MATEMÁTICAS AL ALCANCE DE TODOS.—TRATADO I. ARITMÉTICA.

TU ERO.

# MATEMÁTICAS

## AL ALCANCE DE TODOS.

ENSAYO DE UN CURSO TEÓRICO PRÁCTICO
POR EL MÉTODO SINTÉTICO, PARA QUE PUEDA SERVIR
DE TEXTO Á LOS ALUMNOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA, Á LOS DE
LAS ACADEMIAS DE LAS ARMAS GENERALES Y Á LOS DE ALGUNAS CARRERAS
FACULTATIVAS; FORMANDO SU PRIMERA PARTE, Ó SEA LA ARITMÉTICA USUAL Y
COMPLEMENTAL, UN CURSO COMPLETO PREPARATORIO PARA QUE LOS NIÑOS
Y ADOLESCENTES PUEDAN CON PROVECHO DESPUES DEDICARSE Á
TODA CLASE DE ESTUDIOS MATEMÁTICOS, AUNQUE
SEAN POR EL MÉTODO ANALÍTICO.

TRATADO I.

# ARITMÉTICA

## INFERIOR Y SUPERIOR Ó USUAL Y COMPLEMENTAL

POR

D. J. M. TUERO.

MADRID.
IMPRENTA Y FUNDICION DE MANUEL TELLO,
Isabel la Católica, 23.
1875.

# MATEMÁTICAS

## AL ALCANCE DE TODOS.

ENSAYO DE UN CURSO TEÓRICO PRÁCTICO
POR EL MÉTODO SINTÉTICO, PARA QUE PUEDA SERVIR
DE TEXTO Á LOS ALUMNOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA, Á LOS DE
LAS ACADEMIAS DE LAS ARMAS GENERALES Y Á LOS DE ALGUNAS CARRERAS
FACULTATIVAS; FORMANDO SU PRIMERA PARTE, Ó SEA LA ARITMÉTICA USUAL Y
COMPLEMENTAL, UN CURSO COMPLETO PREPARATORIO PARA QUE LOS NIÑOS
Y ADOLESCENTES PUEDAN CON PROVECHO DESPUES DEDICARSE Á
TODA CLASE DE ESTUDIOS MATEMÁTICOS, AUNQUE
SEAN POR EL MÉTODO ANALÍTICO.

## TRATADO I.

# ARITMÉTICA

## INFERIOR Y SUPERIOR Ó USUAL Y COMPLEMENTAL

POR

D. J. M. TUERO.

José Mª Tuero

MADRID.
IMPRENTA Y FUNDICION DE MANUEL TELLO,
Isabel la Católica, 23.
1875.

*Nota primera.* Esta obra es propiedad de su autor, y todos los ejemplares llevarán varias contraseñas.

*Nota segunda.* El segundo y el tercer tratados de esta obra de Matemáticas, no se publicarán inmediatamente porque no están terminados, y su más ó ménos pronta terminacion dependerá del grado de desocupacion oficial que pueda tener el autor, y de lo que deba ocuparle la urgente tirada de la segunda edicion de su tratado sobre *Huracanes,* y la continuacion de la *Historia sobre la Marina desde principios del siglo,* que tiene empezada. Pero este primer tratado, ya dice la portada que forma curso completo preparatorio para toda clase de estudios matemáticos.

Y lo llama ensayo, porque los últimos acontecimientos políticos le han privado de darle la última mano, y algunos errores aunque de poca importancia deben habérsele escapado, y porque sólo ensayo debe llamar á su obra hasta que el público la califique con su inexorable fallo.

# PRÓLOGO.

Matemáticas *al alcance de todos* creo haber escrito, y este calificativo que doy á mi obra, por lo presuntuoso que podrá parecer, es lo primero que debo explicar, sin olvidarme en lo posible de aquella verdad de que el *mejor* de los prólogos es el más corto.

No pretendo conquistar el título de profundo matemático, ni de hombre de gran talento. Al contrario; quiero que se conozca que lo poco que sé sobre Matemáticas me ha costado mucho trabajo aprenderlo. Pero como el principal defecto que creo tienen los libros modernos sobre esa importante ciencia, nace del demasiado talento de sus autores y de lo vasto de sus conocimientos científicos, pues sin duda los consiguieron muy fácilmente, ó se han olvidado del trabajo que les costó el adquirirlos, aunque acaso tambien (y perdónenme la suposicion quizás gratuita) de que al escribir sus libros han pensado más en los hombres científicos que pudieran leerlos, que en los jóvenes, en general poco reflexivos, que debian aprovecharlos, yo, muy inferior en mérito, creo poder enseñar el camino de la ciencia más eficazmente que ellos. No es, en efecto, el mejor guía para subir á la cumbre de una escarpada montaña el más ágil y más acostumbrado á guiar personas de sus circunstancias, sino aquel que, siéndolo ménos y habiendo tenido que dirigir á otros torpes y pesados, se ha visto en la necesidad de observar y medir bien todos los obstáculos y calcular la mejor manera de superarlos.

Pretendo, sí, restablecer, ó contribuir al restablecimiento del método sintético para enseñar á los jóvenes, usado con tanto provecho por antiguos ilustres marinos, como *Ciscar*, y por sabios, como *Vallejo;* y desechado en España justamente cuando en Francia se ha reconocido ser el único conveniente para niños y áun para adolescentes. Pues, en efecto, el método analítico, tan científico, tan conveniente, tan claro para personas de inteligencia desarrollada y tan de mi predileccion, como tengo probado en una publicacion científica *, es completamente oscuro

* Tratado sobre *Los huracanes*, vientos en general y corrientes de los mares.—Madrid, 1860.

texto, no exclusivas, sino todas las que se publiquen y concuerden con los programas y la forma de los exámenes; los cuales deberán ser de cuatro horas para la enseñanza superior, dos para la segunda y una para la primera, mitad del tiempo oral y mitad escrito, y con notas de sobresaliente, muy bueno, bueno, suficiente, suspenso, y malo ó desaprobado.

6.ª El exámen de primera enseñanza, aunque no sea rigoroso en lo relativo á la gramática castellana, que se acaba de aprender con la latina, será mucho sobre aritmética, que deberá saberse por completo. Los de segunda enseñanza podrán ser, ademas de las materias principales marcadas para cada curso (que no se podrán simultanear), de las que como accesorias se hubieren estudiado en el año anterior y de cuyo exámen se hubiera salido suspenso; pero las matemáticas deberán estudiarse en tres años precisamente.

