilidad en que estamos por ahora, de estender las aplicaciones mas allá de la estraccion de una raiz *cuadrada* ó *cúbica*.

Sin embargo, no podemos menos de establecer una propiedad análoga á la establecida en el n.º 301, con relacion á las progresiones por diferencia.

308. CUARTA PROPIEDAD.—*Si, entre todos los términos consecutivos*, tomados *de dos en dos*, desde el *primero* hasta el *último* inclusive, *se interpola* UN MISMO NÚMERO *de medios proporcionales*, *todas las progresiones parciales así formadas constituyen una sola y misma progresion por cociente.*

En efecto, puesto que se obtiene la *razon* para cada una de estas progresiones, estrayendo una raiz del *grado marcado por* $m+1$, de los cocientes iguales $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c}, \ldots$, esta razon es la *misma* para todas; y como además, cada término de la progresion dada, empezando por b, forma el *último* término de una progresion ya obtenida y el *primero* de la progresion que sigue inmediatamente, resulta que todas estas progresiones necesariamente forman *una sola*.

§ III.—DE LOS LOGARITMOS Y DE SU APLICACION Á LA RESOLUCION DE ALGUNAS CUESTIONES QUE DEPENDEN DE LAS CANTIDADES PROPORCIONALES.

Origen y definicion de las tablas de logaritmos.

309. La analogía que existe entre las propiedades de las progresiones por *diferencia* y las de las progresiones por *cociente*, analogía fundada en que las *adiciones*, *sustracciones*, *multiplicaciones* y *divisiones*, en las unas, corresponden á *multiplicaciones*, *divisiones*, *formaciones de potencias* y *estracciones de raices* en las otras, condujo á algunos sabios á

imaginar métodos de simplificacion para los cálculos numéricos mas complicados.

Estos métodos se apoyan en la existencia de ciertas tablas conocidas con el nombre de TABLAS DE LOGARITMOS, cuya invencion generalmente se atribuye al sabio escocés NEPER.

No pudiendo, en este libro elemental, esponer los medios de que se valió para llegar á la construccion de semejantes Tablas, vamos á lo menos, á ensayar el modo de hacer comprender, por medio de algunas sencillas consideraciones, cómo habrian podido formarse, en rigor y salva la longitud de los cálculos.

De la propiedad del n.° 301, resulta que, designando r la *razon* de una progresion por *diferencia*, cuando entre cada dos de sus términos consecutivos se halla interpolado un número m de *medios diferenciales*, la razon de la progresion total está espresada por $\frac{r}{m+1}$, fraccion que puede concebirse *menor* que cualquier cantidad dada, cuando se asigna á m un valor suficientemente grande.

Luego, si se toma por punto de partida una progresion tal como

$$\div 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, 5r \ldots,$$

que tiene 0 por *primer* término, y si despues se forma una série de progresiones parciales por el medio arriba indicado, se obtiene una progresion total

$$\div 0 \,.\, \frac{r}{m+1} \,.\, \frac{2r}{m+1} \,.\, \frac{3r}{m+1} \ldots r \,.\, r+\frac{r}{m+1} \ldots$$

$$r+\frac{2r}{m+1} \ldots 2r \,.\, 2r+\frac{r}{m+1} \ldots,$$

cuyos términos van aumentando por *intérvalos iguales* tan *pequeños* como se quiera, desde 0 hasta *un límite* mas ó menos grande, segun la estension de la progresion primitiva.

De modo que, comenzando en 0 es una série *casi continua* de números, que sin embargo conservan la propiedad de estar en *progresion por diferencia*.

Tomemos ahora una progresion CRECIENTE por *cociente*, y que principie por la unidad:

$$\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : \ldots,$$

designando q la razon, ó sea la relacion constante de un término cualquiera al que le precede.

Si, entre todos los términos consecutivos de esta série, se inserta un número m de *medios proporcionales*, se obtiene (n.° 308) que la *razon constante* de cada progresion parcial es igual á $\sqrt[m+1]{q}$.

Esto supuesto, para estar seguros de que con la progresion total así formada sucede como con la progresion *por diferencia* obtenida anteriormente, es decir, para estar seguros de que aquella como esta constituye una série *casi continua* de números, sería necesario poder demostrar que $\sqrt[m+1]{q}$ puede hacerse *tan próximo á la unidad* como se quiera, siendo q un número *constante*, y dado *à priori;* pero recibiendo m un valor *suficientemente grande*.

No podemos probar esto *directamente*, porque no conocemos todavía el medio de estraer una raiz de *cualquier grado*.

Pero hé aquí, á lo menos, una manera *indirecta* de demostrarlo.

Sea 4759 un número tomado al azar en la série natural de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6,...; y propongámonos estraer de él, raices cuadradas sucesivas.

Se halla

$$\sqrt{4759} = 68 \text{ en menos de una unidad;}$$

$$\sqrt{\sqrt{4759}}, \text{ ó (n.° 241) } \sqrt[4]{4759} = \sqrt{68 + \ldots} = 8, \quad id.$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{4759}}}, \quad \text{ó} \quad \sqrt[8]{4759} = \sqrt{8 + \ldots} = 2, \quad id.$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4759}}}}, \quad \text{ó} \quad \sqrt[16]{4759} = \sqrt{2 + \ldots} = 1, \quad id.$$

Y así sucesivamente.

Aquí se ve desde luego con qué rapidez van *decreciendo las partes enteras* de esas raices cuadradas sucesivas.

En cuanto á las *partes decimales*, decrecen tambien indefinidamente, sin que por eso el resultado final deje de ser mayor que la unidad; pero la *diferencia* entre este resultado y la unidad se comprende que es susceptible de llegar á ser MENOR QUE CUALQUIER CANTIDAD DADA.

Establecida así la proposicion respecto de las raices cuyos índices son 2, 4, 8, 16,..., ó $2, 2^2, 2^3, 2^4,...$, debe suceder lo mismo respecto de toda raiz del grado $m+1$, es decir, respecto de toda espresion de la forma $\sqrt[m+1]{\text{N}}$; siendo N un número cualquiera *mayor* que 1.

Porque necesariamente se tiene, segun la significacion misma de la palabra *raiz*

$$\sqrt[m+1]{\text{N}} < \sqrt[2^n]{\text{N}},$$

designando 2^n la potencia de 2 inmediatamente inferior á $m+1$.

Pero $\sqrt[2^n]{\text{N}}$ puede diferir de 1, *por esceso*, tan poco como se quiera, luego con mayor razon ha de suceder lo mismo á $\sqrt[m+1]{\text{N}}$.

Podemos considerar pues como suficientemente *probada* la posibilidad de la existencia de dos progresiones CRECIENTES, una *por cociente*, y principiando por 1, cuyos términos sean entre sí tan poco diferentes como se quiera, y otra *por diferencia* y principiando por 0, cuyos términos tambien difieran unos de otros tan poco como se quiera.

Advertencia. —Todo número N *conmensurable* ó *inconmensurable* y *mayor* que 1, sino es uno de los términos mismos de la progresion *por cociente*, se halla necesariamente *comprendido entre dos* de dichos términos, los cuales pueden, uno ú otro indiferentemente, sustituirse á N, pues por hipótesis estos términos no difieren entre sí, sino en una cantidad *menor que cualquier cantidad dada.*

310. Definicion de las tablas de logaritmos. — Nada mas fácil ahora que definir una *Tabla de logaritmos*, cualesquiera que sean por otra parte, los medios que se hayan empleado para construirla.

Es una Tabla que contiene:

Por una parte, todos los números *enteros*, comprendidos desde 1 hasta un límite determinado, por ejemplo 100000, considerándose esos números como términos de una progresion *por cociente*, en la cual ocupan un lugar dado;

Por otra parte, enfrente de estos números, los términos de una progresion *por diferencia* y que principia por 0, cuyos términos se llaman entonces los *logaritmos* de aquellos números.

El logaritmo de un número determinado es por consiguiente el término de la progresion *por diferencia*, que ocupa en ella *el mismo lugar* que el número dado en la progresion *por cociente*.

Un número y su logaritmo se llaman entonces *términos correspondientes* en dichas progresiones.

Siendo los términos 1 y 0, el uno el *primer* término de la progresion por cociente, y el otro el *primer* término de la progresion por diferencia, se viene á parar á esta especie de proposicion, que recordarémos muchas veces en adelante: *el logaritmo* de 1 es 0, ó para abreviar, log. $1=0$.

(Nos serviremos habitualmente de las *tres* letras iniciales *log.*, seguidas de un *punto*, y del número representado, sea en cifras, sea por una letra, para escribir de una manera abreviada el logaritmo del número. Sin embargo, algunas veces, solo emplearemos la primera letra *l*.)

311. Observacion.—Aunque la Tabla, tal como acabamos de definirla, no contiene mas que los logaritmos de los números *enteros*, puede concebirse que *todo número mayor que la unidad*, considerado como parte de la progresion por cociente, cuya formacion hemos esplicado, se encuentra comprendido en ella á lo menos implícitamente con el *término correspondiente* de la progresion por diferencia.

Veremos además en adelante, como, por medio de los logaritmos de los números *enteros*, se obtienen los de los números *fraccionarios mayores que la unidad*.

Las fracciones propiamente dichas tienen tambien sus logaritmos; pero la determinacion de estos supone nociones estrañas á la Aritmética elemental, donde no se consideran mas que *números absolutos*.

Indicaremos sin embargo el medio de hacer aplicacion de las tablas á cuestiones en que figuran números fraccionarios *menores* que la unidad.

Propiedades generales de los logaritmos.

Despues de haber manifestado, sino el verdadero medio, al menos la posibilidad de construir unas *Tablas de logaritmos*, vamos á establecer las propiedades generales en que se fundan las simplificaciones que el uso de las Tablas proporciona en los cálculos numéricos, haciendo observar *que aquí* ÚNICAMENTE *consideramos los logaritmos* de números mayores que la unidad.

312. PRIMERA PROPIEDAD.—*El logaritmo del* PRODUCTO *de dos números* es igual á la SUMA *de los logaritmos de los dos factores.*

Sean A y B (siendo $A<B$), dos números tomados al azar en la progresion *por cociente* que principia por 1, cuyos términos difieren entre sí en una cantidad *menor que cualquier cantidad dada* (véase la *advert.* del n.° 309) y designemos por P, al término de esta progresion, precedido *de tantos términos* comenzando por B inclusive, *como términos* hay antes de A, en la misma progresion.

Así se tienen *cuatro* números,

$$1,\ A,\ B\ \text{y}\ P,$$

en los cuales 1 y P pueden suponerse los *estremos* de una progresion que acaba en el término P; de modo que A y B, siendo dos términos situados *á igual* distancia de los estremos, forman los dos *medios* de una *proporcion* cuyos estremos son 1 y P.

Les es por consiguiente aplicable la propiedad del n.° 246, y se tiene

$$1\times P=A\times B,\quad \text{ó}\quad P=A\times B.$$

Por otro lado, tomemos en la progresion *por diferencia* (n.° 310) los logaritmos correspondientes á los cuatro números 1, A, B, P, logaritmos que, segun la notacion indicada en el mismo número podremos espresar por

$$\text{log. } 1, \text{ ó } 0, \text{ log. A}, \text{ log. B}, \text{ log. P}.$$

Estos cuatro números forman evidentemente una *equidiferencia*, cuyos *estremos* son 0 y log. P, y los *medios* log. A y log. B; por consiguiente tendremos (n.º 289)

$$0+\text{log. P}, \text{ ó } \text{log. P}=\text{log. A}+\text{log. B}.$$

Pero de esta igualdad, á causa de la relacion $P=A\times B$, se deduce

$$\text{log. }(A\times B)=\text{log. A}+\text{log. B}.$$

Luego etc.

313. Consecuencia.—*El logaritmo del* producto *de un número cualquiera de factores es igual á la* suma *de los logaritmos de los diferentes factores.*

Llamemos A, B, C, D,..., los números dados.

Segun lo acabado de decir, tendremos

$$\text{log. }(A\times B)=\text{log. A}+\text{log. B}.$$

Ahora, como $A\times B\times C=(A\times B)\times C$, resulta

$$\text{log. }(A\times B\times C)=\text{log. }(A\times B)+\text{log. C},$$

ó poniendo en lugar de log. (A× B), su valor log. A+log. B

$$\text{log. }(A\times B\times C)=\text{log. A}+\text{log. B}+\text{log. C}.$$

Análogamente, siendo $A\times B\times C\times D$ lo mismo que $(A\times B\times C)\times D$, se hallaria

$$\text{log. }(A\times B\times C\times D)=\text{log. A}+\text{log. B}+\text{log. C}+\text{log. D};$$

y así sucesivamente.

314. Segunda propiedad.—*El logaritmo del* cociente *de una division es igual á la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.*

[Aquí el cociente, lo mismo que el dividendo y el divisor, se suponen *mayores que la unidad.*]

Sean D el dividendo, d el divisor, y q el cociente de una division.

Como tenemos $D = d \times q$, resulta

$$\log. D = \log. d + \log. q,$$

de donde se saca

$$\log. q = \log. D - \log. d.$$

L. C. D. D.

315. Tercera propiedad.—*El logaritmo de una potencia cualquiera de un número es igual al* producto *del logaritmo del número por el* esponente *de la potencia.*

En efecto, A^m es lo mismo que $A \times A \times A \times A \times \ldots$; luego

$$\log. A^m = \log. A + \log. A + \log. A + \log. A + \ldots = \log. A \times m,$$

ó bien

$$\log. A^m = m \times \log. A.$$

316. Cuarta propiedad.—*El logaritmo de una* raiz *de un grado cualquiera de un número es igual al* cociente *de la division del logaritmo del número por el* índice *de la raiz.*

Designemos por R la raiz $n.^{ésima}$ de un número A; en virtud de la definicion del n.° 45, tendremos

$$A = R^n, \quad \text{de donde (n.° 315)} \quad \log. A = n \times \log. R;$$

y por consiguiente,

$$\log. R \quad \text{ó} \quad \log. \sqrt[n]{A} = \frac{\log. A}{n}.$$

L. C. D. D.

317. Observacion.—De estas dos últimas propiedades, se deduce una demostracion sencilla de algunos principios importantes del cálculo de las espresiones afectas del signo radical $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, ...

1.° $$\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \sqrt[n]{A^m}.$$

En efecto, tenemos por lo pronto (n.° 315)

$$\log.\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = m\times\log.\sqrt[n]{A};$$

pero (n.° 316)

$$\log.\sqrt[n]{A} = \frac{\log.\ A}{n};$$

luego

$$\log.\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = \frac{m}{n}\times\log.\ A.$$

Por otro lado, las mismas propiedades dán

$$\log.\sqrt[n]{A^m} = \frac{\log.\ A^m}{n} = \frac{m\times\log.\ A}{n} = \frac{m}{n}\times\log.\ A.$$

Las dos espresiones $\left(\sqrt[n]{A}\right)^m$, y $\sqrt[n]{A^m}$, tienen el *mismo* logaritmo (en el *mismo* sistema); luego son necesariamente *iguales en valor numérico* y pueden reemplazarse una por otra.

2.° $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[m\times n]{A};$$

porque tenemos, *por una parte*

$$\log.\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \frac{\log.\sqrt[n]{A}}{m} = \frac{\log.\ A:n}{m} = \frac{\log.\ A}{m\times n};$$

y *por otra*

$$\log.\sqrt[m\times n]{A} = \frac{\log.\ A}{m\times n};$$

luego las dos espresiones $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$ y $\sqrt[m\times n]{A}$, que tienen el *mismo* logaritmo, son *numéricamente* iguales.

Generalizando se encontraria, que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{A}}}} = \sqrt[m \times n \times p \times q]{A},$$

puesto que los logaritmos de estas dos espresiones tienen por valor

$$\frac{\log. A}{m \times n \times p \times q}.$$

Por su razonamiento análogo se probaria

$$((A^m)^n)^{p\cdots} = A^{m \times n \times p \times \cdots}$$

Usos de las propiedades generales de los logaritmos para la simplificacion de los cálculos numéricos.

318. Ahora se concibe el uso que puede hacerse de los logaritmos para simplificar toda especie de cálculos. Las reglas que deben seguirse se deducen esplícitamente de las propiedades que acabamos de demostrar.

1.° Para formar el PRODUCTO de varios factores:

Tómense en la tabla los logaritmos de dichos *factores; hágase su* SUMA, y despues *búsquese á qué número* de la Tabla *corresponde* esa suma; el número así hallado es el producto pedido;

De este modo el resultado de una MULTIPLICACION se obtiene por medio de una ADICION.

2.° Para hacer una DIVISION:

Tómense en la Tabla el *logaritmo* del dividendo y del divisor; réstese el segundo del primero, y *búsquese* el número correspondiente á esta *diferencia* de logaritmos;

Así se obtiene el *cociente* de la DIVISION por medio de una SUSTRACCION.

3.° Para FORMACION DE POTENCIAS:

Tómese en la Tabla el *logaritmo* del número que quiere elevarse á una potencia dada; *multiplíquese* este logaritmo por el *esponente* de la potencia; *búsquese* despues á qué número *corresponde* ese producto, y el número así hallado es la potencia pedida.

La multiplicacion de un número por otro que ordinariamente no tiene mas que *una* ó *dos* cifras á lo mas, basta por consiguente para dar el resultado de la multiplicacion de *varios* números iguales.

4.° Para EXTRAER UNA RAIZ de cualquier grado de un número:

Tómese el logaritmo del número, y *divídasele* por el *índice* de la raiz; *búsquese* despues en la Tabla á qué número *corresponde* el cociente; y ese número es la *raiz pedida.*

Una DIVISION muy sencilla basta por consiguiente para dar el resultado de una *extraccion de raiz*, cualquiera que sea su grado.

Así se ve que donde principalmente se hace notar la ventaja del empleo de los logaritmos es en la *extraccion de las raices.*

Puestas estas reglas, debemos, antes de aplicarlas, hacer conocer la disposicion y las propiedades particulares de las Tablas usadas ordinariamente.

Disposicion y propiedades particulares de las Tablas de Logaritmos vulgares.

319. La construccion de las Tablas de logaritmos llamados *logaritmos vulgares* ó *logaritmos* de BRIGGS, del nombre del primer autor de una Tabla de esta especie, está fundada en el sistema de las dos progresiones

$$\div\!\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \ldots\ldots,$$
$$\div\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \quad \ldots\ldots,$$

la primera de las cuales está formada por las *diversas potencias* de 10, *base* del sistema decimal, y la *segunda* no es otra cosa que la *série natural* de los números.

Conforme á lo dicho en el n.° 309, se *supone* haber interpolado entre todos los términos consecutivos de las dos progresiones, un número de *medios proporcionales* y de *medios diferenciales*, SUFICIENTEMENTE GRANDE para que todos los números *enteros*, empezando por 1, estén comprendidos en la Tabla y tengan enfrente sus *logaritmos*, es decir, los términos *correspondientes* de la progresion por diferencia.

Esto supuesto, la inspeccion sola de las dos progresiones fundamentales basta para hacer conocer:

1.° Que el logaritmo de 1 es 0, lo cual ya se habia visto en el n.° 310;

2.° Que el *logaritmo* de 10 es 1; el número 10, base del sistema decimal, se llama tambien LA BASE del sistema ordinario de logaritmos (por razones que no pueden esplicarse aquí);

3.° Que los *logaritmos* de los números comprendidos entre 1 y 10 son *menores* que la unidad;

4.° Que los *logaritmos* de los números comprendidos entre 10 y 100 se componen de *una* unidad y de *una parte* de la unidad;

5.° Que los *logaritmos* de los números comprendidos entre 100 y 1000 se componen de 2 unidades y de *una parte* de la unidad; y así sucesivamente.

Las partes de una unidad que deben añadirse á las *partes enteras* se han valuado aproximadamente en decimales, al calcular las Tablas ordinarias.

Las Tablas pequeñas, como las de Lalande, Reynaud,...., que no se estienden mas que hasta el número 10000, solo contienen *cinco* cifras decimales.

Las Tablas grandes, las de Callet en particular, las únicas de que nos serviremos, contienen todos los números *enteros* desde 1 hasta 108000, así como sus *logaritmos* calculados generalmente con *siete* decimales.

[Los números desde 1 hasta 1200 y desde 102000 hasta el último, se esceptuan de esa condicion general pues sus logaritmos comprenden *ocho* decimales.]

Los *siete* decimales de cada logaritmo son *exactos*, hasta la aproximacion de *media unidad*, ya *en menos* ya *en mas*, del órden de la *séptima* cifra; es decir que el error que tienen

es *menor que* $\frac{1}{2} \cdot 0{,}0000001$.

Esto supuesto, hé aquí algunas proposiciones en que se funda el uso de las Tablas.

320. EN PRIMER LUGAR. — Se ha visto que á los números comprendidos entre

1 y 10, 10 y 100, 100 y 1000, 1000 y 10000,....,

es decir á los números cuyas partes enteras, si son fraccionarios, contienen

UNA, DOS, TRES, CUATRO, ..., cifras,

corresponden respectivamente logaritmos, que tienen por *partes enteras*

0, 1, 2, 3,.....

De aquí se sigue que la *parte entera* de un *logaritmo* contiene *tantas unidades menos* UNA *como* como cifras tiene el número en su parte entera. Así, los logaritmos de los números

$$47, \quad 273, \quad 4569\frac{2}{3}, \quad 19684\frac{15}{23},$$

tienen respectivamente por *partes enteras*

1, 2, 3, 4,.....

Recíprocamente, los logaritmos que tienen por *parte entera*

1, 3, 4, 7,.....

pertenecen á números, cuyas partes enteras tienen

dos, *cuatro*, *cinco*, *ocho*,.... cifras.

La *parte entera* de un logaritmo basta, segun esto, para hacer conocer de *cuántas cifras* se compone la parte entera del número correspondiente, y por eso ha recibido la denominacion de CARACTERÍSTICA.

Por ejemplo, el logaritmo 2,3075604 pertenece á un número de *tres* cifras, ó á un número cuya parte entera se compone de *tres* cifras, segun que el número es *entero* ó *fraccionario*.

Esto esplica por qué, en las Tablas de Callet, han podido omitirse las *características* de los logaritmos; pues segun acabamos de decir, se determinan á la simple *inspeccion de los números correspondientes*.

321. EN SEGUNRO LUGAR. —Designemos por N un número cualquiera. Tendremos (n.° 312)

$$\log.\ N \times 10 = \log.\ N + \log.\ 10 = \log.\ N + 1;$$

del mismo modo

$$\log. N \times 100 = \log. N + \log. 100 = \log. N + 2;$$

. . . .

. . . .

y, en general

$$\log. N \times 10^n = \log. N + n.$$

Análogamente, en virtud de la propiedad del n.° 314, tenemos

$$\log. \frac{N}{10} = \log. N - \log. 10 = \log. N - 1; \log. \frac{N}{100} = \log. N - 2;$$

y en general

$$\log. \frac{N}{10^n} = \log. N - n.$$

Donde se ve que, conociendo el logaritmo de un número, para obtener el de otro número 10, 100,..., 10^n veces *mayor* ó *menor*, es necesario añadir á la característica del logaritmo del número dado, ó bien *restar* de ella, 1, 2, 3,...,n unidades, *sin variar nada la parte decimal.*

Así los logaritmos de los números decimales tales como

487,59 | 4875,9 | 4,8759,

que solo difieren entre sí por el lugar de la vírgula, tienen *la misma parte decimal;* y sus CARACTERÍSTICAS son (n.° 320)

2, 3, 0.

Advertencia. —Se observará que estas propiedades son *peculiares* al sistema de Briggs; lo cual le hace *preferible* á cualquier otro, pues las fracciones decimales son las fracciones con que mas á menudo se opera.

Uso de las tablas de logaritmos vulgares.

322. Como una Tabla de logaritmos no puede evidentemente comprender mas que números *enteros*, y aun estos en número *limitado*, el uso que de ellas ha de hacerse para las

aplicaciones á los cálculos numéricos, está fundado en la resolucion de dos cuestiones que vamos á tratar sucesivamente por medio de ejemplos particulares, á saber:

1.° *Dado un número cualquiera entero ó fraccionario (mayor que 1), hallar su logaritmo.*

2.° Recíprocamente, *dado un logaritmo, hallar el número entero ó fraccionario (mayor que 1), que le corresponde.*

[Hemos dicho (n.° 311) porque no debemos, por ahora considerar mas que los logaritmos de los números *mayores que la unidad.*]

323. PRIMERA CUESTION. — *Dado un número, hallar su logaritmo.*

Supongamos primero que el número dado sea *entero*. Si no pasa del límite de las Tablas (que como hemos dicho antes es el número 108000 en las de Callet) (*), basta, para hallar su logaritmo, conocer la disposicion particular de las Tablas en que dicho logaritmo se encuentra comprendido.

