Orense Setᵉ 76

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS,

POR

DON ATANASIO LASALA MARTINEZ,

Licenciado en Ciencias exactas,

Catedrático por oposicion de dicha asignatura

...tituto de Orense.

L47-2601

ELEMENTOS
DE
MATEMÁTICAS.

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS,

POR

DON ATANASIO LASALA MARTINEZ,

Licenciado en Ciencias exactas,
Catedrático por oposicion de dicha asignatura
en el Instituto de Orense.

TOMO II.

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.

ORENSE:

IMPRENTA DE «LA PROPAGANDA GALLEGA,»

Calle de Lepanto 18.

—

1876.

Es propiedad del autor.

GEOMETRÍA.

Definiciones y division.

1. *Una porcion cualquiera de materia, limitada en todos sentidos, se llama* CUERPO FÍSICO *ó simplemente* CUERPO.

Todo cuerpo ocupa una parte limitada del espacio infinito que nos rodea; si prescindimos de la materia de que está formado el cuerpo y consideramos solamente la porcion limitada de espacio que ocupa, tendremos el CUERPO GEOMÉTRICO, tal como hemos de estudiarlo en esta obra.

Los cuerpos tienen necesariamente tres *dimensiones*, que son: *longitud* ó largo, *latitud* ó ancho, y *grueso*. Ésta última se llama tambien *profundidad* ó *altura*.

El límite que separa un cuerpo del espacio infinito que le rodea, se llama SUPERFICIE.

Las superficies sólo tienen dos dimensiones: longitud y latitud.

El límite comun de dos superficies que se encuentran, se llama LÍNEA.

La línea no tiene mas dimension que la longitud.

Por último, *el límite comun de dos líneas que se cortan se llama* PUNTO.

El punto no tiene ninguna dimension.

La superficie, la línea y el punto tienen existencia real, pero no pueden separarse de los cuerpos: sólo por medio de una abstraccion las concebimos y estudiamos con entera independencia de éstos.

2. Los cuerpos, superficies y líneas se comprenden bajo la denominacion comun de *figuras*.

EXTENSION, en su concepto más general, *es la propiedad que poseen las figuras de ocupar un lugar en el espacio.*

EXTENSION, refiriéndonos á una figura determinada, *es la magnitud de esta figura.*

La extension recibe el nombre particular de *volúmen*, *área* ó *longitud*, cuando es la magnitud relativa de un cuerpo, de una superficie ó de una línea.

3. Las líneas se dividen principalmente en *rectas*, *quebradas* y *curvas*.

LÍNEA RECTA *es el camino más corto entre dos puntos.*

Generalmente las rectas se consideran indefinidas en sus dos sentidos; pero si debe tenerse en cuenta su magnitud entónces se consideran limitadas por dos puntos, que se llaman *extremos*.

Admitiremos como evidentes las siguientes propiedades de la línea recta:

1.ª *Dos puntos determinan la posicion de una recta*, esto es, *por dos puntos no puede pasar mas que una línea recta;* de donde se deduce: *dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden en toda su extension indefinida.*

2.ª *Dos rectas no pueden cortarse mas que en un punto.*

3.ª *Toda porcion de línea recta es tambien una línea recta.*

Se llama DISTANCIA *entre dos puntos la línea recta que los une.*

LÍNEA QUEBRADA *es una línea compuesta de varias rectas que se cortan dos á dos.* (*Fig.* 1).

LÍNEA CURVA *es aquella de la que ninguna porcion, por pequeña que sea, es línea recta.* (*Fig.* 2).

4. SUPERFICIE PLANA ó PLANO *es una superficie tal que uniendo dos puntos cualesquiera de la misma por una recta indefinida, todos los puntos de ésta se colocan en la superficie.*

SUPERFICIE QUEBRADA *es la que se compone de varias superficies planas que se cortan.*

SUPERFICIE CURVA *es aquella de la que ninguna porcion, por pequeña que sea, es superficie plana.*

5. GEOMETRÍA *es la ciencia que tiene por objeto el estudio de las propiedades de las figuras y la medida de su extension.*

Se divide la Geometría en *plana* y *del espacio*.

La geometría plana estudia las figuras cuyos puntos están situados en el mismo plano, y la geometría del espacio las que tienen sus puntos en planos diferentes.

GEOMETRÍA PLANA.

LIBRO PRIMERO.

DE LAS LÍNEAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

LÍNEA RECTA.

I.—Medida de la línea recta.

6. Para medir una línea recta debemos compararla con la unidad elegida, que será otra recta.

Sea el metro la unidad de longitud, y supongamos que la recta dada sea mayor que un metro.

Apliquemos éste sobre la recta cuantas veces sea posible; si despues de separar 8 unidades, por ejemplo, queda un resto menor que el metro, mediremos el resto con la unidad inmediatamente inferior, el decímetro; supongamos que el resto contenga 5 decímetros; y un resto menor que el decímetro; para medir este nuevo resto emplearemos el centímetro, y si éste se halla contenido 7 veces exactamente, la recta dada se compondrá de 8 metros, 5 decímetros y 7 centímetros; luego estará expresada por el número $8^m, 57$.

Si la recta fuese menor que el metro, empezaríamos desde luego la medicion con el decímetro.

En general, si necesitamos hallar la relacion entre dos rectas cualesquiera, deberemos buscar una tercera recta contenida exactamente en las dadas, referiremos despues á esta medida comun las longitudes de las dos rectas, y formaremos una fraccion con los números que expresan dichas longitudes.

Sean las rectas AB y CD *(Fig. 3)*, que supondremos conmensurables. Operando como se hace en Aritmética para hallar el máximo comun divisor de dos números, aplicaremos la recta menor sobre la mayor cuantas veces sea posible, que son dos en la figura, quedando un resto EB; este resto se aplica sobre la recta menor tres veces quedando el resíduo FD; por último, aplicando este resto sobre el anterior vemos que está contenido cinco veces exactamente, con lo que la operacion está terminada y el último resto FD es la mayor medida comun de las rectas AB y CD.

La relacion numérica entre ellas se hallará ahora fácilmente. Tenemos, en efecto,

$$AB=2CD+EB,\quad CD=3EB+FD,\quad EB=5FD;$$

de donde $\quad AB=37FD, \qquad CD=16FD;$

luego $\quad \frac{AB}{CD}=\frac{37FD}{16FD} \quad$ ó $\quad \frac{AB}{CD}=\frac{37}{16}$

Nótese que la relacion obtenida debe ser fraccion irreducible, salvo el caso en que CD esté contenida en AB un número entero de veces, pues si 37 y 16 pudieran tener un factor comun 3, por ejemplo, la mayor medida comun de las rectas no sería ED, sinó 3FD.

Si las rectas dadas fuesen inconmensurables, la operacion de hallar su medida comun no tendria teóricamente fin, y la relacion exacta de aquellas no existiria. Sin embargo [Arit. **232**], puede hallarse una relacion tan aproximada como se desee. Supongamos que el error deba ser menor que 0,01 de la recta menor: dividiendo ésta en 100 partes iguales y llevando una de ellas, que llamaremos p, sobre la recta mayor cuantas veces sea posible, 896 veces por ejemplo, la recta mayor se hallará comprendida entre $896p$ y $897p$, y la menor será $100p$ exactamente; luego la relacion buscada estará comprendida entre $\frac{896p}{100p}$ y $\frac{897p}{100p}$ ó sea entre 8,96 y 8,97 que se diferencian en 0, 01; luego cualquiera de estas fracciones representa la relacion buscada con un error menor que 0, 01.

II.—Ángulos.

7. Ángulo plano, ángulo rectilíneo *ó simplemente* ángulo *es la inclinacion mútua de dos rectas que se cortan.*

Estas rectas se llaman *lados* del ángulo y el punto en que se cortan, *vértice.*

Un ángulo se designa generalmente por tres letras colocadas en los lados y en el vértice, debiendo leerse la del vértice en medio de las otras dos. Así el primer ángulo de la fig. 4 se leerá:

ángulo ABC ó *ángulo* CBA.

Sin embargo, cuando en el vértice hay solamente un ángulo, puede éste designarse por la letra de dicho punto; así diremos: *ángulo* B.

Dos ángulos ABC y DEF son iguales si colocando un lado BC del primero sobre otro lado EF del segundo, de modo que los vértices B y E coincidan, los otros dos lados BA y ED se confunden en uno solo.

Dos ángulos ABC y DEF *(Fig.* 5*)* son desiguales si colocando BC sobre *EF* y el punto B sobre el E, los otros dos lados BA y ED no coinciden.

Suponiendo que el lado BA tome la posicion EG interior al ángulo DEF, el ángulo ABC será evidentemente menor que el DEF.

Es claro que el ángulo DEF es la suma de los ángulos DEG y GEF, y que uno de éstos es la diferencia entre DEF y el otro.

Por lo dicho se comprenderá que *la magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de la mayor ó menor inclinacion del uno sobre el otro.*

Bisectriz *de un ángulo es una recta que pasa por el vértice y divide al ángulo en dos partes iguales.*

8. Ángulos adyacentes *son dos ángulos que tienen un lado comun y los otros dos lados en línea recta.*

Es claro que los ángulos adyacentes tendrán el mismo vértice.

Los ángulos ACE y ECB *(Fig.* 6*)* son adyacentes.

Si una recta DC al caer sobre otra AB forma con ella dos ángulos adyacentes iguales ACD y DCB, estos ángulos se llaman *rectos*, y la línea DC es *perpendicular* á la AB.

Por el contrario, si una recta EC forma con otra AB dos ángulos adyacentes desiguales ACE y ECB, estos ángulos se llaman *oblícuos*, y la resta EC es *oblícua* á la AB.

TEOREMA I. (*Figs.* 6 y 7).

9. *Dos ángulos rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.*

Sean los ángulos rectos DCB y QPN; queremos demostrar que son iguales.

En efecto: coloco la figura 7 sobre la 6 de modo que la recta MN coincida con AB y el vértice P con C; si el lado PQ no coincide con CD seguirá otra direccion, por ejemplo CE, y los ángulos ACE y ECB serán precisamente el MPQ y el QPN en su nueva posicion. Pero el ángulo ACE es mayor que el recto ACD, y el ECB es menor que el recto DCB; luego los ángulos ACE y ECB son desiguales, lo que es contrario á la hipótesis; por consiguiente PQ coincide con CD y los ángulos rectos DCB y QPN son iguales.

Todo ángulo menor que un recto se llama ángulo *agudo*, y todo ángulo mayor que un recto se llama *obtuso*.

ECB (*Fig.* 6) es un ángulo agudo; ACE es obtuso.

TEOREMA II. (*Fig.* 6).

10. *La suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos ángulos rectos.*

Sean los ángulos adyacentes ACE y ECB; queremos demostrar que su suma es igual á dos ángulos rectos.

En efecto: trazando la perpendicular CD á la AB será

$$ACE = ACD + DCE$$
$$ECB = DCB - DCE.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y reduciendo, tendremos

$$ACE + ECB = ACD + DCB,$$

ó sea $$ACE + ECB = 2R,$$

llamando R al ángulo recto.

Escolio. Si uno de los ángulos adyacentes es agudo el otro será obtuso, y recíprocamente.

Corolarios.

1.° *Un ángulo cualquiera* ACE *vale menos que dos rectos.*

Puesto que prolongando el lado AC se forma un ángulo adyacente que junto con el propuesto vale dos rectos.

2.° *La suma de los ángulos* consecutivos ABD, DBE, EBF *etc.* (Fig. 8), *formados hácia un mismo lado de una recta* AC *es igual á dos rectos.*

Los tres primeros ángulos, contando de izquierda á derecha, componen el ABF; pero éste y el FBC valen juntos dos rectos; luego todos los ángulos formados en B valen tambien dos rectos.

3.° *La suma de todos los ángulos consecutivos* AOB, BOC, COD *etc.* (Fig. 9) *que se pueden formar alrededor de un punto* O, *es igual á cuatro ángulos rectos.*

En efecto: prolongando uno de los lados, por ejemplo AO, la suma de los ángulos situados por encima de la línea AA' vale dos rectos, y la suma de los situados por debajo de dicha línea vale otros dos; luego la suma de todos, que evidentemente es igual á la de los ángulos propuestos, valdrá cuatro rectos.

4.° *Si uno de los cuatro ángulos formados por dos rectas que se cortan es recto, los demás tambien son rectos.*

Puesto que si el ángulo AOC *(Fig. 10)* es recto, su adyacente COB tendrá que serlo tambien, y siéndolo éste lo será igualmente su adyacente BOD, etc.

De aquí se deduce que *si una recta* CD *es perpendicular á otra* AB, *la segunda tambien será perpendicular á la primera.*

11. *Dos ángulos se llaman* complementarios *cuando su suma vale un ángulo recto.*

Cada uno de los ángulos es el complemento del otro, esto es, lo que falta á éste para valer un recto.

Los ángulos DCE y ECB *(Fig. 6)* son complementarios.

Dos ángulos se llaman suplementarios *cuando su suma vale dos ángulos rectos.*

Cada uno de los ángulos es el suplemento del otro, esto es, lo que falta á éste para valer dos rectos.

Los ángulos adyacentes ACE y ECB *(Fig. 6)* son suplementarios.

Dos ángulos que tienen el mismo complemento ó el mismo suplemento son iguales, puesto que á los dos les falta lo mismo para valer un recto, en el primer caso, y para valer dos rectos, en el segundo caso.

12. *Se llaman* ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE *dos ángulos de los que uno se forma prolongando los lados del otro.*

TEOREMA III. *(Fig. 11).*

13. *Dos ángulos* AOD, COB *opuestos por el vértice son iguales.*

En efecto: el suplemento de AOD es AOC, y el suplemento de COB es tambien AOC; luego AOD=COB.

III.—Perpendiculares y oblícuas.

TEOREMA I.

14. *Por un punto dado no puede trazarse mas que una perpendicular á una recta.*

Distinguiremos dos casos: 1.° que el punto dado esté en la recta; 2.° que esté fuera de ella.

PRIMER CASO. *(Fig. 6)*. Vamos á demostrar que por el punto C no se puede levantar mas que una perpendicular CD á la recta AB.

En efecto: tracemos por el punto C otra recta CE; si CE es perpendicular á AB el ángulo recto ECB será igual al DCB, por consiguiente CE coincidirá con CD, y las dos perpendiculares se reducirán á una sola.

SEGUNDO CASO. *(Fig. 12)*. Decimos que por el punto C no se puede trazar mas que una perpendicular CD á la recta AB.

Para demostrarlo tracemos por el punto C otra recta CE que encuentre á la AB, prolonguemos la CD, tomemos en la prolongacion una parte C'D de igual longitud que CD y tracemos la recta C'E.

Imaginemos, ahora, que la figura CDE gire alrededor de AB hasta volverse á colocar en el plano, pero por debajo de AB; hecho esto, la recta CD coincide con C'D por ser iguales los ángulos rectos CDE y C'DE, el punto C cae sobre el C', por ser CD=C'D, y la recta CE coincide con C'E, por tener ambas los extremos confundidos; luego

$$CED=C'ED \quad \text{ó bien} \quad CED=\tfrac{1}{2}CEC';$$

pero el ángulo CEC' es menor que dos rectos, luego su mitad CED es menor que un recto; por consiguiente CE es oblícua á la recta AB.

Teorema II. (*Fig.* 12).

15. *Si desde un punto* C *exterior á una recta* AB *se tiran á ésta una perpendicular* CD *y una oblícua* CE, *la perpendicular es menor que la oblícua.*

Haciendo la misma construccion que en el teorema anterior, é imaginando que la figura CED gira alrededor de AB se vé que CD es la mitad de CC', y CE la mitad de la línea quebrada CEC'; pero

$$CC' < CEC' \ [3], \text{ luego } CD < CE.$$

Teorema recíproco. *Si una recta* CD *es menor que cuantas pueden tirarse desde un punto* C *á una recta* AB, *la primera* CD *es perpendicular á la segunda* AB.

Puesto que si CD no fuese perpendicular á AB, bajando desde C una perpendicular á esta recta, sería menor que CD, lo que es imposible.

16. *Se llama* DISTANCIA *entre un punto y una recta la perpendicular trazada desde el punto á la recta.*

Teorema III. (*Fig.* 13).

17. *Si desde un punto* C, *exterior á una recta* AB, *se bajan á ésta una perpendicular y varias oblícuas:* 1.º *las oblícuas* CE *y* CF *que se apartan igualmente de la perpendicular son iguales;* 2.º *de dos oblícuas* CE *y* CG *que se apartan desigualmente de la perpendicular, es mayor la que se aparta más.* [1]

1.º Doblando la figura por la perpendicular CD, la

1 Llamamos *pié* de una perpendicular ó de una oblícua á la recta AB, al punto de interseccion de la perpendicular ó de la oblícua con dicha recta. Decimos que dos oblícuas se *apartan* igualmente de la perpendicular cuando los piés de aquellas equidistan del pié de ésta; y que se apartan desigualmente, en el caso contrario.

recta DE seguirá la direccion DF, por ser iguales los ángulos en D, y el punto E caerá en F, por ser DE=DF; luego las oblícuas CE y CF tendrán los extremos comunes, y serán iguales.

2.° Tomemos sobre AB una parte DF=DE y tracemos la oblícua CF, que será igual á CE.

Ahora bien, el ángulo CFD es agudo, por ser mitad del BFC′, luego su adyacente CFG es obtuso; por consiguiente si levantamos por el punto F una perpendicular FH á CF, cortará á CG entre los puntos C y G; pero CH>CF [**15**]; luego con mayor razon será

$$CG > CF \quad ó \quad CG > CE.$$

Teorema recíproco. 1.° *Si dos oblícuas* CE *y* CF *son iguales, se apartan igualmente de la perpendicular;* 2.° *si dos oblícuas* CE *y* CG *son desiguales, la mayor se aparta de la perpendicular más que la menor.*

1.° Si una de las oblícuas iguales CE se apartase de la perpendicular más ó menos que la otra CF, sería CE mayor ó menor que CF [**Teorema anterior**], lo que es contrario á la hipótesis.

2.° Si la oblícua mayor CG se apartase de la perpendicular lo mismo que la menor, sería CG=CE; y si CG se apartase menos que CE, sería CG < CE, y ambas conclusiones son contrarias á la hipótesis del teorema.

Corolario. *Desde un punto* C *no puede trazarse á una recta* AB *más de dos rectas iguales* CE *y* CF.

Puesto que otra recta cualquiera, si es perpendicular á AB, será menor que CE y CF, y si es oblícua se apartará de la perpendicular mas ó menos que éstas; por consiguiente será mayor ó menor que las mismas.

Teorema IV. (*Fig.* 14).

18. 1.° *Todo punto* E *de la perpendicular* CD *levantada á una recta por su punto medio, equidista de los extremos de dicha recta;* 2.° *todo punto* F *exterior á la perpendicular, no equidista de los extremos de la recta.*

1.° Las distancias EA y EB del punto E á los extremos de la recta AB son oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular; luego EA=EB [**17**].

2.° Para demostrar que las distancias FA y FB del punto F á los extremos de la AB son desiguales, bajo la perpendicular FH á AB; el pié de esta perpendicular no puede ser el punto medio C [**14**], luego dividirá á AB en dos partes AH y HB desiguales; por consiguiente las distancias FA y FB son oblícuas que se apartan desigualmente de la perpendicular FH, luego son desiguales.

TEOREMA RECÍPROCO. 1.º *Si un punto* E *equidista de los extremos de una recta* AB, *dicho punto está en la perpendicular levantada á la recta* AB *por su punto medio*; 2.º *si un punto* F *no equidista de los extremos de la recta, dicho punto no está en la perpendicular*.

1.º Si el punto E no estuviese en la perpendicular CD, no equidistaria de A y B, lo que es contrario á la hipótesis.

2.º Si el punto F estuviese en la perpendicular CD, equidistaria de A y B, lo que es contrario á la hipótesis de esta segunda parte.

19. ESCOLIO. Acabamos de ver que todos los puntos de la perpendicular CD poseen la propiedad de estar á igual distancia de A y B, y que esta propiedad sólo la poseen dichos puntos; por esto se dice:

El LUGAR GEOMÉTRICO *de todos los puntos equidistantes de los extremos de una recta, es la perpendicular levantada á ésta por su punto medio.*

20. Es conveniente advertir que no todos los teoremas recíprocos son ciertos, y que por consiguiente no deben ser admitidos sin demostracion. Sin embargo, muchos de los recíprocos ciertos pueden demostrarse por el método seguido en los números 17 y 18, y siempre que reconozcamos la posibilidad de hacerlo, se admitirá la proposicion como cierta sin detenerse á demostrarla. Diremos, pues,

Siempre que en un teorema ó en una série de ellos se hayan hecho todas las hipótesis posibles sobre un mismo sujeto, y cada hipótesis haya dado una conclusion esencialmente distinta de las demás, será aplicable á la demostracion de los recíprocos el método seguido en los números 17 y 18, *y dichos recíprocos serán ciertos.*

TEOREMA V. (*Fig.* 14).

21. *Si una recta* EG *tiene dos puntos* E *y* G *equidistantes de los extremos de otra* AB, *es perpendicular á ésta y la divide en dos partes iguales.*

Si imaginamos por el punto medio C de la AB una perpendicular á ésta, dicha perpendicular debe pasar por todos los puntos equidistantes de A y B [**19**], luego pasará por E y G confundiéndose con EG; por consiguiente EG es perpendicular á AB en su punto medio.

IV.—Paralelas.

22. *Se llaman* LÍNEAS PARALELAS *dos rectas situadas en el mismo plano, que no se encuentran por más que se prolonguen.*

Se demuestra que las líneas paralelas existen por medio de la siguiente proposicion.

TEOREMA I.

23. *Dos rectas perpendiculares á una tercera, son paralelas entre sí.*

Porque si las dos rectas llegaran á encontrarse, desde el punto de encuentro habria dos perpendiculares á una misma recta, lo que es imposible [**14**].

POSTULADO DE EUCLIDES. (*Fig.* 15.)

24. *Una perpendicular* CD *y una oblícua* EF *á una misma recta* AB, *prolongadas suficientemente se encuentran, y el encuentro se verifica hácia el lado del ángulo agudo* FGB *que forma la oblícua con la recta.*

Esta proposicion no se puede demostrar rigurosamente, pero tiene cierto grado de evidencia que permite admitirla desde luego como cierta.

TEOREMA II. (*Fig.* 15).

25. *Por un punto* G, *exterior á una recta* CD, *no puede trazarse mas que una paralela á dicha recta.*

Tracemos desde el punto G, una perpendicular AB á la recta CD. De todas las rectas que pueden pasar por G habrá una LM perpendicular á AB, y como CD tambien es perpendicular á AB, las rectas LM y CD serán paralelas; pero otra cualquiera recta que pase por G será oblícua á AB [**14**]; luego encontrará á CD [**Postulado**]; por consiguiente por el punto G sólo puede trazarse á la recta CD una paralela LM.

COROLARIOS.

1.° *Si dos rectas* AB *y* CD (Fig. 16) *son paralelas, toda recta* EF *que encuentra á una de ellas* AB, *encuentra, prolongándola lo necesario, á la otra* CD.

Si EF no encontrase á CD le sería paralela, y pasarian por G dos paralelas AB y EF á una misma recta CD, lo que es imposible.

2.° *Dos rectas* AB *y* CD (Fig. 17) *paralelas á una tercera* EF, *son paralelas entre sí.*

En efecto: si AB y CD llegaran á encontrarse, por el punto de encuentro pasarian dos paralelas á EF, lo que es imposible.

26. RECÍPROCO DEL TEOREMA I. (*Fig.* 15). *Si dos rectas* LM *y* CD *son paralelas, toda perpendicular* AB *á una de ellas* CD *es tambien perpendicular á la otra* LM.

Puesto que AB encuentra á CD encontrará igualmente á su paralela LM; ahora bien, si AB no es perpendicular á LM será oblícua, así como LM será oblícua á AB; pero entónces la perpendicular CD y la oblícua LM á una misma recta AB se encontrarán [**Postulado**], lo que es contrario á la hipótesis; luego AB tiene que ser perpendicular á LM.

27. Si una recta EF (*Fig.* 18) corta á otras dos AB y CD, la primera recibe el nombre de *secante* ó *trasversal.*

En los puntos de interseccion G y H se forman ocho ángulos: los situados fuera de las paralelas se llaman *externos*, y los situados dentro, *internos.*

Dos ángulos internos AGH, GHD de distinto lado de la secante y no adyacentes, se llaman *alternos internos.*

Dos ángulos EGB, EHD uno externo y otro interno, del mismo lado de la secante y no adyacentes, se llaman *correspondientes.*

TEOREMA III. (*Fig.* 19).

28. *Si los ángulos alternos internos* AGH *y* GHD *son iguales, las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

En efecto: por el punto medio O de la parte de secante GH comprendida entre las rectas dadas, trazo la perpendicular OM á CD y la prolongo hácia la parte superior: imaginemos ahora que la figura OHM gire alrededor del punto O, en el mismo plano en que se encuentra, hasta que la recta OH tome la direccion OG; entonces el punto H caerá en G, por ser OH=OG, y la recta HM seguirá la direccion GA, por ser el ángulo OHM=OGA; pero la OM coincidirá con OK, por ser el ángulo HOM=GOK [**13**], por consiguiente el punto M, que se encuentra á la vez en las rectas HM y OM, deberá quedar situado á la vez en GA y en OK, luego estas rectas tienen un punto comun L sobre el que caerá el punto M. Vemos, pues, que las figuras OHM y OGL son iguales, luego

áng. OMH=*áng.* OLG;

y como el ángulo OMH es recto, su igual OLG tambien es recto, lo que manifiesta que AB es perpendicular á LM, por consiguiente es paralela á CD.

Escolio. Si los ángulos internos iguales fuesen BGH y GHC, la demostracion sería la misma, pues de la igualdad de dichos ángulos se deduce la de sus adyacentes AGH y GHD.

Teorema IV. (*Fig.* 19).

29. *Si dos ángulos correspondientes* EGB *y* EHD *son iguales, las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

En efecto: tenemos por hipótesis

EGB=EHD,

además EGB=AGH [**13**];

luego AGH=EHD,

y como estos últimos ángulos son alternos internos, las rectas AB y CD son paralelas [**28**].

Teorema V. (*Fig.* 19).

30. *Si la suma de dos ángulos internos* AGH *y* GHC *del mismo lado de la secante es igual á dos ángulos rectos, las rectas* AB *y* CD *son paralelas.*

En efecto: tenemos por hipótesis

GHC+AGH=2R,

además GHC+GHD=2R [**10**];

luego AGH=GHD,

y como estos dos últimos ángulos son alternos internos, las rectas son paralelas [**28**].

31. Recíproco del teorema III. (*Fig* 20). *Si dos rectas* AB *y* CD *son paralelas, los ángulos alternos internos* AGH *y* GHD *son iguales.*

Si el ángulo AGH no es igual al GHD, siempre podrá trazarse por G una recta LM que forme con la secante un ángulo LGH igual al GHD; esto supuesto, la recta LM será paralela á CD [**28**], y por el mismo punto G pasarán dos paralelas AB y LM á una misma recta, lo que es imposible [**25**]; luego el ángulo AGH tiene que ser igual al GHD.

32. Recíproco del teorema IV. (*Fig.* 19). *Si dos rectas* AB *y* CD *son paralelas, los ángulos correspondientes* EGB *y* EHD *son iguales.*

En efecto:	AGH=GHD [**31**],
además	AGH=EGB [**13**],
luego	GHD=EGB.

33. Recíproco del teorema V. (*Fig.* 19.) *Si las rectas* AB *y* CD *son paralelas, la suma de dos ángulos internos del mismo lado de la secante* AGH *y* CHG *es igual á dos rectos.*

En efecto:	CHG+GHD=2R,
pero	GHD=AGH [**31**];
luego sustituyendo,	CHG+AGH=2R.

Teorema VI. (*Fig.* 20).

34. *Si la suma* LGH+CHG *de dos ángulos internos de un mismo lado de la secante es menor que dos rectos, las rectas* LM *y* CD *se encuentran hácia dicho lado.*

Si las rectas no se encontrasen serian paralelas y la suma LGH+CHG valdria dos rectos. Además, los ángulos suplementarios de los propuestos MGH y GHD valen más de dos rectos, luego si por el punto G trazamos la paralela AB, el ángulo MGH será mayor que BGH, y no pudiendo GB encontrar á HD, tampoco GM, por más que se prolongue hácia la derecha, la encontrará; luego el encuentro tendrá lugar á la izquierda de la secante.

Teorema VII.

35. *Dos ángulos que tienen sus lados paralelos, son iguales ó suplementarios.*

Primer caso. Sean los ángulos ABC y DEF (*Fig.* 21), cuyos lados son paralelos y están dirigidos en el mismo sentido [1]; vamos á demostrar que son iguales.

Prolongando DE hasta que encuentre en G al lado BC, tendremos

DEF=DGC por ser ángulos correspondientes,
y DGC=ABC por la misma razon;
luego DEF=ABC.

Segundo caso. Sean los ángulos ABC y DEF (*Fig.* 22), cuyos lados paralelos BC y ED tienen direcciones opuestas, así como tambien los BA y EF; decimos que son iguales.

Prolongando los lados del ángulo DEF se forma otro HEG; ahora bien:

ABC=HEG, segun el caso anterior,
DEF=HEG, por opuestos por el vértice,
luego ABC=DEF.

Tercer caso. Sean los ángulos ABC y DEF (*Fig.* 23), cuyos lados paralelos BC y EF tienen la misma direccion, mientras que los otros dos BA y ED tienen direcciones opuestas; vamos á demostrar que dichos ángulos son suplementarios.

Prolongando el lado ED se forma el ángulo GEF; ahora bien:

GEF+DEF=2R;
pero GEF=ABC, segun el primer caso; luego
ABC+DEF=2R.

Escolio. Acabamos de ver que los ángulos cuyos lados paralelos están dirigidos en el mismo sentido ó en sentidos opuestos, son iguales; y que si dos lados están dirigidos

1 El sentido de la direccion de un lado se cuenta á partir del vértice: así BC y EF están dirigidos en el mismo sentido, desde el vértice hácia la derecha; BA y ED tambien tienen la misma direccion, desde el vértice hácia arriba.

en el mismo sentido y los otros dos en sentidos opuestos, los ángulos son suplementarios.

TEOREMA VIII. (*Fig.* 24).

36. *Dos ángulos* ABC *y* DEF, *cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios.*

Suponemos que AB y BC son respectivamente perpendiculares á EF y ED. Tracemos por el vértice E dos perpendiculares EH y EG á los lados EF y ED; el ángulo GEH formado por estas perpendiculares es igual al DEF, porque ambos tienen el mismo complemento HED; pero GEH tiene sus lados paralelos á los de ABC [**23**], luego es igual ó suplemento de ABC; por tanto DEF será tambien igual ó suplemento de ABC.

ESCOLIO. Siendo agudos los dos ángulos propuestos son necesariamente iguales, porque si fueran suplementarios uno seria agudo y otro obtuso.

Si los ángulos dados fuesen los obtusos ABL y DEM, tambien serian iguales, por serlo sus respectivos suplementos ABC y DEF.

Por último, si uno DEF es agudo y el otro ABL obtuso, evidentemente serán suplementarios.

CAPÍTULO SEGUNDO.

CIRCUNFERENCIA.

I.—Definiciones.

37. CIRCUNFERENCIA *es una línea curva cerrada, cuyos puntos están en un mismo plano á igual distancia de otro punto interior llamado* CENTRO.

CÍRCULO *es la porcion de plano limitada por la circunferencia.*

ARCO *es una porcion cualquiera de la circunferencia.*

RADIO *es toda recta* OA (Fig. 25) *tirada desde el centro* O *á un punto cualquiera de la circunferencia.*

CUERDA *es toda recta* CD *cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia.*

DIÁMETRO *es toda cuerda* AB *que pasa por el centro.*

38. *Todos los radios de un círculo son iguales*, porque miden las distancias del cento á los diferentes puntos de la circunferencia y, segun la definicion de esta curva, todos sus puntos equidistan del centro.

Todos los diámetros de un círculo son iguales, porque cada uno vale dos radios.

II.—Propiedades de la circunferencia.

Teorema I.

39. *Una circunferencia no puede ser cortada por una línea recta en más de dos puntos.*

Si una recta pudiese cortar á la circunferencia en tres ó más puntos, uniendo éstos con el centro por medio de radios, tendríamos más de dos rectas iguales dirigidas desde un punto á una recta, lo que es imposible [**17, corolario**].

Escolio. Por tener la propiedad que se acaba de demostrar, la circunferencia es curva *convexa*.

Teorema II.

40. *Dos circunferencias descritas con igual radio, son iguales.*

Haciendo coincidir los centros de las circunferencias, todos los puntos de una de ellas coincidirán con puntos de la otra, de lo contrario los radios serian desiguales.

Escolio. Es evidente que dos arcos de circunferencias iguales son superponibles: haciendo la superposicion de modo que los arcos tengan un extremo comun, si tienen tambien comun el otro extremo serán iguales, y si no lo tienen serán desiguales.

Teorema III. (*Fig.* 25).

41. *Todo diámetro* AB *divide á la circunferencia* O *en dos partes iguales.*

Doblando la figura por el diámetro AB, todos los puntos de la parte inferior AEFB coincidirán con otros de la superior ACDB, de lo contrario los radios de la circunferencia no serian iguales.

Los arcos iguales AEFB y ACDB se llaman *semicircunferencias.*

Es evidente que el diámetro AB divide tambien al círculo O en dos partes iguales, llamadas *semicírculos.*

Escolio. Dos arcos cualesquiera CD y EF de una misma circunferencia son superponibles.

Teorema IV. (*Fig.* 25).

12. *El diámetro* AB *es mayor que cualquiera otra cuerda* CD.

Tirando los radios OC y OD á los extremos de la cuerda CD, la línea quebrada COD será mayor que la recta CD; pero COD es igual al diámetro AB, por componerse de dos radios, luego AB $>$ CD.

Teorema V. (*Fig.* 26).

13. *Tres puntos* A, B, C, *que no están en línea recta, determinan una circunferencia, esto es, por tres puntos que no están en línea recta siempre puede pasar una circunferencia, y sólo puede pasar una.*

Uno los tres puntos por las rectas AB y BC; en el medio de la AB levanto una perpendicular DO á esta recta, y en el medio de la BC trazo la EO perpendicular á BC; las perpendiculares se encuentran, pues de lo contrario serian paralelas, y BC, perpendicular á EO, lo sería á su paralela DO, resultando entonces dos perpendiculares BC, BA á DO por el mismo punto B, lo que es imposible. Ahora bien, el punto O de la perpendicular DO equidista de A y B [**18**], y el mismo punto, como perteneciente á EO, equidista de B y C; luego O equidista de A, B y C, por tanto haciendo centro en O y describiendo una circunferencia de radio OA, pasará por A, B y C.

Demostremos ahora que por estos puntos sólo puede pasar una circunferencia.

El centro de toda circunferencia que pase por A, B y C equidista de A y B, luego se encuentra en la perpendicular DO [**18, recip.**]; tambien equidista de B y C, luego se encuentra en la perpendicular EO; por consiguiente el centro es O, único punto comun á las dos perpendiculares. En cuanto al radio será OA, luego cuantas circunferencias pasen por A, B y C tendrán el mismo centro O é igual radio OA, y se confundirán en una sola.

Escolio. Si los tres puntos estuviesen en línea recta no podria pasar por ellos ninguna circunferencia, porque una circunferencia no puede tener tres puntos en línea recta [**39**].

El razonamiento anterior confirma esto mismo, pues si ABC fuese una línea recta, las perpendiculares DO y EO no se encontrarian y no habria centro.

Corolario. *Dos circunferencias no pueden cortarse en más de dos puntos.*

Pues si tuviesen tres puntos comunes coincidirian.

Teorema VI. *(Fig. 27).*

41. En circunferencias iguales ó en la misma circunferencia: 1.° *si dos arcos son iguales, sus cuerdas tambien son iguales*; 2.° *si dos arcos menores que media circunferencia son desiguales, el mayor tiene mayor cuerda.*

1.° Supongamos que los arcos de circunferencias iguales AMB y CND sean iguales; decimos que sus cuerdas AB y CD tambien son iguales.

Imaginemos que la circunferencia O′ se coloca sobre la O de modo que coincidan los centros y los puntos C y A; los arcos CND y AMB coincidirán, y como son iguales, el punto D caerá sobre el B, luego las cuerdas CD y AB tendrán los mismos extremos, y por tanto serán iguales.

Si los arcos iguales AMB y C′N′D′ perteneciesen á la misma circunferencia O, tomando en otra circunferencia O′ un arco CND=AMB, tendriames AB=CD, C′D′=CD, luego AB=C′D′.

2.° Supongamos que el arco CNE sea mayor que AMB; decimos que la cuerda CE del primero es mayor que la AB del segundo.

Colocando la circunferencia O′ sobre la O de modo que los centros coincidan y que C caiga sobre A, el punto E caerá en la circunferencia O, pero fuera del arco AMB, en F por ejemplo, puesto que el arco CNE es mayor que AMB, y la cuerda AF será igual á CE.

Trazo ahora los radios OF y OB, y tendremos [**3**]

$$AI+IB > AB$$

$$FI+OI > OF.$$

sumando ordenadamente estas desigualdades resulta

$$AI+FI+IB+OI>AB+OF,$$

pero $AI+FI=AF, \quad IB+OI=OB;$

luego $AF+OB>AB+OF;$

restando OB del primer miembro y OF del segundo, será por último

$$AF>AB \quad \text{ó} \quad CE>AB,$$

puesto que $AF=CE$.

Si los arcos desiguales AMF y C'N'D' perteneciesen á la misma circunferencia O, tomando en otra circunferencia igual un arco $CND=C'N'D'$, seria $CD=C'D'$, pero $AF>CD$, luego $AF>C'D'$.

Teorema recíproco. En circunferencias iguales ó en la misma circunferencia: 1.° *si dos cuerdas son iguales, los arcos tambien son iguales*; 2.° *si dos cuerdas son desiguales, la mayor subtiende mayor arco.* [1]

Este recíproco se halla comprendido en la regla general del número **20**, por consiguiente es cierto.

Teorema VII. (*Fig.* 28).

15. En circunferencias iguales ó en la misma circunferencia: 1.° *si dos cuerdas son iguales, equidistan del centro;* 2.° *si dos cuerdas son desiguales, la mayor dista del centro menos que la menor.*

1.° Si las cuerdas AB y CD son iguales, los arcos que subtienden tambien son iguales. Imaginemos que la circunferencia O' se coloque sobre la O de modo que coincidan los centros y que el punto C caiga sobre A; hecho esto, el punto D caerá sobre B, por ser iguales los arcos DC y AB, y las cuerdas coincidirán por tener los mismos extremos; además el pié F de la perpendicular O'F tendrá que coincidir con el pié E de la perpendicular OE, de lo contrario habria desde O á la recta AB dos perpendiculares, luego $O'F=OE$, y como estas rectas son las dis-

1 Una cuerda subtiende dos arcos desiguales, uno menor y otro mayor que media circunferencia; cuando hablemos del arco subtendido por una cuerda, se entenderá que nos referimos al arco menor que la semicircunferencia.

tancias de los centros á las cuerdas [**16**], queda demostrada la primera parte del teorema.

2.° Sean las cuerdas CG y AB de circunferencias iguales, O'L y OE son distancias á los centros respectivos; decimos que si CG > AB, será O'L < OE.

Coloquemos la circunferencia O' sobre la O de modo que coincidan los centros y el punto C con el A; como el arco CDG es mayor que el AB [**41, recíp**], el punto G caerá fuera del arco AB, en H por ejemplo, y la cuerda AH será igual á CG, por consiguiente OM=O'L.

Ahora bien, OI es oblícua á AH, luego OM < OI, y con mayor razon OM < OE, ó sea O'L < OE.

Si las cuerdas perteneciesen á la misma circunferencia, haríamos razonamientos análogos á los expuestos en el teorema VI para igual caso.

Teorema recíproco. En circunferencias iguales ó en la misma circunferencia: 1.° *dos cuerdas equidistantes del centro son iguales; 2.° si dos cuerdas no equidistan del centro, la que ménos dista es mayor que la otra.* [**20**].

Teorema VIII. *(Fig. 29).*

46. *El diámetro* AB *perpendicular á una cuerda* CD, *divide á ésta y á los arcos* CAD *y* CBD *que subtiende en dos partes iguales.*

Doblando la figura por el diámetro AB, la semicircunferencia ADB coincidirá con la ACB, luego el punto D caerá en el arco ACB; además, siendo los ángulos en E iguales, la recta ED tomará la direccion EC, y el punto D caerá sobre la EC; luego el punto D coincide con C.

De esto se deduce

ED=EC, *arc.* AD=*arc.* AC, *arc.* DB=*arc.* CB.

Escolio. El diámetro AB cumple con las cinco condiciones siguientes:

1.ª *Pasa por el centro.*

2.ª *Es perpendicular á la cuerda* CD.

3.ª *Divide á la cuerda* CD *en dos partes iguales.*

4.ª y 5.ª *Divide á los arcos* CAD *y* CBD *en dos partes iguales.*

Obsérvese que dos de estas condiciones bastan para determinar una recta, luego *toda recta que cumpla con dos de las condiciones enunciadas, cumple tambien con las tres restantes.*

Por ejemplo, *la* PERPENDICULAR *levantada á una cuerda por su* PUNTO MEDIO: 1.º *pasa por el centro;* 2.º *divide al arco* CAD *en dos partes iguales*; 3.º *divide al arco* CBD *en dos partes iguales*.

17. *Se llama* SECANTE *toda recta indefinida que corta á una circunferencia en dos puntos.*

Se llama TANGENTE *á una circunferencia toda recta indefinida que toca á esta curva en un solo punto.*

Cuando una recta es tangente á una circunferencia, la circunferencia es tambien tangente á la recta.

La recta MN (*Fig.* 30) que corta á la circunferencia O en los puntos C y *a* es una secante; y la AB que sólo tiene con la circunferencia un punto comun C es una tangente.

El punto C se llama *punto de contacto*.

La tangente AB á la circunferencia O puede considerarse como el límite de las posiciones sucesivas MN, M'N', M″N″ de una secante MN, que gira alrededor de uno de los puntos de interseccion C hasta que el otro *a* llega á confundirse con el primero.

TEOREMA IX. (*Fig.* 31).

18. *La perpendicular* AB *al radio* OC *en el punto en que éste toca á la circunferencia, es tangente á esta curva.*

Siendo OC perpendicular á AB es menor que otra cualquiera recta OD tirada desde el centro á la recta AB, por consiguiente el punto D estará fuera del círculo; lo mismo puede decirse de otro cualquier punto de la AB, á excepcion del C, luego la circunferencia y la recta AB sólo tienen el punto comun C.

TEOREMA RECÍPROCO. *La tangente* AB *á la circunferencia* O *es perpendicular al radio* OC *tirado al punto de contacto.*

Como AB es por hipótesis tangente á la circunferencia, todos sus puntos, á excepcion del C, estarán fuera del círculo, y las distancias de los mismos al centro serán mayores que el radio; luego OC es la menor de cuantas rectas pueden trazarse desde el centro á la tangente, por lo tanto es perpendicular á esta línea [**15, recip**].

COROLARIOS.

1.º *Por un punto de una circunferencia no puede tirarse á ésta mas que una tangente.*

Puesto que la tangente debe ser perpendicular el radio, y por el extremo de éste no puede trazarse mas que una perpendicular.

2.º *El radio ó diámetro perpendicular á una tangente pasa por el punto de contacto.*

De lo contrario podrian trazarse desde O dos perpendiculares á la tangente.

TEOREMA X. *(Fig. 32).*

49. *Los arcos de una misma circunferencia comprendidos entre paralelas, son iguales.*

Pueden ocurrir tres casos: 1.º que las paralelas sean dos cuerdas; 2.º que sean una tangente y una cuerda; 3.º que sean dos tangentes.

PRIMER CASO. Vamos á demostrar que los arcos AC y BD comprendidos entre las cuerdas paralelas AB y CD, son iguales.

Trazando el diámetro EF perpendicular á la cuerda AB, será tambien perpendicular á su paralela CD [**26**]; por consiguiente tendremos [**46**]:

arc. CAE=*arc.* DBE

arc. AE=*arc.* BE;

restando ordenadamente estas igualdades será

arc. AC=*arc.* BD.

SEGUNDO CASO. Debemos demostrar que los arcos CAE y DBE, comprendidos entre la tangente MN y una cuerda paralela CD, son iguales.

Tirando un diámetro EF al punto de contacto E, será perpendicular á la tangente MN [**48, recíp.**], y tambien á su paralela CD: en virtud de esto último tendremos

arc. CAE=*arc.* DBE.

TERCER CASO. Si las paralelas son dos tangentes, MN y PQ, vamos á demostrar que los arcos FCAE y FDBE son iguales.

Un diámetro EF que pase por el punto de contacto de la tangente MN será perpendicular á ésta, por consiguiente tambien lo será á su paralela PQ, y pasará por el punto de contacto F [**48, cor. 2.º**]; siendo los puntos de contacto extremos de un mismo diámetro es claro que

arc. FCAE=*arc.* FDBE.

III.—Circunferencias secantes y tangentes.

50. Se llaman *circunferencias secantes* las que se cortan en dos puntos, como O y O′ (*Fig.* 36).

Se llaman *circunferencias tangentes* las que se tocan en un solo punto, llamado *de contacto*, como O y O′ (*Fig.* 35).

Ya sabemos que dos circunferencias no pueden tener más de dos puntos comunes.

Teorema I.—(*Fig.* 33).

51. *Si dos circunferencias* O *y* O′ *tienen un punto comun* A *fuera de la recta* OO′ *que une sus centros, son secantes.*

Bajo desde el punto A una perpendicular AB á la recta OO′ que une los centros, prolongo la perpendicular, y tomo sobre la prolongacion una longitud BA′ igual á BA; segun esta construccion, la OO′ será perpendicular á AA′ en su punto medio B, luego los centros O y O′ equidistan de A y A′ [**18**]; de aquí se deduce que la circunferencia O, que pasa por A, pasará tambien por A′, y la O′ estará en igual caso, luego las circunferencias tienen dos puntos comunes A y A′ ó son secantes.

Teorema recíproco. *Los puntos de interseccion de dos circunferencias secantes, están fuera de la recta que une los centros.*

El centro de la circunferencia O equidista de los puntos de interseccion A y A′ que pertenecen á esta curva, y el centro de la circunferencia O′ equidista tambien de dichos puntos de interseccion; luego la recta OO′ pasa por el punto medio de la AA′, quedando por tanto fuera de la primera OO′ los extremos A y A′ de la segunda.

Corolario. *La recta que une los centros de dos circunferencias secantes, es perpendicular á la cuerda comun en su punto medio.*

Teorema II.

52. *Si dos circunferencias tienen un punto comun sobre la recta que une sus centros, son tangentes.*

Puesto que si fueran secantes, los puntos comunes estarian fuera de la recta que une los centros [**51, recíp**];

Teorema recíproco. *El punto de contacto de dos circunferencias tangentes, está sobre la recta que une sus centros.*

Porque si estuviese fuera, las circunferencias serian secantes [**51**].

Teorema III.

53. 1.° *Si dos circunferencias son mútuamente exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.*

2.° *Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, la distancia de sus centros es igual á la suma de los radios.*

3.° *Si dos circunferencias son secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia de los mismos.*

4.° *Si dos circunferencias son tangentes interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios.*

5.° *Si una circunferencia es interior á otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

1.° A la simple inspeccion de la fig. 34, se comprende que la distancia OO′ de los centros es mayor que la suma OA+O′B de los radios.

2.° Siendo tangentes las circunferencias O y O′ (*Fig.* 35), el punto de contacto A está en la recta OO′ que une los centros, por consiguiente

$$OO'=OA+O'A.$$

3.° Uniendo los centros de las circunferencias secantes O y O′ (*Fig.* 36) con uno de los puntos de interseccion A, por medio de los radios OA y O′A, la línea OAO′ será quebrada, puesto que los puntos de interseccion están fuera de la recta OO′ [**51, recip**], y tendremos

$$OO' < OA+O'A,$$

lo que demuestra la primera parte del teorema.

Además $$OA < OO'+O'A;$$

restando el radio O′A de los dos miembros de esta desigualdad será

$$OA-O'A < OO',$$

ó bien $$OO' > OA-O'A,$$

lo que demuestra la segunda parte.

4.° Siendo tangentes las circunferencias O y O′ (*Fig.* 37), el punto de contacto A está en la recta OO′ que une los centros; luego

$$OO'=OA-O'A.$$

5.° Es evidente (*Fig.* 38) que

$$OO'=OB-O'A-AB,$$

luego $$OO' < OB-O'A.$$

Dos circunferencias situadas en un mismo plano no pueden ocupar más posiciones relativas que las cinco estudiadas en este teorema, y como cada hipótesis ha conducido á una conclusion esencialmente distinta de las demás, las recíprocas de las cinco proposiciones son ciertas [**20**]. Diremos, pues,

RECÍPROCOS.

1.° *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios, las circunferencias son mútuamente exteriores.*

2.° *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los radios, las circunferencias son tangentes exteriormente.*

3.° *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia de los mismos, las circunferencias son secantes.*

4.° *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios, las circunferencias son tangentes interiormente.*

5.° *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios, una de las circunferencias es interior á la otra.*

IV.—Medida de los ángulos.

54. *Se llama* ARCO CORRESPONDIENTE Á UN ÁNGULO *el arco comprendido entre los lados del ángulo, descrito desde el vértice como centro con un radio cualquiera.*

TEOREMA I. (*Fig.* 39.)

55. *Si dos ángulos* ABC, DEF *son iguales, sus arcos correspondientes* GH, LM *descritos con igual radio, son iguales.*

Coloco el ángulo B sobre el E haciendo coincidir los vértices y los lados BC y EF; es claro, segun la hipótesis, que el lado BA seguirá la direccion ED, y que los puntos H y G coincidirán respectivamente con M y L; además, los arcos GH y LM de circunferencias iguales coincidirán en todos sus puntos, y como tienen los mismos extremos serán iguales.

TEOREMA RECÍPROCO. *Si dos arcos* GH *y* LM, *correspondientes á dos ángulos* B *y* E, *están descritos con igual radio y son iguales, los ángulos son tambien iguales.*

Haciendo coincidir los vértices B y E y los lados BA y ED, el punto G caerá sobre L, por ser iguales los radios BG y EL; además el arco GH coincidirá con LM, y como estos arcos son iguales, el extremo H caerá en M; luego el lado BH se confundirá con el EM, y los ángulos B y E serán iguales.

56. Si una circunferencia se divide en cuatro arcos iguales, cada uno de ellos se llama *cuadrante*.

TEOREMA II. *(Fig.* 40).

El arco AC *correspondiente á un ángulo recto* ABC, *es un cuadrante.*

Describiendo toda la circunferencia á que pertenece el arco AC y prolongando los lados del ángulo ABC, se forman en B cuatro ángulos rectos, que son por consiguiente iguales. Siendo los ángulos en B iguales, los arcos correspondientes AC, CD, DE y EA son tambien iguales [**55**], y uno cualquiera de ellos AC será un cuadrante.

COROLARIO. *Dos diámetros perpendiculares entre sí dividen la circunferencia en cuatro partes iguales.*

TEOREMA RECÍPROCO. *Si el arco* AC *correspondiente á un ángulo* ABC *es un cuadrante, el ángulo es recto.*

Haciendo la misma construccion que en el teorema directo, tendremos que siendo EAC una semicircunferencia y AC un cuadrante, AE será otro cuadrante; luego los ángulos adyacentes ABC y ABE son iguales [**55, recip.**], y uno cualquiera de ellos ABC es recto.

TEOREMA III.

57. *La razon de dos ángulos es igual á la de sus arcos correspondientes descritos con igual radio.*

Distinguiremos dos casos: 1.º que los arcos sean conmensurables; 2.º que sean inconmensurables.

Primer caso. (*Fig.* 41). Suponiendo que la medida comun RQ de los arcos MN y PQ esté contenida cinco veces en el arco MN y tres veces en el arco PQ, tendremos

$$MN=5RQ \quad , \quad PQ=3RQ;$$

dividiendo estas igualdades será

$$\frac{MN}{PQ}=\frac{5RQ}{3RQ}, \quad \text{ó} \quad \frac{MN}{PQ}=\frac{5}{3} \quad [1].$$

Trazando radios á los puntos de division de los arcos, el ángulo ABC quedará dividido en cinco ángulos, y el ángulo DEF quedará dividido en tres; además estos ocho ángulos parciales son todos iguales al REQ, porque sus arcos correspondientes son iguales al RQ; luego

$$ABC=5REQ, \qquad DEF=3REQ:$$

dividiendo estas igualdades tendremos

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{5REQ}{3REQ} \quad \text{ó} \quad \frac{ABC}{DEF}=\frac{5}{3} \quad [2].$$

De las igualdades [1] y [2] se deduce evidentemente

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{MN}{PQ}$$

Segundo caso. Si los arcos MN y PQ (*Fig.* 42), correspondientes á los ángulos dados ABC y DEF, son inconmensurables, dividiremos el PQ en cierto número de partes iguales tan pequeñas como queramos, y aplicando una de ellas QR sucesivamente sobre el arco MN, á partir del punto N, quedará un resto MS menor que QR, y los arcos SN y PQ serán conmensurables. Trazando el radio BS tendremos, segun el primer caso,

$$\frac{SBN}{DEF}=\frac{SN}{PQ} \quad [1].$$

Si PQ se divide de nuevo en mayor número de partes iguales, de tal modo que una de éstas sea menor que el resto MS, aplicándola sucesivamente sobre el arco MN se obtendrá un segundo resto que será, con mayor razon, menor que MS, y el punto S se acercará al M cuanto se quiera, pero sin llegar nunca á confundirse con él, por ser los arcos MN y PQ inconmensurables; luego el arco SN y el ángulo SBN son cantidades variables cuyos límites respectivos son el arco MN y el ángulo ABC. Sustituyendo en la igualdad [1] las variables por sus límites [**Arit. 241**] resulta:

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{MN}{PQ}.$$

TEOREMA IV.

58. *Un ángulo tiene por medida su arco correspondiente.*

Sean A y M dos ángulos, a y m sus arcos correspondientes descritos con igual radio. Tenemos por el teorema anterior

$$\frac{A}{M}=\frac{a}{m}.$$

Si M es la unidad elegida para medir los ángulos, la relacion $\frac{A}{M}$ será el valor numérico del ángulo A; si á la vez convenimos en tomar el arco m para unidad de arcos, la relacion $\frac{a}{m}$ será el valor numérico del arco a; luego *el valor numérico de un ángulo es igual al valor numérico del arco correspondiente, siempre que convengamos en elegir para unidad de arcos el arco correspondiente á la unidad de ángulos; por lo tanto para medir un ángulo se mide su arco correspondiente.*

En este sentido debe entenderse el enunciado del teorema.

59. Generalmente se toma para unidad de ángulos el ángulo recto, por consiguiente la unidad de arcos es un cuadrante de radio igual al del arco que se trata de medir.

Para facilitar la medida de los arcos, se considera dividida la circunferencia en 360 partes iguales llamadas *grados*, de modo que un cuadrante tiene 90 grados; cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos*, y cada minuto en 60 *segundos;* las divisiones inferiores al segundo suelen expresarse en decimales.

Un ángulo tiene tantos grados, minutos y segundos como su arco correspondiente; así un ángulo recto tiene 90 grados.

Un arco de 47 *grados* 25 *minutos* y 30 *segundos*, se escribe abreviadamense de este modo:

$$47^\circ\ 25'\ 30''.$$

Existe otra division de la circunferencia en que se considera esta curva dividida en 400 grados, el grado en 100 minutos y el minuto en 100 segundos.

Esta division, poco usada, se llama *centesimal*, y la anteriormente expuesta *sexagesimal*.

La reduccion de grados sexagesimales á centesimales y vice-versa constituye un problema sencillo de Aritmética, en el que no nos detendremos.

60. Dos arcos se llaman *complementarios* ó complemento uno de otro, cuando su suma vale un cuadrante; y *suplementarios*, si la suma vale dos cuadrantes.

Es claro que si dos ángulos son complementarios ó suplementarios tambien lo serán sus arcos, y recíprocamente.

61. Por medio del teorema IV puede medirse un ángulo cualquiera; sin embargo, en algunos casos particulares se halla la medida de un ángulo sin describir el arco correspondiente. Esta ventaja se logra cuando estando el vértice del ángulo en un punto cualquiera, los lados tocan ó cortan una circunferencia.

Los teoremas siguientes tienen por objeto determinar la medida de tales ángulos.

62. *Se llama* ÁNGULO INSCRIPTO *el que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados són dos cuerdas.*

TEOREMA V. (*Fig.* 43).

La medida de un ángulo inscripto es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Pueden ocurrir tres casos: 1.° que el centro de la circunferencia esté en uno de los lados; 2.° que el centro se halle comprendido entre los lados; 3.° que el centro esté fuera del ángulo.

PRIMER CASO. Vamos á demostrar que el ángulo ABC tiene por medida la mitad del arco AC que comprenden sus lados.

Trazo un diámetro MN paralelo al lado AB: el ángulo propuesto ABC es igual al MOC [**32**], y éste tiene por medida su arco correspondiente MC, luego la medida del ángulo ABC es el arco MC.

Ahora bien: $MC = BN$

por corresponder á los ángulos iguales MOC y BON,

$$BN = AM \quad \textbf{[49]};$$

luego $MC = AM$ ó $MC = \frac{AC}{2}$;

por consiguiente la medida del ángulo ABC es $\frac{AC}{2}$.

Segundo caso. Vamos á demostrar que el ángulo ABD tiene por medida la mitad del arco AD.

Tenemos: $ABD = ABC + CBD$;

pero medida del áng. $ABC = \frac{AC}{2}$ [**Primer caso**],

» » $CBD = \frac{CD}{2}$ »

luego medida del áng. $ABD = \frac{AC}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AD}{2}$.

Tercer caso. Sea el ángulo DBE.

Tenemos: $DBE = CBE - CBD$;

pero medida del áng. $CBE = \frac{CE}{2}$ [**Primer caso**],

» » $CBD = \frac{CD}{2}$ »

luego medida del áng. $DBE = \frac{CE}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{DE}{2}$.

Corolarios.

1.° *Todos los ángulos inscriptos* ACB, ADB, AEB (Fig. 44) *que comprenden entre sus lados el mismo arco* AB, *son iguales*.

Porque todos tienen la misma medida, que es la mitad del arco AB.

2.° *El ángulo inscripto* ACB (Fig. 45) *cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro* AB, *es recto*.

Porque su medida es un cuadrante.

TEOREMA VI. (*Fig.* 46).

63. *La medida del ángulo que forman una cuerda y la tangente trazada por uno de sus extremos* [1], *es la mitad del arco comprendido entre los lados del ángulo.*

Pueden ocurrir tres casos: 1.° que el centro esté en la cuerda; 2.° que el centro se halle entre los lados del ángulo; 3.° que el centro esté fuera del ángulo.

PRIMER CASO. Puesto que la cuerda AB pasa por el centro y por el punto de contacto B, es un diámetro perpendicular á la tangente [**48**, **recíp.**]; luego el ángulo ABC es recto y tiene por medida un cuadrante, ó sea la mitad del arco BEA.

SEGUNDO CASO. Sea el ángulo DBC.

Tenemos: $\mathrm{DBC} = \mathrm{DBA} + \mathrm{ABC}$;

pero las medidas de estos ángulos parciales son $\frac{\mathrm{DA}}{2}$ y $\frac{\mathrm{AEB}}{2}$,

luego medida del áng. $\mathrm{DBC} = \frac{\mathrm{DA}}{2} + \frac{\mathrm{AEB}}{2} = \frac{\mathrm{DAEB}}{2}$.

TERCER CASO. Sea el ángulo EBC.

Tenemos: $\mathrm{EBC} = \mathrm{ABC} - \mathrm{ABE}$,

luego medida del áng. $\mathrm{EBC} = \frac{\mathrm{AEB}}{2} - \frac{\mathrm{AE}}{2} = \frac{\mathrm{EB}}{2}$.

TEOREMA VII. (*Fig.* 47).

64. *La medida de un ángulo* ABC *cuyo vértice está entre el centro y la circunferencia* [2], *es la semisuma de los arcos* AC *y* ED *comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de éstos.*

Trazo por el punto D una cuerda DF paralela á EC; el ángulo propuesto ABC es igual al ADF, y éste tiene por medida la mitad del arco ACF, luego

---

1 Estos ángulos suelen llamarse *semi-inscriptos.*

2 Estos ángulos suelen llamarse *interiores excéntricos*, para distinguirlos de los que tienen su vértice en el centro, que se llaman ángulos *en el centro* ó *centrales.*

$$\text{medida del áng. ABC}=\frac{ACF}{2}.$$

Ahora bien: $ACF = AC + CF$,

pero $CF = ED$ [49], luego $ACF = AC + ED$;

por consiguiente medida del áng. $ABC = \dfrac{AC + ED}{2}$.

Teorema VIII.

65. *La medida del ángulo cuyo vértice está fuera del círculo y cuyos lados son dos secantes, una secante y una tangente ó dos tangentes*[1]*, es la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.*

1.° Sea el ángulo ABC (*Fig.* 48) formado por dos secantes.

Trazo por E una cuerda EF paralela á la secante AB; el ángulo propuesto ABC es igual al FEC, y la medida de éste es la mitad del arco FC, luego

$$\text{medida del áng. ABC} = \frac{FC}{2}$$

Ahora bien: $FC = AC - AF = AC - DE$;

luego medida del áng. $ABC = \dfrac{AC-DE}{2}$.

2.° Sea el ángulo ABC (*Fig.* 49) formado por la secante AB y la tangente BC.

Trazo por D una cuerda DF paralela á BC; el ángulo propuesto ABC es igual al ADF, y la medida de éste es $\dfrac{AF}{2}$, luego

$$\text{medida del áng. ABC} = \frac{AF}{2},$$

pero $AF = AFE - FE = AFE - DE$;

luego medida del áng. $ABC = \dfrac{AFE - DE}{2}$.

---

1 Estos ángulos suelen llamarse *exteriores*.

3.° Sea el ángulo ABC (*Fig.* 50) formado por dos tangentes.

Trazo por uno de los puntos de contacto E la cuerda EF paralela á la otra tangente AB; el ángulo ABC es igual al FEC, y la medida de éste es $\frac{\text{FE}}{2}$, luego

$$\text{medida del áng. ABC} = \frac{\text{FE}}{2},$$

pero $\quad \text{FE} = \text{DFE} - \text{DF} = \text{DFE} - \text{DE};$

luego $\text{medida del áng. ABC} = \frac{\text{DFE} - \text{DE}}{2}.$

Escolios.