7.ª El exámen de primera enseñanza no se podrá presentar sino á los diez años cumplidos, y á los diez y seis el del bachillerato.

8.ª Los grados de bachiller y otros superiores los otorgará el Gobierno á propuesta del Consejo de Instruccion pública, que deberá examinar y aprobar las actas de exámen; pero los certificados de exámen de cursos anuales y de primera enseñanza los darán los directores de los Institutos sobre expediente, en que conste el cumplimiento de la ley en el exámen último y anteriores, prestados en el mismo establecimiento ú otros, y las pruebas por comprobacion de firmas de que el examinando es el mismo que recibe el certificado.

9.ª El Consejo de Instruccion pública se compondrá de número ilimitado de vocales, y sus cargos serán vitalicios y gratuitos, á excepcion de los de contínua asistencia y del secretario; habiéndolos de asistencia semanal y de asistencia sólo en Consejo pleno.

10. El Gobierno nombrará los consejeros en número de diez cada año, pero el nombramiento deberá recaer en las categorías siguientes: Arzobispos, Obispos, Generales que hayan servido en cuerpos facultativos, Jefes de los mismos, sean militares ó civiles, Directores y miembros de las Academias de Ciencias, Historia y la Lengua, y doctores; debiendo ser todos precisamente de la edad de cuarenta años cumplidos.

J. M. Tuero.

Madrid 15 de Mayo de 1875.

# ÍNDICE.

Páginas.

# CURSO DE MATEMÁTICAS.

---

## INTRODUCCION.

### PRELIMINARES GENERALES.

**1.** * **Matemáticas** *son las ciencias que tratan de la cantidad.* Las fundamentales se llaman *Aritmética*, *Geometría* y *Algebra*. Algunas no tratan de la cantidad con relacion á su magnitud, sino relativamente á su posicion ó su figura.

**2.** CANTIDAD *es todo lo que está dividido ó es divisible en partes, real ó imaginariamente*, *y puede*, *por lo tanto, considerarse como compuesto de ellas.* Tambien es cantidad cualquiera de sus partes, especialmente si no están esencialmente separadas; y áun una parte de sus mismas partes, porque será divisible en otras, siquiera sea imaginariamente.

Un grupo de árboles, un monton de monedas, un trozo de madera, la superficie de un jardin, el tiempo que media entre la primavera y el otoño, etc., son cantidades. Y tambien un árbol, una moneda, una vara, un mes. Y áun tambien media peseta, la tercera parte de un mes, porque se componen ó pueden considerarse compuestas de partes.

**3.** La *cantidad* puede ser *discreta* ó *contínua*. Discreta, es aquella cuyas partes están naturalmente desunidas; y contínua, cuando sus partes están unidas, aunque puedan materialmente separarse. La primera es *numerable*, y la segunda *mensurable*, aunque numerable tambien con relacion á sus medidas.

Un grupo de árboles es una cantidad discreta, porque los árboles están naturalmente separados. Un trozo de madera es una cantidad contínua, porque sus partes están esencialmente unidas, aunque puedan materialmente separarse, haciendo el trozo pedazos. El tiempo que media desde la salida hasta la puesta del sol, es una cantidad contínua, cuyas partes, no sólo están unidas, sino que no pueden separarse más que imaginariamente. La cantidad del grupo de árboles es numerable, porque los árboles pueden contarse ó numerarse (como sabre-

---

* *Nota para el estudio.* En letra de mayor tamaño se expresa todo lo más importante de la ciencia, y en letra menuda las aclaraciones, repeticiones, ejemplos de poca importancia y verdades no fundamentales; todo aquello, en fin, de cuya lectura se puede prescindir total ó parcialmente, segun el objeto del estudio ó las facultades del estudiante; indicándose ademas con la señal Θ los párrafos exclusivamente destinados á los más cortos de inteligencia, y con la Δ aquellos que se escriben sólo para los más inteligentes, ó que deban dedicarse á profundos estudios matemáticos. La letra bastardilla, como de costumbre, sirve para llamar la atencion sobre algunas palabras; y por lo tanto, cuando muchas seguidas aparezcan en ese género de letra, es señal de que su contenido, no sólo debe entenderse, sino tambien aprenderse de memoria. Los números de los párrafos sirven para marcar más separacion entre ellos, y para facilitar las citas.

mos mejor más adelante). Y el trozo de madera, y el tiempo desde el salir al ponerse el sol, son cantidades mensurables, porque se miden, la primera, en pies, pulgadas, etc., y la segunda, en horas y minutos, cuyas medidas pueden contarse: y por eso, despues de medida una cantidad contínua, decimos que es numerable.

**4.** *Ciencia* es una série ó conjunto de verdades, relacionadas entre sí, y encaminadas todas á producir el conocimiento más ó ménos completo de una materia. Si esta es muy vasta y variada, da lugar á divisiones y áun á subdivisiones, que tambien se llaman ciencias, como se ha indicado al definir las matemáticas; en las que la Aritmética trata de la cantidad discreta, la Geometría de la contínua (no de toda, pues el tiempo es objeto de la cosmografía), y el Algebra de la cantidad en general, prescindiendo de que sea discreta ó contínua.

Las ciencias, ademas, se dividen en grupos por la mayor ó menor semejanza qne hay entre ellas; y asi se dice ciencias morales, ciencias físicas, etc.

**5.** Las matemáticas son las ciencias exactas por excelencia, porque en ellas todo es susceptible de demostracion incontestable, al paso que otras se componen de hipótesis (suposiciones) más ó ménos razonables; y de experimentos más ó ménos comprobados, y si tienen algo de exactas, lo deben casi siempre á las matemáticas que les sirven de auxiliares.

**6.** *Demostracion* es un raciocinio por el que se evidencia una verdad, llamada *cuestion* en el acto de demostrarla. La demostracion se llama *directa* cuando se obtiene haciendo ver la relacion que hay entre la verdad que se trata de demostrar y otras evidentes por sí mismas ó ya demostradas. Y es la demostracion *indirecta* ó *ad absurdum* cuando se consigue evidenciando el absurdo (lo que se opone á una verdad conocida) que se seguiria sino fuera verdad lo que se pretende.