No debemos, pues, ocuparnos aquí sino de los números *enteros* que esceden del límite de las Tablas.

Sirva de *primer ejemplo* el número 4789635.

Observemos por lo pronto que, si por medio de una vírgula, separamos *dos* cifras á la derecha, lo cual dá

$$47896{,}35,$$

nada se cambiará (n.° 321) en la *parte decimal* del logaritmo.

En cuanto á la *característica* del número propuesto, ya se sabe (n.° 320) que debe ser igual á 6.

No se trata por consiguiente mas que de buscar la *parte decimal* que corresponde al logaritmo del número 47896,35.

Ahora bien, como este número está comprendido entre 47896 y 47897, su logaritmo debe tambien estar comprendido entre los de 47896 y 47897, ó bien habrá de ser igual al de 47896, aumentado *en una parte* de este mismo logaritmo *correspondiente* á la fraccion 0,35, en que 47896,35 escede á 47896.

(*) Las Tablas de Callet están dispuestas de tal manera que, desde el número 1020 en adelante, cada página contiene 600 números con sus logaritmos. No pudiendo entrar aquí en detalles, supondremos que el lector está enterado de la disposicion de estas Tablas, y que sabe buscar el logaritmo de un número *entero*, que no escede de su *límite*.

Tenemos, segun las Tablas (sobreentendiéndose la caracterísca)

$$\begin{array}{r} \log.\ 47897 = 6803083 \\ \log.\ 47896 = 6802992 \\ \hline 91 \end{array}$$

lo cual dá por diferencia 91 *diezmilésimas*.

Admitiendo, en principio (véase la observacion del n.° 326), que *las diferencias entre los logaritmos son proporcionales á las diferencias entre los números*, se dirá:

Puesto que, para 1 de diferencia entre 47897 y 47896, se tienen 91 *diez millonésimas* de diferencia entre sus logaritmos, se infiere que para 0,35 de diferencia entre 47896,35 y 47896, se debe tener *una diferencia* entre sus logaritmos, *espresada* por el producto 91×0,35; lo cual dá 31,85, ó simplemente 32 *diez millonésimas* que deben añadirse á 6802992; y así se obtiene 6803024 que será la *parte decimal* del logaritmo de 47896,35.

Luego finalmente

$$\log.\ 4789635 = 6,6803024.$$

Regla general.—Para obtener el logaritmo de un número entero *superior* al límite de las Tablas (es decir, á 108000), *sepárense á la derecha del número* por medio de una vírgula, *bastantes cifras para que la parte de la izquierda sea la* MAYOR *posible* (véase mas adelante el n.° 326), *sin esceder el límite;*

Búsquese en la Tabla el logaritmo *de esta parte de la izquierda; tómese la diferencia* (que la Tabla dá ya *calculada*) entre los logaritmos de los dos números que comprenden al número *decimal* sustituido al número propuesto, y *multiplíquese esta diferencia* (considerada como número entero), por la *parte decimal* de dicho número (operacion que se efectúa muy sencillamente por el medio que suministra la Tabla).

Añádase la parte entera de este producto (que espresa *diez millonésimas*) á las últimas cifras de la derecha del *menor* de los dos logaritmos tomados en la Tabla, y así se obtiene la *parte decimal* del logaritmo buscado, al cual se pone por *característica tantas unidades menos una* (n.° 320) como cifras tiene el número propuesto.

En la práctica, conviene disponer así los cálculos:

Número propuesto 4789635...47896,35.

Diferencia tabular	91	log. 47896 = 6802992
para 0,3	27,3	
para 0,05	4,55	32
	31,85	6803024

luego log. 4789635 = 6,6803024

Sirva de *segundo ejemplo*,

23947684...23947,684.

Diferencia tabular	182	log. 23947 = 3792511
para 0,6	109,2	
para 0,08	14,56	
para 0,004	0,728	124
	124,488	3792635

luego log. 23947684 = 7,3792635.

324. Supongamos ahora, que el número cuyo logaritmo se trata de hallar, es *fraccionario* (siempre mayor que la unidad), espresado en decimales ó bajo la forma de fraccion ordinaria (hallándose ó no hallándose el entero reducido á la especie del quebrado).

1.°—Sea el número 347,2586.

Se principia por correr la vírgula hácia la derecha, de modo que la *parte de la izquierda* sea la *mayor posible* (véase la observacion del n.° 326), sin esceder el límite de las Tablas; lo cual dá aquí el número

34725,86.

Diferencia tabular	126	log. 34725 = 5406423
para 0,8	100,8	
para 0,06	7,56	108
	108,36	5406531

luego log. 347,2586 = 2,5406531.

2.°—Sea el número dado $373\,\frac{47}{65}$.

Reduciendo el entero á la especie del quebrado, tenemos $\frac{24292}{47}$; de donde (n.° 314)

$$\log.\frac{24292}{47}=\log.\,24292-\log.\,47.$$

$$\begin{array}{rl} \log.\,24292 = & 4,3854633 \\ \log.\quad 47 = & 1,6720979 \\ \hline & 2,7133654 \end{array}$$

luego

$$\log.\,373\,\frac{47}{65}=2,7133654.$$

3.°—Sea $\frac{5629489}{678456}$.

Hé aquí el cuadro de los cálculos:

$$\log.\frac{5629489}{678456}=\log.\,5629489-\log.\,678456.$$

$$\begin{array}{lrrr} 1.^{\circ}\text{ Diferencia tabular} & 78 & \log.\,56294 = & 7504621 \\ \text{para } 0,8 & 62,4 & & \\ \text{para } 0,09 & 7,02 & & \\ & \overline{69,42} & & \\ & & & 69 \\ & & \log.\,5629489 = & \overline{6,7504690} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrr} 2.^{\circ}\text{ Diferenc. tab.} & 64 & \log.\,67845 = & 8315178 \\ \text{para } 0,6 & 38,4 & & 38 \\ & & & \overline{8315216} \end{array}$$

luego

$$\log.\quad 678456=5,8315216$$

y

$$\log.\,5629489-\log.\quad 678456=\overline{0,9189474}$$

Así el *logaritmo pedido* es 0,9189474, resultado que responde al valor del número dado, cuyo *entero*, sacándole del quebrado no tiene mas que *una sola cifra*.

325. SEGUNDA CUESTION.—*Dado un logaritmo, hallar el número corrrespondiente.*

Sea 1,4708475 el *logaritmo* dado.

Se comienza por *buscar* en la Tabla, entre los logaritmos de los números de *cinco* cifras (véase el n.º 326), si la *parte decimal* dada se encuentra allí. En caso afirmativo, se toma el número *correspondiente*, cuyas *tres* primeras cifras de la derecha se separan con una vírgula, puesto que la *característica* 1 indica que la *parte entera* del número buscado no debe tener mas que *dos* cifras.

Pero lo mas general (y así sucede en el ejemplo puesto), es que la *parte decimal dada* se halle comprendida entre dos partes decimales consecutivas de la Tabla.

Así en el ejemplo propuesto, se reconoce que la parte decimal mas aproximada á 4708475

es 4708366

lo cual dá la diferencia 109

Por otro lado, la *diferencia tabular* es 147.

Se hace pues el razonamiento siguiente, fundado en el principio enunciado en el n.º 323.

Puesto que la diferencia tabular 147 *diez millonésimas* corresponde á 1 entero de diferencia en los números, *una sola* diez millonésima debe corresponder á $\frac{1}{147}$ de *unidad*, y 109 *diez millonésimas* deben corresponder á $\frac{109}{147}$ de *unidad*.

Esta fraccion $\frac{109}{147}$, valuada en decimales hasta *centésimas solamente*, dá la fraccion 0,74, que, añadida al número 29569 *correspondiente* á la *parte decimal* 4708366, forma el número 29569,74.

Pero como la *característica* del logaritmo propuesto es 1, se deduce que el número buscado no debe tener mas que *dos* cifras en su parte entera.

Luego, finalmente

29,56974

es el número correspondiente al logaritmo dado.

Advertencia del traductor.—La parte decimal de los logaritmos tiene en nuestro idioma el nombre especial de MANTISA, que usaremos en adelante.

REGLA GENERAL.—Para obtener el número *correspondiente* á un logaritmo dado,

Búsquese entre los logaritmos de los números de *cinco* cifras, la parte decimal ó *mantisa* que mas se aproxime á la del logaritmo dado, y *réstense* una de otra las dos mantisas, lo cual dará una diferencia espresada por *dos* ó *tres* cifras. *Divídase esta diferencia por la diferencia tabular*, y *valúese el cociente en decimales* prolongando solo la operacion hasta *centésimas* (*véase* la observacion del n.° 326).

Escríbanse las dos cifras obtenidas, á la derecha del número de *cinco* cifras, que corresponde á la *mantisa* hallada en la Tabla; y despues en el número así formado, *colóquese* la vírgula de manera que la parte de la izquierda tenga *tantas cifras*, mas *una*, como unidades tiene la *coracteristica* del logaritmo propuesto.

Nos reducimos por ahora á este solo ejemplo, porque las *aplicaciones logarítmicas* nos proporcionarán ocasiones de presentar otros.

326. OBSERVACION.—El principio de *proporcionalidad entre las diferencias de dos logaritmos y las diferencias de los números correspondientes*, que ha servido de base á la resolucion de las dos cuestiones precedentes, jamás es rigurosamente exacto; pero en Algebra se demuestra que su uso dá un resultado *suficientemente aproximado*, mientras que no se opera con números *mayores* que 10000.

Por eso en la resolucion de estas dos cuestiones, debe hacerse siempre que el número, cuyo logaritmo *se busca*, ó al cual debe pertenecer el logaritmo *dado*, sea *inferior* á 10000.

En la PRIMERA cuestion, el *error* que se comete no afecta á las *siete primeras* cifras decimales del logaritmo buscado.

En la *segunda* cuestion, la fraccion decimal, procedente de la division de las dos diferencias de logaritmos, puede llevarse hasta las *centésimas* sin inconveniente alguno; pero nunca *mas allá*.

Se ve pues por esto que el uso de las Tablas de logaritmos en los cálculos numéricos no dá mas que valores *aproximados* para las cantidades buscadas; pero estas aproximaciones, á veces muy limitadas, son por lo general *suficientes*.

Aplicaciones de las Tablas de logaritmos.

327. PRIMERA CUESTION.—Hallar el resultado del cálculo indicado por la espresion

$$x=\frac{37\times 49\times 17\times 175}{29\times 69\times 154},$$

que puede considerarse como procedente de la resolucion de un problema cuyo enunciado contiene *razones*, *directas* unas, é *inversas* otras.

En virtud de las propiedades demostradas en los n.os 313 y 314, tendremos

$$\log. x = \text{l}.37 + \text{l}.49 + \text{l}.17 + \text{l}.175 - \text{l}.29 - \text{l}.69 - \text{l}.154.$$

Ahora bien

log. 37 = 1,5682017	log. 29 = 1,4623980
log. 49 = 1,6901961	log. 69 = 1,8388491
log. 17 = 1,2304489	log. 154 = 2,1875207
log. 175 = 2,2430380	5,4887678
6,7318847	
− 5,4887678	
Luego log. x = 1,2431169	

Ahora es menester buscar á qué número corresponde el logaritmo hallado cuya *mantisa* es 2431169

Las Tablas dán log. 17503 = 2431125

Diferencia 44

Dividiendo esta diferencia por la *diferencia tabular* 248, se halla 0,18.

Luego

x=17,50318 *con menos de* 0,00001 *de error*.

Las Tablas no pueden dar mayor aproximacion, porque (n.° 326) es preciso pararse en las *centésimas* al valuar en decimales el cociente de la division de las dos *diferencias*.

De los complementos aritméticos y de su uso en los cálculos.

328. En el ejemplo precedente, nos hemos visto en el caso de restar de la suma de varios logaritmos la suma de otros varios. Pero pueden reemplazarse las *dos adiciones* y la *sustraccion*, que exige la obtencion del resultado, por *una sola adicion* empleando los COMPLEMENTOS.

Se llama COMPLEMENTO ARITMÉTICO de un logaritmo, lo que debe añadirse al mismo para formar 10 unidades; ó en otros términos, es lo que *resta cuando de* 10 *unidades se sustrae dicho logaritmo*.

Así,

$$\textit{compl. arit.}\ \text{de}\ \ 2,4271614 = 7,5728386.$$

Basta para esto, segun la regla n.° 12 de la sustraccion, restar la última cifra de la derecha de 10, y las demás, de 9.

De modo que el complemento, por decirlo así, casi se obtiene á la simple inspeccion del logaritmo.

Sean los logaritmos

$$3,0784159;\quad 0,4752649.$$

Sus respectivos *complementos* serán,

$$6,9215841;\quad 9,5247351.$$

Advertencia.—Si el logaritmo dado termina en uno ó varios *ceros*, es necesario, conservando los mismos ceros á la derecha del complemento, restar de 10 *la primer cifra significativa* de la derecha, y las demás, de 9.

Por ejemplo,

$$\textit{compl. arit.}\ \text{de}\ \ 1,7080360 = 8,2919640,$$
$$\textit{compl. arit.}\ \text{de}\ \ 5,6309800 = 4,3690200.$$

Esto supuesto, sea restar de la suma de los *cuatro* logaritmos L, L′, L″, L‴, la suma de los otros *tres* l, l', l''; y designemos por D la diferencia entre ambas sumas. Tendremos evidentemente

$$D = L + L' + L'' + L''' + \overline{10-l} + \overline{10-l'} + \overline{10-l''} - 30;$$

ó lo que es igual,

$$D=L+L'+L''+L'''+\text{compl. } l+\text{compl. } l'+\text{compl. } l''-30;$$

de donde se deduce la REGLA GENERAL siguiente:

Tómense los complementos aritméticos de los *logaritmos sustractivos; hágase la* SUMA TOTAL de estos complementos y de los logaritmos *aditivos;* y luego, de la *característica* del resultado, *réstese tantas veces* 10, *ó tantas decenas como complementos se hayan tomado.*

Así se obtiene la diferencia pedida.

Volviendo, para hacerlo ver prácticamente, al ejemplo anterior, tendremos

	l.	37 =	1,5682017
	l.	49 =	1,6901961
	l.	17 =	1,2304489
	l.	175 =	2,2430380
compl.	l.	29 =	8,5376020
compl.	l.	69 =	8,1611509
compl.	l.	154 =	7,8124793
			31,2431169

ó, restando 30, 1,2431169 como arriba.

329. SEGUNDA CUESTION.—Se pide *interpolar*, por ejemplo, 25 *medios proporcionales* entre los dos números 3 y 4.

Hemos hallado (n.° 307) que la espresion general de la *razon* de la progresion,

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

En el caso particular que nos ocupa, tenemos

$$a=3,\ b=4,\ m=25,\quad \text{de donde}\quad q=\sqrt[26]{\frac{4}{3}}.$$

Si se esplican los logaritmos, resulta

$$\log.\, q = \frac{\log.\, 4 - \log.\, 3}{26}.$$

Las Tablas dán $\log.\, 4 = 0{,}60205999$
$\log.\, 3 = 0{,}47712125$

Diferencia $= 0{,}12493874$

la cual, dividida por 26, conduce al resultado

$$0{,}00480533;$$

y ahora es preciso hallar á qué número corresponde la *parte decimal* de este logaritmo. En las Tablas veremos que

$$\log.\, 101113 = 0{,}00480270.$$

La diferencia entre este y aquel son 263; y como la diferencia tabular son 430, dividirémos, segun la regla del número 325, 263 por 430, lo cual dá en decimales 0,6.

La razon q es por consiguiente 1,011136, aproximada hasta *millonésimas*.

En rigor habriamos podido dispensarnos de calcular la fraccion 0,6, y habriamos obtenido

$$q = 1{,}01113 \textit{ con menos de } 0{,}00001 \textit{ de error.}$$

Si ahora quisiéramos formar el *décimo medio proporcional*, ó sea el *undécimo* término de la progresion, llamariamos x á ese *medio proporcional*, y tendriamos (n.° 304)

$$x = 3 \times \left(\sqrt[26]{\frac{4}{3}}\right)^{10};$$

de donde empleando los logaritmos,

$$\log.\, x = \log.\, 3 + \frac{10\,(\log.\, 4 - \log.\, 3)}{26};$$

hemos hallado ya $\dfrac{\log. 4 - \log. 3}{26} = 0{,}00480533$

lo cual dá $\dfrac{10\,(\log. 4 - \log. 3)}{26} = 0{,}0480533$

añadiendo á este el log. 3. 0,4771212

tendremos. 0,5251745

cuyo número correspondiente se debe determinar.

Buscando en las Tablas, se ve que 33510 tiene por mantisa. 5251744

Diferencia. . 1

que puede despreciarse; obteniéndose por lo tanto

$$x = 3{,}3510$$

que será el *término medio proporcional* buscado.

330. Tercera cuestion. — *Se pide el duodécimo término* y la *suma* de los *doce primeros términos* de la progresion por cociente $\div\!\div\, 2 : \frac{7}{3} : \frac{49}{18} : \frac{343}{108} : \ldots$

Llamemos x al *duodécimo* término de esta progresion, cuya razon q es $\frac{7}{6}$.

1.° Tendremos (n.° 304)

$$x = 2 \times \left(\frac{7}{6}\right)^{11};$$

por consiguiente

$$\log. x = \log. 2 + 11\,(\log. 7 - \log. 6).$$

Las Tablas dán log. 7 = 0,84509804
log. 6 = 0,77815125

Diferencias 0,06694679

de donde 11 (log. 7—log. 6) = 0,73641469

añadiendo log. 2 0,30129999

tendremos log. x = 1,03771468

log. 10907 = 0377053

094

La diferencia tabular es 398; de donde $\frac{94}{398}=0,24$.

Luego $x=10,90724$.

2.° La fórmula $S=\frac{l\times q-a}{q-1}$ del n.° 306, se convierte aquí en

$$S=\frac{x\times\frac{7}{6}-2}{\frac{7}{6}-1}=\frac{x\times 7-12}{1}=x\times 7-12.$$

Ahora bien, el producto de x, ó sea, de 10,90724 por 7, es 76,35068; de donde, restando 12, se deduce 64,35068.

Así pues, la suma pedida es

64,351 aproximada hasta *milésimas*.

Advertencia.—Se ve que la primera parte de la cuestion es la principal que hay que resolver, por conducir á la *formacion de una potencia* de un grado mas ó menos considerable, segun es el número de los términos que quieren tomarse en la progresion, operacion que el uso de los logaritmos permite remplazar por una *multiplicacion.*

En cuanto á la *suma de los términos*, su determinacion es fácil, sin el auxilio de los logaritmos, por medio de la espresion

$$\frac{l\times q-a}{q-1}.$$

Aplicaciones de los logaritmos al cálculo de las fracciones propiamente dichas.

331. Segun hemos manifestado en el n.° 310, no podria darse la idea clara del logaritmo de un número *menor que la unidad*, sin introducir en la Aritmética nociones que le son extrañas. Pero á pesar de esta observacion, vamos ahora á hacer ver que las *fracciones propiamente dichas* pueden someterse al cálculo logarítmico tan bien como los *números enteros* y los *fraccionarios mayores* que 1, por medio de algu-

nas transformaciones ejecutadas en las espresiones donde se hallan las fracciones.

Primera cuestion.—*Se quiere efectuar por logaritmos el cálculo indicado en la espresion*

$$x=\frac{23}{49}\times\frac{19}{63}\times\frac{5}{7}.$$

Observemos que si multiplicamos por 10 cada uno de los factores del segundo miembro, lo cual dá

$$\frac{230}{49}\times\frac{190}{63}\times\frac{50}{7},$$

habremos multiplicado el producto total por 1000, y resultará la nueva igualdad

$$x\times 1000=\frac{230}{49}\times\frac{190}{63}\times\frac{50}{7},$$

en cuya igualdad, cuando se hayan efectuado los cálculos indicados en el segundo miembro, deberá dividirse el resultado por 1000, para obtener el valor numérico de x; lo cual podrá hacerse simplemente variando de posicion la vírgula.

Ahora bien, tenemos

$$\mathrm{l.}\frac{230}{49}\times\frac{190}{63}\times\frac{50}{7}=\mathrm{l.}\,230+\mathrm{l.}\,190+\mathrm{l.}\,50-\mathrm{l.}\,49-\mathrm{l.}\,63-\mathrm{l.}\,7;$$

y esta espresion, calculada bien sea *directamente* bien por medio de los *complementos aritméticos* (n.° 328), dá por resultado: 101,115, con menos de 0,001 de error.

Dividiendo por 1000, se obtiene

$x=0{,}101115$ son menos de 0,000001 de error.

332. Segunda cuestion. — *Sea valuar por logaritmos la espresion*

$$x=\left(\frac{23}{59}\right)^{12}.$$

Podemos evidentemente darle la siguiente forma:

$$x \times 10^{12} = \left(\frac{230}{59}\right)^{12}.$$

Se calculará el segundo miembro, segun las reglas conocidas, y para sacar el valor de x, bastará dividir por la *unidad seguida* de 12 *ceros*, el resultado obtenido.

Tenemos primero

$$\log. \left(\frac{230}{59}\right)^{12} = 12\,(\log. 230 - \log. 59).$$

Las Tablas dán

$$\begin{array}{lr} \log.\ 230 = & 2{,}36172784 \\ \log.\ \ 59 = & 2{,}77085201 \\ \hline \text{Diferencia} & 0{,}59087583 \end{array}$$

de donde multiplicando por 12

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 7{,}09050996 \end{array}$$

Buscando en las Tablas la mantisa mas aproximada á 09050996, se halla 0905049, que corresponde al número 12317.

Pero como el logaritmo 7,0905099 tiene 7 por característica, el número correspondiente debe tener *ocho* cifras, y por consiguiente es igual á 12317000.

Separando ahora 12 cifras decimales hácia la derecha, se obtiene

$$0{,}000012317000 \quad \text{ó} \quad 0{,}000012317,$$

que será el resultado pedido.

Advertencia. — Hemos omitido el cálculo proporcional que permiten las Tablas, porque la aproximacion que se acaba de obtener es mas que suficiente.

333. Tercera cuestion. — *Valuar por logaritmos la espresion*

$$x = \sqrt[7]{\frac{19}{43}}.$$

Principio preliminar. — Antes de ejecutar la transformacion que debe conducir al resultado, es necesario establecer el principio siguiente:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}},$$

siendo A y B mayores que 1, y siendo $A > B$.

A esto se llega por medio de un razonamiento análogo al del n.° 317.

En efecto, tenemos, en virtud de las propiedades de los n.os 316 y 314,

$$\text{l.}\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{1}{n}\times\text{l.}\frac{A}{B}=\frac{\text{l.}A-\text{l.}B}{n},$$

$$\text{y l.}\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\text{l.}\sqrt[n]{A}-\text{l.}\sqrt[n]{B}=\frac{1}{n}\times\text{l.}A-\frac{1}{n}\times\text{l.}B=\frac{\text{l.}A-\text{l.}B}{n};$$

de donde se sigue que las dos espresiones $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$ y $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ tienen el mismo logaritmo (en el *mismo* sistema); luego son iguales.

Así pues

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}},\ \text{ó (n.° 44)}\ \sqrt[n]{A:B}=\sqrt[n]{A}:\sqrt[n]{B}.$$

Esto supuesto, observemos ahora que la espresion $\sqrt[n]{\frac{19}{43}}$ puede recibir las formas siguientes:

$$\sqrt[7]{\frac{19}{43}\times10^7:10^7}=\sqrt[7]{\frac{190000000}{43}:\sqrt[7]{10^7}}=\sqrt[7]{\frac{190000000}{43}}:10.$$

Donde se ve que despues de haber calculado por logaritmos el número

$$\sqrt[7]{\frac{190000000}{43}},$$

bastará *dividir* por 10 el resultado, para obtener el número pedido.