66. 1.° Si sobre una circunferencia O (*Fig.* 51) tomamos dos arcos iguales AC y DE, y unimos los extremos por medio de rectas DC y AE que se corten, es evidente que en general el punto de interseccion B no coincidirá con el centro O: además el ángulo ABC tiene por medida

$$\frac{\text{AC} + \text{DE}}{2} = \frac{2\text{AC}}{2} = \text{AC},$$

esto es, el arco comprendido entre sus lados; luego *de que un ángulo tenga por medida el arco comprendido entre sus lados, no puede deducirse que el vértice esté en el centro del arco.*

2.° *Si la medida de un ángulo es la mitad del arco comprendido entre sus lados, el vértice estará sobre la circunferencia*; pues si el vértice estuviese en el centro, la medida sería todo el arco, si estuviese entre el centro y la circunferencia, la medida sería mayor que la mitad del arco comprendido, y si estuviese fuera del círculo, dicha medida sería menor que la mitad del arco.

3.° Si suponemos que el ángulo ACB (*Fig.* 44) se mueve de modo que sus lados pasen siempre por los puntos A y B, el vértice describirá el arco ACDEB, y si el ángulo fuese recto (*Fig.* 45) el arco descrito por el vértice sería la semicircunferencia ACB; luego *el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos cuyos lados pasan constantemente por dos puntos fijos* A *y* B, *es una semicircunferencia que tiene por diámetro la recta* AB.

PROBLEMAS RELATIVOS AL LIBRO PRIMERO.

I.—Nociones preliminares.

67. PROBLEMA *es una cuestion práctica en que se propone determinar cosas desconocidas, llamadas incógnitas, por medio de sus relaciones con otras conocidas, llamadas datos.*

Resolver un problema es determinar las cosas desconocidas.

Los problemas de Geometría pueden ser *gráficos y numéricos.*

Los primeros tienen por objeto construir una figura que satisfaga á ciertas condiciones; en los segundos se trata de hallar el valor numérico de una extension.

68. En la resolucion de los problemas gráficos pueden seguirse dos métodos: el *analítico* y el *sintético.*

Si se emplea el analítico hay que proceder del modo siguiente: 1.° se supone resuelto el problema y, sobre los datos del mismo, se hace una construccion aproximada de la incógnita; 2.° sirviéndose de los teoremas conocidos, se procura descubrir relaciones entre los datos y las incógnitas, trazando con este objeto las líneas ó figuras que se crean convenientes para hacer manifiestas dichas relaciones; 3.° se efectúan con exactitud sobre los datos del problema las construcciones conocidas ó fáciles que, segun el análisis anterior, enlazan aquellos con la incógnita.

En algunos casos, sobre todo si el problema es bastante complicado, conviene además demostrar que la solucion cumple con todas las condiciones de la propuesta.

El método analítico es el de invencion y debe emplearse para resolver problemas nuevos.

Consiste el método sintético en enunciar las construcciones conocidas que deben efectuarse para determinar la incógnita ó incógnitas del problema, demostrando despues que la solucion cumple con las condiciones de la propuesta.

Es claro que este método no es propio para inventar: sólo se emplea en la exposicion y demostracion de los procedimientos descubiertos ya por el análisis.

69. Despues de resuelto un problema por cualquier método, puede hacerse la *discusion*, que consiste en examinar las circunstancias variables de los datos, las consiguientes alteraciones en la solucion, y el grado de generalidad del procedimiento.

II.—Problemas.

70. 1.º *Por un punto* A *de una recta* (Fig. 52), *levantar una perpendicular á esta recta.*

ANÁLISIS. Sea AD la perpendicular pedida. Si á los dos lados del punto A tomamos las distancias iguales AB y AC, la AD será perpendicular en el punto medio de BC; luego el punto D equidista de los puntos B y C; por consiguiente buscando un punto equidistante de B y C, dicho punto y el A determinarán la perpendicular pedida.

SÍNTESIS. Tómense las distancias iguales AB y AC; haciendo centro sucesivamente en B y en C, trácense con el mismo radio dos arcos que se corten, para lo que es necesario que el radio sea mayor que AB; únase el punto de interseccion D con A, y la recta AD será la perpendicular pedida.

En efecto: los puntos A y D equidistan de B y C, luego AD es perpendicular á BC [21].

71. 2.º *Desde un punto* A *dado fuera de una recta* (Fig. 53), *bajar una perpendicular á esta recta.*

ANÁLISIS. Sea AD la perpendicular pedida. Si podemos señalar sobre BC dos puntos B y C de los que esté A equidistante, bastará hallar otro punto tambien equidistante de B y C para determinar la perpendicular AD.

SÍNTESIS. Haciendo centro en A descríbase un arco que corte á la recta dada en dos puntos B y C, para lo que es necesario elegir un radio mayor que la distancia entre el punto dado y la recta; describiendo desde los puntos B y C como centros dos arcos de igual radio que se corten en un punto D, este punto y el dado A determinan la perpendicular pedida.

La demostracion es igual á la del teorema anterior.

72. 3.º *En el extremo* B (Fig. 54) *de una recta* AB *que no se puede prolongar en la direccion* AB, *levantar una perpendicular á dicha recta.*

Síntesis.[1] Haciendo centro en un punto O exterior á la recta dada, descríbase una circunferencia que pase por B y corte á la recta AB en otro punto C; por este punto trácese el diámetro CD; únase B con D, y la recta BD será la perpendicular pedida.

En efecto: el ángulo inscripto CBD es recto [62, cor. 2.°], luego BD es perpendicular á AB.

73. 4.° *Dividir una recta* AB (Fig. 55) *en dos partes iguales, por medio de una perpendicular.*

Haciendo cento en A, con un radio mayor que la mitad de AB, descríbanse dos arcos, uno por encima y otro por debajo de AB; hágase despues centro en B, y con el radio anterior, descríbanse otros dos arcos que corten á los primeros: uniendo los puntos de interseccion C y D, la recta CD será perpendicular á AB y la dividirá en dos partes iguales [21].

74. 5.° *En un punto* D (Fig. 56) *de una recta* DE *formar un ángulo igual á otro dado* ABC.

Trácese, con un radio cualquiera, el arco *mn* correspondiente al ángulo dado; haciendo centro en D descríbase con el mismo radio un arco indefinido: tómese una parte *pq* igual al arco *mn*; y por los puntos D y *q* tírese la DF: el ángulo FDE será igual al ABC, por serlo los arcos correspondientes.

75. 6.° *Dividir un ángulo dado* ABC (Fig. 57) *en dos partes iguales.*

Descríbase con un radio arbitrario el arco DE correspondiente al ángulo dado; haciendo centro sucesivamente en D y E descríbanse dos arcos de igual radio que se corten; uniendo el punto de interseccion F con el vértice B, la recta BF será la bisectriz del ángulo ABC.

En efecto: la recta BF es perpendicular á la cuerda DE, y como aquella pasa por el centro del arco, divide á

---

1 Omitimos en el texto el análisis de este problema porque nos parece algo difícil para principiantes; sin embargo, para darlo á conocer á los alumnos más aventajados, lo exponemos á continuacion.

Análisis. Suponiendo trazada la perpendicular BD, describamos desde un punto O, *exterior* á la recta dada AB, una circunferencia que corte á dicha recta en dos puntos, uno de ellos el dado B. Es claro que la curva cortará á la perpendicular BD en otro punto D, de lo contrario sería BD tangente á la circunferencia y AB pasaria por el centro; segun esto, el ángulo recto ABD es un ángulo inscripto y debe abrazar entre sus lados media circunferencia; luego *la recta* CD *que une los puntos de interseccion* C *y* D *es un diámetro.*

De esta conclusion nace fácilmente la síntesis.

En adelante expondremos el análisis de un problema tan solo cuando lo reclame su importancia.

éste en dos partes iguales DG y GE; luego los ángulos ABF y FBC correspondientes á estos arcos iguales son tambien iguales.

76. 7.° *Por un punto* C (Fig. 58) *dado fuera de una recta* AB, *trazar una paralela á esta recta.*

Haciendo centro en el punto dado C y con el mayor radio posible, descríbase un arco DE; con el mismo radio y haciendo centro en D descríbase otro arco CF; mídase la cuerda CF y llévese sobre el arco DE á partir del punto D; únase el punto E con el C, y resultará la paralela pedida EC.

En efecto: los arcos de igual radio CF y ED son iguales [**44, recip.**], por consiguiente si trazamos la secante CD, los ángulos alternos internos CDF y ECD tambien serán iguales, y las rectas EC y AB serán paralelas [**28**].

77. 8.° *Por un punto* C (Fig. 59) *dado fuera de una recta* AB, *trazar otra que forme con la primera un ángulo igual á otro dado* M.

Tómese un punto cualquiera D en la recta AB, y tírese por él una recta DE que forme con la AB un ángulo EDB igual al M; trácese por el punto dado C una paralela á la DE y estará resuelto el problema.

En efecto: los ángulos CFB y EDB son iguales por correspondientes, y como el último se ha construido igual al M, resulta CFB=M.

78. 9.° *Describir una circunferencia que pase por tres puntos dados* A, B, C (Fig. 60).

Levántese una perpendicular en el punto medio de AB, y otra en el medio de BC; el punto interseccion O de estas perpendiculares es el centro de la circunferencia, y la distancia de O á cualquiera de los puntos A, B, C será el radio [**43**].

Ya se sabe que si los puntos dados están en línea recta el problema es imposible.

79. 10.° *Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco.*

Señálense tres puntos en la curva y procédase como en el problema anterior.

80. 11.° *Por un punto de una circunferencia trazar una tangente á esta curva.*

Tírese el radio correspondiente al punto dado; levántese por este punto una perpendicular á dicho radio, y se tendrá la tangente pedida [**48**].

81. 12.° *Por un punto* A (Fig. 61) *exterior á una circunferencia* O, *trazar tangentes á esta curva.*

Únase el punto dado A con el centro O; sobre OA como diámetro descríbase la circunferencia O′; uniendo los puntos de interseccion B y C de las circunferencias con el punto A, las rectas AB y AC serán las tangentes pedidas.

En efecto: si trazamos los radios OB y OC, los ángulos inscriptos ABO, ACO que abrazan entre sus lados media circunferencia, serán rectos; luego AB y AC son perpendiculares respectivamente á los radios OB y OC, por consiguiente son tangentes á la circunferencia O.

Escolios.

1.° Si doblamos la figura por la recta OO′, las semicircunferencias ACO y DCE coincidirán respectivamente con las ABO y DBE, y el punto C caerá á la vez sobre estas dos últimas, luego coincidirá con B; de aquí se deduce

$$AB = AC, \quad BAO = CAO.$$

Podremos, pues, decir: *las tangentes dirigidas á una circunferencia desde un punto exterior son iguales, y la recta que une dicho punto con el centro es bisectriz del ángulo formado por aquellas.*

2.° *La bisectriz del ángulo* BAC *formado por dos tangentes á una circunferencia, pasa por el centro de ésta.*

Si la bisectriz no pasara por el centro O, como AO es bisectriz del ángulo BAC, podria dividirse este ángulo en dos partes iguales por dos rectas diferentes, lo que es absurdo.

82. 13.° *Describir sobre una recta dada* AB (Fig. 62) *un arco capaz de un ángulo dado* M, *esto es, describir un arco tal, que los ángulos que tengan su vértice en él y cuyos lados pasen por los extremos de la recta* AB *sean iguales al ángulo dado* M.

En un extremo B de la recta dada constrúyase un ángulo ABC igual al dado M; levántese una perpendicular DO á la AB por su punto medio y otra BO á la BC por el punto B; estas dos perpendiculares se encuentran en un punto O, porque OD es perpendicular y OB oblícua á la AB. Haciendo centro en O y describiendo con el radio OA un arco AFB queda resuelto el problema.

En efecto: todo ángulo AEB inscripto en el arco AFB y cuyos lados pasen por A y B, tiene por medida la mitad del arco AB; además siendo BC perpendicular al radio OB y por lo tanto tangente á la circunferencia, el ángulo ABC tiene tambien por medida la mitad del arco AB; luego AEB = ABC = M.

LIBRO SEGUNDO.

DE LOS POLÍGONOS.

Definiciones.

83. POLÍGONO *es una porcion de superficie plana terminada por líneas rectas*, que se llaman LADOS.

Perímetro de un polígono es el conjunto de todos sus lados.

Un polígono es *convexo* cuando su perímetro no puede ser cortado por una línea recta en mas de dos puntos; y *cóncavo* en el caso contrario.

Nosotros sólo nos ocuparemos de los polígonos convexos.

Ángulos *adyacentes* á un lado de un polígono son los que tienen sus vértices en los extremos de dicho lado.

Diagonal de un polígono es toda recta que une dos vértices no adyacentes al mismo lado.

84. Es evidente que el número menor de rectas necesarias para formar un polígono es tres.

El polígono de	tres	lados	se llama	*triángulo*,
»	cuatro	»	»	*cuadrilátero*,
»	cinco	»	»	*pentágono*,
»	seis	»	»	*exágono*,
»	siete	»	»	*eptágono*,
»	ocho	»	»	*octógono*,
»	nueve	»	»	*eneágono*,
»	diez	»	»	*decágono*,
»	once	»	»	*endecágono*,
»	doce	»	»	*dodecágono*,
»	quince	»	»	*pentedecágono*.

CAPÍTULO PRIMERO.

TRIÁNGULOS.

TEOREMA I. (*Fig.* 63).

85. *Un lado cualquiera de un triángulo es: 1.º menor que la suma de los otros dos lados; 2.º mayor que su diferencia.*

1.º En el triángulo ABC tenemos

$$AB < AC + CB,$$

puesto que el camino más corto entre los puntos A y B es la recta AB que los une.

El mismo razonamiento haríamos para los otros dos lados.

2.º Acabamos de ver que

$$AC < AB + BC;$$

restando ahora la recta BC de los dos miembros de esta desigualdad, será

$$AC - BC < AB \quad \text{ó bien} \quad AB > AC - BC,$$

lo que demuestra la segunda parte del teorema. [1]

TEOREMA II. (*Fig.* 64).

86. *La suma de los tres ángulos de un triángulo* ABC *es igual á dos ángulos rectos.*

Trazando por uno de los vertices B del triángulo una paralela BD al lado opuesto AC, tendremos [**33**]

$$\acute{a}ng.\ A + \acute{a}ng.\ ABD = 2R;$$

pero el ángulo ABD es igual al ABC más el CBD; luego

$$\acute{a}ng.\ A + \acute{a}ng.\ ABC + \acute{a}ng.\ CBD = 2R;$$

poniendo en lugar del ángulo CBD su igual ACB ó C [**31**], tendremos por último.

$$\acute{a}ng.\ A + \acute{a}ng.\ ABC + \acute{a}ng.\ C = 2R.$$

COROLARIOS.

1.º *El ángulo externo* CBD Fig. 63), *formado por un*

1 Este razonamiento es una repeticion del expuesto en el número 53, 3.º

lado CB *de un triángulo y la prolongacion* BD *de otro lado, es igual á la suma de los ángulos internos* A *y* C *no adyacentes.*

En efecto: CBD = 2R — CBA [**10**],
A+C= 2R — CBA [**Teorema anterior**].
luego CBD = A + C.

2.° *Si un ángulo de un triángulo es recto ú obtuso, los otros dos serán agudos.*

De lo contrario la suma de los tres ángulos valdria más de dos rectos.

3.° *Si desde un punto* P *de un lado de un ángulo agudo* ABC (Fig. 65) *si baja una perpendicular al otro lado* BC, *esta perpendicular caerá dentro del ángulo.*

Pues si cayese fuera, como la PF, resultaria un triángulo PFB con un ángulo obtuso PBF y otro recto PFB, lo que es imposible.

4.° *Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, el tercer ángulo del primer triángulo será igual al del segundo.*

Puesto que el tercer ángulo de cada triángulo es lo que falta á la suma de los otros dos para valer dos rectos, y las dos sumas son iguales por hipótesis.

Se llama *triángulo rectangulo* el que tiene un ángulo recto, *obtusángulo* el que tiene un ángulo obtuso, y *acutángulo* el que tiene sus tres ángulos agudos.

En el triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos*, y el tercer lado, ó sea el opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa.*

5.° *Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.*

87. Se llama *triángulo equilátero* el que tiene sus tres lados iguales, *isósceles* el que sólo tiene dos lados iguales, y *escaleno* el que tiene sus tres lados desiguales.

Base de un triángulo es uno cualquiera de sus lados, y *vértice* el vértice del ángulo opuesto á la base.

Altura de un triángulo es una perpendicular trazada desde el vértice á la base, prolongada si es preciso.

Si elegimos para base del triángulo ABC (*Fig.* 66) el lado AC, el vértice será B y la altura BD; si AB se considera como base, será C el vértice y la altura CE.

En el triángulo isósceles suele llamarse base al lado desigual, y ángulos *en la base* á los adyacentes á dicho lado; así en el triángulo isósceles ABC (*Fig.* 67) será AB la base, C el vértice, CD la altura, y los ángulos A y B serán los ángulos en la base.

TEOREMA III.

88. *Si un triángulo tiene dos lados iguales, los ángulos opuestos son iguales; y si tiene dos lados desiguales, á mayor lado se opone mayor ángulo.*

1.° *Fig.* 67. Supongamos AC = BC; vamos á demostrar que *áng.* B = *áng.* A.

Levanto una perpendicular CD en el medio de la base AB, la que pasará por el punto C equidistante de A y B; doblando la figura por la perpendicular CD, la parte DB seguirá la direccion DA y el punto B caerá sobre A, luego BC coincidirá con AC y los ángulos B y A serán iguales.

2.° *Fig.* 68. Sea AC > BC; demostremos que *áng.* ABC > *áng.* A.

Puesto que el lado AC es mayor que el BC, puede tomarse en el primero una parte CD igual á BC, y trazando la recta BD resultará un triángulo BCD con dos lados BC y CD iguales; por consiguiente, segun la primera parte, será

áng. CDB = *áng.* CBD.

Ahora bien, el ángulo CDB es igual al ángulo A más el DBA [**86, cor. 1.°**], luego es mayor que el ángulo A, por consiguiente CBD es tambien mayor que A, y con más razon

áng. CBA > *áng.* A.

89. TEOREMA RECÍPROCO. *Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos son iguales; y si tiene dos ángulos desiguales, á mayor ángulo se opone mayor lado* [**20**].

COROLARIOS.

90. 1.° *Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.*

Es evidente que estos ángulos son necesariamente agudos.

2.° *La bisectriz* CD (Fig. 67) *del ángulo en el vértice* *de un triángulo isósceles, es perpendicular á la base y la divide en dos partes iguales.*

Siendo los ángulos en C iguales y A = B, los ángulos en D serán tambien iguales, y por tanto rectos; además la perpendicular levantada á AB por su punto medio D pasa por C y se confunde por tanto con DC [**14**], luego AD = BD.

3.° *Todo triángulo equilátero es equiángulo y recíprocamente.*

4.° *En todo triángulo rectángulo el lado mayor es la hipotenusa; y en todo triángulo obtusángulo el lado mayor es el opuesto al ángulo obtuso.*

91. Se llaman figuras *iguales* las que coinciden en toda su extension cuando se suponen superpuestas. Es evidente que dos polígonos serán iguales si todos sus vértices coinciden.

Teorema IV. (*Fig.* 69).

92. *Dos triángulos* ABC *y* DEF *son iguales cuando tienen un lado igual* AB = DE *adyacente á dos ángulos respectivamente iguales* A=D, B=E.

Imaginemos colocado el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que el lado DE coincida con AB y que el punto F caiga hácia el mismo lado de la recta AB que el punto C: el lado DF seguirá la direccion AC, por ser iguales los ángulos A y D, y el lado EF seguirá la direccion BC por análoga razon; luego el punto F, comun á los lados DF y EF, deberá estar á la vez en AC y BC, para lo cual tiene que coincidir con C; por consiguiente los triángulos son iguales.

Corolario. *Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen iguales la hipotenusa y un ángulo agudo.*

Teorema V. (*Fig.* 69).

93. *Dos triángulos* ABC *y* DEF *son iguales cuando tienen dos lados respectivamente iguales* AC=DF, AB=DE, *é igual el ángulo comprendido* A=D.

Coloco el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que el lado DE coincida con AB y que el punto F caiga hácia el mismo lado de la AB que el punto C: el lado DF seguirá la direccion AC, por ser A=D, y el vértice F coincidirá con C, por ser AC=DF; luego los triángulos serán iguales.

Corolario. *Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen los catetos respectivamente iguales.*

Teorema VI. *(Fig. 69).*

94. *Dos triángulos* ABC *y* DEF *son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales* AB=DE, AC=DF, BC=EF.

Si concebimos dos circunferencias cuyos centros sean los vértices A y B y los radios AC y BC, es evidente que se cortarán en C, fuera de la recta AB que une sus centros, y tendrán además otro punto comun situado por debajo de AB [**51**]. Colocando el triángulo DEF sobre el ABC de modo que el lado DE coincida con AB y que el punto F caiga hácia el mismo lado de la AB que el punto C, dicho punto F se colocará en la circunferencia cuyo centro es A, por ser DF igual al radio AC, y en la circunferencia cuyo centro es B, por ser EF igual al radio BC, y como F está situado por encima de AB coincidirá con el punto C comun á dichas circunferencias, y los triángulos ABC y DEF serán iguales.

Teorema VII. *(Fig. 70).*

95. *Dos triángulos rectángulos* ABC *y* DEF *son iguales cuando tienen las hipotenusas iguales* BC=EF, *y un cateto* AC *igual á otro* DF.

Coloco el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que el cateto DF coincida con su igual AC y que el punto E caiga hácia el mismo lado de la AC que el punto B: el lado DE seguirá la direccion AB, por ser iguales los ángulos A y D, y el punto E caerá sobre el B, porque siendo BC y EF oblícuas iguales con respecto á la AB tienen que apartarse igualmente de la perpendicular AC; luego los triángulos propuestos son iguales.

Escolios.

96. 1.º En todos los casos de igualdad de triángulos que hemos expuesto se observará que dos lados, uno de cada triángulo, opuestos á ángulos iguales son iguales; y que dos ángulos opuestos á lados iguales son tambien iguales.

2.° Para demostrar la igualdad de dos rectas ó de dos ángulos bastará hacer ver que pertenecen á triángulos iguales y que ocupan en ellos la misma posicion.

TEOREMA VIII. (*Fig.* 71).

97. *Si dos triángulos* ABC *y* DEF *tienen dos lados respectivamente iguales* AC=DF, AB=DE, *y el ángulo* CAB *comprendido por los lados del primero es mayor que el* FDE *comprendido por los lados del segundo, el tercer lado* BC *del primer triángulo es mayor que el tercer lado* EF *del segundo.*

Coloco el triángulo DEF sobre el ABC de modo que el lado DE coincida con su igual AB y que los triángulos resulten situados al mismo lado de la AB; siendo el ángulo CAB mayor que el D, la recta DF caerá entre las AC y AB, y el triángulo DEF tomará la posicion ABF′. Trazando la bisectriz AG del ángulo CAF′ y uniendo el punto G con F′ resultan los triángulos AGC y AGF′, que son iguales por tener dos lados iguales AG=AG, AC=AF′ é igual el ángulo comprendido, luego CG = GF′. Ahora, en el triángulo BGF′ tenemos

$$BG + GF' > BF',$$

poniendo CG en lugar de GF′, será

$$BG + CG > BF' \text{ ó } BC > EF,$$

puesto que BF′ es el lado EF en otra posicion.

Si el punto F′ cayese sobre el lado BC, seria evidentemente BC > BF′ ó BC > EF.

Puede ocurrir tambien que el punto F′ caiga dentro del triángulo ABC: la demostracion en este caso es enteramente igual á la expuesta en el primero.

98. TEOREMA RECÍPROCO (Fig. 71). *Si dos triángulos* ABC *y* DEF *tienen dos lados respectivamente iguales* AC=DF, AB=DE, *y el tercer lado* BC *del primero es mayor que el tercer lado* EF *del segundo, el ángulo* CAB *opuesto al tercer lado del primer triángulo es mayor que el ángulo* D *opuesto al tercer lado del segundo.*

El ángulo CAB no puede ser igual al D, porque entonces los triángulos propuestos serian iguales [**93**], y tendríamos BC=EF, lo que es contrario á la hipótesis; tampoco puede ser CAB menor que D, porque en tal caso sería, segun el teorema directo, BC < EF, lo que tambien es contrario á la hipótesis; luego

áng. CAB > *áng.* D.

CAPÍTULO SEGUNDO.

CUADRILÁTEROS.

99. *Se llama* TRAPEZOIDE *un cuadrilátero que no tiene dos lados paralelos.* (Fig. 72).

Se llama TRAPECIO *un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros dos no paralelos.* ABCD (Fig. 80).

Se llama PARALELÓGRAMO *un cuadrilátero que tiene sus lados paralelos dos á dos* (Fig. 73).

TEOREMA I. *(Fig. 73).*

100. *Los lados opuestos de un paralelógramo son iguales.*

Trazo la diagonal DB: los triángulos ABD y DBC son iguales, porque tienen un lado BD igual por comun, el ángulo 1 igual al 2 por alternos internos, y el 3 igual al 4 por la misma razon; luego AD=BC, DC=AB [**96**].

COROLARIOS.

1.° *Las partes de dos rectas paralelas comprendidas entre otras dos paralelas, son iguales.*

Por ser lados opuestos de un paralelógramo.

2.° (Fig. 74). *Si dos rectas son paralelas todos los puntos de una de ellas equidistan de la otra.*

En efecto: las distancias de los puntos A y B á la recta CD son dos perpendiculares AC y BD trazadas á la CD desde dichos puntos, por consiguiente son rectas paralelas comprendidas entre otras dos paralelas AB y CD; luego AC=BD.

101. La perpendicular bajada desde un punto de una paralela á la otra, se llama *distancia* entre ellas.

Base de un paralelógramo es uno cualquiera de sus lados, y *altura* la distancia entre la base y su lado opuesto.

En el trapecio se llaman *bases* los dos lados paralelos, y *altura* la distancia entre las bases.

102. TEOREMA RECÍPROCO. *(Fig. 73). Si los lados opues-*

tos de un cuadrilátero son iguales dos á dos, AD=BC, AB=DC. *el cuadrilátero será paralelógramo.*

Trazando la diagonal BD resultarán dos triángulos ABD, BDC iguales, por tener el lado BD comun, AD=BC y AB=DC por hipótesis; de la igualdad de los triángulos se deduce *áng.* 1=*áng.* 2, luego AB y DC son paralelas [**28**], y *áng.* 3 = *áng.* 4, luego AD y BC tambien son paralelas; por tanto la figura ABCD es un paralelógramo.

Teorema II. (*Fig.* 73).

103. *Si dos lados opuestos* AB *y* DC *de un cuadrilátero son iguales y paralelos, el cuadrilátero será paralelógramo.*

Trazo la diagonal BD: los triángulos ABD y BDC tienen un lado BD igual por comun, otro lado tambien igual AB=DC por hipótesis, y el ángulo comprendido 1 igual al 2 por alternos entre paralelas, luego son iguales [**93**], de donde se deduce *áng.* 3=*áng.* 4; luego las rectas AD y BC son paralelas [**28**], y la figura es un paralelógramo.

Teorema III. (*Fig.* 75).

104. *Las diagonales de un paralelógramo se dividen mútuamente en dos partes iguales.*

Los triángulos AOB y DOC tienen un lado AB=DC [**100**], el ángulo 1 igual al 2, por alternos entre paralelas, y el 3 igual al 4, por la misma razon; luego son iguales, y

OC=OA, OD=OB.

105. Teorema recíproco. (*Fig.* 75). *Si las diagonales de un cuadrilátero se dividen mútuamente en dos partes iguales, el cuadrilátero será paralelógramo.*

Tenemos por hipótesis AO=OC, OB=OD; además el ángulo AOB es igual al DOC por opuestos por el vértice, luego los triángulos AOB y DOC son iguales. De aquí se deduce AB=CD, *áng.* 1= *áng.* 2, y como estos ángulos son alternos, los lados iguales AB y CD del cuadrilátero son además paralelos; luego, segun el teorema II, el cuadrilátero ABCD es un parelelógramo.

Teorema IV. (*Fig.* 76).

106. *Dos paralelógramos* ABCD *y* EFGH *son iguales* *cuando tienen un ángulo igual* A=E *formado por lados respectivamente iguales* AB=EF, AD=EH.

Coloco el segundo paralelógramo sobre el primero de modo que el lado EF coincida con AB: el lado EH seguirá la direccion AD y el punto H caerá en D; las rectas DC y HG serán paralelas á AB por un mismo punto D, luego coincidirán [**25**], y lo mismo sucederá á las BC y FG paralelas á AD por el punto B; luego el punto G caerá sobre el C y los paralelógramos serán iguales.

107. Romboide *es un paralelógramo que tiene los lados que forman un ángulo desiguales, como tambien los ángulos adyacentes á un mismo lado.* (Fig. 75).

Rombo *es un paralelógramo cuyos lados son todos iguales.* (Fig. 77).

Rectángulo *es un paralelógramo cuyos ángulos son todos rectos.* (Fig. 78).

Cuadrado *es un paralelógramo cuyos ángulos son rectos y los lados iguales.* (Fig. 79).

Es evidente que el romboide, el rombo, el rectángulo y el cuadrado poseen todas las propiedades demostradas anteriormente para los paralelógramos en general.

Obsérvese que todo cuadrado es rombo, por tener iguales sus lados, y rectángulo, por tener los ángulos rectos; sin embargo, la denominacion de rombo se aplica más especialmente al paralelógramo cuyos lados son iguales *y los ángulos adyacentes á un mismo lado, desiguales;* y la de rectángulo al paralelógramo cuyos ángulos son rectos *y los lados que forman un ángulo, desiguales.*

Teorema V. *(Fig. 77).*

108. *Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.*

Siendo iguales los lados del rombo, el punto C equidista de B y D, y el punto A equidista tambien de B y D: luego la recta CA es perpendicular á la DB.

109. Teorema recíproco. *(Fig. 77). Si las diagonales de un paralelógramo son perpendiculares entre sí, el paralelógramo es rombo.*

La diagonal AC es perpendicular á BD por hipótesis, y pasa por su punto medio O [**104**], luego CD=CB, y como CD es igual á AB y CB á AD, los cuatro lados son iguales, y el paralelógramo ABCD es un rombo.

Teorema VI. (*Fig.* 78).

110. *Las diagonales de un rectángulo son iguales.*

Los triángulos ABC y ABD son iguales, porque tienen el lado AB igual por comun, BC=AD por lados opuestos de un paralelógramo, y el ángulo comprendido ABC=DAB por ser ambos rectos; luego AC=BD.

111. Teorema recíproco. (*Fig.* 78). *Si las diagonales de un paralelógramo son iguales, el paralelógramo es rectángulo.*

Siendo AC = BD por hipótesis, BC=AD por lados opuestos de un paralelógramo y AB=AB, los triángulos ABC y ABD son iguales, por tanto *áng.* ABC=*áng.* DAB; pero la suma de estos ángulos vale dos rectos [**33**], luego cada uno de ellos es recto. Además *áng.* DCB=*áng.* DAB, por tener los lados paralelos y dirigidos en sentidos contrarios, *áng.* ADC=*áng.* ABC, por igual razon; luego los cuatro ángulos son rectos, y el paralelógramo es rectángulo.

112. Puesto que el cuadrado es paralelógramo, rectángulo y rombo, reune todas las propiedades de estas figuras; diremos, pues,

Las diagonales de un cuadrado (Fig. 79) *se dividen mútuamente en dos partes iguales, son iguales y perpendiculares entre sí.*

Recíprocamente. *Si las diagonales de un cuadrilátero se dividen mútuamente en dos partes iguales, son iguales y perpendiculares entre sí, el cuadrilátero es cuadrado.*

Teorema VII. (*Fig.* 80).

113. *La recta* EF *que une los puntos medios de los lados* AD *y* BC *no paralelos de un trapecio, es: 1.º paralela á las bases; 2.º igual á su semisuma.*

1.º Por el punto medio F del lado BC trazo la GH paralela á AD, y prolongo DC hasta que encuentre en H á la GH: los triángulos CFH y BFG son iguales, por tener un lado igual CF=FB adyacente á dos ángulos respectivamente iguales CFH=BFG, FCH=FBG; luego

$$FH = FG \quad \text{ó bien} \quad FH = \frac{1}{2} GH.$$

Ahora bien, en el paralelógramo AGHD tenemos AD=

GH, luego $\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}GH$, ó sea $ED = FH$: por tanto el cuadrilátero EFHD tiene dos lados iguales y paralelos, luego es un paralelógramo, de donde se deduce que EF es paralela á DC y por consiguiente á AB.

2.° Siendo iguales los triángulos CFH y BFG, será $CH = BG$. Ahora bien,

$$EF = DH = DC + CH$$

$$EF = AG = AB - BG;$$

luego
$$2EF = DC + AB,$$

y
$$EF = \frac{DC + AB}{2}.$$

CAPÍTULO TERCERO.

POLÍGONOS EN GENERAL.

Teorema I. *(Fig. 81).*

114. *La suma de los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos.*

Desde uno de los vértices A del polígono ABCDEF trazo las diagonales posibles AC, AD, etc., las que dividen el polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos; porque los *dos* triángulos extremos AFE y ABC contienen *cuatro* lados del polígono, y cada uno de los demás contiene un lado. Los ángulos de los triángulos equivalen evidentemente á los del polígono, y como los de cada triángulo valen dos rectos, los del polígono valdrán tantas veces dos rectos como triángulos haya, esto es, tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos.

Escolio. Si representamos por S la suma de los ángulos del polígono y por n el número de lados, tendremos

$$S = 2R\,(n-2) \quad \text{ó} \quad S = 2Rn - 4R.$$

Esta última igualdad permite enunciar el teorema del modo siguiente:

La suma de los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene, menos cuatro rectos.

TEOREMA II. (*Fig* 82).

115. *La suma de los ángulos externos* CBG, DCH, EDL *etc., que se forman prolongando todos los lados de un polígono en un mismo sentido, es igual á cuatro ángulos rectos.*

En un vértice cualquiera B del polígono se forman dos ángulos adyacentes, uno externo CBG y otro interno ABC, que juntos valen dos rectos; por consiguiente la suma de todos los ángulos, tanto externos como internos, será $2Rn$; si restamos de ella el valor de los ángulos internos, que es $2Rn—4R$, la diferencia

$$2Rn-(2Rn-4R)=4R$$

será el valor de los externos.

COROLARIO. *Un polígono no puede tener mas de tres ángulos agudos.*

Pues si tuviese cuatro, los externos adyacentes, que serian obtusos, valdrian más de cuatro rectos.

TEOREMA III. (*Fig.* 83).

116. *Dos polígonos son iguales cuando tienen sus lados y sus ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos*, esto es, AB = FG, BC = GH, etc. ABC = FGH, BCD = GHI etc.

Coloco el polígono FGHIK sobre el ABCDE de modo que el lado FG coincida con su igual AB, y que los polígonos queden situados al mismo lado de la recta AB: el lado GH seguirá la direccion BC, por ser iguales los ángulos B y G, y el vértice H caerá en C, por ser GH=BC; tambien HI seguirá la direccion CD y el punto I caerá en D, y así sucesivamente; luego los polígonos son iguales.

TEOREMA IV. (*Fig.* 83).

117. *Dos polígonos son iguales cuando están compuestos del mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos.*

Los lados de los polígonos son respectivamente iguales, por pertenecer á triángulos iguales; los ángulos B y E son iguales á G y K por la misma razon: en cuanto á los ángulos A, C y D son tambien iguales á F, H é I, por componerse de igual número de ángulos iguales; luego los polígonos tienen lados y ángulos iguales, por consiguiente son iguales.

118. Teorema recíproco. *(Fig. 83). Dos polígonos iguales pueden descomponerse en igual número de triángulos iguales é igualmente dispuestos.*

Trazando desde los vértices A y F todas las diagonales posibles, quedan descompuestos los polígonos en igual número de triángulos; además los triángulos extremos ABC y FGH son iguales por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, y por la misma razon son tambien iguales los triángulos AED y FKI; de la igualdad de los triángulos ABC y FGH se desprende AC=FH, *áng.* ACB=*áng.* FHG; además *áng.* BCD=*áng.* GHI luego *áng.* ACD=*áng.* FHI; por consiguiente los triángulos ACD y FHI tienen dos lados iguales DC=IH, AC=FH, é igual el ángulo comprendido, luego son iguales.

PROBLEMAS RELATIVOS AL LIBRO SEGUNDO.

119. 1.° *Dado un lado y dos ángulos, construir un triángulo.*

Primer caso. *(Fig. 84)*. Los ángulos dados M y N son adyacentes al lado *m*.

Trazo una recta MN igual al lado *m*, en uno de sus extremos construyo un ángulo PMN igual al M, y en el otro extremo construyo el ángulo PNM igual al N, y quedará resuelto el problema.

Otro triángulo construido con los mismos datos sería igual al PMN [**92**].

Para que el problema sea posible se necesita y basta que los ángulos dados valgan juntos menos de dos rectos, pues si M+N fuese igual ó mayor que dos rectos sería imposible el problema [**86**]; y siendo M+N menor que dos rectos las rectas MP y NP se encuentran [**34**], y por lo tanto hay triángulo.

Segundo caso. *(Fig. 85)*. El ángulo M es adyacente al lado *m*, y el ángulo N es opuesto.

Trazo una recta PM igual al lado *m*, en uno de sus extremos construyo un ángulo PMN igual al M, y en un punto cualquiera A de la recta MN construyo un ángulo BAM igual al N: es evidente que si la recta AB pasase por P estaria resuelto el problema; pero en general no pasará, y para cerrar el triángulo se traza por P una paralela á AB prolongada hasta que encuentre á MN: el triángulo MPN es el pedido, puesto que PM=m, PMN=M, PNM=BAM=N.

Otro triángulo construido con los mismos datos sería igual al PMN, pues tendria un lado igual á PM, un ángulo igual al NMP y el otro ángulo adyacente al lado m, igual al NPM [**86, cor. 1.º**].

En virtud de esta observacion y de otra análoga expuesta en el primer caso, podemos decir:

Un triángulo está determinado si se conoce un lado y dos ángulos cualesquiera.

Para que el problema sea posible en este segundo caso, se necesita y basta que la suma de los ángulos dados sea menor que dos rectos.

Esta condicion es necesaria por lo dicho en el primer caso; y suficiente porque AB encontrará á MP [**34**] formando un triángulo ABM, y la paralela PN á AB encontrará á MN [**25, cor. 1.º**].

120. 2.º *Dados dos lados y el ángulo comprendido, construir un triángulo.*

(*Fig.* 86). Sobre una recta MP igual á uno de los lados conocidos m formo un ángulo NMP igual al dado, tomo á partir del vértice M una longitud MN igual al lado n, y trazando la NP quedará resuelto el problema.

Todo triángulo construido con los mismos datos será igual al NMP; luego

Un triángulo está determinado si se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

Este problema es siempre posible.

121. 3.º *Construir un triángulo conociendo sus tres lados.*

(*Fig.* 87). Trazo una recta MP igual á cualquiera de las dadas, m por ejemplo, haciendo centro sucesivamente en los extremos M y P, con radios iguales á las otras rectas dadas n y p, describo dos arcos que se cortarán en un punto N, uniendo este punto con M y con P, el triángulo que se forma es el pedido.

Otro triángulo construido con los mismos datos sería igual al MNP; luego

Un triángulo está determinado si se conocen sus tres lados.

Para que el triángulo sea posible es necesario que uno cualquiera de los lados sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia [**85**]. Tambien es suficiente esta condicion, porque en virtud de ella los arcos descritos desde M y Pcomo centros se cortarán fuera de la recta MP [**53**, **recíp. 3.º**], y habrá así triángulo.

La doble condicion enunciada puede sustituirse por la siguiente: *para que el triángulo sea posible se necesita y basta que el lado mayor sea menor que la suma de los otros dos*. Es evidente, en efecto, que verificándose esta condicion se verificará la anterior.

122. 4.º *Construir un triángulo conociendo dos lados* m *y* n (Fig. 88) *y el ángulo* M *opuesto á uno de ellos* m.

Construyo un ángulo PMN igual al dado M, tomo en uno de los lados una parte MP igual al lado n, y haciendo centro en P describo con un radio igual á m un arco NN' que, en general, cortará al lado MN en dos puntos N y N'; trazo la PN, y el triángulo PMN resuelve el problema, puesto que $PM=n$, $PN=m$, *áng.* PMN=*áng.* M.

Discusion. Al resolver este problema pueden ocurrir tres casos principales: 1.º que el lado m opuesto al ángulo dado sea mayor que n; 2.º que sea $m=n$; 3.º que sea $m<n$,

Primer caso. Fig. 1. Si $m>n$ será tambien m mayor que la perpendicular PQ, y el arco descrito desde P cortará á la recta MN en dos puntos N y N' equidistantes del pié Q de la perpendicular: ya sabemos que uniendo el primero de ellos N con P resulta la solucion del problema, pero no se obtendrá otra solucion uniendo N' con P. En efecto, siendo $PM<PN'$ resulta $QM<QN'$, y N' se encuentra por lo tanto á la izquierda de M, luego el ángulo PMN' opuesto al lado m no es igual al ángulo dado M, sino suplemento del mismo.

Vemos, pues, que en este caso el problema tiene una solucion.

Segundo caso. Fig. 2. Si $m=n$, el ángulo dado M debe ser agudo para que haya triángulo [**90**, **1.º**]. El lado m es mayor que la perpendicular PQ, por consiguiente el arco descrito desde P como centro corta á MN en dos puntos, uno de ellos el mismo vértice M; luego en este caso la solucion del problema es el triángulo isósceles PMN.

Tercer caso. Fig. 3. Si $m<n$, el ángulo M será menor que N, luego el primero debe ser agudo, pues si fuese recto ú obtuso, el ángulo N seria obtuso, lo que es imposible

[**86, cor. 2.°**]. Si m es mayor que la perpendicular PQ, el arco descrito desde P como centro cortará á MN en dos puntos N y N'. Uniendo N con P resulta el triángulo MNP, que es solucion del problema; en cuanto al punto N' cae necesariamente á la derecha del punto M, pues siendo $PN' < PM$ debe ser $QN' < QM$, por consiguiente uniendo N' con P resultará un triángulo MN'P con un lado $PN' = m$, otro lado $PM = n$, y el ángulo PMN' igual al dado M; luego el problema tiene dos soluciones.

Obsérvese que el ángulo PNM, opuesto al lado m en la primera solucion, es suplemento del ángulo PN'M, opuesto al mismo lado en la segunda, puesto que

$$PN'M + PN'N = 2R$$

ó

$$PN'M + PNM = 2R.$$

Si m es igual á la perpendicular PQ, el arco descrito desde P es tangente á MN en el punto Q, y la solucion del problema es el triángulo rectángulo PMQ.

Por último, si m es menor que la perpendicular PQ, el arco no tiene con MN ningun punto comun y el triángulo es imposible.

Vemos que en este tercer caso el problema puede tener dos soluciones, una sola ó ninguna.

123. 5.° *Construir un triángulo rectángulo dado un cateto y un ángulo agudo.*

Como en el triángulo rectángulo se conoce el ángulo recto, la cuestion propuesta es un caso particular del problema 1.°

124. 6.° *Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa* m *y un ángulo agudo* M.

Tambien este problema es un caso particular del 1.°; sin embargo, es conveniente saber la siguiente construccion especial.

Fig. 89. Sobre una recta MN igual á la hipotenusa m, considerada como diámetro, describo una semicircunferencia; en un extremo M del diámetro formo un ángulo PMN igual al dado M: uniendo el punto P en que la recta MP corta á la semicircunferencia con el otro extremo N, queda resuelto el problema.

125. 7.° *Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.*

Es un caso particular del problema 4.°

Otra construccion. Fig. 89. Sobre la hipotenusa MN como diámetro describo una semicircunferencia, llevo á partir de un extremo M la cuerda MP igual al cateto dado, y uniendo P con N queda resuelto el problema.

126. 8.° *Construir un paralelógramo conociendo dos lados y el ángulo comprendido.*

Fig. 73. Trazo una recta AB igual á uno de los lados conocidos; en un extremo A de la misma formo un ángulo DAB igual al dado; tomo una longitud AD igual al otro lado conocido, y trazando dos paralelas, una por D á la recta AB y otra por B á la AD, quedará construido el paralelógramo.

Escolio. Este problema es siempre posible, y sólo tiene una solucion [**106**].

127. 9.° *Construir un polígono igual á otro dado* ABCDE. Fig. 83.

1.ª *construccion.* Trácese una recta FG igual á un lado AB del polígono dado; en el extremo G de la misma fórmese un ángulo igual al B; tómese GH=BC; fórmese en H un ángulo igual al BCD; y continuando del mismo modo se formará el polígono FGHIK igual al dado [**116**].

2.ª *construccion.* Descompóngase el polígono dado en triángulos, por medio de diagonales; constrúyase un triángulo FGH igual al ABC; sobre la recta FH constrúyase otro triángulo FHI igual al ACD, y así sucesivamente: el polígono FGHIK que resulta es igual al dado [**117**].

128. 10.° *Circunscribir un círculo á un triángulo* ABC (Fig. 90), esto es, *describir una circunferencia que pase por los vértices del triángulo.*

Este problema ha sido resuelto en el primer libro [**78**]. Entonces vimos que las perpendiculares DO y EO levantadas á las rectas AB y AC por sus puntos medios se cortan en un punto O, centro de la circunferencia que pasa por A, B y C.

Este problema siempre es posible, porque los vértices A, B, C del triángulo no pueden estar en línea recta.

Escolio. Si levantásemos una perpendicular al tercer lado BC por su punto medio, pasaria por O [**46, escolio**]; luego *las tres perpendiculares levantadas á los lados de un triángulo por sus puntos medios se encuentran en el mismo punto.*

129. 11.° *Inscribir un círculo en un triángulo* ABC (Fig. 91), esto es, *describir un círculo tangente á los tres lados del triángulo.*

Análisis. Supongamos resuelto el problema y que O sea el centro de la circunferencia inscripta. Debiendo ser los lados AB y AC tangentes á la circunferencia pedida, el centro de ésta se hallará en la bisectriz AO del ángulo CAB que forman dichas tangentes [**81, escolio 2.º**]; por igual razon el punto O debe hallarse tambien en la bisectriz BO del ángulo ABC; luego el punto de interseccion de las bisectrices será el centro del círculo inscripto.

Síntesis. Trácense las bisectrices AO y BO de dos ángulos del triángulo, las que se cortarán, puesto que OAB, mitad del ángulo CAB, y OBA, mitad del ABC, valen juntos menos de dos ángulos rectos; bájese desde O una perpendicular OD á cualquiera de los lados, y la circunferencia descrita desde O como centro con el radio OD será tangente á los tres lados del triángulo.

En efecto: bajo las perpendiculares OE y OF á los lados BC y AC; los triángulos rectángulos OAD y OAF son iguales, por tener comun la hipotenusa é iguales los ángulos agudos en A, luego OD=OF; tambien son iguales los triángulos ODB y OBE, luego OD=OE; vemos, pues, que las tres perpendiculares OD, OE y OF bajadas desde el punto O á los lados del triángulo son iguales, luego la circunferencia descrita desde O con una de ellas por radio pasará por los extremos D, E y F, y será tangente á los tres lados [**48**].

Este problema es siempre posible, puesto que las bisectrices AO y BO se cortan, cualquiera que sea el triángulo.

Escolio. Si trazásemos la bisectriz del ángulo C pasaria por O [**81, escolio 2.º**]; luego *las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo se encuentran en el mismo punto.*

LIBRO TERCERO.

LÍNEAS PROPORCIONALES Y POLÍGONOS SEMEJANTES.

CAPÍTULO PRIMERO.

LÍNEAS PROPORCIONALES.

TEOREMA I. (*Fig.* 92).

130. *Si una recta* AE *se divide en partes iguales* AB, BC, CD..., *y por los puntos de division se dirigen varias paralelas* AA′, BB′, CC′... *que encuentren á otra recta* A′E′, *quedará ésta dividida en partes iguales entre sí.*

Por los puntos de division de la recta AE tiro las AF, BG, CH..., paralelas todas á A′E′, y por lo tanto paralelas entre sí; los triángulos ABF, BCG, CDH... tienen:

AB=BC=CD.... por hipótesis,

áng. ABF=*áng.* BCG=*áng.* CDH.... por correspondientes,
áng. BAF=*áng.* CBG=*áng.* DCH.... por igual razon; luego estos triángulos son iguales, por tanto

AF=BG=CH=....;

y como estas rectas son iguales respectivamente á A′B′, B′C′, C′D′.... por lados opuestos de paralelógramos, será tambien

A′B′=B′C′=C′D′=...

TEOREMA II. (*Fig.* 93).

131. *Toda recta* EF *interior á un trapecio* ABCD *y paralela á las bases, divide á los lados no paralelos* DA *y* CB *en partes proporcionales.*

En la demostracion de este teorema debemos distinguir dos casos: 1.° que las partes DE y EA de uno de los lados no paralelos sean conmensurables; 2.° que dichas partes sean inconmensurables.

PRIMER CASO. Si DE y EA tienen medida comun, supongamos que ésta se halle contenida en DE cinco veces exactamente y en EA tres veces; en este supuesto tendremos

$$\frac{DE}{EA}=\frac{5}{3} \qquad [1].$$

Si por los puntos de division del lado DA trazamos paralelas á las bases, quedará el lado CB dividido en ocho partes iguales [**130**], de las que CF contendrá cinco y FB tres, luego

$$\frac{CF}{FB}=\frac{5}{3} \qquad [2].$$

De las igualdades [1] y [2] se deduce evidentemente

$$\frac{DE}{EA}=\frac{CF}{FB}.$$

Segundo caso. *(Fig.* 94). Si DE y EA no tienen medida comun, dividiremos EA en cierto número de partes iguales, tan pequeñas como queramos, y aplicando una de ellas sucesivamente sobre ED, á partir del punto E, quedará necesariamente un resto GD menor que dicha parte, y las rectas EG y EA serán conmensurables; trazando la GH paralela á las bases, tendremos [**Primer caso**]

$$\frac{EG}{EA}=\frac{FH}{FB} \qquad [1].$$

Si EA se divide de nuevo en mayor número de partes iguales de tal modo que una de éstas sea menor que el resto GD, aplicándola sucesivamente sobre ED se obtendrá un segundo resto que, con mayor razon, será menor que GD, y el punto G quedará más cerca del D. Otras divisiones de la recta EA harán que el punto G se acerque al D cuanto se quiera, pero sin llegar nunca á confundirse con él, por ser las rectas EA y ED inconmensurables; además es claro que cuando el punto G se mueve acercándose al D, el H avanzará igualmente hácia C sin llegar nunca á confundirse con éste; luego EG y FH son cantidades variables cuyos límites respectivos son ED y FC. Sustituyendo en la igualdad [1] las variables por sus límites [**Arit. 241**], resulta

$$\frac{ED}{EA}=\frac{FC}{FB},$$

132. Teorema recíproco. *(Fig. 94). Si una recta* EF *divide en partes proporcionales á los lados no paralelos de un trapecio, es paralela á las bases.*

Si EF no fuese paralela á las bases, podríamos trazar por E una paralela EM, y segun el teorema anterior seria

$$\frac{DE}{EA}=\frac{CM}{MB};$$

pero por hipótesis

$$\frac{DE}{EA}=\frac{CF}{FB},$$

luego $$\frac{CM}{MB}=\frac{CF}{FB},$$

igualdad absurda, porque la segunda fraccion es mayor que la primera; luego EF es paralela á las bases.

Teorema III. *(Fig. 95).*

133. *Toda recta* DE *interior á un triángulo* ABC *y paralela á un lado* AB, *divide á los otros dos en partes proporcionales.*

Prolongo el lado AB; por un punto B′ de la prolongacion trazo B′C′ paralela á BC, y por el vértice C la CC′ paralela á BB′. En el trapecio AB′C′C tenemos

$$\frac{CD}{DA}=\frac{C'E'}{E'B'};$$

pero C′E′=CE, E′B′=EB, luego

$$\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}. \qquad [1]$$

Corolario. De la igualdad [1] se deducen estas otras [**Arit. 195**]

$$\frac{CD+DA}{CD}=\frac{CE+EB}{CE} \quad \text{ó} \quad \frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE},$$

$$\frac{CD+DA}{DA}=\frac{CE+EB}{EB} \quad \text{ó} \quad \frac{CA}{DA}=\frac{CB}{EB}.$$

134. Teorema recíproco. *Si una recta divide en partes* *proporcionales á dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.*

Aplíquese el mismo razonamiento hecho en el recíproco del teorema II.

TEOREMA IV. *(Fig. 96).*

135. *Si una recta* MN *se divide en partes cualesquiera* MA, AB, BC... *y por los puntos de division se trazan paralelas* AA′, BB′, CC′... *que encuentren á otra recta* MP, *ésta quedará dividida en partes* MA′, A′B′, B′C′... *proporcionales á las de* MN.

Los teoremas III y II nos dan las igualdades

$$\frac{MA}{MA'}=\frac{AB}{A'B'},\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'},\quad \frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}\ldots;$$

luego $$\frac{MA}{MA'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\ldots$$

TEOREMA V. *(Fig. 97).*

136. *La bisectriz* CD *de un ángulo* C *de un triángulo* ABC *divide al lado opuesto* AB *en dos partes proporcionales á los lados que forman dicho ángulo.*

Por el punto A trazo una paralela AE á la bisectriz, prolongo el lado BC hasta que encuentre á dicha paralela, lo que siempre se verificará [**25, cor. 1.°**], y tendremos

$$\frac{EC}{CB}=\frac{AD}{DB} \qquad [1].$$

Ahora bien,

áng. EAC=*áng.* ACD por alternos,

áng. AEC=*áng.* DCB por correspondientes,

y como los segundos miembros de estas igualdades son iguales por hipótesis, tambien lo serán los primeros, esto es, *áng.* EAC=*áng.* AEC, de donde se deduce EC=AC. Sustituyendo EC por AC en la igualdad [1], se tiene por último

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}.$$

137. TEOREMA RECÍPROCO. *Si una recta parte del vérti-*

ce de un ángulo de un triángulo y divide al lado opuesto en dos partes proporcionales á los lados de dicho ángulo, es bisectriz del mismo.

Imítese el razonamiento hecho en el recíproco del teorema II.

CAPÍTULO SEGUNDO.

TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS SEMEJANTES.

138. *Dos polígonos son* SEMEJANTES *cuando sus ángulos colocados en el mismo órden son iguales, y los lados adyacentes á ángulos iguales son proporcionales.*

Los polígonos ABCDE y *abcde* (*Fig.* 98) serán semejantes siempre que tengamos

$$\text{áng. A}=\text{áng. } a, \text{ áng. B}=\text{áng. } b, \text{ áng. C}=\text{áng. } c....$$

y además $\quad \dfrac{AB}{ab}=\dfrac{BC}{bc}=\dfrac{CD}{cd}...$

Segun esto, si la razon $\dfrac{AB}{ab}$ vale m, las demás $\dfrac{BC}{bc}$, $\dfrac{CD}{cd}$... valdrán tambien m: esta relacion constante para cada dos polígonos semejantes, se llama *razon de semejanza* de los mismos.

Se llaman *vértices homólogos* los vértices de dos ángulos iguales, como A y a, B y b etc.

Lados homólogos son los que terminan en vértices homólogos, como AB y ab, BC y bc etc.

En dos triángulos semejantes ABC, abc (*Fig.* 100), dos lados homólogos AB y ab se oponen á ángulos iguales, porque siendo A$=a$, B$=b$, tiene que ser C$=c$. Este carácter será el que nos sirva, en general, para reconocer los lados homólogos de dos triángulos.

TEOREMA I. (*Fig.* 99.)

139. *Si en un triángulo* ABC *se traza una paralela* DE *á un lado, el triángulo parcial* CDE *que resulta es semejante al propuesto.*

Debemos demostrar que los triángulos ABC y DEC tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Desde luego vemos que el ángulo C es comun y que

áng. CAB=*áng*. CDE, *áng*. CBA=*áng*. CED

por correspondientes; luego los ángulos son respectivamente iguales.

Además, siendo DE paralela á AB tendremos [**133, cor.**]

$$\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE} \qquad [1];$$

si por el punto E trazamos la EF paralela á AC será tambien

$$\frac{CB}{CE}=\frac{AB}{AF}$$

y como AF=DE, tendremos sustituyendo

$$\frac{CB}{CE}=\frac{AB}{DE} \qquad [2].$$

De las igualdades [1] y [2] se deduce evidentemente

$$\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE}=\frac{AB}{DE},$$

luego los lados homólogos son proporcionales y el teorema queda demostrado.

Teorema II. (*Fig.* 100).

140. *Dos triángulos* ABC, abc *son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales* A=a, B=b, C=c.

Tomo sobre el lado AB, á partir del punto A, una longitud AD=*ab*, y por el punto D trazo la DE paralela á BC: los triángulos ADE y *abc* son iguales, porque tienen AD=*ab*, *áng*. A=*áng*. *a* y *áng*. ADE=*áng*. B=*áng*. *b*, y como ADE es semejante al ABC [**Teor. anterior**], su igual *abc* tambien es semejante al ABC.

Corolarios.

1.° *Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

Porque los terceros ángulos tienen que ser iguales.

2.° *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen igual un ángulo agudo.*

3.° *Dos triángulos isósceles son semejantes cuando tienen igual el ángulo en el vértice ó uno de la base.*

TEOREMA III. (*Fig.* 100).

141. *Dos triángulos* ABC, abc *son semejantes cuando tienen dos lados* AB *y* AC *del uno proporcionales á dos lados* ab *y* ac *del otro, é igual el ángulo comprendido* A=a.

Tomo sobre el lado AB una parte AD=ab, y trazo la DE paralela á BC: segun el corolario del número **133** tendremos

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}, \text{ y por hipótesis } \frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac};$$

siendo iguales los tres primeros términos de estas igualdades fraccionarias, los últimos tambien lo son, esto es, AE=ac, luego los triángulos ADE y abc tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, por tanto son iguales, y como ADE es semejante á ABC, su igual abc tambien es semejante á ABC.

TEOREMA IV. (*Fig.* 100).

142. *Dos triángulos* ABC, abc *son semejantes cuando tienen sus lados proporcionales.*

Suponemos que se verifican las igualdades

$$\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}=\frac{BC}{bc},$$

y vamos á demostrar la semejanza de los triángulos propuestos.

Tomo sobre AB una parte AD=ab, y trazo DE paralela á BC: tendremos

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}, \text{ y por hipótesis } \frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac};$$

estas igualdades fraccionarias tienen iguales respectivamente los tres primeros términos, luego AE=ac.

Siendo semejantes los triángulos ABC y ADE tendremos

$$\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}, \text{ y por hipótesis } \frac{AC}{ac}=\frac{BC}{bc};$$

tambien estas igualdades tienen tres términos iguales, luego $DE=bc$.

Vemos, pues, que los triángulos ADE y *abc* tienen sus tres lados respectivamente iguales, luego son iguales, y como ADE es semejante á ABC, su igual *abc* tambien es semejante á ABC.

Escolio. Segun los teoremas II y IV si los ángulos de dos triángulos son iguales, los lados son proporcionales; y recíprocamente, si los lados son proporcionales, los ángulos serán iguales; por consiguiente para que dos triángulos sean semejantes basta que satisfagan á una sola de las condiciones de la definicion general de semejanza.

Teorema V. (*Fig.* 101).

143. *Dos triángulos rectángulos* ABC, abc *son semejantes cuando la hipotenusa* AC *y un cateto* AB *del uno son proporcionales á la hipotenusa* ac *y un cateto* ab *del otro.*

Tomo sobre el lado AB una parte $AD=ab$, y trazo la DE paralela á BC: tenemos

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}, \text{ y por hipótesis } \frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac};$$

siendo iguales los tres primeros términos, tendremos $AE=ac$; luego los triángulos ADE y *abc* son iguales [**95**], y como el primero es semejante al ABC, el segundo tambien lo será.

Teorema VI. (*Sin figura*).

144. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares.*

Sean A, B, C los ángulos de un triángulo y *a*, *b*, *c* los del otro; suponemos paralelos ó perpendiculares los lados de A y *a*, B y *b*, C y *c*. Segun esto, A y *a* serán iguales ó suplementarios y lo mismo B y *b*, C y *c*; los tres ángulos A, B, C no pueden ser suplementos de *a*, *b*, *c*, porque la suma de todos valdria seis rectos, lo que es imposible; dos ángulos A y B no pueden tampoco ser suplementos de otros dos *a* y *b*, porque los seis ángulos valdrian más de cuatro rectos; luego los triángulos tienen necesariamente dos ángulos iguales, por tanto son semejantes.

Escolio. Cuando dos triángulos son semejantes por tener sus lados paralelos ó perpendiculares, los lados homólogos son los respectivamente paralelos ó perpendiculares.

Teorema VII. (*Fig.* 98).

145. *Dos polígonos* ABCDE, abcde *compuestos de igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

Suponemos semejantes los triángulos ABC y *abc*, ACD y *acd*, ADE y *ade*, y queremos demostrar la semejanza de los polígonos propuestos.

Desde luego sabemos que los ángulos B y *b* son iguales por pertenecer á los triángulos semejantes ABC y *abc*; por análoga razon son tambien iguales los ángulos E y *e*; además el ángulo BCD se compone de BCA y ACD, los que son iguales respectivamente á *bca* y *acd*, cuya suma es *bcd*; luego BCD=*bcd*. Del mismo modo se demuestra la igualdad de los ángulos restantes.

Siendo los triángulos ABC, ACD, ADE respectivamente semejantes á *abc*, *acd*, *ade*, tendremos:

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac};\ \frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}=\frac{AD}{ad};\ \frac{AD}{ad}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea};$$

observando que las séries primera y segunda tienen la razon comun $\frac{AC}{ac}$; y la segunda y tercera la $\frac{AD}{ad}$; deduciremos esta otra

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea},$$

luego los lados homólogos son proporcionales, y como se ha demostrado que los ángulos son iguales, los polígonos propuestos son semejantes.

146. Teorema recíproco. *Dos polígonos semejantes* ABCDE *y* abcde *pueden descomponerse en igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos.*

Desde los vértices homólogos A y *a* trazo las diagonales AC, AD, *ac* y *ad*, y digo que los triángulos ABC, ACD, ADE son respectivamente semejantes á *abc*, *acd*, *ade*.

Siendo los polígonos propuestos semejantes, tenemos

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}, \quad B=b,$$

luego los triángulos ABC y *abc* son semejantes [**141**].

Del mismo modo se demuestra la semejanza de los otros triángulos extremos AED y *aed*.

Además, por hipótesis tenemos

$$\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}, \qquad BCD=bcd,$$

y la semejanza, ya demostrada, de los triángulos ABC y *abc* nos dá

$$\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}, \qquad ACB=acb;$$

de las igualdades fraccionarias se deduce evidentemente

$$\frac{CD}{cd}=\frac{AC}{ac},$$

y restando las igualdades de los ángulos se obtiene

$$ACD=acd;$$

luego [**141**] tambien son semejantes los triángulos intermedios ACD y *acd*.

Teorema VIII. (*Fig.* 98).