Las verdades principales que constituyen una ciencia toman diferentes nombres, segun la manera con que se presentan, demuestran ó aplican. En Matemáticas son los siguientes:

**7.** *Definicion* es la explicacion de la naturaleza de una cosa, por la determinacion de las circunstancias esenciales ó accidentales que la constituyen y diferencian de otras. Si no se determina más que el nombre convencional de la cosa, la definicion se llama *nominal*. *

**8.** *Axiomas* son verdades ó principios tan evidentes, universales y necesarios, que no necesitan demostracion, ni á veces son susceptibles de ella, y constituyen los principales fundamentos de la demostracion matemática.

---

* No hay nada más difícil que definir exactamente una cosa, sobre todo si es algo metafísica, lo que se comprenderá si se intenta definir una tan material y sencilla como es una mesa; y para ello se tiene en cuenta que hay mesas de madera, mármol y otras materias; con cuatro pies, tres, dos y áun ninguno, las colgadas, y de muy diferente figura y aplicacion. Por lo que, aunque las definiciones matemáticas puedan ser más exactas que las de otras ciencias, no pretendemos haber acertado siempre, cuando nos hemos separado del criterio de otros autores por seguir el irresistible impulso del propio nuestro. Para justificar este con pocas palabras, diremos que hemos creido muy razonable, por ejemplo, que de una vez se deseche la tan admitida definicion de la cantidad, de que sea *todo lo que es susceptible de aumento ó disminucion*, pues el dolor y otras afecciones no son cantidades, matemáticamente al ménos; pero no hemos podido absolutamente aceptar como exactas otras muchas definiciones antiguas y nuevas, por ejemplo, de que el número es el todo formado por una pluralidad de unidades, pues creemos que la singularidad, ó sea una cosa y aun media cosa, es un número ó cantidad de magnitud determinada, y la pluralidad de unidades sino se cuentan y determina cuántas son, formarán ciertamente una cantidad, pero de magnitud indeterminada, que, por lo tanto, no será número.

El todo equivale á todas sus partes juntas. Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, etc.; son axiomas matemáticos, que no sólo no se demuestran, sino que ni áun se enuncian más que al irlos necesitando para las demostraciones, considerándolos como sabidos de antemano.

**9.** *Postulados* son especie de axiomas, pero de carácter práctico, por cuanto en ellos se establece la evidente posibilidad de hacer una cosa material, y son muy usados en Geometría.

Por ejemplo, desde un punto á otro de un plano se puede trazar una línea recta.

**10.** *Teorema* es el enunciado de una verdad especulativa que necesita demostracion y es susceptible de ella.

Consta de tres partes: 1.ª *Hipótesis*, que contiene la condicion ó circunstancia especial que ha de existir para que se verifique la verdad enunciada. 2.ª *Tésis*, que es la expresion de la verdad demostrable. Y 3.ª *Demostracion*, que es el razonamiento para evidenciarla.

*Ejemplo.* Si se multiplican los dos términos de un quebrado por un mismo número (hasta aquí la hipótesis), el valor del quebrado no varía (que es la tésis). Sigue la demostracion.

**11.** *Teoremas recíprocos* se llaman dos, en los que el uno tiene por tésis la hipótesis del otro y por hipótesis su tésis; y son muy usados en Geometría.

**12.** *Lema* es un teorema auxiliar de fácil demostracion. Es, pues, una verdad, no tan evidente como la del axioma, pero no tan difícil de ver como la del teorema; por lo que á veces, ni tienen bien distintas sus partes de hipótesis y tésis, ni necesitan una demostracion formal, y bastan simples indicaciones de ella, á lo que vulgarmente se llama el *por qué* de la verdad que encierran.

**13.** *Problema matemático* se llama la propuesta de hallar prácticamente una cantidad desconocida (que se llama *incógnita* antes de conocerla, y despues *resultado*), como consecuencia de operaciones que se hagan con cantidades conocidas que se llaman *datos*.

El problema consta de tres partes: 1.ª *Propuesta*, en la que se enuncia lo que se pretende hallar, y se enumeran los datos que se tienen ó suponen conocidos. 2.ª *Solucion*, en la que se prescribe el procedimiento llamado *regla*, que debe emplearse con los datos para que produzca el resultado apetecido. Y 3.ª *Demostracion*, en la que se prueba con razones convincentes que la aplicacion de la regla conduce necesariamente á encontrar el resultado deseado.

La solucion se llama tambien resolucion; pero esta palabra se aplica más comunmente al acto material de ejecutar lo prescrito por la regla, aunque solucion tambien se toma como sinónimo de resultado.

La demostracion suele preceder á la regla; pero esto es segun el método analítico, muy á propósito para los que tienen ya su inteligencia completamente desarrollada; pero el método sintético por el que la regla precede á la demostracion, es el más propio para los niños y adolescentes, que en general son poco reflexivos.

**14.** Los problemas pueden ser generales ó particulares. Los primeros son aquellos en los que siendo los datos indeterminados, las reglas tienen que ser generales, y no dar resultado práctico, sino al aplicarlas á problemas particulares, que son aquellos en los que los datos son determinados.

Problema general es, por lo tanto: «Dados varios números de muchas cifras cada uno, hallar el número que equivalga á todos juntos.» Su solucion es la regla general para sumar esa clase de números, y su demostracion es el razonamiento por el que se prueba teóricamente que aplicando la regla á cualquier ejemplo de las condiciones del problema general, el resultado no puede por ménos de ser el que se pretende. Por ejemplo, que 157 y 238 componen 395. Este ejemplo es en este caso un problema particular, cuyos datos son 157 y 238, y aplicando la regla ó solucion, se determina el 395, que es el resultado.

**15.** Los problemas ademas se llaman *insolubles*, cuando sus datos no son suficientes, por su número ó por sus circunstancias, para producir el resultado que se desea, ó al que se refiere el problema, y son solubles en el caso contrario.

**16.** *Fórmula* se llama en los problemas la expresion escrita, simplificada y lacónica (comunmente es abreviatura) de una regla general.

**17.** *Corolarios* son verdades especulativas ó prácticas que se deducen fácil é inmediatamente de otras que acaban de demostrarse ó de manifestar su evidencia.

Son, pues, los corolarios verdaderos lemas que no toman ese nombre porque les cuadra mejor el de corolario como sinónimo de consecuencia inmediata, pues sin su inmediacion, casi todos los teoremas y lemas serian corolarios los unos de los otros, porque son unos generalmente consecuencia de la verdad de los otros.