He aquí el cálculo:

$$\text{l.}\sqrt[7]{\frac{190000000}{43}}=\frac{\text{l. }19+\text{l. }10^7-\text{l. }43}{7}=\frac{\text{l. }19+7-\text{l. }43}{7}.$$

Tenemos	log. 19 + 7 =	8,27875360
	log. 43 =	1,63346846
	Diferencia	6,64528514
ó dividiendo esta diferencia por 7		0,94932645
La mantisa mas aproximada de las Tablas es		0,9493217
y corresponde al número 88986		
	Diferencia	47

$$\text{Diferencia tabular } 49;\ \frac{47}{49}=0,95;$$

luego $$\sqrt[7]{\frac{190000000}{43}}=8,898695;$$

dividiendo ahora por 10, se obtiene

$$0,8898695,$$

que será la *raiz pedida*.

334. Cuarta cuestion. — *Sea* ahora *valuar la espresion*

$$\sqrt[11]{\left(\frac{3}{7}\right)^6}.$$

A esta espresion pueden hacerse sufrir las transformaciones siguientes:

$$\sqrt[11]{\left(\frac{3}{7}\right)^6 \times 10^{11} : 10^{11}}, \text{ ó } \sqrt[11]{\left(\frac{3}{7}\right)^6 \times 10^6 \times 10^5 : 10^{11}},$$

$$\text{ó} \quad \sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6 \times 10^5 : 10^{11}},$$

ó bien tambien, segun el principio del n.° 333,

$$\sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6 \times 10^5} : \sqrt[11]{10^{11}}, \text{ ó finalmente } \frac{1}{10} \cdot \sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6 \times 10^5}.$$

Donde se ve que despues de haber calculado por logaritmos la espresion $\sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6 \times 10^5}$, lo cual dá

$$\log. \sqrt[11]{\left(\frac{30}{7}\right)^6 \times 10^5} = \frac{6\,(\log. 30 - \log. 7) + 5}{11},$$

bastará *dividir* por 10 el resultado obtenido, y se hallará el número buscado.

Dejamos á los lectores para ejercicio la terminacion de este cálculo.

335. Conclusion. — Las cuestiones, que acabamos de tratar, bastan para hacer comprender que, sin saber lo que es el logaritmo de una *fraccion propiamente dicha*, es posible ejecutar con esa especie de números toda clase de *cálculo logarítmico*.

El artificio consiste en *transformar* las espresiones dadas, de tal modo que siempre haya que operar con *números mayores que la unidad*.

Reglas de interés y de descuento compuestas.

En todas las cuestiones del capítulo 6.°, que se refieren al interés del dinero, hemos considerado el *interés simple*, es decir, el que debe producir un *capital* prestado, por un tiempo determinado y á cierto *tanto* fijo. Pero puede suponerse, que, dejándose los *réditos mismos* en poder del que tomó el dinero, produzcan á su vez un *interés*; de donde nacen las cuestiones de INTERÉS y de DESCUENTO COMPUESTOS, que pueden considerarse enlazadas á la teoría de las *progresiones por cociente*.

336. INTERÉS COMPUESTO. — *Colocada una suma* a *de dinero durante un número* n *de años* (ó *de meses*), *á razon de* i p. %, al *año*, ó al *mes*, *se desea saber á cuánto monta esa suma al cabo del tiempo* n, *tomando en cuenta no solo el capital* a *y sus intereses acumulados, sino tambien los intereses de los intereses.*

Análisis. — Para mayor sencillez, designarémos por r el interés que produce *un real*, interés que se obtiene dividiendo i por 100 $\left(r = \frac{i}{100}\right)$.

Puesto que 1 real produce el interés r, claro es que una suma a producirá a veces r, ó sea $a \times r$, por consiguiente el capital a, colocado durante *un* año, produce, incluyendo el mismo capital,

$$a + a \times r \quad \text{ó} \quad (\text{n.° } 47) \quad a(1+r).$$

Esta nueva suma, que comprende el capital primitivo y su interés durante el año primero, puede considerarse como un nuevo capital colocado durante el año segundo; y designándola interinamente por a', hallaremos que al cabo del segundo año, incluyendo la misma suma, se convierte en

$$a'(1+r) \quad \text{ó} \quad a(1+r)(1+r),$$

ó bien

$$a(1+r)^2.$$

Designando por a'' este nuevo capital, obtendremos, como valor de este capital y de su interés, al cabo del tercer año,

$$a''(1+r) \quad \text{ó} \quad a(1+r)^2(1+r),$$

ó bien

$$a(1+r)^3;$$

y así sucesivamente.

Luego, en general, expresando n el número de años que dura el préstamo del capital a, y representando por A el valor de este capital unido á sus intereses y á los intereses de sus intereses, se obtiene la fórmula

$$A = a(1+r)^n.$$

Primer ejemplo. — *¿Cuál es el valor á interés compuesto de una cantidad de* 12000 *reales, colocada á* 4 p °/₀, *durante* 6 *años?*

Es necesario poner

$$a = 12000, \qquad r = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}, \qquad n = 6;$$

lo cual dá

$$A = 12000\left(\frac{26}{25}\right)^6,$$

ó, aplicando los logaritmos,

$$\text{l. } A = \text{l. } 12000 + 6(\log. 26 - \log. 25).$$

	l. 26 =	1,41497335
	l. 25 =	1,39794001
	Diferencia	0,01703334
Multiplicacion por 6		0,10220004
añadiendo	log. 12000 =	4,07918125
	Suma	4,18138129
La mantisa mas aproximada es		1813576
	Diferencia	237

$$\text{Diferencia tabular } 286;\ \frac{237}{286} = 0,82.$$

La mantisa mas aproximada que hemos tomado correspondia al número 15183.

Luego

$$A = 15183^{rs.},82.$$

Advertencia. — El interés simple de los 12000 reales en 6 años, sería $\frac{1}{25} \times 12000 \times 6 = 2880$ reales; si tomamos la diferencia entre 2880 y 3183,82, obtenemos $303^{rs.},82$ que *son* los *intereses de los intereses.*

Segundo ejemplo. — *Se pide en interés compuesto el valor de* 5628 *reales, colocados durante* $9\frac{1}{2}$ *meses, á razon de* $\frac{3}{4}$ *ó* 0,75 p % *al mes.*

Habiéndose aquí tomado el *mes* por *unidad* de tiempo, y no habiéndose establecido la fórmula general mas que para el caso en que n es entero, es necesario distribuir la cuestion en dos partes: 1.ª *determinar* el valor de A al cabo de 9 meses, á *interés compuesto;* 2.ª Hallar el *interés simple* de este valor de A en *medio mes,* sumando luego el *interés* obtenido al mismo valor de A.

Tendremos pues primero

$$a = 5628, \quad r = \frac{3}{400} \quad \text{ó} \quad 0{,}0075, \quad n = 9;$$

de donde

$$A = 5628 \times (1{,}0075)^9,$$

	log. 1,0075	= 0,00324505
Multiplicacion por 9		= 0,02920545
	log. 5625	= 3,7503541
		3,7795595
La mantisa mas aproximada es		7795532
y corresponde al número 60194.	Diferenc.	63

Diferencia tabular 72; $\frac{63}{72} = 0{,}87.$

Tenemos pues

$$A = 6019^{rs.},49.$$

Determinemos ahora el interés de $6019^{rs.},49$ en *medio mes*.

El interés de 1 real en *medio mes* es la *mitad* de 0,0075, ó 0,00375; multiplicando 6019,49 por 0,00375, se obtiene el producto $22^{rs.},57$, interés que añadido al capital A, dá

$$6042^{rs.},06,$$

que es el resultado pedido.

337. Descuento compuesto.—Las dos cantidades A y a que entran en la fórmula

$$A = a\,(1+r)^n,$$

tienen entre sí una relacion tal, que si a es un capital que hoy se coloca, A es su valor al cabo de cierto tiempo.

Luego, recíprocamente, designando A una suma pagadera al cabo de un número n de unidades de tiempo, a espresa *su valor actual*, suponiendo que se tienen en cuenta los *intereses acumulados* y los *intereses de los intereses* del capital A.

Como de la fórmula anterior, se deduce

$$a = \frac{A}{(1+r)^n},$$

puede esta considerarse como la fórmula que dá el *valor actual* de una letra ó pagaré cuyo importe es A, pagadero á los n años, admitiendo que se toma en cuenta el *interés compuesto* de aquel valor actual.

Ejemplo.—*Se desea saber el valor actual de una suma de* 30000 *rs. que ha de pagarse al cabo de* 7 *años, suponiendo que el tanto de interés es* 6 p. °/₀ *al año, y que se toma en cuenta el interés compuesto.*

La fórmula se convierte en

$$a = \frac{30000}{(1,06)^7}, \quad \text{de donde} \quad \log. a = \log. 30000 - 7 \times \log. 1,06,$$

$$\log. 30000 = 4,47712125$$

$$\begin{array}{rl} \log. 1,06 = & 0,02530587 \\ & 7 \\ \hline 7 \times \log. 1,06 = & 0,17714109 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,1771410 \\ \hline 4,3000802 \end{array}$$

Diferencia 4,3000802

La parte decimal mas aproximada es 3000735

y corresponde al núm. 19956. Difer. 67

Diferencia tabular 218; $\frac{67}{218}=0,31$.

Luego 19956,31 es el *valor actual* de los 30000 rs.

Buscando el *valor actual* de los 30000 rs. por la segunda regla de descuento (n.° 268), se hallaria

	21126,76
	19956,31
Diferencia entre uno y otro resultado	1270,45

338. Anualidades.—Un ejemplo solo bastará para dar una idea de este género de problemas cuya solucion se funda en la espresion de la *suma de los términos* de una progresion por *cociente*.

Un particular toma prestada una suma de 60000 *rs., que se compromete á pagar en* 12 *pagos iguales de año en año. Se desea saber el* IMPORTE *de cada pago, teniendo en cuenta los intereses, y suponiendo que el tanto por ciento es* $4\frac{1}{2}$ *al año.*

Análisis.—Claro es que si, *por una parte*, se *calcula* el valor en *interés compuesto* de los 60000 rs. al cabo de 12 años; y si por *otra parte*, se *calculan* sucesivamente los valores, en interés compuesto, de las sumas pagadas al terminar cada año hasta el fin del duodécimo; y despues se iguala el *primer* valor á la *suma* de todos los otros, se obtendrá seguramente la relacion que debe existir entre la suma prestada y el importe de cada pago.

Para simplificar pondremos $a=60000$, y designaremos por x la suma que debe pagarse anualmente, y por r el interés de 1 real al año.

Esto supuesto, tendremos por lo pronto (n.° 336) que el valor de la cantidad a, al cabo de 12 años, será

$$(1) \qquad a(1+r)^{12};$$

por otro lado, el importe x del pago *primero*, es decir, el que se hace al fin del *primer* año, producirá en manos de la persona que le recibe, al cabo de los 11 años restantes, una cantidad espresada por

$$x(1+r)^{11}.$$

Análogamente, la misma cantidad x, pagada al fin del *segundo* año, producirá, hasta acabar los 10 restantes

$$x(1+r)^{10},$$

y así sucesivamente hasta concluir el *undécimo* año, cuyo pago producirá

$$x(1+r),$$

llegando con esto al fin del *duodécimo* y *último* año, cuyo pago x que será el último, nada puede ya producir.

Escribamos ahora en una misma línea las diversas cantidades obtenidas, pero invirtiendo el órden de los términos, tendremos

$$x,\quad x(1+r),\quad x(1+r)^2\ldots,\quad x(1+r)^{10},\quad x(1+r)^{11}.$$

Esta série no es mas que una *progresion por cociente*, cuyo primer término es x, la razon $(1+r)$ y el último término $x(1+r)^{11}$.

Aplicándole pues la fórmula $S=\dfrac{l\times q-a}{q-1}$ del n.º306, tendremos

$$S=\frac{x(1+r)^{12}-x}{r},\quad ó\quad S=\frac{x[(1+r)^{12}-1]}{r};$$

y este valor de S es el que debe igualarse á la espresion (1) obtenida al principio.

Tendremos pues la igualdad

$$\frac{x[(1+r)^{12}-1]}{r}=a(1+r)^{12};$$

de donde se deduce, *multiplicando* los dos miembros por r y dividiendo en seguida por $(1+r)^{12}-1$ multiplicador de x,

(2) $$x=\frac{a\times r\times(1+r)^{12}}{(1+r)^{12}-1}.$$

(Si en esta igualdad reemplazamos 12 por n, tendremos

$$x=\frac{a\times r\times(1+r)^n}{(1+r)^n-1},$$

que será la *fórmula general* del problema de las *anualidades.*)

Pero para llegar á la resolucion de la cuestion particular que nos hemos propuesto, es necesario ahora poner 60000 en vez de a en la igualdad (2), y $4^1/_2$: 100 ó sea 0,045 en lugar de r; lo cual dá

$$x=\frac{60000\times 0{,}045\times(1{,}045)^{12}}{(1{,}045)^{12}-1}$$

ó, suprimiendo en el numerador, *tres* de los *ceros* del 60000 y la *vírgula* del 0,045, lo cual equivale á *dividir* y *multiplicar* dicho numerador por 1000,

$$x=\frac{60\times 45\times(1{,}045)^{12}}{(1{,}045)^{12}-1},$$

espresion que difiere particularmente de la anterior en que sus dos términos solo contienen números *mayores* que la unidad, pudiéndosele por lo tanto aplicar sin dificultad los logaritmos.

Hé aquí el cuadro de los cálculos, que podrá servir de modelo para todas las operaciones de esta especie:

$$\mathrm{l.}\ x=\mathrm{l.}\ 60+\mathrm{l.}\ 45+12\times\mathrm{l.}\ 1{,}045-\mathrm{l.}\ [(1{,}045)^{12}-1].$$

Debe comenzarse por ejecutar el cálculo de la espresion encerrada en el paréntesis cuadrado.

	l. 1,045 =	0,01911629
		12
	12×l. 1,045 =	0,22939548
Parte decimal de la Tabla		3746
Número correspondiente, 16958	Diferencia	209

Diferencia tabular 256; $\frac{209}{256}=0{,}8$, aproximacion sufi-

ntecie; de donde $(1,045)^{12}=1,69588$
y

$$(1,045)^{12}-1=0,69588.$$

Como este número es *menor* que la unidad, se multiplica por 10, á fin de poder aplicarle el cálculo logarítmico; lo cual dá 6,9588.

Hallaremos pues	l. 6,9588	= 0,8425344
Por otra parte tenemos	l. 60	= 1,7781513
	l. 45	= 1,6532125
	12×l. 1,045	= 0,2293955
	Suma	3,6607593
de la cual es necesario restar l. 6,9588, ó		0,8425344
obteniéndose la diferencia		2,8182249

Pero como acabamos de restar el *logaritmo* de un número *diez* veces *mayor* de lo que debia ser, la *característica* del resultado tendrá *una unidad menos* de las que debia tener.

De modo que el verdadero resultado debe ser 3,8182249
y ya no falta mas que hallar el *número correspondiente* á este logaritmo.

Mantisa de la Tabla	2193
Número correspondiente, 65709. Diferencia	56

Diferencia tabular 66; $\frac{56}{66}=0,8.$

Luego el *número buscado* es $6579^{rs.},98^{c.}$.

El tomador del dinero debe pues pagar una cantidad de unos 6580 rs. en cada año, para estinguir completamente su deuda al cabo de 12 años.

339. El problema siguiente se refiere tambien á las *anualidades*.

Una persona economiza cada año 2500 *rs. que coloca á* INTERÉS COMPUESTO de 5 p. $^0/_0$ al año. Se desea saber qué capital habrá reunido al cabo de 12 años.

Tratando en general la cuestion, designemos por a la cantidad colocada anualmente, por r el interés de 1 real al año, y por n el número de años, al cabo de los cuales ha de verificarse el reembolso de todos los capitales colocados con sus intereses y los intereses de los intereses.

Si suponemos que al principiar el primer año se hizo la colocacion de una primer cantidad a, esta cantidad se convertirá en

$$a(1+r)^n.$$

La cantidad a, entregada al principiar el segundo año, se convertirá á su vez en

$$a(1+r)^{n-1};$$

y así sucesivamente hasta llegar al último año, en el cual la cantidad a, colocada en su principio, se convertirá en

$$a(1+r).$$

Si ahora concebimos escritas en una misma línea todas estas cantidades, empezando por la *última*, resulta

$$a(1+r),\quad a(1+r)^2,\quad a(1+r)^3 \ldots,\quad a(1+r)^n,$$

progresion por cociente, cuyo primer término es $a(1+r)$, la razon $(1+r)$, y el último término $a(1+r)^n$; la suma será por consiguiente (n.° 306)

$$S=\frac{a(1+r)^n(1+r)-a(1+r)}{r},$$

ó poniendo en evidencia el factor comun $a(1+r)$,

$$S=\frac{a(1+r)\times[(1+r)^n-1]}{r}.$$

Ahora ya, para resolver la cuestion propuesta, no se necesita mas que reemplazar en esta espresion a, r, y n por 2500, 0,05 y 12, hecho lo cual hallaremos

$$S=\frac{2500\times1{,}05\times[(1{,}05)^{12}-1]}{0{,}05};$$

ó, dividiendo 2500 y 0,05 por 5, y suprimiendo despues la vírgula en 1,05 y 0,01,

$$S=500\times105\,[(1,05)^{12}-1].$$

Hé aquí el detalle del cálculo;

$$\begin{array}{rr}
\text{log. } 1,05= & 0,02118930 \\
 & 12 \\ \hline
12 \text{ log. } 1,05= & 0,2542716 \\
\text{Mantisa de la Tabla} & 2580 \\
\text{Número correspondiente, } 17958. & \\ \hline
\text{Diferencia} & 136
\end{array}$$

$$\text{Diferencia tabular } 242\,;\ \frac{136}{242}=0,56;$$

$$\begin{array}{lr}
\text{de donde} \quad (1,05)^{12}= & 1,795856 \\
(1,05)^{12}-1= & 0,795856 \\
\textit{Multiplic.} \text{ por } 10 \text{ (n.° 335)} & 7,95856 \\ \hline
\text{log. } 7,95856= & 0,9008345 \\
\text{log. } 105= & 2,0211893 \\
\text{log. } 500= & 2,6989700 \\ \hline
 & 5,6209938
\end{array}$$

ó, rebajando á la *característica* la *unidad* procedente de la *multiplicacion* por 10, 4,6209938
Mantisa de la Tabla 892
Número correspondiente, 41782.
Diferencia 46

$$\text{Diferencia tabular } 104\,;\ \frac{46}{104}=0,44;$$

luego $S=41782,44.$

Así pues la cantidad 41782rs.,44c. espresa el valor de los 2500 rs. colocados anualmente á interés compuesto por espacio de 12 años consecutivos.

Al fin de este capítulo se encontrarán otros ejercicios sobre *anualidades*.

Enlace de las operaciones aritméticas.

340. Euler, en sus *Elementos de Algebra*, ha establecido, entre las varias operaciones de la Aritmética, una comparacion que vamos á esponer, porque dá lugar á un modo especial de considerar los logaritmos.

Designemos por a, b, c, tres números cualesquiera y propongámonos esta cuestion general:

Dadas dos cualesquiera de esas tres cantidades determinar la tercera por medio de una de las operaciones aritméticas, ejecutada con las dos cantidades dadas.

Sea primero hallar á c, por medio de la adicion de a y b.

Tendremos $\qquad a+b=c,$

de donde $\qquad a=c-b \quad$ ó $\quad b=c-a.$

Lo cual demuestra que, si en vez de buscar á c, se pidiera el valor de a ó de b, la misma igualdad daria la cantidad *desconocida*, por medio de una *sustraccion*.

Segun esto, la *adicion* y la *sustraccion* están ligadas entre sí por la misma igualdad

(1) $\qquad a+b=c.$

Si, en la igualdad $a=c-b$, suponemos $c<b$, la sustraccion es *imposible*, y nos conduce á una espresion que en Algebra se llama cantidad *negativa;* de modo que las cantidades negativas traen su orígen de una *sustraccion* que no puede ejecutarse.

Como la adicion de varios números *iguales* conduce á la *multiplicacion*, se pide hallar á c por medio de la multiplicacion de los números a y b.

Tenemos $\qquad a\times b=c, \quad$ ó $\quad ab=c;$

de donde se deduce

$$a=\frac{c}{b}, \quad \text{ó bien} \quad b=\frac{c}{a}.$$

Luego, si en lugar de buscar á c, se quiere obtener bien sea el valor de a, bien el valor de b, la *division* dará el valor del número *desconocido*.

Segun esto pues, la MULTIPLICACION y la DIVISION se hallan *ligadas entre sí* por la misma igualdad

$$(2) \qquad ab = c.$$

En la hipótesis de no ser c divisible por b ó por a, la espresion $\frac{c}{b}$, ó la $\frac{c}{a}$, es un número *fraccionario, mayor* ó *menor* que la unidad, segun que c es *mayor* ó *menor* que b ó que a; luego las *fracciones* traen su orígen de divisiones que no pueden hacerse *exactamente*.

Por último, como la *multiplicacion* de varios números *iguales* conduce á la *formacion de las potencias*, supongamos que se quiere obtener á c, elevando la cantidad a á una potencia del grado b.

Tenemos $$a^b = c;$$

de donde $$a = \sqrt[b]{c};$$

lo cual prueba que si, para obtener el valor de c, conociendo á a y b, debe efectuarse *una formacion de potencia*, para obtener el valor de a, conociendo á b y c, es necesario efectuar *una estraccion de raiz*.

Luego la FORMACION DE POTENCIAS y la ESTRACCION DE RAICES están *ligadas entre sí* por la misma igualdad

$$(3) \qquad a^b = c.$$

Cuando c no es *potencia exacta* del grado marcado por b, la espresion $\sqrt[b]{c}$ es un número *inconmensurable;* luego los números *inconmensurables* ó *irracionales* traen su orígen de *estracciones de raices* que no pueden efectuarse *exactamente*.

Manera particular de considerar los logaritmos.

341. Resta todavía, para resolver completamente la cuestion general que nos hemos propuesto, determinar el valor de b en la igualdad (3), conociendo los de a y c.

No dá esa igualdad, como sucedia en las (1) y (2) la manera de obtener el valor de b por medio de *una misma* operacion ejecutada en las dos cantidades conocidas.

Para hallar ese valor de b, se necesita recurrir á una operacion particular, que en cierto modo constituye una *séptima* operacion de la Aritmética; y los *logaritmos* son los que suministran el modo de ejecutarla.

Al efecto, se aplica á la igualdad $a^b = c$ la propiedad del n.° 315; lo cual dá

$$b \times \log.\, a = \log.\, c\,;$$

de donde

$$b = \frac{\log.\, c}{\log.\, a}.$$

La igualdad $a^b = c$, ó mas bien, $a^x = c$ (siendo b la desconocida) se llama una ecuacion *esponencial*.

Hagamos algunas aplicaciones.

342. Supongamos en la igualdad $a^x = c$,

$$a = 3, \quad c = 81,$$

resulta

$$3^x = 81, \quad \text{de donde} \quad x \log.\, 3 = \log.\, 81\,,$$

y

$$x = \frac{\log.\, 81}{\log.\, 3}.$$

Pero

$$\log.\, 81 = 1{,}90848502$$
$$\log.\, 3 = 0{,}47712125\,;$$

luego

$$x = \frac{1{,}90848502}{0{,}47712125} = 4 + \frac{2}{47712125}.$$

Despreciando la fraccion que es muy pequeña y que proviene de que los logaritmos no son números *exactos*, se halla

$$x = 4\,;$$

y en efecto 3^4 es igual á 81.

343. Sea ahora resolver la cuestion siguiente:

La poblacion de un pais aumenta cada año en $\frac{1}{50}$ de lo que era al principio del mismo año; se desea saber *al cabo de cuántos años se habrá duplicado la poblacion.*

Designemos por a el estado de la poblacion al comenzar el primer año, y por a', a'',..., lo que llega á ser al principio de cada uno de los años sucesivos.

Haciendo un razonamiento análogo al que nos sirvió para la resolucion de las cuestiones de *interés compuesto* (n.° 336), se dirá:

Puesto que al fin del *primer* año la poblacion resulta aumentada en $\frac{1}{50}$, se habrá convertido en

$$a+\frac{1}{50}.a \quad \text{ó} \quad a.\left(1+\frac{1}{50}\right) \quad \text{ó} \quad a\left(\frac{51}{50}\right), \quad \text{ó} \quad a',$$

segun las notaciones convenidas.