147. *Los perímetros de dos polígonos semejantes* ABCDE *y* abcde, *son proporcionales á sus lados homólogos.*

Tenemos por hipótesis

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\ldots$$

luego [**Arit. 209**]

$$\frac{AB+BC+CD+\ldots}{ab+bc+cd+\ldots}=\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\ldots,$$

y como las sumas $AB+BC+CD+\ldots$, $ab+bc+cd+\ldots$ son los perímetros de los polígonos propuestos, el teorema queda demostrado.

CAPÍTULO TERCERO.

CONSECUENCIAS DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

TEOREMA I. *(Fig. 102)*.

148. *Las bases* BC, bc *de dos triángulos semejantes* ABC, abc *son proporcionales á las alturas* AD, ad.

Tenemos $$\frac{BC}{bc}=\frac{AB}{ab};$$
además, los triángulos rectángulos ABD y *abd* son tambien semejantes, luego
$$\frac{AD}{ad}=\frac{AB}{ab};$$
de estas dos igualdades fraccionarias se deduce
$$\frac{BC}{bc}=\frac{AD}{ad}.$$

TEOREMA II. *(Fig 103)*.

149. *Si tres ó más rectas* AB, AC, AD...., *que concurren en un punto* A *encuentran á dos paralelas* BE, FI, *las dividen en partes proporcionales.*

Siendo FG paralela á BC los triángulos ABC y AFG son semejantes, luego
$$\frac{AB}{AF}=\frac{BC}{FG}=\frac{AC}{AG};$$
tambiem son semejantes ACD y AGH, ADE y AHI, por tanto
$$\frac{AC}{AG}=\frac{CD}{GH}=\frac{AD}{AH},$$
$$\frac{AD}{AH}=\frac{DE}{HI}=\frac{AE}{AI}.$$

Observando que las séries primera y segunda tienen la razon comun $\frac{AC}{AG}$, y la segunda y tercera la $\frac{AD}{AH}$, deduciremos que todas las razones son iguales; por consiguiente

$$\frac{BC}{FG}=\frac{CD}{GH}=\frac{DE}{HI}.$$

Escolios.

1.° En virtud del razonamiento anterior tenemos

$$\frac{AB}{AF}=\frac{AC}{AG}=\frac{AD}{AH}=\frac{AE}{AI},$$

lo que manifiesta que *las rectas concurrentes quedan divididas por las paralelas en partes proporcionales*.

2.° Si fuese BC=CD=DE, sería necesariamente FG=GH=HI, esto es, *si las partes de una de las paralelas son iguales, tambien lo serán las de la otra.*

Corolario. (*Fig.* 104). *El lugar geométrico de los puntos medios de varias rectas interiores á un triángulo y paralelas á la base, es la recta que une el punto medio de ésta con el vértice.*

Uno el vértice con el punto medio de la base. Siendo BD=CD será $bd=cd$, $b'd'=c'd'$ *etc.*, luego la recta AD pasa por todos los puntos medios de las paralelas, ó lo que es igual, los puntos medios de las paralelas están sobre la recta AD.

150. Teorema recíproco. (*Fig.* 103). *Si tres ó más rectas* BF, CG, DH... *dividen á dos paralelas* FI, BE *en partes proporcionales, dichas rectas concurren en el mismo punto.*

Sea A el punto de encuentro de las rectas BF y DH digo que CG prolongada pasará tambien por A.

En efecto: por hipótesis tenemos

$$\frac{BC}{FG}=\frac{CD}{GH} \qquad [1];$$

supongamos ahora que uniendo el punto A con C la recta de union no pase por G, sinó por P; en virtud del teorema directo tendremos

$$\frac{BC}{FP}=\frac{CD}{PH} \qquad [2].$$

De las igualdades [1] y [2] se deduce [**Arit. 194**]

$$\frac{FG}{FP}=\frac{GH}{PH},$$

igualdad absurda; porque la primera fraccion es menor que la unidad y la segunda mayor; luego la recta AC pasa por G, y los tres puntos A, G, C están en línea recta.

Del mismo modo se demostraria que la EI prolongada pasa por A.

151. Dos cantidades A,D son *reciprocamente proporcionales* á otras dos B, C cuando las primeras son dos términos opuestos de una igualdad fraccionaria y las segundas los otros dos, esto es, cuando se verifica la igualdad

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

Teorema III. (*Fig.* 105).

152. *Si dos cuerdas* AB, CD *se cortan, las partes* AO BO *de la una son reciprocamente proporcionales á las partes* DO, CO *de la otra.*

Trazando las cuerdas AD y BC se forman dos triángulos AOD y BOC, que son semejantes por tener el ángulo A igual al C, como inscriptos en el mismo arco DB, y el ángulo D igual al B por análoga razon; luego sus lados homólogos serán proporcionales.

Ahora bien, AO lado delprimer triángulo y OC lado del segundo se oponen á los ángulos iguales D y B, por tanto son homólogos, y la primera razon es $\frac{AO}{OC}$; para formar la segunda tomaremos un lado del primer triángulo y su homólogo en el segundo, obteniendo así $\frac{OD}{OB}$; por consiguiente

$$\frac{AO}{OC}=\frac{OD}{OB},$$

lo que demuestra el teorema.

Teorema IV. (*Fig.* 106).

153. *Dos secantes* AB, AC *que parten del mismo punto* *y terminan en los segundos puntos de interseccion con la circunferencia, son inversamente proporcionales á sus segmentos externos* AD, AE.

Trazando las cuerdas DC, BE se forman dos triángulos ABE, ADC, que son semejantes por tener el ángulo A comun y los ángulos B y C iguales como incriptos en el mismo arco DE; luego sus lados homólogos serán proporcionales, esto es,

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}.$$

TEOREMA V. *(Fig.* 107*)*.

154. *Si desde un punto* A *exterior á un círculo se trazan una secante* AB, *que termine en el segundo punto de interseccion, y una tangente* AC, *terminada en el punto de contacto, la tanjente es media proporcional entre la secante y su segmento externo* AD.

Uno el punto C de contacto con los de interseccion B y D. Los triángulos ABC y ADC que se forman son semejantes, por tener el ángulo A comun y el ángulo en B igual al ACD, porque ambos tienen por medida la mitad del arco CD; luego

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}.$$

155. ESCOLIO. De las igualdades fraccienarios obtenidas en los tres teoremas últimos, se deduce

$$AO\times OB=OC\times OD,\ AB\times AD=AC\times AE,\ AB\times AD=AC^2.$$

Luego, *si desde un punto interior ó exterior á un círculo se trazan rectas que encuentren á la circunferencia, el producto de las distancias* [1] *de dicho punto á los de interseccion de cada recta es constante.*

Si alguna de las rectas es tangente, se considera como secante cuyos puntos de interseccion se han reunido en uno solo [47].

156. PROYECCION *de una línea recta ó curva* AB (Fig. 108) *sobre una recta* XY *es la parte* ab *de ésta comprendida entre*

1 Entendemos por *producto de dos rectas* el producto de los números que las representarian si se midiesen con la misma unidad.

los piés a, b *de las perpendiculares bajadas á la misma desde los extremos de la primera.*

Es evidente que la proyeccion de la hipotenusa sobre uno de los catetos es este cateto.

TEOREMA VI. (*Fig.* 109).

157. *Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa: 1.° la perpendicular es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa; 2.° cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyeccion sobre ésta; 3.° los cuadrados de los catetos son proporcionales á sus proyecciones sobre la hipotenusa.*

1.° Los triángulos ABD y ACD son semejantes, por tener sus lados respectivamente perpendiculares, luego [**144, escolio**]

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC}.$$

2.° Los triángulos ABD y ABC ssn semejantes, por tener comun el ángulo B y ser iguales los ángulos rectos BDA y BAC, luego

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD} \qquad [1].$$

Tambien son semejantes los triángulos ACD y ABC; luego

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{CD} \qquad [2].$$

3.° De las igualdades [1] y [2] so deduce

$$AB^2 = BC \times BD$$
$$AC^2 = BC \times CD:$$

dividiendo estas últimas ordenadamente, y suprimiendo en la segunda de las fracciones que resulten el factor comun BC, será

$$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BD}{CD}.$$

COROLARIOS.

1.° *Fig.* 110. *La perpendicular* CD *bajada desde un pun-*

to C *de una circunferencia á un diámetro* AB, *es media proporcional entre los segmentos del diámetro.*

Uniendo el punto C con los extremos del diámetro, el ángulo inscripto ACB será recto, y el triángulo ABC rectángulo en C; luego segun el teorema anterior, CD será media proporcional entre AD y BD.

2.° *Fig.* 110. *Si desde un extremo* A *de un diámetro* AB *se traza una cuerda* AC, *esta cuerda es media proporcional entre el diámetro y su proyeccion sobre éste.*

Uniendo C con B se forma el triángulo rectángulo ACB, luego el corolario es cierto.

3.° *Fig.* 111. *Los cuadrados de las cuerdas* AC, AD, BE, *trazadas desde los extremos de un diámetro, son proporcionales á sus proyecciones sobre éste.*

Tenemos, en virtud del corolario anterior,

$$AC^2 = AB \times AF,\quad AD^2 = AB \times AG,\quad BE^2 = AB \times BH$$

de donde $\dfrac{AC^2}{AF} = AB,\ \dfrac{AD^2}{AG} = AB,\ \dfrac{BE^2}{BH} = AB;$

luego $\dfrac{AC^2}{AF} = \dfrac{AD^2}{AG} = \dfrac{BE^2}{BH}.$

Teorema VII, *llamado de Pitágoras*, (Fig. 109).

158. *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa* BC *es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* AB *y* AC.

En el teorema anterior, 3.°, hemos hallado las igualdades

$$BC \times BD = AB^2,$$
$$BC \times CD = AC^2;$$

sumándolas ordenadamente y separando el factor comun BC, será

$$BC\,(BD + CD) = AB^2 + AC^2,$$

pero $BD + CD = BC$, luego

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Escolio. Representando por a la hipotenusa y por b y c los catetos de un triángulo rectángulo, será

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

de esta igualdad se deducen estas otras

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad , \quad c^2 = a^2 - b^2 ;$$

luego *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.*

Por medio del teorema de Pitágoras se puede calcular la longitud de un lado cualquiera de un triángulo rectángulo cuando se conocen los otros dos lados. Si, por ejemplo, se conocen los catetos b y c, será

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Si los lados conocidos son la hipotenusa a y el cateto c, tendremos

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

TEOREMA VIII. *(Fig. 112).*

159. *En todo triángulo* ABC *el cuadrado de un lado* AB *opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados* AC *y* BC, *menos el duplo del producto de uno de éstos* BC *por la proyeccion* CD *del otro sobre él.*

La perpendicular AD, trazada con objeto de hallar la proyeccion del lado AC sobre el BC, caerá en la prolongacion de BC *(Fig. 1.ª)* si el ángulo ABC es obtuso, y en el lado BC *(Fig. 2.ª)* si dicho ángulo es agudo.

En ambas figuras tenemos

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \qquad [1].$$

Ahora, $\quad AD^2 = AC^2 - CD^2 ;$

en cuanto á BD^2 es en la primera figura el cuadrado de la diferencia CD—BC, y en la segunda el cuadrado de la diferencia BC—CD de signo contrario á la anterior; luego en las dos figuras será

$$BD^2 = BC^2 - 2BC.\ CD + CD^2 ;$$

sustituyendo en la igualdad [1] AD^2 y BD^2 por los valores que hemos encontrado, y reduciendo tendremos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD.$$

TEOREMA IX. *(Fig. 113).*

160. *En todo triángulo obtusángulo* ABC *el cuadrado* *del lado* AB *opuesto al ángulo obtuso es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados* AC *y* BC, *más el duplo del producto de uno de éstos* BC *por la proyeccion* CD *del otro sobre él.*

En el triángulo rectángulo ABD tenemos

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 .$$

Ahora. $$AD^2 = AC^2 - CD^2$$

y $$BD^2 = (BC + CD)^2 = BC^2 + 2BC.\,CD + CD^2 :$$

sustituyendo en la primera igualdad AD^2 y BD^2 por los valores que acabamos de hallar y reduciendo, será

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\,CD.$$

161. Recíprocos de los teoremas VII, VIII y IX.

1.° *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto á dicho lado es recto.*

2.° *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto á dicho lado es agudo.*

3.° *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto á dicho lado es obtuso* [**20**].

Ejemplos.

1.° San 6, 8 y 10 metros las longitudes de los lados de un triángulo; tenemos $10^2 = 6^2 + 8^2$, luego el triángulo es rectángulo.

2.° Si los lados son 5^m, 7^m y 8^m se tiene $8^2 < 5^2 + 7^2$, luego el ángulo opuesto al lado 8^m es agudo, y como es mayor que los demás el triángulo será acutángulo.

3.° Sean 4^m, 5^m, 7^m las longitudes de los lados; tenemos $7^2 > 4^2 + 5^2$, luego el triángulo es obtusángulo.

PROBLEMAS RELATIVOS AL LIBRO TERCERO.

162. 1.° *Dividir una recta dada en cualquier número de partes iguales.*

Supongamos que la recta AB (*Fig.* 114) se quiera dividir en cinco partes iguales. Por un extremo A trazo una recta indefinida AR, tomo sobre ella, á partir del punto A, cinco longitudes iguales AM, MN etc., uno el último punto R con el otro extremo B, y trazando por M, N, P etc. paralelas á BR quedará la AB dividida en cinco partes iguales. [**130**]

Escolio. Las paralelas MM', NN' etc. á la BR pueden trazarse por el procedimiento ordinario [**76**], pero es más sencillo y exacto en la práctica el siguiente: prolónguese la RB; haciendo centro en A, con el radio AR, descríbase un arco que corte á RB en R'; únase A con R'; tómense las longitudes AM', M'N' etc. iguales á AM, MN etc. y uniendo M con M', N con N' etc. las rectas de union son paralelas á RR', puesto que dividen á AR y AR' en partes proporcionales [**134**].

163. 2.º *Dividir una recta dada* AB (Fig. 115) *en partes proporcionales á otras rectas dadas* m, n, p.

Por un extremo A de la recta dada trazo una recta indefinida AP; tomo sobre ella, á partir del punto A, las longitudes AM, MN, NP iguales respectivamente á las rectas dadas m, n, p; uno el punto P con el otro extremo B de la AB; y trazando por M y N paralelas á PB, la recta dada AB quedará dividida en partes proporcionales á AM, MN y NP [**135**], ó lo que es igual, á m, n y p.

Las paralelas que determinan los puntos de division C y D deben trazarse por el procedimiento empleado en el problema 1.º

Si la recta dada AB (*Fig.* 116) tuviera que dividirse en partes proporcionales á *dos* rectas m y n, podria emplearse el siguiente procedimiento: por un extremo A trácese una recta indefinida, sobre la que se tomará una longitud AM$=m$; por el otro extremo B tírese una paralela á AM, y tómese sobre ella una longitud BN$=n$; únase M con N, y la MN dividirá á AB en partes proporcionales á m y n. En efecto; los triángulos AMC y BNC son semejantes, luego

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AM}{BN} \quad \text{ó} \quad \frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}.$$

164. 3.º *Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas* m, n y p.

Se trata de hallar gráficamente una recta cuya longitud pueda ser el cuarto término de una proporcion, siendo los tres primeros las longitudes de las rectas dadas m, n, p;

de modo que representando por x la recta pedida deberá tenerse

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{x}.$$

1.ª *construccion.* (Fig. 117). Constrúyase un ángulo cualquiera BAC; á partir del vértice, tómense á continuacion una de otra las longitudes AM y MN iguales á las dos primeras rectas dadas m y n; en el otro lado AB tómese $AP=p$; únanse los extremos M y P de las líneas primera y tercera; y por el punto N, tírese NX paralela á MP: la recta PX es la cuarta proporcional pedida. En efecto, tenemos [**133**]

$$\frac{AM}{MN}=\frac{AP}{PX} \text{ ó } \frac{m}{n}=\frac{p}{x}.$$

2.ª *construccion.* Si tomando las longitudes de m y n á continuacion una de otra resulta una figura demasiado grande, se tomarán las dos á partir del vértice A (*Fig.* 118), y uniendo los extremos M y P de las líneas primera y tercera, bastará trazar por N una paralela á MP para hallar la cuarta proporcional AX. En efecto, tenemos [**133, cor.**]

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AP}{AX} \text{ ó } \frac{m}{n}=\frac{p}{x}.$$

165. 4.° *Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas* m *y* n.

Se trata de hallar una recta x que forme con las dadas la proporcion contínua

$$\frac{m}{n}=\frac{n}{x}.$$

Este problema es un caso particular del anterior, y se resuelve por cualquiera de las construcciones expuestas.

166. 5.° *Hallar una media proporcional á dos rectas dadas* m *y* n.

La solucion de este problema debe ser una recta x que forme con las dadas la proporcion contínua

$$\frac{m}{x}=\frac{x}{n}.$$

1.ª *construccion.* (Fig. 119). Sobre una recta indefinida tómense á continuacion una de otra dos longitudes AM, MN iguales respectivamente á las rectas dadas m, n; sobre AN como diámetro descríbase una semicircunferencia; levántese por M una perpendicular MX al diámetro: esta perpendicular es la solucion del problema.

En efecto, tenemos [**157, cor. 1.º**]

$$\frac{AM}{MX}=\frac{MX}{MN} \quad \text{ó} \quad \frac{m}{x}=\frac{x}{n}.$$

2.ª *construccion*. Si las líneas dadas son demasiado grandes para llevarlas una á continuacion de otra, se toman á partir de A (*Fig*. 120) dos longitudes AM y AN iguales á m y n; sobre la mayor AM, considerada como diámetro, se describe una semicircunferencia; por el punto N se levanta la NX perpendicular al diámetro; y uniendo A con X, la cuerda AX es la media proporcional, puesto que [**157, cor. 2.º**]

$$\frac{AM}{AX}=\frac{AX}{AN} \quad \text{ó} \quad \frac{m}{x}=\frac{x}{n}.$$

167. Se dice que una recta está dividida en *media y extrema razon* cuando se halla dividida en dos partes tales que la mayor es media proporcional entre la recta entera y la menor.

168. 6.º *Dividir una recta* AB *en media y extrema razon.*

Análisis. Representemos por a la longitud de la recta dada y por x la mayor de las partes en que debe dividirse: la menor será $a-x$, y en virtud de la definicion tendremos

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x};$$

de esta ecuacion se deduce fácilmente

$$a\,(a-x)=x^2 \quad \text{ó} \quad a^2-ax=x^2,$$

de donde $$x^2+ax-a^2=0.$$

Resolviendo esta ecuacion de segundo grado, tendremos [**Alg. 111**]

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

La primera raiz

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$$

es fácil de obtener gráficamente, puesto que el radical $\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ puede considerarse como la hipotenusa BC (*Fig.* 121) de un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y $\frac{a}{2}$, esto es, AB y AC; además, restando del radical la cantidad $\frac{a}{2}$ se obtiene la raiz, luego debemos restar de la linea BC la $CE=CA=\frac{a}{2}$, y la diferencia BE será la mayor de las partes en que se queria dividir la recta dada.

En cuanto á la segunda raiz

$$-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}\right),$$

no responde directamente á la cuestion, por tener un valor absoluto mayor que la recta dada.

Síntesis. En un extremo A de la recta dada AB, levántese una perpendicular igual á la mitad de AB; únase B con C; y haciendo centro en C, descríbase con el radio AC un arco que corte á BC: llevando la longitud BE sobre la recta BA, se determina un punto X que divide á la recta AB en media y extrema razon.

Si quisiéramos demostrarlo diríamos: la recta BA es tangente á la circunferencia C, por ser perpendicular al radio AC en su extremo, y BD es una secante, luego [**154**] $\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BE}$, de donde [**Arit. 198**] $\frac{BD-AB}{AB-BE}=\frac{AB}{BE}$; pero $AB=DE$, por tanto $BD-AB=BE=BX$, y $AB-BE=AB-BX=AX$, luego

$$\frac{BX}{AX}=\frac{AB}{BX} \text{ ó } \frac{AB}{BX}=\frac{BX}{AX}.$$

Escolio. El valor numérico de la parte mayor BX es

$$-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

y puede escribirse en la forma siguiente

$$\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

La parte menor AX será

$$a-\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}.$$

169. 7.° *Dado un triángulo* ABC (Fig. 102), *construir sobre una recta dada* bc, *considerada como lado homólogo de* BC, *otro triángulo semejante al dado.*

Constrúyanse en los puntos b y c ángulos respectivamente iguales á B y C, y quedará resuelto el problema [**140, cor. 1.°**].

170. 8.° *Dado un polígono* ABCDE (Fig. 98), *construir sobre una recta dada* ab, *considerada como lado homólogo de* AB, *otro polígono semejante al dado.*

Descompóngase el polígono dado en triángulos por medio de las diagonales AC, AD; constrúyase sobre ab un triángulo abc semejante al ABC, sobre ac otro semejante al ACD, y así sucesivamente: el polígono $abcde$ que resulta es semejante al dado [**145**].

171. 9.° *Construir un polígono semejante á otro dado, y cuyo perímetro sea igual á una recta dada* p.

Análisis. Sea P el perímetro del polígono dado, a uno de los lados del mismo, y x el lado homólogo de a en el polígono que se busca. Tendremos [**147**]

$$\frac{P}{p}=\frac{a}{x};$$

luego x es una cuarta proporcional á las longitudes conocidas P, p y a.

Síntesis. Construyendo esta cuarta proporcional, y sobre ella un polígono semejante al dado, quedará resuelto el problema.

172. 10.° *Dadas dos rectas que no se pueden prolongar, trazar por un punto dado otra recta, tal que si las tres se prolongasen vinieran á concurrir en un mismo punto.*

1.° Sean AB y CD (*Fig.* 122) las rectas dadas, y supongamos que el punto dado E esté situado entre ellas. Trácense dos paralelas AC y BD, únase el punto dado E con A y con C, tírense por B y D las rectas BF y DF respectivamente paralelas á AE y CE: el punto F de interseccion y el dado E determinan la direccion de la recta pedida EF.

En efecto: los triángulos AEG, BFH son semejantes, y tambien lo son CEG, DFH, por tanto

$$\frac{EG}{FH}=\frac{AG}{BH}, \quad \frac{EG}{FH}=\frac{CG}{DH};$$

de estas igualdades se deduce evidentemente

$$\frac{AG}{BH}=\frac{CG}{DH};$$

luego las rectas AB, EF y CD dividen á las paralelas AC y BD en partes proporcionales, y concurren, por tanto, en el mismo punto [**150**].

2.° Si las rectas dadas son AB, EF y el punto dado C está fuera del ángulo que forman, se hace la misma construccion, esto es, se trazan AE y BF paralelas entre sí, se une C con A y con E, y trazando BD y FD, paralelas respectivamente á AC y EC, se determina el punto D.

La demostracion es idéntica á la del primer caso.

LIBRO CUARTO.

POLÍGONOS REGULARES Y MEDIDA DE LA CIRCUNFERENCIA.

CAPÍTULO PRIMERO.

POLÍGONOS REGULARES.

173. *Se llama* POLÍGONO REGULAR *el que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos tambien iguales.*

Un polígono está *inscripto* en un círculo cuando todos sus vértices están en la circunferencia; entonces el círculo está *circunscrito* al polígono.

Un polígono está circunscrito á un círculo cuando todos sus lados son tangentes á la circunferencia; entonces el círculo está inscripto en el polígono.

TEOREMA I. (*Fig.* 123.)

174. *Si se divide una circunferencia en tres ó más arcos iguales* AB=BC=CD *etc.: 1.º las cuerdas de dichos arcos forman un polígono regular inscripto; 2.º las tangentes á la circunferencia trazadas por los puntos de division, forman un polígono regular circunscrito.*

1.º Siendo iguales los arcos AB, BC, CD etc. en que se supone dividida la circunferencia, tambien lo serán las cuerdas, luego el polígono inscripto ABCDEF tiene sus lados iguales. Además, es fácil ver que los ángulos inscriptos ABC, BCD, CDE etc. abrazan arcos iguales entre sus lados y tienen, por consiguiente, igual medida, luego el polígono tiene tambien sus ángulos iguales, y es regular.

2.º Los triángulos ABG, BCH, CDI etc. son iguales por tener un lado igual AB=BC=CD... adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, luego los ángulos G, H, I etc. del polígono circunscrito GHILMN son iguales; además, dichos triángulos son isósceles: el ABG, por ejemplo, tiene *ang.* GAB=*ang.* GBA, porque estos ángulos tienen por medida la mitad del mismo arco AB, luego los lados opuestos GA y GB son iguales.

Siendo los mencionados triángulos iguales é isósceles, es claro que las líneas

BG, BH, CH, CI, DI, DL....

son iguales, por consiguiente tambien lo serán las GH, HI, IL.... compuesta cada una de dos de las primeras; luego el polígono circunscrito GHILMN tiene sus lados iguales, y como ya se ha demostrado que los ángulos tambien son iguales, el polígono es regular.

TEOREMA II. (*Fig.* 124).

175. *Dado un polígono regular inscripto* ABCDE, *si por los puntos medios* a, b, c.... *de los arcos que subtienden sus lados se trazan tangentes á la circunferencia: 1.º resulta un polígono regular circunscrito; 2.º cada dos vértices correspondientes de ambos polígonos y el centro están en línea recta.*

1º Los puntos medios *a, b, c*.... de los arcos AB, BC, CD... dividen evidentemente á la circunferencia en partes iguales, luego el polígono FGHIK formado por las tangentes en dichos puntos es regular [**174**, 2.°].

2.° Unamos F con O y demostremos que la recta FO pasa por el vértice A. En efecto, el punto F equidista de los extremos de la cuerda *ae*, por ser isósceles el triángulo F*ae*, y como O tambien equidista de dichos puntos, la recta FO es perpendicular á la cuerda *ae* y divide á ésta y al arco *a* A *e* que subtiende en dos partes iguales, luego pasa necesariamente por el punto medio A de dicho arco, lo que demuestra que los puntos F, A y O están en línea recta.

Teorema III. *(Fig. 125).*

176. *Todo polígono regular* ABCDEF *puede inscribirse y circunscribirse á un círculo.*

Por tres vértices consecutivos A, B, C del polígono dado hago pasar una circunferencia, y digo que pasará tambien por el cuarto vértice D. Para demostrarlo trazo la OP perpendicular al lado BC, al que dividirá en dos partes iguales, é imagino doblada la figura por OP: la recta PB seguirá la direccion PC, por ser rectos los ángulos en P y el punto B caerá en C, puesto que PB=PC; el lado BA seguirá la direccion CD, por ser iguales los ángulos B y C, y el punto A caerá en D, porque BA=CD; segun esto, las rectas OA y OD tendrán los extremos comunes y por tanto serán iguales; luego la circunferencia que pase por los puntos A, B y C pasa tambien por D. Repitiendo el mismo razonamiento probaríamos que la circunferencia pasa por E y F; por consiguiente el polígono dado puede inscribirse en un círculo.

Demostremos, ahora, que puede circunscribirse. Siendo iguales las cuerdas AB, BC, CD, etc. equidistan del centro O, luego la circunferencia descrita desde O como centro y con un radio igual á la distancia comun OP será tangente á los lados del polígono dado, y por consiguiente quedará éste circunscrito al círculo.

177. El centro O, comun á los círculos inscripto y circunscrito, se llama *centro* del polígono regular; el radio OA del círculo circunscrito se llama *radio* del polígono, y el radio OP del círculo inscripto se llama *apotema*.

Ángulo *en el centro* de un polígono regular es el formado por dos radios tirados á los extremos de un mismo lado, por ejemplo AOB. Es evidente que los ángulos en el centro de un polígono regular son iguales, porque interceptan arcos iguales, y como la suma de ellos vale cuatro rectos, cada uno será igual á $\frac{4R}{n}$, llamando n al número de lados del polígono.

Siendo $2Rn—4R$ la suma de los ángulos de un polígono, si éste es regular valdrá cada ángulo

$$\frac{2Rn-4R}{n}=2R-\frac{4R}{n},$$

lo que indica que *el ángulo en el centro y el ángulo del polígono son suplementarios.*

TEOREMA IV. (*Fig.* 126).

178. *Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes, y sus perímetros son proporcionales á los radios y á las apotemas.*

Un ángulo de un polígono regular vale $2R-\frac{4R}{n}$, y como, segun la hipótesis, n es igual para los dos polígonos, los ángulos de éstos son respectivamente iguales.

Además, las relaciones entre los lados homólogos

$$\frac{AB}{ab},\ \frac{BC}{bc},\ \frac{CD}{cd}\cdots$$

son idénticas, luego los polígonos son semejantes.

Llamando P y p á los perímetros, tendremos [**147**].

$$\frac{P}{p}=\frac{AB}{ab} \qquad [1];$$

pero los triángulos AOB y aob son semejantes, por tener un ángulo igual $O=o$ formado por lados proporcionales, luego [**148**]

$$\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{oa}=\frac{OP}{op}.$$

De esta série y de la igualdad [1] se deduce

$$\frac{P}{p}=\frac{OA}{oa}=\frac{OP}{op},$$

lo que demuestra la segunda parte del teorema.

PROBLEMA I. *(Fig. 127).*

179. *Inscribir un cuadrado en un círculo dado.*

Trazo los diámetros DB, AC perpendiculares entre sí, uno los extremos por medio de cuerdas, y resultará un cuadrado inscripto, puesto que los diámetros dividen á la circunferencia en cuatro partes iguales.

180. El triángulo rectángulo AOB nos dá

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 \quad ó \quad AB^2 = 2r^2,$$

de donde $$AB = r\sqrt{2} \qquad [1];$$

luego *el lado del cuadrado inscripto en un círculo es igual al radio multiplicado por la raiz cuadrada de 2.*

De la igualdad [1] se deduce

$$\frac{AB}{r} = \sqrt{2};$$

donde vemos que la relacion del lado del cuadrado inscripto al radio del círculo es el número inconmensurable $\sqrt{2}$; luego *el lado de un cuadrado inscripto y el radio del círculo son cantidades inconmensurables.*

El lado AB puede considerarse como la diagonal de un cuadrado, y el radio AO como uno de los lados, por consiguiente *la diagonal de un cuadrado y su lado son cantidades inconmensurables.*

PROBLEMA II. *(Fig. 128).*

181. *Inscribir un exágono regular en un círculo dado.*

Sea AB un lado del exágono regular inscripto; trazo los radios OA y OB. En el triángulo OAB el ángulo en el centro AOB tiene por valor $\frac{4R}{6} = \frac{2}{3}$ R, por consiguiente entre los otros dos ángulos valdrán

$$2R - \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R,$$

pero OA=OB, luego los ángulos OBA y OAB son iguales, y cada uno valdrá $\frac{2}{3}$ R. Siendo iguales los tres ángulos del triángulo AOB, tambien son iguales los lados, por tanto AB=OA.

Vemos, pues, que *el lado del exágono regular inscripto, ó sea la cuerda de la sexta parte de la circunferencia, es igual al radio; luego para inscribir un exágono regular en un círculo se lleva el radio como cuerda seis veces sobre la circunferencia.*

PROBLEMA III. (*Fig.* 128).

182. *Inscribir un triángulo equilátero en un círculo dado.*

Suponiendo dividida la circunferencia en seis arcos iguales, bastará trazar las cuerdas AC, CE, EA de los arcos duplos para obtener el triángulo equilátero.

183. En el triángulo EAB, rectángulo en A; tenemos

$$EA^2 = EB^2 - AB^2,$$

pero $EB = 2r$, $AB = r$, luego

$$EA^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

de donde $$EA = r\sqrt{3} \qquad [1],$$

luego *el lado del triángulo equilátero inscripto en un círculo es igual al radio multiplicado por la raiz cuadrada de* 3.

De la igualdad [1] se deduce $\frac{EA}{r} = \sqrt{3}$, y como $\sqrt{3}$ es un número inconmensurable, podemos decir: *el lado del triángulo equilátero inscripto en un círculo y el radio son cantidades inconmensurables.*

Es fácil ver que el lado AC es perpendicular el radio OB en su punto medio, luego *la apotema* OG *de un triángulo equilátero inscripto es igual á la mitad del radio, y la altura* EG *á los* $\frac{3}{2}$ *del mismo.*

PROBLEMA IV. (*Fig.* 129.)

184. *Inscribir un decágono regular en un círculo dado.*

Sea AB el lado del decágono. Trazando los radios OA, OB se forma un triángulo AOB: el ángulo O en el centro vale $\frac{4R}{10} = \frac{2}{5}$ R, por consiguiente los otros dos ángulos OAB y OBA valdrán juntos $\frac{8}{5}$ R, y como son iguales, por oponerse á lados iguales, cada uno valdrá $\frac{4}{5}$ R. Divido el ángulo OAB en dos partes iguales por medio de la bisectriz AC, y tendremos [**136**]

$$\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{BC} \qquad [1];$$

ahora bien, en el triángulo OAC el ángulo O vale $\frac{2}{5}$ R, y el OAC, mitad de OAB, vale tambien $\frac{2}{5}$ R, luego AC =OC; en el triángulo ABC el ángulo en B vale $\frac{4}{5}$ R, el CAB vale $\frac{2}{5}$ R, luego ACB, suplemento de los anteriores, valdrá $\frac{4}{5}$ R, por consiguiente AB=AC.

De las igualdades AB=AC, AC=OC se deduce AB=OC; como además es OA=OB, la igualdad [1] podrá escribirse así

$$\frac{OB}{OC}=\frac{OC}{BC};$$

donde vemos que el radio OB está dividido por el punto C en media y extrema razon, y como la parte mayor OC es igual al lado AB, podemos decir: *el lado del decágono regular inscripto en un círculo es igual á la parte mayor del radio dividido en media y extrema razon.*

El valor del lado es [**168, escolio**]

$$\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$$

PROBLEMA V.

185. *Inscribir un pentágono regular en un círculo.*

Divídase la circunferencia en diez arcos iguales y trácense las cuerdas de los arcos duplos.

Problema VI.

186. *Inscribir en un círculo dado un pentedecágono regular.*

Réstese de la sexta parte de la circunferencia la décima parte de la misma: la cuerda del arco que resulte será el lado del pentedecágono, puesto que

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}.$$

187. Si los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscripto se dividen en dos partes iguales, es evidente que trazando las cuerdas de las mitades se obtendrá otro polígono regular inscripto de duplo número de lados que el primero. Si tenemos, por ejemplo, un cuadrado inscripto, cada arco se dividirá en dos, resultando ocho arcos iguales cuyas cuerdas formarán un octógono regular inscripto; partiendo del octógano se puede obtener por el mismo procedimiento el polígono de 16 lados, despues el de 32 etc.

Podremos, pues, inscribir polígonos de los siguientes números de lados

3,	6,	12,	24,	48.....
4,	8,	16,	32,	64.....
5,	10,	20,	40,	80.....
15,	30,	60,	120,	240.....

Despues de inscripto uno cualquiera de estos polígonos, trazando tangentes por los vértices se obtendrá el polígono circunscrito semejante al inscripto.

Problema VII. (*Fig.* 130).

188. *Conociendo el lado de un polígono regular inscripto y el radio del círculo, calcular el lado del polígono semejante circunscrito.*

Llamemos a al lado AB del polígono inscripto y r al radio del círculo: el lado del polígono circunscrito semejante seráCD [**175**], que podemos representar por b, Ahora bien, los triángulos semejantes AOB y COD dan [148]

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OE}{OF} \quad ó \quad \frac{a}{b}=\frac{OE}{r},$$

pero $OE^2=OA^2-AE^2$ ó bien $OE^2=r^2-\frac{a^2}{4}$,

$$OE=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}\ ;$$

luego $$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}{r},$$

de donde $$b=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

PROBLEMA VIII. *(Fig. 130)*.

189. *Conociendo el lado de un polígono regular inscripto y el radio del círculo, calcular el lado de otro polígono regular inscripto de doble número de lados.*

Si $AB=a$ es el lado conocido de un polígono regular inscripto, $AF=b$ será el lado de otro polígono regular inscripto de doble número de lados [187].

Ahora bien, el ángulo AOF es agudo, puesto que su duplo AOB es menor que dos rectos, luego [159].

$$AF^2=OA^2+OF^2-2OF.\,OE,$$

ó $$b^2=r^2+r^2-2r.\,OE;$$

pero en el problema anterior hemos hallado

$$OE=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}},$$

luego $$b^2=2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}=2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2},$$

de donde $$b=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}},$$

CAPÍTULO SEGUNDO.

RELACION DE LA CIRCUNFERENCIA AL DIÁMETRO.

190. Si AB (*Fig.* 131) es un lado de un polígono regular inscripto, uniendo los extremos A y B con el punto medio C del arco ACB resultarán dos lados AC y CB de otro polígono regular inscripto de doble número de lados que el primero, y en el triángulo ABC se tendrá

$$AB < AC + CB.$$

Como esta desigualdad se verifica tambien para otro lado cualquiera, vemos que un lado del primer polígono es menor que los dos lados correspondientes del segundo, y que, por tanto, el perímetro de aquel es menor que el de éste. Además, cada lado de un polígono inscripto es menor que el arco que subtiende, luego la suma de todos los lados, ó sea el perímetro, será menor que la suma de todos los arcos, ó sea la circunferencia. En consecuencia, podemos decir:

Los perímetros de los polígonos regulares inscriptos cuyo número de lados se duplica, van aumentando; pero siempre son menores que la circunferencia.

Supongamos que AD y BD sean dos medios lados de un polígono regular circunscrito: trazando por el medio C del arco ACB la tangente EF, esta tangente será un lado entero, y las rectas AE, BF dos medios lados, de otro polígono regular circunscrito de doble número de lados que el primero. En el triángulo EDF tenemos

$$ED + DF > EF;$$

aumentando los dos miembros de esta desigualdad en las rectas AE y BF será

$$ED + AE + DF + BF > EF + AE + BF$$

ó

$$AD + BD > EF + AE + BF,$$

esto es, dos medios lados del primer polígono valen más que un lado y dos medios lados del segundo, ó lo que es igual, un lado del primer polígono es mayor que dos lados del segundo; y como este razonamiento se puede aplicar á un lado cualquiera, vemos que el perímetro de un polígono regular circunscrito es mayor que el de otro polígono circunscrito de doble número de lados. Además es evidente que entre las infinitas líneas que pueden encerrar al círculo O existe una menor que todas las demás, y como ningun perímetro de polígono circunscrito es menor que todos los demás, puesto que dado un polígono basta duplicar el número de sus lados para hallar otro de menor perímetro, resulta que la circunferencia es menor que los perímetros de todos los polígonos circunscritos al círculo O. De lo expuesto se deduce:

Los perímetros de los polígonos regulares circunscritos cuyo número de lados se duplica, van disminuyendo; pero siempre son mayores que la circunferencia.

TEOREMA I. *(Fig.* 130.*)*

191. *La circunferencia es el límite comun de los polígonos regulares, tanto inscriptos como circunscritos, cuyo número de lados se duplica indefinidamente.*

Sean P y p los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, el primero circunscrito y el segundo inscripto. Tenemos [**178**]

$$\frac{P}{p}=\frac{OF}{OE} \quad \text{de donde} \quad \frac{P-p}{P}=\frac{OF-OE}{OF},$$

de la segunda igualdad se deduce

$$P-p=\frac{P\,(OF-OE)}{OF}.$$

Si suponemos que se duplica indefinidamente el número de lados de los polígonos propuestos, los valores sucesivos de P, que disminuye si bien permaneciendo mayor que la circunferencia, serán siempre finitos, y OF no varía, por ser el radio del círculo O. En cuanto á la diferencia OF—OE, que entra como factor en el valor de $P-p$, puede ser tan pequeña como se quiera; en efecto, el triángulo OAE nos dá

$$AE > OA - OE \text{ ó bien } AE > OF - OE;$$

si consideramos la circunferencia dividida en suficiente número de partes iguales, éstas serán tan pequeñas como queramos, y con mayor razon lo serán las cuerdas correspondientes, ó sean los lados del polígono regular inscripto, luego AE, que sólo es medio lado, puede llegar á ser tan pequeño como se quiera, y la diferencia OF — OE, podrá ser con mayor razon, menor que cualquiera cantidad asignable. Si además se tiene en cuenta que las otras cantidades P y OF que entran en el valor de P—p tienen valores finitos, es claro que esta diferencia entre los perímetros propuestos puede ser tan pequeña como se quiera.

Ahora bien, hallándose la circunferencia comprendida entre los mencionados perímetros [**190**], se diferenciará de cualquiera de ellos en una cantidad todavía menor que P—p, luego el teorema enunciado es cierto.

Teorema II.

192. *Dos circunferencias cualesquiera son proporcionales á sus radios y á sus diámetros.*

Sean c y c' las circunferencias, r y r' sus radios respectivos. Si consideramos inscriptos á las circunferencias dadas dos polígonos regulares semejantes, sus perímetros p y p' serán proporcionales á los radios r y r', es decir,

$$\frac{p}{r}=\frac{p'}{r'};$$

duplicando indefinidamente y á la vez el número de lados de los dos polígonos, sus perímetros p y p' aumentarán teniendo por límites superiores las respectivas circunferencias c y c'; sin embargo, la relacion variable $\frac{p}{r}$ siempre será igual á la $\frac{p'}{r'}$, por consiguiente los límites $\frac{c}{r}$ y $\frac{c'}{r'}$ tambien serán iguales. Tenemos, pues,

$$\frac{c}{r}=\frac{c'}{r'},$$

donde vemos que las circunferencias son proporcionales á los radios.

Multiplicando por 2 los denominadores r y r' será

$$\frac{c}{2r}=\frac{c'}{2r'},$$

luego las circunferencias son tambien proporcionales á los diámetros.

Corolario. La igualdad

$$\frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$$

manifiesta que la relacion de una circunferencia c á su diámetro $2r$ es igual á la relacion entre otra circunferencia cualquiera c' y su diámetro $2r'$, lo que se expresa diciendo:

La relacion de la circunferencia al diámetro es un número constante.

Este número constante se representa por la letra griega π. [1]

Problema I.

193. *Hallar la relacion de la circunferencia al diámetro.*

Puesto que el valor de π es el mismo para cualquiera circunferencia, elegiremos una cuyo radio sea la unidad lineal y el diámetro, por tanto, igual á 2: si logramos hallar la longitud de dicha circunferencia, bastará dividirla por 2 para obtener el valor de π.

El perímetro de cualquier polígono regular inscripto es menor que la circunferencia, por consiguiente si consideramos como longitud de esta curva la de aquel perímetro, cometeremos un error tanto más pequeño cuanto mayor sea el número de lados del polígono, y que podrá disminuir indefinidamente, puesto que los perímetros de los polígonos regulares inscriptos cuyo número de lados aumenta, se diferencian cada vez ménos de la circunferencia y pueden acercarse á ésta cuanto se quiera.

Inscribamos, pues, en la circunferencia propuesta una série de polígonos regulares, empezando por uno cuyo lado sea conocido, por ejemplo, el cuadrado.

Sabemos [**180**] que el lado del cuadrado inscripto en un círculo de radio r es $r\sqrt{2}$, luego siendo el radio 1 tendremos

$$l_4 = \sqrt{2},$$

representando por l_4 el lado.

---

1 Léase *pi*.

La fórmula

$$b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}},$$

del número **189**, se convierte, suponiendo $r = 1$, en

$$b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}};$$

sustituyendo en ésta la letra a por $\sqrt{2}$, lado del cuadrado inscripto, tendremos para lado del octógono regular

$$l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

sirviéndonos de la misma fórmula obtendremos tambien

$$l_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

y así sucesivamente.

Suponiendo que nos detengamos en el polígono de 256 lados, hallaremos efectuando los cálculos

$$l_{256} = 0,024543;$$

multiplicando este número por 256, tendremos para valor del perímetro

$$p_{256} = 6,28301.$$

Conviene ahora hallar el límite del error que se comete tomando para longitud de la circunferencia la del perímetro del polígono de 256 lados. Con este objeto, calcularemos el perímetro del polígono semejante circunscrito, sirviéndonos de la fórmula del número **188**, que el supuesto $r = 1$ se convierte en

$$b = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

Como esta fórmula nos daria solamente el lado del polígono circunscrito, la multiplicaremos ante todo por 256, y será

$$P_{256} = \frac{2.256a}{\sqrt{4 - a^2}};$$

sustituyendo ahora $256a$ por su valor hallado 6,28301, a por 0,024543, y efectuando las operaciones se obtiene

$$P_{256} = 6,28348.$$

Hallándose la circunferencia comprendida entre los perímetros de los polígonos inscripto y circunscrito de 256 lados, podemos tomar para su longitud la expresion 6,28301 del primero, siendo el error por defecto menor que 0,00047, diferencia entre ambos perímetros.

Dividiendo la longitud de la circunferencia por 2, tendremos para valor de π el número 3,141505 con un error por defecto menor que 0,000235, de suerte que las tres primeras cifras decimales son exactas.

191. El procedimiento que hemos empleado para hallar una relacion aproximada de la circunferencia al diámetro, debe mirarse como una prueba de que la Geometría elemental posee medios para determinar el valor de π con cuanta aproximacion sea necesaria: en las Matemáticas superiores se resuelve este problema mucho más brevemente.

Lambert demostró el primero que la relacion de la circunferencia al diámetro es un número inconmensurable; por consiguiente sólo pueden hallarse valores más ó ménos aproximados de la misma. La relacion más antígua es la hallada por *Arquímedes:* está representada por la fraccion $\frac{22}{7}$ y excede á la verdadera en menos de dos milésimas; otra relacion, empleada con frecuencia, es la de *Mecio* $\frac{355}{113}$ [1], que se diferencia de la verdadera en menos de media milésima *por exceso*; por último el valor de π se ha calculado hasta con 154 cifras decimales: hé aquí las 20 primeras

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846....$$

Muchas veces se emplea el logaritmo de este número, que es

$$\log.\ \pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435....$$

PROBLEMA II.

195. *Dado el radio hallar la longitud de la circunferencia, y al contrario.*

---

1 Es fácil recordar esta relacion: escríbase cada uno de los tres primeros números impares dos veces, en la forma siguiente 113355; divídase este número en grupos de tres cifras, y se tendrán los términos del quebrado.

Sea c la circunferencia y r el radio. La relacion de la circunferencia al diámetro será $\frac{c}{2r}$, luego

$$\frac{c}{2r} = \pi,$$

de donde $$c = 2\pi r, \qquad r = \frac{c}{2\pi}.$$

EJEMPLOS.

1.° *Hallar la longitud de una circunferencia cuyo radio es* 20 *metros,*

En la fórmula $c = 2\pi r$ sustituyamos r por 20 y π por 3,14159, y será

$$c = 2 \times 3{,}14159 \times 20 = 125^{\mathrm{m}},6636.$$

2.° *Hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es* 40000 *kilómetros.*

Empleando la fórmula $r = \dfrac{c}{2\pi}$ será

$$r = \frac{40000}{2 \times 3{,}14159} = 6366^{\mathrm{km}}.$$ [1]

PROBLEMA III.

196. *Hallar la longitud de un arco de círculo, conociendo el número de grados y el radio.*

Sea a el número de grados del arco, r el radio y l la longitud que buscamos.

El problema propuesto puede enunciarse en la forma siguiente: *si á* 180 *grados corresponde la longitud de la semicircunferencia* πr, *qué longitud corresponderá á un arco de* a *grados?*

Es evidente que las longitudes de los arcos de una misma circunferencia son proporcionales al número de grados, por tanto la cuestion propuesta es una regla de tres simple

---

1 Segun la definicion de metro, la longitud de un meridiano terrestre es 40000 kilómetros, de modo que el radio de la tierra, suponiéndola esférica es 6366 kilómetros.

Grados.	Longitudes.
180.	πr
a.	l

$$l = \pi r \times \frac{a}{180}.$$

Ejemplos.

1.° *¿Cuál es la longitud de un arco de 84° siendo el radio 20 metros?*

$$l = 3{,}14159 \times 20 \times \frac{84}{180} = 29^{m},\ 3215.$$

2.° *¿Cuál es la longitud de un arco de 30° 45′ siendo el radio 10 metros?*

$$l = 3{,}14159 \times 10 \times \frac{1845}{10800} = 5^{m},\ 36688.$$

Problema VI. *(Recíproco del anterior).*

197. *Hallar el número de grados de un arco, conociendo su longitud y el radio.*

Tenemos la siguiente regla de tres

Longitudes.	Grados.
πr	180
l	a

$$a = 180 \times \frac{l}{\pi r}.$$

Ejemplos

1.° *¿Cuántos grados tiene un arco de 60 metros perteneciente á una circunferencia cuyo radio es 54 metros?*

$$a = 180 \times \frac{60}{3{,}14159 \times 54} = 63°\ 40'.$$

2.° *¿Cuántos grados tiene un arco igual en longitud al radio?*

$$a = 180 \times \frac{r}{\pi r} \quad \text{ó} \quad a = \frac{180}{\pi} = 57°{,}28578.$$

LIBRO QUINTO.

ÁREAS DE LAS SUPERFICIES PLANAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

MEDIDA DE LAS ÁREAS.

198. Área *de una superficie es la medida de su extension.*

La unidad de áreas es ordinariamente un cuadrado, por consiguiente el área de una superficie será la relacion entre la extension de la misma y la del cuadrado que sirve de unidad.

Dos superficies son *equivalentes* cuando tienen la misma área y diferente forma. Las superficies equivalentes no pueden coincidir.

Teorema I. *(Fig. 132).*

199. *Dos rectángulos* AC *y* EG [1] *que tienen iguales las bases, son proporcionales á las alturas* AD *y* EH.

Supongamos que las alturas sean conmensurables, y que la medida comun se halle contenida cinco veces en AD y tres veces en EH; tendremos, segun esto,

$$\frac{AD}{EH} = \frac{5}{3} \qquad [1].$$

Si por los puntos de division de las alturas trazamos paralelas á las bases, el rectángulo AC quedará dividido en cinco rectángulos y el EG en tres; todos estos rectángulos son iguales, porque teniendo igual base y altura es fácil hacer que coincidan, luego

$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{5}{3} \qquad [2].$$

---

1 Designaremos con frecuencia un cuadrilátero por las letras de dos vértices opuestos.

De las igualdades [1] y [2] se deduce

$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AD}{EH},$$

lo cual debíamos demostrar.

Si las alturas fuesen inconmensurables, haríamos un razonamiento análogo al de los números **57** y **131**.

Corolario. *Dos rectángulos que tienen alturas iguales son proporcionales á las bases.*

Puesto que las alturas pueden considerarse como bases, y las bases como alturas.

Teorema II.

200. *Dos rectángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Sean R y R′ los rectángulos, a y b la altura y base del primero, a' y b' la altura y base del segundo.

Supongamos construido un tercer rectángulo R″ que tenga la base b del primero y la altura a' del segundo.

Los rectángulos R y R″ que tienen bases iguales son proporcionales á sus alturas, esto es,

$$\frac{R}{R''} = \frac{a}{a'}.$$

Los rectángulos R″ y R′ que tienen alturas iguales son proporcionales á sus bases, esto es,

$$\frac{R''}{R'} = \frac{b}{b'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos igualdades fraccionarias, y suprimiendo el factor comun R″, se obtiene

$$\frac{R}{R'} = \frac{b.a}{b'.a'},$$

lo cual debíamos demostrar.

Teorema III.

201. *El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Sea R el restángulo que se trata de medir, a y b su altura y base; sea C el cuadrado que se toma para unidad superficial, y l el lado de este cuadrado. Como el cuadrado es un rectángulo, tendremos en virtud del teorema anterior,

$$\frac{R}{C}=\frac{b.a}{l.l}.$$

Si *convenimos* en elegir para unidad superficial el cuadrado cuyo lado es la unidad lineal, l valdrá 1: por tanto

$$\frac{R}{C}=b.a;$$

pero $\frac{R}{C}$ es el área del rectángulo [**198**], luego el teorema es cierto.

ESCOLIOS.

1.° Téngase muy presente que en la demostracion anterior hemos convenido en elegir para unidad superficial un cuadrado cuyo lado sea la unidad lineal; por consiguiente cuando se hayan medido las líneas con una unidad determinada, el área del rectángulo estará expresada en las unidades cuadradas correspondientes; así, cuando las líneas se midan en metros, varas etc., el área estará expresada en metros cuadradas, varas cuadradas etc.

Esta observacion es tambien aplicable á los teoremas siguientes.

2.° La base y altura de un rectángulo suelen llamarse *dimensiones* del mismo; por esto se dice con frecuencia:

El área de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones.

202. COROLARIO. *El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.* [1]

Puesto que el cuadrado es un rectángulo de igual base y altura.

En virtud de esta proposicion, la vara cuadrada, esto es, el cuadrado cuyo lado es una vara ó tres piés, equivale á $3^2=9$ piés cuadrados, el pié cuadrado á $12^2=144$ pul-

1 A esto debe su origen el nombre de cuadrado que dimos en Aritmética á la segunda potencia de un número. Por análoga razon suele llamarse *rectángulo* de dos números al producto de los mismos.

gadas cuadradas, el metro cuadrado á $10^2 = 100$ decimetros cuadrados etc.

Teorema IV. (*Fig.* 133).

203. *El área de un paralelógramo* ABCD *es igual al producto de su base por su altura.*

Levantando las perpendiculares AE y BF á la base AB del paralelógramo hasta que encuentren al lado CD ó á su prolongacion, se forma un rectángulo ABFE equivalente al paralelógramo ABCD. En efecto: los triángulos rectángulos AED y BFC tienen iguales los catetos AE y BF, por ser lados opuestos del rectángulo, y las hipotenusas AD y BC, por ser lados opuestos del paralelógramo, luego son iguales; añadiendo al trapecio ABFD el triángulo AED resulta el rectángulo ABFE, y añadiendo al mismo trapecio el otro triángulo BFC resulta el paralelógramo ABCD; pero añadiendo cantidades iguales á una misma cantidad, las sumas son iguales; luego el rectángulo y el paralelógramo tienen igual extension ó son equivalentes.

Ahora bien, el área del rectángulo ABFE es $AB \times BF$, luego la del paralelógramo propuesto será tambien $AB \times BF$, es decir, el producto de su base por su altura.

Corolarios.

1.° *Dos paralelógramos de igual base y altura son equivalentes.*

2.° *Dos paralelógramos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas; si las bases son iguales, los paralelógramos son proporcionales á las alturas; y si son iguales las alturas, los paralelógramos son entre sí como sus bases.*

Teorema V. (*Fig.* 134).

204. *El área de un triángulo* ABC *es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

Por cada uno de los vértices B y C trazo una paralela al lado opuesto y se formará un paralelógramo ABDC, del que es mitad el triángulo propuesto. En efecto: los triángulos ABC y BCD tienen iguales los lados AC y BD, así como tambien los AB y CD, además el lado BC es comun, luego los triángulos son iguales.

Ahora bien, el área del paralelógramo ABDC es AB $\times$ CE, luego la del triángulo ABC será $\frac{AB \times CE}{2}$, esto es, la mitad del producto de su base por su altura.

Corolarios.

1.° *Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.*

2.° *Dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas; si tienen bases iguales son proporcionales á las alturas; y si tienen alturas iguales son entre sí como las bases.*

Teorema VI. (*Fig.* 135).

205. *El área de un trapecio* ABCD *es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.*

Trazando la diagonal DB queda dividido el trapecio en dos triángulos ABD y DBC: el primero tiene por área $\frac{AB \times DE}{2}$ y el segundo $\frac{DC \times DE}{2}$; luego el área del trapecio será

$$\frac{AB \times DE}{2} + \frac{DC \times DE}{2} = DE \times \frac{AB + DC}{2},$$

esto es, la altura multiplicada por la semisuma de las bases.

Escolio. Sabemos que la recta FG que une los puntos medios de los lados AD y BC es igual á la semisuma de las bases, luego *el área de un trapecio es igual al producto de la altura por la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

Teorema VII.

206. *El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por su apotema.*

Trazando radios desde el centro á todos los vértices del polígono quedará éste descompuesto en tantos triángulos como lados tenga; todos estos triángulos serán iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales, y si tomamos por base de cualquiera de ellos el lado del polígono, la apotema de éste será la altura del triángulo, que tendrá por área

$$\frac{l \times a}{2};$$

llamando l al lado y a á la apotema.

Si el polígono tiene n lados su área será

$$\frac{l \times a}{2} \times n = \frac{ln \times a}{2},$$

pero ln es el perímetro, luego el área será $\frac{p \times a}{2}$, esto es, la mitad del producto del perímetro por la apotema.

Problema.

207. *Hallar el área de un polígono irregular.*

Puede resolverse este problema descomponiendo el polígono en triángulos, por medio de diagonales ó por medio de rectas trazadas desde un punto interior á todos los vértices; midiendo las áreas de los triángulos y sumándolas se obtiene el área del polígono.

Es muy frecuente, sobre todo cuando el polígono está trazado en el terreno, emplear otro método.

Sea el polígono de la figura 136.

Tomando para base de la operacion la mayor de las diagonales GC, se bajan á ella perpendiculares desde los vértices; midiendo estas perpendiculares y los segmentos de la base, se tienen los datos necesarios para calcular las áreas de los triángulos y trapecios rectángulos en que se ha descompuesto el polígono: el área de éste será la suma de las áreas parciales.

Teorema VIII.

208. *El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

Sean C el área del círculo, c la circunferencia y r el radio.

Imaginemos un polígono regular inscripto en el circulo, y sean P su área, p su perímetro y a su apotema. La expresion del area será

$$P = \frac{p \times a}{2}.$$

Suponiendo que el número de lados del polígono se duplica indefinidamente, el perímetro p irá aumentando siendo su límite la circunferencia c, la apotema a tendrá por límite el radio r del círculo, y el área P del polígono se acercará á la del círculo cuanto se quiera, puesto que el límite del perímetro es la circunferencia; luego segun el teorema de los límites tendremos

$$C = \frac{c \times r}{2},$$

lo cual debíamos demostrar.

ESCOLIO. Siendo $2\pi r$ la longitud de una circunferencia de radio r, el área del círculo será

$$C = \frac{2\pi r \times r}{2} \quad \text{ó} \quad C = \pi r^2;$$

luego *para hallar el área de un círculo se multiplica la relacion de la circunferencia al diámetro por el cuadrado del radio.*

La fórmula $C = \pi r^2$ puede servir para hallar el radio de un círculo cuya área se conoce. Tenemos, en efecto,

$$r^2 = \frac{C}{\pi}, \text{ de donde } r = \sqrt{\frac{C}{\pi}}.$$

Téngase presente que la longitud del radio y el área del círculo deben expresarse en unidades correspondientes: si por ejemplo, el radio se ha medido con el metro, el área del círculo resultará expresada en metros cuadrados, y recíprocamente.

209. *Sector circular* es la parte de círculo comprendida entre un arco, llamado *base* del sector, y los radios tirados á sus extremos.

OACB (*Fig.* 137) es un sector circular cuya base es el arco ACB; tambien OADB es un sector circular que tiene por base el arco ADB.

TEOREMA XI.

210. *El área de un sector de círculo es igual á la mitad del producto de su base por el radio.*

Sea S el área del sector, b su base y r el radio del círculo.

Razonando como en el número **57** es fácil demostrar que la relacion entre un sector y el círculo á que pertenece, es igual á la relacion entre el arco del sector y la circunferencia. Llamando C al círculo y c á la circunferencia. tendremos pues

$$\frac{S}{C}=\frac{b}{c} \quad \text{ó bien} \quad \frac{S}{\pi r^2}=\frac{b}{2\pi r},$$

de donde se deduce fácilmente

$$S=\frac{b\times r}{2}.$$

Si la base del sector se nos dá en grados, hay que sustituir en la fórmula anterior b por su igual $\frac{\pi r a}{180}$ [**196**], siendo a el número de grados; haciendo la sustitucion tendremos

$$S=\frac{\pi r^2 a}{360}.$$

211. *Segmento de círculo* es cada una de las dos partes de círculo comprendidas entre una cuerda y sus dos arcos correspondientes.

El área de un segmento ABC (*Fig.* 137) menor que el semicírculo, se obtiene restando del área del sector OACB la del triángulo OAB. Si el segmento es ABD, mayor que la mitad dal círculo, su área se obtendrá sumando las áreas del sector OADB y del triángulo AOB.

212. Dos circunferencias que tienen el mismo centro se llaman *concéntricas*, y la superficie comprendida entre ellas recibe el nombre de *corona* ó *anillo*. Es claro que el área del anillo se hallará restando las de los dos círculos.

CAPÍTULO SEGUNDO.

COMPARACION DE LAS ÁREAS.

TEOREMA I. (*Fig.* 102).

213. *Las áreas de dos triángulos semejantes* ABC *y* abc, *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos y á los de sus alturas homólogas.*

Sabemos [**204, cor. 2.°**] que las áreas de dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas, luego

$$\frac{ABC}{abc}=\frac{BC\times AD}{bc\times ad} \text{ ó } \frac{ABC}{abc}=\frac{BC}{bc}\times\frac{AD}{ad} \qquad [1],$$

pero las bases de dos triángulos semejantes son proporcionales á sus alturas, esto es,

$$\frac{BC}{bc}=\frac{AD}{ad}.$$

Sustituyendo en la igualdad [1] la fraccion $\frac{AD}{ad}$ por su igual $\frac{BC}{bc}$, tendremos

$$\frac{ABC}{abc}=\frac{BC^2}{bc^2},$$

lo que demuestra la primera parte del teorema.

Si por el contrario, se sustituye la fracion $\frac{BC}{bc}$ por su igual $\frac{AD}{ad}$ será

$$\frac{ABC}{abc}=\frac{AD^2}{ad^2},$$

lo que demuestra la segunda parte.

ESCOLIO. Si los triángulos ABC y *abc* no son semejantes, pero tienen un ángulo igual $B=b$, los triángulos rectángulos ABD y *abd* serán semejantes, y tendremos

$$\frac{AD}{ad}=\frac{AB}{ab};$$

8

sustituyendo en la igualdad [1] la razon $\frac{AD}{ad}$ por su igual $\frac{AB}{ab}$, tendremos

$$\frac{ABC}{abc}=\frac{BC\times AB}{bc\times ab};$$

luego *las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual, son proporcionales á los productos de los lados que forman dicho ángulo.*

TEOREMA II. *(Fig. 98).*

214. *Las áreas de dos polígonos semejantes* ABCDE *y* abcde, *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Descompongo los polígonos en igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, por medio de diagonales trazadas desde los vértices homólogos A y *a*.