**18.** *Escolios ú observaciones* se llaman las advertencias ó prevenciones que se van intercalando en el cuerpo de una obra para facilitar las demostraciones, cuyo primer nombre les daremos cuando llenen ese objeto, y dejaremos el de observaciones cuando no tiendan más que á aclarar ó ensanchar el rádio de la ciencia.

**19.** Todo el resto ó demas partes de una obra científica que sirve para la trabazon y enlace de las verdades fundamentales ó principales que la constituyen, se llama en general *fondo de doctrina*.

NOTA. El autor que creemos ha sido el primero en poner como introduccion general de su tratado de Matemáticas, definiciones semejantes á las anteriores, ha sido el ilustre marino D. Gabriel Ciscar.

# CURSO DE MATEMÁTICAS.

---

## TRATADO PRIMERO.

### ARITMÉTICA INFERIOR Y SUPERIOR.

## LIBRO PRIMERO.

### ARITMÉTICA INFERIOR.

## CAPÍTULO PRIMERO.

### PRELIMINARES.

**20.** **Aritmética** *es la ciencia que trata de la cantidad expresada en números.* Llamamos *inferior* á la parte de ella más usual y conocida, para distinguirla de la que lo es ménos, y que, componiéndose de materia más elevada, le conviene el nombre de *superior.*

**21.** NÚMERO *es la expresion genuina de una cantidad, con relacion á las partes iguales ó semejantes, reales ó imaginarias, en que se divide ó puede considerarse dividida.*

Un grupo de árboles, que es una cantidad de árboles, pero de magnitud indeterminada, si se examina y se ve que consta de un árbol, otro árbol y otro árbol, cuyo conjunto, como despues veremos, se llama *tres*, se tendrá que tres árboles es un número de árboles, así como antes de contarlos ó numerarlos eran sólo una cantidad indeterminada de árboles. De esta consideracion se deduce que lo mismo será decir que tres árboles es un número de árboles, que una cantidad de árboles; y en ese sentido de cantidad determinada se emplean indistintamente los nombres de número y cantidad. No puede decirse lo mismo relativamente á número y cifra ó guarismo, pues aunque las cifras numéricas se llaman vulgarmente números, ya veremos que la mayor parte de los números constan de muchas cifras.

**22.** UNIDAD *es cualquier cosa ú objeto que tenga iguales ó semejantes, considerado sólo; y más especialmente cada una de las partes iguales ó semejantes en que real ó imaginariamente se halla ó considera dividida una cantidad y sirve de medida al número.*

En el grupo de árboles, un árbol es la unidad que sirve para contarlos y convertir la cantidad indeterminada de árboles en el número ó cantidad determinada de *tres* árboles; y evidentemente uno de esos árboles constituirá tambien una cantidad determinada y consiguientemente un número.

**23.** Los números pueden ser *abstractos* ó *concretos;* y unos y otros se dividen en *enteros*, *quebrados*, *mixtos* y *quebrados de quebrados*; y los concretos se dividen ademas en *complejos* é *incomplejos*, ó sean simples concretos.

**24.** Número *abstracto* es aquel en el que no se determina la especie de la unidad á que se refiere, y *concreto* cuando se especifica la unidad.

*Tres árboles* es un número concreto, y *tres*, sin especificar de qué cosas se trata, es un número abstracto. Se infiere de esto, que los números abstractos no lo son tanto como parecen, pues cuando se dice *tres* se entiende tres cosas cualesquiera. Es decir, que para el objeto de que se trata, importa poco el saber si esas tres cosas son árboles ó melones; y ese objeto puede ser, por ejemplo, el saber cuántos componen tres y dos; y como lo mismo compondrán cinco, tratándose de melones que de soldados, se prescinde de la especie ó se hace *abstraccion* de ella. De este modo, las matemáticas generalizan sus cálculos, no sólo por el Algebra, sino hasta por la Aritmética, como podemos ya comprender por estas indicaciones sobre los números abstractos.

**25.** *Número entero* es el que se compone de unidades enteras ó completas, y *número quebrado* ó *fraccion* es el que expresa partes de la unidad á que se refiere; y que en muchas ocasiones, refiriéndose á otra, el quebrado se convertiria en entero.

*Tres pesetas* es un número *entero*, y *tres cuartos de peseta* es un quebrado ó fraccion; pero si en lugar de contar la cantidad de dinero con la unidad peseta, se contase con la unidad real, como sabremos despues, el quebrado tres cuartos de peseta se convertiria en el entero tres reales.

**26.** *Número mixto* es el que se compone de entero y quebrado.

Tres pesetas y media es un número mixto.

**27.** *Quebrado de quebrado* es el que expresa partes, no de la unidad á que se refiere, sino de una parte de ella.

Un tercio de media peseta es un quebrado de quebrado.

**28.** El número *concreto* se llama *complejo*, si se compone de unidades de diferente magnitud, pero de la misma naturaleza; y se llama *incomplejo*, cuando sólo consta de unidades concretas, iguales ó semejantes.

Tres pesetas y tres reales es un complejo.

**29.** El número, finalmente, con relacion á la forma de su expresion escrita, se llama *dígito*, cuando puede expresarse con una sola cifra; y en otro caso se llama compuesto de dos, tres ó tantas cifras, segun el número de ellas que se necesita para expresarlo, ó *bidígito*, *polidígito*, etc.

**30.** La *Aritmética* no puede hacer verdaderamente con los números más que tres cosas: *expresarlos*, *componerlos* y *descomponerlos*.

# CAPÍTULO II.

## NUMERACION.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**31. Numeracion** *se llama la parte de la Aritmética que enseña á expresar los números;* y como los números pueden expresarse de palabra y por escrito, hay *numeracion oral* y *numeracion escrita.*

La numeracion enseña, pues, á hacer una de las tres cosas únicas que hemos dicho que la Aritmética puede hacer con los números (30).

### ARTÍCULO II.

#### NUMERACION ORAL.

**32.** La *numeracion oral* enseña á expresar de palabra los números que determinan la magnitud de las cantidades; mas como estas pueden ser sumamente grandes y sus partes numerosísimas, ha habido necesidad de inventar un sistema por el que, con pocas palabras, se puedan expresar todos los números imaginables.