Del mismo modo, puesto que al terminar el segundo año ha de haber aumentado en $\frac{1}{50}$ de lo que era al principiar el mismo, se habrá convertido en

$$a'\left(\frac{51}{50}\right), \quad \text{ó bien} \quad a\left(\frac{51}{50}\right)\times\left(\frac{51}{50}\right), \quad \text{ó} \quad a\left(\frac{51}{50}\right)^2;$$

Luego al cabo de x años, la poblacion estará espresada por

$$a\left(\frac{51}{50}\right)^x;$$

y como por hipótesis en esta época, *desconocida todavía*, la poblacion debe haberse hecho *doble* de lo que era al comenzar, se tendrá la igualdad

$$a\left(\frac{51}{50}\right)^x=2a;$$

de donde suprimiendo el factor a, comun á ambos miembros, resulta

$$\left(\frac{51}{50}\right)^x=2.$$

Si tomamos los logaritmos de los dos miembros, tendremos

$$x\,(\log.51-\log.50)=\log.2;$$

y por consiguiente

$$x=\frac{\log.2}{\log.51-\log.50}.$$

Buscando en las tablas los logaritmos de 2, de 50, y de 51, y haciendo todos los cálculos, se halla

$$x=35+\frac{3}{860018}.$$

De modo que al cabo de 35 años, poco mas ó menos, será cuando se habrá *duplicado* la poblacion.

Los logaritmos dán pues, segun se ve, medios de efectuar un *género particular de operaciones*, INDISPENSABLE *para la resolucion de ciertas cuestiones.*

Advertencia.—Se observará que en la cuestion precedente el valor de x es absolutamente *independiente* del estado primitivo de la poblacion, puesto que a ha desaparecido del cálculo.

Ejercicios.

I. Cuando, en una série de números $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$, cada uno es igual á la *semi-suma* de los dos que le comprenden, estos números forman una progresion *por diferencia*, y si cada uno es igual á la *raiz cuadrada del producto* de los dos que le comprenden, dichos números forman una *progresion por cociente.*

II. La produccion del hierro en Francia fué, en 1825, de 1156850 *quintales métricos* (100 kilógramos cada uno); en 1847, se elevaba á 3601901 *quintales métricos*. Se desea saber cuánto habria producido en 1835, suponiendo *igual* el aumento en cada uno de los años transcurridos.

III. Un monton de arena está colocado á 40 metros de una calle de árboles, que para ser enarenada necesita 100 cargas puestas de 6 en 6 metros. Se desea saber cuánto andará en metros el conductor de las cargas, suponiendo que la *primer descarga* se hace á 40 metros del monton y que el hombre al terminar ha de volver al monton mismo.

IV. Formar la suma de los 20 primeros términos de cada una de las progresiones por cociente

$$\div 1:3:9:27:\ldots;\quad 1:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}:\frac{1}{27}:\ldots,$$

operando primero *directamente* y despues por *logaritmos*.

V. Un particular deposita en casa de un banquero 60000 francos á *interés compuesto*, á razon de 4,75 p. °/₀ al año y se muere 5 años y 8 meses despues. Se pregunta la cantidad que el banquero deberá pagar á los *herederos*, advirtiendo que en los 8 primeros meses solo se tuvo en cuenta el *interés simple*, segun en Francia es costumbre.

VI. Una compañía de seguros recibe de una persona 45000 rs., con la obligacion de constituir á esta con *pérdida del capital*, una *renta vitalicia*, calculada al 9 p. °/₀ al año en *interés* compuesto y para 12 años de *existencia* calculada segun las tablas de mortalidad. Se pide cuánta habrá de ser la renta anual.

VII. Una persona ha heredado 400000 rs., que coloca en casa de un banquero, á *interés compuesto* de 5 p. °/₀ al año, y además economiza cada año en su propia renta 2000 rs. que entrega al banquero con las mismas condiciones. ¿Cuánto deberá devolverle el banquero al cabo de 10 años?

VIII. Se pregunta qué cantidad deberá entregarse en un dia dado, para ir retirando al fin de cada año, durante 12 años, una cantidad de 1500 rs., de modo que al terminar, se hayan cobrado el capital y los intereses, siendo $5\frac{1}{2}$ por ciento el tanto de interés anual.

CAPITULO VIII.

(COMPLEMENTARIO DE LOS PRECEDENTES.)

§ I. *Propiedad del número* 11.—§ II. *De los números primos.* — § III. *De las fracciones decimales periódicas.*— § IV. *Métodos abreviados para la division y para la estraccion de la raiz cuadrada.*—§ V. *Operaciones con los números aproximativos.*

Hasta aquí hemos procurado simplificar cuanto ha sido posible la esposicion de las teorías que han sido objeto de los capítulos precedentes, á fin de evitar toda esplicacion que nos parecia salir de los *Elementos* de la Aritmética.

Por eso hemos destinado este capítulo á completar algunas de aquellas teorías.

§ I.—Propiedad del número 11.

Residuo de la division de un número por 11.

344. El número 11 goza de una propiedad análoga á la del número 9, y que puede enunciarse así:

Si un número entero cualquiera es tal, que la *suma* de sus cifras de *lugar impar*, comenzando por la derecha, sea *mayor* que la *suma* de las cifras de lugar *par*, considerándose cada cifra solo con su valor *absoluto, el residuo de la division del número dado por* 11, *es igual al que dá la division, por* 11, *de la diferencia entre una y otra suma;* y si por el contrario, la *segunda suma* ESCEDE *á la primera, el residuo es igual al complemento á* 11 (*) *del residuo que dá la division, por* 11, *de la diferencia entre la segunda y la primera suma.*

(*) Se llama *complemento* de un número á otro número, lo que le falta al primero para formar el segundo (*véase* el n.° 328).

Cuando la *diferencia* de las dos sumas es 0 ó un *múltiplo* de 11, *el número total es divisible por* 11.

Ejemplos: 1.°—37098526.

Suma de las cifras de lugar *impar*.	27
Suma de las cifras de lugar *par*.	13
Diferencia.	14

La 11.ª parte de 14 es 1 y sobran 3; luego 3 es el resíduo de la division del número dado, por 11.

2.°—811462.

Suma de las cifras de lugar *impar*.	11
Suma de las cifras de lugar *par*.	15
Diferencia 15 — 11. .	4

luego 11—4 ó 7 (*complemento* de 4 á 11) es el resíduo de la division del número total por 11.

Para demostrar esta propiedad, comenzaremos por establecer las dos proposiciones siguientes:

1.ª *Toda potencia de* GRADO PAR ($2n$), *de* 10, *disminuida en* 1, *dá un número múltiplo de* 11.

2.ª *Toda potencia de* GRADO IMPAR ($2n+1$), *de* 10, *aumentada en* 1, *dá tambien un múltiplo de* 11.

La primera proposicion es evidente, porque se tiene

$$100-1=99,\ 10000-1=9999,\ 1000000-1=999999\ldots,$$

y todos estos números, esencialmente divisibles por 11, dán por cocientes respectivos

$$9,\quad 909,\quad 90909,\quad 9090909,\ldots.$$

En cuanto á la segunda, tenemos

$$10^{2n+1}=10^{2n}\times10=10.(10^{2n}-1)+10;$$

ó, añadiendo 1 á cada miembro,

$$10^{2n+1}+1=10.(10^{2n}-1)+11.$$

Ahora bien, el segundo miembro de esta última igualdad se compone de dos partes, *múltiplos* de 11, una en virtud de la primera proposicion y del principio del n.º 63; la otra, porque 11 se *divide* á sí mismo.

Luego el primer miembro $10^{2n+1}+1$ es tambien múltiplo de 11.

Esto supuesto, volvamos á la propiedad enunciada.

Sea N un número entero cualquiera. Designemos las cifras, que le componen, por a', a'', a''', a^{IV}, a^{V}, a^{VI},... (estas notaciones se han elegido á fin de *distinguir* las cifras de 1.º, 3.º, 5.º,... órden, de las de 2.º, 4.º, 6.º,...).

En virtud del principio fundamental de la numeracion, tenemos

$$N=a'+a''.10+a'''.10^2+a^{\text{IV}}.10^3+a^{\text{V}}.10^4+\ldots,$$

espresion que puede transformarse así:

$$\text{(A)}\ N=\begin{cases} +a''(10+1)+a'''(10^2-1)+a^{\text{IV}}(10^3+1)+a^{\text{V}}(10^4-1)+\ldots \\ +a'-a'' \qquad\quad +a''' \qquad\quad -a^{\text{IV}} \qquad\quad +a^{\text{V}} \qquad\quad -\ldots \end{cases}$$

Esta igualdad conduce á examinar *dos* casos diferentes, segun sea la *suma* de las cifras de *lugar impar mayor* ó *menor* que la de las cifras de *lugar par*.

Primer caso.—Sea $a'+a'''+a^{\text{V}}+\ldots>a''+a^{\text{IV}}+a^{\text{VI}}+\ldots$; y pongamos $a'+a'''+a^{\text{V}}+\ldots-(a''+a^{\text{IV}}+a^{\text{VI}}+\ldots)=11.q+r$, designando r el resíduo de la division por 11, de la *diferencia* espresada por el primer miembro de esa igualdad.

El valor de N se convertirá entonces en

$$\text{(B)}\ N=\begin{cases} +a''(10+1)+a'''(10^2-1)+a^{\text{IV}}(10^3+1)+\ldots \\ +11.q+r. \end{cases}$$

Pero todas las partes del segundo miembro, escepto r, son *necesariamente divisibles* por 11, en virtud de las dos proposiciones preliminares:

Luego, (n.º 64), el *resíduo de la division de* N *por* 11 es igual al resíduo r que dá la division por 11, del ESCESO *de la suma de las cifras de* LUGAR IMPAR *sobre la suma de las cifras de* LUGAR PAR; lo cual es conforme al enunciado de la primera parte de la propiedad.

Segundo caso.—Sea $a''+a^{\text{IV}}+a^{\text{VI}}+\ldots>a'+a'''+a^{\text{V}}+\ldots$, y pongamos $a''+a^{\text{IV}}+a^{\text{VI}}+\ldots-(a'+a'''+a^{\text{V}}+\ldots)=11.q'+r'$, siendo r' el resíduo de la division por 11, de la *diferencia* espresada por el primer miembro de esta igualdad.

Tendremos, cambiando los signos á *todos* los términos en los *dos* miembros (lo cual no altera la igualdad), la nueva igualdad

$$a'+a'''+a^{\mathrm{v}}+\ldots-(a''+a^{\mathrm{iv}}+a^{\mathrm{vi}}+\ldots)=-11.q'-r',$$

cuyo *segundo miembro* puede ponerse bajo la forma $-11(q'+1)+11-r'$ (por un simple artificio de cálculo que consiste en *añadir* y *quitar* el mismo número 11); de modo que el valor de N será el siguiente:

$$(C)\ N=\begin{cases} \ldots +a''(10+1)+a'''(10^2-1)+a^{\mathrm{iv}}(10^3+1)+\ldots \\ -11(q'+1)+11-r', \end{cases}$$

cuya igualdad es tal, que cada una de las partes que componen el segundo miembro es *divisible* por 11 evidentemente, escepto la cantidad $11-r'$.

Luego, en virtud del principio del n.° 64, el *resíduo de la division de* N *por* 11 es igual al *esceso de* 11 *sobre* r', ó segun el enunciado de la propiedad, al COMPLEMENTO á 11 *del resíduo de la division, por* 11, *del* ESCESO *de la suma de las cifras de* LUGAR PAR *sobre la suma de las cifras de* LUGAR IMPAR.

Resulta necesariamente de la espresion (A) del número N que, *cuando la diferencia de las dos sumas de cifras de lugar impar y de lugar par es* NULA Ó MÚLTIPLO *de* 11, *en cuyo caso* r *y* r' *son nulas en las espresiones* (B) y (C), *el número* N *es divisible por* 11.

Por consiguiente, la propiedad enunciada queda demostrada completamente.

Prueba por 11 *de la multiplicacion y de la division.*

345. Ahora se ve cómo puede utilizarse, segun indicamos en el n.° 73, el número 11 para comprobar la multiplicacion y division, puesto que (n.° 74) el resíduo de la division de un número cualquiera por *ese número particular* puede determinarse fácilmente.

Como esta prueba no difiere de la *prueba por* 9 mas que en el modo de obtener los resíduos de la division de los factores de la operacion que se ha de comprobar, se justifica absolutamente de la misma manera.

Se comprende además que la *prueba por* 11 no está sujeta á tantas causas de error (n.° 72) como la *prueba por* 9.

§ II.—DE LOS NÚMEROS PRIMOS.

Medio de simplificar los ensayos que deben hacerse para reconocer si un número es primo.

346. Hemos indicado (n.° 213) una espresion sencilla del *límite de los ensayos* que deben hacerse para la investigacion de los *divisores primos* de un número.

De ellos resulta que:

Se reconoce como primo un número, cuando no es divisible por número alguno inferior á la parte entera de su raiz cuadrada.

Lo cual puede además demostrarse *directamente* por medio de la igualdad *evidente* $N = \sqrt{N} \times \sqrt{N}$.

En efecto, de esta igualdad se deduce, que si un número *primo mayor que el primer factor* $\sqrt{N}$, y, por consiguiente, *mayor que la* PARTE ENTERA *de* $\sqrt{N}$, pudiera *dividir* á N exactamente, otro número primo *menor que el segundo* factor $\sqrt{N}$, y necesariamente *menor que la* PARTE ENTERA de $\sqrt{N}$, debería, en *compensacion*, *dividir* tambien á N, lo cual sería tambien contrario al enunciado de la proposicion.

Sea, por ejemplo, el número 5479.

Siendo 74 la PARTE ENTERA de su *raiz cuadrada*, no se deberán prolongar los *ensayos* mas que hasta 73, último de los *números primos* comprendido en la série de los naturales desde 1 hasta 74.

347. El conocimiento de este *límite* dá un medio de restringir mucho las operaciones que exige el reconocer si un número es *primo*.

Pero todavía en lo general son bastante laboriosas esas operaciones para que haya interés en abreviarlas cuanto sea posible.

Este es el objeto de un *método* (*) que vamos á esplicar,

(*) Hemos tomado la idea de este *método de ensayo* en nuestras método que consiste particularmente en hacer juzgar, sin *efectuar la division*, si un número es *divisible* por otro, y tiene la ventaja de dar al mismo tiempo el *cociente* de la division, en el caso de poderse efectuar *exactamente*.

Diremos antes de esponerlo que no puede ser útil, sino respecto de aquellos números que tomados por *divisores* no son tales que la division por ellos se opera fácilmente, bien sea por alguno de los caractéres de la divisibilidad, bien á la simple inspeccion del número tomado por *dividendo*.

Así, no puede aplicarse á los *divisores primos* 2, 3, 5, 7 y 11.

Volviendo á tomar el número 5479, habremos de considerar como *divisores* que deben ensayarse los *números primos* desde 13 hasta 73 inclusive.

Razonemos sobre el divisor 13.

Se trata de conocer, *sin efectuar la division*, si 13 es un *divisor exacto* de 5479.

Para esto observemos que de *tres* cifras, que componen el *cociente*, la primera (la de las *centenas*), 4, se obtiene á la simple inspeccion de las dos primeras cifras, 54, del *dividen-*

---

frecuentes conversaciones con el jóven GRANDEMANGE, de *Epinal*, que habiendo nacido enfermo, hasta el punto de no poder dedicarse á trabajo alguno manual, está dotado de una maravillosa facilidad de ejecutar *mentalmente* los cálculos *numéricos* mas complicados, y hasta de efectuar operaciones que suponen el conocimiento de los principios del Algebra, siéndole estos al parecer completamente estraños. Pero como dicho jóven no ha podido recibir la instruccion necesaria para darse cuenta de su manera de operar, nos ha sido necesario en cierto modo, *adivinar* los medios verdaderamente sencillos é ingeniosos á que recurre.

La teoría de los *números primos* le proporciona particularmente la ocasion de hacer uso de la notable facultad que posee, pues con una prontitud estraordinaria, reconoce si es ó no *primo* un número dado.

Invitado por nosotros á *hallar un número cuyos divisores tanto simples como compuestos formáran una* SUMA *determinada*, solo necesitó algunos momentos para dar dos soluciones de las *cuatro* que permite la cuestion.

Las *estracciones de raices* han sido tambien para él objeto de un ejercicio especial.

Al fin de este libro ponemos una *Nota* para dar á conocer cómo llega al resultado de la operacion espresada por $\sqrt{a^2+b^2}$, sin *estraer la raiz cuadrada*, y aun dispensándose de formar *uno de los cuadrados*.

do; la última (la de las *unidades*) es, evidentemente, 3, porque solo la cifra 3 es la que multiplicada por 3, cifra de las unidades del *divisor* 13, puede reproducir 9, cifra de las *unidades del dividendo.*

Falta pues hallar la cifra de las *decenas* de dicho *cociente.* Aquí la operacion, conocida bajo el nombre de *prueba por* 9, recibe una notable aplicacion.

Se observa en efecto, que el *resíduo* de la division por 9; 1.º del *dividendo* 5479, es 7; 2.º del *divisor* 13, es 4; de donde se infiere que el *resíduo* de la division, por 9, del cociente, si la division hubiera de hacerse *exactamente*, sería 4 (pues 4×4, ó 16, dividido por 9, dá 7 de *resíduo*); y como *dos* de las cifras de dicho *cociente* (que llamaremos *cociente presunto*, y que sería el *verdadero cociente* si la division fuera exacta) son 4 y 3, la *única* cifra que falta que hallar, no puede ser sino 6.

La cuestion está ahora en saber, si ese *cociente presunto* 463, corresponde á un *divisor exacto*, 13, del número propuesto 5479.

Determinando á este fin *únicamente* la cifra de las *decenas* del producto de 463 por 13, se ve que es *diferente* de 7, cifra de las decenas del número dado y que por lo tanto 13 no es *divisor* de este número.

Si las *dos* cifras de las *decenas* así comparadas hubieran sido las *mismas*, se habrian comparado igualmente las *dos* cifras de las centenas y aun, caso necesario, se acabaria la *multiplicacion*; pero la mayor parte de las veces no hay necesidad de pasar de las *decenas* (*).

(*) Fácilmente se comprende que para sacar de este método todo el partido posible en la práctica, es menester echar mano de la regla de multiplicacion conocida con el nombre de REGLA DE UN SOLO PRODUCTO.

Esta regla, cuyo uso comienza á estenderse y que se enseña particularmente en las escuelas superiores de primeras letras, consiste en no hacer los productos parciales, irlos escribiendo, y sumarlos despues, segun la regla general del n.º 21, sino en escribir desde luego el *producto total*, determinando primero la cifra de las *unidades simples*, despues la cifra de *decenas*, procedente tanto de lo que se *lleva* del producto de las *unidades simples*, como de la *multiplicacion* de las *unidades* y *decenas* del multiplicando respectivamente por las

Razonando absolutamente del mismo modo respecto de los *divisores primos*

17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53,

se hallan los *cocientes presuntos*,

317, 241, 203, 161, 139, 187, 149, 107, 173,

y se reconoce sin tener necesidad de prolongar la multiplicacion mas allá de las *decenas*, sino para el divisor 19, que ninguno de esos *divisores primos* divide el número propuesto.

En fin, para los últimos *divisores simples* que deben ensayarse

59, 61, 67, 71, y 73,

los *cocientes presuntos*,

91, 89, 87, 79, y 73,

se componen solo de *dos* cifras y se obtienen á la simple inspeccion del número dado.

Del mismo modo se reconoceria, deteniéndonos en la *cifra de las decenas* del producto de cada uno de esos *cocientes*

---

decenas y las *unidades* del *multiplicador;* lo mismo se hace con la cifra de las *centenas* y así sucesivamente, segun se ve en el adjunto ejemplo:

$$\begin{array}{r} 463 \\ 13 \\ \hline 6019 \end{array}$$

Se dice:

3 veces 3 son 9; se escribe 9, que es la cifra de *unidades simples;*

3 veces 6 son (18) y una vez 3 (3) son 21; escribo 1 *decena* y llevo 2 *centenas;*

1 vez 6 (6), 3 veces 4 (12) y 2 que *llevo* son 20: escribo 0 *centenas* y llevo 2 *unidades de millar;*

1 vez 4 (4) y 2 que *llevo* hacen 6 *unidades de millar*, que escribo.

Así es como opera *siempre mentalmente* el jóven Grandemange, con tal facilidad, que si se le pide el producto de dos números enteros ó decimales de á *diez* cifras, forma casi instantáneamente el producto.

presuntos por el *divisor correspondiente*, que ninguno de estos *divisores primos* es divisor *exacto* del número propuesto.

Así se vería que el *resíduo* de la division por 9 del *producto* 89×61 es 2 y no 7, *resíduo* de la division por 9 del *número dado*.

Respecto de los dos divisores

59 y 67,

podria omitirse aquella operacion, observando que los cocientes respectivos

91 y 87

no son *números primos*, siendo divisible el uno por 7 y el otro por 3.

Tenemos, pues, completa seguridad de que el número propuesto, 5479, es *número primo*.

Es fácil ver que hemos escogido este número de modo que en él se presente ocasion de hacer resaltar, en cuanto es posible, todos los *recursos prácticos*, si así puede decirse, de este *método de ensayo*, y, que en general, los *ensayos* pueden hacerse rápidamente.

Cuando el número propuesto tiene solo *tres* cifras la determinacion de los *cocientes presuntos* se hace á la simple inspeccion del número, porque están compuestos de *dos* cifras, y entonces la *segunda* parte de la operacion puede hacerse muy sencillamente.

En cuanto á los números de mas de *cuatro* cifras, el *método* les es tambien aplicable; pero se necesita entonces determinar varias cifras del cociente á simple inspeccion á fin de *completarle* despues por medio de la *prueba por 9*.

Formacion de una Tabla de números primos.

348. Los principios que hemos espuesto sobre los *números primos*, las aplicaciones que de ellos hemos hecho, y las esplicaciones acabadas de dar sobre los ensayos que deben hacerse para reconocer si un número es *primo*, demuestran bastantemente la utilidad de una *Tabla*, tan estensa como sea posible, de esa clase de números.

Hay publicadas muchas de estas tablas, una de las cuales, la de BURCKHARDT, comprende los *números primos* desde 1 hasta 3036000.

Para dar una idea de la manera como puede hacerse este trabajo, supondremos que quiere formarse una *Tabla* de los *números primos* de 1 á 1000.

Suponiendo escritos los *mil* primeros números naturales unos detrás de otros de la manera mas cómoda, por ejemplo en *diez* columnas de á *cien* números cada una, hé aquí el procedimiento que puede seguirse (*).

Se comienza por *tachar*, 1.° todos los números *pares*, escepto el número 2; 2.° todos los *múltiplos* de 3, escepto el 3, que *quedan* despues de la operacion *primera;* y 3.° todos los *múltiplos* de 5, escepto 5, que no estén ya *tachados*.

Hecho esto, ya puede asegurarse que todos los números *no tachados* desde 1 hasta 7×7 ó 49, son *números primos*, porque todos los múltiplos de 2, 3 y 5, así como los múltiplos de 7 *inferiores* á aquel límite han sido *tachados* necesariamente, tenemos pues ya la série de *números primos*

de 1 á 47.

Del mismo modo, si se *tachan* todos los múltiplos de 7 á partir de 49 hasta 11×11 ó 121 (siendo 11 el *número primo* que viene *inmediatamente despues* de 7), se tiene seguridad de que todos los números situados delante de 121, que no hayan sido *tachados*, son *números primos;* y así se obtienen todos los *números primos*

de 47 á 113.

Sin que tengamos necesidad de entrar en mas pormenores de esta operacion, es fácil ver que así se irán *tachando* y *suprimiendo* sucesivamente todos los MÚLTIPLOS *todavía no suprimidos*, de los números *primos* YA CONOCIDOS, 11, 13, 17..., hasta llegar al número 997, que es el *último* que *queda* de los *mil* primeros números despues de la supresion, operada muy al principio, de los tres números 998, 999 y 1000, que son respectivamente *múltiplos* de 2 y 3.

(*) Este procedimiento es el conocido bajo el nombre de criba de ERATOSTHENES.

Así se halla la série de los 169 *números primos* comprendidos entre 1 y 1000, cuya *Tabla* ponemos aquí como *muestra*, añadiendo los seis *números primos* siguientes, para completar el cuadro.

Tabla de los números primos desde 1 *hasta* 1033.