La semejanza de estos triángulos da

$$\frac{ABC}{abc}=\frac{BC^2}{bc^2},\ \frac{ACD}{acd}=\frac{CD^2}{cd^2},\ \frac{ADE}{ade}=\frac{DE^2}{de^2};$$

pero $\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}$ ó $\frac{BC^2}{bc^2}=\frac{CD^2}{cd^2}=\frac{DE^2}{de^2}$;

luego $$\frac{ABC}{abc}=\frac{ACD}{acd}=\frac{ADE}{ade};$$

de esta série de razones iguales se deduce

$$\frac{ABC+ACD+ADE}{abc+acd+ade}=\frac{ABC}{abc}=\frac{AB^2}{ab^2},$$

ó $$\frac{ABCDE}{abcde}=\frac{AB^2}{ab^2}.$$

215. COROLARIO. *(Fig. 126). Las áreas de dos polígonos regulares semejantes* ABCDEF *y* abcdef, *son proporcionales á los cuadrados de los radios y á los cuadrados de las apotemas.*

Llamando A y *a* á las áreas tendremos

$$\frac{A}{a}=\frac{AB^2}{ab^2}\qquad [1];$$

pero los triángulos AOB y *aob* son semejantes, luego

$$\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{oa}=\frac{OP}{op} \text{ ó } \frac{AB^2}{ab^2}=\frac{OA^2}{oa^2}=\frac{OP^2}{op^2};$$

de estas igualdades y de la [1] se deduce

$$\frac{A}{a}=\frac{OA^2}{oa^2}=\frac{OP^2}{op^2}.$$

TEOREMA III.

216. *Las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Si R y r son los radios, las áreas serán πR^2 y πr^2, cuya razon es $\frac{\pi R^2}{\pi r^2}=\frac{R^2}{r^2}\cdot$ Como los radios son proporcionales á los diámetros D y d, la razon $\frac{R^2}{r^2}$ es igual á $\frac{D^2}{d^2}$: luego las áreas están en la relacion $\frac{D^2}{d^2}\cdot$

217. Se llaman *sectores semejantes* aquellos cuyas bases tienen igual número de grados.

Es evidente que los ángulos formados por los radios son iguales.

TEOREMA IV.

Las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Sean R y r los radios de los sectores y a el número de grados de las bases: las áreas serán [**210**]

$$\frac{\pi R^2 a}{360} \text{ y } \frac{\pi r^2 a}{360} \text{ cuya razon es } \frac{R^2}{r^2}\cdot$$

218. Se llaman *segmentos semejantes* los que corresponden á sectores semejantes.

TEOREMA V.

Las áreas de dos segmentos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Sean S y s los sectores que corresponden á los segmentos propuestos, T y t los triángulos tambien correspondientes á dichos segmentos.

Siendo semejantes los sectores S y s, tendremos

$$\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2};$$

tambien los triángulos T y t son semejantes, luego

$$\frac{T}{t} = \frac{R^2}{r^2}.$$

De estas igualdades se deduce

$\frac{S}{s} = \frac{T}{t}$, por consiguiente $\frac{S-T}{s-t} = \frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2}$;

y como $S-T$ y $s-t$ son las áreas de los segmentos, queda demostrado al teorema.

219. Escolio general. En virtud de los teoremas demostrados en este capítulo, siempre que se conozca la relacion m entre dos lados homólogos de polígonos semejantes, *la elevaremos al cuadrado* para hallar la relacion entre las áreas de los mismos. Si, por ejemplo, el lado de un polígono es *doble* de su homólogo en otro polígono semejante, el área del primero no será doble sinó *cuatro veces mayor*; si la relacion de los lados es $\frac{2}{3}$, la de las áreas será $\frac{4}{9}$ etc.

Lo mismo decimos respecto de los círculos y de los sectores y segmentos semejantes.

Teorema VI. (*Fig.* 138).

220. *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*

Sea el triángulo ABC rectángulo en A. Vamos á demostrar que el cuadrado CD, construido sobre la hipotenusa BC, es equivalente á la suma de los cuadrados AE y AF, construidos sobre los catetos AB y AC.

Bajo desde el vértice A del ángulo recto una perpendicular AH á la hipotenusa y la prolongo hasta G; trazo las rectas AD y EC.

El triángulo ABD tiene BD por base y la altura será igual á BH; pero BD y BH son tambien la base y altura del rectángulo BG, luego el triángulo ABD es la mitad del rectángulo BG.

El triángulo EBC tiene EB por base y la altura será igual á AB, pero EB y AB son la base y altura del cuadrado AE, luego el triángulo EBC es la mitad del cuadrado AE.

Ahora bien, los triángulos ABD y EBC que hemos considerado son iguales, por tener AB=EB, BD=BC, y el ángulo ABD, compuesto de un recto más ABC, igual al ángulo EBC, compuesto tambien de un recto más ABC.

Siendo iguales estos triángulos, las áreas del rectángulo BG y del cuadrado AE son tambien iguales.

Del mismo modo se demostraria que el rectángulo CG equivale al cuadrado AF; y como los rectángulos BG y CG componen el cuadrado CD construido sobre la hipotenusa, el teorema queda demostrado.

Teorema VII.

221. *Si considerando como homólogos los lados de un triángulo rectángulo, se construyen tres polígonos semejantes, el construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los construidos sobre los catetos.*

Sean a, b, c la hipotenusa y catetos del triángulo; A, B, C las áreas de los polígonos semejantes. Tenemos [**214**].

$$\frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}=\frac{A}{a^2},$$

de donde
$$\frac{B+C}{b^2+c^2}=\frac{A}{a^2};$$

los denominadores de estas fracciones son iguales, porque segun el teorema de Pitágoras es $a^2=b^2+c^2$, luego tambien los numeradores deben ser iguales, esto es,

$$A=B+C.$$

Corolario. *Si considerando como homólogos los lados de un triángulo rectángulo, se construyen tres polígonos semejantes, el construido sobre un cateto equivale á la diferencia entre el construido sobre la hipotenusa y el construido sobre el otro cateto.*

TEOREMA VIII.

222. *Si considerando como radios ó como diámetros los lados de un triángulo rectángulo, se describen tres círculos, el descrito sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los descritos sobre los catetos; y el descrito sobre un cateto es la diferencia entre el descrito sobre la hipotenusa y el descrito sobre el otro cateto.*

La demostracion es igual á la del teorema anterior.

COROLARIO. (*Fig.* 139). *Si sobre los lados de un triángulo rectángulo, considerados como diámetros, se describen tres semicircunferencias, el área del triángulo es igual á la suma de las áreas de las figuras* ADBEA *y* AFCGA, llamadas *lúnulas* de Hipócrates.

El semicírculo descrito sobre BC es equivalente, segun se deduce del teorema anterior, á la suma de los semicírculos descritos sobre AB y AC; restando del primero los segmentos AEB y AGC resulta el triángulo ABC, y restando de la suma de los semicírculos AB y AC los mismos segmentos resultan las lúnulas; luego el triángulo es equivalente á la suma de las lúnulas.

PROBLEMAS RELATIVOS AL LIBRO QUINTO.

223. 1.° *Convertir un polígono* ABCDE (Fig. 140) *en otro equivalente que tenga un lado menos.*

Trazo una diagonal AC que forme con dos lados consecutivos del polígono un triángulo ABC; por el vértice B tiro una paralela BF á la diagonal; prolongo el lado DC hasta que encuentre á la paralela BF; y trazando la recta AF, se forma un polígono AFDE equivalente al propuesto y con un lado ménos.

En efecto: los triángulos ABC y AFC son equivalentes, por tener igual base y altura; si á la figura ACDE añadimos el primero de ellos resulta el polígono propuesto ABCDE, y si á la misma figura añadimos el segundo triángulo resulta el polígono AFDE; luego estos polígonos son equivalentes.

224. 2.° *Convertir un polígono en triángulo equivalente.*

Redúzcase el polígono á otro equivalente que tenga un lado ménos, repítase la misma operacion con el polígono resultante, y continúese así hasta obtener un triángulo.

225. 3.° *Convertir un triángulo en cuadrado equivalente.*

Sean b y a la base y altura del triángulo, sea x el lado del cuadrado equivalente.

El área del cuadrado es x^2 y la del triángulo $\frac{b\times a}{2}$,

luego

$$x^2 = \frac{b\times a}{2} \quad \text{ó} \quad x^2 = \frac{b}{2} \times a;$$

donde se vé que el lado x del cuadrado es una media proporcional entre la mitad de la base y la altura del triángulo,

226. 4.° *Convertir un polígono cualquiera en cuadrado equivalente.*

Redúzcase el polígono á triángulo y éste á cuadrado.

Si el polígono propuesto tiene por expresion de su área el producto de dos líneas, bastará hallar una media proporcional entre ellas para tener el lado del cuadrado equivalente; pues si las líneas son a y b y llamamos x al lado del cuadrado, el área del polígono será $a\times b$ y la del cuadrado x^2; como estas figuras han de ser equivalentes, tendremos

$$x^2 = a\times b,$$

donde se vé que x es media proporcional entre a y b.

Así, dado un paralelógramo, se hallará una media proporcional entre la base y la altura; si tenemos un trapecio, hallaremos una media proporcional entre la altura y la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos; y dado un polígono regular se construirá una media proporcional entre la mitad del perímetro y la apotema.

227. 5.° *Convertir un círculo en cuadrado equivalente.*

Este problema, que es el de la *cuadratura del círculo*, se resolveria hallando una media proporcional entre la mitad de la circunferencia y el radio, si se conociese el medio geométrico de rectificar la circunferencia; esto último no se ha conseguido, á pesar de los esfuerzos hechos durante muchos siglos, por lo que el problema propuesto sólo puede resolverse aproximadamente.

Con el cálculo se alcanza un grado de aproximacion más que suficiente en todos los casos prácticos, pues la longitud de la circunferencia depende del valor de π, que se ha calculado con gran número de cifras decimales.

228. 6.° *Dados dos polígonos semejantes, construir otro semejante á ellos é igual á su suma ó diferencia.*

1.° Constrúyase un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales á dos lados homólogos de los polígonos conocidos; considerando la hipotenusa de este triángulo como lado homólogo de los elegidos para catetos, constrúyase sobre ella un polígono semejante á los dados, que será igual á su suma [**221**].

2.° Tómense dos lados homólogos de los polígonos semejantes para hipotenusa y cateto de un triángulo rectángulo: el polígono semejante á los dados, construido sobre el otro cateto, será la diferencia de éstos.

229. 7.° *Describir un círculo equivalente á la suma ó diferencia de otros dos.*

Este problema se resuelve como el anterior.

230. 8.° *Dado un polígono* P *construir otro* Q *semejante al primero, y tal que las áreas de los dos guarden una relacion dada* m: n.

Análisis. Sea a un lado del polígono P y x su homólogo en el polígono Q: si determinamos el lado x estará resuelto el problema. Tenemos [**214**]

$$\frac{P}{Q}=\frac{a^2}{x^2};$$

además segun el enunciado del problema debe ser

$$\frac{P}{Q}=\frac{m}{n}, \text{ luego } \frac{a^2}{x^2}=\frac{m}{n} \qquad [1].$$

Si m y n fuesen las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y a uno de los catetos, el otro seria x [**157**, 3.°]

Síntesis (*Fig.* 141). Sobre una recta indefinida tomemos, á continuacion una de otra, las longitudes AB y BC iguales á m y n; sobre AC como diámetro describamos una semicircunferencia; por el punto B levantemos una perpendicular al diámetro; y unamos D con A y con C. El triángulo ADC es rectángulo, y los segmentos AB y BC de la hipotenusa son iguales á m y n, luego si el cateto AD fuese igual á a, el otro cateto DC seria igual á x; pero se comprende que en la generalidad de los casos AD no será igual á a, por lo que tomaremos sobre AD, prolongada si es preciso, una longitud DE igual al lado a, y tirando por E una paralela á AC, determinaremos sobre DC una longitud DG que es igual á x.

En efecto: en el triángulo rectángulo EDG tenemos

$$\frac{ED^2}{DG^2}=\frac{EF}{FG}, \text{ pero } \frac{EF}{FG}=\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n}, \text{ luego } \frac{ED^2}{DG^2}=\frac{m}{n},$$

ó bien
$$\frac{a^2}{DG^2}=\frac{m}{n}.$$

Comparando esta igualdad con la [1], se deduce $x=DG$.

231. 9.º *Dados dos polígonos P y Q, construir otro polígono semejante á P y equivalente á Q.*

Análisis. Sea X el polígono que se busca, a un lado del polígono P y x su homólogo en el polígono X.

Debiendo ser semejantes los polígonos P y X será

$$\frac{P}{X}=\frac{a^2}{x^2},$$

y como X debe ser equivalente á Q, tendremos

$$\frac{P}{Q}=\frac{a^2}{x^2};$$

reemplazando los polígonos P y Q por los cuadrados equivalentes p^2 y q^2 será

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{a^2}{x^2} \quad \text{ó} \quad \frac{p}{q}=\frac{a}{x}.$$

Síntesis. Vemos por el análisis anterior que x es una cuarta proporcional á las rectas conocidas p, q y a. Construyendo sobre x un polígono semejante al P estará resuelto el problema.

EJERCICIOS DE LA GEOMETRÍA PLANA.

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR.

I. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.

II. De todas las cuerdas que pueden pasar por un punto interior á un círculo, la menor es la perpendicular al diámetro que pasa por dicho punto.

III. El camino más corto de un punto á una circunferencia, es la parte exterior de la secante tirada por dicho punto y el centro.

IV. En una circunferencia dada, el lugar geométrico de los puntos medios de varias cuerdas que tienen un punto comun, es otra circunferencia que tiene por diámetro la recta tirada desde el punto comun al centro de la circunferencia dada.

V. La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es: 1.° paralela al tercer lado; 2.° igual á su mitad.

VI. Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera por rectas que no se crucen, resulta un paralelógramo.

VII. Un ángulo de un triángulo es recto, agudo ú obtuso, segun que la recta que une el vértice con el punto medio del lado opuesto sea igual, mayor ó menor que la mitad de dicho lado.—Recíproco.

VIII. Las tres perpendiculares trazadas desde los vértices de un triángulo á los lados opuestos, se cortan en un mismo punto.

IX. Las tres rectas que unen los vértices de un triángulo con los puntos medios de los lados opuestos se cortan en un mismo punto, que se encuentra á la tercera parte de cualquiera de ellas, contando desde el lado, y á las dos terceras partes contando desde el vértice.

X. De todos los triángulos que tienen igual base y altura, el isósceles es el que tiene menor perímetro.

XI. Las prolongaciones de los lados no paralelos de un trapecio se cortan sobre la recta que pasa por los puntos medios de las bases.

XII. Las diagonales de un trapecio se cortan sobre la recta que une los puntos medios de las bases.

XIII. Si dos cuerdas se cortan perpendicularmente, la suma de dos arcos no contiguos interceptados por. ellas, es igual á la semicircunferencia.

XIV. Si dos cuerdas se cortan perpendicularmente, la suma de los cuadrados de los cuatro segmentos es igual al cuadrado del diámetro.

XV. En todo triángulo, la suma de los cuadrados de dos lados es igual al duplo del cuadrado de la mitad del tercero más el duplo del cuadrado de la recta que une el punto medio de éste con el vértice opuesto.

XVI. La suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales, más el cuádruplo de la recta que une los puntos medios de las mismas.

Corolario. La suma de los cuadrados de los lados de un paralelógramo es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales.

XVII. El área de un triángulo es igual á su perímetro multiplicado por la mitad del radio del círculo inscripto.

XVIII. Si desde un punto interior á un paralelógramo se tiran rectas á todos sus vértices, la suma de los triángulos que tienen por bases dos lados opuestos, es equivalente á la suma de los otros dos.

XIX. Si desde un punto interior á un polígono regular de n lados se bajan perpendiculares á todos éstos, la suma de las perpendiculares es igual á n veces la apotema.

XX. Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de los circulos inscriptos y circunscritos.

PROBLEMAS PARA RESOLVER.

I. Describir una circunferencia conociendo el radio y dos puntos de la misma.

II. Describir una circunferencia tangente á una recta dada en un punto dado, siendo conocido el radio.

III. Describir una circunferencia tangente á una recta dada en un punto dado y que pase por otro punto dado.

IV. Describir una circunferencia tangente á otra dada en un punto dado, siendo conocido el radio.

V. Describir una circunferencia tangente á otra dada en un punto dado, y además tangente á una recta dada.

VI. Por un punto dado trazar una secante á una circunferencia dada, de tal modo que la cuerda interceptada sea igual á una recta dada.

VII. Construir un triángulo isósceles conociendo la base y el ángulo opuesto.

VIII. Construir un triángulo conociendo la base, la altura y el ángulo opuesto á la base.

IX. Construir un triángulo conociendo la altura y los ángulos adyacentes á la base.

X. Construir un triángulo conociendo un lado, uno de sus ángulos adyacentes y la suma ó diferencia de los otros dos lados.

XI. Construir un paralelógramo conociendo las diagonales y un lado.

XII. Construir un trapecio conociendo las bases y los lados no paralelos.

XIII. Construir dos rectas conociendo su suma y la media proporcional entre ellas.

XIV. Construir dos rectas conociendo su diferencia y la media proporcional entre ellas.

XV. Dados tres puntos dirigir por uno de ellos una recta, tal que sus distancias á los otros dos puntos sean proporcionales á dos rectas dadas.

XVI. Dadas tres rectas que concurren en un punto, trazar por otro dado una secante, tal que las dos partes interceptadas por las rectas dadas sean proporcionales á dos rectas conocidas.

XVII. Hallar el lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos equivalentes cuya base es comun.

XVIII. Construir un rectángulo equivalente á un cuadrado dado m^2, y tal que la suma ó la diferencia de dos lados contiguos sea igual á una línea dada a.

XIX. Hallar dos líneas proporcionales á las áreas de dos cuadrados ó de dos polígonos dados.

XX. Conociendo las bases y la altura de un trapecio, hallar las áreas de los triángulos total y parcial que se forman prolongando los lados no paralelos.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

LIBRO SEXTO.

DE LAS SUPERFICIES.

CAPÍTULO PRIMERO.

SUPERFICIE PLANA.

I.—Nociones preliminares.

232. Sabemos que si una recta tiene dos puntos sobre un plano, coincide con él en toda su extension [4].

De aquí se deduce que *la interseccion de una recta con un plano es un punto.*

Por una línea recta pueden pasar infinitos planos, pues se concibe que el plano MN *(Fig. 142)* puede girar alrededor de la recta AB ocupando en el espacio diversas posiciones, las que representan otros tantos planos diferentes.

Teorema I. *(Fig. 143).*

233. *Tres puntos* A, B, C *que no están en línea recta determinan la posicion de un plano, es decir, por los tres puntos* A, B, C *puede pasar un plano y sólo puede pasar uno.*

Tracemos las rectas AB y BC, hagamos pasar por AB un plano é imaginemos que gire alrededor de dicha recta; es claro que al verificar su movimiento de rotacion llegará á pasar por el punto C, luego por los tres puntos A, B, C puede pasar un plano, al que llamaremos P.

Supongamos, ahora, otro plano P′ que tambien pase por A, B y C. Teniendo cada una de las rectas AB y BC dos puntos en P y en P′, todos los puntos de las mismas pertenecerán á los dos planos [4]. Tomemos en P un punto cualquiera D y desde él tracemos una recta EG que corte en E y F á las AB y BC: como los puntos E y F pertenecen á los dos planos, la recta DG estará á la vez en P y en P′, luego tambien el punto D estará en los dos planos.

Vemos, pues, que todo punto del plano P pertenece tambien al P′, por consiguiente estos planos coinciden en toda su extension.

COROLARIOS.

1.° *Dos rectas que se cortan determinan la posicion de un plano.*

Señalando un punto en cada recta y el de interseccion, por los tres pasará un plano que contendrá á las rectas dadas. Además, todo plano que pase por dichas rectas se confundirá con el primero, pues contendrá los tres puntos señalados.

2.° *Dos rectas paralelas determinan la posicion de un plano.*

Por dos rectas paralelas pasa siempre un plano: aquel en que están situadas. Ademas, todo plano que pase por dichas rectas se confundirá con el primero, pues señalando dos puntos en una de las paralelas y uno en la otra, estos tres puntos serán comunes á los dos planos, que por consiguiente coincidirán.

3.° *La interseccion de dos planos es una línea recta.*

Pues si los planos tuviesen tres puntos comunes no en línea recta coincidirian.

TEOREMA II. *(Fig. 144).*

231. *Si una recta* AB *resbala sobre otra recta fija* XY, *conservándose paralela á su posicion primitiva, dicha recta móvil engendra un plano.*

Sea CD una de las posiciones de la recta móvil. Las rectas AB y XY que se cortan determinan un plano; y las AB y CD, por ser paralelas, determinan otro; pero estos planos tienen comunes los tres puntos A, E y F; luego coinciden. Vemos, pues, que la recta móvil, considerada en cualquier posicion CD, se halla situada en el plano que determinan AB y XY, por consiguiente es la generatriz de este plano.

II.—Rectas y planos perpendiculares.

Teorema I. *(Fig. 145.)*

235. *Si una recta* AB *es perpendicular á dos rectas* BC, BD *de las que pasan por su pié* B *en un plano* MN, *es perpendicular á todas las demás.*

Sea BE otra de las rectas que pasan por B en el plano MN. Trazo una recta CD que corte á BC, BE y BD, prolongo la AB hácia la parte inferior, tomo A'B=AB, y uno los puntos A y A' con cada uno de los C, E y D.

Las rectas BC y BD son perpendiculares á AA' en su punto medio C, luego [**48**]

$$AC = A'C, \quad AD = A'D, \quad \text{además } CD = CD;$$

por consiguiente los triángulos ACD y A'CD son iguales. Si imaginamos el A'CD colocado sobre el ACD, es claro que la recta A'E coincidirá con AE, luego A'E = AE. Vemos, pues, que BE tiene dos puntos B y E equidistantes de A y A', luego BE es perpendicular á AA'.

236. *Una recta es* PERPENDICULAR *á un plano cuando la recta es perpendicular á todas las que pasan por su pié en el plano.*

En tal caso el plano es tambien perpendicular á la recta.

Segun el teorema anterior, si una recta es perpendicular á dos de las que pasan por su pié en un plano, dicha recta y el plano son perpendiculares.

Una recta es *oblícua* á un plano cuando lo encuentra sin ser perpendicular al mismo.

Teorema II. *(Fig. 146).*

237. *Todas las perpendiculares* BC, BD, BE *etc. levantadas á una recta* AB *en uno de sus puntos* B, *estan en un mismo plano.*

Antes de entrar en la demostracion de este teorema, debemos recordar que por una recta AB pasan infinitos planos, y que en cada uno de ellos puede levantarse por el punto B una perpendicular y solamente una á dicha recta

AB. Ahora bien, dos de estas perpendiculares BD y BC determinan un plano MN, y decimos que cualquiera de las otras, por ejemplo BE, está en el plano MN.

En efecto: por las rectas AB y EB concibamos un plano; la interseccion de este plano con el MN es una recta que pasa por B, y como AB es perpendicular á BD y BC, lo será igualmente á dicha interseccion [**235**], ó lo que es igual, la interseccion será perpendicular á AB en B; pero EB es tambien perpendicular á AB en el mismo punto B y en el mismo plano ABE, luego BE se confunde con la interseccion y está situada, por tanto, en el plano MN.

ESCOLIO. Obsérvese que el plano MN es perpendicular á la recta AB, luego *el lugar geométrico de las perpendiculares levantadas á una recta por un mismo punto, es el plano perpendicular á la recta en dicho punto.*

TEOREMA III.

238. *Por un punto dado no puede trazarse mas que una perpendicular á un plano.*

Supongamos primero que el punto dado A (*Fig.* 147) esté en el plano MN, y sea AB una perpendicular á este plano. Toda otra recta AC levantada par el punto A determina con AB un plano que corta el MN segun una recta DE; siendo AB perpendicular al plano, es perpendicular á la recta DE que pasa por su pié, luego AC será oblícua á DE, y por consiguiente al plano MN.

Si el punto dado A está fuera del plano (*Fig.* 148) y AB es la perpendicular, toda otra recta AC tirada desde A al plano MN determina con la AB un plano, que corta al MN segun una recta BC. Siendo AB perpendicular al plano es perpendicular á la recta BC que pasa por su pié, luego AC será oblícua á BC, y por consiguiente al plano MN.

TEOREMA IV.

239. *Por un punto dado no puede pasar mas que un plano perpendicular á una recta dada,*

Sea C el punto dado en la recta AB (*Fig.* 149) y MN un plano perpendicular á esta recta por el punto C; sea MP otro plano cualquiera que pase tambien por C. Si imaginamos un plano que pase por la recta AB, cortará á los

MN y MP segun dos rectas CD y CE; siendo AB perpendicular al plano MN tambien lo será á la recta CD que pasa por su pié en dicho plano, por tanto será oblícua á CE y de consiguiente al plano MP.

Supongamos ahora, que el punto dado C esté fuera de la recta AB *(Fig. 150)*, y sea MN un plano perpendicular á esta recta por dicho punto; tracemos otro plano cualquiera MP que pase por C. La recta AB y el punto C determinan un plano cuyas intersecciones con MN y MP son CD y CE; siendo AB perpendicular al plano MN lo es tambien á la recta CD que pasa por su pié, luego AB es oblícua á CE, y por consiguiente al plano MP.

TEOREMA V. *(Fig. 151)*.

240. *Si desde un punto* A *exterior á un plano* MN *se tiran á éste una perpendicular* AB *y una oblícua* AC, *la perpendicular es menor que la oblícua.*

Trazando la BC, la AB será perpendicular á BC y la AC oblícua, luego AB $<$ AC.

TEOREMA RECÍPROCO. *Si una recta es la menor de cuantas pueden tirarse desde un punto á un plano, dicha recta es perpendicular al plano.*

Pues si fuese oblícua habria otra menor que ella.

241. *Se llama* DISTANCIA *entre un punto y un plano la perpendicular trazada desde el punto al plano.*

TEOREMA VI. *(Fig. 151)*.

242. *Si desde un punto* A *exterior á un plano* MN *se bajan á éste una perpendicular y varias oblícuas*: 1.° *las oblícuas* AD *y* AC *que se apartan igualmente de la perpendicular* AB *son iguales;* 2.° *de dos oblícuas* AC *y* AE *que se apartan desigualmente de la perpendicular, es mayor la* AE *que se aparta más.*

1.° Uniendo los piés C y D de las oblícuas con el pié B de la perpendicular, se forman los triángulos rectángulos iguales ABC y ABD, luego AC = AD.

2.° Uno el pié E de la oblícua AE con el de la perpendicular, y sobre BE tomo una longitud BD=BC. Por la geometría plana tenemos AE $>$ AD, pero AD=AC, luego AE $>$ AC.

TEOREMA RECÍPROCO. 1.° *Si dos oblícuas son iguales, se* *apartan igualmente de la perpendicular*; 2.° *si dos oblícuas son desiguales, la mayor se aparta de la perpendicular más que la menor* [20].

Corolario. *Desde un punto* A *pueden tirarse á un plano* MN *infinitas oblícuas iguales.*

Describiendo en el plano MN una circunferencia desde B como centro, todas las oblícuas tiradas desde A á los infinitos puntos de la circunferencia serán iguales.

Teorema VII. *(Fig.* 152).

243. *El lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de los extremos de una recta* AB, *es un plano* MN *perpendicular á esta recta en su punto medio.*

Si unimos un punto D del plano MN con el punto C, la recta CD será perpendicular á AB en su punto medio, luego AD=BD.

Además, un punto cualquiera situado fuera del plano MN no se hallará en ninguna de las perpendiculares que pueden levantarse á la recta AB por su punto medio C, porque todas estas perpendiculares están en el plano MN; luego dicho punto exterior al plano MN no equidista de A y B.

Teorema VIII. *(Sin figura).*

244. *Si un plano* P *tiene tres puntos* A, B, C, *no en línea recta, equidistantes cada uno de los extremos de una recta dada, es perpendicular á ésta y la divide en dos partes iguales.*

Concibiendo en efecto, un plano perpendicular á la recta dada en su punto medio, pasará por A, B y C, luego coincidirá con el P.

Teorema IX. *(Fig.* 153).

245. *Si desde el pié de una perpendicular* AB *á un plano* MN *se baja una perpendicular* BC *á una recta* ED *situada en el plano, y se une el pié de esta perpendicular con un punto cualquiera de la primera, la recta de union* AC *es perpendicular á la* ED *trazada en el plano.* [1]

---

1 Esta proposicion suele llamarse *teorema de las tres perpendiculares*,

Tomo á ambos lados del punto C dos longitudes iguales CD y CE, y trazo las rectas BE y BD así como las AE y AD.

Tenemos BD=BE, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular BC á DE, luego las oblícuas AE y AD al plano MN son iguales; vemos, pues, que AC tiene dos puntos equidistantes de E y D, luego es perpendicular á ED.

III.—Rectas y planos paralelos.

Teorema I. (*Fig.* 154.)

246. *Por un punto* C *del espacio no puede trazarse mas que una paralela* DE *á la recta* AB.

Supongamos que por C pase otra paralela FG á la recta AB: segun esto las rectas FG y AB determinarán un plano, y las DE y AB determinan otro; pero estos planos tienen tres puntos comunes A, B y C, luego coinciden. Tenemos, pues, en el mismo plano dos paralelas DE y FG á una recta por un mismo punto C, lo que es imposible; luego FG no es paralela á AB.

Teorema II. (*Fig.* 155.)

247. *Dos rectas* AB *y* CD *perpendiculares á un plano* MN, *son paralelas entre sí.*

Las rectas AB y CD no pueden encontrarse, de lo contrario pasarian dos perpendiculares al plano MN por el punto de encuentro, lo que es imposible [**238**].

Demostremos ahora que AB y CD están en el mismo plano.

Uno los piés B y D de las perpendiculares, trazo por D en el plano MN una perpendicular EF á la BD, y uno el punto D con uno cualquiera A de la AB. La recta de union AD es perpendiculer a EF [**245**], y como CD es perpendicular al plano MN, es tambien perpendicular á la EF que pasa por su pié; luego las rectas BD, AD y CD, perpendiculares á EF en el punto D, están en un mismo plano; pero AB tiene dos puntos A y B en este plano, por consiguiente se halla contenida en él.

Vemos, pues, que AB y CD están en el mismo plano, y como no pueden encontrarse, son paralelas.

248. Teorema recíproco. *Si dos rectas* AB *y* CD *son paralelas, todo plano* MN *perpendicular á una de ellas* AB *es tambien perpendicular á la otra* CD.

Si CD fuese oblícua al plano MN, trazando desde un punto cualquiera de CD una perpendicular al plano, esta perpendicular sería paralela á AB, y tendríamos por un punto dos paralelas á AB, lo que es imposible.

Corolario. *Dos rectas* B *y* C *paralelas en el espacio á una tercera* A, *son paralelas entre sí.*

Trazando un plano perpendicular á la recta A, lo será tambien á B y C; siendo estas rectas B y C perpendiculares al mismo plano, serán paralelas entre sí.

249. *Una recta y un plano son paralelos cuando no se encuentran por más que se prolonguen.*

Teorema III. *(Fig.* 156*)*.

250. *Si una recta* AB *exterior á un plano* MN *es paralela á otra* CD *situada en él, la* AB *es paralela al plano.*

Las paralelas AB y CD están situadas en un plano que sólo tiene comunes con el MN los puntos de la interseccion CD; pero AB no puede encontrar á su paralela CD, luego tampoco podrá encontrar al plano MN.

Teorema IV. *(Fig.* 156).

251. *Si por una recta* AB *paralela á un plano* MN *se hace pasar otro plano que corte al primero, la interseccion* CD *de estos planos es paralela á la recta* AB.

Las rectas AB y CD están en un plano; además si AB encontrase á CD encontraria al plano MN, y siendo esto imposible, AB y CD son paralelas.

Corolario. *Si una recta* AB *es paralela á un plano* MN, *toda paralela* CD *á dicha recta, trazada por un punto* C *del plano, está contenida en éste.*

La interseccion del plano que determinan las paralelas AB y CD con el plano MN es una paralela á AB por el punto C, luego se confunde con CD.

Teorema V. *(Fig.* 157).

252. *Si una recta* AB *es paralela á dos planos* MN, PQ *que se cortan, es paralela á su interseccion* QN.

Tirando por un punto Q de la interseccion una paralela á la recta AB, dicha paralela deberá estar contenida en los dos planos, luego se confundirá con la interseccion QN de los mismos, por consiguiente AB es paralela á QN.

TEOREMA VI. *(Fig. 156).*

253. *Las partes* AC, BD *de rectas paralelas comprendidas entre un plano* MN *y una recta* AB *paralela á él, son iguales.*

El plano que determinan las paralelas AC y BD pasa por AB, luego su interseccion CD con el MN es paralela á AB; resulta, pues, que la figura ABDC es un paralelógramo, luego AC=BD.

COROLARIO. *Si una recta y un plano son paralelos, todos los puntos de la recta equidistan del plano.*

254. *Se llaman* PLANOS PARALELOS *los que no se encuentran por más que se prolonguen.*

TEOREMA VII.

255. *Dos planos perpendiculares á una misma recta, son paralelos.*

Pues si llegaran á encontrarse, tendríamos desde un punto cualquiera de su interseccion dos planos perpendiculares á una recta, lo que es imposible [**239**].

TEOREMA VIII. *(Fig. 158).*

256. *El lugar geométrico de todas las paralelas á un plano* MN *trazadas por un punto* A, *es un plano paralelo al* MN *y que pasa por* A.

Sea AC una de las paralelas al plano MN; bajo desde A una perpendicular á este plano, é imagino por BAC otro plano que cortará al MN segun una recta BD paralela á AC [**251**]. Siendo AB perpendicular al plano MN, y por tanto á la recta BD, es tambien perpendicular á la AC; luego todas las paralelas al plano MN trazadas por A son perpendiculares á la recta AB, por consiguiente su lugar geométrico es un plano perpendicular á la recta AB y paralelo, por tanto, al MN.

COROLARIO. *Un plano es paralelo á otro cuando el primero contiene dos rectas que se cortan paralelas al segundo*

Puesto que dichas rectas determinan un plano paralelo al segundo.

TEOREMA IX.

257. *Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano, son paralelas.*

Puesto que están situadas en el plano secante y no pueden encontrarse, aunque se prolonguen, por hallarse tambien en dos planos paralelos.

258. RECÍPROCO DEL TEOREMA VII. (*Fig.* 159). *Si dos planos* MN, PQ *son paralelos, toda pependicular* AB *á uno de ellos* MN *es tambien perpendicular al otro* PQ.

Si por AB hacemos pasar dos planos CABD y EABF, las intersecciones AC y BD serán paralelas [**257**], así como tambien las AE y BF; pero AB es perpendicular á las rectas AC y AE [**236**], luego tambien es perpendicular á las BD y BF, y por consiguiente al plano PQ.

COROLARIOS.

1.° *Por un punto* A *exterior á un plano* PQ *no puede pasar más que un plano* MN *paralelo al primero.*

Bajando la perpendicular AB al plano PQ, todo plano paralelo á éste, que pase por A, es perpendicular á AB y se confunde con MN.

2.° *Dos planos paralelos á un tercero, son paralelos entre sí.*

Trazando una recta perpendicular al tercer plano, será tambien perpendicular á los otros dos, por consiguiente éstos serán paralelos entre sí.

TEOREMA X. (*Fig.* 160).

259. *Las partes* AB, CD *de rectas paralelas comprendidas entre dos planos* MN, PQ *paralelos, son iguales.*

El plano que determinan AB y CD corta á los planos MN y PQ segun dos rectas paralelas AC y BD, luego la figura ACDB es un paralelógramo, por consiguiente AB=CD.

COROLARIO. *Si dos planos son paralelos, todos los puntos de uno de ellos equidistan del otro.*

Teorema XI. *(Fig. 161).*

260. *Si dos ángulos, situados en diferentes planos, tienen sus lados paralelos: 1.° son iguales ó suplementarios; 2.° los planos que determinan son paralelos.*

1.° Sean los ángulos ABC, DEF que tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; debemos demostrar que son iguales.

En efecto: tomo BC=EF, BA=ED, y trazo las rectas BE, AD, CF, AC y DF. Siendo BC igual y paralela á EF, la figura BCFE es un paralelógramo, luego CF será igual y paralela á BE; del mismo modo se demuestra que AD es igual y paralela á BE; siendo las rectas CF y AD iguales y paralelas á BE son iguales y paralelas entre sí, luego la figura ACFD es un paralelógramo, por consiguiente AC=DF. Vemos, pues, que los triángulos ABC y DEF tienen sus tres lados respectivamente iguales, luego son iguales, por tanto *áng.* ABC=*áng.* DEF.

Si los lados paralelos tuviesen direcciones opuestas, ó dos de ellos tuviesen direcciones opuestas y los otros la misma direccion, imitaríamos la demostracion del número **35**, casos 2.° y 3.°

2.° Siendo AB y BC paralelas á ED y EF respectivamente, son paralelas al plano DEF [**250**], luego el plano ABC tambien es paralelo al DEF [**258, cor**].

Teorema XII. *(Fig. 162).*

261. *Tres planos paralelos* MN, PQ, RS, *dividen á dos rectas* AB *y* CD *en partes proporcionales.*

Trazo la recta AD. El plano ABD corta á los PQ y RS segun dos rectas paralelas EF y BD; y el plano ADC corta á los MN y PQ segun las paralelas AC y FG; luego

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FD},\ \frac{AF}{FD}=\frac{CG}{GD};\ \text{de donde}\ \frac{AE}{EB}=\frac{CG}{GD}.$$

Corolario. *Dos planos paralelos* PQ, RS *dividen á varias rectas* AB, AD *etc., que parten de un mismo punto, en partes proporcionales.*

Pues se vé fácilmente que $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FD}=\ldots$

262. Proyeccion *de un punto sobre un plano es el pié de la perpendicular bajada desde el punto al plano.*

Proyeccion *de una línea recta ó curva sobre un plano, es otra línea formada por las proyecciones de los diferentes puntos de la primera sobre el mismo plano.*

Teorema XIII. (*Fig.* 163).

263. *La proyeccion de una recta* AB *sobre un plano* MN *es otra recta.*

Las perpendiculares A*a*, B*b*, C*c* etc. al plano MN bajadas desde los distintos puntos de la recta AB, son paralelas entre sí, y engendran por consiguiente un plano [**234**], cuya interseccion con el MN es evidentemente la proyeccion de la recta AB sobre este último, luego la proyeccion es una línea recta.

Escolio. Se deduce de este teorema que para hallar la proyeccion de una recta sobre un plano, basta proyectar dos puntos de aquella, y unir sus proyecciones por una recta.

264. El plano AB*ab* que contiene las perpendiculares bajadas sobre MN desde los puntos de AB, se llama plano *proyectante* de esta recta, y el MN plano de *proyeccion.*

Es evidente que el plano proyectante de una recta, estará determinado por la recta y una de las perpendiculares al plano de proyeccion.

Teorema XIV. (*Fig.* 164).

265. *Las proyecciones de dos rectas paralelas* AB *y* CD *sobre un mismo plano* MN, *son paralelas.*

Los planos proyectantes BA*a* y DC*c* son paralelos, por ser AB paralela á CD y A*a* paralela á C*c* [**260**, 2.º]; luego las proyecciones *ab* y *cd*, que son los intersecciones de dichos planos paralelos con el de proyeccion, son paralelas.

Escolio. El recíproco no es cierto.

Teorema XV. (*Fig.* 165.)

266. *El ángulo que forma una oblícua* AB *á un plano* MN *con su proyeccion sobre el mismo, es el menor de cuantos* *puede formar dicha oblícua con las rectas que pasan por su pié en el plano dado.*

Desde un punto cualquiera A de la recta AB bajo la perpendicular AC al plano MN, y estará determinada la proyeccion BC de AB sobre el plano MN; trazo en este plano otra recta cualquiera BD que pase por B, y tomo una longitud BD igual á BC; uno por último A con D. Los triángulos ABC y ABD tienen dos lados respectivamente iguales, pero el tercer lado AC del primero es menor que el tercer lado AD del segundo, por ser AC perpendicular al plano y AD oblícua, luego el ángulo ABC es menor que el ABD.

Escolio. En virtud de este teorema *se llama ángulo de una recta y un plano, el ángulo que forma la recta con su proyeccion sobre el plano.*

IV.—Ángulos diedros.

267. Ángulo diedro *es la inclinacion mútua de dos planos que se cortan.*

Estos planos se llaman *caras* del ángulo, y la interseccion de las caras se llama *arista.*

Un ángulo diedro se designa generalmente por cuatro letras, una de cada cara y dos de la arista, debiendo leerse estas dos en medio. Asi el ángulo de la figura 166 se lée

áng. ABCD ó *áng.* DCBA.

Cuando la arista no es comun á dos ó más ángulos, basta leer sus dos letras; así diremos: *áng.* BC.

Dos ángulos diedros son iguales si colocando una cara del primero sobre otra cara del segundo, de modo que las aristas coincidan, las otras dos caras se confunden en una sola. En el caso contrario, los diedros serán desiguales.

La magnitud de un ángulo diedro no depende, pues, de la extension de sus caras, sino de la mayor ó menor inclinacion de la una sobre la otra.

268. Ángulos diedros adyacentes *son dos ángulos que tienen una cara comun y las otras dos caras en el mismo plano.*

Es claro que los ángulos adyacentes tienen la misma arista.

Los diedros ABCD y ABCE (*Fig.* 167) son adyacentes

Si un plano FC al caer sobre otro DE forma con éste dos ángulos adyacentes iguales FBCD y FBCE, estos ángulos se llaman *rectos*, y el plano FC es *perpendicular* al DE. Por el contrario, si los ángulos adyacentes ABCD y ABCE son desiguales, se llaman *oblícuos*, y el plano AC es *oblícuo* al DE.

TEOREMA I.

269. *Dos ángulos diedros rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.*

Se demuestra este teorema como su análogo del número **9.**

Todo diedro ABCD menor que un recto se llama *agudo*, y todo diedro ABCE mayor que un recto, se llama *obtuso*.

TEOREMA II.

270. *La suma de dos diedros adyacentes es igual á dos diedros rectos.*

ESCOLIO. Si uno de los diedros adyacentes es agudo el otro será obtuso, y recíprocamente.

COROLARIOS.

1.° *Un diedro cualquiera vale ménos que dos rectos.*

2.° *La suma de los ángulos diedros consecutivos formados hácia un mismo lado de un plano, es igual á dos diedros rectos.*

3.° *La suma de todos los diedros consecutivos que se pueden formar alrededor de una recta, es igual á cuatro diedros rectos.*

4.° *Si uno de los cuatro ángulos formados por dos planos que se cortan es recto, los demás tambien son rectos; por consiguiente si un plano es perpendicular á otro, el segundo tambien será perpendicular al primero.*

El teorema y los corolarios se demuestran como sus análogos del número **10.**

271. *Dos ángulos se llaman* COMPLEMENTARIOS *cuando su suma vale un diedro recto, y* SUPLEMENTARIOS *cuando su suma vale dos rectos.*

Dos ángulos diedros que tienen el mismo complemento, son iguales.

272. *Se llaman ángulos diedros* OPUESTOS POR LA ARIS-

TA *dos ángulos de los que uno se forma prolongando las caras del otro.*

TEOREMA III.

273. *Dos ángulos diedros opuestos por la arista, son iguales.*

Demuéstrese como su análogo del número **13**.

274. *Ángulo rectilíneo* CORRESPONDIENTE Á UN DIEDRO *es el ángulo que forman dos perpendiculares levantadas á la arista por el mismo punto, una en cada cara.*

EFG *(Fig. 168)* es el ángulo rectilíneo correspondiente al diedro ABCD. Tambien puede tomarse para ángulo rectilíneo correspondiente á dicho diedro el ángulo ACD ó cualquiera otro que reuna las condiciones de la definicion, pues todos son iguales por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

TEOREMA IV. *(Figs. 168 y 169).*

275. *Si dos ángulos diedros* BC *y* bc *son iguales, sus ángulos rectilíneos correspondientes* EFC *y* efg *tambien son iguales.*

Coloco el diedro BC sobre el *bc* de modo que la cara AB coincida con la *ab*, cayendo la arista BC sobre *bc* y el punto F sobre el *f*; las caras BD y *bd* coincidirán, por tanto las perpendiculares FG y *fg* á la arista comun en el mismo punto F y plano BD deberán confundirse, así como tambien las FE y *fe*, perpendiculares á BC en el plano AB, luego los ángulos rectilíneos EFG y *efg* serán iguales.

TEOREMA RECÍPROCO. *Si dos ángulos rectilíneos correspondientes á dos diedros son iguales, los diedros tambien son iguales.*

Las aristas BC y *bc* de los ángulos diedros propuestos son respectivamente perpendiculares á los planos que determinan los ángulos rectilíneos EFG y *efg* [**236**]; si hacemos coincidir estos ángulos, las aristas tendrán que confundirse [**238**], por consiguiente la cara AB coincidirá con la *ab*, por tener comunes dos rectas que se cortan, y la cara BD coincidirá con *bd* por igual razon; luego los ángulos diedros serán iguales.

TEOREMA V. (*Fig.* 171.)

276. *Si un ángulo diedro* MNPQ *es recto, su rectilíneo correspondiente* ABC *tambien lo es.*

Prolongando la cara NPQ se forma un ángulo diedro MNPR adyacente al propuesto, y prolongando la recta CB se forma un ángulo plano ABD adyacente al ABC. Los ángulos diedros adyacentes MNPQ y MNPR son iguales, por ser uno de ellos recto, luego sus rectilíneos correspondientes ABC y ABD son tambien iguales, y como son adyacentes, cada uno valdrá un ángulo recto.

TEOREMA RECÍPROCO. *Si el ángulo rectilíneo* ABC *correspondiente á un diedro* MNPQ *es recto, el diedro tambien lo es.*

Los ángulos planos adyacentes ABC y ABD son iguales, por ser uno de ellos recto, luego los diedros MNPQ y MNPR son tambien iguales, y como son adyacentes, cada uno valdrá un diedro recto.

TEOREMA VI. (*Fig.* 172).

277. *La razon de dos ángulos diedros es igual á la de sus ángulos rectilíneos correspondientes.*

Supongamos que los ángulos rectilíneos ABE y FGM, correspondientes á los diedros ABCD y FGHL, sean conmensurables, y que la medida comun se halle contenida cinco veces en ABE y tres en FGM: tendremos

$$\frac{ABE}{FGM}=\frac{5}{3} \quad [1].$$

Si por las rectas que dividen á los ángulos rectilíneos ABE, FGM en partes iguales y por las aristas BC, GH de los diedros hacemos pasar planos, el diedro ABCD quedará dividido en cinco diedros y el FGHL en tres; todos estos diedros son iguales, porque sus rectilíneos correspondientes tambien lo son, luego

$$\frac{ABCD}{FGHL}=\frac{5}{3} \quad [2].$$

De las igualdades [1] y [2] se deduce

$$\frac{ABCD}{FGHL}=\frac{ABE}{FGM}.$$

Si los ángulos rectilíneos ABE, FGM fuesen inconmensurables; haríamos un razonamiento análogo al de los números **57** y **131**.

Teorema VII.

278. *La medida de un ángulo diedro es su ángulo plano correspondiente.*

Sean A y M dos ángulos diedros, *a* y *m* sus ángulos planos correspondientes. Tenemos, por el teorema anterior,

$$\frac{A}{M}=\frac{a}{m}.$$

Si M es la unidad elegida para medir los ángulos diedros, la relacion $\frac{A}{M}$ será el valor numérico del diedro A; si además convenimos en tomar el ángulo plano m para unidad de ángulos planos, la relacion $\frac{a}{m}$ será el valor numérico de a; luego *un ángulo diedro y su rectilíneo correspondiente tienen el mismo valor numérico, siempre que convengamos en elegir para unidad de ángulos planos el correspondiente á la unidad de ángulos diedros*; por lo tanto *para medir un ángulo plano correspondiente.*

En este sentido debe entenderse el enunciado del teorema.

Siendo la unidad de ángulos planos el ángulo recto, la unidad de ángulos diedros será el diedro recto [**276**]. Este se divide como aquel en 90 grados, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

Si un ángulo plano vale 25° 48′ el diedro correspondiente valdrá tambien 25° 48′.

Teorema VIII. *(Fig.* 170.)

279. *Si dos planos paralelos* MN *y* PQ *son cortados por un tercer plano* RS: 1.° *los ángulos diedros alternos son iguales*; 2.° *los ángulos diedros correspondientes son iguales;* 3.° *la suma de los ángulos diedros internos del mismo lado del plano secante es igual á dos rectos.*

1.° Trazo un plano perpendicular á la interseccion GH por el punto E; dicho plano será tambien perpendicular á la otra interseccion IL, puesto que GH é IL deben ser paralelas.

Sean AB, CD y EF las intersecciones del plano perpendicular á GH con los tres planos propuestos. La recta GH es perpendicular á AE y EF [**236**], la IL es perpendicular á EF y FD; luego los ángulos AEF y EFD son los rectilíneos correspondientes á los diedros MGHI y GILQ; pero dichos ángulos rectilíneos son iguales, como alternos internos entre las paralelas AB y CD cortadas por la secante EF, por consiguiente los diedros alternos MGHI y GILQ tambien son iguales.

Las otras dos partes del teorema se demuestran del mismo modo, ó bien imitando los razonamientos de los números **32** y **33**.

V.—Planos perpendiculares.

Teorema I. (*Fig.* 171.)

280. *Si una recta* AB *es perpendicular á un plano* QR, *todo plano* MN *que pase por ella será perpendicular al primero* QR.

Trazando en el plano QR la perpendicular BD á la arista NP, el ángulo ABD será el rectilíneo correspondiente al diedro MNPR; pero siendo AB perpendicular al plano QR, el ángulo ABD es recto, luego el diedro MNPR tambien será recto [**276, recip.**], por consiguiente el plano MN es perpendicular al QR.

Teorema II. (*Fig.* 171.)

281. *Si dos planos* MN, QR *son perpendiculares entre sí, y en uno de ellos* MN *se traza una perpendicular* AB *á la interseccion* NP, *la recta* AB *será perpendicular al plano* QR.

Trazando en el plano QR la recta BD perpendicular á NP, el ángulo ABD será el rectilíneo correspondiente al diedro MNPR; pero éste es recto por hipótesis, luego el ángulo plano ABD es recto, es decir, la recta AB es perpendicular á la BD, y como se supone que lo es tambien á PN, dicha recta AB será perpendicular al plano QR. [**236**].

Teorema recíproco. *Si dos planos* MN, QR *son perpendiculares entre sí, toda perpendicular á uno de ellos* QR *trazada por un punto* B *de la interseccion* NP *está situada en el otro plano* MN.

Por el punto B levanto en el plano MN una perpendicular AB á la interseccion NP. Segun el teorema directo, AB es perpendicular al plano QR, por consiguiente cualquiera otra perpendicular al mismo plano en el punto B coincidirá con AB [**238**], y estará por tanto situada en el plano MN.

TEOREMA III. *(Fig.* 173.)

282. *Si dos planos* PQ, RS *son perpendiculares á un tercero* MN, *su interseccion* AB *tambien lo es.*

Si en el punto A comun á los tres planos se levanta una perpendicular al MN, esta perpendicular estará situada en el plano PQ y en el RS [**281, recip.**], luego coincidirá con la interseccion AB.

TEOREMA IV.

283. *Por una recta oblícua ó paralela á un plano, no puede pasar mas que un plano perpendicular al primero.*

Pues si pasasen dos planos perpendiculares, la interseccion de éstos, ó sea la recta dada, sería perpendicular al primer plano, lo que es contrario á la hipótesis.

TEOREMA V. *(Fig.* 174.)

284. *Si desde un punto* O *interior á un ángulo diedro* MNPQ *se bajan dos perpendiculares* OA, OB *á sus caras, el ángulo de estas perpendiculares es suplemento del diedro.*

Supongamos que los piés de las perpendiculares caigan en las mismas caras del diedro, y no en sus prolongaciones. El plano que determinan las rectas OA y OB corta á la arista NP en un punto C, y á las caras segun las rectas AC y BC; además dicho plano es perpendicular al MP y al PQ, puesto que pasa por las rectas OA y OB [**280**], ó lo que es igual, los planos MP y PQ son perpendiculares al AOBC, luego la interseccion NP de los primeros es perpendicular al plano AOBC [**282**], y por consiguiente á las rectas AC y BC que pasan por el pié C de dicha perpendicular; vemos, pues, que el ángulo ACB es el rectilíneo correspondiente al diedro MNPQ.

Ahora, en el cuadrilátero OACB los ángulos A y B son rectos, luego la suma de los otros dos O y ACB vale dos ángulos rectos, esto es, los ángulos O y ACB son suplementarios, que es lo que debíamos demostrar.

Si los piés de las perpendiculares OA y OB cayesen en las prolongaciones de las caras, elegiríamos un punto O′ interior al diedro, tal que las perpendiculares bajadas desde él cayesen en las mismas caras; el ángulo O′ de estas perpendiculares sería igual al O, por tener sus lados paralelos á los de éste, y en la misma direccion, y como O′ sería suplemento del diedro, su igual O estaria en el mismo caso.

VI.—Ángulos poliedros.

285. Ángulo poliedro *es la figura formada por tres ó más planos que tienen un punto comun y terminan en sus intersecciones.*

El punto comun V (*Fig.* 175) se llama vértice del ángulo poliedro; los ángulos planos AVB, CVD etc., que constituyen el ángulo poliedro, se llaman *caras*, y las comunes intersecciones VA, VB etc. de éstas se llaman *aristas*.

Un ángulo poliedro se designa por la letra de su vértice, ó por ésta seguida de una de cada arista; así diremos ángulo poliedro V ó ángulo poliedro VABCD.

Un ángulo poliedro es *convexo* cuando cortando todas sus caras por un plano la interseccion es un polígono convexo.

Ángulo tiedro es el ángulo poliedro que consta de tres caras.

Teorema I. (*Fig.* 176).

286. *Una cara cualquiera de un tiedro es:* 1.° *menor que la suma de las otras dos;* 2.° *mayor que su diferencia.*

1.° Sea el tiedro VABC. Supongo que AVC sea la cara mayor y construyo en ella un ángulo AVD igual á la cara AVB, tomo dos distancias iguales VD y VB, por el punto D trazo una recta que corte á las aristas VA y VC, y uno B con los puntos A y C.

Los triángulos AVD y AVB son iguales, por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego AD= AB. En el triángulo ABC tenemos

$$AD + DC < AB + BC;$$

suprimiendo AD en el primer miembro y su igual AB en el segundo queda DC < BC; segun esto, los triángulos DVC y BVC tienen dos lados iguales respectivamente, pero el lado DC es menor que BC, luego [**98**]

$$\textit{áng. } DVC < \textit{áng. } BVC;$$

añadiendo al primer miembro de esta desigualdad el ángulo AVD y al segundo el AVB, resulta por último

$$AVC < BVC + AVB.$$

Siendo cierta esta primera parte para la cara mayor, lo es con más razon para las otras.

2.° De la desigualdad $AVC < BVC + AVB$ se deduce

$$AVC - BVC < AVB \text{ ó } AVB > AVC - BVC.$$

TEOREMA II. *(Fig. 177).*

287. *La suma de todos los ángulos planos de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro rectos.*

Cortemos todas las caras del ángulo poliedro V por un plano: la interseccion será un polígono convexo ABCDE; tomemos un punto O en el interior de este polígono y unámosle con los vértices A, B, C etc. En virtud de esta construccion tenemos alrededor del punto O tantos triángulos como alrededor del punto V, por tanto la suma de todos los ángulos de los triángulos OAB, OBC etc., que tienen el vértice comun O, es igual á la suma de los ángulos de los triángulos VAB, VBC etc., cuyo vértice comun es V. En el punto A se ha formado un ángulo tiedro cuyas caras son VAB, VAE y BAE, y segun el teorema anterior, la suma VAB + VAE es mayor que la cara BAE ó BAO + OAE. Tambien en el punto B tenemos un ángulo tiedro, y será la suma VBC + VBA mayor que la cara ABO + OBC. Otro tanto puede decirse de los tiedros formados en C, D y E. Vemos que la suma de los ángulos en la base de los triángulos que tienen su vértice en V es mayor que la suma de los ángulos en la base de los triángulos que tienen su vértice en O; luego, por compensacion, los ángulos en el vértice V valen ménos que los ángulos en O, y como la suma de éstos es igual á cuatro rectos, la suma de los ángulos en V, ó sea de los ángulos planos del ángulo poliedro, es menor que cuatro rectos.

288. *Dos ángulos tiedros son* SUPLEMENTARIOS *cuando los ángulos planos de cada uno son suplementos de los ángulos diedros del otro.*

TEOREMA III. (*Fig.* 178.)

Si desde un punto tomado en el interior de un ángulo tiedro se bajan perpendiculares á sus tres caras, y por cada dos perpendiculares se hace pasar un plano, se formará un segundo tiedro suplementario del propuesto.

Sea V el tiedro propuesto y V'A', V'B', V'C' las perpendiculares bajadas á sus caras BVC, AVC y AVB desde el punto V'.

Siendo V'A' y V'B' perpendiculares á las caras BVC, AVC del diedro VC, el ángulo plano A'V'B' es suplemento del diedro VC [**284**]; por igual razon el ángulo plano B'V'C' es suplemento del diedro VA, y A'V'C' del VB.

El plano A'V'B' es perpendicular al AVC y al BVC, pues pasa por las rectas V'B' y V'A', luego la arista VC es perpendicular al plano A'V'B' [**282**]. Del mismo modo se demuestra que las aristas VA y VB son perpendiculares á los planos B'V'C' y C'V'A'. Por consiguiente los ángulos planos AVC, AVB y BVC son suplementos respectivos de los diedros V'B', V'C' y V'A'.

Queda, pues, demostrado que los tiedros V y V' son suplementarios.

TEOREMA IX.

289. *La suma de los ángulos diedros de un tiedro es mayor que dos rectos y menor que seis.*

Sean A, B, C los ángulos diedros del tiedro propuesto. Supongamos formado el tiedro suplementario, y sean a', b', c' sus ángulos planos, suplementos respectivos de A, B, C.

Tenemos $A = 2R - a'$, $B = 2R - b'$, $C = 2R - c'$; sumando ordenadamente estas igualdades será

$$A + B + C = 6R - (a' + b' + c');$$

pero la suma $a' + b' + c'$ de los ángulos planos de un tiedro es menor que 4R [**287**], luego $A + B + C > 2R$.

Es evidente que la suma $A+B+C$ es menor que seis rectos, puesto que cada uno de los tres ángulos es menor que dos rectos.

ESCOLIO. Un ángulo tiedro puede tener uno, dos y hasta tres ángulos diedros rectos, llamándose en cada caso respectivamente *rectángulo, birectángulo* ó *trirectángulo.*

290. *Ángulos* TIEDROS SIMÉTRICOS *son dos tiedros de los que uno se forma prolongando las aristas del otro.*

TEOREMA V. *(Fig.* 179).

Dos ángulos tiedros simétricos VABC, VDEF *tienen sus ángulos planos y diedros respectivamente iguales, pero en general no pueden coincidir.*

Los ángulos planos AVB, BVC, AVC son iguales respectivamente á sus opuestos por el vértice DVE, EVF, DVF; y los ángulos diedros VA, VB, VC son iguales á sus opuestos por la arista VD, VE, VF.

Supongamos, ahora, que los tres ángulos diedros del tiedro VABC sean desiguales, y demostremos que en este caso general los tiedros simétricos no pueden coincidir.

Si hacemos girar el tiedro VFED alrededor del punto V, de modo que la cara FVD resbale sobre el mismo plano en que se encuentra hasta que VD coincida con VA y VF con VC, la arista VE permanecerá detrás del plano FVD miéntras que VB está delante del mismo plano, luego los tiedros no coincidirán.

Si el tiedro VFED gira de modo que la cara FVD se separe del plano en que se encuentra hasta que VF coincida con VA y VD con VC, la cara FVE no coincidirá con la AVB, porque siendo los ángulos diedros VC y VA desiguales y VC=VF, los diedros VF y VA son tambien desiguales.

Como no podemos intentar la superposicion de los tiedros por otro medio, queda demostrado que no coinciden.

Caso particular. Si dos ángulos diedros VA, VC de uno de los tiedros simétricos son iguales, los tiedros son superponibles. En efecto; de las igualdades VA = VC, VC=VF, se deduce VA=VF, por consiguiente haciendo coincidir la cara FVD con su igual AVC de modo que las aristas VB y VE caigan hácia el mismo lado del plano AVC, el plano FVE caerá sobre el AVB; igualmente de VA=VC, VA=VD se deduce VC=VD, luego el plano

EVD caerá sobre el BVC; por consiguiente la arista VE, comun á los planos FVE y EVD, coincidirá con la VB, comun á los planos AVB y BVC.

TEOREMA VI.

291. *Si un ángulo tiedro tiene dos ángulos diedros iguales, los ángulos planos opuestos son iguales; y si tiene dos ángulos diedros desiguales, á mayor ángulo diedro se opone mayor ángulo plano.*

1.° Supongamos que los ángulos diedros VA y VC del tiedro VABC (*Fig.* 179) sean iguales. Construyo el tiedro VFED simétrico del propuesto; segun hemos visto en el teorema anterior, caso particular, el tiedro VFED puede coincidir con el VABC, luego FVE=AVB, pero FVE=BVC, luego AVB=BVC.

2.° Supongamos que los ángulos diedros VA y VC del tiedro VABC (*Fig.* 180) sean desiguales, y que VC > VA. Por la arista VC del mayor trazo un plano DVC que forme con la cara AVC un ángulo diedro DVCA igual al menor VA; sea VD la interseccion de este plano con la cara AVB. Segun la primera parte del teorema, en el tiedro VADC será DVC=AVD. En el tiedro VDBC tenemos

$$DVC + DVB > BVC,$$

luego AVD + DVB > BVC ó bien AVB > BVC.

TEOREMA RECÍPROCO. *Si un ángulo tiedro tiene dos caras iguales, los ángulos diedros opuestos son iguales; y si tiene dos caras desiguales, á la cara mayor se opóne mayor ángulo diedro* [**20**].

TEOREMA VII. (*Fig.* 181).

292. *Dos ángulos tiedros V y V' son iguales cuando tienen una cara igual AVC=A'V'C' adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos VA=V'A', VC=V'C'.*

Coloco el tiedro V' sobre el V de modo que la cara A'V'C' coincida con AVC, y que las aristas V'B' y VB caigan hácia el mismo lado del plano AVC; la cara A'V'B' caerá sobre la AVB, por ser iguales los ángulos diedros V'A' y VA, y la cara B'V'C' caerá sobre la BVC por análoga razon; luego la arista V'B', comun á los planos A'V'B' y B'V'C', deberá estar á la vez en los planos AVB y BVC, para lo cual tiene que coincidir con VB; por consiguiente los tiedros son iguales.

TEOREMA VIII. (*Fig.* 181.)

293. *Dos ángulos tiedros* V *y* V' *son iguales cuando tienen dos caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas* AVB=A'V'B', AVC=A'V'C', *é igual el ángulo diedro comprendido* VA=V'A'.

Coloco el tiedro V' sobre el V de modo que la cara A'V'C' coincida con la AVC y que las aristas V'B' y VB caigan hácia el mismo lado del plano AVC; la cara A'V'B' caerá sobre la AVB, por ser iguales los diedros V'A' y VA, y la arista V'B' coincidirá con la VB, por ser iguales los ángulos planos A'V'B' y AVB; luego los tiedros serán iguales.

TEOREMA IX. (*Fig.* 182).

294. *Dos ángulos tiedros* V *y* V' *son iguales cuando tienen sus tres caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas* AVB=A'V'B', AVC=A'V'C', BVC=B'V'C'.