**33.** Las palabras inventadas para la numeracion, son: *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve*, *diez*, *veinte*, *ciento*, *mil* y *millon;* con las que, y bien visibles modificaciones de ellas, se ha conseguido lo que se deseaba, en virtud de las siguientes convenciones:

**34.** Se ha convenido, pues, en que el agregado de *uno* y *uno* se llame *dos*. El de *dos* y *uno*, *tres*. El de *tres* y *uno*, *cuatro*. El de *cuatro* y *uno*, *cinco*. El de *cinco* y *uno*, *seis*. El de *seis* y *uno*, *siete*. El de *siete* y *uno*, *ocho*. El de *ocho* y *uno*, *nueve*. Y el de *nueve* y *uno*, *diez*.

**35.** Se ha convenido tambien en que el agregado de nueve y uno, no sólo se llame *diez*, sino que esas diez unidades, que primeramente se cuentan, se llamen *simples*, y su conjunto *diez* constituyan una *unidad de segundo órden*, *llamada decena;* contándose despues por decenas y unidades, diez y uno, diez y dos, etc.; pero por una irregularidad de lenguaje, á diez uno, se llama *once;* á diez y dos, *doce;* á diez y tres, *trece;* á diez y cuatro, *catorce;* á diez y cinco, *quince;* continuando despues regularmente diciendo: *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho* y *diez y nueve*.

36. Despues, por lo convenido, de que cada diez unidades simples formen una decena, diez y nueve y uno, deberia expresarse por *dos dieces* ó decenas; pero se ha convenido en usar otra de las palabras inventadas, y se dice *veinte;* continuando despues más regularmente llamando á tres dieces *treinta*, á cuatro *cuarenta*, á cinco *cincuenta*, á seis *sesenta*, á siete *setenta*, á ocho *ochenta*, á nueve *noventa;* contándose, por lo tanto, *veinte y uno, veinte y dos... veinte y nueve, treinta, treinta y uno, treinta y dos... treinta y nueve, cuarenta... cincuenta, noventa... y noventa y nueve.*

37. Análogamente á lo convenido para constituir las decenas con diez unidades, se ha convenido en que noventa y nueve y uno, que componen diez decenas, no sólo se llamen *ciento*, sino que constituyan una unidad de tercer órden llamada *centena*, contándose por centenas, decenas y unidades de una manera bastante regular, diciendo: *ciento, ciento uno, ciento dos... ciento nueve, ciento diez... ciento quince... ciento veinte... ciento treinta... ciento noventa... ciento noventa y nueve*, sin más irregularidad que decir *quinientos* en lugar de cinco cientos.

38. Despues, semejantemente á lo convenido para las decenas y centenas, se convino en que cada diez centenas compusiesen una unidad de cuarto órden llamada *millar*, y se contó *mil uno, mil dos*, etc., hasta *mil novecientos noventa y nueve*. Y conviniendo tambien en que cada diez millares compusiesen una *decena de millar*, cada diez decenas de millar una *centena de millar*, cada diez decenas de millar *un millon*, cada diez millones una *decena de millon*, y análogamente *centenas de millon, millares de millon, decenas de millar de millon, centenas de millar de millon, billon, decenas de billon*, etc., se completó el sistema que, con lo expuesto, se comprenderá cuán fácilmente permite que se puedan expresar todos los números imaginables (no sólo hasta *billones*, sino *trillones, cuadrillones*, etc.), con muy pocas palabras.

39. *Escolio*. Convenido en que diez unidades simples compongan una decena, cada diez decenas una centena, etc., es evidente consecuencia que cada decena contiene diez unidades simples, cada centena diez decenas ó cien unidades simples, cada millar diez centenas, cien decenas ó mil unidades simples; y por lo tanto y por ejemplo, *tres mil trescientos treinta y tres* se puede decir que se compone de tres millares, tres centenas, tres decenas y tres unidades; pero tambien de treinta y tres centenas, tres decenas y tres unidades; y tambien de trescientas treinta y tres decenas y tres unidades.

40. Este sistema de numeracion se llama *decimal*, ó mejor todavía *decenario ó décuplo*, pues aquel nombre se emplea más comunmente para el sistema de numeracion de ciertos quebrados que despues conoceremos.

La palabra *décuplo* significa *diez veces* mayor, y la *decimal* diez veces menor, por lo que una y otra pueden aplicarse al sistema que se acaba de explicar, pues si, por ejemplo, cada decena es diez veces mayor que la unidad simple, cada unidad simple es diez veces menor que una decena; pero con relacion á la misma unidad simple, las unidades de otros órdenes son mayores que ella y, por lo tanto, conviene al sistema explicado el nombre de décuplo, y al de unidades menores que la simple el de decimal.

*Observacion.* Posible seria, despues de conocer la ingeniosa combinacion del sistema expresado, establecer otro semejante, pero de condiciones todavía más ventajosas, por ejemplo, el de *docenas* en lugar de *decenas*, cuya superioridad apreciaremos mejor en otra parte; pero estando las matemáticas tan generalizadas, una innovacion tan radical causaria gran perturbacion en la república de las ciencias, que no compensaria las ventajas del cambio. Ademas, que si el cambio no lo aceptaban todas las naciones, las matemáticas perderian una de sus principales ventajas: el tener una escritura universal.

## ARTÍCULO III.

### NUMERACION ESCRITA.

**41.** *Numeracion escrita* se llama la parte de la Aritmética que enseña á escribir todos los números imaginables, por grandes que sean, con muy pocos caractéres llamados *cifras ó guarismos.*

**42.** Las cifras de que se vale la Aritmética para expresar los números, se ha convenido sean las siguientes:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 y 0.

**43.** Las nueve primeras cifras, cuyos nombres son los asignados en la numeracion oral á las unidades simples *uno*, *dos*, *tres*, etc., se llaman *cifras significativas*, porque se les ha dado la significacion ó valor que indican sus nombres; y la última, 0, que se lee *cero*, se llama *no significativa*, porque no se le ha dado valor absoluto ninguno, y equivale á *nada*.

**44.** Para escribir con esas diez cifras todos los números, por grandes que sean, se ha convenido en asignarles dos valores; uno absoluto, que es el que indican sus nombres, y otro relativo al lugar que cada uno ocupa con relacion á otras. La primera, pues, de la derecha de dos ó más escritas en línea, tiene el valor relativo igual al dicho absoluto de unidades simples, la segunda el valor relativo de decenas, la tercera el de centenas, la cuarta el de millares, la quinta el de decenas de millar, la sexta el de centenas de millar, la sétima el de millones, la octava el de decenas de millon, etc., etc., siempre contando de derecha á izquierda.