1	97	229	379	541	691	863
2	101	233	383	547	701	877
3	103	239	389	557	709	881
5	107	241	397	563	719	883
7	109	251	401	569	727	887
11	113	257	409	571	733	907
13	127	263	419	577	739	911
17	131	269	421	587	743	919
19	137	271	431	593	751	929
23	139	277	433	599	757	937
29	149	281	439	601	761	941
31	151	283	443	607	769	947
37	157	293	449	613	773	953
41	163	307	457	617	787	967
43	167	311	461	619	797	971
47	173	313	463	631	809	977
53	179	317	467	641	811	983
59	181	331	479	643	821	991
61	191	337	487	647	823	997
67	193	347	491	653	827	1009
71	197	349	499	659	829	1013
73	199	353	503	661	839	1019
79	211	359	509	673	853	1021
83	223	367	521	677	857	1031
89	227	373	523	683	859	1033

§ III.—DE LAS FRACCIONES DECIMALES PERIÓDICAS.

Caractéres por cuyo medio se reconoce que una fraccion ordinaria debe producir una fraccion decimal periódica SIMPLE Ó MISTA.

El desarrollo de la propiedad establecida en el n.º 174 nos ha conducido á distinguir (n.º 175) *dos* clases de *fracciones decimales periódicas*, unas SIMPLES, y otras MISTAS; y sin detenernos en las diversas propiedades que de esta distincion pueden deducirse, nos redugimos á demostrar la que podrá suministrarnos el medio de *retroceder á la fraccion ordinaria generatriz*.

Ahora vamos á esponer los caractéres por cuyo medio se conoce que una fraccion *periódica* procedente de una *fraccion ordinaria dada* debe ser SIMPLE ó MISTA.

349. Comencemos por observar que los resultados obtenidos (n.os 176, 177 y 178) pueden espresarse por medio de las fórmulas siguientes:

1.º Para una fraccion *periódica* SIMPLE, SIN ó CON PARTE ENTERA, tal por ejemplo, como

$$0{,}abcd\ abcd\ abcd\ldots,\quad \text{ó}\quad m{,}abcd\ abcd\ abcd\ldots,$$

se tiene, llamando x á la *fraccion generatriz*,

$$\text{(A)}\qquad x=\frac{abcd}{9999},\quad \text{ó}\quad x=\frac{mabcd-m}{9999},$$

espresiones, cuyo denominador está compuesto de *tantos* 9 como cifras tiene el *período*;

2.º Para la *fraccion periódica* MISTA, tal como

$$m{,}abc\ defgh\ defgh\ defgh\ldots,$$

la *fraccion generatriz* es

$$\text{(B)}\qquad x=\frac{mabcdefgh-mabc}{99\,999\,000},$$

espresion cuyo denominador está compuesto de *tantos* 9, como *cifras* tiene el período y de *tantos ceros*, como cifras tiene la *parte* DECIMAL NO PERIÓDICA.

350. Esta última fórmula dá lugar á una *observacion importante*, á saber:

Que *la fraccion generatriz de una fraccion periódica* MISTA, *suponiéndola reducida á sus* MENORES TÉRMINOS, *debe tener por denominador un número que contenga uno á lo menos de los dos factores primos 2 y 5, elevado á una potencia de* UN GRADO *marcado por el* NÚMERO *de cifras decimales no periódicas.*

En efecto, para que los factores 2 y 5, que se hallan en el denominador del valor de x, á la *tercera* potencia, por ejemplo, como en la fórmula (B), puedan, despues de la reduccion de la fraccion generatriz á sus *menores términos*, desaparecer enteramente, ó solamente hallarse *ambos* en ella, á una potencia *menor* que la *tercera*, sería necesario que el numerador de aquella pueda terminar en *un cero á lo menos.*

Esto no podria suceder sino en cuanto la *última* cifra c, *á lo menos*, de la parte *no periódica*, fuera la *misma* que la última, h, del *período*; pero es evidente que entonces el primer período comenzaria *antes* de la *cuarta* cifra *decimal*, lo cual es contrario al supuesto.

Luego etc.

351. Esto supuesto, establezcamos las dos propiedades que permiten reconocer si la *fraccion decimal periódica* equivalente á una *fraccion ordinaria* debe ser SIMPLE ó MISTA.

PRIMERAMENTE. *Toda fraccion ordinaria cuyo denominador no contiene á ninguno de los dos factores primos 2 y 5, convertida en decimal, de una fraccion periódica* SIMPLE Ó PURA.

Por lo pronto, en virtud de la propiedad del n.º 174, resulta que esta fraccion decimal debe ser *periódica*.

Ahora digo que además es *periódica* PURA Ó SIMPLE.

En efecto, si fuera *periódica* MISTA, el denominador de la *fraccion generatriz reducida á sus menores términos*, contendria necesariamente, segun la *observacion* precedente, los dos factores 2 y 5, ó á lo menos uno de ellos; y como esta fraccion deberia ser *igual* á la propuesta, resultaria que el denominador de esta deberia ser (n.º 120) un *múltiplo* del denominador de la otra, y por consiguiente contener los factores 2 y 5, ó al menos uno de ellos; lo cual sería contrario al enunciado de la proposicion.

252. EN SEGUNDO LUGAR.—*Toda fraccion ordinaria* IRREDUCTIBLE, *cuyo denominador contiene uno de los factores 2 y 5, ó ambos, combinados con otros factores, dá lugar á una fraccion decimal periódica* MISTA; *y el periodo está precedido de* TANTAS *cifras decimales como unidades hay en el mayor de los esponentes de los factores 2 y 5.*

Por lo pronto la fraccion, que necesariamente es *periódica* (n.° 174) no puede ser *simple.*

Porque el valor de la fraccion generatriz estaria entonces espresado por una de las dos fórmulas (A) del n.° 349,

$$x=\frac{abcd}{9999}, \quad ó \quad x=\frac{mabcd-m}{9999},$$

espresiones cuyo denominador no contiene ni el factor 2 ni el factor 5, y que en consecuencia, despues de su simplificacion no pueden ser *iguales*, es decir (n.° 121) *idénticas* con la fraccion *irreductible* propuesta.

En segundo lugar, si n designa el mayor de los esponentes de 2 y de 5, que contiene el denominador de la propuesta, el primer período debe ir precedido de n cifras *decimales.*

Porque, si estuviera precedida de m cifras, siendo $m \gtrless n$, el denominador de la fraccion *generatriz*, suponiéndola reducida á *sus menores términos*, contendria, segun la observacion del n.° 350, *á lo menos* uno de los factores 2 y 5 elevado á la m.*ésima* potencia, y por consiguiente, dicha fraccion no podria ser *igual* ó (n.° 121) *idéntica* á la propuesta, la cual, por hipótesis, contiene uno de esos dos factores elevado á la n.*ésima* potencia.

Advertencia.—El enunciado de esta propiedad supone que la fraccion *propuesta* es IRREDUCTIBLE, lo cual siempre puede admitirse; pero es fácil conocer que, si la fraccion, sin estar reducida á *sus menores términos*, fuera tal, que los factores 2 y 5 así como los otros factores que componen el *denominador* no entrasen *del mismo modo* en el numerador, la propiedad le sería tambien aplicable.

Aplicaciones.

353. Tomemos por aplicaciones de las dos propiedades que acabamos de establecer, las fracciones siguientes:

$$\frac{11}{13},\ \frac{132}{37},\ \frac{21}{143},\ \frac{19}{52},\ \frac{41291}{4625},\ \frac{19}{640}.$$

Las *tres primeras*, cuyos denominadores no contienen ninguno de los dos factores 2 y 5, dán lugar á las fracciones decimales *periódicas puras*.

0,846153 846153..., 3,567 567..., 0,146853 146853....

Las *tres últimas*, que tienen respectivamente por *denominadores*

$$13\times 2^2,\ 37\times 5^3,\ 13\times 2\times 5^2,$$

dán lugar á las fracciones decimales *periódicas mistas*

0,36 538461 538461..., 8,927 783 783..., 0,02 923076 923076...,

cuyo último período comienza en cada una, despues del número de cifras decimales indicado por el mayor de los esponentes de los factores 2 y 5.

§ IV.—MÉTODOS ABREVIADOS PARA LA DIVISION Y PARA LA ESTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA.

Método abreviado para la division.

354. En la *division* como en la *multiplicacion* (véanse los n.os 197 y siguientes) puede emplearse un *método abreviado* cuando el dividendo y el divisor están compuestos de un gran número de cifras.

Pero como este método exige para ser esplicado completamente desenvolvimientos que aquí no hallarian su lugar conveniente, nos reduciremos á dar una idea del modo de operar.

A este fin comenzaremos por observar que la investigacion del cociente de la division de dos *fracciones decimales* con un grado de aproximacion *determinado*, puede siempre

Rafael Vergara

reducirse á la investigacion del cociente de la division de dos *números enteros*, determinado con *menos* de una unidad de error.

En efecto, sea por ejemplo, valuar con menos de *una milésima* de error el cociente de la division de

1234,569 *por* 27,35894.

Por lo pronto debemos, conforme á la regla del n.° 169, colocar *dos* ceros á la derecha del dividendo, lo cual reduce la operacion á la division de los dos números enteros

123456900 y 2735894.

En seguida, como queremos obtener el cociente con tres decimales, podemos poner desde luego (n.° 171) otros *tres* ceros á la derecha del dividendo y efectuar la division, cuidando luego de *separar tres cifras decimales* hácia la derecha del cociente.

Con esto la cuestion queda reducida á buscar el cociente de

123456900000 *dividido por* 2735894,

teniendo solo en cuenta su parte *entera*.

Esto nos lleva por consiguiente á esponer la regla que debe seguirse para hacer la division *abreviada* de dos *números enteros*.

Despues veremos lo que debe hacerse para operar con dos *números decimales*.

355. Esta *regla*, *fundada principalmente* en que, segun el *procedimiento ordinario*, la determinacion de cada una de las cifras del cociente solo depende casi siempre de las *dos* ó *tres* primeras cifras de la izquierda del dividendo, y de la *primera* ó las *dos primeras* cifras de la izquierda del divisor, puede enunciarse así:

Suprímanse á la derecha del dividendo TANTAS *cifras*, MENOS DOS, *como hay en el divisor; hágase en seguida la division de la parte de la izquierda por el divisor*, en la forma ordinaria; sino queda residuo, *pónganse á continuacion del cociente* TANTOS *ceros como cifras se han suprimido en el dividendo*;

Pero si queda resíduo, segun ordinariamente acontece, *divídase este residuo por el divisor*, haciendo abstraccion de la *última* cifra de la derecha del mismo divisor; sin embargo en la multiplicacion del nuevo divisor por la cifra obtenida en el cociente, *se tendrá cuidado de añadir las unidades que se lleven del producto de la cifra suprimida, por la cifra del cociente* (*véase* lo hecho en el n.° 198, respecto de la multiplicacion abreviada);

Divídase en seguida el nuevo resíduo por el divisor, haciendo abstraccion de las *dos últimas* cifras de la derecha (y teniendo en cuenta la observacion precedente, al multiplicar el nuevo divisor por la cifra del cociente);

Continúense estas divisiones sucesivas, suprimiendo, Á CADA DIVISION, *una cifra á la derecha del divisor;* y *suspéndase la operacion cuando ya no queden al divisor mas que las dos primeras cifras de la izquierda.*

A fin de que pueda comprenderse bien esta manera de operar, ponemos en el ejemplo siguiente el *procedimiento ordinario* junto al procedimiento del *método abreviado*:

Procedimiento ordinario.

540347056789046 | 2786459
26170115 | 193918897
10919846
25604697
5265668
24792099
25004270
27125984
20478536
973323

Método abreviado.

5403470567 | 89046 | 2786459
26170115 | 1939 | 18897
10919846
25604697
526566
247920
25004
2713
206
12

La operacion de la izquierda está hecha por el método ordinario; por consiguiente las esplicaciones siguientes solo conciernen á la segunda operacion.

Conforme á la regla que acabamos de esponer, separamos *cinco* cifras á la derecha del dividendo, puesto que hay *siete* en el divisor; y dividimos la parte de la izquierda por el divisor en la forma ordinaria, lo cual dá para las *cuatro* primeras cifras del cociente, 1939, y de resíduo, 526566.

Hecho esto, *tachamos* la última cifra, 9, del divisor, y dividimos 526566 por 278645; el cociente es 1, por el cual se multiplica el divisor, añadiendo 1 á la cifra de las unidades del producto, para tomar en cuenta el 9 *suprimido* en el divisor; despues se resta el producto obtenido del resíduo 526566, lo cual dá el nuevo resíduo 247920.

Tachando otra cifra á la derecha del divisor, se divide 247920 por 27864, y se resta del dividendo el producto de 27864 por el cociente 8, aumentado en las cuatro unidades que *llevaríamos* si hubiéramos multiplicado 8 por la segunda cifra *tachada* 5.

Así llegamos al *tercer* resíduo, 25004, que dividimos por 2786 (despues de haber *tachado* la tercera cifra de la derecha, 4, del divisor). El nuevo cociente es tambien 8; lo cual dá el *cuarto* resíduo 2713.

Continuando del mismo modo, se obtienen como últimos cocientes parciales 9 y 7.

Lo cual dá finalmente 193918897 por cociente total; y se ve que este resultado es precisamente *el mismo* que habia producido el primer procedimiento.

356. Apliquemos ahora esta regla á dos *números decimales*, resolviendo al efecto el ejemplo propuesto en el n.º 354, para valuar el cociente hasta *milésimas:*

Procedimiento ordinario.

123456900000	2735894
14021140	45124
3416700	
6808060	
13362720	
2419144	

Método abreviado.

1234569	00000	2735894
140212		45124
3418		
682		
135		
26		

Habiendo reducido antes la operacion á la de dos números *enteros*, se observa que las *siete* cifras del dividendo, que quedan despues de la supresion de *tantas* cifras *menos dos* como hay en el divisor, no contienen al divisor.

Es necesario pues *tachar* DESDE LUEGO la última cifra, 4, del divisor, y dividir 1234569 por 273589.

Despues, se continúa la operacion aplicando la *regla*. Habiendo llegado así al cociente 45124, se le reduce á su valor, separando (n.° 161) tres cifras *decimales*, con lo cual se obtiene

$$45{,}124,$$

que es el cociente *pedido*, con menos de una milésima de error.

No insistirémos mas en este género de operacion que solo debe emplearse con reserva (*).

Método abreviado para la estraccion de la raiz cuadrada.

357. Cuando se ha obtenido *mas de la mitad* de las cifras de la parte entera de la raiz cuadrada de un número, una simple *division* basta para dar las cifras siguientes.

Designemos en efecto por N el número cuya raiz se pide, y supongamos que la *parte entera* debe tener $(2n+1)$ cifras.

Llamemos a al conjunto de las $(n+1)$ primeras cifras de la izquierda, consideradas con su *valor relativo*, b al número que *completa* la raiz, y cuya *parte entera* está espresada por las n cifras de la derecha; tendremos la igualdad

$$N=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

de donde, restando a^2 de ambos miembros y dividiendo por $2a$,

$$\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

Esto supuesto, como por hipótesis la *parte entera* de b

(*) Sobre este asunto puede el que guste consultar *un opúsculo* de M. GUY antiguo oficial de Artillería.

La cuestion se halla tambien particularmente tratada en el *Curso de análisis* de FOURIER.

no contiene mas que n cifras, tendremos necesariamente

$$b < 10^n \quad \text{y} \quad b^2 < 10^{2n}.$$

Por otro lado, estando a considerado con su *valor relativo*, está espresado por $(2n+1)$ cifras, de las cuales las n primeras á la derecha son *ceros*, de donde resulta

$$a, \quad \text{y } \textit{à fortiori} \quad 2a > 10^{2n}.$$

Luego $\frac{b^2}{2a}$ es un número *menor* que 1, y por lo tanto el cociente espresado por $\frac{N-a^2}{2a}$ difiere de b en una cantidad menor que la *unidad*.

De donde se deduce la REGLA SIGUIENTE:

Despues de haber obtenido MAS DE LA MITAD *de las cifras de la raiz, divídase el resíduo* $N-a^2$, *que se ha obtenido, por el duplo del número que forman las cifras halladas, tomadas con su* VALOR RELATIVO.

La parte entera del cociente forma el conjunto de las cifras de la raiz que faltan determinar.

Hallada así la raiz, aproximada hasta faltarle *menos de una unidad*, se puede (n.° 210) reconocer si espresa la *raiz buscada* EN MENOS Ó EN MAS, ó sea, *por defecto* ó *por esceso*, y obtener la aproximacion hasta faltar *menos de* MEDIA UNIDAD.

Sea, por ejemplo, $N=4735678956$.

Las *tres primeras cifras* halladas por el procedimiento ordinario son

$$688;$$

el *resíduo* $N-a^2$, tiene por espresion

$$2238956.$$

Dividiendo este número por $2a$, ó sea, 137600 (segun el procedimiento particular del n.° 38), se halla para la *parte entera del cociente*,

$$16.$$

Luego 68816 es la *raiz pedida*.

Lo cual puede comprobarse formando el cuadrado de

68816, que restado del número propuesto, dá el resíduo 37100, número *menor que* $2\times 68816+1$ (n.º 205).

La inspeccion de este *resíduo* muestra además (n.º 210), que el número 68816 espresa la raiz *por defecto* y *con menos de media unidad de error*.

Advertencia.—El resíduo 37100 puede obtenerse de un modo mas pronto que por la elevacion de 68816 al cuadrado.

Para esto basta evidentemente restar del *resíduo* $N-a^2$ ó 2238956, la *suma* de las dos partes restantes del mayor cuadrado contenido en N, á saber: el *doble producto* de 68800 por 16 y el *cuadrado* de 16.

Vamos á hacer uso de esta observacion.

358. Para apreciar bien todo el partido que puede sacarse de *este método*, supongamos que queremos valuar la raiz cuadrada de 4735678956 *en decimales*.

A este fin es necesario (n.º 217) escribir á continuacion del resíduo 37100, DOS VECES TANTOS *ceros* como decimales quieren sacarse, continuando la operacion como si se tratara de un número entero.

Las *cinco* cifras de la raiz ya encontradas, dán por la aplicacion del *método abreviado* el medio de determinar otras cuatro, que serán precisamente las *cuatro primeras* cifras *decimales;* habremos pues de dividir el número 37100, seguido de *ocho ceros*, por el *duplo* de 68816, ó sea 137632, seguido de *cuatro ceros*, ó lo que es lo mismo, dividir 37100, seguido *únicamente* de *cuatro ceros*, por 137632.

Efectuando esta operacion por el *método abreviado* de la division (n.º 355), se halla por *cociente*

$$2695;$$

y por consiguiente tenemos

$$\sqrt{4735678956}=68816{,}2695$$

con menos de 0,0001 *de error*.

Antes de comprobar este resultado sobre el cual parecen pesar dos causas de error, á saber: 1.º la fraccion que se desprecia sustituyendo al *verdadero valor* de *b* la *parte entera* del cociente $\frac{N-a^2}{2a}$; 2.º el empleo del *método abreviado de* *la division*, se puede, para mayor sencillez, segun la advertencia del número precedente, *formar el doble producto* de 688160000 por 2695 y el *cuadrado* de 2695, *restando* despues la *suma* de los dos números así obtenidos, del número 3710000000000.

Efectuados estos cálculos dán por resultado

$$810336975,$$

número *menor* que el *duplo* de 688162695, pero *mayor* que esta raiz.

Tenemos pues *certeza* de haber hallado la raiz pedida.

Observemos tambien que *una nueva division* de 810336975 seguido de *ocho* ceros, por 2 *veces* 688162695, bastaria para dar *ocho* cifras *mas* á la raiz, es decir, EN TODO, *doce* cifras decimales de *aproximacion*.

359. Aplicando este *procedimiento* á la determinacion de de las *diez y seis primeras cifras decimales* de $\sqrt{2}$, se hallaria

$$\sqrt{2}=1{,}4142135623730950.$$

Para llegar á este resultado, se comienza por determinar *tres* cifras por medio del procedimiento ordinario, y se obtienen en seguida por medio de *tres divisiones sucesivas*, las otras *catorce* cifras, incluso el entero 1, pasando primero de tres cifras á *cinco*, despues de cinco á *nueve*, y por último de nueve á *diez y siete*.

Para la *estraccion de la raiz cúbica* existe tambien un *método abreviado*, fundado en la fórmula

$$N=(a+b)^3=a^3+3a^2.b+3a.b^2+b^3,$$

pero es poco usado.

§ V.—Operaciones sobre los números aproximativos.

Hemos visto que efectuando las diversas operaciones de la aritmética sobre números *enteros* ó *fraccionarios exactos* se puede siempre obtener el resultado, bien sea *exactamente*, bien con el *grado de aproximacion* que se apetezca.

Pero si tenemos que aplicar esas mismas operaciones á números que no son mas que resultados *aproximativos* se concibe que el error resultante de la cantidad despreciada en cada número, debe resumirse en el *resultado final* segun la naturaleza de cada operacion.

Nosotros vamos á ver ahora cuál es, en cada caso, para cada especie de operacion, la aproximacion que se puede obtener.

Adicion y sustraccion.

360. Sin entrar para estas dos sencillas operaciones en la discusion de los diferentes casos que pueden presentarse, nos reducirémos á raciocinar sobre ejemplos particulares á fin de dar una idea de cómo puede apreciarse el *error* que debe afectar al *resultado.*

Supongamos que tenemos que sumar 25 logaritmos ó *complementos* de logaritmos, dados por las Tablas de CALLET (el empleo de los *complementos* se refiere aquí á las sustracciones que pudieran deber ejecutarse); en otros términos, que fuera necesario hacer una suma de 25 números *aproximativos*, cuya *última* cifra puede tener un error de *media diez-millonésima.*

Admitiendo como el caso mas desfavorable, que todos los errores sean en el *mismo sentido*, por *defecto* ó por *esceso*, es claro que el *límite del error total* tiene por espresion tantas SEMI-UNIDADES del órden de la *última* cifra, como números hay que sumar, es decir, 25 *semi-diez-millonésimas*, ó sea, 0,00000125.

El error por consiguiente en este caso puede afectar las *dos últimas* cifras del *resultado*, espresado en *diez-millonésimas.*

De esto se sigue que, en la investigacion del número correspondiente á este resultado, el uso de la proporcion (n.º 323) no tendria objeto alguno; pero entonces la aproximacion sería evidentemente menor que la que se obtiene operando sobre *un* logaritmo dado.

Para corregir en cuanto es posible, esta *causa de error* en las aplicaciones logarítmicas, principalmente en las relativas á los cálculos de *interés compuesto* ó de *anualidades*, se recurre á la parte de las Tablas de CALLET en donde los logaritmos se dán con 18 ó 20 cifras decimales.

361. APLICACION. — Se pide en INTERÉS COMPUESTO *el valor de* 15000 *reales al cabo de* 30 *años á* $4^1/_2$ p. $^0/_0$ *al año.*

La fórmula del n.° 336 dá

$$A = 15000 \times (1{,}045)^{30};$$

de donde

$$\log.\ A = \log.\ 15000 + 30 \log.\ 1{,}045.$$

Tenemos pues aquí que multiplicar un logaritmo por 30, ó en otros términos, hacer la suma de 30 logaritmos *iguales*, debiendo añadir al resultado el logaritmo de 15000.

Para tener seguridad de que el *error* relativo á este cálculo no caerá sobre la *séptima* cifra decimal, hé aquí cómo conviene proceder:

Tomando en la *Tabla grande* el logaritmo de 1,045 con *diez* cifras decimales, se halla

$$\log.\ 1{,}045 = 0{,}0191162904$$

$$30 \log.\ 1{,}045 = 0{,}573488712$$

Este resultado es exacto hasta la *octava* cifra decimal inclusive.

Tomando en la Tabla *ordinaria* el logaritmo de 15, que tiene 8 cifras decimales, se obtiene igualmente $\log.\ 15000 = 4{,}17609126$

Suma $4{,}749579972$

ó, despreciando las *dos* últimas cifras y añadiendo *una unidad* á la 7.ª $4{,}7495800$

El error cometido es entonces *menor* que media unidad del órden de la 7.ª cifra decimal.

El logaritmo *mas próximo* en la Tabla es $\ldots 5740$

Diferencia 60

y corresponde á 56179.

$$\text{Diferencia tabular } 78;\ \frac{60}{78} = 0{,}76,$$

luego

$$A = 56179^{\text{rs.}},76^{\text{c.}}.$$

Multiplicacion.