Sobre las aristas de los tiedros tomo las longitudes iguales VA, VB, VC, V'A', V'B', V'C', y formo los triángulos ABC y A'B'C'. Los triángulos VAB, VAC, VBC son iguales respectivamente á V'A'B', V'A'C', V'B'C', por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego AB=A'B', AC=A'C', BC=B'C', por tanto los triángulos ABC y A'B'C' son iguales.

Desde el vértice V bajo la perpendicular VD al plano ABC: el pié D de esta perpendicular debe equidistar de los puntos A, B y C, pues VA, VB y VC son oblicuas iguales, luego D es el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC. Haciendo la misma construccion en el tiedro V' se verá que D' es el centro del círculo circunscrito al triángulo A'B'C'. Además los triángulos AVD, A'V'D' son iguales, porque son rectángulos en D y D' y tienen VA=V'A' por construccion y AD=A'D' por ser radios de círculos iguales, luego VD=V'D'.

Coloco ahora el triángulo A'B'C' sobre el ABC: el punto D' caerá sobre D y la perpendicular D'V' seguirá la direccion DV, y como V'D'=VD, el punto V' coincidirá con V, por consiguiente los tiedros serán iguales.

TEOREMA X.

295. *Dos ángulos tiedros son iguales cuando tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

Sean V y V′ los tiedros propuestos, T y T′ sus tiedros suplementarios.

Siendo iguales los ángulos diedros de los tiedros propuestos, tambien serán iguales los ángulos planos de los tiedros suplementarios; luego los tiedros T y T′ son iguales [**294**], y tienen por tanto iguales sus ángulos diedros. Siendo iguales los ángulos diedros de T y T′, tambien serán iguales los ángulos planos de los tiedros suplementarios V y V′, luego estos tiedros son iguales [**294**].

296. ESCOLIO. En todos los casos de igualdad de tiedros hemos supuesto que los elementos respectivamente iguales estaban igualmente dispuestos. Si esta condicion no se verifica, los tiedros propuestos sólo son simétricos.

Para demostrarlo fijémonos en el primer caso. Sean VABC, V′A′B′C′ (*Fig.* 183) dos ángulos tiedros que tienen una cara igual AVC=A′V′C′ adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales VA=V′A′, VC=V′C′, pero en disposicion contraria. Formemos el tiedro VDEF simétrico del VABC: es fácil ver que los tiedros VDEF y V′A′B′C′ tienen una cara igual DVF=A′V′C′ adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales VF=V′C′, VD=V′A′; además estos elementos iguales están igualmente dispuestos, lo que se vé fácilmente imaginando que el tiedro VDEF adopte una posicion análoga á la del V′A′B′C′; luego los tiedros VDEF y V′A′B′C′ son iguales, y como el primero es simétrico del VABC, el segundo V′A′B′C′ tambien es simétrico del VABC.

Igual razonamiento podria hacerse en los demás casos.

PROBLEMAS.

297. 1.° *Por un punto dado trazar una perpendicular á un plano.*

Si el punto dado A (*Fig.* 184) está fuera del plano, se bajan á éste tres oblícuas iguales AB, AC, AD, se halla el centro O de la circunferencia que pasa por los piés B, C, D de las oblícuas, y uniendo O con el punto dado A se tiene la perpendicular AO.

En efecto: los piés B, C, D de las oblícuas iguales que parten del punto A, equidistan del pié de la perpendicular bajada al plano MN desde A, y como O es el único punto del plano MN equidistante de B, C y D [**13**], es claro que O será el pié de la perpendicular.

Si el punto dado A estuviese en el plano MN, bajaríamos una perpendicular á este plano desde un punto cualquiera exterior, y trazaríamos por A una paralela á dicha perpendicular.

298. 2.° *Por un punto dado* A *trazar una paralela á un plano.*

Trácese en el plano una recta cualquiera, y por el punto dado A diríjase una paralela á dicha recta [**250**].

299. 3.° *Por un punto dado trazar un plano paralelo á otro dado.*

Trácense por el punto dado dos rectas paralelas al plano dado: el plano que determinan las dos rectas será paralelo al dado [**256, cor.**].

300. 4.° *Hallar la menor distancia entre dos rectas que no están situadas en el mismo plano.*

Sean las rectas AB y CD (*Fig.* 185). Por un punto E de la CD trazo una paralela FG á la otra recta AB: las rectas CD y FG determinan un plano PQ paralelo á la AB [**250**]; por esta recta trazo otro plano RB perpendicular al PQ: la interseccion RH es paralela á AB [**251**], luego tambien lo será á FG y cortará, por tanto, á CD en un punto H; por este punto levanto en el plano RB una perpendicular HI á RH. La HI es: 1.° perpendicular á las dos rectas dadas, 2.° la menor distancia entre ellas.

En efecto: 1.° Siendo HI perpendicular á RH, lo es tambien á AB; además HI es perpendicular al plano PQ [**281**], luego es perpendicular á CD.

2.° Trazo otra recta KL que una un punto de AB con otro de CD. La recta KL es oblícua al plano PQ, porque en general está fuera del plano RB [1], que es el lugar geométrico de las perpendiculares al plano PQ bajadas desde la recta AB [**234**]; luego puede bajarse desde K la perpendicular KM al plano PQ, y será KM $<$ KL, pero KM $=$ HI, luego HI $<$ KL.

---

1 Si KL estuviese en el plano RB pasaria por H y sería oblícua á la AB, y por tanto mayor que HI, que es perpendicular.

CAPÍTULO SEGUNDO.

SUPERFICIES CURVAS.

I.—Nociones preliminares.

301. Si una línea cualquiera se mueve en el espacio, dejando en él la huella de sus posiciones sucesivas, engendra una superficie, puesto que el *lugar* de dichas posiciones dividirá al espacio en dos partes de las que será límite comun.

La línea móvil se llama *generatriz* de la superficie.

302. Toda superficie que puede ser engendrada por el movimiento de una recta, se llama *superficie reglada.*

Las superficies regladas pueden ser *desarrollables y alabeadas*.

En las primeras, dos posiciones consecutivas de la generatriz se hallan en un mismo plano, y en las segundas en planos diferentes.

Las superficies desarrollables se llaman así porque pueden extenderse por completo en un mismo plano sin pliegue ni rotura, propiedad de que no gozan las alabeadas.

303. Toda superficie engendrada por una línea cualquiera que gira alrededor de una recta fija, se llama *superficie de revolucion*. La recta fija recibe el nombre de *eje*.

304. *Los planos perpendiculares al eje de revolucion cortan á la superficie segun circunferencias, que tienen su centro en el eje y se llaman* PARALELOS.

En efecto: al girar la generatriz AQB (*Fig.* 186) alrededor del eje AB, todos los puntos de ella conservan la misma posicion con respecto al eje. Bajemos una perpendicular QD á AB desde un punto cualquiera Q de la generatriz: la línea engendrada por Q tendrá todos sus puntos en los extremos de rectas DQ, DQ' etc. perpendiculares al eje en el punto D é iguales á DQ, luego será una circunferencia cuyo centro estará en D y cuyo plano será perpendicular al eje en el mismo punto. De aquí se deduce que el plano perpendicular al eje por el punto D, coincidirá con el QDQ' y cortará á la superficie de revolucion segun una circunferencia.

305. *Los planos que pasan por el eje cortan á la superficie de revolucion segun líneas iguales, que se llaman* MERIDIANOS.

Sean AQB, AQ'B (*Fig.* 186) dos meridianos. Trazo por varios puntos C, D, E etc. planos perpendiculares al eje AB. Las intersecciones CP y CP', DQ y DQ', ER y ER' de estos planos con los dos meridianos, forman ángulos rectilíneos PCP', QDQ', RER' iguales entre sí, porque todos corresponden á un mismo diedro QABQ'; además CP=CP', DQ=DQ', ER=ER', luego si hacemos girar el plano AQ'B hasta que coincida con el AQB, todos los puntos P', Q', R' etc. del meridiano AQ'B coincidirán con puntos correspondientes P, Q, R etc. del meridiano AQB; por tanto los meridianos son iguales.

II.—Superficie cónica.

306. SUPERFICIE CÓNICA *es la engendrada por una recta indefinida que gira alrededor de un punto fijo apoyándose en una curva cualquiera.*

Esta curva recibe el nombre de *directriz.* El punto fijo se llama *vértice* ó *centro* de la superficie, y la divide en dos *hojas* que se estienden indefinidamente á una y otra parte del centro.

Si la directriz tiene centro [1], la recta que une este punto con el centro de la superficie se llama *eje* de la misma.

Se llama superficie cónica *circular* aquella cuya directriz es una circunferencia.

307. *Se llama* CONO *el espacio limitado por una de las hojas de una superficie cónica y un plano que corte á todas las generatrices.*

VABCDE (*Fig.* 187) es un cono. El vértice V de la superficie cónica se llama *vértice* del cono, y la parte ABCDE de plano limitada por la superficie es la *base* del cono. *Altura* es una perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base. *Lados* son las partes VA, VB, VC etc. de las generatrices limitadas por el vértice y la base. *Eje* es la recta VO que une el vértice con el centro de la base.

Un cono es *recto* (*Fig.* 187) cuando el eje VO es perpendicular á la base, y *oblicuo* (*Fig.* 188) cuando el eje VO es oblicuo á la base.

---

1 *Centro* de una curva cualquiera es el punto que divide en dos partes iguales á todas las rectas que pasan por él y terminan en la curva.

Se llama *cono circular* aquel cuya base es un círculo.

CONO TRONCADO *ó* TRONCO DE CONO *es la parte de cono comprendida entre la base y un plano que corte á todas las generatrices.*

La parte de cono comprendida entre la seccion y el vértice se llama *cono deficiente.*

La base del cono y la seccion causada por el plano se llaman *bases* del tronco; si éstas son paralelas, se llama *altura* del tronco á la distancia entre las bases.

308. *El cono circular recto puede considerarse engendrado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de un cateto.*

Pues si elegimos el cateto VO *(Fig.* 187*)* del triángulo VOA para eje de revolucion, el otro cateto AO engendra un círculo perpendicular á VO cuyo centro es O, y la hipotenusa VA, que se apoya en la circunferencia ABCDE y pasa constantemente por el punto fijo V, engendra una hoja de superficie cónica.

TEOREMA I. *(Fig.* 188.*)*

309. *En toda superficie cónica circular, la interseccion de la superficie con un plano paralelo al de la directriz* ABC, *es una circunferencia cuyo centro está en el eje.*

Siendo paralelos los planos ABC, A'B'C', sus intersecciones con los planos AVO, BVO, CVO son paralelas; luego

$$\frac{OA}{O'A'}=\frac{VO}{VO'},\ \frac{OB}{O'B'}=\frac{VO}{VO'},\ \frac{OC}{O'C'}=\frac{VO}{VO'},$$

de donde
$$\frac{OA}{O'A'}=\frac{OB}{O'B'}=\frac{OC}{O'C'},$$

pero OA=OB=OC, por ser radios de la directriz, luego O'A'=O'B'=O'C'.

Vemos, pues, que la línea A'B'C' tiene sus puntos equidistantes de O'; además se hallan todos en el plano secante, por consiguiente A'B'C' es una circunferencia.

TEOREMA II. *(Fig.* 188.*)*

310. *Todo plano que pasa por el vértice* V *de una superficie cónica circular y por dos puntos* A *y* B *de la directriz, corta á la superficie en dos generatrices.*

El plano que pasa por los puntos V, A y B contiene las generatrices VA y VB, porque cada una tiene dos puntos en el plano, y como dichas generatrices pertenecen tambien á la superficie cónica, es evidente que son las intersecciones de ésta con el plano.

311. *Un plano es* TANGENTE *á una superficie cónica circular cuando sólo tiene comun con ella una generatriz.*

Teorema III. (*Fig.* 188.)

En una superficie cónica circular, todo plano que pasa por una tangente T T' *á la directriz y por la generatriz* VB *del punto de contacto, es tangente á la superficie.*

La tangente TT' está en el plano de la directiz, por consiguiente es la interseccion de este plano con el VBT. Si el plano VBT tuviese con la superficie cónica algun punto comun distinto de los de la generatriz VB, contendria por completo á la generatriz que pasase por dicho punto comun, y cortaria por tanto á la directriz en otro punto además del B, lo que es imposible; luego el plano VBT es tangente á la superficie.

Teorema recíproco. *Todo plano tangente á una superficie cónica circular, corta al plano de la directriz segun una tangente á esta curva.*

Si la interseccion del plano tangente con el de la directriz cortase á esta curva en dos puntos A y B, el primero de estos planos contendria las dos generatrices VA y VB [**310**], lo que es contrario á la hipótesis.

Corolario. *Por un punto dado en una superficie cónica circular no puede pasar mas que un plano tangente á la superficie.*

Teorema IV. (*Fig.* 189).

312. *Toda superficie cónica es desarrollable.*

Sean V*a*, V*b*, V*c* etc. varias posiciones sucesivas de la generatriz de la superficie cónica V. Cada dos generatrices consecutivas V*a* y V*b*, V*b* y V*c*, V*c* y V*d* etc. forman una cara plana *a*V*b*, *b*V*c*, *c*V*d* etc. infinitamente pequeña, y la superficie se puede considerar como un ángulo poliedro compuesto de infinito número de éstas caras. Ahora, la cara *a*V*b* puede girar alrededor de la arista V*b* hasta colocarse en el plano de la cara inmediata *b*V*c*; el conjunto de estas dos caras, puede girar despues alrededor de V*c* hasta colocarse en el plano de la tercera cara *c*V*d*. Continuando de este modo se concibe que todas las caras llegarán á colocarse en el plano de la última, esto es, de la anterior á *a*V*b*, y que por tanto la superficie cónica V se habrá desarrollado.

TEOREMA V. *(Fig. 190.)*

313. *El desarrollo de la superficie curva de un cono circular recto* VAB *es un sector de círculo* VBB′, *cuyo radio* VB *es el lado del cono y cuya base* BB′ *es igual en longitud á la circunferencia* O *de la base del cono.*

Todos los lados del cono VAB son iguales á la hipotenusa del triángulo generador, luego son iguales entre sí. Si hacemos rodar el cono en un plano que pase por el lado VB, sin que el vértice mude de posicion, hasta que el mismo lado coincida nuevamente con el plano en la posicion VB′, la superficie cónica habrá quedado desarrollada, y todos los puntos de la circunferencia O se habrán colocado sucesivamente sobre el plano á la misma distancia del vértice V: luego BB′ es un arco de círculo igual en longitud á la circunferencia O, y VBB′ un sector circular.

ESCOLIO. Cortando el cono VAB por un plano CMD paralelo á la base, el cono deficiente VCD será tambien circular recto, y el desarrollo de su superficie es evidentemente el sector VDD′; luego el trapecio circular BB′DD′ será el desarrollo de la superficie lateral del tronco de cono de bases paralelas ABCD.

III.—Superficie cilíndrica.

314. SUPERFICIE CILÍNDRICA *es la engendrada por una recta indefinida que se mueve paralelamente á sí misma apoyándose en una curva cualquiera.*

Esta curva recibe el nombre de *directriz.*

Si la directriz tiene centro, la paralela á las generatrices tirada por este punto se llama *eje* de la superficie.

Superficie cilíndrica *circular* es aquella cuya directriz es un círculo.

315. *Se llama* CILINDRO *el espacio limitado por una superficie cilíndrica y dos planos paralelos que corten á todas las generatrices.*

ABCD (*Fig.* 191) es un cilindro. Las partes AEBG, CFDH de los planos secantes limitadas por la superficie cilíndrica, son las bases del cilindro. *Altura* es la distancia entre las bases. *Lados* son las partes AC, EF, BD etc. de las generatrices limitadas por las bases. *Eje* es la recta OO' que une los centros de las bases.

Un cilindro es *recto* (*Fig.* 191) cuando el eje OO' es perpendicular á las bases, y *oblícuo* (*Fig.* 192) cuando el eje OO' es oblícuo á las bases.

Se llama cilindro *circular* aquel cuyas bases son círculos.

316. *El cilindro circular recto puede considerarse engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.*

Si OO' (*Fig.* 191), lado del rectángulo AOO'C, es el eje de revolucion, los lados opuestos OA, O'C engendrarán las bases del cilindro, que serán dos círculos perpendiculares al eje, y el lado AC engendrará la superficie cilíndrica.

TEOREMA I. (*Fig.* 192).

317. *En toda superficie cilíndrica circular, la interseccion de la superficie con un plano* A″B″C″ *paralelo al de la directriz* ABC, *es una circunferencia igual á* ABC *y cuyo centro está en el eje.*

Siendo paralelos los planos ABC, A″B″C″ sus intersecciones con los planos AOO'A', BOO'B', COO'C' son paralelas; además el eje OO' es paralelo á las generatrices, por tanto [**100**]

$$O''A'' = OA, \quad O''B'' = OB, \quad O''C'' = OC,$$

y como los radios OA, OB, OC son iguales entre sí, las rectas O″A″, O″B″, O″C″ tambien son iguales; luego la curva A″B″C″ es una circunferencia cuyo centro es O″; además siendo el radio O″A″ igual al OA, las circunferencias O″ y O son iguales.

TEOREMA II. (*Fig.* 192).

318. *Todo plano paralelo al eje de una superficie cilíndrica circular y que pasa por dos puntos* A *y* B *de la directriz, corta á la superficie en dos generatrices.*

La generatriz AA′ es paralela al eje OO′ y tiene un punto A en el plano, luego está enteramente contenida en él [**251, cor.**]; lo mismo puede decirse de la generatriz BB′; luego estas generatrices son las intersecciones del plano con la superficie cilíndrica.

319. *Un plano es* TANGENTE *á una superficie cilíndrica circular cuando sólo tiene comun con ella una generatriz.*

TEOREMA III. (*Fig.* 192).

En una superficie cilíndrica circular, todo plano que pasa por una tangente TT′ *á la directriz y por la generatriz* BB′ *del punto de contacto, es tangente á la superficie.*

TEOREMA RECÍPROCO. *Todo plano tangente á una superficie cilíndrica circular, corta al plano de la directriz segun una tangente á esta curva.*

La demostracion es igual á la del número **311.**

COROLARIO. *Por un punto dado en una superficie cilíndrica circular no puede pasar mas que un plano tangente á la superficie.*

TEOREMA IV. (*Fig.* 193).

320. *Toda superficie cilíndrica es desarrollable.*

Sean *aa′*, *bb′*, *cc′* etc. varias posiciones sucesivas de la generatriz; cada dos generatrices consecutivas *aa′* y *bb′*, *bb′* y *cc′*, *cc′* y *dd′* etc. están en un mismo plano, puesto que son paralelas, y forman fajas infinitamente estrechas que componen la superficie cilíndrica. Ahora, la faja *aa′bb′* puede girar alrededor de la arista *bb′* hasta colocarse en el plano de la faja inmediata *bb′cc′*; el sistema de estas dos fajas puede girar despues alrededor de *cc′* hasta colocarse en el plano de la tercera etc.; luego todas las fajas llegarán á colocarse en el plano de la última, y la superficie cilíndrica habrá quedado desarrollada.

TEOREMA V. (*Fig.* 194).

321. *El desarrollo de la superficie curva de un cilindro circular recto* ABCD *es un rectángulo* BDD′B′, *cuya altura es el lado* BD *del cilindro y cuya base* DD′ *es igual en longitud á la circunferencia* O *de la base del cilindro.*

Hagamos rodar el cilindro, sin que resbale, en un plano que pase por el lado BD, hasta que el mismo lado coincida nuevamente con el plano en la posicion B'D'. En virtud de este movimiento, la superficie cilíndrica habrá quedado desarrollada; todos los puntos de la circunferencia O se habrán colocado sucesivamente sobre el plano que pasa por BD; la base CD del cilindro no habrá salido en su movimiento del plano indefinido de que forma parte, pues se supone que el cilindro no resbala, por consiguiente los puntos de la circunferencia CD habrán recorrido la interseccion del plano que pasa por BD con el de la base CD; luego DD' es una línea recta igual en longitud á la circunferencia O. Además siendo BD perpendicular al plano CD, lo es tambien á la recta DD' que pasa por su pié en dicho plano.

El mismo razonamiento aplicado á la base AB, demuestra que BB' es una línea recta igual en longitud á la circunferencia O' y perpendicular á BD, luego DD' y BB' son paralelas; además como las circunferencias O y O' son iguales, BB' y DD' son tambien iguales, luego la figura BDB'D' es un paralelógramo rectángulo.

IV.—Superficie esférica.

322. Superficie esférica *es la engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro.*

Esfera *es la porcion de espacio limitada por la superficie esférica.*

Es claro que *la esfera puede considerarse engendrada por un semicírculo que gira alrededor del diámetro.*

Centro *de la esfera ó de la superficie esférica es el centro de la semicircunferencia generatriz*; radio *es toda recta tirada desde el centro á un punto cualquiera de la superficie; y* diámetro *toda recta que pasando por el centro tiene sus dos extremos en la superficie.*

Todos los radios de una esfera son iguales.

Porque son radios de la semicircunferencia generatriz en alguna de sus posiciones.

Por esto se dice tambien: *superficie esférica es una superficie curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro.*

Todos los diámetros de una esfera son iguales.

Porque cada uno vale dos radios.

Eje *de una esfera es el diámetro de la semicircunferencia generatriz*; *y* polos *los extremos del eje*.

Teorema I. (*Fig.* 195).

323. *Cuatro puntos* A, B, C, D *que no están en un mismo plano, determinan una superficie esférica.*

Sea E el centro de la circunferencia determinada por los puntos A, B, C, y sea G el centro de la determinada por A, D, C. La recta AC es la interseccion de los planos ABC y ADC. Por los centros E y G levanto dos perpendiculares EH, GI á los planos ABC y ADC: estas perpendiculares se cortan. En efecto, las perpendiculares GF y EF á la recta AC, cuerda comun á las circunferencias cuyos centros son E y G, se encuentran en el punto medio F de AC [**46**], y determinan un plano EFG al que es perpendicular AC; por tanto la recta EH, perpendicular al plano ABC, está contenida en el plano EFG [**281, recip.**], y la recta GI está igualmente contenida en el plano EFG, por ser perpendicular al ADC; pero las rectas EH y GI no pueden ser paralelas, porque siendo FG perpendicular á GI lo sería tambien á su paralela EH y tendríamos por F dos perpendiculares FG, FE á una misma recta EH, lo que es imposible. Luego las rectas EH, GI se cortan en un punto O.

Ahora bien, el punto O de la perpendicular EH equidista de A, B y C [**242**. 1.°], y el mismo punto O, por pertenecer á la perpendicular GI, equidista de A, D y C; luego O equidista de los puntos A, B, C y D, por consiguiente la superficie esférica cuyo centro sea O y el radio OA, pasará por los cuatro puntos dados.

Demostremos ahora que por estos puntos sólo puede pasar una superficie esférica.

El centro de toda superficie esférica que pase por A, B, C y D equidista de A, B y C, por consiguiente la perpendicular bajada desde dicho centro al plano ABC tendrá su pié á igual distancia de los puntos A, B y C, esto es, en E, y se confundirá con EH: luego el centro será un punto de la perpendicular EH. De un modo análogo se demuestra que el centro es tambien un punto de la perpendicular GI. Luego el centro de las superficies esféricas que puedan pasar por A, B, C y D es O, y como el radio evidentemente es OA, se confundirán todas en una sola.

TEOREMA II. (*Fig.* 196.)

324. *Si una superficie esférica se corta por un plano, la interseccion es una circunferencia.*

Si el plano secante pasa por el centro O de la esfera, todos los puntos de interseccion distan del punto O el radio de la esfera y están en un mismo plano, luego la interseccion es una circunferencia.

Si el plano secante no pasa por el centro de la esfera, tiro un radio OP perpendicular al plano, y las rectas OA, OD, OE etc., á diferentes puntos de la interseccion. Estas rectas son iguales, como radios de la esfera, por consiguiente son oblicuas al plano y sus piés equidistan del pié C de la perpendicular: luego la curva plana ADEB tiene todos sus puntos equidistantes de otro C situado en su plano, y por tanto es una circunferencia.

ESCOLIO. El pié C de la perpendicular tirada desde el centro de la esfera al plano de la circunferencia ADEB, es centro de la misma.

325. El radio OA de una circunferencia cuyo plano pase por el centro de la esfera es mayor que el radio AC de cualquier circunferencia cuyo plano no pase por dicho centro; porque OA es la hipotenusa del triángulo rectángulo ACO y AC es un cateto; luego *la mayor circunferencia de la esfera es aquella cuyo plano pasa por el centro.* Por esto se llama circunferencia *máxima;* las demás reciben el nombre de *menores.* Los círculos respectivos reciben los mismos nombres.

TEOREMA III.

326. *Dos puntos de la superficie esférica, que no estén en línea recta con el centro, determinan una circunferencia máxima.*

Porque los puntos dados y el centro determinan un plano, cuya interseccion con la superficie esférica es una circunferencia máxima que pasa por los dos puntos.

TEOREMA IV. (*Fig.* 196).

327. *Toda circunferencia máxima* FG *divide á la superficie esférica en dos partes iguales.*

Si la parte superior FPG de la superficie se coloca sobre la inferior FP'G, de modo que la circunferencia FG permanezca comun y que el punto P caiga hácia el mismo lado que el P', estas dos partes coincidirán por completo, de lo contrario los radios de la superficie esférica no serian todos iguales.

Escolio. Es evidente que el círculo máximo FG divide á la esfera en dos partes iguales. Estas partes se llaman *hemisferios*.

Teorema V.

328. *Dos circunferencias máximas de una misma esfera se dividen mútuamente en dos partes iguales.*

Como los planos de las dos circunferencias pasan por el centro, la interseccion es un diámetro comun, que divide á cada una en dos partes iguales.

Teorema VI. *(Fig. 197).*

329. *Si dos circunferencias de una misma superficie esférica son iguales, sus planos equidistan del centro; y si son desiguales, el plano de la mayor está más próximo al centro.*

Por el centro O de la esfera y por los centros E y F de las circunferencias dadas hago pasar un plano. La interseccion de este plano con la superficie esférica será la circunferencia máxima ABDC, y la interseccion del mismo con los planos de las circunferencias menores serán los diámetros AB y CD de éstas. Las perpendiculares bajadas desde O á los planos AB y CD pasan por los centros E y F, luego están en el plano ABDC.

Ahora bien, si los diámetros AB y CD son iguales, las distancias OE y OF tambien lo son; y si AB > CD, será OE < OF [**45**]; luego el teorema es cierto.

Teorema recíproco. *Si dos circunferencias de una misma superficie esférica tienen sus planos equidistantes del centro, son iguales; y si distan desigualmente del centro, es mayor aquella cuyo plano está más próximo al centro.*

330. Polos *de una circunferencia trazada en la superficie esférica son los extremos del diámetro de la esfera perpendicular al plano de la circunferencia.*

TEOREMA VII. (*Fig.* 196).

Cada uno de los polos P, P′ *de una circunferencia* AB *de la esfera, equidista de todos los puntos de la circunferencia.*

La perpendicular PP′ al plano AB pasa por el centro C de la circunferencia, por tanto las distancias de uno de los polos á los puntos de ésta son oblícuas al plano AB que se apartan igualmente del pié C de la perpendicular; luego son iguales.

ESCOLIO. Los arcos de circunferencia máxima PA, PB etc., trazados desde el polo P á los diferentes puntos de la circunferencia AB, son iguales, por serlo sus cuerdas.

TEOREMA VIII. (*Fig.* 196).

331. *Si haciendo centro en un punto* P *de la superficie esférica, con un radio cualquiera* PA, *se traza una curva* ADEB [1], *esta curva será una circunferencia de la que* P *será uno de los polos.*

Trazo el diámetro PP′ y los radios OA, OD, OE etc. á diferentes puntos de la curva ADEB, y uno estos puntos con P por medio de rectas AP, DP, EP etc. Los triángulos OAP, ODP, OEP etc. son iguales, porque tienen OA=OD=OE.... como radios de la esfera, PA=PD=PE.... por hipótesis, y el lado OP comun á todos ellos; luego si desde los puntos A, D, E etc. bajo perpendiculares al lado comun OP, se encontrarán evidentemente en el mismo punto C, estarán en el mismo plano [**237**], y serán iguales; luego la curva ADEB será una circunferencia.

Además el plano de esta curva es perpendicular al diámetro PP′, luego P es un polo de la misma.

332. *Se llama* PLANO TANGENTE *á una superficie esférica todo plano indefinido que toca á la superficie en un solo punto, llamado de contacto.*

TEOREMA IX. (*Fig.* 198).

El plano MN *perpendicular al radio* OA *en el punto en que éste toca á la superficie esférica, es tangente á la superficie.*

---

1 Para trazar curvas sobre la superficie de la esfera se emplea un compás de piernas curvas, llamado *compás esférico.*

Siendo OA perpendicular al plano MN es menor que otra cualquiera recta OB tirada desde el centro de la esfera al plano, por consiguiente el punto B está fuera de la superficie esférica. Lo mismo puede decirse de otro cualquier punto del plano MN, á escepcion del A. luego la superficie esférica y el plano MN sólo tienen el punto comun A.

Teorema recíproco. *El plano MN tangente á la superficie esférica es perpendicular al radio OA tirado al punto de contacto.*

Como MN es por hipótesis tangente á la superficie esférica, todos sus puntos, á escepcion del A. estarán fuera de la superficie, y las distancias de los mismos al centro serán mayores que el radio; luego OA es la menor de cuantas rectas pueden trazarse desde el centro al plano tangente, por lo tanto es perpendicular á este plano [**240, recip.**].

Corolarios.

1.° *Por un punto de una superficie esférica no puede pasar mas que un plano tangente á la superficie.*

Puesto que el plano tangente debe ser perpendicular al radio, y por el extremo de éste no puede pasar mas que un plano perpendicular.

2.° *El radio ó diámetro perpendicular á un plano tangente, pasa por el punto de contacto.*

De lo contrario podrian tirarse desde O dos perpendiculares al plano tangente.

333. Angulo esférico *es la inclinacion mútua de dos arcos de circunferencia máxima que se cortan.*

Estos arcos AB y BC (*Fig.* 198) se llaman *lados* del ángulo y el punto B en que se cortan, *vértice.*

Dos ángulos esféricos de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, si colocando un lado del primero sobre otro lado del segundo, de modo que los vértices coincidan, los otros dos lados se confunden en uno solo. En el caso contrario los ángulos serán desiguales.

Por consiguiente *la magnitud de un ángulo esférico no depende de la longitud de sus lados, sino de la mayor ó menor inclinacion del uno sobre el otro.*

334. *Ángulos esféricos* adyacentes *son dos ángulos que tienen un lado comun y los otros dos lados en una misma circunferencia maxima.*

Si un arco de circunferencia máxima forma con otro dos ángulos adyacentes iguales, estos ángulos se llaman *rectos*, y el primer arco es *perpendicular* al segundo. Si por el contrario los ángulos adyacentes son desiguales, se llaman *oblicuos*, y el primer arco es *oblicuo* al segundo.

335. *Dos ángulos esféricos rectos de una misma esfera son iguales, aunque no sean adyacentes.*

La suma de dos ángulos esféricos adyacentes es igual á dos ángulos rectos.

Dos ángulos esféricos opuestos por el vértice, son iguales.

Estos teoremas se demuestran como sus análogos de los números **9**, **10** y **13**.

336. *Ángulo diedro* CORRESPONDIENTE *á un ángulo esférico* ABC (Fig. 199) *es el diedro* ABDC *que forman los planos en que están situados los lados del ángulo esférico.*

Obsérvese que la arista del diedro pasa por el centro de la esfera, porque los lados del ángulo esférico son arcos de circunferencia máxima.

Si dos ángulos esféricos de una misma esfera son iguales, sus ángulos diedros correspondientes tambien son iguales, pues haciendo coincidir los ángulos esféricos, coincidirán las aristas y caras de los ángulos diedros correspondientes.

Recíprocamente: *Si dos ángulos diedros, correspondientes á dos ángulos esféricos de una misma esfera, son iguales, dichos ángulos esféricos son tambien iguales*, pues haciendo coincidir los ángulos diedros de modo que los vértices de los ángulos esféricos, que son puntos de las aristas, coincidan, coincidirán los centros de las circunferencias máximas, y como cada dos de éstas se encuentran en un mismo plano y tienen radios iguales, se confundirán; luego los ángulos esféricos serán iguales.

El diedro correspondiente á un ángulo esférico recto, es tambien recto; y recíprocamente: *si el diedro correspondiente á un ángulo esférico es recto, dicho ángulo esférico tambien es recto.*

La razon de dos ángulos esféricos de una esfera es igual á la de sus diedros correspondientes.

Un ángulo esférico tiene por medida su ángulo diedro correspondiente, esto es, *el valor numérico de un ángulo esférico es igual al valor numérico de su diedro correspondiente, siempre que la unidad para medir ángulos diedros* *sea el diedro correspondiente á la unidad de ángulos esféricos.*

Estos teoremas se demuestran como sus análogos de los números **276**, **277** y **278**.

Siendo la unidad de ángulos diedros el diedro recto, la unidad de ángulos esféricos será el ángulo esférico recto. Éste se divide en 90 grados, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

Si un ángulo diedro vale 34° 53′ el esférico correspondiente valdrá tan bien 34° 53′.

337. *Se llama* TRIÁNGULO ESFÉRICO *la porcion de superficie esférica* ABC (Fig. 200 *limitada por tres arcos de circunferencia máxima menores cada uno que media circunferencia.*

Los arcos que limitan el triángulo se llaman *lados* del mismo.

Uniendo los vértices de un triángulo esférico ABC con el centro O de la esfera, y suponiendo planos por cada dos rectas de union, se forma un ángulo tiedro OABC *correspondiente* al triángulo esférico ABC.

Los lados AB, AC, BC del triángulo esférico tienen igual medida que las caras AOB, AOC, BOC del tiedro correspondiente, puesto que aquellos son los arcos correspondientes á estos ángulos planos; y los ángulos esféricos A, B, C del triángulo tienen igual medida que los ángulos diedros OA, OB, OC. Luego *á toda propiedad de los ángulos tiedros, relativa á los valores de sus ángulos planos y diedros, corresponderá otra análoga de los triángulos esféricos, que se enunciará y demostrará reemplazando las caras y ángulos diedros de aquellos por los lados y ángulos esféricos de éstos.*

TEOREMA X. *(Fig.* 200.)

338. *Un lado cualquiera de un triángulo esférico es:* 1.° *menor que la suma de los otros dos;* 2.° *mayor que su diferencia.*

Construyo el tiedro O correspondiente al triángulo propuesto ABC, y será [**286**]

$$AOB < AOC + COB. \qquad AOC > AOB - BOC;$$

sustituyendo en estas desigualdades cada ángulo plano por el arco correspondiente, tendremos

$$AB < AC + CB, \qquad AC > AB - BC.$$

TEOREMA XI. (*Fig.* 200).

339. *La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que una circunferencia máxima.*

Tenemos [**287**] $AOB + AOC + BOC < 4R$,

luego $AB + AC + BC < 360°$,

esto es, menor que una circunferencia.

340. *Dos triángulos esféricos son* SUPLEMENTARIOS *cuando los lados de cada uno son suplementos de los ángulos del otro.*

TEOREMA XII.

Los triángulos esféricos correspondientes á dos tiedros suplementarios, son tambien suplementarios.

Siendo las caras de cada tiedro suplementos de los ángulos diedros del otro, los lados de cada triángulo serán suplementos de los ángulos del otro [**338**], luego los triángulos serán suplementarios.

TEOREMA XIII.

341. *La suma de los ángulos de un triángulo esférico, es mayor que dos rectos y menor que seis* [**289**].

ESCOLIO. Un triángulo esférico puede tener uno, dos y hasta tres ángulos rectos, llamándose en cada caso respectivamente *rectángulo, birectángulo ó trirectángulo.*

342. *Triángulos esféricos* SIMÉTRICOS *son los triángulos de una misma esfera correspondientes á tiedros simétricos.*

TEOREMA XIV.

Dos triángulos esféricos simétricos tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales, pero en general no pueden coincidir. Sin embargo, coincidirán si uno de los triángulos tiene dos ángulos iguales [**290**].

TEOREMA XV.

343. *Si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos son iguales; y si tiene dos ángulos desiguales, á mayor ángulo se opone mayor lado* [**291**].

TEOREMA XVI. (*Figs.* 200 *y* 201.)

314. *Dos triángulos esféricos* ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales: 1.º cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; 2.º cuando tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido; 3.º cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales; siempre que en todos estos casos los elementos iguales estén igualmente dispuestos.*

1.º Sea AB=DE, *ang.* A=*ang.* D, *ang.* B=*ang.* E. Los tiedros O y O', corespondientes á los triángulos propuestos, tienen un ángulo plano igual AOB=DO'E, adyacente á dos ángulos diedros respectiva nente iguales OA=O'D, OB=O'E é igualmente dispuestos, luego dichos tiedros son iguales. Si los hacemos coincidir, los vértices D, E, F del triángulo DEF coincidirán con A, B, C, por ser iguales los radios, y como por dos puntos de la superficie esférica sólo puede pasar un arco de circunferencia máxima, los lados de los triángulos coincidirán tambien; luego los triángulos son iguales.

De un modo análogo se demuestran los demás casos.

TEOREMA XVII.

315. *La línea más corta que se puede trazar en la superficie esférica entre dos puntos de la misma, es el arco menor de la circunferencia máxima que pasa por dichos puntos.*

Demostraremos ante todo dos lemas.

1.º *El camino más corto sobre la superficie esférica entre el polo* P (Fig. 202) *y cada punto de una circunferencia* AB, *es igual para todos estos puntos.*

Consideremos dos puntos D y E, y sea PD una línea cualquiera que supondremos la más corta entre P y D; digo que PD es tambien la línea más corta entre P y E. Si la línea PD gira alrededor del eje PP', todos sus puntos permanecerán en la superficie esférica, puesto que describen paralelos de la misma, y el punto D llegará á pasar por E, por tanto PD será una línea entre P y D; si no fuese la más corta, habria otra PE menor que ella, y haciendo girar ésta alrededor de PP' el punto E llegaria á pasar por D y PE sería una distancia entre P y D menor que PD, lo que es contrario al supuesto. Luego la línea más corta entre P y D es tambien la más corta entre P y E, por consiguiente el lema es cierto.

2.° *Si dos arcos* AC *y* ADB (Fig. 203) *de circunferencia máxima, menores que media circunferencia, son desiguales, siendo* AC < ADB, *el camino mas corto entre* A *y* C *es menor que el camino más corto entre* A *y* B.

Desde el punto A como polo, con una abertura de compás AC, describamos una circunferencia que cortará necesariamente al arco ADB entre A y B. Sea AEB una línea cualquiera que supondremos la menor distancia entre A y B: esta línea corta á la circunferencia DC en un punto E, por manera que puede considerarse descompuesta en dos partes AE y EB; la primera AE es el camino más corto entre A y E, de lo contrario AEB no sería el camino más corto entre A y B, luego AE será igual al camino más corto entre A y C [**Lema 1.°**]; por consiguiente este último camino es menor que AEB.

Demostremos, ahora, el teorema.

Sea AB (*Fig.* 204) el arco de circunferencia máxima, menor que media circunferencia, comprendido entre los puntos dados A y B. Si la línea más corta entre A y B tuviese un punto C fuera del arco AB, uniendo este punto C con A y con B y tomando AD=AC [1], sería [**338**]

$$AD + DB < AC + BC;$$

restando AD del primer miembro y su igual AC del segundo, resulta DB < BC. Ahora bien, el camino más corto entre A y D es igual al camino más corto entre A y C [**Lema 1.°**], luego si C es un punto del camino más corto entre A y B, deberá ser el camino entre C y B menor que el camino entre D y B, lo que es absurdo [**Lema 2°**], porque BC > BD.

Luego ningun punto de la distancia entre A y B puede estar fuera del arco de circunferencia máxima AB, lo que demuestra que este arco es la línea más corta que se puede trazar sobre la superficie esférica entre A y B.

---

1 Los arcos AC y BC son meneres que AB, pues si fuese AC > AB, el camino mas corto entre A y C sería mayor que el camino mas corto entre A y B (*Lema 2.°*), lo que es contrario al supuesto de que el punto C pertenezca al camino más corto entre A y B.

PROBLEMA I. *(Fig. 205.)*

346. *Dada una esfera, determinar su radio por medio de una construccion geométrica.*

Señalo dos puntos M y N en la superficie esférica; desde cada uno de ellos como polo, con una abertura de compás mayor que la mitad de la distancia esférica MN, describo dos arcos que se cortarán en un punto A equidistante de M y N; determino del mismo modo otros dos puntos B y C equidistantes de M y N. El plano que determinan los tres puntos A, B y C es perpendicular á la recta MN en su punto medio [**244**], luego será el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de M y N [**243**]; de aquí se deduce que dicho plano pasa por el centro O de la esfera, cortando la superficie de ésta segun una circunferencia que estará determinada por los tres puntos A, B y C. Mido ahora las distancias AB, BC, y AC, y coinsiderándolas como lados, construyo un triángulo: circunscribo á este triángulo una circunferencia, que será igual á la máxima ABC: el radio de esta circunferencia es la de la esfera dada.

PROBLEMA II. *(Fig. 206).*

347. *Por dos puntos* A *y* B *de una superficie esférica hacer pasar una circunferencia máxima.*

ANÁLISIS. Si P es el polo de la circunferencia máxima AB, la distancia PC entre P y un punto cualquiera C de esta circunferencia es la hipotenusa de un triángulo rectángulo POC, cuyos catetos son iguales al radio de la esfera, ó bien, la cuerda de un cuadrante de circunferencia máxima.

SÍNTESIS. Haciendo centro sucesivamente en los puntos dados A y B describo, con un radio igual á la cuerda de un cuadrante de circunferencia máxima, dos arcos que se cortarán en un punto P; desde el punto P como polo, con el mismo radio, describo una circunferencia, y estará resuelto el problema.

LIBRO SÉTIMO.

DE LOS POLIEDROS.

DEFINICIONES.

348. Poliedro *es todo cuerpo limitado por planos.*

Estos planos terminan en sus mútuas intersecciones, de modo que el poliedro está limitado por polígonos, que son sus *caras*. Las intersecciones de las caras se llaman *aristas* del poliedro: es evidente que las aristas son los lados de las caras. Los puntos en que concurren tres ó más aristas se llaman *vértices* del poliedro; los vértices del poliedro son vértices de las caras. Los ángulos diedros y poliedros que forman las caras, son los *ángulos diedros* y *ángulos poliedros* del cuerpo. *Diagonal* es toda recta que une dos vértices del poliedro, no situados en la misma cara.

Poliedro *convexo* es aquel cuya superficie no puede ser cortada por una recta en más de dos puntos.

349. Es evidente que el número menor de planos necesarios para formar un poliedro es cuatro.

Un poliedro de	cuatro	caras se	llama	*tetraedro*,
»	cinco	»	»	*pentaedro*,
»	seis	»	»	*exaedro*,
»	siete	»	»	*eptaedro*,
»	ocho	»	»	*octaedro*,
»	doce	»	»	*dodecaedro*,
»	veinte	»	»	*icosaedro*.

CAPÍTULO PRIMERO.

PIRÁMIDES.—PRISMAS.

I.—Pirámides.

350. Pirámide *es un poliedro limitado por un polígono cualquiera, llamado* base, *y varios triángulos que tienen un vértice comun, llamado* vértice *ó* cúspide *de la pirámide.*

Altura de una pirámide es la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.

Una pirámide es *triangular, cuadrangular, pentagonal* etc., cuando su base es un triángulo, cuadrilátero, pentágono etc.

Pirámide REGULAR *es la que tiene por base un polígono regular, y por altura la recta que une su vértice con el centro de la base.*

Las aristas laterales de una pirámide regular son iguales, por ser oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular.

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles é iguales.

Se llama *apotema* de una pirámide regular á la altura de uno de los triángulos laterales.

PIRÁMIDE TRONCADA *ó* TRONCO DE PIRÁMIDE *es la parte de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte á todas las aristas laterales.* La base de la pirámide y la seccion hecha por este plano, son las *bases* del tronco. Si son paralelas, la distancia entre ellas se llama *altura. Pirámide* DEFICIENTE *es la parte de pirámide total comprendida entre el vértice y el plano secante.*

TEOREMA I. *(Fig. 207).*

351. *Todo plano* FGHIK *paralelo á la base de una pirámide, divide á las aristas laterales y á la altura en partes proporcionales. La seccion que resulta es un polígono semejante á la base.*

1.° Siendo paralelos el plano de la base y el de la seccion, dividen á las rectas que parten del punto V en partes proporcionales [**231, cor.**], luego

$$\frac{VF}{FA}=\frac{VG}{GB}=\frac{VH}{HC}=\ldots=\frac{VQ}{QP}.$$

2.° Los polígonos ABCDE y FGHIK tienen sus ángulos respectivamente iguales: los ángulos ABC y FGH, por ejemplo, tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, luego son iguales. Lo mismo puede decirse de los demás ángulos.

Además, los lados homólogos de dichos polígonos son proporcionales. En efecto, los triángulos VAB y VFG son semejantes, y tambien lo son los VBC y VGH, luego

$$\frac{AB}{FG}=\frac{VB}{VG};\quad \frac{VB}{VG}=\frac{BC}{GH};$$

de estas igualdades se deduce

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}.$$

Del mismo modo se demuestran las igualdades

$$\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HI}, \quad \frac{CD}{HI}=\frac{DE}{IK} \text{ etc.};$$

luego $$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HI}=\frac{DE}{IK}=\ldots.$$

Vemos, pues, que los polígonos ABCDE y FGHIK tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales, luego son semejantes.

Corolario. *Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base, las áreas de la seccion y de la base son proporcionales á los cuadrados de las distancias de estos polígonos al vértice de la pirámide.*

Tenemos [**214**] $$\frac{ABCDE}{FGHIK}=\frac{AB^2}{FG^2};$$

pero $$\frac{AB}{FG}=\frac{VA}{VF}=\frac{VP}{VQ} \text{ ó } \frac{AB^2}{FG^2}=\frac{VA^2}{VF^2}=\frac{VP^2}{VQ^2};$$

sustituyendo en la primera igualdad la fraccion $\frac{AB^2}{FG^2}$ por $\frac{VP^2}{VQ^2}$ se obtiene

$$\frac{ABCDE}{FGHIK}=\frac{VP^2}{VQ^2}.$$

Teorema II. *(Figs. 207 y 208.)*

352. *Si dos pirámides tienen igual altura* VP=vp, *las secciones* FGHIK, efgh *paralelas á las bases y equidistantes de los respectivos vértices, son proporcionales á las bases.*

Segun el corolario anterior tenemos

$$\frac{ABCDE}{FGHIK}=\frac{VP^2}{VQ^2}, \quad \frac{abcd}{efgh}=\frac{vp^2}{vq^2};$$

pero hemos supuesto VP=vp, VQ=vq, luego

$$\frac{ABCDE}{FGHIK}=\frac{abcd}{efgh}.$$

Escolio. *Si las bases de las dos pirámides son equivalentes, las secciones tambien lo serán;* pues si en la última igualdad fraccionaria se supone ABCDE$=abcd$, será necesariamente FGHIK$=efgh$.

Problema. (*Fig.* 207).

353. *Dado un tronco de pirámide* ADFI *de bases paralelas, hallar las alturas* VP, VQ *de la pirámide total y de la pirámide deficiente.*

Tenemos $$\frac{AB}{FG}=\frac{VA}{VF},\quad \frac{VA}{VF}=\frac{VP}{VQ},$$

luego $$\frac{AB}{FG}=\frac{VP}{VQ};$$

de esta igualdad se deducen otras dos:

$$\frac{AB-FG}{AB}=\frac{VP-VQ}{VP},\quad \frac{AB-FG}{FG}=\frac{VP-VQ}{VQ};$$

sustituyendo VP — VQ por la altura PQ del tronco y despejando VP en la primera igualdad y VQ en la segunda, será

$$VP=\frac{AB\times PQ}{AB-FG},\quad VQ=\frac{FG\times PQ}{AB-FG}.$$

II.—Prismas.

354. Prisma *es un poliedro cuyas caras son dos polígonos iguales y paralelos unidos entre sí por paralelógramos.*

Las caras paralelas se llaman *bases* del prisma; *altura* es la perpendicular comprendida entre las bases.

Un prisma es *triangular, cuadrangular, pentagonal* etc. cuando sus bases son triángulos, cuadriláteros, pentágonos etc.

Las aristas laterales de un prisma son paralelas entre sí é iguales.

En el prisma AI (*Fig.* 209) la arista lateral AF es paralela á BG, ésta es paralela á CH la CH lo es á DI etc., luego todas son paralelas entre sí; además, como están comprendidas entre planos paralelos son iguales.

Prisma recto *es aquel cuyas aristas laterales son per-*

pendiculares á las bases; y prisma OBLÍCUO *es aquel cuyas aristas laterales son oblícuas á las bases.*

En el prisma recto las aristas laterales son iguales á la altura, y las caras laterales son rectangulos.

Pues siendo las aristas perpendiculares á las bases, cualquiera de aquellas puede considerarse como altura del prisma. Además dichas aristas son perpendiculares á los lados de las bases, luego forman con ellos paralelógramos rectángulos.

Prisma REGULAR *es todo prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.*

En el prisma regular las caras laterales son rectángulos iguales.

PRISMA TRONCADO *ó* TRONCO DE PRISMA *es la parte de prisma comprendida entre una base y un plano no paralelo á ella que corte á todas las aristas laterales.*

TEOREMA I. *(Fig.* 209*)*.

355. *Toda seccion* LMNPQ *paralela á las bases de un prisma* AI, *es un polígono igual á dichas bases.*

Siendo el plano LP de la seccion paralelo al de la base AD, las intersecciones de estos planos con cada cara lateral del prisma son paralelas, esto es, los lados LM, MN, NP etc. de la seccion son paralelos á los lados AB, BC, CD etc. de la base; tambien las aristas laterales son paralelas entre sí, por tanto será LM = AB, MN = BC, NP = CD etc. Como además los ángulos de la seccion son iguales á los de la base, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, los polígonos LMNPQ y ABCDE son iguales [**116**].

356. PARALELEPÍPEDO *es un prisma cuyas bases son paralelógramos.*

TEOREMA II. *(Fig.* 210*)*.

Las caras laterales opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas.

Sea el paralelepípedo AG. Las caras opuestas AH y BG tienen AE y AD paralelas respectivamente á BF y BC, luego el plano AH es paralelo al BG y los ángulos EAD y FBC son iguales; como además es AE=BF, AD=BC, los paralelógramos AH y BG son iguales [103]. El mismo razonamiento haríamos para las caras AF y DG.

COROLARIOS.

1.° *Dos caras opuestas cualesquiera de un paralelepípedo pueden considerarse como bases del mismo.*

2.° *Cortando un paralelepípedo por un plano que encuentre á cuatro aristas paralelas, la seccion* MNPQ *es un paralelógramo.*

Pues los lados opuestos de la seccion son paralelos dos á dos, como intersecciones de planos paralelos con un tercer plano.

357. *Paralelepípedo* RECTÁNGULO *es todo paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulos.*

Las caras de un paralelepípedo rectángulo son rectángulos, y los ángulos diedros son rectos.

CUBO *es un paralelepípedo cuyas caras son cuadrados.*

El cubo es evidentemente un paralelepípedo rectángulo, y todas sus aristas deben ser iguales.

TEOREMA III. *(Fig. 211.)*

358. *En todo paralelepípedo rectángulo* AG, *el cuadrado de una diagonal* HB *es igual á la suma de los cuadrados de tres aristas* DC, DA, DH *que formen un ángulo triedro.*

Trazando la diagonal DB de la base se forma un triángulo HDB, que es rectángulo en D, porque siendo la arista HD perpendicular á la base ABCD es perpendicular á DB. Tendremos, pues,

$$HB^2 = DB^2 + DH^2\,;$$

pero DB es la hipotenusa del triángulo rectángulo DAB, luego $DB^2 = AB^2 + DA^2$;

de estas igualdades se deduce

$$HB^2 = AB^2 + DA^2 + DH^2\,;$$

sustituyendo AB por su igual DC será por último,

$$HB^2 = DC^2 + DA^2 + DH^2\,.$$

CAPÍTULO SEGUNDO.

IGUALDAD DE LOS POLIEDROS.

359. Es evidente que si todos los vértices de dos poliedros coinciden, coincidirán las aristas y las caras; por consiguiente los poliedros serán iguales.

TEORÉMA I. *(Fig. 212.)*

360. *Dos tetraedros* ABCD, EFGH *son iguales cuando tienen una cara igual* ABD = EFH *adyacente á tres ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos* AB = EF, AD = EH, BD = FH.

Imaginemos colocado el tetraedro E sobre el A, de modo que la cara EFH conocida con la ABD y que el vértice G caiga hácia el mismo lado del plano ABD que el vértice C: el plano EFG coincidirá con el ABC, por ser iguales les diedros EF y AB, y los planos EGH y FGH coincidirán, por análoga razon, con los ACD y BCD; luego el punto G coincidirá con el C, y los tetraedros serán iguales.

TEOREMA II. *(Fig. 212).*

361. *Dos tetraedros son iguales cuando tienen dos caras iguales é igualmente dispuestas,* ABC = EFG, ABD = EFH, *é igual el ángulo diedro comprendido* AB = EF.

Coloco el tetraedro E sobre el A, de modo que la cara EFH coincida con ABD y que los vértices G y C caigan hácia el mismo lado del plano ABD; el plano EFG coincidirá con el ABC, por ser iguales los diedros EF y AB, y el punto G caerá en C, por ser iguales las caras EFG y ABC: luego coinciden los cuatro vértices de los tetraedros, y por tanto son éstos iguales.

TEOREMA III. *(Fig. 212).*

362. *Dos tetraedros son iguales cuando tienen tres caras respectivamente iguales* ABD = EFH, ABC = EFG, ACD = EGH, *é igualmente dispuestas,* Los ángulos tiedros A y E son iguales [**294**], luego puede colocarse el tetraedro E sobre el A, de modo que el vértice E coincida con A y que las aristas EF, EG, EH sigan las direcciones respectivas AB, AC, AD; como además las aristas primeras son iguales á las segundas, por pertenecer á triángulos iguales, los puntos F, G, H caerán en B, C y D; luego los tetraedros son iguales.

Teorema IV.

363. *Dos pirámides son iguales cuando tienen tres caras, que concurren en un vértice cualquiera de la base, iguales respectivamente é igualmente dispuestas.*

Observaremos ante todo que los ángulos tiedros formados por las caras iguales tienen sus ángulos planos respectivamente iguales é igualmente dispuestos, luego son iguales [**294**].

Ahora bien, colocando una de las pirámides sobre la otra de modo que sus bases, iguales por hipótesis, coincidan, dos aristas laterales coincidirán necesariamente, porque las pirámides tienen un ángulo tiedro de la base igual; además éstas aristas laterales son iguales, como pertenecientes á triángulos laterales iguales, por consiguiente deben coincidir las cúspides de las pirámides, luego éstas serán iguales.

Teorema V. *(Fig. 213).*

364. *Dos prismas son iguales cuando tienen tres caras, que concurren en un vértice cualquiera, iguales respectivamente é igualmente dispuestas.*

Sean los prismas AI, LT; suponemos ABCDE = LMNOP, AG = LR, BH = MS, y que las caras iguales están igualmente dispuestas.

Colocando el prisma LT sobre el AI de modo que las bases inferiores coincidan, la arista MR coincidirá con BG, porque los tiedros B y M son iguales [**294**]; y las caras MS, MQ coincidirán con sus iguales BH, BF; luego las bases superiores tendrán tres puntos comunes F, G, H y sus planos coincidirán; como además dichas bases son iguales, los vértices T, U coincidirán tambien con I, K; por consiguiente los prismas serán iguales.

Teorema VI.

365. *Dos prismas rectos de igual base y altura son iguales.*

Haciendo coincidir las bases inferiores de los prismas, todas las aristas laterales del primero coincidirán con las del segundo, porque cada dos de ellas son perpendiculares al plano comun por el mismo punto; además coincidirán los extremos superiores de las aristas, pues siendo todas iguales á las alturas de los prismas, son iguales entre sí; luego los prismas serán iguales.

366. Si desde un punto interior á un poliedro se dirigen á todas las aristas del mismo planos que terminen en sus intersecciones mútuas, los que pasen por los lados de una misma cara formarán con ésta una pirámide, por consiguiente quedará descompuesto el poliedro en tantas pirámides como caras tenga. Las bases de estas pirámides serán las caras del poliedro, y el vértice comun á todas ellas será el punto interior.

Dividiendo la base de cada pirámide en triángulos por medio de diagonales, y haciendo pasar planos por el vértice de la pirámide y por las diagonales de la base, quedará cada pirámide dividida en tetraedros; por consiguiente el poliedro tambien se habrá descompuesto en tetraedros; luego

Todo poliedro puede descomponerse en tetraedros.

Dirigiendo planos desde un vértice A del poliedro á las aristas de las caras no adyacentes á dicho vértice, los planos que pasan por los lados de una misma cara formarán con ésta una pirámide, por consiguiente quedará descompuesto el poliedro en tantas pirámides como caras, no adyacentes al vértice A, tenga. Las bases de estas pirámides serán las mencionadas caras y el vértice comun será el punto A.

Descomponiendo cada pirámide en tetraedros del modo indicado arriba, el poliedro quedará igualmente descompuesto en tetraedros.

Teorema VII.

367. *Dos poliedros son iguales cuando están compuestos de igual número de tetraedros respectivamante iguales é igualmente dispuestos.*

Imaginemos que uno de los poliedros se coloque sobre el otro de modo que dos tetraedros iguales coincidan; otros dos tetraedros adyacentes á los primeros tendrán una cara comun, y como son iguales y están dispuestos igualmente coincidirán tambien, y así todos los demás; luego los poliedros son iguales.

CAPÍTULO TERCERO.

SEMEJANZA DE LOS POLIEDROS.

368. *Dos poliedros son* SEMEJANTES *cuando sus ángulos diedros, colocados en el mismo órden, son iguales, y las caras adyacentes á diedros iguales son semejantes.*

Se llaman *aristas homólogas* las que pertenecen á dos diedros iguales.

Caras homólogas son las limitadas por aristas homólogas.

Vértices homólogos son los extremos de aristas homólogas.

Las aristas homólogas de dos poliedros semejantes, son proporcionales; porque si la razon de semejanza de dos caras homólogas cualesquiera es m, la razon de otras dos adyacentes á las primeras será tambien m, puesto que dos caras adyacentes tienen una arista comun, y así todas las demás; luego la razon de dos aristas homólogas es constante.

Teorema I. *(Fig. 214).*

369. *Si en un tetraedro* ABCD *se traza un plano paralelo á una cara* BCD, *el tetraedro parcial* AEFG *que resulta es semejante al propuesto.*

Los ángulos diedros AE, AF, AG del tetraedro parcial son los mismos que los AB, AC, AD del propuesto.

Los diedros AEFG y ABCD son iguales por correspondientes [**279**]; por la misma razon son tambien iguales los demás diedros de las bases; luego los dos tetraedros tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales.

Las caras EFG y BCD son semejantes [**351**, 2.°]; el triángulo AEF es semejante al ABC, por ser EF paralela á BC, y las demás caras laterales son tambien semejantes por análoga razon; luego las caras homólogas de los tetraedros son semejantes, y el teorema queda demostrado.

TEOREMA II. *(Fig. 214).*

379. *Dos tetraedros son semejantes: 1.° cuando tienen una cara semejante adyacente á tres ángulos diedros respectivamente iguales; 2.° cuando tienen dos caras respectivamente semejantes é igual el ángulo diedro comprendido; 3.° cuando tienen tres caras respectivamente semejantes; siempre que en todos estos casos los elementos estén semejantemente dispuestos.*

1.° Sean los tetraedros ABCD y *abcd*. Suponemos que las caras ABD y *abd* son semejantes, y que los diedros AB, AD, BD adyacentes á la primera, son iguales á los *ab*, *ad*, *bd* adyacentes á la segunda.

Tomo sobre la arista AB una parte AE igual á la arista *ab*, y trazo por el punto E un plano paralelo al BCD. El tetraedro AEFG será semejante al ABCD, segun el teorema anterior. Los tetraedros AEFG y *abcd* tienen iguales las caras AEG y *abd*, pues el lado AE=*ab* por construccion, el ángulo EAG=*bad* por pertenecer á los triángulos semejantes ABD y *abd*, y el ángulo AEG=ABD=*abd*; además dichos tetraedros tienen los diedros AE=AB=*ab*, AG=AD=*ad*, AEGF=ABDC=*abdc*: luego los tetraedros son iguales [360], y como el AEFG es semejante al ABCD, su igual *abcd* tambien es semejante al ABCD.

2.° Supongamos que las caras ABC, ABD sean semejantes á *abc*, *abd* y que el diedro AB sea igual al *ab*.

Haciendo la misma construccion que en el caso anterior se vé facilmente que los tetraedros AEFG y *abcd* son iguales, por tener dos caras iguales AEF=*abc*, AEG=*abd* é igual el ángulo diedro comprendido, y como el tetraedro AEFG es semejante al ABCD, tambien lo será su igual *abcd*.

3.° Supongamos que las caras ABC, ABD, ACD sean semejantes á las *abc*, *abd*, *acd*.

Haciendo la misma construccion que en los casos anteriores se verá fácilmente que los triángulos AEF, AEG son iguales á los *abc* y *abd*, de donde se deduce AF=*ac*, AG=*ad*; como además el ángulo FAG=*cad*, el triángulo AFG es tambien igual al *acd*; luego los tetraedros AEFG y *abcd* son iguales [362], y como el primero es semejante al ABCD, tambien lo será el segundo.

TEOREMA III.

371. *Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base, la pirámide parcial que resulta es semejante á la propuesta.*

Demuéstrase este teorema como el del número **369**, que es un caso particular del actual, puesto que el tetraedro no es mas que una pirámide triangular.

COROLARIOS.

1.° *Las bases de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus alturas.*

Tomemos en la arista VA *(Fig.* 207) de la pirámide mayor una parte VF igual á la arista homóloga de VA en la pirámide menor, y tracemos por F una seccion paralela á la base ABCDE. La pirámide deficiente es semejante á la pirámide mayor, luego será tambien semejante á la menor; pero la pirámide deficiente y la menor tienen una arista homóloga igual, luego la razon de semejanza es 1, y dichas pirámides son iguales. Ahora bien, las bases de las pirámides total y deficiente son proporcionales á los cuadrados de sus alturas [**351, cor.**]; luego sucederá lo mismo á las pirámides propuestas.

2.° *Las alturas de dos pirámides semejantes son proporcionales á las aristas homólogas.*

Pues los triángulos semejantes VAP y VFQ dan.

$$\frac{VP}{VQ}=\frac{VA}{VF}.$$

TEOREMA IV. *(Fig.* 215).