**45.** El cero, que, como va dicho, no tiene valor absoluto ninguno, lo tiene relativo en el sentido de que se ha establecido que diga que no hay unidades del órden correspondiente al lugar que ocupa.

**46.** *Para escribir, pues, cualquier número con las diez cifras expresadas, no hay que atender á otra cosa sino á que todas las unidades de diferente órden que contenga y se expresen por el sistema establecido en la numeracion oral, estén representadas por cifras significativas, colocadas en el lugar correspondiente que se acaba de señalar; y á que el cero ocupe los lugares en que no pueda haber otra cifra significativa, por carecer el número propuesto de la clase de unidades correspondientes á aquellos lugares.*

*Ejemplos.* Para escribir el número *veinte y siete*, que evidentemente se compone (39) de dos decenas y siete unidades simples, se pone 7 en el lugar de las unidades y 2 en el de las decenas; pero siguiendo la costumbre de escribir todo de izquierda á derecha, se pone primeramente el 2 y á su derecha el 7, lo que, lejos de ofrecer dificultad á la práctica, la facilita, pues que al expresar los números oralmente, se nombran antes las unidades superiores que las inferiores.

Para escribir *trescientos veinte y siete*, cuyo número consta de 3 centenas, 2 decenas y 7 unidades, se escribe 327. Para escribir *tres mil cuarenta*, cuyo número consta de 3 millares, ninguna centena, 4 decenas y ninguna unidad simple, escribiremos 3040. Para escribir setenta mil ochocientos cuatro, cuyo número consta de 7 decenas de millar, ningun millar, 8 centenas, ninguna decena y 4 unidades simples, escribiremos 70804. Finalmente, para escribir treinta millones treinta mil treinta, escribiremos 30030030.

47. *Observacion.* Sabiendo escribir ya los números, se podrá comprender mejor el escolio 39, pues, por ejemplo, 3333 veremos claramente que se compone, como allí dijimos, de 3 millares, 3 centenas, 3 decenas y 3 unidades (el adjetivo simple se sobreentiende siempre), ó de 33 centenas, 3 decenas y 3 unidades; ó de 333 decenas y 3 unidades; ó 3333 unidades simples.

## ARTÍCULO IV.

### LECTURA DE LOS NÚMEROS.

48. Regla. *Para leer números compuestos de dos ó tres cifras, basta tener presentes las convenciones expresadas sobre la numeracion oral y escrita; pero cuando los números constan de muchas cifras, conviene, para hacer fácil la lectura, dividirlos con puntos en porciones de á tres, empezando por la derecha y sin reparar en que la última porcion de la izquierda sea de dos cifras ó de una cifra sola. Ademas, bajo el punto de la segunda division se pondrá de pequeño tamaño un* 1, *bajo el punto de la cuarta division un* 2, *etc. En seguida se leerán cada tres cifras como si estuviesen solas, diciendo mil al llegar á cada punto solo (siempre que siquiera alguna cifra de la subdivision sea significativa), y diciendo millones al llegar al punto que tiene debajo un* 1, *billones al* 2, *etc., siempre que alguna de las cifras de la division sea significativa.*

| | | |
|---|---|---|
| *Ejemplo.* | 7 0 9 0 0 0 4 0 0 0 7 8 0 | se dividirá |
| primeramente | 7.0 9 0,0 0 4.0 0 0,7 8 0 | y despues |
| como se vé | 7.0 9 0,0 0 4.0 0 0,7 8 0 | leyéndose |
| | 2       1 | |

siete billones, noventa mil, cuatro millones, setecientos ochenta. No expresándose la palabra mil al llegar al punto último de la derecha, porque ninguna de las tres cifras de la subdivision es significativa,

| | | |
|---|---|---|
| y para leer | 7 0 0 0 0 0 0 7 0 0 7 0 0 | se dividirá |
| de este modo | 7.0 0 0,0 0 0.7 0 0,7 0 0 | y se leerá |
| | 2       1 | |

siete billones, setecientos mil setecientas unidades simples, no diciendo millones al llegar al 1 porque le preceden seis ceros.

49. Para no equivocarse al escribir números grandes dictados, conviene, segun se van escribiendo, ir poniendo las señales ó divisiones expresadas para la lectura.

*Ejemplo.* Si, por ejemplo, se dicta ocho millones, cuarenta y cuatro mil ochocientos nueve, en seguida que se escribe el 8 para expresar las unidades de millon, se pone á su derecha el punto y el 1 correspondiente, en esta forma: $\underset{1}{8}$. Al oir que despues de dictar ocho millones, se dicta cuarenta y cuatro mil sin expresar ninguna centena, se le añaden al 8 las tres cifras correspondientes de este modo: 8,044, y al terminar el dictado con las palabras ochocientos nueve, se concluye de escribir el número $\underset{1}{8}$.044,809, cuyas señales para la lectura habrán facilitado mucho la escritura.

## ARTÍCULO V.

### NUMERACION ROMANA.

**50.** El sistema de la *numeracion romana* es el mismo décuplo explicado, y la oral es por lo tanto la misma expuesta; pero siendo diferente la escrita, y siendo su conocimiento conveniente, no sólo para entender ciertas inscripciones antiguas, sino tambien para leer números que se escriben aún por ese sistema, como son los de los capítulos de los libros, los de las páginas de los prólogos y las fechas de la construccion de los edificios inscriptas en sus fachadas; daremos de ella aquí una sucinta idea, aunque mejor cuadraria despues de la adicion y sustraccion, si no fuera porque suponemos sabida la Aritmética práctica; pero en caso contrario resérvese este artículo.

**51.** La numeracion romana escrita se vale de las cifras siguientes, con los valores absolutos que se expresan:

| I | V | X | L | C | D | M |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |

**52.** Para expresar con esas siete cifras todos los números imaginables, se convino que cada una de ellas tuviera el valor absoluto expresado; pero que cuando estuvieran varias en línea, el valor de cada una fuera disminuido por el de la anterior ó el de la izquierda, si fuera menor, la que perderia el suyo absoluto. Así, despues de X el V, forma el número 15, porque X es mayor que V; pero X delante de L forma el número 40, porque á las 50 de L les quita 10 de valor la X, como menor. Análogamente VIII vale 8, y IV vale 4.