362. Consideraremos primero dos números *decimales*, y veremos despues cómo se estiende la teoría al caso de dos números *enteros* tomados por factores.

Llamemos A y B los dos números dados, y *supongâmos* que cada uno de ellos tiene un *error de menos de media unidad* del órden de su *última* cifra decimal.

[Pudiendo siempre hacerse esta *suposicion* (n.° 168), la conservaremos invariablemente para todos los números sobre los cuales nos propongamos operar en todo el curso de esta teoría.]

Si admitimos (y es el caso mas desfavorable) que los dos *errores* sean en el *mismo sentido*, por ejemplo en *menos*, los dos factores *completos*, ó por mejor decir, los *límites* de estos factores, podrán representarse así:

$$A + \frac{1}{2} \text{ unidad del órden de la } \textit{última} \text{ cifra de A;}$$

$$B + \frac{1}{2} \text{ unidad del órden de la } \textit{última} \text{ cifra de B.}$$

Ahora bien, el producto de estas dos espresiones (*) se compone (n.° 48) de *cuatro* partes, á saber:

$$A \times B, \quad A \times \frac{1}{2}, \quad B \times \frac{1}{2}, \quad y \quad \frac{1}{4},$$

siendo las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ *fracciones de la unidad de un ór-*

(*) Suponemos para mayor sencillez que los errores sean en el *mismo sentido* y *por defecto;* pero el razonamiento sería absolutamente el mismo, si dichos errores fueran en *sentidos diferentes* y *por defecto* ó *por esceso;* solo que entonces sería necesario aplicar la regla de formacion del producto de dos cantidades $(a \pm b)$ y $(c \pm d)$, siendo $A \pm \frac{1}{2}$ y $B \pm \frac{1}{2}$, hablando propiamente, las espresiones *generales* de los *límites* de A y B.

den decimal determinado por los órdenes respectivos de la *última* cifra decimal de los dos factores.

Luego, despreciando la *pequeña fraccion* $\frac{1}{4}$, se tiene por *límite del error total:*

$\frac{1}{2}$ A unidades del órden de la *última* cifra de A, *dividido por la unidad seguida de tantos ceros como decimales hay en* B, MAS $\frac{1}{2}$ B unidad del órden de la *última* cifra de B, *dividido por la unidad seguida de tantos ceros* como decimales hay en A.

PRIMER EJEMPLO.—Números dados: 32,470463 y 8,70245. *Límite del error.*

$$\frac{1}{2}\,32{,}470463:1000000,\ \text{ó}\ \frac{16235231}{1000000\,00000},\ \text{ó}\ 0{,}00016235231$$

$$\textit{mas}\,\frac{1}{2}\,8{,}70245:100000,\ \text{ó}\ \frac{435122}{100000\,000000},\ \text{ó}\ 0{,}00000415122$$

Total. . . . 0,00016670353

(La *pequeña fraccion* despreciada es $\frac{1}{4}$ de 0,00000000001.)

Se ve que el *error* puede venir hasta la *cuarta* cifra decimal, y que por lo tanto no puede contarse mas que con las *tres primeras* cifras decimales.

De donde se sigue que aplicando á estos dos números el *método abreviado* (n.° 197) deberá proponerse determinar, aproximado hasta *milésimas* solamente, el valor del producto, y se hallará por resultado

282,573 con menos de 0,001 de error.

SEGUNDO EJEMPLO.—Números dados: 0,0001083 y 0,05836.

Límite del error:

$$\frac{1}{2}0{,}0001083:100000\text{, ó }\frac{541}{10000000\ 00000}\text{, ó }0{,}00000000541$$

mas

$$\frac{1}{2}0{,}05836:10000000\text{, ó }\frac{2918}{10000000\ 00000}\text{, ó }0{,}0000000002918$$

Total. 0,000000003459

el producto puede por consiguiente calcularse con *ocho* cifras decimales.

Observacion I.—Cuando uno de los dos números dados espresa un *valor exacto*, el *límite de error* se reduce á la *mitad del factor exacto, dividida por la unidad seguida de tantos ceros como decimales hay en el factor aproximativo.*

Porque entonces el *límite del factor exacto*, A, por ejemplo, es este *mismo factor* y en consecuencia el *producto* no se compone mas que de *dos* partes.

$$A\times B \quad \text{y} \quad A\times\frac{1}{2},$$

siendo $\frac{1}{2}$ una fraccion del órden de la *última* cifra de B.

Sean los números dados: 45,036 y 6,3048, el primero de los cuales se supone *exacto:*

Límite del error:

$$\frac{1}{2}\cdot 45{,}036:10000=\frac{22518}{10000000}=0{,}0022518.$$

No deberíamos pues buscar el valor del producto mas que aproximado hasta *centésimas.*

Observacion II.—Si hay que multiplicar un número *aproximativo* por sí mismo, el *límite del error* es evidentemente, en este caso, el NÚMERO MISMO *dividido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay en él.*

Luego, *el número de cifras del producto con que* NO PUEDE *contarse, es igual al número de cifras del* NÚMERO PROPUESTO.

Sirva de ejemplo el número 1,949036 (*véase* el n.° 191).

Límite del error:

$$1{,}949036 : 1000000 = 0{,}000001949036.$$

No pueden por consiguiente tomarse mas que las *cinco* primeras cifras *decimales;* siendo *siete* el número de cifras con que no puede contarse.

363. Supongamos ahora que se debe operar con dos números *enteros*, A y B; cuya *última* cifra debe tener el *error* de menos de *media unidad.*

Para ampliar á estos números la teoría que acabamos de esplicar, basta observar que la *última* cifra de cada número espresa en este caso *unidades simples*, y por lo tanto, en los razonamientos hechos, debe sustituirse la espresion de *unidad simple,* á la de *unidad del órden de la última cifra decimal*, y que en consecuencia en las cantidades

$$A\times\frac{1}{2},\quad B\times\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},$$

que dán la espresion del *límite del error* $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ no son ya fracciones de la *unidad de cierto órden decimal*, sino de la *unidad simple.*

Para los dos números 5783694 y 83758, la *parte del límite del error* que basta considerar, es

$$\frac{1}{2}\times 5783694 = 2891847;$$

de modo que no se podria contar con las cifras de órden *inferior*, á las *decenas de millones.*

El *método abreviado* (n.° 199) daria por resultado 844431 con menos de *cinco millones* de error *por esceso.*

En general, siendo dada por el *mayor* de los dos factores propuestos la PARTE PRINCIPAL *del límite del error*, la cifra de *unidades superiores* de dicho factor, marca el *grado de aproximacion* que puede obtenerse.

Division.

364. Hay que distinguir *tres* casos principales:
O *solo* el dividendo tiene *error*,
O *solo* le tiene el divisor,
O le tienen *ambos* términos,
Suponiéndose el error en todos los casos, *menor que media unidad* del órden de la *última* cifra de la derecha del número *inexacto*.

Para esta operacion, al revés de lo hecho en la multiplicacion, considerarémos en *primer lugar* números *enteros*, y pasaremos despues fácilmente á los números decimales.

365. *Primer caso.—Solo* el dividendo es *aproximativo*.

Designemos tambien aquí por A y B los dos números dados.

El cociente de la division de A por B tendrá evidentemente un ERROR de menos de $\frac{1}{2}$: B, sea por *esceso*, sea por *defecto*.

Así el *límite del error* tiene por espresion *numérica*,

$$\frac{1}{2B},$$

fracion que convertida en *decimales*, hace conocer el grado de exactitud con que puede contarse en la determinacion del cociente $\frac{A}{B}$.

Sean, por ejemplo, los dos números 547 y 4839.

Tenemos por *límite del error*,

$$\frac{1}{9678};$$

esta fraccion, convertida en decimales, dá evidentemente 0,0001,...; de donde se sigue que el *cociente* de la division de los números propuestos, solo puede reputarse exacto hasta las *milésimas;* lo cual puede comprobarse, suponiendo que el error de la última cifra de 547 sea por *defecto:*

$$547 : 4839 = 0{,}11304...,$$
$$547{,}5 : 4839 = 0{,}1131 ...,$$

resultados que difieren en *menos de una milésima*, es decir, en menos de una unidad del tercer órden decimal.

Sean ahora los números 25649 y 6847.

Siendo $\frac{1}{13694}$, ó 0,00007..., *el límite del error*, puede contarse que el cociente es *exacto*, faltándole menos de una unidad del órden de la cuarta cifra decimal.

En efecto, suponiendo aquí que el error es por *esceso*, tendremos;

$$25649 : 6847 = 3{,}74602,$$
$$25648{,}5 : 6847 = 3{,}74594,$$

resultados que difieren entre sí en 0,00008, es decir, en *menos de una diez milésima.*

El *grado de exactitud con que podemos contar para el cociente*, *está por lo tanto, en este primer caso, marcado por el número de las cifras, menos una, del* DUPLO *del divisor.*

366. Consideremos ahora *números decimales.*

En primer lugar, si los números propuestos, tienen el *mismo* número de cifras decimales, se suprime la vírgula (n.° 166), y razonando como antes terminaremos aplicando la *regla* que acaba de darse.

Sean los dos números 4,8395 y 0,9763.

Como la supresion de la vírgula reduce su division á la de los números *enteros*, 48395 y 9763, el *límite del error* es,

$$\frac{1}{19526},$$

y por lo tanto, el cociente puede valuarse con *cuatro* decimales.

En segundo lugar, cuando el número de cifras decimales es diferente en los términos, se preparan los números dados de modo que el *dividendo* al hacerse número *entero* conserve por *última* cifra, la cifra *errónea*; y despues se aplica la regla á los dos números así preparados.

1.° Sean los números dados : 43,5637 y 2,53.

Su division se reduce á la de 435637 *por* 25300.

Siendo 50600 número de cinco cifras, el *duplo* del *divisor*, puede estenderse la operacion hasta las *diez milésimas inclusive*.

2.° Números *dados:* 23,29 y 47,364.

Números *preparados:* 2329 y 4736,4.

El *duplo* del *divisor* es 9472,8, número cuya *parte entera* solo tiene *cuatro* cifras; de donde se sigue que el cociente solo puede valuarse hasta *milésimas*.

3.° Números dados : 37,5 y 0,2983.

Números preparados: 375 y 2,983.

El *duplo* del *divisor*, 5,966, solo tiene *una* cifra en su *parte entera;* de donde se sigue que el cociente solo puede valuarse *con menos de media unidad de error*, y que por consiguiente no puede contarse con la exactitud de *ninguna* cifra decimal.

367. Segundo caso.—Solo el divisor es *aproximativo*.

Llámemos tambien ahora A y B los dos números *enteros* dados, y designemos por m el número de cifras que componen el número B, el cual puede tener el *error* de media unidad (en *mas* ó en *menos*) y por q el cociente de la division de A por B, que se trata de calcular con un *número conveniente* de cifras decimales.

Se tiene evidentemente,

$$q \text{ ó } \frac{A}{B} < \frac{A}{B-\frac{1}{2}}, \quad \text{pero} > \frac{A}{B+\frac{1}{2}};$$

de donde llamando E el *error cometido*, cuando se toma bien sea $\frac{A}{B+\frac{1}{2}}$, bien sea $\frac{A}{B-\frac{1}{2}}$, por valor de q, se deduce

$$E < \frac{A}{B-\frac{1}{2}} - \frac{A}{B+\frac{1}{2}}, \quad \text{ó} \quad < \frac{A}{B^2-\frac{1}{4}}$$

(siendo esta segunda espresion el resultado de las operaciones *efectuadas* con la primera.)

Pero como tenemos

$$\frac{A}{B^2-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{A}{B}}{B-\frac{1}{4B}}=\frac{q}{B-\frac{1}{4B}},$$

es claro que el *error* será *menor* que la unidad de la *última* cifra del cociente, mientras se tenga $q<B$.

Ahora bien, para que esta condicion se cumpla, es necesario que q, ó sea la *parte buscada* del cociente, contenga Á LO MAS, m cifras (número de las cifras del divisor), y aun solo $(m-1)$ cifras, si las m cifras de dicho cociente, formasen un número *igual* ó *superior* al divisor.

De donde se sigue que, en el SEGUNDO CASO, *el grado de exactitud con que puede contarse para el cociente está marcado por el número,* m, *de las cifras del divisor, ó solamente por este* NÚMERO MENOS UNO, *segun que las* m *primeras cifras forman un número inferior*, ó bien *un número igual ó superior al divisor*.

PRIMER EJEMPLO.—Sea dividir 547, *valor exacto*, por 8769, número aproximativo.

Habiendo hecho ante todas cosas posible la division agregando un número conveniente de ceros á la derecha del dividendo, se reconoce á la simple inspeccion de los dos números, que la *primera* cifra del cociente, debe ser inferior, á la *primera* cifra, 8, del divisor, y que, por consiguiente, las *cuatro primeras* cifras del cociente formarán á su vez un número *menor* que el divisor.

Será pues permitido tomar para el cociente *cuatro* cifras; y como además este cociente no puede tener ni *unidades simples*, ni *décimas*, se hallará *exacto* hasta la *quinta* cifra decimal inclusive.

Así se obtiene el cociente 0,06237, aproximado hasta *cien milésimas*.

SEGUNDO EJEMPLO.—Números dados: 547 y 1548.

Siendo la *primera* cifra *significativa* del cociente valuado en decimales, necesariamente *mayor* que la *primera* cifra 1 del divisor, no pueden tomarse aquí mas que *tres* cifras; y como esta *primera cifra significativa*, espresa *décimas*, el resultado estará aproximado hasta *milésimas*.

368. Operemos ahora con *números decimales*.

Dividendo : 23,479; *Divisor* : 534,7896.

La division se reduce á la de los dos números

234790 y 5347896

(la cifra *errónea* del divisor debe quedar la *última* de la derecha).

Siendo la *primera* cifra *significativa* del cociente *menor* que la *primera* cifra, 5, del divisor, pueden tomarse *tantas* cifras como hay en el divisor, y por lo tanto el cociente que no tiene ni *unidades* simples ni *décimas*, puede valuarse con *ocho* cifras *decimales*.

Así se obtiene: 0,04390324 *con menos* de 0,00000001 de error; resultado que puede comprobarse tomando sucesivamente por divisor, sin cambiar el dividendo,

534,78955; 5347896; 53478965,

y aplicando el método abreviado de la division del n.º 356.

Advertencia.—Aconsejamos aplicar este método de *comprobacion* á los ejemplos tratados anteriormente.

369. Tercer caso.—El dividendo y divisor son ambos *aproximativos*.

Desde luego es evidente que en este caso, *el número de cifras del cociente con que es permitido contar, no puede ser mayor que el* menor *de los dos números* á que conducen las reglas establecidas para los dos casos primeros. Falta saber si este número *menor*, espresa siempre el verdadero número de cifras que han de componer el cociente buscado.

Sean dos números *enteros* A y B, que suponemos *erróneos* en sus últimas cifras de la derecha; y consideremos las hipótesis mas desfavorables, la de un dividendo A *inexacto* por *esceso*, y un dividendo B *inexacto* por *defecto*, ó la de A *inexacto* por *defecto* y B por *esceso*.

Puede asegurarse que el cociente $\frac{A}{B}$ está comprendido entre los dos números

$$\frac{A-\frac{1}{2}}{B+\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \frac{A+\frac{1}{2}}{B-\frac{1}{2}};$$

de donde se sigue que tomando una de estas espresiones por valor del cociente, se comete un *error menor* que la *diferencia* que existe entre ellas.

Si llamamos D esta diferencia espresada por

$$\frac{A+\frac{1}{2}}{B-\frac{1}{2}} - \frac{A-\frac{1}{2}}{B+\frac{1}{2}},$$

se halla, efectuando los cálculos y reduciendo,

$$D=\frac{A+B}{B^2-\frac{1}{4}},$$

ó dividiendo ambos términos por B,

$$D=\frac{A}{B}+1:B-\frac{1}{4B},$$

y por consiguiente,

$$D=\frac{A}{B}+1:B,$$

haciendo abstraccion de la pequeña fraccion $\frac{1}{4B}$.

Esta última espresion de D, es la que debe servir para hacer conocer si el *menor* de los dos números suministrados por las dos reglas precedentes es en efecto el *verdadero* número de cifras con que se debe contar en el cociente.

Hagamos algunas aplicaciones á números *enteros*, y despues á números *decimales*.

Primer ejemplo.—Sea dividir 67239 por 4657.

Segun la primera regla, podrian tomarse *tres* cifras decimales; pero la segunda *solo* puede dar *dos*; porque como la *parte entera* del cociente tiene *dos* cifras, solo quedan otras *dos* que determinar para formar las *cuatro primeras* cifras del mismo cociente, que entonces, hecha abstraccion de la vírgula, es *menor* que el divisor.

Solo puede por lo tanto calcularse el cociente con *dos* cifras decimales *á lo mas*, y se obtiene

$$14,43.$$

La espresion $\frac{A}{B}+1:B$ se convierte entonces en

$15,43:4657$, ó $\frac{1543}{465700}$, fraccion que, reducida *a* decimales dá 0,003....

Luego 14,43 espresa en efecto el cociente *con menos* de 0,01 de *error*.

Segundo ejemplo.—Sea dividir 359,3749 por 2,47936.

Para aplicar la primera regla, es necesario reducir (n.º 366) la division á la de los números 3593749 y 24793,6; y esta regla daria *cuatro* cifras decimales.

Conforme á la regla segunda, como el divisor tiene *seis* cifras, y la *parte entera* del cociente debe tener *tres*, solo quedan *tres* decimales que puedan tenerse por exactas.

No puede pues calcularse el cociente mas que hasta *milésimas*, y así se halla 143,736.

Como entonces se tiene $\frac{A}{B}+1:B\frac{144736}{247936000}=0,0005...,$

pueden tomarse con seguridad las *tres* cifras decimales.

Tercer ejemplo.—Sea dividir log. 15 por log. 7.

Segun las Tablas tenemos,

$$\log.\ 15=1,17609126,\quad \text{y}\quad \log.\ 7=0,84509804;$$

de donde

$$\frac{\log.\ 15}{\log.\ 7}=\frac{117609126}{84509804}.$$

:

La regla primera daria *ocho* cifras decimales que podrian contarse como exactas; pero la segunda solo daria *siete* porque el cociente debe tener *una* cifra en su *parte entera*.

Por consiguiente *á lo mas* solo pueden calcularse en el cociente *siete* cifras decimales; y así se obtiene el resultado 1,3916625.

$$\text{Además } \frac{A}{B}+1:B=\frac{23916625}{845098040000000}=0,00000002\ldots;$$

luego puede contarse con la exactitud de las *siete* primeras cifras decimales.

Cuarto ejemplo.—Sea determinar á x en la igualdad

$$3^x=1968 \text{ (véase el n.}^\circ\text{ 341).}$$

Por lo pronto tenemos

$$x\times\log.\ 3=\log.\ 1968;$$

de donde

$$x=\frac{\log.\ 1968}{\log.\ 3}=\frac{3,2940251}{0,47712125}.$$

Para aplicar la primera regla, es necesario poner la espresion de x bajo la forma

$$x=\frac{32940251}{4771212,5};$$

lo cual daria en el cociente *seis* cifras decimales.

Pero la segunda regla solo puede dar *cinco;* porque la cifra primera del cociente es 6, que además debe formar la *parte entera*.

No puede pues el cociente calcularse sino con *cinco* cifras decimales *á lo mas*.

Se halla por resultado 6,90395.

$$\text{Por consiguiente, } \frac{A}{B}+1:B=\frac{790395}{477121250000}=0,000001\ldots;$$

luego pueden tomarse las *cinco* primeras cifras decimales.

La tercera regla es, como se ve, la base de la resolucion de las ecuaciones *esponenciales,* por aproximacion.

Advertencia.—Ha podido observarse que en los diferentes ejemplos que acaban de tratarse, la *segunda* regla es la que determina el *verdadero* número de cifras que deben tomarse en el cociente.

Se concibe en efecto, que el *error* perteneciente al divisor debe ejercer mayor influencia en el resultado de la division que el perteneciente al dividendo.

Estraccion de la raiz cuadrada.

370. Para completar la teoría de los números *aproximativos*, nos falta todavía que tratar la estraccion de la raiz cuadrada de esa clase de números.

Pero antes es necesario establecer sobre la *multiplicacion de dos números* un nuevo principio que consiste en que:

El producto de dos factores enteros contiene tantas cifras ó tantas cifras menos UNA, segun los casos, *como hay en ambos factores;* de modo que si m y n espresan los números respectivos de las cifras de dos factores A y B, el número de cifras de su producto P es siempre igual á

$$m+n \quad \text{ó} \quad m+n-1.$$

En efecto, pudiendo el producto P ser considerado como dividendo y A y B como divisor y cociente de una division *exacta*, sucede una de dos cosas:

O las m primeras cifras de la izquierda de P forman un número *igual* ó *superior* á A.

O bien forman un número inferior á A.

En el ÚLTIMO CASO, puesto que sería necesario (n.° 36), para formar el *primer dividendo parcial*, tomar las $(m+1)$ *primeras* cifras de la izquierda del dividendo, lo cual daria la *primera* cifra del cociente, y como cada una de las $(n-1)$ otras cifras del mismo cociente es dada sucesivamente por cada una de las cifras del dividendo, colocadas á la derecha del primer dividendo parcial, se sigue necesariamente, que el *número total* de las cifras del dividendo, ó sea P, está espresado por

$$m+1+n-1, \quad \text{ó} \quad m+n.$$

En el CASO PRIMERO, como las *m primeras* cifras de la izquierda del dividendo, bastan para formar el primer dividendo parcial, el *número total* de las cifras del dividendo ó de P, es

$$m+n-1;$$

L. C. D. D.

Cuando A y B tienen el *mismo* número de cifras, n, la espresion del *número total* de las cifras de P, es $2n$ ó $2n-1$.

Advertencia.—Como en una multiplicacion que debe efectuarse, no puede saberse de antemano cuáles serán las *primeras cifras* de la *izquierda* del producto, tampoco puede decirse de antemano si el *número total* de las cifras del producto será $(m+n)$ ó $(m+n-1)$. En la division por el contrario, como es dado el dividendo-producto, el *número* de las cifras del *cociente* puede ser determinado *à priori*, segun hemos establecido en el n.° 37.

371. Sentado este principio, busquemos la *aproximacion* que puede obtenerse aplicando á los números *aproximativos* el procedimiento de la estraccion de la *raiz cuadrada.*

Consideremos primero un número *entero* cualquiera, A, cuya *última* cifra de la derecha, tenga el error de *menos de media unidad*, y concibamos que su raiz se ha desarrollado en un número *indefinido* de cifras decimales.

Llamemos n el *número* BUSCADO *de las cifras* de esta raiz que pueden juzgarse exactas, y p el *número* total de las cifras del CUADRADO, empleadas en la determinacion de estas n cifras, la *última* de las cuales se supone en error de *menos de media unidad.*

Pueden presentarse *dos* casos: ó el número de cifras de A es *impar* ó es *par.*

PRIMER CASO.—Como resulta de la naturaleza misma del procedimiento de la estraccion de la raiz cuadrada de un número entero (n.° 207), que las primeras cifras de la izquierda de la raiz forman, en este caso, un número *menor* que las n primeras cifras de la izquierda del cuadrado, se tiene necesariamente (n.° 370)

$$p=n+n-1,$$

ó bien, designando por p' el número de las cifras de A, dadas *à priori*, y por p'' el número de los *ceros* escritos á la derecha de A para la determinacion de las n primeras cifras de la raiz

$$p'+p''=n+n-1.$$

Observemos ahora que multiplicando por sí mismo, el número formado por las n cifras *tomadas para* la raiz se obtiene un producto que contiene n cifras con las cuales no se puede contar (n.º 362, segunda observacion.)

Por otro lado, el *número* de las cifras *inexactas* de este mismo producto está espresado por $p''+1$, puesto que la última cifra de A, por hipótesis es *inexacta*, y que por consiguiente los p'' ceros escritos á la derecha de A, tampoco son seguros.