372. *Dos poliedros* ABCDEFG, abcdefg *compuestos de igual número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

Suponemos semejantes los tetraedros ABCD y *abcd*, ACDE y *acde*, ADEF y *adef*, AEFG y *aefg*, y queremos demostrar la semejanza de los poliedros propuestos.

Entre los ángulos diedros de los poliedros hay algunos que son iguales porque pertenecen á tetraedros semejantes; así CABD=*cabd*, por pertenecer á los tetraedros semejantes ABCD y *abcd*. Otros diedros son iguales por componerse de igual número de diedros pertenecientes á tetraedros semejantes; así BACE=*bace*, porque el primero se compone de los diedros BACD y DACE iguales respectivamente á los *bacd* y *dace* que componen el segundo.

Las caras triangulares de los poliedros, por ejemplo GEF y *gef*, son semejantes, por pertenecer á tetraedros semejantes.

Demostremos ahora que si dos tetraedros consecutivos del primer poliedro tienen dos caras, por ejemplo BCD y CDE, en un mismo plano, las caras *bcd*, *cde* homólogas á éstas en el segundo poliedro estarán tambien en un mismo plano. En efecto, los ángulos diedros adyacentes BCDA y ACDE son iguales respectivamente á los diedros *bcda* y *acde*. si hiciésemos coincidir el diedro *bcda* con su igual BCDA, el *acde* coincidiria necesariamente con ACDE, y como las caras BCD y DCE están en un mismo plano, las *bcd* y *dce* tambien lo estarian.

Segun esto, si las caras BCD, CDE, EDF están en un mismo plano formando un polígono BCEFD, las caras *bcd*, *cde*, *edf*, respectivamente semejantes á las primeras por pertenecer á tetraedros semejantes, formarán otro polígono *bcefd*, que será semejante al BCEFD por estar ambos compuestos de igual número de triángulos semejantes y semejantemente colocados.

Del mismo modo se demuestra la semejanza de las demás caras no triangulares.

Vemos, pues, que los poliedros dados tienen respectivamente iguales los ángulos diedros colocados en el mismo órden, y las caras adyacentes semejantes; luego los poliedros son semejantes.

Teorema recíproco. *Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en igual número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos.*

Siendo los poliedros propuestos semejantes, sus caras homólogas son polígonos semejantes, y sus ángulos diedros colocados en el mismo órden son iguales.

Si por el vértice A y la arista EF hacemos pasar un plano, quedará separado del primer poliedro un tetraedro AEFG, y las caras ACEG y AGFD se habrán dividido en triángulos; haciendo pasar otros planos por A y por las diagonales DC, DE se formarán los tetraedros ABCD, ACDE y ADEF, que con el AEFG, componen el poliedro, y la cara BCEFD estará dividida en triángulos. Haciendo la misma construccion en el segundo poliedro, quedará descompuesto en tantos tetraedros como han resultado descomponiendo el primero, y las caras de aquel quedarán divididas en triángulos; además los triángulos del primer poliedro serán semejantes á los del segundo, por proceder unos y otros de la descomposicion de polígonos semejantes.

Ahora bien, los tetraedros ABCD y *abcd* son semejantes, porque tienen semejantes las caras ABC y *abc*, ABD y *abd* y el ángulo comprendido AB igual al *ab*. Los tetraedros ACDE y *acde* son semejantes, porque tienen semejantes las caras ACD y *acd*, como homólogas de los tetraedros semejantes anteriores; tambien son semejantes las caras CDE y *cde*, y los ángulos comprendidos ACDE y *acde* son iguales, como suplementos de los diedros iguales ACDB y *acdb*.

Del mismo modo se demuestra la semejanza de los demás tetraedros.

CAPÍTULO CUARTO.

POLIEDROS REGULARES.

373. *Se llama* POLIEDRO REGULAR *el poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos diedros son todos iguales.*

TEOREMA.

No pueden existir mas que cinco clases de poliedros regulares.

Para formar un ángulo poliedro se necesitan por lo ménos tres ángulos planos; además la suma de los ángulos planos que han de formar un ángulo poliedro debe ser menor que cuatro ángulos rectos.

Segun esto, con tres ángulos de triángulo equilátero puede formarse un ángulo poliedro, porque valiendo cada ángulo del triángulo $\frac{2}{3}$ R, la suma de los tres sólo vale 2R: el poliedro correspondiente está limitado por cuatro triángulos equiláteros, y se llama *tetraedro regular*.

Con cuatro ángulos de triángulo equilátero tambien puede formarse un ángulo poliedro, porque la suma de ellos $\frac{8}{3}$ R es menor que 4R: el poliedro correspondiente está limitado por ocho triángulos equiláteros iguales, y se llama *octaedro regular*.

Reuniendo cinco ángulos de triángulo equilátero, cuya suma $\frac{10}{3}$ R es menor que 4R, se forma un ángulo poliedro, al que corresponde un poliedro regular terminado por veinte caras triangulares, que se llama *icosaedro regular*.

Seis ángulos de triángulo equilátero valen $\frac{12}{3}$ $R = 4R$, luego con ellos no puede formarse un ángulo poliedro.

Con tres ángulos de cuadrado, que valen 3R, puede formarse ángulo poliedro: el poliedro correspondiente es el *exaedro regular* ó *cubo*, y está limitado por seis cuadrados iguales.

Es evidente que cuatro ángulos de cuadrado no pueden formar ángulo poliedro, pues la suma de ellos es 4R.

Con tres ángulos de pentágono regular puede formarse un ángulo poliedro, porque valiendo cada ángulo del pentágono $\frac{6}{5}$ R, la suma de los tres vale $\frac{18}{5}$ $R < 4R$: el poliedro regular coreespondiente está limitado por doce polígonos regulares iguales, y se llama *dodecaedro regular*.

Cuatro ángulos de pentágono regular valen $\frac{24}{5}$ $R > 4R$, luego con ellos no puede formarse ángulo poliedro.

Tres ángulos de exágono regular valen $\frac{12}{3}$ $R = 4R$, por consiguiente no pueden formar ángulo poliedro.

Valiendo $2R - \frac{4R}{n}$ cada ángulo de un polígono regular de n lados, es evidente que si n aumenta, el valor de cada ángulo aumenta tambien: como tres ángulos de exágono regular valen 4R, tres de eptágono, octógono etc. valdrán más, y será imposible formar con ellos un ángulo poliedro.

Luego no pueden existir más poliedros regulares que el tetraedro, octaedro, icosaedro, exaedro y dodecaedro.

CAPÍTULO QUINTO.

POLIEDROS INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRITOS.

374. Una pirámide está *inscripta* en un cono cuando el vértice de la pirámide y el del cono coinciden, y la base de la pirámide está inscripta en la del cono. En tal caso, el cono está *circunscrito* á la pirámide.

Una pirámide está *circunscrita* á un cono cuando el vértice de la pirámide y el del cono coinciden, y la base de la pirámide está circunscrita á la del cono. Entonces el cono está *inscripto* en la pirámide.

Un prisma está *inscripto* en un cilindro cuando las dos bases del prisma están inscriptas en las del cilindro. En tal caso el cilindro está *circunscrito* al prisma.

Un prisma está *circunscrito* á un cilindro cuando las dos bases del prisma están circunscritas á las del cilindro. Entonces el cilindro está *inscripto* en el prisma.

Un poliedro está *inscripto* en una esfera cuando todos los vértices del poliedro están en la superficie esférica. La esfera en tal caso está *circunscrita* al poliedro.

Un poliedro está *circunscrito* á una esfera cuando todas las caras del poliedro son tangentes á la superficie esférica. La esfera entonces está *inscripta* en el poliedro.

TEOREMA. *(Fig. 216).*

375. *Á todo poliedro regular puede inscribirse y circunscribirse una esfera.*

Representemos por ABD y DBCE dos caras adyacentes del poliedro regular dado. Levantando por los centros M y N de estas caras dos perpendiculares á los planos de las mismas, estas perpendiculares se encontrarán en un punto O, centro de la esfera que pasa por los cuatro puntos A, B, C y D [**323**].

Demostremos ahora que uniendo el punto O con los centros de todas las caras del poliedro, las rectas de union son perpendiculares á estas caras é iguales entre sí.

Unamos el punto O con el centro P de una cara ECF contigua á una de las primeras; bajemos desde M y N dos perpendiculares á la arista BD, á la que cortarán en un mismo punto Q; y desde N y P otras dos á la arista CE, que tambien concurren en un punto R. Las perpendiculares OM y ON son iguales, porque suponiendo trazada una recta OQ se formarian dos triángulos rectángulos OMQ y ONQ iguales, por tener comun la hipotenusa OQ é iguales los catetos MQ y NQ como apotemas de polígonos iguales. Si hacemos girar el cuadrilátero plano [323] OMQN alrededor de ON hasta que caiga sobre el ONRP, el punto M coincidirá con el P; porque *áng.* ONQ=*áng.* ONR por ser rectos, NQ=NR como apotemas del mismo polígono, *áng.* MQN=*áng.* NRP como rectilíneos correspondientes á los diedros iguales BD y CE, y QM=RP como apotemas de polígonos iguales; luego OM y OP tendrán los mismos extremos y coincidirán; por tanto OP=OM.

La misma superposicion demuestra además que *áng.* OPR=*áng.* OMQ, luego el ángulo OPR es recto, y como los planos ECF y ONRP son perpendiculares entre sí, puesto que el primero pasa por la perpendicular CE al segundo, la recta OP será perpendicular al plano ECF [281].

El mismo razonamiento podria ahora aplicarse á otra cara contigua á cualquiera de las tres que hemos considerado, y así á todas las demás, luego las rectas que unen el punto O con los centros de las caras son perpendiculares á éstas é iguales entre sí; por consiguiente la esfera descrita desde O como centro con un radio igual á cualquiera de las perpendiculares, será tangente á todas las caras del poliedro [332], esto es, quedará inscripta en el mismo.

Además, el punto O equidista de todos los vértices del poliedro [242, 1.º]; luego la superficie esférica descrita desde O como centro con un radio igual á cualquiera de las distancias, pasará por todos los vértices del poliedro, quedando la esfera circunscrita al mismo.

Corolario. *Todo poliedro regular puede descomponerse en tantas pirámides regulares é iguales como caras tenga.*

Basta, en efecto, hacer pasar planos por el centro de las esferas inscripta y circunscrita y por cada una de las aristas.

376. *Centro* de un poliedro regular es el centro comun á las esferas inscripta y circunscrita.

Radio del poliedro es el radio de la esfera circunscrita; y *apotema* es el radio de la esfera inscripta, ó bien la perpendicular tirada desde el centro á cualquiera de las caras.

LIBRO OCTAVO.

ÁREAS DE LAS SUPERFICIES DE LOS CUERPOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

MEDIDA DE LAS ÁREAS.

I.—Áreas de los poliedros.

377. En general el área de la superficie de un poliedro se obtiene midiendo el área de cada cara y sumando estas áreas parciales. Existen. sin embargo, algunos poliedros cuyas áreas se determinan más fácilmente.

TEOREMA I.

378. *El área de la superficie lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto del perímetro de su base por la apotema de la pirámide.*

Sea b la base y a la altura de uno de los triángulos laterales, ó sea la apotema de la pirámide. El área de cada triángulo será $\frac{ba}{2}$; si la base de la pirámide tiene n lados, habrá n triángulos laterales, y como son iguales, el área de todos, esto es, el área lateral de la pirámide será

$$\frac{ba}{2} \times n = \frac{bn \times a}{2};$$

pero bn es el perímetro de la base, luego el teorema es cierto.

TEOREMA II.

379. *El área de la superficie lateral de una pirámide regular troncada de bases paralelas es igual á la semisuma de los perímetros de las bases, multiplicada por la altura de uno de los trapecios laterales.*

Sean B y b las bases, a la altura de uno de los trapecios laterales. El área de cada trapecio será $\frac{(B+b)\times a}{2}$; si cada base del tronco tiene n lados, habrá n trapecios laterales, y como son evidentemente iguales, el área de todos, esto es, el área lateral del tronco será

$$\frac{(B+b)\times a}{2}\times n=\frac{Bn+bn}{2}\times a;$$

pero Bn y bn son los perímetros de las bases, luego el teorema es cierto.

TEOREMA III. (*Fig.* 217).

380. *El área de la superficie lateral de un prisma cualquiera* AI *es igual al producto de una de sus aristas laterales, por el perímetro de su seccion recta* LMNPQ.

Llamamos *seccion recta* á la que resulta de cortar el prisma por un plano perpendicular á las aristas laterales.

Considerando como bases de los paralelógramos laterales las aristas AF, BG etc., las alturas serán los lados LM, MN etc. de la seccion recta, porque siendo las aristas perpendiculares al plano LMNPQ son tambien perpendiculares á las rectas LM, MN etc. que pasan por su pié en dicho plano; luego llamando a á cualquiera de las aristas laterales, las áreas de los paralelógramos serán

$$a\times \mathrm{LM},\quad a\times \mathrm{MN},\quad a\times \mathrm{NP} \text{ etc.};$$

por consiguiente la suma de todas, ó sea, el área lateral del prisma será

$$a(\mathrm{LM}+\mathrm{MN}+\mathrm{NP}+\ldots.),$$

lo cual debia demostrarse.

COROLARIO. *El área de la superficie lateral de un prisma recto es igual al producto de su altura por el perímetro de su base.*

Acabamos de ver que el área de un prisma cualquiera es el producto de su arista lateral por el perímetro de la seccion recta, y como en un prisma recto la arista lateral es igual á la altura y la seccion recta es igual á las bases, el corolario es cierto.

II.—Áreas de los cuerpos de revolucion.

TEOREMA I.

381. *El área de la superficie lateral de un cono circular recto es igual á la mitad del producto de la circunferencia de su base por la generatriz ó lado.*

Sea c la circunferencia de la base del cono y l el lado de éste. Inscribiendo en la base del cono un polígono regular, y haciendo pasar planos por los lados de este polígono y por el vértice del cono, resultará una pirámide regular inscripta. Duplicando indefinidamente el número de lados de su base, se obtendrá una série de pirámides regulares incriptas en el cono; las bases de estas pirámides tienen por límite la base del cono, por consiguiente las superficies laterales de las pirámides tendrán por límite la superficie cónica, y el límite de las apotemas será la generatriz ó lado del cono. Ahora bien, el área de la superficie lateral de una pirámide regular es $\frac{pa}{2}$, siendo p el perímetro de la base y a la apotema de la pirámide; luego, sustituyendo los variables p y a por sus límites respectivos c y l, el área de la superficie lateral del cono será $\frac{cl}{2}$.

Si r es el radío de la base del cono y A el área lateral, tendremos la fórmula

$$A = \pi r l.$$

TEOREMA II.

382. *El área de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto de bases paralelas, es igual á la semisuma de las circunferencias de las bases multiplicada por el lado del tronco.*

Sean C y c las circunferencias de las bases y l el lado del tronco de cono. Imaginemos que en el cono total se inscriba una pirámide regular: la base menor del tronco cortará á la pirámide originando un tronco de pirámide regular de bases paralelas inscriptas en las del tronco de cono. Duplicando indefinidamente el número de lados de la base de la pirámide total, se obtendrá una série de troncos de pirámide inscriptos en el tronco de cono; las dos bases de estos troncos de pirámide tienen por límites las correspondientes bases del tronco de cono, por consiguiente las superficies laterales de los troncos de pirámide tendrán por límite la superficie lateral del tronco de cono, y el límite de las alturas de los trapecios laterales será el lado del tronco de cono. Ahora bien, el área del tronco de pirámide es $\frac{P+p}{2}\times a$, llamando P y p á los perímetros de las bases y a á la altura de los trapecios laterales; luego, sustituyendo las variables P, p y a por sus límites respectivos C, c y l, el área de la superficie lateral del tronco de cono será $\frac{C+c}{2}\times l$.

Si R y r son los radios de las bases del tronco y A el área lateral, tendremos la fórmula

$$A=(\pi R+\pi r)\times l, \text{ ó } A=(R+r)\times\pi l.$$

Escolio. Si por el punto medio O″ de la altura OO′ del tronco ABCD (*Fig.* 213) se traza una seccion paralela á las bases, el radio O″E de esta seccion une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio AOO′C [**261**], luego llamando R′ á dicho radio, será $R'=\frac{R+r}{2}$, de donde $2R'=R+r$, por consiguiente la expresion del área obtenida anteriormente será

$$A=2\pi R'\times l.$$

Luego *el área de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto, es igual al producto de su lado por la circunferencia de una seccion paralela á las bases y equidistante de ellas.*

Teorema III.

383. *El área de la superficie lateral de un cilindro circular recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su lado.*

Sea c la circunferencia de una base y l el lado del cilindro. Inscribiendo en éste una série de prismas regulares cuyo número de caras laterales se duplique indefinidamente, es fácil ver que la superficie lateral del cilindro es el límite de las superficies laterales de los prismas; además la altura de éstos es igual al lado del cilindro.

Ahora, el área lateral de un prisma recto es pa, llamando p al perímetro de la base y a á la altura, luego la del cilindro será cl.

Si r es el radio de la base y A el área lateral será

$$A=2\pi rl.$$

TEOREMA IV. (*Fig.* 219).

381. *El área de la superficie engendrada por la base de un triángulo isósceles que gira alrededor de una recta exterior á él trazada por su vértice en su plano, es igual á la circunferencia cuyo radio es la altura del triángulo multiplicada por la proyeccion de la base sobre el eje.*

Distinguiremos tres casos: 1.° que la base tenga uno de sus extremos en el eje de revolucion; 2.° que la base no tenga ningun punto en el eje ni sea paralela á él; 3.° que la base sea paralela al eje.

1.° La base AB (*Fig.* 1) del triángulo isósceles ABC, al girar alrededor del eje XY, engendra la superficie lateral de un cono circular recto, luego el área de esta superficie será

$$\pi AE \times AB = 2\pi AE \times BD \qquad [1];$$

siendo semejantes los triángulos AEB y CDB, tenemos

$$\frac{AE}{CD} = \frac{EB}{BD}, \text{ de donde } AE \times BD = CD \times EB;$$

sustituyendo en la expresion [1] del área que nos ocupa el producto $AE \times BD$ por su igual $CD \times EB$, se obtiene para expresion de dicha área $2\pi CD \times EB$, lo que está conforme con el enunciado del teorema.

2.° La base AB (*Fig.* 2) del triángulo isósceles ABC, al girar alrededor del eje XY, engendra la superficie lateral de un tronco de cono de bases paralelas, luego el área de esta superficie será [**372, escolio**]

$$2\pi DG \times AB \qquad [2];$$

siendo semejantes los triángulos CDG y ABI, tenemos

$$\frac{DG}{BI} = \frac{CD}{AB}, \text{ de donde } DG \times AB = CD \times BI;$$

sustituyendo en la expresion [2] el producto $DG \times AB$ por su igual $CD \times BI$, se obtiene para expresion del área engendrada por AB

$$2\pi CD \times BI, \text{ ó bien } 2\pi CD \times EF,$$

lo que está conforme con el enunciado del teorema.

3.° La base AB (*Fig.* 3) del triángulo ABC engendra la superficie lateral de un cilindro circular recto, luego el área de esta superficie será

$$2\pi AE \times AB;$$

sustituyendo AE por CD y AB por EF, la expresion del área que nos ocupa será

$$2\pi CD \times EF,$$

conforme con el enunciado del teorema.

385. ZONA ESFÉRICA *es la parte de superficie esférica engendrada por un arco del semicírculo generador de la esfera.*

Los extremos del arco engendran circunferencias, que se llaman *bases* de la zona. *Altura* es la proyeccion del arco generador de la zona sobre el eje.

Si uno de los extremos de este arco está en el eje, la zona tiene una sola base, y en tal caso se llama tambien *casquete esférico.*

La superficie ABD (*Fig.* 220), engendrada por el arco AB, es una zona, cuya única base es la circunferencia C, y la altura AC. La superficie BEFD, engendrada por el arco BE, es una zona, cuyas bases son las circunferencias C y C′, y la altura CC′.

TEOREMA V. (*Fig.* 221).

386. *El área de una zona es igual á su altura multiplicada por una circunferencia de círculo máximo.*

Consideremos la zona engendrada por el arco AF que gira alrededor del diámetro AG.

Dividiendo el arco generador en varias partes iguales, las cuerdas AB, BC, CD etc. de estas partes serán bases de los triángulos isósceles ABO, BCO, CDO etc., que tienen todos igual altura [**45**, 1.º]. Representando ésta por a, las áreas de las superficies engendradas por las cuerdas AB, BC, CD etc. serán respectivamente

$$2\pi a \times AH,\quad 2\pi a \times HI,\quad 2\pi a \times IL \quad \text{etc.};$$

luego el área de la superficie engendrada por la línea quebrada ABCDEF será

$$2\pi a\,(AH + HI + IL\,...) = 2\pi a \times AN.$$

Ahora bien, si las partes en que se ha dividido el arco generador son cada vez menores, el límite de la línea quebrada ABCDEF es el arco AF, luego el límite de la superficie engendrada por dicha línea quebrada será la zona engendrada por el arco AF; además el límite de la apotema a es el radio R del círculo generador, por consiguiente el área Z de la zona será

$$Z = 2\pi R \times AN.$$

Aplicando el mismo razonamiento á la zona de dos bases engendrada por el arco BF, obtendríamos igual resultado.

TEOREMA VI. *(Fig. 221).*

387. *El área de la superficie de una esfera es igual al producto de su diámetro por una circunferencia máxima.*

La superficie esférica engendrada por la semicircunferencia ADG, puede considerarse compuesta de dos zonas engendradas respectivamente por los arcos AD y DG, que componen la semicircunferencia. Las áreas de estas zonas son

$$2\pi R \times AL, \quad 2\pi R \times LG,$$

luego el área de la superficie esférica es

$$2\pi R\,(AL + LG) = 2\pi R \times AG.$$

Llamando A al área de la esfera, será

$$A = 2\pi R \times 2R \quad \text{ó} \quad A = 4\pi R^2.$$

COROLARIOS.

1.° *El área de una superficie esférica es el cuádruplo del área de su círculo máximo.*

Puesto que el área del círculo máximo es πR^2.

2.° *El área de una superficie esférica es igual al área lateral del cilindro circunscrito.*

La base del cilindro circunscrito tiene el mismo radio R de la esfera, y la altura del cilindro es el diámetro 2R; luego el área lateral será $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$.

388. HUSO ESFÉRICO *es la parte de superficie esférica* BADC (Fig. 199) *limitada por dos semicircunferencias máximas.*

Es evidente que dos circunferencias máximas perpendiculares entre sí, dividen la superficie esférica en cuatro husos iguales. Estos usos se llaman *rectos.*

Dos husos de una misma esfera son iguales cuando sus ángulos esféricos son iguales; pues haciendo coincidir los ángulos esféricos, coincidirán dos á dos las circunferencias máximas que limitan los husos, y éstos serán por tanto iguales.

TEOREMA VII. (*Fig.* 199.)

389. *El área de un huso esférico es igual al producto del área de un círculo máximo por el ángulo del huso, siempre que la unidad para medir éste sea el ángulo recto.*

Siguiendo el método empleado en el número **57**, es fácil demostrar que la relacion entre el huso ABCD y la superficie total de la esfera, es igual á la relacion entre el ángulo esférico ABC y cuatro ángulos esféricos rectos; tenemos, pues, llamando H al área del huso y E á la de la esfera,

$$\frac{H}{E} = \frac{ABC}{4\ rectos}, \quad ó \quad \frac{H}{4\pi R^2} = \frac{ABC}{4\ rectos};$$

dividiendo por 4 los denominadores, será

$$\frac{H}{\pi R^2} = \frac{ABC}{1\ recto};$$

tomando el ángulo recto como unidad de ángulos y despejando H, será

$$H = \pi R^2 \times ABC.$$

ESCOLIO. Téngase en cuenta que ABC representa la relacion abstracta entre el ángulo del huso y un ángulo recto.

COROLARIO. *Si se elige para unidad superficial el huso esférico recto y el ángulo recto para unidad de ángulos, el área de un huso está expresada por su ángulo esférico.*

Pues siendo πR^2 la cuarta parte de la superficie esférica, ó sea el área del huso esférico recto, es la unidad de superficie, luego

$$H = ABC.$$

TEOREMA VIII. (*Fig.* 222).

390. *Dos triángulos esféricos simétricos* ABC *y* DEF *son equivalentes.*

Suponemos que los triángulos propuestos tienen los lados

$$AB = ED, \quad AC = DF, \quad BC = EF,$$

y los ángulos $\quad A = D, \ B = E, \ C = F.$

Sea P uno de los polos de la circunferencia menor que pasa por los vértices A, B y C; uno el polo P con estos vértices por medio de arcos de círculo máximo PA, PB, PC: estos arcos serán iguales, por serlo sus cuerdas [**330**]. Por el vértice F del triángulo DEF hago pasar un arco de círculo máximo FQ, que forme con FD un ángulo DFQ = ACP, tomo FQ = CP, y uno el punto Q con los vértices D y E.

Los triángulos ACP y DFQ tienen AC = DF por hipótesis, CP = FQ, *ang*. ACP = *ang*. DFQ por construcción; como además el triángulo ACP es isósceles, dichos triángulos son iguales [**342**]. Los triángulos BCP y EFQ tienen BC = EF por hipótesis, CP = FQ por construcción, y *ang*. BCP = *ang*. EFQ por ser sumas de ángulos iguales; como además el triángulo BCP es isósceles, dichos triángulos son iguales. Los triángulos ABP y DEQ tienen BA = ED por hipótesis, BP = EQ como lados de los triángulos iguales BCP y EFQ, *ang*. ABP = *ang*. DEQ por ser diferencias de ángulos iguales; como además el triángulo ABP es isósceles, los triángulos ABP y DEQ son iguales.

Tendremos, pues,

$$BCP + ABP - ACP = EFQ + DEQ - DFQ$$

ó

$$ABC = DEF.$$

TEOREMA IX. (*Fig.* 223).

391. *El área de un triángulo esférico ABC es igual á la de un círculo máximo, multiplicada por la semisuma de los tres ángulos del triángulo disminuida en una unidad, siempre que la unidad de ángulos sea el ángulo recto.*

Llamemos A, B y C á los tres ángulos del triángulo propuesto ABC. Prolongando los lados de este triángulo se observa que el huso esférico ABDC se compone del triángulo propuesto y del BDC, el huso BAEC se compone del triángulo propuesto y del AEC, y el huso CAFB se compone del triángulo propuesto y del AFB; pero el triángulo AFB y el DCE son simétricos por corresponder á los tiedros simétricos OAFB y ODCE, luego son equivalentes, por consiguiente podemos decir que el huso CAFB equivale á la suma del triángulo propuesto y del DCE. Tendremos pues [**389**]

$$ABC + BDC = \pi R^2 \times A$$

$$ABC + AEC = \pi R^2 \times B$$

$$ABC + DCE = \pi R^2 \times C,$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y observando que la suma $ABC + BDC + AEC + DCE$ equivale á la mitad de la superficie esférica, por cuya razon vale $2\pi R^2$, será

$$2ABC + 2\pi R^2 = \pi R^2 (A + B + C),$$

de donde $$2ABC = \pi R^2 (A + B + C - 2),$$

y $$ABC = \pi R^2 \left(\frac{A + B + C}{2} - 1\right),$$

igualdad que demuestra el teorema.

Escolio. La expresion obtenida puede escribirse en esta forma:

$$ABC = \frac{\pi R^2}{2} (A + B + C - 2).$$

Como $\frac{\pi R^2}{2}$ es el área de un triángulo esférico trirectángulo, pues es evidente que la superficie total de la esfera se compone de ocho de estos triángulos, si suponemos dicha área igual á la unidad, podremos decir: *Eligiendo para unidad superficial el triángulo esférico trirectángulo, el área de un triángulo esférico es igual al exceso de la suma de sus tres ángulos sobre dos rectos.*

CAPÍTULO SEGUNDO.

COMPARACION DE LAS ÁREAS.

Teorema I.

392. *Las áreas de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Dos caras semejantes cualesquiera, una de cada poliedro, son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, y estos lados son aristas de los poliedros; pero la razon de dos aristas homólogas, y por tanto la de sus cuadrados, es constante, luego tambien lo será la razon de dos caras semejantes cualesquiera. Esto supuesto, sean C, C', C''.... las caras del primer poliedro y c, c', c''.... sus homólogas en el segundo; sean A y a dos aristas homólogas cualesquiera. Tenemos

$$\frac{C}{c} = \frac{C'}{c'} = \frac{C''}{c''} = \ldots = \frac{A^2}{a^2},$$

de donde [**Arit. 200**]

$$\frac{C + C' + C'' + \ldots}{c + c' + c'' + \ldots} = \frac{A^2}{a^2},$$

igualdad que demuestra el teorema.

393. Dos conos circulares rectos se llaman *semejantes* cuando sus triángulos generadores son semejantes.

Es claro que los radios de las bases, los lados y las alturas son proporcionales.

TEOREMA II.

Las áreas laterales de dos conos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases, ó á los de sus lados, ó á los de sus alturas.

Sean R, L, A el radio, lado y altura del primer cono, y r, l, a los del segundo. La razon de sus áreas laterales es

$$\frac{\pi RL}{\pi rl} = \frac{R}{r} \times \frac{L}{l};$$

pero $\frac{R}{r} = \frac{L}{l}$, luego sustituyendo $\frac{L}{l}$ por ser igual $\frac{R}{r}$ será

$$\frac{\pi RL}{\pi r l} = \frac{R^2}{r^2},$$

y como $\frac{R^2}{r^2} = \frac{L^2}{l^2} = \frac{A^2}{a^2}$, será por último,

$$\frac{\pi RL}{\pi r l} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{L^2}{l^2} = \frac{A^2}{a^2}.$$

394. Dos cilindros circulares rectos se llaman *semejantes* cuando los rectángulos generadores son semejantes.

Es claro que los radios de las bases y los lados ó alturas serán proporcionales.

TEOREMA III.

Las áreas laterales de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases y á los cuadrados de sus lados ó alturas.

Sean R y L el radio y lado del primer cilindro, r y l el radio y lado del segundo. La razon de sus áreas laterales es

$$\frac{2\pi RL}{2\pi r\,l}=\frac{R}{r}\times\frac{L}{l};$$

pero $\frac{R}{r}=\frac{L}{l}$, luego sustituyendo $\frac{L}{l}$ por $\frac{R}{r}$ y al contrario, será

$$\frac{2\pi RL}{2\pi r\,l}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{L^2}{l^2}.$$

TEOREMA VII.

395. *Las áreas de dos esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Sean R y r los radios de las esferas. La razon de sus áreas es

$$\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2}=\frac{R^2}{r^2}.$$

LIBRO NOVENO.

VOLÚMENES DE LOS CUERPOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

MEDIDA DE LOS VOLÚMENES.

I.—Volúmenes de los poliedros.

396. VOLÚMEN *de un cuerpo es la medida de su extension.*

La unidad de volúmen es ordinariamente un cubo; por consiguiente el volúmen de un cuerpo será la relacion entre la extension del mismo y la del cubo que sirva de unidad.

Dos cuerpos son *equivalentes* cuando tienen igual volúmen y diferente forma. Los cuerpos equivalentes no pueden coincidir.

Teorema I. *(Fig. 224)*.

397. *Dos paralelepípedos rectángulos* AG *y* LS *que tienen iguales las bases* AC *y* LN, *son proporcionales á sus alturas* AE *y* LQ.

Supongamos que las alturas sean conmensurables y que la medida comun se halle contenida cinco veces en AE y tres veces en LQ; segun esto, tendremos

$$\frac{AE}{LQ}=\frac{5}{3} \quad [1].$$

Si por los puntos de division de las alturas trazamos planos paralelos á las bases, el paralelepípedo AG quedará dividido en cinco paralelepípedos rectángulos y el LS en tres; todos estos paralelepípedos son iguales, porque tienen igual base y altura; luego

$$\frac{AG}{LS}=\frac{5}{3} \quad [2].$$

De las igualdades [1] y [2] se deduce

$$\frac{AG}{LS}=\frac{AE}{LQ}.$$

Si las alturas fuesen inconmensurables, haríamos un razonamiento análogo al de los números **57** y **131**.

398. Escolio. Las tres aristas AB, AD, AE de un ángulo tiedro A son las *dimensiones* del paralelepípedo rectángulo AG: si dos paralelepípedos tienen iguales respectivamente dos de sus dimensiones, tendrán dos caras iguales; considerando estas caras como bases, las terceras dimensiones serán las alturas, luego el teorema anterior puede enunciarse diciendo:

Dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos dimensiones respectivamente iguales, son proporcionales á la tercera dimension.

Teorema II.

399. *Dos paralelepípedos rectángulos que tienen igual altura, son proporcionales á sus bases.*

Sean P y P' los paralelepípedos propuestos, a la altura comun, b y c las dimensiones de la base del primero, b' y c' las de la base del segundo.

Imaginemos un tercer paralelepípedo P'', y sean a, b, c' sus dimensiones.

Los paralelepípedos P y P'' tienen dos dimensiones iguales a y b, luego [**398**]

$$\frac{P}{P''}=\frac{c}{c'}.$$

Los paralelepípedos P'' y P' tienen dos dimensiones iguales a y c', luego

$$\frac{P''}{P'}=\frac{b}{b'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades fraccionarias, y suprimiendo el factor comun P'', será

$$\frac{P}{P'}=\frac{b\times c}{b'\times c'}.$$

Escolio. Puede enunciarse este teorema diciendo: *Dos paralelepípedos que tienen una dimension igual, son proporcionales á los productos de las otras dos dimensiones.*

Teorema III.

400. *Dos paralelepípedos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Sean P y P' dos paralelepípedos, B y a la base y altura del primero, B' y a' la base y altura del segundo.

Imaginemos un tercer paralelepípedo P'', cuya base sea B y a' la altura.

Los paralelepípedos P y P'' dan [**397**]

$$\frac{P}{P''}=\frac{a}{a'}.$$

Los paralelepípedos P'' y P' dan [**399**]

$$\frac{P''}{P'}=\frac{B}{B'}.$$

Multiplicando estas igualdades y simplificando, resulta

$$\frac{P}{P'}=\frac{B\times a}{B'\times a'}.$$

Escolio. Puede enunciarse este teorema del modo siguiente:

Dos paralelepípedos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus tres dimensiones.

Teorema IV.

401. *El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Sea P el paralelepípedo que se trata de medir, B y a su base y altura; sea C el cubo que se toma para unidad de volúmen y l el lado ó arista de este cubo: la base de éste será l^2 y la altura l.

Como el cubo es un paralelepípedo rectángulo, tendremos, en virtud del teorema anterior,

$$\frac{P}{C}=\frac{B\times a}{l^2\times l}.$$

Si convenimos en elegir para unidad de volúmen el cubo cuyo lado es la unidad lineal, l valdrá 1, por tanto

$$\frac{P}{C}=B\times a;$$

pero $\frac{P}{C}$ es el volúmen del paralelepípedo [**396**], luego el teorema es cierto.

Escolios.

1.° Téngase muy presente que en la demostracion anterior hemos convenido en elegir para unidad de volúmen un cubo cuyo lado sea la unidad lineal; por consiguiente cuando se hayan medido las líneas con una unidad determinada, el volúmen del paralelepípedo estará expresado en las unidades cúbicas correspondientes; así, cuando las líneas se midan en metros, varas etc., el volúmen resultará expresado en metros cúbicos, varas cúbicas etc.

Esta observacion es tambien aplicable á los teoremas siguientes.

2.° El teorema anterior se enuncia con frecuencia diciendo:

El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.

Corolario. *El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su arista.* [1]

Puesto que el cubo es un paralelepípedo rectángulo cuyas tres dimensiones son iguales.

En virtud de esta proposicion, la vara cúbica, esto es, el cubo cuya arista es una vara ó tres piés, equivale á $3^3 = 27$ piés cúbicos, el pié cúbico á $12^3 = 1728$ pulgadas cúbicas, el metro cúbico á $10^3 = 1000$ decímetros cúbicos etc.

Teorema V. *(Fig.* 225).

402. *Todo prisma oblícuo* AH *es equivalente á un prisma recto* QN, *cuya base es la seccion recta del prisma oblícuo, y cuya altura es igual á una de las aristas laterales del mismo.*

Trazo una seccion recta LMNOP del prisma oblícuo, prolongo las aristas laterales, tomo LQ=FA, y por el punto Q trazo un plano QRSTU paralelo á la seccion recta. De este modo se forma un prisma recto QN que tiene por base la seccion recta del oblícuo, y la altura LQ igual á la arista lateral FA. Decimos que los prismas AH y QN son equivalentes.

En efecto: si el cuerpo QC se coloca sobre el LH de modo que el polígono QRSTU coincida con su igual LMNOP, las aristas QA y LF coincidirán, porque serán perpendiculares á un mismo plano; además estas aristas son iguales, porque de LQ=FA se deduce LQ—AL=FA—AL ó AQ=FL, luego el vértice A caerá en F. Del mismo modo se demuestra que los vértices B, C, D, E caerán respectivamente en G, H, I, K; luego los cuerpos QC y LH son iguales.

Ahora bien, los prismas AH y QN se componen de una parte comun AN y de las partes iguales LH y QC, luego son equivalentes.

Teorema VI. *(Fig.* 226).

403. *El volúmen de un paralelepípedo recto es igual al producto de su base por su altura.*

---

1 A ésto debe su orígen el nombre de *cubo* que dimos en Aritmética á la tercera potencia de un número.

Sea el paralelepípedo recto AG, cuya base AC no es rectangular.

Considerando como base de este paralelepípedo la cara lateral BG, las aristas AB, EF etc. son oblícuas á la base BG, de lo contrario los ángulos del paralelógramo ABCD serian rectos. Trazo la seccion MNPQ perpendicular á dichas aristas.

La seccion MNPQ, que en general es un paralelógramo [**356, cor. 2.°**], es en este caso un rectángulo, porque el ángulo QMN correspondiente al diedro recto AB es tambien recto; luego el paralelepípedo propuesto es equivalente á un paralelepípedo rectángulo, cuya base es MNPQ y la altura igual á AB. El volúmen de este paralelepípedo es MQ × MN × AB, luego éste será tambien el volúmen del paralelepípedo propuesto, y como AB × MN es el área de su base ABCD y MQ su altura, pues MQ es perpendicular al plano ABCD, queda demostrado el teorema.

TEOREMA VII. *(Fig. 227).*

401. *El volúmen de un paralelepípedo oblícuo* AG *es igual al producto de su base por su altura.*

Consideremos la cara BG como base del paralelepípedo propuesto: las aristas laterales serán AB, EF etc. Tracemos la seccion recta MNPQ, que en general será un paralelógramo oblicuángulo. El paralelepípedo oblícuo propuesto es equivalente á otro recto, cuya base será la seccion MNPQ y la altura igual á la arista AB. El volúmen de este paralelepípedo es MN × QR × AB, siendo QR una perpendicular á MN, luego el volúmen del paralelepípedo propuesto es tambien MN × QR × AB: pero siendo MN perpendicular á AB, el producto AB × MN es el área de la base ABCD, y siendo QR perpendicular á la interseccion MN de los planos perpendiculares entre sí ABCD y MNPQ, es perpendicular á la base ABCD, luego es la altura del paralelepípedo propuesto. El volúmen MN × QR × AB es, pues, el producto de la base por la altura de este paralelepípedo.

TEOREMA VIII. *(Fig. 228).*

402. *Todo prisma triangular* ABCDEF *es equivalente á la mitad de un paralelepípedo de doble base é igual altura.*

Por las aristas DA y FC trazo los planos DG y FG paralelos á las caras EC y EA del prisma, y suponiendo prolongadas las bases de éste, se habrá formado el paralelepípedo GE de doble base que el prisma, pues el triángulo ABC es la mitad del paralelógramo BG, y de igual altura, puesto que los planos de las bases son los mismos para los dos cuerpos.

El plano ACFD divide al paralelepípedo GE en dos prismas triangulares: si demostramos que estos prismas son equivalentes, el propuesto ABCDEF será equivalente á la mitad del paralelepípedo EG.

Trazo la seccion recta MNPQ, que será un paralelógramo y estará dividida por el plano ACFD en dos triángulos iguales MNQ y QNP. El prisma GCAHFD es equivalente á un prisma recto que tenga por base MNQ y por altura FC, y el prisma ABCDEF equivale á un prisma recto que tenga por base QNP y y por altura FC; pero estos prismas rectos teniendo bases y alturas iguales, son iguales; luego los paralelepípedos GCAHFD y ABCDEF son equivalentes.

Corolario. *El volúmen de un prisma triangular* ABCDEF *es igual al producto de su base por su altura.*

Sea a la altura del prisma, y por tanto la del paralelepípedo GE. El volúmen de éste será $ABCG \times a$, luego el del prisma es $\frac{ABCG}{2} \times a = ABC \times a$.

Teorema IX.

406. *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Si por una arista lateral del prisma propuesto se trazan planos diagonales, quedará dividido el prisma en otros triangulares de igual altura que el dado. Llamando T, T′, T″ etc. á las bases de dichos prismas y a á la altura comun, los volúmenes parciales serán

$$T \times a, \quad T' \times a, \quad T'' \times a \text{ etc.};$$

luego el del prisma propuesto será

$$(T + T' + T'' + \ldots.) \times a;$$

pero $T + T' + T'' + \ldots.$ es la base de este prisma y a su altura, luego el teorema es cierto.

COROLARIOS.

1.° *Dos prismas de bases iguales ó equivalentes é igual altura son equivalentes.*

2.° *Dos prismas cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas; si las bases son iguales ó equivalentes, los prismas son proporcionales á sus alturas; y si son iguales las alturas, los prismas son entre sí como sus bases.*

TEOREMA X. *(Fig. 229).*

407. *Dos tetraedros* ABCD, A'B'C'D' *de bases equivalentes é igual altura, son equivalentes.*

Supongamos colocadas las bases BCD, B'C'D' de los tetraedros propuestos sobre un mismo plano, y sea RS su altura comun. Dividamos RS en cierto número de partes iguales, y por los puntos de division tracemos planos paralelos al plano en que están situadas las bases. Estos planos determinan en los tetraedros propuestos secciones equivalentes dos á dos: las secciones EFG y E'F'G', por ejemplo, son paralelas á las bases y equidistan de los vértices A y A', y como las bases son equivalentes, las secciones tambien lo son [**352, escolio**].

Sobre la base BCD del tetraedo ABCD y sobre cada seccion del mismo construyamos prismas externos, y bajo cada seccion del tetraedro A'B'C'D' construyamos prismas internos. El segundo de los prismas externos es equivalente al primero de los internos, porque sus bases EFG, E'F'G' son equivalentes y sus alturas iguales; el tercero de los primas externos es equivalente al segundo de los internos, y así sucesivamente hasta el último prisma externo que será equivalente al último interno; luego la suma de los prismas externos excede á la de los internos en el prisma triangular BCDEPQ. Pero el tetraedro ABCD es menor que la primera suma y el A'B'C'D' es mayor que la segunda suma, luego por esta doble razon, la diferencia entre los tetraedros, si hay alguna, será menor que el prisma BCDEPQ.

Digo ahora que esta diferencia puede ser menor que cualquiera cantidad asignable, por pequeña que sea.

Llamando x á una de las partes en que se ha dividido la altura comun RS, el volúmen del prisma BCDEPQ será

$BCD \times x$; para que este volúmen sea menor que una cantidad δ sumamente pequeña, esto es, para que se verifique la desigualdad $BCD \times x < \delta$, basta que sea $x < \frac{\delta}{BCD}$, y es claro que la altura RS podrá dividirse en un número de partes tal que cada una sea menor que $\frac{\delta}{BCD}$.

Pudiendo ser la diferencia entre los tetraedros propuestos menor que cualquier cantidad asignable, por pequeña que ésta sea, dicha diferencia es cero, y los tetraedros son equivalentes.

TEOREMA XI. (*Fig.* 230).

408. *Todo tetraedro* ABCD *es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

Por los vértices B y D trazo dos paralelas BE, DF á la arista AC, y por el vértice A un plano paralelo á la base BCD. De este modo se forma un prisma triangular BCDEAF de igual base y altura que el tetraedro propuesto.

El prisma BF se compone de la pirámide ABEFD y del tetraedro ABCD; haciendo pasar un plano por la diagonal BF y por el vértice A queda descompuesta la pirámide en los tetraedros ABEF y ABDF que son equivalentes, porque sus bases BEF y BDF son iguales como mitades del paralelógramo BEFD, y su altura, que es una perpendicular al plano BEFD bajada desde A, es la misma. Considerando como base del tetraedro ABEF la cara EAF, su vértice será el punto B y su altura la del prisma BF, luego este tetraedro es equivalente al propuesto ABCD, cuya base BCD es igual á EAF y cuya altura es la del prisma, y como ya se ha demostrado que ABEF es tambien equivalente á ABDF, es claro que los tres tetraedros que componen el prisma BF son equivalentes, luego el tetraedro propuesto ABCD es la tercera parte de dicho prisma.

COROLARIO. *El volúmen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Sea a la altura del tetraedro y por tanto la del prisma BF; el volúmen de éste será $BCD \times a$, luego el del tetraedro es $\frac{BCD \times a}{3}$.

Teorema XII.

409. *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Trazando planos por una arista lateral y por las diagonales de la base, quedará dividida la pirámide propuesta en varios tetraedros de igual altura que la pirámide. Sean T, T′, T″ etc. las bases de estos tetraedros y a la altura comun; los volúmenes parciales son

$$\frac{T \times a}{3},\ \frac{T' \times a}{3},\ \frac{T'' \times a}{3} \text{ etc.};$$

luego el de la pirámide propuesta será

$$\frac{(T + T' + T'' + \ldots) \times a}{3},$$

y como $T + T' + T'' + \ldots$ es la base de la pirámide, queda demostrado el teorema.

Corolarios.

1.° *Dos pirámides de bases iguales ó equivalentes é igual altura son equivalentes.*

2.° *Dos pirámides cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas; si las bases son iguales ó equivalentes, las pirámides son proporcionales á sus alturas; y si son iguales las alturas, las pirámides son entre sí como sus bases.*

Teorema XIII.

410. *Todo tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente á la suma de tres pirámides, que tienen por altura comun la altura del tronco, y por bases respectivas la base mayor de éste, la menor y una media proporcional entre ambas.*

Consideremos, en primer lugar, un tronco de tetraedro ABCDEF (*Fig.* 131). Haciendo pasar un plano por los puntos E, A y C se descompone el tronco en un tetraedro EABC y una pirámide cuadrangular EADFC. El tetraedro EABC tiene la misma altura que el tronco y su base es la base mayor de éste. Haciendo pasar un plano por los puntos E, A y F, la pirámide cuadrangular queda descompuesta en los tetraedros EADF y EACF; si tomamos el punto A para vértice del primero, su base será DEF, esto es, la base menor del tronco, y su altura será la del tronco.

Queda el tetraedro EACF. Por el punto E trazo una paralela EG á la arista FC; esta paralela se halla en el plano BCFE y encuentra á BC en G; uno el punto G con A y con F. Siendo EG paralela á FC lo es al plano ACFD, luego los puntos E y G equidistan de este plano, y el tetraedro EACF será equivalente al GACF, por tener ambos la misma base y alturas iguales; tomando F para vértice del último tetraedro, su base será AGC y su altura la del tronco, por tanto sólo nos resta demostrar que la base AGC es una media proporcional entre ABC y DEF. Para esto, trazo la GH paralela á AB y por tanto á DE; los triángulos HGC y DEF son iguales, por tener un lado igual GC= EF y los ángulos adyacentes respectivamente iguales, como formados por rectas paralelas. Ahora bien, los triángulos GHC y GAC, que tienen el mismo vértice G y sus bases en línea recta, tienen alturas iguales y son proporcionales á sus bases, esto es,

$$\frac{GHC}{GAC} = \frac{CH}{CA};$$

los triángulos GAC y ABC tambien tienen el mismo vértice A y sus bases en línea recta, luego tienen igual altura, por consiguiente

$$\frac{GAC}{ABC} = \frac{CG}{CB};$$

pero siendo HG paralela á AB, tenemos

$$\frac{CH}{CA} = \frac{CG}{CB},$$

luego $\frac{GHC}{GAC} = \frac{GAC}{ABC}$, ó $\frac{DEF}{GAC} = \frac{GAC}{ABC}$;

donde vemos que GAC, base del tercer tetraedro, es media proporcional entre las bases del tronco.

Demostremos ahora el teorema para un tronco cualquiera AH (*Fig.* 232) de bases paralelas.

Construyamos un triángulo LMN equivalente á la base mayor ABCDE, y sobre este triángulo un tetraedro T que tenga la misma altura que la pirámide total. Supongamos que las bases de la pirámide y del tetraedro se hallen situadas en un mismo plano, y prolonguemos la base superior FGHIK del tronco propuesto hasta que corte al tetraedro T: la seccion PQR será un triángulo equivalente á FGHIK [**352, escolio**]. Las pirámides totales VABCDE y TLMN, que tienen bases equivalentes é igual altura, son equivalentes, y las pirámides deficientes VFGHIK y TPQR son tambien equivalentes, por igual razon, luego los troncos AH y LMNPQR, qne se obtienen restando de las pirámides totales las deficientes, son equivalentes; y como el tronco de tetraedro LMNPQR equivale á la suma de tres tetraedros que tienen por altura comun la del tronco y por bases respectivas la base mayor de éste, la menor y una media proporcional entre ambas, el tronco de pirámide AH gozará de igual propiedad.

Corolario. *El volúmen de un tronco de pirámide de bases paralelas es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas.*

Si B y b son las bases, a la altura y V el volúmen del tronco, será

$$V=\frac{1}{3}Ba+\frac{1}{3}ba+\frac{1}{3}\sqrt{Bb}.\,a=\frac{1}{3}a\,(B+b+\sqrt{Bb}).$$

Teorema XIV. *(Fig. 233).*

411. *Todo prisma triangular troncado es equivalente á la suma de tres tetraedros que tienen por base comun la del prisma y por vértices respectivos los de la seccion del mismo.*

Sea el tronco de prisma triangular ABCDEF: debemos demostrar que es equivalente á la suma de los tetraedros EABC, DABC y FABC, que tienen por base comun la base ABC y por vértices los puntos E, D y F.

Haciendo pasar un plano por los puntos E, A y C queda descompuesto el tronco en un tetraedro EABC y una pirámide cuadrangular EADFC: el tetraedro EABC tiene por base la del tronco y por vértice el punto E. La pirámide se descompone, por el plano EDC, en los tetraedros EADC y EDFC; el primero EADC es equivalente al BADC, porque tienen la misma base ADC y sus vértices E y B están situados en una paralela á la base y equidistan, por tanto, de ella: tomando D para vértice del tetraedro

ABDC, su base será ABC, esto es, la del tronco. Queda el tetraedro EDFC: como los triángulos DCF y ACF tienen la misma base CF y sus vértices A y D en una paralela á dicha recta, son equivalentes, luego el tetraedro EDFC es equivalente al EAFC, pero éste equivale al BAFC que tiene igual altura, y cuyo vértice puede considerarse en F, siendo entónces su base la ABC del tronco; por consiguiente el tercer tetraedro EDFC es equivalente al FABC.

Vemos, pues, que los tres tetraedros que componen el tronco equivalen á los tres que tienen la base comun ABC y sus vértices respectivos en E, D y F.

Corolario. *El volúmen de un prisma triangular troncado es igual al tercio del producto de su base por la suma de las tres perpendiculares bajadas á ésta desde los vértices de la seccion.*

Si B es la base del tronco; a, a', a'' las tres perpendiculares y V el volúmen, será

$$V = \frac{1}{3}Ba + \frac{1}{3}Ba' + \frac{1}{3}Ba'' = \frac{1}{3}B(a + a' + a'').$$

412. El volúmen de un prisma troncado cualquiera se hallará descomponiendo el prisma en otros triangulares troncados y sumando los volúmenes de éstos.

El volúmen de un poliedro cualquiera se hallará descomponiendo el poliedro en pirámides y sumando los volúmenes de éstas.

II.—Volúmenes de los cuerpos de revolucion.

Teorema I.

413. *El volúmen de un cono circular recto es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Sea B el área de la base del cono, a la altura de éste y V el volúmen.

Supongamos inscripta en el cono una pirámide regular, y sean b el área de la base, v el volúmen; la altura será a, la misma del cono, luego

$$v = \frac{1}{3}ba.$$

Duplicando indefinidamente el número de lados de la base de la pirámide y por tanto el de sus caras latarales, el límite de las bases de estas pirámides será la base B del cono, y el límite de las pirámides será el cono propuesto; por consiguiente, sustituyendo las variables b y v por sus límites respectivos B y V, será

$$V = \frac{1}{3} Ba.$$

Si r es el radio de la base del cono, tendremos

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 a.$$

TEOREMA II.

414. *El volúmen de un tronco de cono circular recto de bases paralelas, es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas.*

Sean B y b las bases del tronco de cono, a la altura y V el volúmen.

Supongamos inscripto en el cono troncado un tronco de pirámide regular, y sean B′ y b' sus bases y V′ su volúmen; la altura será a, la misma del tronco de cono, luego

$$V' = \frac{1}{3} a (B' + b' + \sqrt{B'b'}).$$

Duplicando indefinidamente el número de lados de las bases de la pirámide troncada, y por tanto el de sus caras laterales, B′ y b' tendrán por límites respectivos B y b, por consiguiente el límite del producto $B'b'$ será Bb; además el límite de V′ será V, y a permanecerá constante. Sustituyendo las cantidades variables por sus límites respectivos, tendremos

$$V = \frac{1}{3} a (B + b + \sqrt{Bb}).$$

Si R y r son los radios de las bases del tronco de cono será

$$B = \pi R^2 , \quad b = \pi r^2 , \quad \sqrt{Bb} = \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2} = \pi R r,$$

luego

$$V = \frac{1}{3} \pi a (R^2 + r^2 + Rr).$$

TEOREMA III.

415. *El volúmen de un cilindro circular recto es igual al producto de su base por su altura.*

Sean B, a y V la base, altura y volúmen del cilindro.

Supongamos inscripto un prisma regular, y sean b su base, v su volúmen; la altura será a, la misma del cilindro; luego

$$v = ba.$$

Duplicando indefinidamente el número de lados de las bases del prisma, el límite de b será B y el de v será V, luego

$$V = Ba.$$

Si r es el radio de la base del cilindro, tendremos

$$V = \pi r^2 a.$$

TEOREMA IV. *(Fig. 234)*.

413. *El volúmen del cuerpo engendrado por un triángulo que gira alrededor de una recta exterior á él trazada por su vértice en su plano, es igual al área de la superficie engendrada por la base del triángulo multiplicada por el tercio de su altura.*

Distinguiremos tres casos: 1.° que la base tenga uno de sus extremos en el eje de revolucion; 2.° que la base no tenga ningun punto en el eje ni sea paralela á él; 3.° que la base sea paralela al eje.

1.° Supongamos un triángulo ABC *(Fig. 1)* cuyos ángulos C y B adyacentes al eje sean agudos: la perpendicular AE al eje caerá entre los puntos C y B dividiendo al triángulo en dos triángulos rectángulos AEC y AEB. Los cuerpos engendrados por estos triángulos son dos conos circulares rectos, que tendrán por volúmenes respectivos

$$\frac{1}{3}\pi AE^2 \times CE, \ \frac{1}{3}\pi AE^2 \times EB;$$

luego el cuerpo engendrado por ABC tendrá por volúmen

$$\frac{1}{3}\pi AE^2 \ (CE + EB) = \frac{1}{3}\pi AE^2 \times BC \quad [1].$$

Bajemos la perpendicular CD á la base AB. Los productos $AE \times BC$ y $CD \times AB$ expresan el duplo del área del triángulo ABC, luego son iguales; sustituyendo en [1] el producto $AE \times BC$ por su igual $CD \times AB$, el volúmen en cuestion será

$$\frac{1}{3} CD \times \pi AE. AB,$$

cuyo resultado está de acuerdo con el enunciado del teorema, puesto que $\pi AE.\ AB$ es el área de la superficie cónica descrita por la base del triángulo, y $\frac{1}{3}$ CD el tercio de la altura de éste.

Si alguno de los ángulos B y C fuese obtuso, el triángulo ABC sería la diferencia entre dos triángulos rectángulos, y la demostracion sólo se diferenciaria de la anterior en que los volúmenes engendrados por los triángulos rectángulos se restarian, en lugar de sumarlos. Si alguno de los ángulos B y C fuese recto, el triángulo ABC engendraria un cono y la demostracion sería muy fácil.

2.° Sea el triángulo ABC (*Fig.* 2). Prolongo la base AB hasta que encuentre en E al eje. El triángulo propuesto es la diferencia de otros dos ACE y BCE, que están en el primer caso. Los volúmenes de los cuerpos engendrados por estos triángulos son respectivamente

$$\frac{1}{3}\ CD \times superf.\ AE,\quad \frac{1}{3}\ CD \times superf.\ BE,$$

luego el volúmen del cuerpo engendrado por ABC será

$$\frac{1}{3}\ CD\ (superf.\ AE - superf.\ BE);$$

pero la superficie engendrada por AE disminuida en la engendrada por BE es evidentemente la engendrada por AB, luego el volúmen en cuestion es

$$\frac{1}{3}\ CD \times superf.\ AB.$$

3.° Sea el triángulo ABC (*Fig.* 3) cuya base AB es paralela al eje, y supongamos que la altura CD caiga entre los puntos A y B.

El triángulo propuesto se obtiene restando del rectángulo ABFE los triángulos rectángulos AEC y BFC; luego el volúmen del cuerpo engendrado por el triángulo ABC será

$$\pi AE^2 \times EF - \left(\frac{1}{3}\pi AE^2 \times EC + \frac{1}{3}\pi AE^2 \times CF\right) =$$

$$\pi AE^2 \times EF - \frac{1}{3}\pi AE^2 \times EF = \frac{2}{3}\pi AE^2 \times EF;$$

sustituyendo AE por CD, EF por AB y disponiendo los factores en el órden conveniente, esta expresion adquiere la forma

$$\frac{1}{3}\,CD \times 2\pi AE.\,AB,$$

conforme con el enunciado del teorema, puesto que $2\pi AE \times AB$ es el área de la superficie cilíndrica descrita por la base del triángulo, y $\frac{1}{3}$ CD el tercio de la altura de éste.

Si uno de los ángulos A y B fuese recto ú obtuso, la demostracion precedente sufriria algunas sencillas modificaciones.

447. Sector esférico *es la parte de esfera engendrada por un sector cualquiera del semicírculo generador de la esfera.*

La base del sector circular engendra una zona, que se llama *base* del sector esférico.

Teorema V. *(Fig. 221).*

El volúmen de un sector esférico es igual al área de la zona que le sirve de base multiplicada por el tercio del radio.

Consideremos el sector esférico engendrado por el sector circular OAF que gira alrededor del diámetro AG.

Dividiendo el arco AF en varias partes iguales, las cuerdas AB, BC, CD etc. de estas partes serán bases de los triángulos isósceles ABO, BCO, CDO etc. que tienen todos igual altura. Representando ésta por a, los volúmenes de los cuerpos engendrados por estos triángulos serán respectivamente

$$\textit{superf.}\ AB \times \frac{1}{3}a,\ \textit{superf.}\ BC \times \frac{1}{3}a,\ \textit{superf.}\ CD \times \frac{1}{3}a \text{ etc};$$

luego el volúmen del cuerpo engendrado por el sector poligonal OABCDEF será

$$(\textit{superf.}\ AB + \textit{superf.}\ BC + \textit{superf.}\ CD + \ldots) \times \frac{1}{3}a.$$

Ahora bien, si el número de partes del arco AF aumenta, el límite de la línea quebrada ABCDEF es el arco AF, luego el límite de la suma

$$\textit{superf.}\ AB + \textit{superf.}\ BC + \textit{superf.}\ CD + \ldots$$

será la superficie de la zona engendrada por el arco AF;

además el límite de la apotema a es el radio R del círculo generador, luego el volúmen en cuestion es

$$\textit{superf. de la zona } AF \times \frac{1}{3} R.$$

Haríamos el mismo razonamiento si la base del sector circular no tuviese ninguno de sus extremos en el diámetro AG.

TEOREMA VI. (*Fig.* 221).

418. *El volúmen de una esfera es igual al área de la superficie esférica multiplicada por el tercio del radio.*

La esfera engendrada por el semicírculo ADG puede considerarse compuesta de dos sectores esféricos engendrados por los sectores circulares AOD y DOG. Los volúmenes de estos sectores son

$$\textit{superf. de la zona } AD \times \frac{1}{3} R, \quad \textit{superf. de la zona } DG \times \frac{1}{3} R;$$

pero las zonas engendradas por los arcos AD y DG componen la superficie esférica, luego el volúmen de la esfera es

$$\textit{superf. de la esfera} \times \frac{1}{3} R.$$

Llamando V al volúmen de la esfera, y teniendo presente que su área es $4\pi R^2$, será

$$V = 4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

COROLARIOS.

1.° *El volúmen de una esfera es igual á su diámetro multiplicado por los dos tercios de su círculo máximo.*

Pues la expresion $\frac{4}{3} \pi R^3$ del volúmen de la esfera puede escribirse en la forma $2R \times \frac{2}{3} \pi R^2$.

2.° *El volúmen de una esfera es los dos tercios del volúmen del cilindro circunscrito.*

Pues el volúmen de este cilindro es $\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$, cuyos dos tercios es $\frac{4}{3} \pi R^3$, volúmen de la esfera.

419. SEGMENTO ESFÉRICO *es la parte de esfera limitada por una zona y por el plano de la base, ó los planos de las bases, de ésta.*

El volúmen de un segmento ABD (*Fig.* 220) de una base, menor que un hemisferio, se obtiene restando los volúmenes del sector OBAD y cono O D correspondientes. Si el segmento es GBD, mayor que un hemisferio, se suman los volúmenes del sector OBGD y del cono OBD correspondientes.

Por último, si el segmento es de dos bases, como BDEF, su volúmen será la diferencia entre los volúmenes de los segmentos de una base AEF y ABD.

420. CUÑA ESFÉRICA *es la parte de esfera limitada por un huso y los dos semicírculos correspondientes.*

TEOREMA VII. (*Fig.* 199.)

El volúmen de una cuña esférica ABDC es igual al área de su huso multiplicada por el tercio del radio.

Es evidente que la relacion entre la cuña propuesta y la esfera es igual á la relacion entre el huso correspondiente á aquella y la superficie esférica. Llamando V al volúmen de la cuña, H al área de su huso, A al área de la esfera, será

$$\frac{V}{A\times\frac{1}{3}R}=\frac{H}{A} \quad ó \quad \frac{V}{\frac{1}{3}R}=H,$$

de donde

$$V=H\times\frac{1}{3}R.$$

Si el área H del huso se sustituye por $\pi R^2\times ABC$ [**389**], tendremos

$$V=\frac{1}{3}\pi R^3\times ABC,$$

siendo ABC el ángulo de la cuña.

CAPÍTULO SEGUNDO.

COMPARACION DE VOLÚMENES.

TEOREMA I.

421. *Los volúmenes de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cubos de sus alturas y á los de sus aristas homólogas.*

Sean V y v, B y b, A y a los volúmenes, bases y alturas de dos pirámides semejantes.