Para expresar números muy grandes se modifican ligeramente las mismas cifras expresadas con una, dos ó tres rayitas superiores, que les hace valer mil, millon, etc. $\overline{D}$ vale 500,000 y $\overline{\overline{C}}$ 100.000,000.

**53.** Los números romanos principales y sus equivalentes, son los que expresa la Tabla I de las auxiliares de la Aritmética, que aparecen al fin de este tratado, primero de Matemáticas.

## ARTÍCULO VI.

### CONSECUENCIAS IMPORTANTES DE LO CONVENIDO EN LA NUMERACION.

**54.** LEMA. *Todo número, al que se le agrega un cero á la derecha, se le hace diez veces mayor, cien veces si se le agregan dos ceros, mil veces si el aumento es de tres ceros*, etc.

Porque, en el primer caso, la cifra que representaba unidades simples, pasa á representar decenas, que son diez veces mayores que las unidades (35); la que representaba decenas pasa á representar centenas, diez veces mayores que las decenas; luego todas, y cada una de las partes del número, se hacen diez veces mayores, y como es un *axioma que lo que se hace con las partes, queda hecho con el todo*, el número de que se trate quedará hecho diez veces mayor. Y como de una manera análoga se demostraria el por qué un número se hace cien, mil, etc., veces mayor agregándole dos, tres, etc., ceros á la derecha, el lema es general, y la verdad que encierra queda demostrada.

**55.** LEMA RECÍPROCO. *Todo número terminado en ceros, al que se le quite uno, se hace diez veces menor; cien veces si se le quitan dos; mil, si son tres los ceros suprimidos*, etc.

Porque análogamente á lo demostrado en el anterior lema, aunque en un sentido inverso, al suprimir á un número un cero, la cifra que representaba decenas pasa á representar unidades, que son diez veces menores que las decenas; la que representaba centenas, pasa á representar decenas, diez veces menores que las centenas, etc.; y haciéndose todas las partes del número diez veces menores, el número quedará evidentemente hecho diez veces menor. Y como lo mismo se demostraria relativamente á la supresion de dos ó más ceros, el lema es general, como el anterior y queda demostrado.

**56.** LEMA. *Uno ó varios ceros á la izquierda de los números no les da ni les quita valor* (tratándose de enteros, por lo que despues sabremos).

Porque las cifras significativas del número y los ceros intermedios que puede haber con ellas, seguirán con el mismo valor relativo, y los ceros, no teniendo valor absoluto colocados á la izquierda, no dirán más que lo que es muy innecesario que digan: que el número no tiene unidades de órden superior á las expresadas por la última cifra significativa de la izquierda.

*Ejemplos.* 37 es diez veces menor que 370, y viceversa, 370 diez veces mayor que 37, y este igual á 037.

## ARTÍCULO VII.

### DEMOSTRACION DE LA NUMERACION.

**57.** Aunque se dijo (5), que en las matemáticas todo es susceptible de demostracion, no hay regla sin excepcion; y ya desde luego se indicó (8) la de los axiomas, que son indemostrables por su misma evidencia; y debió añadirse las de las definiciones, que tampoco se prestan fácilmente á la demostracion, ó la llevan en sí envuelta si son exactas, aunque la tengan aquellas que á la vez son enunciados de problemas generales. Pues semejantemente á los axiomas y á las definiciones, no admiten verdadera demostracion los principios que se establecen convencionalmente, y que una vez establecidos y no oponiéndose á una verdad conocida (en cuyo caso serian absurdos), adquieren el carácter mismo de las definiciones y áun de los axiomas, porque ya son verdades evidentes é indemostrables.

**58.** La numeracion, pues, siendo un sistema combinado de convenciones establecidas con objeto de expresar los números bien y fácilmente, no admite demostracion; pues la única que podria darse, sería la explicacion del sistema. Y análogamente tampoco puede en realidad demostrarse que 2 y 3 son 5, sino diciendo que habiéndose convenido en que el agregado de 1 y 1 se llame dos, y al de 2 y 1 tres, y al de 3 y 1 cuatro, y al de 4 y 1 cinco, 5 se compone de 2, que es 1 y 1, y de 3 que es 1, y 1, y 1.

## ARTÍCULO VIII.

### EJERCICIO SOBRE LA NUMERACION.

**59.** Escríbense los números siguientes y otros parecidos:

Quince. Cuarenta y cuatro. Setenta y nueve. Ciento y uno. Setecientos nueve. Ochocientos ochenta. Cinco mil cuatrocientos veinte. Seis mil setecientos ocho. Cuatro mil cuarenta. Nueve mil nueve. Veinte y dos mil setecientos ochenta y cuatro. Treinta mil cuatrocientos. Ochenta mil ochenta. Novecientos cuarenta mil doscientos cuatro. Setecientos mil setecientos siete. Novecientos mil nueve. Ocho millones cuatro mil ochenta. Treinta millones treinta mil treinta. Cincuenta millones y cinco. Nueve trillones cuatro mil millones setecientos ochenta y nueve mil cuatrocientos cuarenta y cuatro.

Y en números romanos los siguientes:

Ocho. Nueve. Doce. Catorce. Diez y siete. Diez y nueve. Veinte y cuatro. Veinte y seis. Treinta. Treinta y cinco. Cuarenta y dos. Cuarenta y nueve. Cincuenta y cinco. Sesenta y nueve. Setenta y cuatro. Ochenta y dos. Noventa y nueve. Ciento uno. Ciento veinte y cuatro. Quinientos ochenta. Novecientos quince. Dos mil uno. Tres mil diez. Cuatro mil quince. Cinco mil ochocientos nueve. Ocho mil ocho. Un millon y diez y ocho. Dos millones tres mil ochocientos cuarenta.

Léanse, dividiéndolos préviamente en periodos, los números siguientes y otros parecidos:

15 80 102 770 909 2450 7080 99009 50005 700008 9000000 4000500 7094444 55000070 8888888 9000009 28043057 500900700 705000080 4507840905070 10008000700040 70000004007000 50070000007000.