Así pues tenemos

$$n'=p''+1;$$

y la igualdad precedente se convierte en

$$p'+p''=p''+1+n-1;$$

de donde

$$n=p'.$$

SEGUNDO CASO.—Como las n primeras cifras de la izquierda de la raiz forman entonces un número *mayor* que las n primeras cifras de la izquierda del cuadrado, se tiene entre p y n la relacion

$$p=n+n,$$

ó reemplazando p por $p'+p''$, y observando que n y $p''+1$ son, como en el primer caso, dos espresiones *equivalentes* del número de las cifras inexactas del cuadrado del número formado por las n cifras *tomadas como raiz*, se obtiene la igualdad

$$p'+p''=p''+1+n;$$

de donde

$$n=p'-1.$$

Luego, el *número de cifras con que puede contarse*, en el desarrollo de la raiz cuadrada del número entero A en *decimales, es igual al número de las cifras de* A, ó á *este mismo número menos* UNA, segun que A contiene un número IMPAR, ó un número PAR de cifras.

Advertencia.—Esta regla no sufre modificacion alguna mientras el número de las cifras de A es *impar*.

Pero si dicho número es *par*, se demuestra que, en ciertos casos determinados, puede contarse con un número de cifras igual al *número mismo* de las cifras de A, es decir, *mayor en una unidad* que el número dado por la regla.

Nos reducimos á mencionar este hecho cuya demostracion exige transformaciones *algebráicas* bastante complicadas y que por otra parte no tiene importancia para el objeto que aquí nos proponemos.

372. Primer ejemplo.—*Sea estraer la raiz cuadrada* del número *aproximativo* 57806.

Como este número tiene *cinco* cifras, su raiz puede calcularse tambien con *cinco;* y como la *parte entera* debe tener *tres*, resulta que la raiz solo puede obtenerse con *menos de* 0,01 *de error*.

Así se obtiene

$$\sqrt{57806}=240,428=240,43.$$

Segundo ejemplo.—*Estraer la raiz cuadrada* de 73854926.

La raiz, segun la regla, puede calcularse con *siete* cifras; y como la *parte entera* debe tener *cuatro*, puede contarse con las *tres* primeras decimales.

Tendremos pues,

$$\sqrt{73854926}=8593,889.$$

Operemos ahora con fracciones decimales.

Tercer ejemplo.—*Calcular* $\sqrt{8,256479}$.

Haciendo abstraccion de la vírgula, tenemos el número 8256479 cuya raiz segun la regla, puede calcularse con *siete* cifras, y como la parte entera de dicha raiz solo debe tener *una*, se sigue que la raiz puede valuarse con *seis* decimales.

Así hallaremos

$$\sqrt{8,256479}=2,873409.$$

Cuarto ejemplo.—*Calcular* $\sqrt{473,56296}$.

Para efectuar la operacion, se comienza por hacer *par* el número de cifras decimales (n.° 218) colocando un 0 á la derecha del número propuesto, y despues se suprime la vírgula.

Pero como el número propuesto tiene *ocho* cifras, la raiz, segun la regla debe tener *siete* con las que se puede contar.

Además, la *parte entera* tiene *dos*; luego esta raiz puede obtenerse con *cinco* decimales, ó sea con *menos* de 0,00001 de *error*.

Así se encuentra

$$\sqrt{473,59296} = 21,76150.$$

373. *Observacion.*—Resulta evidentemente de la regla del n.° 371, y de los dos últimos ejemplos acabados de tratar, que *siempre que el número propuesto es* MAYOR *que la unidad, pueden tomarse en la raiz, al* MENOS *tantos decimales como hay en él.*

Pero, *cuando el número propuesto es* MENOR *que la unidad, ó tiene* CERO *por* PARTE ENTERA, *el número de los decimales de la raiz, con que se puede contar,* PUEDE *ser* MENOR *que el de los decimales del número dado.*

EJEMPLOS. — 1.° — Sea calcular $\sqrt{0,238946}$.

Segun la regla, puede contarse con *cinco* cifras en la raiz; y como la parte entera debe ser 0, el número de *decimales* con que puede contarse, es tambien *cinco*, es decir, *una* menos de los que tiene el número propuesto.

2.°—*Sea estraer la raiz cuadrada de* 0,00291.

Como este número no debe dar en su raiz mas que tres cifras exactas, á saber, 53,9, y como es necesario dividir este resultado por 1000, la raiz es

$$0,0539,$$

y contiene *un* decimal *menos* que el número dado.

VALUACION APROXIMADA DE LOS RADICALES CUADRADOS SUPERPUESTOS.

374. Para esta clase de espresiones es principalmente para las que tiene una aplicacion verdaderamente *útil* la primera parte de la observacion precedente.

PRIMER EJEMPLO.—Se quiere valuar

$$\sqrt[4]{659} \quad \text{ó (n.° 241)} \quad \sqrt{\sqrt{659}},$$

con *tres* decimales en el resultado.

Conforme á la regla del n.º 217, deberíamos colocar á la derecha del número dado, bien sea de una vez, bien por períodos de á dos, *doce* ceros, á fin de obtener primero *seis* cifras decimales, para la *primera* raiz cuadrada, y luego *tres* para la *segunda*.

Pero vamos á ver que esto es inútil.

En efecto, si estraemos la raiz cuadrada de 659 con menos de $\frac{1}{2}$ *milésima* de error (n.º 216), se obtiene

$$25{,}671,$$

número que tiene esa aproximacion *por esceso*.

Aplicándole la regla del n.º 371, y la observacion del n.º 373, tendremos para la *segunda* raiz,

$$5{,}066.$$

Este último valor tiene la aproximacion hasta faltarle *menos* de 0,001, como podemos asegurarnos formando su cuarta potencia; y entonces se reconoceria tambien que el error es *por defecto*; porque se hallaria

$$(5{,}066)^4 = 658{,}659...$$

Segundo ejemplo.—*Valuar* $\sqrt{13+\sqrt{5}}$, aproximado hasta *diez milésimas*.

Tenemos por el pronto

$$\sqrt{5} = 2{,}2361,$$

valor aproximado hasta $\frac{1}{2}$ *diez milésima* en *mas*.

Añadiendo 13 á este resultado, lo cual dá 15,2361, cuya raiz puede calcularse (n.º 363) con *cuatro* cifras decimales, se obtiene

$$\sqrt{13+\sqrt{5}} = \sqrt{15{,}2361} = 3{,}9034.$$

Este resultado es *exacto* en menos de 0,0001; pero no se puede saber si el error es en *mas* ó en *menos*, sino formando el cuadrado de 3,9034; habiéndose de antemano comprobado el resultado de la *primera* raiz.

Como $(3,9034)^2 = 15,2365\ldots$, debe concluirse que el error de 3,9034 es por *escèso*.

375. Suponiendo la regla del n.° 371 que la *primera* raiz cuadrada se ha obtenido con *menos* error que *media unidad* de cierto órden decimal, y no dando en la *segunda* raiz que ha de estraerse, más que una aproximacion de *menos de una unidad* del mismo órden, se concibe que el procedimiento que debe seguirse cuando se tienen *tres* radicales superpuestos $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}}}$, debe sufrir algunas *modificaciones*, pues de lo contrario no se obtendria el *grado de aproximacion* deseada.

Para esplicarnos mejor, tomemos por ejemplo $\sqrt[8]{23}$ ó $\sqrt{\sqrt{\sqrt{23}}}$, cuyo valor se pide con menos de 0,0001 de *error*.

Si quisiéramos aplicar el procedimiento general del n.° 217, deberíamos poner *treinta y dos* ceros á continuacion del 23, y despues estraer en la forma ordinaria *tres* raices cuadradas sucesivas.

Pero la regla del n.° 371 conduce al *mismo* resultado con mayor prontitud de la manera siguiente:

Busquemos lo primero la *raiz cuadrada* de 23, *no con cuatro* sino con *cinco* cifras decimales.

Resulta

$\sqrt{23} = 4,79583$, con *menos* de $\frac{1}{2}\,0,00001$ de *error;* de donde se deduce en seguida

$\sqrt{4,79583} = 2,18993$, con *menos* de 0,00001 de *error*, y por consiguiente

$\sqrt{4,79583} = 2,1899$, con *menos* de $\frac{1}{2}\,0,00001$ de *error;* despues de lo cual se obtiene

$\sqrt{2,1899} = 1,4798$, con *menos* de 0,0001 de *error* (n.° 371).

En efecto, por medio de los logaritmos, hallamos

$$\log.\ \sqrt[8]{23} = \frac{1}{8}\log.\ 23 = 0,1702159 = \log.\ 1,4798.$$

Toda la *modificacion* consiste en *tomar* la primera raiz con *una cifra mas* de las que se piden en el resultado final.

Si hubieran de calcularse *cuatro* radicales superpuestos, convendria calcular la *primera* raiz cuadrada con *dos* cifras decimales mas de las que se quisieran en el resultado.

Y así sucesivamente.

Tomemos por último ejemplo la espresion

$$\sqrt{29+\sqrt{15-\sqrt{7}}},$$

cuyo valor tratamos de hallar con *menos* de 0,001 de *error*.

Tendremos por lo pronto

$\sqrt{7}=2,6458$ con *menos* de $\frac{1}{2}$ 0,0001 de *error en mas*, de donde

$$15-\sqrt{7}=15-2,6458=12,3542,$$

con menos de $\frac{1}{2}$ 0,0001 de *error en menos*,

y

$$\sqrt{12,3542}=3,5147=3,515,$$

con menos de $\frac{1}{2}$ 0,001 de *error en mas*,

$$29+\sqrt{15-\sqrt{7}},=32515,$$

con *menos* de $\frac{1}{2}$ 0,001 de *error en mas*.

Luego finalmente

$$\sqrt{29+\sqrt{15-\sqrt{7}}}=5,702,$$

con *menos* de 0,001 de *error*.

Advertencia.—En un procedimiento semejante se funda la determinacion de la *razon de la circunferencia al diámetro*, cuando se emplea el *método de los isoperímetros*.

NOTAS.

NOTA I.

DE LOS DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERACION.

Definicion y principio de la numeracion.

1. Hemos visto cómo pueden representarse todos los números, con *diez* caractéres, *cifras* ó *guarismos*, partiendo del PRINCIPIO DE CONVENCION: que toda cifra colocada á la izquierda de otra, espresa unidades *diez veces mayores* que las de esta.

Fácil es reconocer que, en todo sistema *análogo* de numeracion en que se haga uso de caractéres colocados unos á la izquierda de los otros y sujetos á la condicion convencional de recibir *valores relativos*, se podrán representar igualmente todos los números, con *mas* ó con *menos* de diez guarismos, contando siempre con el CERO.

Se llama BASE de un sistema de numeracion el número de los caractéres en él empleados; y el sistema recibe la denominacion de

binario, *ternario*, *cuaternario*, *quinario*,...,

segun que las cifras empleadas son

dos, *tres*, *cuatro*, *cinco*,....

Esas cifras son respectivamente:

1 y 0,   1, 2 y 0,   1, 2, 3 y 0,   1, 2, 3, 4 y 0,...,

es decir, las del sistema *decimal* desde cero hasta la cifra que precede inmediatamente á la BASE mientras esta base es *inferior* á DIEZ.

Pero si la BASE es *superior* á DIEZ, y es DOCE por ejemplo (en cuyo caso el sistema se llama *duodecimal*), es necesario recurrir á dos signos suplementarios para espresar los números

diez y *once*,

lo cual puede hacerse por medio de las letras griegas

α y β.

Medio de escribir todos los números en un sistema cualquiera.

2. Veamos ahora cómo *pueden espresarse todos los números enteros posibles* en el sistema *septenario*, por ejemplo, con las *siete* cifras

1, 2, 3, 4, 5, 6, 0,

Observemos por lo pronto que, en este sistema, el PRINCIPIO DE CONVENCION consiste en que *toda cifra colocada á la izquierda de otra espresa unidades* SIETE *veces mayores que las de esta otra.*

Esto supuesto, los *seis primeros números*, representados por las seis cifras significativas del sistema, forman lo que se llama las unidades de *primer órden.*

Añadiendo 1 al n.° 6, obtenemos *siete*, ó sea la unidad de *segundo órden*, que se escribe

10,

en virtud del *principio de convencion.*

Si reemplazamos en 10 la cifra 0 sucesivamente por las *seis* cifras *significativas*, tendremos

11, 12, 13, 14, 15, 16,

que representan los números

ocho, nueve, diez, once, doce, trece.

La adicion de una nueva *unidad* al número 16, dá una *se-*

gunda unidad de *segundo* órden que se agrega á la *primera* espresada por 10, y así se obtiene

$$20,$$

para representar el número CATORCE (ó sea 2 veces *siete*).

Continuando de la misma manera, obtendremos la série

$$21, \quad 22,\ldots, \quad 26, \quad 30,\ldots, \quad 36, \ 40,\ldots, \ 50,\ldots,$$

para espresar los números

quince, diez y seis,..., veinte, veinte y uno,..., veinte y siete, veinte y ocho,..., treinta y cinco,....

Pero sin ir mas lejos, podemos demostrar fácilmente que, suponiendo escrito en cifras un número entero cualquiera, tambien puede escribirse por medio de las *siete* cifras del sistema, el número inmediatamente *superior en una unidad.*

En efecto, cualquiera que sea el número *ya escrito*, si *añadimos* UNO á su *ultima* cifra de la *derecha*, se presentan dos casos:

O esta última cifra es *inferior* á 6, y entonces se la reemplaza por la cifra que viene *inmediatamente despues*, en el sistema, sin tocar á las otras cifras de la izquierda;

O bien, dicha *última* cifra es 6, y agregándole *una unidad*, se obtiene *siete*, ó sea una unidad de *segundo órden*, que debe agregarse á la cifra inmediata de la *izquierda*, poniendo un 0 en vez de la cifra 6.

Pero como la *cifra de la izquierda* puede á su vez ser *inferior* ó *igual* á 6, seremos conducidos, por un razonamiento análogo, á reemplazarla, bien sea por la cifra inmediatamente superior, bien sea por un 0, debiendo en este segundo caso agregar una unidad de *tercer órden* á la *segunda cifra de la izquierda.*

Del mismo modo se razonaria y se procederia con *esta segunda cifra de la izquierda*, despues con la *tercera*, y así sucesivamente.

Luego, etc.

Y como podriamos aplicar á cualquiera otro sistema razonamientos enteramente análogos, concluimos, que *todo nú-*

mero entero, puede escribirse en un sistema cualquiera con los caractéres en número LIMITADO *que le componen.*

Espresiones de las unidades de diferentes órdenes y fórmula general para representar un número cualquiera.

3. El principio de convencion consistente en que, en todo sistema cuya BASE (ó el *número* de cifras empleadas) es b, cada cifra colocada á la izquierda de otra, espresa unidades b veces *mayores* que las de esta, conduce á las dos proposiciones siguientes:

PRIMERAMENTE *las unidades de diferentes órdenes* á partir del *primero*, ó, en otros términos la *unidad* simple y todas las potencias de la base, están espresadas, en todos los sistemas, por

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ 100000 \ldots$$

EN SEGUNDO LUGAR, si designamos respectivamente por

$$a',\ a'',\ a''',\ a^{\text{IV}},\ a^{\text{V}},\ldots,$$

los números de *unidades* del

$$1.^{\circ},\ 2.^{\circ},\ 3.^{\circ},\ 4.^{\circ},\ 5.^{\circ},\ldots,\ \text{órden},$$

que debe contener un número cualquiera N en un sistema cuya base es b (la cual es necesariamente *mayor* que a', a'', a''', a^{IV}, a^{V},...), tendremos para representar en *cifras* el número N, la fórmula

$$\text{(A)} \quad N = a' + a''.b + a'''.b^2 + a^{\text{IV}}.b^3 + a^{\text{V}}.b^4 + \ldots.$$

Porque la cifra a'', por ejemplo, que en el número escrito

$$(\ldots a^{\text{IV}},\ a'''\ a''\ a'),$$

está colocada á la *izquierda* de a', espresa, segun el principio de convencion, unidades b veces *mayores* que las de la cifra a'.

Del mismo modo, la cifra a''' escrita á la *izquierda* de las otras dos, a'', a', espresa unidades b veces *mayores* que las de la cifra a'', por consiguiente, unidades $b \times b$ ó b^2 veces *mayores* que las de la cifra a'; y así sucesivamente.

Escribir, en un sistema dado, un número enunciado en lenguaje ordinario ó escrito en otro sistema, é INVERSAMENTE, *enunciar en lenguaje ordinario un número escrito en cifras en un sistema cualquiera.*

4. La concordancia que existe entre la nomenclatura *actual* de los números y la manera de representarlos en el sistema *decimal* permite escribirlos fácilmente, y por decirlo así, al dictado en lenguaje ordinario, como tambien resolver la cuestion inversa que consiste en enunciar en lenguaje ordinario un número escrito en guarismos.

Lo mismo sucederia en cualquier otro sistema de numeracion que estuviera acompañado de una *nomenclatura especial* y apropiada.

Pero si nos propusiéramos, por ejemplo, escribir en el sistema *septenario* el número

TRESCIENTOS SETENTA Y NUEVE,

referido al sistema *decimal*, sería difícil reconocer *à priori* cuáles son las cifras propias para espresar sucesivamente las unidades del 1.°, 2.°, 3.°,... órden septenario que el número dado contiene.

Esta consideracion nos conduce á resolver la cuestion siguiente:

Estando un número enunciado en lenguaje ordinario ó escrito en cifras en el sistema decimal traducirle en el sistema de b *cifras.*

La fórmula (A) del n.° 3, suministra un medio sencillo de resolver esta cuestion, es decir, de determinar sucesivamente las cifras a', a'', a''',....

En efecto, puede transformarse así:

$$N = a' + b\,(a'' + a'''.b + a''''.b^2 + a^{\mathrm{v}}.b^3 + \ldots),$$

ó bien

$$N = a' + b.N' \text{ (representando } N' \text{ el número } a'' + a'''.b + \ldots);$$

lo cual prueba que N es igual al *producto* de la multiplicacion de un número N′ por b *aumentado* en un número $a' < b$.

Luego ya con esto vemos que a' es el *resíduo* de la division de N por b, *base* del segundo sistema.

Análogamente, la nueva fórmula

$$N' = a'' + a'''.b + a^{\text{IV}}.b^2 + a^{\text{V}}.b^3 + \ldots$$

puede ponerse bajo la forma

$N' = a'' + b.N''$ (representando N″ el núm. $a''' + a^{\text{IV}}.b + \ldots$),

donde se ve, á causa de ser $a'' < b$, que a'' es el resíduo de la division de N′ por b; y así sucesivamente.

De aquí se deduce la siguiente REGLA GENERAL:

Para obtener las cifras del 1.°, 2.°, 3.°,... órden del número N en el sistema cuya base es b,

Divídase N por la base b (suponiendo 0 á los números escritos en el sistema *decimal*); así se obtiene un cociente N′, y un *resíduo* que espresa el *número* de unidades de *primer órden*;

Divídase en seguida el cociente obtenido N′, por b; lo cual dá un segundo cociente N″, y un *resíduo* que espresa el *número* de unidades del *segundo órden*;

Divídase el segundo cociente N″ por b; y se obtendrá un tercer cociente N‴, y un *resíduo* que esprese las unidades de *tercer órden*;

Continúese esta série de operaciones hasta llegar á un cociente MENOR QUE b; este *último cociente* espresa el *número* de unidades del *órden mas elevado*, y el *resíduo* correspondiente es la cifra de las unidades del *órden inmediatamente inferior*;

Por último, *escríbanse* los diferentes *resíduos* unos á la izquierda de otros, empezando por el *primero* obtenido, y poniendo á la izquierda del *último resíduo* así escrito, el *último cociente* obtenido.

Volvamos ahora al número

Trescientos setenta y nueve, ó mas bien, 379, escrito en el sistema decimal:

La 7.ª parte de 379 es 54, y el resíduo 1;
La 7.ª parte de 54 es 7, y el resíduo 5;
La 7.ª parte de 7 es 1, y el resíduo 0.

Así encontramos que el número dado escrito en el sistema *septenario*, será

1051.

Propongámonos ahora escribir en el sistema *quinario* el número

2374.

La 5.ª parte de 2374 es 474, el resíduo 4;
La 5.ª parte de 474 es 94, el resíduo 4;
La 5.ª parte de 94 es 18, el resíduo 4;
La 5.ª parte de 18 es 3, el resíduo 3.

Luego el número buscado es

33444.

Tomemos por último ejemplo el número

17549,

que se quiere escribir en el sistema *duodecimal*, cuyas cifras están espresadas por 0, 1, 2, 3,... 9, α y β:

La 12.ª parte de 17549 es 1462; el resíduo 5;
La 12.ª parte de 1462 es 121; el resíduo 10, ó α;
La 12.ª parte de 121 es 10 ó α, y el resíduo 1.

Luego el número buscado será

$\alpha 1 \alpha 5$.

Fácilmente pueden comprobarse estos resultados resolviendo la cuestion *inversa* que tiene por objeto:

Estando un número escrito en un sistema cuya base es b, *traducirle al sistema decimal.*

La solucion de esta cuestion se halla *esplícitamente* contenida en la fórmula (A) del n.º 3.

Multiplíquense las cifras a', a'', a''',... traducidas al sistema *decimal* respectivamente *por las potencias* 1 (ó b^0), b^1, b^2, b^3, b^4,..., de la base b, tambien traducida al sistema

:

decimal, y *hágase* despues la *suma* de todos los productos; Así se obtiene el número buscado.

Tendremos pues para el *primer* ejemplo:

$$1051=1+5\times7+0\times7^2+1\times7^3=1+35+0+343=379;$$

para el *segundo*

$$\begin{aligned}33444&=4+4\times5+4\times25+3\times125+3\times625\\&=4+20+100+375+1875=2374;\end{aligned}$$

y para el *tercero*

$$\begin{aligned}\alpha1\alpha5&=5+10\times12+1\times144+10\times1728\\&=5+120+144+17280=17549.\end{aligned}$$

6. Finalmente, se puede proponer esta cuestion general: *Estando un número cualquiera escrito en el sistema cuya base es* b, *traducirle al sistema cuya base es* c.

El medio mas sencillo de resolver esta cuestion, consiste en *pasar primero* del sistema *b* al sistema *decimal*, y despues *traducir el número así obtenido* al sistema *c*.

Ejemplo.—Sea traducir al sistema *cuaternario* el número 2607α escrito en el sistema duodecimal.

Tendremos primero (n.° 5, Nota)

$$\begin{aligned}2607\alpha&=10+7\times12+0\times144+11\times1728+2\times20736\\&=10+84+0+19008+41472=60574.\end{aligned}$$

Para pasar de este número al sistema *cuaternario* se dice:

La 4.ª	parte de	60574	es	15143,	el resíduo	2;
La 4.ª	parte de	15143	es	3785,	el resíduo	3;
La 4.ª	parte de	3785	es	946,	el resíduo	1;
La 4.ª	parte de	946	es	236,	el resíduo	2;
La 4.ª	parte de	236	es	59,	el resíduo	0;
La 4.ª	parte de	59	es	14,	el resíduo	3;
La 4.ª	parte de	14	es	3,	el resíduo	2.

Luego el número pedido es

32302132,

resultado que puede comprobarse por la cuestion *inversa*, es decir, volviendo del sistema *cuaternario* al sistema *duodecimal*.

Advertencia.—Podria resolverse directamente la cuestion anterior, operando para ejecutar la transformacion exigida en el sistema *duodecimal*.

La dificultad de esta manera de proceder, proviene de la desconformidad que existe entre la numeracion *escrita* del sistema *duodecimal*, y la numeracion *hablada* generalmente admitida.

7. OBSERVACION GENERAL.—Las propiedades de los números son, en su mayor parte independientes del sistema de numeracion, y las que parecen peculiares del sistema decimal, tienen generalmente sus análogas en los otros sistemas.

Vamos á indicar algunas aplicaciones de esta observacion.

Números que tienen propiedades análogas á las de los números 9 y 11.

8. Siendo en un sistema cualquiera cuya base es b, $b-1$ y $b+1$ los números correspondientes á los números 9 y 11 del sistema *decimal*, se demuestra

1.° Que *cuando las sumas de las cifras de un número cualquiera consideradas con su valor absoluto, es divisible por* $b-1$, *el número dado es tambien divisible por* $b-1$;

2.° Que *un número cualquiera es divisible por* $b+1$, *cuando la* DIFERENCIA *entre la suma de las cifras de lugar* IMPAR, *empezando por la derecha, y la suma de las cifras de lugar* PAR, *es* 0 *ó múltiplo de* $b+1$.