Tenemos [**409, cor. 2.º**]

$$\frac{V}{v}=\frac{B.a}{b.a}=\frac{B}{b}\cdot\frac{A}{a};$$

pero [**371, cor. 1.º**] $\frac{B}{b}=\frac{A^2}{a^2}$, luego sustituyendo será

$$\frac{V}{v}=\frac{A^3}{a^3};$$

donde vemos que los volúmenes de las pirámides propuestas son proporcionales á los cubos de sus alturas, y como las alturas son proporcionales á las aristas homólogas, los volúmenes serán tambien proporcionales á los cubos de las aristas homólogas.

TEOREMA II.

422. *Los volúmenes de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Supongamos descompuestos los poliedros en igual número de tetraedros semejantes. Los volúmenes de dos tetraedros semejantes, uno de cada poliedro, son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas; pero la razon de dos aristas homólogas, y por tanto la de sus cubos, es contante, luego tambien lo será la razon de dos tetraedros semejantes cualesquiera. Esto supuesto, sean T, T′, T″ etc. los tetraedros que componen el primer poliedro, y t, t', t'' etc. los tetraedros del segundo poliedro respectivamente semejantes á los primeros: sean A y a dos aristas homólogas cualesquiera. Tenemos

$$\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\frac{T''}{t''}=\ldots=\frac{A^3}{a^3},$$

de donde [**Arit. 200**].

$$\frac{T+T'+T''+\ldots}{t+t'+t''+\ldots}=\frac{A^3}{a^3},$$

igualdad que demuestra el teorema.

TEOREMA III.

423. *Los volúmenes de dos conos semejantes son proporcionales á los cubos de los radios de sus bases, á los de sus lados ó á los de sus alturas.*

Sean R, L, A el radio, lado y altura del primer cono, y r, l, a los del segundo. La razon de sus volúmenes es

$$\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 A}{\frac{1}{3}\pi r^2 a}=\frac{R^2}{r^2}\times\frac{A}{a};$$

pero $\frac{A}{a}=\frac{R}{r}$, luego sustituyendo será

$$\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 A}{\frac{1}{3}\pi r^2 a}=\frac{R^3}{r^3},$$

y como los radios son proporcionales á los lados y á las alturas, los volúmenes de los conos serán tambien proporcionales á los cubos de los lados y á los cubos de las alturas.

TEOREMA IV.

424. *Los volúmenes de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cubos de los radios de sus bases y á los cubos de sus alturas ó lados.*

Sean R y A el radio y la altura del primer cilindro, r y a el radio y altura del segundo. La razon de sus volúmenes será

$$\frac{\pi R^2 A}{\pi r^2 a}=\frac{R^2}{r^2}\times\frac{A}{a};$$

sustituyendo la razon $\frac{A}{a}$ por su igual $\frac{R}{r}$, será

$$\frac{\pi R^2 A}{\pi r^2 a}=\frac{R^3}{r^3} \text{ ó } =\frac{A^3}{a^3},$$

TEOREMA V.

425. *Los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus radios.*

Si R y r son los radios de las esferas, la razon de sus volúmenes será

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{R^3}{r^3}.$$

PROBLEMAS.

426. 1.° *Determinar el volúmen de un tetraedro regular en funcion de la arista.*

Sea a la arista del tetraedro regular ABCD (*Fig.* 235).

La cara BCD de este cuerpo es un triángulo equilátero cuya base es a, y cuya altura ED caerá en el medio E de la base, luego

$$\mathrm{ED}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

El área del triángulo BCD es, pues,

$$\mathrm{BCD}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

La altura AP del tetraedro es un cateto del triángulo rectángulo APD, cuya hipotenusa AD es a; el otro cateto PD es el radio del círculo circunscrito al triángulo BCD, y como $a=r\sqrt{3}$, se deduce $r=\frac{a}{\sqrt{3}}$; luego

$$\mathrm{AP}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Como el volúmen V del tetraedro es $\frac{1}{3}$ BCD$\times$AP, tendremos sustituyendo

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

427. 2.º *Dividir una pirámide en partes proporcionales á dos rectas dadas* m *y* n, *por medio de un plano paralelo á la base.*

Sea V el volúmen de la pirámide dada, v el de la pirámide deficiente determinada por el plano secante; sean A y x dos aristas laterales homólogas de estas pirámides semejantes. Tenemos

$$\frac{\mathrm{V}}{v}=\frac{\mathrm{A}^3}{x^3} \text{ ó } \sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{v}}=\frac{\mathrm{A}}{x}, \text{ de donde } x=\mathrm{A}\sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{v}}.$$

Pero la condicion del problema es $\frac{\mathrm{V}-v}{v}=\frac{m}{n}$, que se trasforma en $\frac{\mathrm{V}}{v}=\frac{m+n}{n}$; luego, sustituyendo

$$x=\mathrm{A}\sqrt[3]{\frac{m+n}{n}}.$$

EJERCICIOS DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR.

I. Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano paralelo á esta recta será perpendicular al primero.

II. Dos rectas paralelas forman ángulos iguales con un mismo plano.

III. Si dos planos perpendiculares á un tercero pasan por dos rectas oblícuas á éste y paralelas entre sí, son paralelos.

IV. Si una recta es perpendicular á un plano, la interseccíon de éste con un plano cualquiera y la proyeccion de la recta sobre el mismo plano son perpendiculares.

V. Si las proyecciones de una recta sobre dos planos que se cortan son perpendiculares á las intersecciones de un tercer plano con los de proyeccion, la recta es perpendicular á dicho tercer plano.

VI. El volúmen de un prisma triangular es igual á la mitad del producto de una de sus caras laterales por la distancia de esta cara á la arista opuesta.

VII. El volúmen de un tronco de paralelepípedo es igual á la cuarta parte del producto de su base por la suma de las perpendiculares bajadas á ésta desde los vértices de la seccion.

VIII. El volúmen de un paralelepípedo truncado es igual al producto de su base por la perpendicular bajada á ésta desde el centro de la seccion.

IX. Los volúmenes de dos tetraedros que tienen un ángulo tiedro igual, son proporcionales á los productos de las tres aristas que forman el ángulo igual.

X. Los conos engendrados por un triángulo rectángulo, que gira sucesivamente alrededor de cada uno de sus catetos, son inversamente proporcionales á sus alturas.

PROBLEMAS PARA RESOLVER.

I. Trazar por un punto dado una recta que encuentre á otras dos no situadas en un mismo plano.

II. Hallar el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de tres puntos dados que no están en línea recta.

III. Por una recta dada trazar un plano paralelo á otra recta dada.

IV. Por un punto dado trazar un plano tangente á una superficie cilíndrica ó cónica circular.

V. Por un punto dado en la superficie esférica trazar una circunferencia máxima perpendicular á otra dada.

VI. Dividir un arco de circunferencia máxima en dos partes iguales.

VII. Por tres puntos dados en la superficie de una esfera, hacer pasar una circunferencia.—Hallar el polo de una circunferencia dada en la superficie esférica.

VIII. Determinar las aristas de un paralelepípedo rectángulo sabiendo que son proporcionales á los números m, n y p, y que el volúmen del paralelepípedo es V.

IX. Dada la arista de un cubo, determinar la de otro cubo doble del primero.

X. Hallar la arista de un cubo equivalente á la suma de otros tres, cuyas aristas son 3, 4 y 5 metros.

XI. El volúmen de un cono circular recto es 160 metros cúbicos y su altura 6 metros; ¿cuál será el radio de su base?

XII. La capacidad de una medida cilíndrica de altura igual al diámetro de la base es un hectólitro, ¿cuál será el diámetro de la base?

XIII. Hallar el radio de una esfera cuyo volúmen es 500 metros cúbicos

XIV. Hallar el volúmen de una esfera cuya superficie es 500 metros cuadrados.

XV. Hallar el volúmen de un segmento esférico de una base, cuya altura es 8 metros, siendo 13 metros el radio de la esfera.

BREVES NOCIONES SOBRE LAS CURVAS

ELIPSE, PARÁBOLA É HIPÉRBOLA.

I.—Elipse.

428. *La* ELIPSE *es una curva plana cerrada, tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es constante.*

Esta suma constante se representa comunmente par $2a$.

Si M, M′, M″ etc. (*Fig.* 236) son varios puntos de la elipse, F y F′ los puntos fijos, se tiene

$$MF+MF'=M'F+M'F'=M''F+M''F'=\ldots=2\,a.$$

Los puntos fijos F y F′ se llaman *focos* de la elipse, y las rectas MF, MF′ que unen un punto cualquiera M de la curva con los focos se llaman *radios vectores*.

PROBLEMA I. (*Fig.* 237).

429. *Describir una elipse, conociendo la distancia entre los focos y la suma de los radios vectores.*

1.ª *construccion.* Sean F y F′ los focos y mn la suma de los radios vectores. Divido esta recta en dos partes cualesquiera mp y np; haciendo centro en uno de los focos F′, con el radio pn describo dos arcos, uno por encima y otro por debajo de la recta FF′; haciendo centro en el otro foco, describo con el radio mp otros dos arcos que corten á los anteriores: los puntos M y M′ de interseccion pertenecen á la elipse, pues $MF'+MF=pn+mp=mn$. Del mismo modo se determinarán tantos puntos como se quiera. Trazando una línea contínua que pase por todos ellos, se tendrá la elipse pedida.

2.ª *construccion.* Puede describirse tambien la elipse por un procedimiento mecánico. Fíjense en los focos los extremos de un hilo inextensible igual en longitud á la suma de los radios vectores, y póngase tenso por medio de un lápiz ó de un estilo; muévase el lápiz de modo que se apoye en el hilo permaneciendo éste tenso, y quedará descrita la elipse.

Este procedimiento es consecuencia inmediata de la definicion.

430. Eje de simetría *de una curva es la recta que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas de la curva perpendiculares al eje.*

Teorema I. *(Fig.* 236).

La recta AB *que pasa por los focos de una elipse, y la perpendicular* CD *á* FF′ *en su punto medio, son ejes de la elipse.*

1.° Sea M un punto de la elipse, MF y MF′ los radios vectores de dicho punto. Haciendo centro en los focos F y F′, con los radios MF y MF′, describo por la parte inferior dos arcos que se cortarán en un punto M″ perteneciente á la elipse, puesto que $M''F + M''F' = MF + MF' = 2a$; pero los puntos F y F′ equidistan de M y M″; luego AB es perpendicular á la cuerda MM″ en su punto medio.

2.° Demostremos ahora que tambien CD es eje de la elipse.

Haciendo centro en F y F′ con los radios respectivos MF′ y MF describo por la parte superior dos arcos que se cortarán en un punto M′ perteneciente á la elipse, puesto que $M'F + M'F' = MF + MF = 2a$; ahora, los triángulos MFF′ y M′FF′ tienen sus lados iguales, y son por tal razon iguales; doblando la figura por CD, el punto F′ caerá sobre F, la recta F′M′ seguirá la direccion FM y el punto M′ caerá en M, por consiguiente los ángulos en E son iguales, y por tanto rectos, y además $M'E = ME$; luego CD es perpendicular á la cuerda MM′ en su punto medio.

431. AB se llama *eje mayor*, CD *eje menor*, y los puntos A, B, C y D, *vértices* de la elipse.

432. Obsérvese que las distancirs AF y BF′ son iguales, pues de la igualdad $AF + AF' = BF + BF'$ se deduce, restando FF′ de ambos miembros, $2AF = 2BF'$ ó $AF = BF'$.

La suma de los radios vectores de un punto cualquiera de la elipse es igual al eje mayor.

En efecto:

$$MF + MF' = AF + AF' = BF' + AF' = AB.$$

Segun esto, el eje mayor AB puede representarse por $2a$.

Problema II. *(Fig.* 236*)*.

433. *Describir una elipse conociendo sus dos ejes.*

Siendo $CF + CF' = AB$, será $CF = CF' = AO$, luego haciendo centro en C, el arco descrito con el radio AO marcará en el eje mayor AB dos puntos, que serán los focos de la elipse. Conocidos estos puntos, puede emplearse cualquiera de las construcciones del problema I.

TEOREMA II. *(Fig. 237).*

434. *La suma de las distancias de los focos de una elipse á un punto cualquiera es mayor ó menor que 2a, segun que dicho punto esté fuera ó dentro de la curva.*

Sea un punto exterior N. Tenemos

$NP + NF' > PF'$, luego $NF + NF' > PF + PF'$ ó $> 2a$.

Sea un punto interior N'. Tenemos

$N'F' < PN' + PF'$, luego $N'F' + N'F < PF + PF'$ ó $< 2a$.

Los recíprocos son ciertos [**20**].

TEOREMA III. *(Fig. 236).*

435. *El punto O en que se cortan los ejes de una elipse, es centro de esta curva.*

Sea M' un punto de la elipse; uno O con M', prolongo la OM' y tomo $OM'' = OM'$. Si pruebo que el punto M'' pertenece á la elipse, quedará demostrado que el punto O divide en dos partes iguales á cualquiera cuerda de la elipse, y que por tanto es centro de esta curva.

Los triángulos OM'F' y OM''F son iguales [**93**], luego $M'F' = M''F$; tambien son iguales los triángulos OM'F y OM''F', luego $M'F = M''M''F'$; por consiguiente

$$M''F + M''F' = M'F + M'F' = 2a,$$

lo que demuestra que el punto M'' pertenece á la elipse.

436. La distancia OF del centro á cualquiera de los focos de la elipse, se llama *excentricidad* de esta curva.

Si suponemos que los focos F y F' de una elipse se reunen en el centro O, la excentricidad será *cero* y la elipse se convertirá en una circunferencia cuyo radio será a; por esto suele decirse: *la circunferencia es una elipse cuya excentricidad es cero.*

Es evidente que cuanto menor sea la excentricidad, la forma de la elipse se aproximará más á la del círculo.

137. *Se llama* TANGENTE *á una elipse toda recta indefinida que toca á esta curva en un solo punto.*

TEOREMA IV. *(Fig. 238).*

La bisectriz del ángulo que forma uno de los radios vectores de un punto de la elipse con la prolongacion del otro radio vector, es tangente á la elipse.

Tomo sobre la prolongacion del radio vector FM una longitud MN = MF′, trazo la NF′ y uno un punto cualquiera P de la TT′ con F, F′ y N. La bisectriz TT′ es perpendicular á la base NF′ del triángulo isósceles MNF′ y la divide en dos partes iguales [**90**, 2.º], luego PF′ = PN. Ahora bien

$$PF + PN > FN \text{ ó } PF + PF' > FM + F'M \text{ ó } > 2a,$$

luego el punto P está fuera de la elipse.

El mismo razonamiento puede aplicarse á cualquier otro punto de TT′, á excepcion del M, por consiguiente TT′ es tangente á la elipse.

ESCOLIO. Siendo el ángulo FMT = NMT′, tendremos FMT = F′MT′; luego *la tangente* TT′ *á la elipse forma ángulos iguales con los radios vectores del punto de contacto.*

138. *Se llama* NORMAL *á una curva la perpendicular á la tangente en el punto de contacto.*

La normal MQ *á la elipse forma ángulos iguales con los radios vectores del punto de contacto*, pues siendo FMT = F′MT′ será FMQ = F′MQ.

PROBLEMA III. *(Fig. 238).*

139. *Por un punto* M *de la elipse, trazar una tangente á esta curva.*

Trazo los radios vectores MF y MF′, prolongo el MF y la bisectriz TT′ del ángulo NMF′ será la tangente pedida.

140. Se llama *elipsoide prolongado* la superficie engendrada por una elipse que gira alrededor de su eje mayor.

En Física se demuestra que los rayos luminosos y los caloríficos, al encontrar una superficie pulimentada, se reflejan, y que el rayo reflejo forma con la normal á la superficie un ángulo igual al que habia formado el rayo incidente; por lo tanto, si en uno de los focos de un elipsoide se coloca un manantial de luz ó de calor, los rayos emitidos, despues de chocar en la superficie, pasarán por el otro foco.

II.—Parábola.

441. *La* PARÁBOLA *es una curva plana, tal que cada uno de sus puntos equidista de un punto fijo y de una recta fija.*

Si F (*Fig.* 239) es el punto fijo, CD la recta fija y M un punto cualquiera de la parábola, será MF = MR.

El punto fijo F se llama *foco*, la recta CD *directriz*, y las rectas tiradas desde el foco á los puntos de la curva se llaman *radios vectores*.

PROBLEMA I.

442. *Describir una parábola, conociendo la posicion del foco y de la directriz.*

1.ª *construccion.* Tiro desde el foco F (*Fig.* 239) una recta indefinida FG perpendicular á la directriz CD: el punto medio A de la distancia FG será evidentemente un punto de la parábola. Tomo en FG un punto cualquiera L y levanto por este punto una perpendicular indefinida MM' á FG; describo con el radio GL, haciendo centro en el foco F, un arco que cortará á la perpendicular MM' en dos puntos M y M' pertenecientes á la parábola, porque siendo MF = GL y MR = GL, se tiene MF = MR. Del mismo modo se determinarán tantos puntos como se quiera. Trazando una línea contínua que pase por todos ellos, se tendrá la parábola pedida.

2.ª *construccion.* Fíjense en el foco F de la parábola (*Fig.* 240) y en el vértice C de una escuadra [1] los extremos de un hilo inextensible, igual en longitud al cateto mayor BC de la escuadra, aplíquese este cateto á la recta indefinida FG y el cateto menor á la directriz CD, póngase tenso el hilo por medio de un lápiz ó de un estilo que se apoye en el cateto mayor, hágase resbalar el menor AB á lo largo de una regla aplicada á la directriz CD, sin que deje de apoyarse el lápiz en el cateto mayor, y quedará descrita una rama de la parábola. Repitiendo la misma

---

1 La *escuadra* es una plancha de madera cortada en forma de triángulo rectángulo.

operacion por la parte inferior de la recta FG, se describirá la otra rama.

Un punto cualquiera M, determinado por este procedimiento, pertenece á la parábola; porque siendo la longitud $FM + MC$ del hilo igual al cateto mayor $BM + MC$, es claro que $FM = BM$.

TEOREMA I. (*Fig.* 239).

443. *La perpendicular* FG *tirada á la directriz de una parábola desde el foco* F, *es eje de aicha curva.*

Sea M un punto cualquiera de la parábola. Bajo la perpendicular ML á FG, y la prolongo, tomando $M'L = ML$.

El punto M' pertenece á la parábola, porque siendo $M'F = MF$ y $M'R' = MR$, se tiene $M'F = M'R'$; como FG es, segun la construccion, perpendicular á MM' en su punto medio, es claro que FG es eje de la parábola.

ESCOLIO. El punto de interseccion A del eje de la parábola con la curva, se llama *vértice* de la misma.

TEOREMA II. (*Fig.* 240).

444. 1.° *Si un punto* N *está fuera de la parábola, dista más del foco que de la directriz*; 2.° *si un punto* N' *está dentro de la parábola, dista menos del foco que de la directriz.*

1.° Prolongo la perpendicular NR hasta que encuentre en M' á la parábola, y trazo el radio vector FM'. En el triángulo FNM' tenemos

$$FN + NM' > FM', \text{ pero } FM' = RM', \text{ luego } FN + NM' > RM';$$

restando NM' de ambos miembros de esta última desigualdad, resulta

$$FN > RN.$$

2.° En el triángulo FN'M' tenemos

$$FN' < FM' + M'N', \text{pero } FM' = RM', \text{ luego } FN' < RM' + M'N'$$

ó bien
$$FN' < RN'.$$

Los recíprocos son ciertos [**20**].

445. *Se llama* TANGENTE *á una parábola toda recta indefinida que toca á esta curva en un solo punto.*

TEOREMA III. (*Fig.* 241).

La bisectriz del ángulo que forma el radio vector de un punto de la parábola con la perpendicular tirada desde dicho punto á la directriz, es tangente á la parábola.

Sea TT′ la bisectriz del ángulo FMR formado por el radio vector del punto M y la perpendicular MR á la directriz. Demostrémos que todos los puntos de la TT′, á excepcion del M, están fuera de la parábola.

Trazo la recta RF. Siendo TT′ bisectriz del ángulo en el vértice del triángulo isósceles RMF, es perpendicular á RF en su punto medio; tomando un punto cualquiera P de la bisectriz, uniéndole con R y con F, y bajando la perpendicular PQ á la directriz, será PR = PF, pero PR > PQ, luego PF > PQ, por consiguiente el punto P está fuera de la parábola [**444, recip.**]

COROLARIO. *La normal* MN *á la parábola es bisectriz del ángulo que forma el radio vector del punto de contacto con una paralela* MS *al eje.*

En efecto: el ángulo FMN tiene por complemento FMT′, y el NMS tiene por complemento TMS ó su igual RMT′, pero FMT′ = RMT′, luego FMN = NMS.

PROBLEMA II. *(Fig. 241).*

446. *Por un punto* M *de la parábola trazar una tangente á esta curva.*

Trazo el radio vector MF y bajo la perpendicular MR á la directriz: la bisectriz TT′ del ángulo FMR será la tangente pedida.

447. Se llama *paraboloide* la superficie engendrada por una parábola que gira alrededor de su eje.

Segun el principio de Física mencionado al tratar de la elipse, si en el foco de un paraboloide se coloca un manantial de luz ó de calor, los rayos emitidos, despues de reflejarse en la superficie, seguirán una direccion paralela al eje.

III.—Hipérbola.

448. *La* HIPÉRBOLA *es una curva plana, tal que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es constante.*

Esta diferencia constante suele representarse por $2a$.

Si M, M′, M″ etc. *(Fig. 242)* son varios puntos de la hipérbola, F y F′ los puntos fijos, se tiene

$$MF' - MF = M'F - M'F' = M''F' - M''F = \ldots = 2a.$$

Los puntos fijos F y F′ se llaman *focos* de la hipérbola; y las dos rectas MF′ y MF tiradas desde los focos á un punto cualquiera de la curva, se llaman *radios vectores*.

PROBLEMA I.

449. *Describir una hipérbola conociendo la diferencia* $2a$ *de los radios vectores y la distancia* FF′ *entre los focos.*

1.ª *construccion.* Sea mn (*Fig.* 243) la diferencia $2a$ de los radios vectores. Trazo una recta indefinida FF′ que pase por los focos: desde el punto medio O de la distancia FF′ tomo á derecha é izquierda las longitudes $OA = OB = a$; los puntos A y B pertenecen á la hipérbola, porque

$$AF' - AF = AB + BF' - AF = AB = 2a,$$

$$BF - BF' = AB + AF - BF' = AB = 2a.$$

Para hallar otros puntos, describo desde F como centro y con un radio np mayor que FA dos arcos, uno por encima y otro por debajo de FF′; y haciendo centro en F′, con un radio $mp = 2a + np$, describo otros dos arcos que corten á los primeros: los puntos de interseccion M y M′ pertenecen á la hipérbola, pues

$$MF' - MF = 2a + np - np = 2a.$$

Describiendo ahora desde F′ dos arcos con el radio np, y desde F otros dos con el radio mp, se obtienen los puntos M″ y M‴.

Del mismo modo se determinarán tantos puntos como se quiera.

ESCOLIO. Se vé por esta construccion que la hipérbola consta de dos ramas distintas indefinidas.

2.ª *construccion.* Fíjese uno de los extremos de un hilo inextensible y mayor que FA (*Fig.* 244) en el foco F, y el otro extremo en un punto C del borde de una regla; hágase pasar este borde por el foco F′, de modo que la distancia CF′ sea igual á la longitud del hilo más $2a$: póngase tenso el hilo por medio de un lápiz ó de un estilo que se apoye en la regla, y hágase girar ésta, sin que resbale, alrededor del punto F′, manteniendo siempre tenso el hilo y apoyando el lápiz en la regla: la curva así descrita será un arco de hipérbola, porque

$$MF' - MF = (CF' - CM) - (CMF - CM) = CF' - CMF = 2a.$$

TEOREMA I. *(Fig. 242).*

450. *La recta XX' que pasa por los focos de una hipérbo a, y la perpendicular á ella por el punto medio O de la distancia FF', son ejes de la hipérbola.*

1.º Sea M un punto de la hipérbola. Describiendo por debajo de XX' dos arcos cuyos centros sean F y F' y los radios FM y F'M, se determina un punto M'' que pertenece á la hipérbola, pues $M''F' - M''F = MF' - MF = 2a$; pero los puntos F y F' equidistan de M y M'', luego XX' es perpendicular á la cuerda MM'' en su punto medio.

2.º Demostremos ahora que tambien YY' es eje de la hipérbola. Haciendo centro en F y F', con los radios respectivos MF' y MF, describo por encima de XX' dos arcos que se cortarán en un punto M' perteneciente á la hipérbolo, puesto que $M'F - M'F' = MF' - MF = 2a$. Ahora, los triángulos MFF' y M'FF' son iguales; si doblamos la figura por YY' el punto F' caerá en F, la recta F'M' seguirá la direccion FM y el punto M' caerá en M, luego los ángulos en E son iguales y por tanto rectos, y además $M'E = ME$: por consiguiente YY' es perpendicular á MM' en su punto medio.

451. El eje XX', ó más bien su parte AB, se denomina *eje trasverso* ó *primer eje*, y el YY' *eje no trasverso* ó *segundo eje*. Los puntos A y B son los *vértices* de la hipérbola.

Siendo $AB = 2a$, podemos decir:

La diferencia de los radios vectores de un punto cualquiera de la hipérbola es igual al primer eje.

TEOREMA II. *(Fig. 243).*

452. *La diferencia de las distancias de los focos de una hipérbola á un punto cualquiera es menor ó mayor que 2a, segun que dicho punto esté fuera ó dentro de la hipérbola.*

Sea un punto exterior N. Tenemos

$$FN < FP + NP,$$
$$F'N = F'P + NP;$$

restando ordenadamente estas expresiones será

$$FN - F'N < FP - F'P \text{ ó bien } FN - F'N' < 2a.$$

Sea un punto interior N'. Tenemos

$$FN' = FP + PN'$$
$$F'N' < F'P + PN';$$

restando ordenadamente estas expresiones será

$$FN' - F'N' > FP - F'P \text{ ó bien } FN' - F'N' > 2a.$$

Los recíprocos son ciertos [**20**].

TEOREMA III. *(Fig. 242)*.

153. *El punto O en que se cortan los ejes de una hipérbola es centro de esta curva.*

Sea M un punto de la hipérbola. Uno O con M, prolongo la OM, tomo OM‴ = OM. Si pruebo que el punto M‴ pertenece á la hipérbola quedará demostrado el teorema.

Los triángulos OMF′ y OM‴F son iguales [**93**], luego MF′ = M‴F; tambien son iguales los triángulos OMF y OM‴F′, luego MF = M‴F′; por consiguiente

$$M'''F - M'''F' = MF' - MF = 2a,$$

lo que demuestra que el punto M‴ pertenece á la hipérbola.

154. La distancia OF del centro á cualquiera de los focos de la hipérbola, se llama *excentricidad* de esta curva.

155. *Se llama* TANGENTE *á una hipérbola toda recta indefinida que toca á esta curva en un solo punto.*

TEOREMA IV. *(Fig. 244)*.

La bisectriz del ángulo que forman los radios vectores de un punto de la hipérbola, es tangente á esta curva.

Sea TT′ la bisectriz del ángulo FM′F′. Demostremos que todos los puntos de TT′, á excepcion del M′, están fuera de la hipérbola.

Tomo sobre el radio vector FM′ una longitud M′N = M′F′, trazo la NF′, y uno un punto cualquiera P de la TT′ con F, F′ y N. La bisectriz TT′ es perpendicular á la base NF′ del triángulo isósceles M′NF′ y la divide en dos partes iguales, luego PF′ = PN. Ahora bien

$$PF - PN < FN \text{ ó } PF - PF' < M'F - M'F',$$

esto es,

$$PF - PF' < 2a;$$

luego el punto P está fuera de la elipse.

PROBLEMA II. *(Fig. 244)*.

156. *Por un punto M′ de la hipérbola trazar una tangente á esta curva.*

Trazo los radios vectores del punto dado, y divido el ángulo que forman en dos partes iguales: la bisectriz TT′ será la tangente pedida.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

LIBRO PRIMERO.

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES PRELIMINARES.

I.—Definiciones.

1. TRIGONOMETRÍA *es la ciencia que tiene por objeto resolver los triángulos*, esto es, *determinar numéricamente las partes desconocidas de un triángulo por medio de sus relaciones con otras partes conocidas.*

Se divide la Trigonometría en *rectilínea* y *esférica*, segun que se ocupa de los triángulos rectilíneos ó de los esféricos.

2. La geometría plana enseña á determinar gráficamente las partes desconocidas de un triángulo rectilíneo, cuando se conocen:

1.° Un lado y dos ángulos.
2.° Dos lados y el ángulo comprendido.
3.° Los tres lados.
4.° Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

Pero las construcciones geométricas tienen el inconveniente de ser poco exactas, á causa de la imperfeccion inevitable de los instrumentos que se emplean, y del limitado alcance de nuestros sentidos. Con objeto, pues, de hallar valores de las incógnitas tan aproximados como sea necesario, se han buscado ecuaciones que ligando entre sí las partes de un triángulo, permitan hallar las desconocidas en funcion de las conocidas.

Tal es el fin especial de la Trigonometría.

3. Las ecuaciones que ligan directamente los lados y ángulos de un triángulo son bastante complicadas: por esta razon se emplean, en lugar de los ánngulos, ciertas líneas rectas, llamadas *trigonométricas*, cuyas relaciones con los lados son muy sencillas, y tales que dado un ángulo se determinan las líneas que le corresponden, y recíprocamente.

SENO *de un ángulo ó de su arco correspondiente es la perpendicular tirada desde un extremo del arco al radio ó diámetro que pasa por el otro extremo.*

TANGENTE *de un ángulo ó de su arco correspondiente es la parte de tangente geométrica, tirada en un extremo del arco, comprendida entre este punto y el de interseccion de la tangente con el radio prolongado que pasa por el otro extremo.*

COSENO *de un arco es el seno de su complemento.*

COTANGENTE *de un arco es la tangente de su complemento.*

Debemos advertir que si el arco es mayor que 90° su complemento será el exceso del arco sobre el cuadrante.

Si consideramos el arco AM (*Fig.* 245), su seno es MP, su tangente AT, su coseno MQ y su cotangente BS.

Si el arco es ABM′ será

$$\text{sen} = M'P',\ \text{tg} = AT',\ \cos = M'Q,\ \cot = BS'.$$

Si el arco es ABM″ tendremos [1]

$$\text{sen} = M''P',\ \text{tg} = AT,\ \cos = M''Q',\ \cot = BS.$$

Por último, si el arco es ABM‴ será

$$\text{sen} = M'''P,\ \text{tg} = AT',\ \cos = M'''Q',\ \cot = BS'.$$

Existen además otras cuatro líneas trigonométricas, llamadas *secante*, *seno-verso*, *cosecante* y *coseno-verso*.

Secante de un arco AM es la recta OT tirada desde el centro al extremo de la tangente.

Seno-verso de un arco AM es la parte PA del radio, tirado á un extremo del arco, comprendida entre este extremo y el pié del seno.

---

1 Un ángulo es siempre menor que dos rectos, por tanto su arco correspondiente es menor que la semicircunferencia; pero las fórmulas trigonométricas se aplican á diversas cuestiones en que á veces se consideran arcos de una magnitud cualquiera.

Se llaman *cosecante* y *coseno-verso* de un arco AM la secante OS y el seno-verso BQ de su complemento.

Estas cuatro líneas son poco usadas, por lo que nosotros prescindiremos de ellas.

ESCOLIO. Á un mismo ángulo corresponden infinitos arcos, puesto que el radio puede variarse cuanto se quiera. No se crea por esto que un ángulo tiene infinitos senos, tangentes etc., porque suponemos siempre que el arco correspondiente está descrito con un radio determinado.

4. En los arcos y en las líneas trigonométricas debemos tener en cuenta no solo su magnitud, sinó además su *direccion*. Considerando el punto A como *orígen* ó punto de partida de los arcos, pueden éstos contarse en dos direcciones opuestas AMBM'... y AM'''B'M''...., que se representan por los signos *más* y *ménos*. Así el arco ABM' será positivo y se representará por + ABM', y el arco AB'M'' será negativo y se representará por − AB'M''.

Llamaremos desde ahora *complemento* de un arco á otro arco, positivo ó negativo, que sumado algebráicamente con el primero dé un cuadrante. Así el complemento de ABM' es − BM'; el complemento del arco negativo − AM''' es el positivo BAM'''.

Para hallar los signos de las líneas trigonométricas convendremos en considerar como positivas las de un arco terminado en el primer cuadrante, y como negativas las que tengan direccion contraria á las primeras.

Si trazamos dos diámetros AA', BB' perpendiculares entre sí, el primero *horizontal* y el segundo *vertical*, observaremos que los senos MP, M'P' son iguales á OQ, y los M''P' y M''' P son iguales á OQ'; luego los senos pueden contarse sobre el diámetro vertical á partir del punto O, hácia la parte superior ó hácia la inferior; los primeros deben ser positivos, porque sen AM = + MP = + OQ, por consiguiente los segundos serán negativos.

Los cosenos MQ y M'''Q' son iguales á OP, y los M'Q, M''Q' son iguales á OP' [1]; luego los cosenos pueden contarse sobre el diámetro horizontal á partir del punto O, hácia la derecha ó hácia la izquierda: los primeros deben ser positivos, porque cos AM = + MQ = + OP, por consiguiente los segundos serán negativos.

---

1 Por esto se dice con frecuencia: *coseno de un arco es la parte de radio comprendida entre el centro y el pié del seno.*

Si trazamos dos tangentes TT', SS' á la circunferencia O, por el orígen A de los arcos la primera, y por el extremo del primer cuadrante la segunda, se descubre á la simple inspeccion de la figura que las tangentes pueden contarse sobre TT' á partir del punto A, hácia la parte superior ó hácia la inferior; las primeras deben ser positivas, porque tg AM $= +$ AT, por consiguiente las segundas serán negativas.

Por último, las cotangentes pueden contarse sobre SS' á partir del punto B, hácia la derecha ó hácia la izquierda; y como las primeras son positivas, las segundas serán negativas.

Resumiendo lo dicho, tenemos:

1.° *Los senos se cuentan sobre el diámetro vertical, los cosenos sobre el horizontal, las tangentes sobre la tangente tirada por el orígen de los arcos y las cotangentes sobre la tangente tirada por el extremo del primer cuadrante.*

2.° *El punto de partida de los senos y cosenos es el centro del círculo, el de las tangentes el orígen de los arcos, y el de las cotangentes el extremo del primer cuadrante.*

3.° *Toda línea trigonométrica contada desde su orígen hácia la parte superior ó hácia la derecha es positiva; y si se cuenta desde su orígen hácia la parte inferior ó hácia la izquierda, es negativa.*

Así, llamando a al arco AM' será

$$\text{sen } a = + M'P' = + OQ, \text{tg } a = - AT',$$
$$\cos a = - M'Q = - OP', \cot a = - BS',$$

donde vemos que *las líneas trigonométricas de un arco terminado en el segundo cuadrante son negativas, á excepcion del seno que es positivo.*

Si a representa el arco ABM'' será

$$\text{sen } a = - M''P' = - OQ', \text{tg } a = + AT,$$
$$\cos a = - M''Q' = - OP', \cot a = + BS.$$

II.—Teoremas relativos á las líneas trigonométricas.

TEOREMA I. (*Fig.* 245).

5. *El seno de un arco es la mitad de la cuerda del arco duplo.*

Sea el arco AM. Prolonguemos el seno MP hasta que encuentre al arco en M‴: siendo al radio OA perpendicular á la cuerda MM‴, tenemos $MP = \frac{1}{2} MM'''$, y como MM‴ es la cuerda del arco MAM‴ duplo del AM, queda demostrado el teorema.

TEOREMA II. (*Fig.* 245).

6. *Los senos de dos arcos suplementarios son iguales, y las tangentes, cosenos y cotangentes son iguales, pero de signo contrario.*

Sea AM uno de los arcos. Trazando por M una paralela al diámetro AA′ se determina el arco ABM′ suplemento del AM, porque A′M′ = AM; ahora, los senos M′P′ y MP de estos arcos son iguales, como lados opuestos de un rectángulo, y tienen evidentemente el mismo signo.

Las tangentes AT y AT′ de los arcos suplementarios AM y ABM′ son catetos de los triángulos rectángulos OAT y OAT′, que tienen el lado OA comun y los ángulos en O iguales: siendo, pues, iguales estos triángulos tenemos AT = AT′. Además es evidente que los signos son contrarios.

Los cosenos OP y OP′ de los arcos suplementarios son iguales, como catetos de los triángulos rectángulos iguales OPM y OP′M′; además tienen signos contrarios.

Las cotangentes BS y BS′ tambien son iguales, por pertenecer á los triángulos rectángulos iguales OBS, y OBS′, y tienen signos contrarios.

Representando por a un arco, su suplemento será $180° - a$, y tendremos

$$\text{sen}\,(180° - a) = \text{sen}\,a,\ \text{tg}\,(180° - a) = -\,\text{tg}\,a,$$

$$\cos\,(180° - a) = -\cos\,a,\ \cot\,(180° - a) = -\cot\,a.$$

TEOREMA III. (*Fig.* 245).

7. *Los senos, tangentes y cotangentes de dos arcos iguales y de signo contrario son iguales y de signo contrario, y los cosenos son iguales y del mismo signo.*

Sea el arco negativo −AM‴, que llamaremos $-a$; tenemos

$$\text{sen}\,(-a) = -\,M'''P \quad [a].$$

Tomemos un arco positivo AM igual en magnitud al

— AM‴, y que por tanto deberá representarse por a; tenemos

$$\operatorname{sen} a = MP.$$

Pero el radio OA que pasa por el punto medio del arco MAM‴ es perpendicular á la cuerda MM‴, luego

$$M'''P = MP = \operatorname{sen} a;$$

sustituyendo en [a] M‴P por sen a, tendremos

$$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a.$$

Para la tangente tenemos

$$\operatorname{tg}(-a) = -AT', \quad \operatorname{tg} a = AT,$$

pero
$$AT' = AT = \operatorname{tg} a,$$

luego
$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a.$$

El coseno del arco — AM‴ es el seno del complemento BAM‴, esto es,

$$\cos(-a) = OP, \text{ además } \cos a = OP,$$

luego
$$\cos(-a) = \cos a.$$

Por último, la cotangente de — AM‴ es la tangente de BAM‴, esto es,

$$\cot(-a) = -BS', \text{ además } \cot a = BS,$$

pero
$$BS' = BS = \cot a,$$

luego
$$\cot(-a) = -\cot a.$$

Escolio. En virtud de este teorema las líneas trigonométricas de un arco negativo se sustituyen por las del mismo arco tomado positivamente.

8. De las definiciones de coseno y cotangente y del teorema anterior se deduce:

$$\operatorname{sen}(90° - a) = \cos a, \quad \operatorname{tg}(90° - a) = \cot a,$$
$$\cos(90° - a) = \operatorname{sen} a, \quad \cot(90° - a) = \operatorname{tg} a.$$
$$\operatorname{sen}(90° + a) = \cos(-a) = \cos a,$$
$$\operatorname{tg}(90° + a) = \cot(-a) = -\cot a,$$
$$\cos(90° + a) = \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a,$$
$$\cot(90° + a) = \operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a.$$

III.—Variaciones de las líneas trigonométricas.

9. Supongamos un arco *cero*, esto es, un arco que empiece y termine en el mismo punto A. El seno y la tangente valdrán *cero;* el coseno y la cotangente serán el seno y tangente del cuadrante AB, que son r é ∞ [1], luego

$$\text{sen}\,0 = 0,\quad \text{tg}\,0 = 0.\quad \cos 0 = r,\quad \cot 0 = \infty.$$

Si el arco aumenta desde cero, es evidente que aumentarán el seno y la tangente y que disminuirán el coseno y la cotangente.

Si el arco AM vale 30° su seno MP es la mitad de la cuerda MM‴ del arco duplo 60°, pero MM‴ $= r$ [**Geom. 181**], luego

$$\text{sen}\,30° = \cos 60° = \frac{r}{2}.$$

El coseno de 30° es el seno de 60°, y éste es la mitad de la cuerda del arco duplo 120°, pero esta cuerda es el lado del triángulo equilátero inscripto, que vale $r\sqrt{3}$ [**Geom. 183**], luego

$$\cos 30° = \text{sen}\,60° = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

Los triángulos semejantes OAT y OPM nos dan

$$\frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OP}\quad ó\quad \frac{\text{tg}\,30°}{r} = \frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°};$$

sustituyendo sen 30° y cos 30° por sus valores y despejando tg 30°, será

$$\text{tg}\,30° = \frac{r.\dfrac{r}{2}}{\dfrac{r\sqrt{3}}{2}},\quad ó\quad \text{tg}\,30° = \cot 60° = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Los triángulos semejantes OBS y OQM nos dan

$$\frac{BS}{OB} = \frac{QM}{OQ}\quad ó\quad \frac{\cot 30°}{r} = \frac{\cos 30°}{\text{sen}\,30°};$$

sustituyendo cos 30° y sen 30° por los valores hallados y despejando cot 30°, será

$$\cot 30° = \text{tg}\,60° = \frac{r.\dfrac{r\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{r}{2}} = r\sqrt{3}.$$

1 Puesto que la tangente termina en el punto de su encuentro con el diámetro BB', y estas rectas son paralelas.

Si el arco AM vale 45°, su seno es la mitad de la cuerda de 90°, ó sea del lado del cuadrado inscripto $r\sqrt{2}$ [**Geom. 180**], luego

$$\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Siendo el ángulo AOM de 45° el OTA valdrá lo mismo, luego $AT = OA = r$, esto es,

$$\text{tg } 45° = \cot 45° = r.$$

Si el arco es de 90°, tendremos

$$\text{sen } 90° = r, \text{ tg } 90° = \infty, \cos 90° = 0, \cot 90° = 0.$$

Cuando el arco crece entre 90 y 180 grados los valores absolutos del seno y de la tangente disminuyen, miéntras que los del coseno y cotangente aumentan, y todas estas líneas pasan por los mismos valores que tuvieron en el primer cuadrante, pero en órden inverso.

Habiendo hallado las líneas trigonométricas de los arcos de 30, 60 y 45 grados, se obtendrán fácilmente las de los arcos suplementarios; así

$$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{r}{2}, \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 150° = -\text{tg } 30° = \frac{-r\sqrt{3}}{3}, \cot 150° = -\cot 30° = -r\sqrt{3}$$

$$\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{r}{2}, \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{r}{2}$$

$$\text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -r\sqrt{3}, \cot 120° = -\cot 60° = -\frac{r\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{r\sqrt{2}}{2}, \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 135° = -\text{tg } 45° = -r, \cot 135° = -\cot 45° = -r.$$

Si el arco es de 180°, tendremos

$$\text{sen } 180° = 0, \text{ tg } 180° = 0, \cos 180° = -r, \cot 180° = -\infty.$$

Cuando el arco crece entre 180 y 270 grados, aumentan los valores absolutos del seno y tangente, y disminuyen los del coseno y cotangente. Al llegar á 270°, se tiene

$$\text{sen } 270° = -r, \text{ tg } 270° = \infty, \cos 270° = 0, \cot 270° = 0.$$

Creciendo el arco entre 270 y 360 grados disminuyen los valores absolutos del seno y tangente, y aumentan los del coseno y cotangente. Al llegar al límite se tiene

$$\text{sen } 360° = 0,\ \text{tg } 360° = 0,\ \cos 360° = r,\ \cot 360° = -\infty.$$

10. Segun acabamos de ver, el mayor valor absoluto del seno ó coseno de un arco es el radio, y el menor es cero; el mayor valor absoluto de la tangente ó cotangente es ∞, y el menor es cero.

IV.—Arcos correspondientes á una misma línea trigonométrica.

Problema I. *(Fig. 245)*.

11. *Dado el seno* m *de un arco y el radio, hallar este arco.*

Con el radio dado describo una circunferencia O, trazo dos diámetros rectangulares AA′ y BB′, tomo sobre el diámetro vertical una longitud OQ igual al seno m, y trazo por Q una paralela M′M al diámetro horizontal: es evidente que los arcos AM y ABM′ tienen por seno la recta dada m.

Si al arco AM se añaden una, dos, tres ó más circunferencias, los arcos resultantes tendrán los mismos extremos que el AM, por consiguiente MP será el seno de todos ellos. La misma observacion puede hacerse con respecto al arco ABM′. Luego *á un mismo seno corresponden infinitos arcos.*

Para hallar una expresion que los comprenda á todos, representemos el arco AM por a, y el radio de la circunferencia O por 1; la circunferencia $2\pi r$ estará representada por 2π, el arco de 180° por π, y el arco ABM′ por $\pi - a$. Segun esto, los arcos que tienen el mismo seno estarán comprendidos en las expresiones generales

$$2\pi n + a,\ 2\pi n + (\pi - a) = (2n + 1)\pi - a,$$

siendo n un número entero cualquiera.

Si el seno dado fuese negativo $-m$, tomaríamos OQ′ $= m$, y trazando la paralela M″M‴ al diámetro A′A, resultarian los arcos ABM″ y ABM‴ cuyo seno es $-m$: añadiendo á estos arcos un número cualquiera de circunferencias, resultarian infinitos arcos comprendidos en las mismas expresiones anteriores

$$2\pi n + a \text{ y } (2n + 1)\pi - a,$$

siempre que por a representásemos el arco ABM″.

Escolio. Este problema será posible siempre que el seno dado no sea mayor que el radio [**10**].

Problema II.

12. *Dado el coseno* m *de un arco y el radio, hallar este arco.*

Trazando la circunferencia y los diámetros rectangulares AA′ y BB′, tomo sobre el horizontal una longitud OP igual al coseno m, y tiro por P una paralela MM‴ al diámetro vertical: los arcos AM y ABM‴ tienen por coseno la recta dada m.

Llamando a al arco AM, el ABM‴ será $2\pi - a$: añadiendo á cada uno de estos arcos un número cualquiera n de circunferencias, los arcos resultantes tendrán los mismos extremos, por consiguiente OP será el coseno de todos ellos. Las expresiones generales de estos arcos son

$$2\pi n + a,\ 2\pi n + (2\pi - a) = 2\pi(n+1) - a,$$

que pueden comprenderse en la siguiente

$$2\pi n \pm a.$$

Si el coseno dado fuese negativo, procederíamos de un modo análogo, y encontraríamos la misma expresion general.

Escolio. Este problema será posible siempre que el coseno dado no sea mayor que el radio.

Problema III.

13. *Dada la tangente* m *de un arco y el radio, hallar este arco.*

Tiro por el orígen A de los arcos una tangente geométrica, tomo sobre ella una longitud AT $= m$, y trazo la secante TM″ que pasa por el centro: los arcos AM y ABM″ tienen por tangente la recta dada m.

Representando por a el arco AM, es fácil ver que las expresiones de los arcos que tienen la misma tangente son

$$2\pi n + a,\ (2n+1)\pi + a;$$

el sumando $2\pi n$ de la primera representa un número par de semicircunferencias, y el sumando $(2n+1)\pi$ de la segunda representa un número impar de ellas, luego las dos expresiones podrán comprenderse en la siguiente

$$n\pi + a,$$

siendo n un número entero cualquiera.

Escolio. Este problema es posible, cualquiera que sea el valor de la tangente [**10**].

Problema IV.

14. *Dada la cotangente* m *de un arco y el radio, hallar este arco.*

Tómese sobre BS una longitud igual á m, y continúese como en el problema anterior.

La expresion general de los arcos que tienen igual cotangente es tambien $n\pi + a$, y el problema siempre es posible.

CAPÍTULO SEGUNDO.

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.

I.—Relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco.

15. Sea $AM = a$ un arco positivo y menor que un cuadrante. El seno MP y el coseno OP de este arco forman con el radio OM un triángulo rectángulo OPM, en el que se verifica

$$MP^2 + OP^2 = OM^2,$$

ó bien

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = r^2 \qquad [1].$$

Los triángulos semejantes OTA y OMP nos dan

$$\frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OP},$$

ó sea

$$\frac{\operatorname{tg} a}{r} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \qquad [2]$$

Igualmente, los triángulos semejantes OBS y OQM nos dan

$$\frac{BS}{OB} = \frac{QM}{OQ};$$

ó

$$\frac{\cot a}{r} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \qquad [3]$$

Las relaciones [1], [2] y [3], obtenidas en el supuesto de ser el arco a positivo y menor que un cuadrante, son completamente generales.

Supongamos, en efecto, un arco cualquiera, positivo ó negativo, menor ó mayor que la circunferencia. Si A es el orígen de este arco, su extremo caerá entre A y B, por ejemplo en M. ó entre B y A′ como en M′, ó entre A′ y B′ como en M″, ó entre B′ y A como en M‴. Más adelante trataremos el caso de ser el arco a múltiplo de 90°.

Como las líneas trigonométricas de dos arcos que tienen los mismos extremos son tambien las mismas, las del arco propuesto serán las del AM, ABM′, ABM″ ó ABM‴, segun el cuadrante en que termine el arco a. Si, pues, las relaciones [1], [2] y [3] son ciertas para las líneas de estos cuatro arcos, tambien lo serán para las de un arco cualquiera.

Sabemos ya que son ciertas para un arco AM terminado en el primer cuadrante; además, las líneas trigonométricas de un arco ABM′ terminado en el segundo cuadrante, son iguales en valor absoluto á las de un arco AM terminado en el primer cuadrante [6], y es fácil ver, por la figura, que puede decirse lo mismo de las líneas trigonométricas de los arcos ABM″ y ABM‴ que terminan en el tercero y cuarto cuadrantes; luego considerando solamente los valores absolutos de las líneas trigonométricas, las relaciones que nos ocupan son ciertas para cualquier arco.

Veamos, ahora, si dichas relaciones serán tambien ciertas cuando tomemos en cuenta los signos.

La relacion

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = r^2,$$

es la misma cualesquiera que sean los signos de sen a y cos a, puesto que estas cantidades se hallan elevadas al cuadrado.

Las relaciones

$$\frac{\operatorname{tg} a}{r} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}, \quad \frac{\cot a}{r} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a},$$

se convierten, cuando el arco termina en el segundo cuadrante, en

$$\frac{-\operatorname{tg} a}{r} = \frac{\operatorname{sen} a}{-\cos a}, \quad \frac{-\cot a}{r} = \frac{-\cos a}{\operatorname{sen} a},$$

ó sea en

$$-\frac{\operatorname{tg} a}{r} = -\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}, \quad -\frac{\cot a}{r} = -\frac{\cos a}{\operatorname{sen} a},$$

que cambiando los signos á los dos miembros, nos dan

$$\frac{\operatorname{tg} a}{r} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}; \quad \frac{\cot a}{r} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}.$$

El mismo resultado obtendríamos si el arco terminase en el tercero ó cuarto cuadrante.

Supongamos, por último, que el arco dado sea múltiplo de 90°: en tal supuesto, el extremo del arco será uno de los puntos B, A′, B′ ó A.

Si el extremo es B, el seno es r, el coseno 0, la tangente ∞ y la cotangente 0; sustituyendo, en las tres relaciones, las líneas por estos valores, se convierten las ecuaciones en identidades.

La misma comprobacion puede hacerse en los demás casos.

16. Las relaciones

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = r^2 \qquad [1]$$

$$\frac{\operatorname{tg} a}{r} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \qquad [2]$$

$$\frac{\cot a}{r} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \qquad [3],$$

contienen las cuatro líneas trigonométricas del arco a, además del radio que se supone conocido; por consiguiente si se nos dá una de dichas líneas, podremos hallar los valores de las otras tres, pues dispondremos de un sistema de tres ecuaciones con igual número de incógnitas.

Ejemplos.

1.° *Dado el seno de un arco, hallar las demás líneas trigonométricas.*

De la ecuacion [1] se deduce

$$\cos a = \pm\sqrt{r^2 - \operatorname{sen}^2 a} \qquad [4];$$

sustituyendo este valor en las ecuaciones [2] y [3], y despejando $\operatorname{tg} a$ y $\cot a$, resulta

$$\operatorname{tg} a = \frac{r \operatorname{sen} a}{\pm\sqrt{r^2 - \operatorname{sen}^2 a}}, \quad \cot a = \frac{\pm r \cdot \sqrt{r^2 - \operatorname{sen}^2 a}}{\operatorname{sen} a}.$$

2.° *Dado el coseno de un arco, hallar las demás líneas trigonométricas.*

Despejando $\operatorname{sen} a$ en la ecuacion [1], y siguiendo una marcha análoga á la del ejemplo anterior, quedará resuelta la cuestion.

3.° *Dada la tangente de un arco, hallar las demás líneas trigonométricas.*

Despejando sen a en la ecuacion [2], y sustituyendo su valor en la [1], hallaríamos fácilmente el coseno de a en funcion de la tangente, y despues el seno. Tambien podria seguirse cualquiera otro de los métodos generales enseñados en Álgebra, pero es más sencillo el siguiente procedimiento particular.

Elevando al cuadrado la ecuacion [2] se tiene

$$\frac{\operatorname{tg}^2 a}{r^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a};$$

de esta igualdad se deducen otras dos [Arit. 195]

$$\frac{r^2 + \operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a}, \quad \frac{r^2 + \operatorname{tg}^2 a}{r^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a};$$

sustituyendo $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a$ por r^2, y despejando será

$$\operatorname{sen}^2 a = \frac{r^2 \operatorname{tg}^2 a}{r^2 + \operatorname{tg}^2 a}, \quad \cos^2 a = \frac{r^4}{r^2 + \operatorname{tg}^2 a},$$

de donde

$$\operatorname{sen} a = \pm \frac{r \operatorname{tg} a}{\sqrt{r^2 + \operatorname{tg}^2 a}} \quad [5], \qquad \cos a = \pm \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \operatorname{tg}^2 a}} \quad [6].$$

Multiplicando las relaciones [2] y [3] se obtiene

$$\operatorname{tg} a \cot a = r^2 \qquad [7],$$

de donde

$$\cot a = \frac{r^2}{\operatorname{tg} a}.$$

Las fórmulas [5] y [6] dan para el seno y para el coseno del arco a dos valores iguales y de signo contrario, y así debia suceder, porque si conocemos, por ejemplo, la tangente AT, ésta pertenece á los arcos que terminan en M y á los que terminan en M″, luego la fórmula [5] deberá dar á la vez los senos, iguales y de signo contrario, de dichos arcos, y la fórmula [6], los cosenos, tambien iguales y de signo contrario.

Pero si además de la tangente se conoce el arco en que termina el arco a, cada línea tendrá un sólo valor, y de los dobles signos se tomarán los convenientes, segun el cuadrante en que termine el arco.

Si termina en el primer cuadrante positivo, todas sus líneas trigonométricas son positivas, y deberemos tomar en ambas fórmulas el signo *más*; si el arco termina en el segundo cuadrante positivo, el seno es positivo, pero el coseno y la tangente son negativas, luego tomaremos en ambas fórmulas el signo *menos*, y de este modo el seno de a será positivo y el coseno negativo.

Cualquiera que sea el cuadrante, los signos de las dos fórmulas deben corresponderse, es decir, que tomaremos en las dos el signo *más* ó en las dos el signo *menos*.

17. Las fórmulas trigonométricas se simplifican considerablemente suponiendo que el radio es igual á la unidad lineal. Haciendo $r = 1$, las fórmulas halladas en este capítulo se trasforman en las siguientes:

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \quad [1], \qquad \text{tg}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} \quad [2],$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a} \quad [3], \qquad \cos a = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 a} \quad [4],$$

$$\text{sen}\, a = \pm \frac{\text{tg}\, a}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}} \quad [5], \qquad \cos a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 a}} \quad [6],$$

$$\text{tg}\, a \cot a = 1 \qquad [7].$$

18. Ahora es necesario examinar qué trasformacion sufrirá una fórmula, obtenida en el supuesto $r = 1$, cuando el radio sea diferente de la unidad lineal.

Sean MP y M'P' (*Fig.* 245) los senos de dos arcos correspondientes al ángulo O; tenemos

$$\frac{\text{MP}}{\text{OM}} = \frac{\text{M'P'}}{\text{OM'}}.$$

Si el radio OM es igual á la unidad y el OM' es igual á r, y representamos por a y a' los arcos AM y A'M', será

$$\frac{\text{sen}\, a}{1} = \frac{\text{sen}\, a'}{r} \quad \text{ó} \quad \text{sen}\, a = \frac{\text{sen}\, a'}{r}.$$

Considerando las demás líneas trigonométricas, hallaríamos

$$\text{tg}\, a = \frac{\text{tg}\, a'}{r}, \quad \cos a = \frac{\cos a'}{r}, \quad \cot a = \frac{\cot a'}{r}.$$

Como los acentos sólo sirven para denotar el cambio de radio, pueden suprimirse; luego *para restablecer el radio en una fórmula hallada en el supuesto de ser el radio igual á la unidad, se divide cada línea trigonométrica por el nuevo radio* r.

Por ejemplo, la fórmula, hallada en el supuesto $r = 1$,

$$\operatorname{sen} a = \pm \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}},$$

se trasforma en

$$\frac{\operatorname{sen} a}{r} = \pm \frac{\frac{\operatorname{tg} a}{r}}{\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 a}{r^2}}} = \pm \frac{\operatorname{tg} a}{r\sqrt{\frac{r^2 + \operatorname{tg}^2 a}{r^2}}},$$

de donde, simplificando y despejando sen a,

$$\operatorname{sen} a = \pm \frac{r \operatorname{tg} a}{\sqrt{r^2 + \operatorname{tg}^2 a}}.$$

II.—Relaciones entre las líneas trigonométricas de varios arcos.

Problema I. *(Fig. 247)*.

19. *Dados los senos y cosenos de dos arcos, hallar los senos y cosenos de la suma y diferencia de dichos arcos.*

Sean dos arcos $AB = a$, $BC = b$ positivos y menores que un cuadrante: la suma de ellos es el arco $AC = a + b$.

Conocemos sen $a = BD$, cos $a = OD$, sen $b = CE$, cos $b = OE$, y vamos á hallar primeramente

$$\operatorname{sen}(a + b) = CF \quad \text{y} \quad \cos(a + b) = -OF$$

en funcion de las cuatro líneas conocidas. Despues determinaremos sen $(a - b)$ y cos $(a - b)$.

Tiro desde el punto E una perpendicular EG y una paralela EH al radio OA: segun esta construccion será $HF = EG$, $FG = HE$.

Ahora bien,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a + b) &= HF + CH = EG + CH \\ \cos(a + b) &= OG - FG = OG - HE \end{aligned}\right\} [a].$$

Si hallamos los valores de las líneas EG, OG, CH y HE en funcion de los senos y cosenos de a y b, quedará resuelto el problema.

Los triángulos OEG y OBD son semejantes, luego

$$\frac{EG}{OE}=\frac{BD}{OB},\quad \frac{OG}{OE}=\frac{OD}{OB},$$

ó bien
$$\frac{EG}{\cos b}=\frac{\operatorname{sen} a}{1},\quad \frac{OG}{\cos b}=\frac{\cos a}{1};$$

de estas igualdades se deduce

$$EG=\operatorname{sen} a\cos b,\ OG=\cos a\cos b.$$

Tambien los triángulos CHE y OBD son semejantes [**Geom. 144**], luego

$$\frac{CH}{CE}=\frac{OD}{OB},\quad \frac{HE}{CE}=\frac{BD}{OB},$$

ó bien
$$\frac{CH}{\operatorname{sen} b}=\frac{\cos a}{1},\quad \frac{HE}{\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen} a}{1};$$

de estas igualdades se deduce

$$CH=\cos a\operatorname{sen} b,\ HE=\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b.$$

Sustituyendo las lineas por sus valores en las ecuaciones [a], resulta

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cos b+\cos a\operatorname{sen} b \qquad [8],$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b \qquad [9].$$

La suma AC de los arcos dados es en nuèstra figura mayor que un cuadrante, y el coseno OF lleva, por tanto, signo *menos*; si la suma $a+b$ fuese menor que un cuadrante su coseno sería positivo, pero igual tambien á OG — FG, por lo que en nada se alteraria la marcha del razonamiento ni las fórmulas finales, como es fácil comprobar.

Estas fórmulas se han hallado en el supuesto de ser los arcos a y b positivos, y menor cada uno que un cuadrante. Demostremos, ahora, que son generales.

Supongamos que las fórmulas [8] y [9] sean ciertas para dos arcos positivos de una magnitud cualquiera, y demostremos que seguirán siendo ciertas si uno de los arcos, por ejemplo el a, aumenta en 90 grados.

Tenemos [8]

$$\operatorname{sen}(90^\circ + a) = \cos(-a) = \cos a.$$
$$\cos(90^\circ + a) = \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a;$$

luego

$$\operatorname{sen}(90^\circ + a + b) = \cos(a+b),$$
$$\cos(90^\circ + a + b) = -\operatorname{sen}(a+b).$$

Además hemos supuesto que siendo a y b positivos y de una magnitud cualquiera, se verifica

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Sustituyendo en estas fórmulas $\operatorname{sen}(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$ por los valores hallados anteriormente, se tiene

$$\cos(90^\circ + a + b) = \cos(90^\circ + a)\cos b - \operatorname{sen}(90^\circ + a)\operatorname{sen} b,$$
$$\operatorname{sen}(90^\circ + a + b) = \operatorname{sen}(90^\circ + a)\cos b + \cos(90^\circ + a)\operatorname{sen} b,$$

donde vemos que las fórmulas [8] y [9] son ciertas cuando en lugar de un arco a se pone $90^\circ + a$.

Como dichas fórmulas se han hallado suponiendo que a y b son menores que un cuadrante, podemos decir ahora que son ciertas para un valor de a mayor que 90° y menor que 180° y uno de b menor que 90°; por consiguiente tambien serán ciertas cuando a esté comprendido entre 180° y 270° siendo b menor que 90°, y así sucesivamente. Luego las fórmulas son ciertas para cualquier valor positivo de a y para cualquier valor positivo de b menor que 90°.

Aplicando al arco b lo dicho sobre el a, deduciríamos que las fórmulas [8] y [9] son ciertas para cualesquiera valores positivos de a y b.

Supongamos, ahora, que las fórmulas sean ciertas para dos arcos cualesquiera, y demostremos que tambien lo serán si uno de ellos, por ejemplo el b, disminuye en 90 grados.

Tenemos [7 y 8]

$$\operatorname{sen}(b - 90^\circ) = -\operatorname{sen}(90^\circ - b) = -\cos b,$$
$$\cos(b - 90^\circ) = \cos(90^\circ - b) = \operatorname{sen} b;$$

luego

$$\operatorname{sen}(a + b - 90^\circ) = -\cos(a+b),$$
$$\cos(a + b - 90^\circ) = \operatorname{sen}(a+b).$$

Además hemos supuesto que siendo a y b arcos cualesquiera, se verifica

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Sustituyendo en estas fórmulas sen $(a+b)$, cos $(a+b)$, sen b, cos b por los valores hallados anteriormente, será

$$\cos(a+b-90^\circ)=-\operatorname{sen} a \operatorname{sen}(b-90^\circ)+\cos a \cos(b-90^\circ),$$

$$\operatorname{sen}(a+b-90^\circ)=\cos a \operatorname{sen}(b-90^\circ)+\operatorname{sen} a \cos(b-90^\circ),$$

donde vemos que las fórmulas [8] y [9] son ciertas cuando se resta 90° de uno de los arcos.

Como las fórmulas son ciertas para todo arco positivo a y para otro b, positivo y menor que un cuadrante, podemos decir ahora que son ciertas para un valor positivo cualquiera de a y un valor negativo comprendido entre -90° y -180°, y así sucesivamente. Luego las fórmulas son ciertas para todo valor positivo de a y para todo valor negativo de b.

Aplicando al arco a lo dicho sobre el b, deduciríamos que las fórmulas [8] y [9] son ciertas para todo valor negativo de a y de b.

Cambiando el signo de b en las ecuaciones [8] y [9], se tiene

$$\operatorname{sen}(a+(-b))=\operatorname{sen} a \cos(-b)+\cos a \operatorname{sen}(-b),$$

$$\cos(a+(-b))=\cos a \cos(-b)-\operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b);$$

ó

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a \cos b-\cos a \operatorname{sen} b \qquad [10],$$

$$\cos(a-b)=\cos a \cos b+\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad [11].$$

Estas fórmulas son tan generales como las [8] y [9], puesto que se derivan de ellas.

PROBLEMA II.

20. *Dadas las tangentes de dos arcos, hallar las tangentes de la suma y diferencia de dichos arcos.*

Si los arcos son a y b, tenemos

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\operatorname{sen} a \cos b+\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Dividiendo los dos términos de la última fraccion por cos a cos b, será

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b}+\dfrac{\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b}-\dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}+\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1-\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}},$$

ó $$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Cambiando en esta fórmula el signo de b, resulta

$$\operatorname{tg}(a+(-b))=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)},$$

ó $$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Si suponemos $a=45°$, será $\operatorname{tg} a=1$ [**9**], y las fórmulas halladas se convierten en

$$\operatorname{tg}(45°+b)=\frac{1+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} b}, \quad \operatorname{tg}(45°-b)=\frac{1-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} b}.$$

Problema III.

21. *Dado el seno, el coseno y la tangente de un arco, hallar el seno, el coseno y la tangente del arco duplo.*

Si en las fórmulas que dan $\operatorname{sen}(a+b)$; $\cos(a+b)$ y $\operatorname{tg}(a+b)$, suponemos $b=a$, tendremos

$$\operatorname{sen}(a+a)=\operatorname{sen} a \cos a+\cos a \operatorname{sen} a$$
$$\cos(a+a)=\cos a \cos a-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} a$$
$$\operatorname{tg}(a+a)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} a},$$

ó bien

$$\operatorname{sen} 2a=2 \operatorname{sen} a \cos a$$
$$\cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a$$
$$\operatorname{tg} 2a=\frac{2 \operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}.$$

Representando $2a$ por A, será $a=\frac{1}{2}$ A, y estas tres fórmulas se convierten en:

$$\operatorname{sen} A=2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A$$
$$\cos A=\cos^2 \tfrac{1}{2} A-\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A$$
$$\operatorname{tg} A=\frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} A}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A},$$

PROBLEMA IV.

22. *Dado el coseno de un arco, hallar el seno, el coseno y la tangente de su mitad.*

En el problema anterior hemos hallado

$$\cos A = \cos^2 \tfrac{1}{2} A - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A,$$

además [**15**] $$1 = \cos^2 \tfrac{1}{2} A + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Sumando estas ecuaciones resulta

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A,$$

y restándolas se obtiene

$$1 - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Despejando $\cos \frac{1}{2} A$ y $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A$, tendremos

$$\cos \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}, \operatorname{sen} \frac{1}{2} A, = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}.$$

Dividiendo la segunda fórmula por la primera será

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}.$$

De estos dobles signos se tomarán los convenientes, segun el cuadrante en que termine el arco $\frac{1}{2} A$. Si, por ejemplo, el arco A es positivo y menor que 180°, su mitad es menor que 90°, y las líneas trigonométricas de $\frac{1}{2} A$ llevarán el signo *más*. Si se halla comprendido entre 180° y 360°, $\frac{1}{2} A$ estará entre 90° y 180°, luego el seno deberá llevar signo *más*, pero el coseno y la tangente llevarán signo *menos*.

PROBLEMA V.

23. *Dado el seno de un arco, hallar el seno y coseno de su mitad.*

Tenemos [**21**]

$$\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A,$$

además $$1 = \cos^2 \tfrac{1}{2} A + \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Sumando estas ecuaciones resulta
$$1 + \text{sen}\, A = \left(\cos \tfrac{1}{2} A + \text{sen}\, \tfrac{1}{2} A\right)^2;$$
y restando de la segunda la primera, se obtiene
$$1 - \text{sen}\, A = \left(\cos \tfrac{1}{2} A - \text{sen}\, \tfrac{1}{2} A\right)^2.$$

Extrayendo la raiz cuadrada será
$$\cos \tfrac{1}{2} A + \text{sen}\, \tfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{1 + \text{sen}\, A}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} A - \text{sen}\, \tfrac{1}{2} A = \pm\sqrt{1 - \text{sen}\, A};$$
de estas fórmulas se deduce [**Álg. 4, 2.°**]
$$\cos \tfrac{1}{2} A = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \text{sen}\, A} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \text{sen}\, A}$$
$$\text{sen}\, \tfrac{1}{2} A = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \text{sen}\, A} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - \text{sen}\, A}.$$

Segun estas fórmulas, sen $\frac{1}{2}$ A y cos $\frac{1}{2}$ A tienen cuatro valores; pero si conocemos el cuadrante en que termina el arco A, el seno y el coseno de $\frac{1}{2}$ tendrán un sólo valor.

Si por ejemplo, el arco A es positivo y menor que un cuadrante, será $\frac{1}{2} A < 45°$, luego sen A, sen $\frac{1}{2}$ A y cos $\frac{1}{2}$ A son positivos, y como cos $\frac{1}{2} A >$ sen $\frac{1}{2}$ A, deberán tomarse en ambas fórmulas los signos superiores. Si A es mayor que un cuadrante y menor que dos, $\frac{1}{2}$ A será mayor que 45° y menor que 90°, luego sen A, sen $\frac{1}{2}$ A y cos $\frac{1}{2}$ A son positivos, y como sen $\frac{1}{2} A >$ cos $\frac{1}{2}$ A, deberá tomarse el signo superior en el primer radical de cada fórmula y el inferior en el segundo radical.

III.—Trasformacion de ciertas expresiones en otras calculables por logaritmos.

PROBLEMA.

24. *Convertir en productos la suma y la diferencia de dos senos ó de dos cosenos.*

Tenemos las fórmulas

$$\text{sen}\,(a+b)=\text{sen}\,a\cos b+\cos a\,\text{sen}\,b$$
$$\text{sen}\,(a-b)=\text{sen}\,a\cos b-\cos a\,\text{sen}\,b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b.$$

Sumando y restando la primera y segunda, y despues la tercera y cuarta, resulta

$$\text{sen}\,(a+b)+\text{sen}\,(a-b)=\ 2\,\text{sen}\,a\cos b$$
$$\text{sen}\,(a+b)-\text{sen}\,(a-b)=\ 2\cos a\,\text{sen}\,b$$
$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=\ 2\cos a\cos b$$
$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b.$$

Representando la suma $a+b$ por A y la diferencia $a-b$ por B, será $a=\frac{A+B}{2}$, $b=\frac{A-B}{2}$, y las cuatro últimas fórmulas se convierten en las siguientes:

$$\text{sen}\,A+\text{sen}\,B=\ 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\quad[12]$$
$$\text{sen}\,A-\text{sen}\,B=\ 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\quad[13]$$
$$\cos A+\cos B=\ 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\quad[14]$$
$$\cos A-\cos B=-2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\quad[15].$$

Por medio de estas fórmulas se calcula fácilmente el logaritmo de la suma y el de la diferencia de dos senos ó de dos cosenos, lo que sin ellas sería bastante trabajoso, porque generalmente no se conocen las líneas trigonométricas de los arcos, sino los logaritmos de las mismas.

Si tuviéramos la suma ó diferencia de un seno y un coseno, por ejemplo sen A + cos B, sustituiríamos cos B por sen (90° — B), y podria aplicarse ya la fórmula [12].

Es fácil hacer calculable por logaritmos la suma ó diferencia de dos tangentes. Tenemos, en efecto,

$$\text{tg}\,a\pm\text{tg}\,b=\frac{\text{sen}\,a}{\cos a}\pm\frac{\text{sen}\,b}{\cos b}=\frac{\text{sen}\,a\cos b\pm\cos a\,\text{sen}\,b}{\cos a\cos b}$$
$$=\frac{\text{sen}\,(a\pm b)}{\cos a\cos b}.$$

23. Vamos á trasformar la expresion $x = a \pm b$ en otra calculable fácilmente por logaritmos, suponiendo que a y b son números absolutos, y que $a > b$ en el caso $x = a - b$.

1.° La expresion $\qquad x = a + b$

se trasforma en $\qquad x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right);$

cualquiera que sea el valor de $\frac{b}{a}$, siempre existe un arco cuya tangente es $\sqrt{\frac{b}{a}}$ [**13, escolio**]: supongamos $\sqrt{\frac{b}{a}} = \operatorname{tg} \varphi$ ó $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2 \varphi$, y será

$$x = a\,(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = a : \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi};$$

de la fórmula [6] número **17** se deduce

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \cos^2 \varphi,$$

luego $\qquad x = \frac{a}{\cos^2 \varphi}.$

2.° La expresion $\qquad x = a - b$

se trasforma en $\qquad x = a\left(1 - \frac{b}{a}\right);$

siendo $\frac{b}{a} < 1$, y por tanto $\sqrt{\frac{b}{a}} < 1$, existe un arco cuyo seno es $\sqrt{\frac{b}{a}}$ [**11, escolio**]: supongamos

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = \operatorname{sen} \varphi \text{ ó } \frac{b}{a} = \operatorname{sen}^2 \varphi$$

y será $\qquad x = a\,(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) = a \cos^2 \varphi.$

Las dos expresiones obtenidas contienen un arco auxiliar φ, que se calcula de antemano por medio de la ecuacion $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2 \varphi$ en el primer caso, y en el segundo por medio de $\frac{b}{a} = \operatorname{sen}^2 \varphi$.

26. Propongámonos hacer calculable por logaritmos la expresion

$$x = m \operatorname{sen} a + n \cos a.$$

Podríamos seguir el método general expuesto en el número anterior, pero es preferible el siguiente.

Tenemos $$x = m\left(\operatorname{sen} a + \frac{n}{m} \cos a\right),$$

hagamos $$\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \varphi,$$

y será $$x = m(\operatorname{sen} a + \operatorname{tg} \varphi \cos a)$$

ó $$x = \frac{m}{\cos \varphi}(\operatorname{sen} a \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos a) = \frac{m}{\cos \varphi} \operatorname{sen}(a + \varphi).$$

27. Dividiendo cada una las fórmulas [12], [13], [14] y [15] por cada una de las siguientes, resulta

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) \cot \frac{1}{2}(A - B)$$

ó $$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)}.$$

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B)$$

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B)$$

$$\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A + B)$$

$$\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A + B) \cot \frac{1}{2}(A - B).$$

La primera de estas fórmulas es muy importante; traducida al lenguaje vulgar dice:

La suma de los senos de dos arcos partida por su diferencia, es igual á la tangente de la semisuma de dichos arcos partida por la tangente de la semidiferencia de los mismos.

CAPÍTULO TERCERO.

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

I.—Construccion de las tablas trigonométricas.

28. Llamamos tablas trigonométricas á la reunion de todos los arcos comprendidos entre 0 y 90°, que crecen de minuto en minuto, de diez en diez segundos ó de segundo en segundo, y de los valores numéricos de sus correspondientes líneas trigonométricas para un radio dado.

Propongámonos exponer un procedimiento elemental por el que podrian calcularse las líneas trigonométricas de los arcos que crecen de minuto en minuto, siendo el radio igual á la unidad.

Á este fin demostraremos dos proposiciones.

Teorema I. *(Fig. 248.)*

29. *Todo arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que su seno y menor que su tangente.*

Sea el arco AM $= a$. El arco AM es mayor que su cuerda, y ésta, como oblicua á OA, es mayor que el seno MP, luego con mayor razon será

$$a > \operatorname{sen} a.$$

El área del sector OAM es menor que la del triángulo OAT, esto es,

$$arc.\ \mathrm{AM} \times \frac{\mathrm{OA}}{2} < \mathrm{AT} \times \frac{\mathrm{OA}}{2},$$

dividiendo los miembros de esta desigualdad por $\dfrac{\mathrm{OA}}{2}$, resulta

$$a < \operatorname{tg} a.$$

Teorema II.

30. *La diferencia entre un arco menor que un cuadrante y su seno, es menor que la cuarta parte del cubo del arco.*

Acabamos de ver que

$$\frac{1}{2}a < \operatorname{tg}\frac{1}{2}a, \text{ ó } \frac{1}{2}a < \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a};$$

multiplicando ambos miembros de la segunda desigualdad por $2\cos^2\frac{1}{2}a$, y recordando que $2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a = \operatorname{sen} a$, resulta

$$a\cos^2\frac{1}{2}a < \operatorname{sen} a, \text{ ó } a\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\right) < \operatorname{sen} a,$$

de donde

$$a - \operatorname{sen} a < a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a.$$

Si $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a$ se sustituye por una cantidad mayor $\frac{1}{2}a$, la anterior desigualdad subsistirá, pues se habrá aumentado el segundo miembro, luego

$$a - \operatorname{sen} a < \frac{a^3}{4}.$$

31 Calculemos ahora el seno del arco 1′, esto es, el seno del arco menor de las tablas:

Siendo $r=1$, la longitud de la semicircunferencia, ó sea del arco de 180°, es π, luego

$$arc.\ 180° = 3,\ 141\ 592\ 653\ 589.\ ...$$

de donde

$$arc.\ 1' = \frac{\pi}{180.\ 60} = 0,\ 000\ 290\ 888\ 208.\ ... < 0,\ 000\ 3.$$

Pero la diferencia entre el arco de 1′ y su seno es menor que

$$\frac{1}{4}(0,\ 000\ 3)^3 < 0,\ 000\ 000\ 000\ 007,$$

luego si tomamos para valor del seno de 1′ el del arco se cometerá un error por exceso menor que 7 unidades del duodécimo órden decimal, y como la cifra de este órden en el valor del arco es un 8, las once primeras cifras serán exactas. Tenemos, pues,

$$\operatorname{sen} 1' = 0,\ 000\ 290\ 888\ 20.\ ..$$

El coseno de 1′ se halla por la fórmula

$$\cos 1' = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 1'}.$$

Para hallar el seno y el coseno de $2'$, emplearemos las fórmulas del número **21**, que aplicadas á este caso dan

$$\text{sen } 2' = 2 \text{ sen } 1' \cos 1'$$

$$\cos 2' = \cos^2 1' - \text{sen}^2 1'.$$

Haciendo $a = 2'$, $b = 1'$, las fórmulas [8] y [9] dan

$$\text{sen } 3' = \text{sen } 2' \cos 1' + \cos 2' \text{ sen } 1'$$

$$\cos 3' = \cos 2' \cos 1' - \text{sen } 2' \text{ sen } 1'.$$

Haciendo $a = 3'$, $b = 1'$, las mismas fórmulas dan el seno y el coseno de $4'$, y así sucesivamente.

Pueden hallarse los senos y cosenos por un método bastante más breve que el anterior. Tenemos las fórmulas [**24**]

$$\text{sen } (a + b) + \text{sen } (a - b) = 2 \text{ sen } a \cos b$$

$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cos b;$$

despejando sen $(a + b)$ y cos $(a + b)$, y haciendo $b = 1'$, será

$$\text{sen } (a + 1') = 2 \text{ sen } a \cos 1' - \text{sen } (a - 1')$$

$$\cos (a + 1') = 2 \cos a \cos 1' - \cos (a - 1').$$

Haciendo en estas fórmulas sucesivamente $a = 1'$, $= 2'$, $= 3'$. . . . , se obtendrá

$$\text{sen } 2' = 2 \text{ sen } 1' \cos 1'$$

$$\cos 2' = 2 \cos^2 1' - 1$$

$$\text{sen } 3' = 2 \text{ sen } 2' \cos 1' - \text{sen } 1'$$

$$\cos 3' = 2 \cos 2' \cos 1' - \cos 1'$$

. . . .

Una vez calculados los senos y cosenos, se determinan las tangentes y cotangentes por las fórmulas

$$\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}.$$

Debemos advertir que sólo se calculan las líneas trigonométricas de los arcos comprendidos entre 0 y 45°, porque las líneas de un arco mayor que 45° y menor que 90° son iguales ó otras líneas del arco complementario, que están ya calculadas; y las de arcos mayores que un cuadrante son iguales en valor absoluto á las de otro arco menor que 90°.

Disponiendo en columnas verticales los arcos desde 0 hasta 90°, y á la derecha en otras columnas el seno, tangente, coseno y cotangente de cada uno de ellos, se tienen unas tablas trigonométricas *naturales*, llamadas así porque dan directamente las líneas trigonométricas de los arcos. En la práctica se usan otras tablas que en lugar de las líneas trigonométricas contienen los logaritmos ordinarios de las mismas. Estas tablas, llamadas *artificiales*, son las que hemos de emplear en la resolucion de triángulos.

Escolio. Los métodos que hemos expuesto sólo sirven para demostrar la posibilidad de construir unas tablas trigonométricas: en las Matemáticas superiores se estudian otros mucho más breves.

II.—Disposicion y uso de las tablas trigonométricas.

32. Las tablas trigonométricas de Vazquez Queipo contienen los logaritmos con seis cifras decimales de los senos, tangentes, cosenos y cotangentes de todos los arcos del primer cuadrante compuestos de grados y minutos, para un radio igual á la unidad.

Si el arco es menor que 45° los grados se leen en la parte superior de cada plana, y los minutos en las columnas verticales, señaladas arriba y abajo con el signo ′, que hay á la izquierda de cada llana: la llana izquierda contiene, en órden descendente, los minutos desde 0 hasta 30, y la derecha continúa hasta 60. Si el arco es mayor que 45°, los grados se leen en la parte inferior de cada plana, y los minutos en las columnas verticales, señaladas con el signo ′, que se encuentran á la derecha de cada llana: la llana derecha contiene, en órden ascendente, los minutos desde 0 hasta 30, y la izquierda continúa hasta 60.

Los logaritmos de las líneas trigonométricas se encuentran en las cuatro columnas encabezadas con las palabras Sen. Taugt. Cotang. Coseno., frente al número de minutos del arco dado. Se observará, sin duda, que los nombres puestos al pié de estas columnas son diferentes de los puestos á la cabeza, correspondiendo al seno ó tangente leido arriba, el coseno ó cotangente, y al contrario; y que dos arcos, cuyos minutos estén sobre la misma línea horizontal y los grados á la cabeza y pié de la misma llana, valen juntos 90°. Esto consiste en que siendo el seno y tangente de un arco igual al coseno y cotangente de su complemento, una misma columna, la primera por ejemplo, sirve para hallar el logaritmo seno de un arco menor que 45° y á la vez el logaritmo coseno del arco complementario.

Hay además otras columnas, 1″, y unas tablitas al márgen, de cuyo uso nos ocuparemos oportunamente.

PROBLEMA I.

33. *Dado un ángulo, hallar el logaritmo de su seno, tangente, coseno ó cotangente.*

Comprendida la disposicion de las tablas, es fácil encontrar en ellas el logaritmo de una línea trigonométrica cuando el arco sólo contiene grados y minutos.

Así $\log \text{sen } 26° \, 17' = \bar{1},646218$ [1]

$\log \text{tg } 57° \, 39' = 0,193325.$

Debemos advertir que los logaritmos de los senos y cosenos tienen característica negativa, porque estas líneas son menores que el radio 1, por consiguiente sus logaritmos tienen que ser menores que cero; los logaritmos de las tangentes son positivos si el arco es mayor que 45°, y negativos si es menor, pues tg 45° = 1, y los de las cotangentes son negativos en el primer caso y positivos en el segundo.

Con objeto de evitar el empleo de logaritmos negativos, muchos constructores de tablas suponen el radio igual á *diez mil millones* ó 10^{10}, lo que obliga á restablecer el radio en todas las fórmulas trigonométricas, y complica innecesariamente los cálculos.

34. Supongamos, ahora, que el ángulo dado tenga segundos, y distingamos dos casos: 1.° que el ángulo esté comprendido entre 4° y 86°, ambos inclusive; 2.° que el ángulo sea menor que 4° ó mayor que 86°.

PRIMER CASO. *El ángulo dado está comprendido entre* 4° *y* 86°, *ambos inclusive.*

Propongámonos hallar el logaritmo seno de 35° 43′ 28″.

---

1 La característica $\bar{1}$ no está escrita, pero se supone repetida la del logaritmo anterior más inmediato que la tenga.

Prescindamos, por el momento, de los segundos, y tendremos

$$\log \text{sen } 35^\circ\, 43' = \bar{1}.766247.$$

Si el arco aumenta, su seno aumenta tambien, y lo mismo su logaritmo seno; necesitamos, pues, averiguar qué aumento experimentará el logaritmo seno de 35° 43′ cuando el arco aumente en 28″. Para esto se admite que *las diferencias entre los logaritmos de las líneas trigonométricas son proporcionales á las diferencias entre sus arcos*, de suerte que siendo

$$\begin{array}{r} \log \text{sen } 35^\circ\, 44' = \bar{1},\, 766423 \\ \log \text{sen } 35^\circ\, 43' = \bar{1},\, 766247 \\ \hline 176, \end{array}$$

hay entre los logaritmos una diferencia de 176 unidades del último órden, correspondiente á 1′ de diferencia entre los arcos; ahora bien, si á 1′ ó 60″ corresponde la diferencia 176, ¿qué diferencia corresponderá á 28″? Segun el principio enunciado será

$$\frac{60}{28} = \frac{176}{x}, \text{ de donde } x = \frac{176 \times 28}{60} = 82,$$

luego,

$$\log \text{sen } 35^\circ\, 43'\, 28'' = \bar{1}.\, 766247 + 0.000082 = \bar{1}.\, 766329.$$

Este es el método más generalmente seguido, y para facilitarle los constructores colocan las diferencias al lado de los logaritmos; pero en las tablas que nosotros empleamos se encuentra en columnas, señaladas 1″, la *parte proporcional* que debe añadirse al logaritmo de los grados y minutos por cada segundo que tenga el arco [1], de modo que multiplicando la parte proporcional por el número de segundos, queda resuelta la cuestion. Así tendremos

$$\begin{array}{rr} & \log \text{sen } 35^\circ\, 43' = \bar{1},\, 766247 \\ \text{Parte proporcional } 2,93 \times 28 = & 82 \\ \hline & \log \text{sen } 35^\circ\, 43'\, 28'' = \bar{1},\, 766329 \end{array}$$

---

1 La parte proporcional correspondiente á las tangentes y cotangentes es comun. Se comprende que así debe suceder, porque siendo $\text{tg } a \cot a = 1$, $\text{tg } b \cot b = 1$, será $\frac{\text{tg } a}{\text{tg } b} = \frac{\cot b}{\cot a}$, de donde

$$\log \text{tg } a - \log \text{tg } b = \log \cot b - \log \cot a,$$

lo que demuestra que la diferencia entre los logaritmos tangentes de dos arcos es igual á la diferencia entre los logaritmos cotangentes.

Determinemos el logaritmo cotangente de 48° 12′ 25″.

$$\text{Log cot } 48°\ 12' = \bar{1},951388$$
$$4,24 \times 25 = \quad 106$$
$$\text{log cot } 48°\ 12'\ 25'' = \bar{1},951282$$

Hemos restado 106, porque aumentando el arco disminuye la cotangente.

Segun acabamos de ver, *para hallar el logaritmo de cualquiera de las líneas trigonométricas de un arco que tiene segundos, se halla en las tablas el logaritmo de los grados y minutos, se multiplica la parte proporcional correspondiente por el número de segundos, y el producto se añade al logaritmo hallado si se trata de un seno ó tangente, y se resta si se trata de un coseno ó cotangente.*

35. El producto de la parte proporcional por el número de segundos se hallará con más rapidez usando unas tablitas auxiliares, colocadas al márgen en la última edicion, que contienen los productos de las partes proporcionales por los números 6, 7, 8, 9, 10, 20. 30, 40 y 50. En cuanto á los productos por 1, 2, 3, 4 y 5 se obtienen separando de los productos por 10, 20, 30, 40 y 50 una cifra de la derecha.

Vamos á determinar, usando estas tablitas, el logaritmo tangente de 68° 34′ 45″.

	log tg 68° 34′ =	0,406086
Parte proporc.	6, 20 × 40 =	248
Id.	6, 20 × 5 =	31
	log tg 68° 34′ 45″ =	0,406365

36. Segundo caso. *El ángulo dado es menor que* 4° *ó mayor que* 86°.

Vamos á hallar el log sen de 2° 15′ 28″.

Redúzcase este arco á segundos [1], y dará 8128″; búsquese en las tablas de los números el logaritmo de 8128, que es 3, 909984; súmese este logaritmo con el $\bar{6}$. 685463, cuyas tres últimas cifras se encuentran enfrente de 2° 15′

---

1 Esta reduccion se hará con gran rapidez empleando las tablas XX y XXI, que contienen los múltiplos de 6 y los de 36. La segunda sirve para reducir grados á segundos, añadiendo dos ceros al producto de los grados por 36, lo que equivale á multiplicar por 3600; y la primera reduce los minutos á segundos, añadiendo un cero al producto de los minutos por 6.

en una columnita situada á la derecha de los senos, y las cuatro primeras en la cabeza de dicha columnita: la suma $\overline{2}.595447$ es el logaritmo del arco dado.[1]

El logaritmo tangente se halla de igual manera, sólo que se usa la columnita situada á la izquierda de las tangentes[2], en lugar de la situada á la derecha de los senos.

Para hallar el logaritmo coseno, obsérvese que en los tres primeros grados la mayor diferencia entre dos logaritmos cosenos consecutivos es 9 unidades del último órden, de modo que la disminucion correspondiente á los segundos del arco puede calcularse mentalmente, recordando el principio de proporcionalidad enunciado en el número **34**. Así, para hallar el logaritmo coseno de $3° 20' 15''$ tomaremos el de $3° 20'$, que es $\overline{1},999265$, observaremos que la diferencia entre este logaritmo y el siguiente es 8 unidades, que corresponden á una diferencia de $60''$ en los arcos, luego á los $15''$ del arco propuesto corresponderán 2 unidades del último órden, por tanto el logaritmo pedido será $\overline{1},999263$.

Los demás casos que pueden ocurrir se reducen fácilmente á uno de los anteriores; puesto que el seno, coseno ó cotangente de un arco mayor que 86° es igual respectivamente al coseno, seno ó tangente de su complemento, que será menor que 4.° Además siendo $\operatorname{tg} a \cot a = 1$ será $\log \operatorname{tg} a + \log \cot a = 0$, donde vemos que el logaritmo cotangente de un arco es el complemento del logaritmo tangente, por tanto para hallar el logaritmo cotangente de un arco menor que 4° se hallará el logaritmo tangente del mismo arco, y se tomará el complemento de este logaritmo. Por último, para hallar el logaritmo tangente de un

---

1 Se funda este método en que los senos de arcos menores que 4° pueden considerarse, sin error sensible, proporcionales á los mismos arcos; así

$$\frac{\text{sen } 2° 15' 28''}{\text{sen } 2° 15'} = \frac{2° 15' 28''}{2° 15'} = \frac{8128}{8100};$$

de donde $\log \text{sen } 2° 15' 28'' = \log 8128 + (\log \text{sen } 2° 15' + \text{comp. } \log 8100)$;

donde vemos que para hallar el log sen del arco dado hay que sumar el logaritmo de los $8128''$ que tiene el arco con la cantidad encerrada en el paréntesis, la que ha sido calculada por el autor de las tablas para cada arco compuesto de grados y minutos, menor que 4°. Puede verse efectivamente que

$$\log \text{sen } 2° 15' + \text{comp. } \log 8100 = \overline{6},685463.$$

2 Cuando las tres cifras de esta columnita van seguidas de un asterisco *, se tomará 6, 686 en lugar del $\overline{6},685$ que encabeza la columna.

arco mayor que 86° se hallará el logaritmo tangente de su arco complementario, y se tomará el complemento de dicho logaritmo.

Estas reglas, tan fáciles de olvidar, serán casi innecesarias si se tiene muy presente que *el logaritmo de cualquiera línea trigonométrica de un arco es igual al logaritmo de la línea contraria del arco complementario, y que el logaritmo tangente de un arco y el logaritmo cotangente del mismo son mútuamente complementarios.*

EJEMPLOS.

1.° Log sen 86° 20′ 15″. Hallando el log cos del complemento se obtiene $\bar{1}$, 999112.

2.° Log cos 88° 40′ 24″, 8. Hallando el log sen del complemento se obtiene $\bar{2}$, 364528.

3.° Log cot 2° 52′ 59″, 3. El logaritmo tangente de este arco es $\bar{2}$, 702105. Tomando su complemento resulta 1 297895.

4.° Log tg 86° 36′ 38″, 8. El log tg del complemento es $\bar{2}$, 772482; tomando el complemento de este logaritmo resulta 1, 227518.

PROBLEMA II.

37. *Dado el logaritmo de un seno, tangente, coseno ó cotangente, hallar el ángulo á que corresponde.*

Si el logaritmo dado está contenido en las tablas, es fácil encontrarlo, teniendo presente que cuando se recorren las columnas encabezadas con las palabras seno ó tangente desde el principio hácia el fin de las tablas, los logaritmos de dichas líneas van aumentando, y que este aumento continúa si se retrocede hácia el principio de las tablas, pero leyendo las palabras seno y tangente no ya en la cabeza, sinó al pié de cado columna. Por el contrario, los cosenos y cotangentes disminuyen cuando se leen estas palabras en la parte superior de las columnas y se avanza hácia el fin de la tabla, y siguen disminuyendo si se retrocede leyendo dichas palabras en la parte inferior.

Una vez hallado el logaritmo, si el nombre de la línea está á la cabeza de la columna los grados del arco se leerán en la parte superior de la plana y los minutos en la primera columna de la izquierda enfrente del logaritmo; pero si el nombre de la línea está al pié de la columna, los grados se leerán en la parte inferior y los minutos en la última columna de la derecha.

Sea, por ejemplo, log sen A $= \bar{1}, 924328$.

Recorridas las columnas descendentes de los senos, el mayor logaritmo que se encuentra $\bar{1}, 849485$, correspondiente á 45°, es menor que el dado, por consiguiente debemos recorrer las ascendentes, leyendo seno al pié. De este modo se encuentra el logaritmo dado, que corresponde á 57° 9′.

Sea log tg A $= 0.394683$.

Siendo el logaritmo positivo, el arco será mayor que 45°, luego deberemos empezar por las columnas ascendentes que tienen al pié la palabra tangente. Así se halla A = 68° 3′.

38. Supongamos ahora que el logaritmo dado no esté contenido exactamente en las tablas, sino entre dos consecutivos, y distingamos dos casos: 1.° que el logaritmo dado corresponda á una de las cuatro primeras planas; 2.° que corresponda á una de las siguientes.

Primer caso. *El logaritmo dado corresponde á una de las cuatro primeras planas.*

Sea log sen A $= \bar{2}.756423$.

Búsquese el logaritmo seno menor que más se aproxima al dado, que es $\bar{2}, 755747$; como se halla contenido en una de las cuatro primeras planas, tómese el logaritmo $\bar{6}, 685340$ que le corresponde en la columnita auxiliar de los senos, y réstese del logaritmo dado; considerando la diferencia 4, 071083 como un logaritmo, búsquese el número correspondiente: este número, que es 11778, 3, expresa los segundos del arco A. Reducido á complejo de grados, minutos y segundos [1], resulta A = 3° 16′ 18″, 3.

De igual manera se procederia si se nos diera el logaritmo de una tangente, pero entonces emplearíamos la columnita auxiliar situada á la izquierda de estas líneas.

---

1 Para hacer esta reduccion se emplean las tablas XX y XXI del modo siguiente: sepárense dos cifras enteras de la derecha, y quedará 117; búsquese en los múltiplos de 36 el número menor mas próximo á 117, que es 108 correspondiente á 3°; hállese la diferencia 9 entre 108 y 117 y colóquese á su derecha la primera cifra separada: así se forma el número 97; búsquese en los múltiplos de 6 el número menor más próximo á 97, que es 96 correspondiente á 16′; hállese la diferencia 1 entre 96 y 97, y colocando á su derecha las demás cifras separadas resultan los 18, 3 segundos.

Si tenemos el logaritmo coseno de un ángulo menor que 4°, buscaremos en las tablas un logaritmo coseno *mayor* que el dado y el más próximo posible, anotando los grados y minutos á que corresponda. Los segundos se hallarán fácilmente recordando el principio de proporcionalidad del número **34**, y deberán añadirse á los grados y minutos, porque habiendo tomado un logaritmo coseno mayor que el dado, el arco correspondiente es menor que el pedido.

Sea, por ejemplo, log cos $A = \bar{1}, 999422$.

El inmediato mayor es $\bar{1}, 999424$ y corresponde á 2° 57′; los logaritmos consecutivos que comprenden al dado presentan una diferencia de 6 unidades del último órden, correspondiente á 60″, por tanto á 2 unidades corresponden 20″. Será, pues, $A = 2° 57′ 20″$.

Si el arco dado por su logaritmo seno, coseno ó cotangente es mayor que 86°, el problema se reducirá á uno de los anteriores operando sobre la línea trigonométrica contraria á la dada, que corresponderá á un arco menor que 4°, y tomando despues el complemento del arco que se haya obtenido.

Si el arco menor que 4° está dado por su logaritmo cotangente, se tomará el complemento de este logaritmo y se operará como si se tratase de un logaritmo tangente. Por último, cuando el arco sea mayor que 86° y esté dado por su logaritmo tangente, se operará sobre el complemento de este logaritmo y se tomará el complemento del arco obtenido.

Ejemplos.

1.° Log sen $A = \bar{1}, 999112$. Pertenece á un arco mayor que 86°, por tanto opero como si fuera logaritmo coseno, y hallo 3° 39′ 45″; luego $A = 86° 20′ 15″$.

2.° Log cos $A = \bar{2}, 364528$. El arco es mayor que 86°, por tanto opero como si fuera logaritmo seno, y hallo 1° 19′ 35″, 2; luego $A = 88° 40′ 24″, 8$.

3.° Log cot $A = 1, 297895$. Aquí es $A < 4°$; tomo el complemento $\bar{2}, 702105$ de este logaritmo, que pertenece á log tg A; luego $A = 2° 52′ 59″, 3$.

4.° Log tg $A = 1, 227518$. Siendo $A > 86°$ opero sobre el complemento $\bar{2}$, 772482 como si éste fuese un logaritmo tangente, y hallo 3° 23′ 21″, 2; luego A = 86° 36′ 38″, 8.

39. SEGUNDO CASO. *El logaritmo dado cae fuera de las cuatro primeras planas.*

Sea log sen A = $\bar{1}$, 638049.

Buscaremos en las tablas el logaritmo seno menor y más próximo al dado, que es $\bar{1}$, 637935 correspondiente á 25° 45′; para hallar los segundos dividiremos la diferencia 114 entre dichos logaritmos por la parte proporcional 4. 37 que corresponde al hallado en las tablas, y tendremos 26″; luego A = 25° 45′ 26″.

Sea log cos A = $\bar{1}$, 777842.

Buscaremos en las tablas el logaritmo coseno *mayor* y más próximo al dado, que es $\bar{1}$, 777950 correspondiente á 53° 9′; para hallar los segundos dividiremos la diferencia 108 entre dichos logaritmos por la parte proporcional 2. 81 que corresponde al hallado en las tablas, y tendremos 38″, 4; luego A = 53° 9′ 38″, 4.

De igual manera procederíamos si se nos diese un logaritmo cotangente.

Luego *para hallar el arco á que pertenece el logaritmo de una línea trigonométrica no contenido en las tablas, se busca en éstas el logaritmo inmediato menor, si se trata de un seno ó tangente, y el inmediato mayor, si se trata de un coseno ó cotangente, y se anotan los grados y minutos del arco correspondiente: la diferencia entre el logaritmo hallado en las tablas y el dado se divide por la parte proporcional del primero, y el cociente expresará los segundos del arco pedido.*

40. El cociente de dividir la diferencia entre el logaritmo tabular y el dado por la parte proporcional, puede obtenerse empleando las tablitas marginales.

En nuestro primer ejemplo, despues de anotar los 25° 45′, se busca al márgen de la misma plana la parte proporcional 4, 37 ó la más próxima, que es 4, 34, y se recorre la columna de sus múltiplos hasta hallar la diferencia 114 ó el número menor que más se le aproxime, que es 87 y corresponde á 20″; como sobran 27 unidades se busca este número ó el más próximo, que es 26 y corresponde á 6″; de suerte que el arco tiene 26″.

En el segundo ejemplo, buscaremos al márgen la parte proporcional 1, 81 y recorreremos la columna hasta hallar la diferencia 103 ó el número menor más próximo, que es 84 y corresponde á 30″; como sobran 24 unidades volveremos á buscar este número ó el más próximo, y hallaremos 22 que corresponde á 8″; sobran 2 unidades y como á 1″ corresponden 2, 8 se infiere que el arco no tiene más segundos, sino una fraccion de segundo; para hallarla añadimos un cero al 2, buscamos el número 20 y encontramos que corresponde á 7″, mas como habíamos multiplicado por 10, tomaremos 0″. 7, de modo que el arco tiene 38″, 7, que se diferencia del resultado obtenido directamente en 0″, 3.

LIBRO SEGUNDO.

RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

TEOREMAS RELATIVOS Á LA RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.

I.—Triángulos rectángulos.

TEOREMA I. (*Fig.* 249).

41. *En todo triángulo rectángulo un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto ó por el coseno del ángulo agudo adyacente.*

Para mayor sencillez representaremos los ángulos de un triángulo cualquiera por las letras mayúsculas de los vértices, y los lados por las letras de los ángulos opuestos, pero empleando las minúsculas. Así, los lados BC, AC y AB se expresarán respectivamente por las letras *a*, *b* y *c*.[1]

Sea el triángulo rectángulo ABC. Describamos *con un radio igual á la unidad* el arco DE correspondiente al ángulo B, y tracemos el seno DF de este arco: el coseno será BF. Los triángulos semejantes ABC y FBD dan

$$\frac{BD}{DF}=\frac{BC}{CA},\ \frac{BD}{BF}=\frac{BC}{AB};$$

---

1 La letra que segun esto debe representar á un lado es la que no entra en la expresion usual del mismo.

ó bien $$\frac{1}{\text{sen B}}=\frac{a}{b},\ \frac{1}{\cos B}=\frac{a}{c}.$$

de donde $$b=a\,\text{sen B},\ c=a\cos B.$$

Escolio. Si el radio fuese una cantidad r diferente de la unidad, sería

$$\frac{r}{\text{sen B}}=\frac{a}{b},\ \frac{r}{\cos B}=\frac{a}{c}.$$

Por lo que el teorema anterior se enuncia tambien diciendo:

En todo triángulo rectángulo el radio partido por el seno de un ángulo agudo, es igual á la hipotenusa partida por el cateto opuesto á dicho ángulo; y el radio partido por el coseno de un ángulo agudo es igual á la hipotenusa partida por el cateto adyacente á dicho ángulo.

Teorema II. (*Fig.* 249).

42. *En todo triángulo rectángulo un cateto cualquiera es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

Trazo la tangente EG del arco DE. Los triángulos semejantes ABC y EBG dan

$$\frac{EB}{EG}=\frac{AB}{AC},\ \text{ó}\ \frac{1}{\text{tg B}}=\frac{c}{b},$$

de donde $$b=c\ \text{tg B}.$$

Escolio. Si el radio r es diferente de la unidad, será

$$\frac{r}{\text{tg B}}=\frac{c}{b},$$

por lo que el teorema último se enuncia tambien diciendo:

En todo triángulo rectángulo el radio partido por la tangente de un ángulo agudo, es igual al cateto adyacente á dicho ángulo partido por el cateto opuesto.

II.—Triángulos oblicuángulos.

Teorema I. (*Fig.* 250).

43. *En todo triángulo, los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Sea el triángulo ABC. Bajo desde el vértice C una perpendicular CD al lado opuesto. Si los ángulos A y B son agudos *(Fig. 1)* la perpendicular CD caerá en el lado AB, y los triángulos rectángulos ACD y BCD darán [**41**].

$$CD = b \text{ sen A}, \quad CD = a \text{ sen B},$$

luego b sen A $= a$ sen B, de donde $\dfrac{a}{\text{sen A}} = \dfrac{b}{\text{sen B}}$

Si alguno de los ángulos A y B es obtuso *(Fig. 2)* la perpendicular CD caerá en la prolongacion de AB, y será

$$CD = b \text{ sen CAD};$$

pero siendo los ángulos CAD y CAB ó A suplementarios, tienen igual seno, luego CD $= b$ sen A. Ahora se continúa como en el primer caso.

Bajando una perpendicular desde A al lado BC obtendríamos del mismo modo

$$\frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}};$$

luego $$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}.$$

TEOREMA II.

44. *En todo triángulo, la suma de dos lados partida por su diferencia, es igual á la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á dichos lados partida por la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.*

Acabamos de ver que

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}},$$

de donde $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{sen A} + \text{sen B}}{\text{sen A} - \text{sen B}};$$

en el número **27** hemos visto que

$$\frac{\text{sen A} + \text{sen B}}{\text{sen A} - \text{sen B}} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)},$$

luego $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)},$$

conforme al enunciado del teorema.

TEOREMA III. *(Fig. 250.)*

45. *En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido.*

Distinguiremos dos casos.

1.° Si el ángulo A es agudo *(Fig. 1)*, tenemos [**Geometría 159**]

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD;$$

en el triángulo rectángulo ADC se verifica AD = b cos A, luego haciendo la sustitucion será

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

2.° Si el ángulo A es obtuso *(Fig. 2)*, tenemos [**Geometría 160**]

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD;$$

el triángulo rectángulo ADC nos da AD = b cos CAD, y como los ángulos CAD y CAB ó A son suplementarios, es

$$\cos CAD = -\cos A, \text{ luego } AD = -b \cos A;$$

sustituyendo, en la primera ecuacion, AD por este valor será

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

46. La misma demostracion podria aplicarse á los lados b y c. Tendremos, pues,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Estas tres ecuaciones sirven para la resolucion de toda clase de triángulos rectilíneos en los diferentes casos que pueden ocurrir, puesto que conteniendo las seis partes de un triángulo, si conocemos tres de ellas dispondrémos, para hallar las otras tres, de un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, que en general es determinado.

CAPÍTULO SEGUNDO.

RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.

47. Sabemos por la Geometría que conocidas tres de las seis partes de un triángulo, puede éste construirse, quedando así determinadas gráficamente las otras tres. Hay sin embargo una excepcion: si las partes conocidas son los tres ángulos, existen infinitos triángulos cuyos ángulos son respectivamente iguales á los dados, y que no son iguales entre sí, sino semejantes; luego *para resolver un triángulo necesitaremos conocer tres elementos del mismo, debiendo haber entre ellos un lado cuando menos.*

Ahora veremos que la Trigonometría enseña á determinar los elementos desconocidos de un triángulo en los mismos casos que la Geometría, si bien aquella procede numérica y ésta gráficamente.

I.—Triángulos rectángulos.

48. Como en los triángulos rectángulos se conoce el ángulo recto, basta para resolverlos conocer otros dos elementos, debiendo haber entre ellos un lado cuando menos; de suerte que los datos serán un lado y un ángulo ó dos lados y podrán presentarse cuatro casos distintos:

1.° Dada la hipotenusa y un ángulo agudo, resolver el triángulo.

2.° Dado un cateto y un ángulo agudo.

3.° Dados los dos catetos.

4.° Dada la hipotenusa y un cateto.

49. Primer caso. *Dada la hipotenusa* a *y un ángulo agudo* B, *hallar los catetos* b, c *y el otro ángulo agudo* C.

Para hallar el cateto b tenemos la ecuacion [**41**]

$$b = a \text{ sen B},$$

de donde $\log b = \log a + \log \text{sen B}.$

El cateto c se obtiene por medio de la ecuacion

$$c = a \cos \text{B},$$

de donde $\log c = \log a + \log \cos \text{B}.$

Además $\text{B} + \text{C} = 90°$, luego $\text{C} = 90° - \text{B}.$

50. Segundo caso. *Dado un cateto* b *y un ángulo agudo* B, *hallar la hipotenusa* a, *el cateto* c *y el ángulo* C.

Tenemos $b = a \text{ sen B}$, de donde $a = \dfrac{b}{\text{sen B}}$,

y por logaritmos $\log a = \log b + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen B}.$

Para hallar c se tiene [**42**]

$$b = c \text{ tg B, de donde } c = \frac{b}{\text{tg B}},$$

y por logaritmos $\log c = \log b + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{tg B}.$

Además $C = 90^\circ - B$.

51. Tercer caso. *Dados los dos catetos* b *y* c, *hallar la hipotenusa* a *y los ángulos agudos* B *y* C.

Para hallar el ángulo B tenemos

$$b = c \operatorname{tg} B, \text{ de donde } \operatorname{tg} B = \frac{b}{c},$$

y por logaritmos $\log \operatorname{tg} B = \log b + \mathrm{C.^{to}} \log c$.

Conocido el ángulo B, se tiene $C = 90^\circ - B$.

Por último, $b = a \operatorname{sen} B$, de donde $a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$,

y $$\log a = \log b + \mathrm{C.^{to}} \log \operatorname{sen} B.$$

La hipotenusa a podia haberse obtenido por el teorema de Pitágoras, que da

$$a = \sqrt{b^2 + c^2};$$

pero á esta expresion no se aplica bien el cálculo logarítmico, por lo que preferimos el medio expuesto.

52. Cuarto caso. *Dada la hipotenusa* a *y un cateto* b, *hallar el otro cateto* c *y los ángulos agudos* B *y* C.

El teorema de Pitágoras da

$$c^2 = a^2 - b^2, \text{ de donde } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)},$$

y $$\log c = \frac{\log(a+b) + \log(a-b)}{2}.$$

La fórmula

$$b = a \operatorname{sen} B, \text{ da } \operatorname{sen} B = \frac{b}{a},$$

de donde $\log \operatorname{sen} B = \log b + \mathrm{C.^{to}} \log a$.

Por último, $C = 90^\circ - B$.

53. Hé aquí las partes de un triángulo rectángulo, y los logaritmos de las mismas necesarios para resolver los cuatro casos. El alumno puede resolverlos sucesivamente tomando dos de los valores que siguen para datos, y comparando los resultados que obtenga con los valores de las otras partes.

$a = 7829$, $b = 6108,27$, $c = 4897,18$

$A = 90^\circ$, $B = 51^\circ\, 16'\, 47'',2$, $C = 38^\circ\, 43'\, 12'',8$

$\log a = 3,893706$, $\log b = 3,785918$, $\log c = 3,689947$

$\log (a+b) = 4,\ 144177,$ $\quad \log (a-b) = 3,\ 235712$

$\log \text{sen B} = \bar{1},\ 892212,$ $\quad \log \text{sen C} = \bar{1},\ 796240$

$\log \cos \text{B} = \bar{1},\ 793240,$ $\quad \log \cos \text{C} = \bar{1},\ 892212$

$\log \text{ tg B} = 0,\ 095971,$ $\quad \log \text{tg C} = \bar{1},\ 904029$

II.—Triángulos oblicuángulos ó generales.

54. La resolucion de los triángulos oblicuángulos presenta cuatro casos:

1.° Dado un lado y dos ángulos, resolver el triángulo.
2.° Dados dos lados y el ángulo comprendido.
3.° Dados los tres lados.
4.° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

55. Primer caso. *Dado un lado* a *y los ángulos* B *y* C, *hallar los lados* b, c *y el ángulo* A.

De la relacion $A + B + C = 180°$, se deduce

$$A = 180° - (B + C).$$

Conocido ya el ángulo A, para hallar el lado b tenemos [**43**]

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen A}}{\text{sen B}}, \text{ de donde } b = \frac{a \text{ sen B}}{\text{sen A}},$$

y $\quad \log b = \log a + \log \text{sen B} + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen A}.$

Igualmente $\quad \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{sen A}}{\text{sen C}},\ c = \dfrac{a \text{ sen C}}{\text{sen A}}.$

$$\log c = \log a + \log \text{sen C} + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen A}.$$

56. Segundo caso. *Dados dos lados* a *y* b *y el ángulo comprendido* C, *hallar el tercer lado* c *y los ángulos* A *y* B.

Sabemos que $A + B = 180° - C$, luego si calculamos la diferencia $A - B$, se deducirán fácilmente los valores de A y B.

Tenemos, suponiendo $a > b$, [**44**]

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)},$$

de donde

$$\log \text{tg } \tfrac{1}{2}(A-B) = \log (a-b) + \log \text{tg } \tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$+ \text{C.}^{\text{to}} \log (a+b).$$

Si hechas las operaciones hallamos para $\frac{1}{2}$ (A — B) el valor n°, tendremos

$$\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = n^\circ, \quad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \ ;$$

sumando y restando estas ecuaciones resulta

$$A = 90^\circ + n^\circ - \frac{C}{2}, \ B = 90^\circ - n^\circ - \frac{C}{2} \ .$$

El lado c se deduce de la igualdad

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen A}}{\text{sen C}}, \text{ que da } c = \frac{a \text{ sen C}}{\text{sen A}},$$

de donde $\quad \log c = \log a + \log \text{sen C} + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen A}.$

Esta fórmula obliga, para hallar el lado c, á tomar tres nuevos logaritmos. Vamos á hallar otra que sólo exige dos.

Tenemos $$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}},$$

de donde $$\frac{a+b}{\text{sen A} + \text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}},$$

y $$c = \frac{(a+b) \text{ sen C}}{\text{sen A} + \text{sen B}};$$

pero [**24** y **21**]

$$\text{sen A} + \text{sen B} = 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2} (A + B) \cos \tfrac{1}{2} (A - B),$$

$$\text{sen C} = 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2} \text{ C} \cos \tfrac{1}{2} \text{ C};$$

además $$\text{sen } \tfrac{1}{2} (A + B) = \text{sen } \tfrac{1}{2} (180^\circ - C)$$

$$= \text{sen}\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos \tfrac{1}{2} \text{ C},$$

luego, haciendo las sustituciones y simplificando, el valor de c será

$$c = \frac{(a+b) \text{ sen } \frac{1}{2} \text{ C}}{\cos \frac{1}{2} (A - B)},$$

y $\log c = \log (a+b) + \log \text{sen} \tfrac{1}{2} \text{C} + \text{C.}^{\text{to}} \log \cos \tfrac{1}{2} (A - B);$

de estos tres logaritmos sólo dos son nuevos, pues el de $a+b$ se ha obtenido ya al calcular $\frac{1}{2}(A-B)$.

57. TERCER CASO. *Dados los tres lados* a, b, c, *hallar los tres ángulos* A, B, C.

Para hallar el ángulo A tenemos [**45**]

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

de donde
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\qquad [a].$$

Vamos ahora á deducir de esta fórmula otra mejor dispuesta para el cálculo logarítmico.

Restando de la unidad los dos miembros de la ecuacion [a], tendremos

$$1-\cos A=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc};$$

observando que el numerador del último quebrado es la diferencia entre los cuadrados de dos cantidades, será [**Álg. 25**]

$$1-\cos A=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

Representemos el perímetro del triángulo propuesto por $2p$. De la igualdad $a+b+c=2p$, se deduce fácilmente

$$a+b-c=2(p-c),\ a-b+c=2(p-b);$$

luego
$$1-\cos A=\frac{4(p-b)(p-c)}{2bc}=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Segun el número **22** se tiene $1-\cos A=2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A$, luego sustituyendo y suprimiendo el factor comun 2, será

$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Extrayendo la raiz cuadrada y desechando el signo $-$, porque siendo $\frac{1}{2}A<90^\circ$ su seno es positivo, resulta

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Del mismo modo, si bien partiendo de las ecuaciones convenientes se obtiene

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Añadiendo una unidad á los dos miembros de la ecuacion [a], y haciendo transformaciones semejantes á las que acaban de verse, se obtiene

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

y del mismo modo

$$\cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\ \cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Partiendo sen $\frac{1}{2}$ A, sen $\frac{1}{2}$ B, sen $\frac{1}{2}$ C por los respectivos cosenos, será

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Si sólo se necesita el valor de un ángulo, cualquiera de las fórmulas halladas exige cuatro logaritmos: pero si deben calcularse los tres ángulos, las fórmulas de los senos exigen seis logaritmos, las de los cosenos siete, y las de las tangentes cuatro; por consiguiente deben preferirse estas últimas.

Indiquemos el cálculo logarítmico de una de ellas, de la primera, por ejemplo. Tenemos

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=$$

$$\frac{1}{2}\left(\log(p-b)+\log(p-c)+\text{C.}^{\text{to}}\log p+\text{C.}^{\text{to}}\log(p-a)\right).$$

ESCOLIO. Para que el triángulo sea posible es necesario y suficiente que el lado mayor sea menor que la suma de los otros dos. En efecto: 1.° Si siendo a el lado mayor se verificase $a>b+c$, tendríamos $b<a-c$, $c<a-b$, y

con mayor razon $b < a + c$ y $c < a + b$; luego las diferencias $p - b$ y $p - c$ ó sea $\frac{a+c-b}{2}$ y $\frac{a+b-c}{2}$ serian positivas, miéntras que $p - a$ ó sea $\frac{b+c-a}{2}$ sería negativa, por tanto las cantidades subradicales serian negativas, é imaginarios los valores de las tangentes, luego la condicion es necesaria. Si fuese $a < b + c$, tendríamos, con mayor razon, $b < a + c$, $c < a + b$, luego $p - a$, $p - b$ y $p - c$ serian positivas, y reales los valores de las tangentes, luego la condicion es suficiente.

58. Cuarto caso. *Dados dos lados* a, b *y el ángulo* A *opuesto á uno de ellos, hallar los ángulos* B, C *y el lado* c.

La ecuacion

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen B}}{\text{sen A}} \quad \text{da} \quad \text{sen B} = \frac{b \text{ sen A}}{a},$$

de donde $\log \text{sen B} = \log b + \log \text{sen A} + \text{C.}^{\text{to}} \log a$.

Para hallar el ángulo C tenemos

$A + B + C = 180°$, de donde $C = 180° - (A + B)$.

Por último, de la igualdad

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen A}}{\text{sen C}} \text{ se deduce } c = \frac{a \text{ sen C}}{\text{sen A}},$$

luego $\log c = \log a + \log \text{sen C} + \text{C.}^{\text{to}} \log \text{sen A}$.

Discusion. Como el ángulo B está dado por su seno y á un mismo seno corresponden dos ángulos suplementarios, es necesario examinar si tomaremos para valor de B el ángulo agudo que dan las tablas ó el suplemento de este ángulo.

Si el ángulo dado A es recto ú obtuso, el B será necesariamente agudo y no habrá dificultad.

Si el ángulo A es agudo distinguiremos tres casos principales, segun que sea $a > b$, $a = b$ ó $a < b$.

Primer caso. Si es $a > b$, tendremos $A > B$, luego el ángulo B deberá ser agudo: el problema en este caso tiene una sola solucion.

Segundo caso. Si es $a = b$, tendremos $A = B$, por consiguiente el ángulo B debe ser agudo: tambien en este caso el problema es determinado ó tiene una sola solucion.

Tercer caso. Si tenemos $a < b$, será $A < B$, y nada se opone ahora á que el ángulo B tenga dos valores suplementarios, y el problema dos soluciones.

En efecto: sabemos por la Geometría [**122**] que en este caso hay en general dos triángulos ABC y AB'C (*Fig.* 251) construidos con los mismos datos del problema, y que el ángulo agudo ABC del primer triángulo y el obtuso AB'C del segundo son suplementarios.

Si convenimos en que B represente el ángulo agudo de las tablas y B' el suplemento de B, los valores correspondientes del ángulo C serán

$$C = 180^\circ - (A + B),\quad C' = 180^\circ - (A + B'),$$

y los del lado c tendrán por expresion

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A},\quad c' = \frac{a \operatorname{sen} C'}{\operatorname{sen} A}.$$

Si fuese $a = b \operatorname{sen} A$, tendríamos $\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{b \operatorname{sen} A} = 1$, de donde se deduce $B = 90^\circ$. En este caso, pues, el ángulo B es recto y el problema tiene una solucion, que es el triángulo rectángulo ACD. Podia haberse previsto este resultado, porque b sen A es el valor de la perpendicular CD.

Por último, si es $a < b \operatorname{sen} A$, tendremos $\operatorname{sen} B > 1$, y como el mayor valor absoluto del seno es el radio, ó sea la unidad, el resultado $\operatorname{seno} B > 1$ es absurdo, y debe mirarse como signo de imposibilidad. Y en efecto, la desigualdad $a < b \operatorname{sen} A$ establece que el radio del arco BB' es menor que la perpendicular CD, luego BB' no encuentra á la recta AD, y no hay, por consiguiente, triángulo.

Obsérvese que esta discusion nos ha conducido á las mismas conclusiones que la hecha en el número **122** de la Geometría

59. Escolio general. Téngase presente que para hallar el logaritmo seno de un ángulo mayor que 90° se buscará en las tablas el logaritmo seno del suplemento.

Sabemos que la tangente, el coseno y la cotangente de un ángulo obtuso son cantidades negativas, y que esta clase de cantidades no tiene logaritmos. Podria creerse, pues, que el cálculo logarítmico no es aplicable á las fórmulas que contengan líneas trigonométricas negativas; pero se desvanecerá este error si se observa que todos los ángulos mayores que 90° grados pueden sustituirse por los suplementos respectivos, que siendo menores que 90° tienen líneas trigonométricas positivas. Cada vez que un ángulo mayor que 90° se sustituya por su suplemento, habrá que mudar el signo del término en que entre dicho ángulo, excepto el caso en que éste se halle representado por su seno: si despues de estos cambios de signo, un miembro de la fórmula á la cual quiere aplicarse el cálculo logarítmico fuese negativo, el otro miembro será tambien negativo, porque sería absurdo suponer que de dos cantidades iguales fuese una positiva y otra negativa: en tal caso se cambiarán los signos á los dos miembros, y no habrá ya dificultad en aplicar el cálculo logarítmico.

Sea, por ejemplo, la fórmula [a] del número 57

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Supongamos que aplicándola á un caso particular adquiera el segundo miembro el valor negativo $-n$: esto nos dice que el ángulo A es obtuso, luego lo sustituiremos por su suplemento, y será

$$-\cos(180° - A) = -n,$$

y cambiando los signos

$$\cos(180° - A) = n;$$

aplicando ahora el cálculo logarítmico, lo que ya no ofrece dificultad, se obtendrá el suplemento del ángulo A, y será fácil deducir el valor de este ángulo.

La trigonometría esférica ofrece numerosos ejemplos de estas trasformaciones.

Sea la fórmula [1]

$$\cot Z = \frac{\cot P \operatorname{sen}(C - \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi},$$

y supongamos que se trate de hallar el valor de Z siendo $P = 138° 19' 49'' 5$, $C = 41° 33' 25''$, $\varphi = 133° 57' 20''$.

Sustituyendo en cot P y sen φ los ángulos obtusos P y φ por sus respectivos suplementos, el numerador del segundo miembro cambia de signo y el denominador no sufre alteracion. La diferencia negativa $C - \varphi$ debe sustituirse por la positiva $\varphi - C$, y ésta, como mayor que 90°, se reemplaza por su suplemento: la primera trasformacion exige un cambio de signo en el factor sen $(C - \varphi)$, pero

1 Esta fórmula es una de las que se emplean en Astronomía para predecir la posicion de una estrella á una hora sideral dada. (*Dubois. Cours d' Astronomie.*)

como el otro factor cot P tambien cambia de signo, resulta que el numerador permanece invariable.

El valor de Z. fácil de obtener ahora, es $31^\circ\, 23'\, 22''$.

60. Hé aquí los elementos de un triángulo oblicuángulo, y los logaritmos necesarios para resolver cualquiera de los cuatro casos.

$$a = 4572, \qquad b = 3232.21, \qquad c = 4196.03$$

$$A = 74^\circ\, 26'\, 9'', \quad B = 43^\circ\, 25'\, 13'', \qquad C = 62^\circ\, 8'\, 35''$$

$$\log a = 3.660103, \log b = 3,513512, \log c = 3.622341$$

$$\log(a+b) = 3.893093, \ \log(a-b) = 3,117202$$

$$\log p = \quad 3,779246, \ \log(p-a) = 3.159307$$

$$\log(p-b) = 3,439794, \ \log(p-c) = \bar{3}.259851$$

$$\log \operatorname{sen} A = \bar{1}, 983775, \log \operatorname{sen} B = \bar{1}, 837181,$$

$$\log \operatorname{sen} C = \bar{1}, 946510$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) = 0, 219999, \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \bar{1}, 443205$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \bar{1}, 880543, \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \bar{1}, 600059,$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \bar{1}, 780002.$$

EJERCICIOS DE LA TRIGONOMETRÍA.

I. El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.

II. El área de un cuadrilátero es igual á la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que éstas forman.

III. El área de un polígono regular de n lados es $\dfrac{nr^2 \operatorname{sen} O}{2}$, siendo r el radio y O el ángulo en el centro.

IV. La suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo es igual al producto de las mismas.

V. Dado el seno de un arco, hallar el de su triplo.

VI. Dada la tangente de un arco, hallar la de su mitad.

VII. Calcular el ángulo x por medio de la ecuacion.

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = c.$$

VIII. Dados dos lados a, b de un triángulo y el ángulo C, 1.° calcular la altura del triángulo y los segmentos de la base a; 2.° calcular el ángulo B.

IX. Trasformar la fórmula $\operatorname{tg} B = \dfrac{b \operatorname{sen} C}{a - b \cos C}$ de modo que sea fácilmente calculable por logaritmos.

ERRATAS.

Página.	Línea.	Dice.	Debe decir.
9	—16	ED	FD
15	8	BFC′	CFC′
138	— 3	*el mismo complemento,*	*el mismo complemento ó el mismo suplemento.*
141	—17	*un ángulo plano correspondiente.*	*un ángulo diedro se mide el ángulo plano correspondiente.*
164	—13	(*Fig.* 198)	(*Fig.* 199)
168	— 4	P y D	P y E
177	12	conocida	coincida
208	— 6	(*Fig.* 131)	(*Fig.* 231)
218	2	$\frac{B.\,a}{b.\,a}$	$\frac{B.\,A}{b.\,a}$
218	—14	contante	constante
225	—12	M‴ M″ F′	M″ F′
246	— 2	arco	cuadrante
254	14	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ A
269	— 1	1,81	2,81

ÍNDICE.

GEOMETRÍA.