3.° Y que *el resíduo de la division de un número por cada uno de los dos números particulares* $b-1$ y $b+1$, *se obtiene*, PARA EL PRIMERO, *por medio de la suma de las cifras tomadas con su valor absoluto*, y PARA EL SEGUNDO, *por medio de la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y de la de las cifras de lugar par.*

Nos reducimos á *enunciar* estas propiedades, cuya demostracion aconsejamos como ejercicio, haciendo observar, que se deduce fácilmente de la proposicion establecida en el n.° 3 de la Nota, á saber: que cualquiera que sea el sistema de numeracion, *todas las potencias* de la base pueden estar espresadas por la série de los números escritos en este sistema:

$$10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5,\dots$$

El ÁLGEBRA suministra todavía otro medio de demostracion fundada en este doble principio:

1.° Que b^m-1 es siempre divisible por $b-1$; y es divisible por $b+1$ cuando m es *par;*

2.° Que b^m+1 es divisible por $b+1$ cuando m es *impar.*

De las fracciones análogas á las fracciones decimales.

9. Las fracciones que gozan, en un sistema cualquiera de numeracion, de propiedades análogas á las procedentes de la conversion de las *fracciones ordinarias* en *fracciones decimales*, son aquellas cuyo denominador es igual á una *potencia* de la BASE del sistema.

Resulta en efecto de la espresion (n.° 3, Nota) de las diversas potencias de la base de un sistema cualquiera, que, para convertir una fraccion ordinaria perteneciente á dicho sistema, en otra fraccion formada por subdivisiones de b en b veces menores que la unidad, es necesario, conforme á la regla del n.° 136, *multiplicar* el numerador *por b* ó 10 (*es decir, escribir un* cero á su derecha), *y dividir el producto por el denominador*, lo cual daria en el cociente unidades b veces menores que la unidad principal, y un *resíduo; escribir* igualmente *á la derecha* de este resíduo *un cero y dividir el resultado por el denominador*, lo cual daria en el cociente unidades b veces menores que las precedentes ó b^2 veces menores que la unidad principal; y así sucesivamente.

Sentado este principio, se deduce de él, por medio de razonamientos absolutamente semejantes á los que han servido para establecer las propiedades de las *fracciones decimales* procedentes de las *fracciones ordinarias*, que las *fracciones ordinarias*, *en un sistema cuya base es* b, *cuando se convierten en subdivisiones de* b *en* b *veces menores que la unidad, dán orígen á fracciones de un número* LIMITADO *ó* ILIMITADO *de cifras* PERIÓDICAS PURAS *ó* MISTAS, y que *la composicion del denominador de la fraccion ordinaria con relacion á los* FACTORES QUE ENTRAN EN LA BASE b, *basta para* CARACTERIZAR *esas diversas clases de fracciones.*

Proponemos tambien para ejercicio, el investigar los enunciados y las demostraciones de estas propiedades.

NOTA II.

PROCEDIMIENTO PARTICULAR PARA CALCULAR EL VALOR DE c EN LA FÓRMULA $c=\sqrt{a^2+b^2}$, SIN ESTRACCION DE RAIZ CUADRADA; EN OTROS TÉRMINOS, PARA CALCULAR LA HIPOTENUSA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO, CONOCIENDO LOS VALORES NUMÉRICOS DE LOS CATETOS.

1. Comenzarémos por desarrollar el procedimiento (*) en ejemplos particulares; y despues esplicaremos las consideraciones en que puede fundarse.

(En todos los ejemplos que vamos á tratar, solo formaremos el *cuadrado* del número *menor;* despues efectuaremos la *division* de este cuadrado por el *duplo* del número *mayor*).

Primer ejemplo.

Calcular la espresion $c=\sqrt{(47)^2+(249)^2}$.

47		2209	498
47		201	4
329			
188	249+4 es la *raiz pedida;*		
2209	y 201 es el *resíduo* de la operacion.		

Esplicacion.—Despues de haber obtenido el cociente 4 de la division de 2209, *cuadrado* de 47, por 498 *duplo* de 249, se multiplica el divisor 498 por 4, *teniendo cuidado de añadir al producto el cuadrado* de 4, y despues se sustrae del dividendo el resultado.

Así se halla por *resíduo* 201.

La *parte entera* de la *raiz pedida* es entonces el número *mayor* 249, *aumentado* en el cociente 4, ó sea, 253;

(*) Este procedimiento nos ha sido comunicado por el jóven GRANDEMANGE, del cual hemos hablado ya en el Capítulo VIII (véase la nota del n.º 347). Pero la dificultad que éste encuentra en esponer sus ideas usando el lenguaje ordinario de la ciencia, no nos ha permitido descubrir las consideraciones que se lo han inspirado.

Y 201 es el *resíduo* de la operacion efectuada por medio del procedimiento ordinario de la estraccion de la raiz cuadrada.

Segundo ejemplo.

$$c = \sqrt{(539)^2 + (6847)^2}.$$

539	290521	13694	6847
539	16241	2	20
4851	2506	13734	1
1617		1	6868 *raiz pedida.*
2695			
290521			

Resíduo de la estraccion de la raiz cuadrada, 2506.

Esplicacion.—En este ejemplo hay que efectuar *dos* divisiones parciales.

El primer cociente, 2, espresa *decenas*, y se coloca debajo de las *decenas* del divisor: despues se efectúa la multiplicacion de dicho divisor por 2, cuidando de *añadir el cuadrado* de 2 al producto de las *decenas* por 2, al mismo tiempo que las unidades que se *lleven* del producto precedente (aquí son 0); y se resta en seguida el resultado del primer dividendo parcial.

Así se obtiene por segundo dividendo parcial 16241.

En cuanto al divisor correspondiente, ya no es 13694 el que debe tomarse, sino este divisor *aumentado* en el *duplo* de las dos decenas del cociente, lo cual dá 13734; y por este se divide el nuevo dividendo 16241.

El nuevo cociente es 1, que se coloca en el lugar de las *unidades simples* bajo el nuevo divisor. Multiplicando 13734 por 1 y *añadiendo* al producto el cuadrado de 1, se resta el resultado 13735 de 16241, y se obtiene por resíduo 2506.

Este 2506 es el *resíduo* final de la estraccion de la raiz.

La raiz es igual al número *mayor* 6847, aumentado en 20+1, es decir, á 6868.

Advertencia.—Tambien se obtendria la raiz *añadiendo* al último divisor 13734, el duplo del último cociente 1, lo cual daria 13736, y tomando la *mitad* de este último número.

Tercer ejemplo.

$$c = \sqrt{(529)^2 + (947)^2}.$$

529	279841	1894	
529	8044	1	947
4761	16721	2094	100
1058	1594	3	30
2645		2154	7
279841		7	1084 *raiz buscada.*

Resíduo final de la raiz 1594.

Aquí tenemos que ejecutar tres operaciones parciales, pero siguiendo siempre la marcha indicada en los ejemplos anteriores.

El cuadro arriba puesto lo esplica todo suficientemente.

2. *Demostracion.* — A falta de razonamientos puramente *aritméticos*, podemos apoyarnos para la justificacion de este procedimiento en la fórmula algebráica que dá la espresion del *cuadrado de la suma* de varios números.

Sean $m, n, p, \ldots$ los diferentes números dados, tendremos

$$(m+n+p+q+\ldots)^2 = m^2+n^2+p^2+q^2+\ldots$$
$$+2(mn+mp+mq+\ldots+np+\ldots);$$

es decir, que el CUADRADO DE LA SUMA *de varios números es igual á la* SUMA DE LOS CUADRADOS *de dichos números*, mas *el duplo de* LA SUMA DE TODOS LOS PRODUCTOS *de los mismos números multiplicados de dos en dos.*

Esto supuesto, volvamos á la espresion

$$c = \sqrt{a^2+b^2},$$

en la cual supondremos para fijar las ideas $b > a$.

Si designamos por y la cantidad que debe añadirse á b para obtener la *parte entera* c' de la *raiz buscada*, y por r el *resíduo* de la operacion, tendremos

$$c' = b + y, \quad c^2 = (b+y)^2 + r.$$

Tenemos además

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

luego, igualando estos dos valores de c^2, hallaremos

$$(b+y)^2 + r \quad \text{ó} \quad b^2 + 2by + y^2 + r = a^2 + b^2;$$

de donde, simplificando é invirtiendo el órden de los miembros

$$(1) \qquad a^2 = 2by + y^2 + r.$$

Esta última igualdad puede ponerse bajo la forma

$$\frac{a^2}{2b} = y + \frac{y^2}{2b} + \frac{r}{2b},$$

lo cual nos conduce ya, para obtener el valor de y, á dividir a^2 por $2b$, ó sea el *cuadrado* del número menor a por el *duplo* del mayor b.

Pero resulta tambien de la igualdad (1), que equivale á

$$(2) \qquad a^2 - (2by + y^2) = r,$$

que el cociente y que se ha obtenido, dividiendo a^2 por $2b$, no estará *convenientemente* determinado sino en cuanto se haya podido restar de a^2 la *suma* que formaria el producto del divisor $2b$ por el mismo cociente, y el cuadrado del cociente; en cuyo caso, el resto de la sustraccion será precisamente el residuo r procedente de la aplicacion del procedimiento ordinario de la estraccion de la raiz cuadrada, y la *parte entera* de esta raiz, c', tendrá por valor $b + y$.

Para llegar á esta determinacion del verdadero valor de y, es necesario distinguir varios casos, segun que y debe tener *una*, *dos*, *tres*, *cuatro*,..., cifras.

Examinemos estos casos sucesivamente.

Primer caso.—y *solo tiene* una *cifra*.

El primer ejemplo del número precedente se encuentra en este caso; y hemos visto que el cociente 4 resultante de la division de 2209 por 498, era tal que hemos podido restar del dividendo, no solamente el producto del divisor por 4, sino tambien el cuadrado de 4.

Advertencia.—Sucede muchas veces que, en este primer caso, hay necesidad de rebajar *una* ó *mas* unidades al cociente obtenido.

Sea por ejemplo calcular $c=\sqrt{(37)^2+(73)^2}$.

$$37\times 37=1369 \qquad \begin{array}{r|l} 1369 & 146 \\ \hline 147 & 8 \end{array} \quad 73+8=81 \textit{ raiz pedida.}$$

Dividiendo 1369 por 146, hallamos desde luego 9 por cociente; pero si, al producto de 146 por 9, ó 1314, añadimos 81, *cuadrado* de 9, tenemos 1395, número *mayor* que el dividendo; por consiguiente es necesario ensayar el 8.

El producto de 146 por 8, aumentado en 64, *cuadrado* de 8, dá un número que *puede restarse* de 1369.

Luego la cifra 8 debe tomarse por valor de y, y se tendrá $73+8$ ú 81, que será la raiz pedida, siendo 147 el *resíduo* que se habria obtenido efectuando la estraccion de la raiz cuadrada.

Esta observacion debe tambien aplicarse á los casos restantes, que vamos á examinar.

SEGUNDO CASO.—*Estando* y *espresado por* DOS *cifras*, pongamos $y=y'+y''$, siendo y' la cifra de las *decenas* considerada con su valor relativo, é y'' la cifra de las *unidades simples*.

La fórmula (1) se convierte en

$$a^2=2b\,(y'+y'')=(y'+y'')^2+r,$$

ó bien

$$a^2=2by'+y'^2+(2b+2y')\,y''+y''^2+r.$$

Donde ya se ve, que, para obtener las *decenas* y' del valor de y, es necesario, tomando la parte de a^2 que espresa el *conjunto* de las *decenas*, y *dividiendo* esta parte por $2b$, escoger el cociente *mayor posible*, y que al mismo tiempo sea tal, que pueda *restarse* del primer dividendo parcial, el producto de $2b$ por el cociente, *mas el cuadrado* del mismo cociente.

Hecha esta sustraccion, si llamamos a'^2 el resíduo seguido de las *unidades simples* de a^2, la igualdad anterior se reduce á

$$a'^2=(2b+2y')\,y''+y''^2+r;$$

y esta nueva espresion demuestra que, para obtener la cifra y'' de las unidades simples de y, es necesario, despues de haber tomado por divisor, no ya $2b$, sino $2b$ *aumentado* en el *dúplo* $2y'$ de las *decenas* ya determinadas, *dividir* a'^2 por $2b+2y'$, escogiendo el cociente *mayor posible*, y al mismo tiempo *tal*, que pueda restarse de a'^2 el producto del nuevo divisor por el cociente, *mas el cuadrado* del mismo cociente.

Hecha esta nueva sustraccion, el resíduo r, que se obtiene, no es otra cosa que el que se obtendria efectuando *directamente* la *estraccion de la raiz cuadrada*.

La raiz por su parte es igual á $b+y'+y''$, tomando y' con su *valor relativo*.

Tercer caso.—*Estando* y *espresado por tres cifras*, pondremos $y=y'+y''+y'''$; espresando y', y'', las cifras de las *centenas* y de las *decenas*, consideradas con su *valor relativo*, é y''' la cifra de las *unidades simples*.

La igualdad (1) se hace entonces

$$a^2=2b(y'+y''+y''')+(y'+y''+y''')^2+r;$$

espresion que puede cambiarse en esta otra:

$$a^2=2by'+y'^2+(2b+2y')y''+y''^2=(2b+2y'+2y'')y'''+y'''^2+r.$$

La consideracion atenta de esta última igualdad prueba: 1.° Que, para obtener las *centenas* y' de y, es necesario *dividir* el conjunto de las *centenas*, de a^2 por $2b$, tomando el cociente *mayor posible* y *tal* sin embargo que pueda *restarse* del conjunto de las *centenas* de a^2 el producto del divisor por el cociente, *mas el cuadrado* del mismo cociente;

2.° Que, para obtener las *decenas* y'', es necesario formar un *nuevo* divisor, $2b+2y'$, compuesto del primero aumentado en el *duplo* del cociente encontrado, y despues *dividir* el conjunto de las *decenas* del resto a'^2 de la primera sustraccion, tomando el cociente *mayor posible*, y *tal* sin embargo que pueda *restarse* del conjunto de las *decenas* de a'^2, el producto del nuevo divisor por el segundo cociente, *mas el cuadrado* de este mismo cociente;

3.° Que, para obtener la cifra y''' de las *unidades simples*, es necesario formar un tercer divisor $2b+2y'+2y''$, compuesto del precedente *aumentado* en el *duplo* del segundo cociente, operando despues con el resto de la segunda sustraccion y con el tercer divisor de una manera análoga.

Se concibe que estos razonamientos pueden estenderse fácilmente al caso en que y estuviera compuesto de cuatro, cinco,..., cifras.

Por consiguiente el procedimiento se encuentra completamente demostrado.

Hé aquí la tabla de los cálculos para el caso en que y deba tener cuatro cifras.

Cuarto ejemplo.

$$c=\sqrt{(23759)^2+(24196)^2}.$$

23759	564490081	48392	24196
23759	479620	9	9000
			700
213831	99768	66392	10
118795	319661	7	4
166313			
71277	48397	67792	33910 *raiz pedida.*
47518		1	
564490081		67812	
		4	
		67820	
	la mitad. . .	33910 *es la raiz pedida.*	

En este ejemplo, aunque las *cinco* primeras cifras de la izquierda del dividendo forman un número mayor que el divisor, y parezca por consiguiente que el cociente habrá de contener *decenas* de millar, es fácil conocer que no podria restarse de 56449 el producto 48392 por 1, *mas el cuadrado* de una *decena de millar*.

Así, el primer cociente solo puede espresar *unidades de millar;* su cifra es 9.

El conjunto de las operaciones que deben ejecutarse no ofrece dificultad alguna, siguiendo el procedimiento espuesto anteriormente.

El *residuo* obtenido 48397, es el que daría la estraccion de la raiz cuadrada.

La raiz se forma segun hemos visto, del mayor número 24196, aumentado en 9000, *mas* 700, *mas* 10, *mas* 4.

Pero hay un medio mas espedito de llegar á ella: y consiste en *añadir al último divisor* 67812 el *duplo* del último cociente 4, lo cual dá 67820, y tomar luego la *mitad* de este número.

Así se halla 33910, lo mismo que por el primer medio.

Esto se esplica suficientemente por el modo mismo con que se han formado los diferentes divisores.

Caso particular.

Quinto ejemplo.

$$c = \sqrt{(1803)^2 + (2009)^2}.$$

1803	32508.09	4018	2009
1803	4800 0	6	600
5409	22 89	5218	90
14424			0
1803		9	2699 *raiz pedida.*
3250809		5398	
		0	
		5398	

la mitad... 2699 *raiz buscada.*

Las dos primeras operaciones parciales se ejecutan como de ordinario. Pero al llegar al resto 228, se baja á su lado la cifra siguiente, 9, del dividendo, lo cual dá 2289, cuyo número es necesario *dividir* en seguida por el segundo divisor 5218 *aumentado* en el *duplo* de 9, ó sea por 5398. Y como el nuevo dividendo es *menor* que el nuevo divisor, se sigue que el último cociente es 0; luego la *mitad* de 5398, ó sea 2699, es la *raiz buscada*, y 2289 es el *resíduo* de la estraccion de la raiz.

Esta observacion es susceptible de aplicarse á los diferentes cocientes que suministra el procedimiento, en otros casos particulares, que son aquellos en que resultan *ceros* algunas de las cifras de la raiz.

Sesto ejemplo.

$$c=\sqrt{(261)^2+(348)^2}.$$

261		68121	696	
261		6041	8	
261		000	856	348
1566			7	80
522			870	7
68121		la mitad...	435	435 *raiz exacta.*

Aquí la raiz es exacta é igual á 435.

Séptimo ejemplo.

$$c=\sqrt{(11)^2+(61)^2}\ldots a^2<2b.$$

121	122 *raiz*, y 121 *residuo.*
	0
	61

Octavo ejemplo.

$$c=\sqrt{(25)^2+(319)^2}\ldots a^2<2b.$$

625	638
	0
	319 *raiz*, y 625 *residuo.*

3. Observacion I.—Para mayor sencillez se toma ordinariamente por *dividendo*, el *cuadrado* del número *menor*; pero nada impediria tomar el *cuadrado* del *mayor*; solo que se tendrian que ejecutar mas operaciones; es decir, que en este caso y, se compondria generalmente de mayor número de cifras.

Así, sea *por ejemplo* calcular

$$c=\sqrt{(279)^2+(4997)^2}.$$

Hé aquí el cuadro de las dos operaciones cotejadas, habiendo formado por separado los cuadrados de los dos números:

77841	9994	24970009	558	
7834	7	67380	4	279
	10008	25740	8558	4000
la mitad. . .	5004	57849	7	700
	raiz pedida.	5834	9958	20
			2	5
			9998	5004 *raiz busc.*
			5	
			10008	
		la mitad. . .	5004	

Si se toma por dividendo el *cuadrado del número menor*, solo se tiene que ejecutar una operacion; mientras que es necesario ejecutar *cuatro* cuando se toma el *cuadrado del número mayor*.

Y lo que hay de particular en este ejemplo, es que el *primer* cociente obtenido, espresa *unidades de un órden superior* á el de las *unidades mas altas* del primer divisor. Por lo demás las operaciones se ejecutan de la misma manera.

4. Observacion II.—Apoyándonos en la observacion precedente, y reflexionando sobre las igualdades que han servido de base á la demostracion que hemos dado del procedimiento, puede conocerse que basta que uno de los dos números sometidos al radical, sea un *cuadrado*.

En este caso es necesário tomar por *dividendo* el número que no es cuadrado, y por divisor el duplo del número que deberia elevarse al cuadrado.

Ejemplo.

$$c=\sqrt{11997+(829)^2}.$$

	11997	1658
resíduo. .	342	7
		1672
la mitad. . .		836 *raiz cuadrada.*

Aquí no hay, segun se ve, *ni cuadrado* que formar, *ni raiz cuadrada* que estraer, y *una sola operacion* basta para conducir al resultado.

5. Esta observacion es útil sobre todo, en álgebra, cuando hay que resolver una ecuacion de segundo grado, cuyo término conocido, trasladado al segundo miembro, es positivo.

Primer ejemplo.

$$23x^2-539x=47.$$

Tenemos, segun la fórmula conocida,

$$x=\frac{539\pm\sqrt{(539)^2+47.4.23}}{46},$$

ó efectuando solamente el cálculo $47\times4\times23$,

$$x=\frac{539\pm\sqrt{(539)^2+4324}}{46},$$

4324	1078
1081	3
	1084

la mitad. . . 542 *raiz pedida.*

Luego $x'=\dfrac{539+542}{46}=\dfrac{1081}{46}=23\,\dfrac{1}{2},$

$$x''=\frac{539-542}{46}=-\frac{3}{46}.$$

Segundo ejemplo.

$$460x^2-5197\,x=3876.$$

$$x=\frac{5197\pm\sqrt{(5197)^2+3876.4.460}}{920}.$$

3876	71318.40	1039
1840	5354 4	6
155040	700 80	11594
31008	000 00	4
3876		11674
7131840		6
		11686

la mitad. . . 5843 *raiz exacta.*

$$x = \frac{5197 \pm 5843}{920} = \frac{11040}{920} = 12 \text{ raiz positiva.}$$

6. Observacion III.—El procedimiento puede estenderse á las espresiones

$$\sqrt{m^2+n^2+p^2}, \quad \sqrt{m^2+n^2+p^2+q^2};$$

pero entonces hay necesidad de formar *à priori* los cuadrados de *dos*, de *tres*,..., de los números m, n, p,...; á menos que *uno de ellos*, m^2 por ejemplo, sea un número dado, *cuadrado ó no cuadrado perfecto;* en cuyo caso, la formacion de *un solo* cuadrado para la primera espresion, de *dos* cuadrados para la segunda, etc., basta para aplicar el procedimiento.

7. Observacion IV.—Por último, en rigor podria sustituirse en todos los casos posibles, este mismo procedimiento, al procedimiento general de la raiz cuadrada, lo cual vamos á hacer ver en dos ejemplos.

Sea primero *estraer la raiz cuadrada del número* 700569.

Concibamos que se han formado las dos potencias de *grado par* del número 2, por ejemplo, que comprenden el número propuesto.

Fácil es reconocer que esas potencias son 2^{18} y 2^{20}. En efecto, 2^9 ó 512 multiplicado por sí mismo, dá 262144; y $2^2.262144$, daria 1048576.

Esto supuesto, tomemos la diferencia entre 700569
y 262144
hallaremos 438425

Luego el número propuesto equivale á

$$438425+(512)^2,$$

y nada impide aplicar á esta espresion el nuevo procedimiento.

A fin de hacer resaltar mejor la diferencia que entre ambos procedimientos existe, vamos á ponerlos cotejados á continuacion.

Procedimiento ordinario.

70056.9	837
605	16.3
1166.9	166 7
0000	

Nuevo procedimiento.

4384.25	1024
412 2	3
83 45	1624
000	2
	1664
	5
	1674
la mitad...	837

Tercer ejemplo.

Estraer la raiz cuadrada del número 78496732.

Para obtener de pronto un cuadrado que esté en relacion con el número dado, se forma el *cuadrado* de 2500; y

restando de	78496732
el cuadrado de 2500 que es	6250000
resulta	72246732

lo cual dá $78496732 = 72246732 + (2500)^2$.

Procedimiento ordinario.		*Nuevo procedimiento.*	
78.49.67.32	88 5	72246732	5000
14 4.9	16.8	72467	6
1 0 56 7	176.5	105673	17000
1 74 23.2	1770.0	174232	3
14 85 1		14851	17600
			5
			17700
			9
			17718
		la mitad. . .	8859

Estos dos ejemplos bastan para hacer conocer que, visto el conjunto de las operaciones exigidas por los dos procedimientos, queda la ventaja á favor del ordinario; si hemos indicado el empleo del otro en la estraccion de la raiz cuadrada en general, ha sido solo para hacer resaltar su fecundidad; pero realmente no es preferible mas que para el cálculo de las espresiones tales como

$$\sqrt{m^2+n^2}, \quad \sqrt{m^2+n^2+p^2},$$

porque entonces no hay que formar todas las elevaciones al cuadrado de los números m, n, p,...; no siendo muchas veces necesario formar ningun cuadrado de antemano, segun se ha visto en los n.os 4 y 5.

FIN.

ÍNDICE

de las materias contenidas en esta Aritmética.

INTRODUCCION.

CAPÍTULO VIII. (COMPLEMENTO DE LOS PRECEDENTES.)

NOTAS.