VIV VIII XV XIX XXXII XLVI LXXXIV MCCLIX MDCXC MCM

$\overline{\overline{\mathrm{D}}}\,\overline{\mathrm{II}}\,\mathrm{DLXX}$ $\overline{\mathrm{D}}\,\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{C}}\,\mathrm{DCCCXC}$ $\overline{\overline{\mathrm{I}}}\,\overline{\mathrm{D}}\,\mathrm{DCMVII}$.

establecidas con objeto de expresarlos números bien y fácilmente, ni admite demostracion; pues la única que podria darse, seria la explicacion del sistema. Y análogamente tampoco puede en realidad demostrarse que 2 y 3 son 5, sino diciendo que habiéndose convenido en que al agregado de 1 y 1 se llame dos, al de 2 y 1 tres, y al de 3 y 1 cuatro, y al de 4 y 1 cinco, y se compone de 2, que es 1 y 1, y de 3 que es 1, y 1, y 1.

## ARTÍCULO VIII.

### EJERCICIO SOBRE LA NUMERACION.

**59.** Escríbanse los números siguientes y otros parecidos:

Quince. Cuarenta y cuatro. Setenta y nueve. Ciento y uno. Setecientos nueve. Ochocientos ochenta. Cinco mil cuatrocientos veinte. Seis mil setecientos ocho. Cuatro mil cuarenta. Nueve mil nueve. Veinte y dos mil setecientos ochenta y cuatro. Treinta mil cuatrocientos. Ochenta mil ochenta. Novecientos cuarenta mil doscientos cuatro. Setecientos mil setecientos siete. Novecientos mil nueve. Ocho millones cuatro mil ochenta. Treinta millones treinta mil treinta. Cincuenta millones y cinco. Nueve trillones cuatro mil millones setecientos ochenta y nueve mil cuatrocientos cuarenta y cuatro.

Y en números romanos los siguientes:

Ocho. Nueve. Doce. Catorce. Diez y siete. Diez y nueve. Veinte y cuatro. Veinte y seis. Treinta. Treinta y cinco. Cuarenta y dos. Cuarenta y nueve. Cincuenta y cinco. Sesenta y nueve. Setenta y cuatro. Ochenta y dos. Noventa y nueve. Ciento uno. Ciento veinte y cuatro. Quinientos ochenta. Novecientos quince. Dos mil uno. Tres mil diez. Cuatro mil quince. Cinco mil ochocientos nueve. Ocho mil ocho. Un millon y diez y ocho. Dos millones tres mil ochocientos cuarenta.

Léanse, dividiéndolos préviamente en períodos, los números siguientes y otros parecidos:

15 30 102 770 900 2450 7030 23000 30008 700008 9000000 4008500 7034414 23000070 4888888 9000069 28043037 300900700 70500080 450784050070 [illegible] [illegible] 3007000007000.

VII VIII XV XIX XXXII XLVI LXXXIV MCCLIX MDCXC MCM [illegible]

# CAPÍTULO III.

## ADICION Y SUSTRACCION DE ENTEROS.

## ARTÍCULO PRIMERO.

### PRELIMINARES.

**60.** ADICION *ó suma se llama el problema por medio del que, dados dos ó varios números, se quiere averiguar el valor de otro equivalente á todos ellos juntos.*

Los números dados, ó datos, se llaman *sumandos*, y el resultado *suma.*

**61.** *Sustraccion ó resta se llama el problema por medio del que, dada una suma y uno de dos sumandos, se quiere averiguar el valor del otro sumando.*

Ó lo que es en Aritmética lo mismo, hallar la diferencia entre dos números desiguales, ó quitar el menor del mayor de ellos.

El número mayor que representa la suma se llama *minuendo*, el menor, ó que representa el sumando conocido, *sustraendo*, y el resultado *resta, exceso ó diferencia.*

**62.** La sustraccion es, por lo tanto, una operacion inversa y regresiva de la adicion, como veremos mejor en los artículos siguientes, siendo ésta una composicion de números y aquella una descomposicion; y como sólo tres cosas dijimos (30) que puede hacer la Aritmética con los números, que son expresarlos, componerlos y descomponerlos, y el expresarlos no es una verdadera operacion, podemos ya sospechar que la adicion y la sustraccion son las dos operaciones fundamentales de los números, y que todas las demas no son más que modificacion de ellas. Sin embargo, por alguna diferencia esencial que hay entre ellas, y alguna de sus modificaciones cuando no se trata de números enteros, se admiten como operaciones principales de la Aritmética las llamadas cuatro reglas, que son: adicion, sustraccion, multiplicacion y division.

**63.** El signo para indicar la adicion es $+$, que se lee *más*, y se llama signo *positivo*, el cual se coloca entre cada dos sumandos, ó sea precediendo á cada uno de ellos, á excepcion del primero, que no se le pone por innecesario y sobrentenderse.

El signo para indicar la sustraccion es $-$, que se lee *ménos*, y se llama signo *negativo*, el cual se coloca delante del sustraendo, ó sea entre él y el minuendo si están en línea.

El signo para indicar el resultado, tanto de la adicion, cuanto de la sustraccion, y áun de todos los problemas y operaciones de las matemáticas, es =, que se lee *es igual á*, y se llama signo *de igualdad*, y se coloca delante del resultado.

**64**. El signo de igualdad, no sólo sirve para indicar el resultado de un problema ú operacion, sino tambien para expresar la igualdad de dos expresiones numéricas, aunque no lo parezcan por no ser idénticas.

Así, $2 + 3 = 4 + 1$ dice que las expresiones numéricas $2 + 3$ y $4 + 1$ son iguales, aunque no lo parecen, como $5 = 5$, que son idénticas.

La expresion de dos cantidades separadas por el signo de igualdad, se llama una *igualdad*, y *primer miembro* todo lo que precede al signo, y *segundo miembro* lo restante; llamándose *términos* de la igualdad ó de sus miembros las cantidades separadas por el signo positivo ó el negativo, y no por ningun otro de los que conoceremos.

La propiedad fundamental de una igualdad, y que aunque es axiomática, es de gran importancia y aplicacion, es que no se altera aunque á sus dos miembros se les añada ó quite una misma cantidad, ó aunque con ellos y un mismo número se haga una operacion cualquiera, como despues apreciaremos mejor.

Así $3 + 2 = 4 + 1$ es tan igualdad como $3 + 2 + 1 = 4 + 1 + 1$ y como $3 + 2 - 1 = 4 + 1 - 1$, y el doble de $3 + 2$ es igual al de $4 + 1$.

Las igualdades se simplifican verificando las operaciones que indican los signos de sus términos, y desde luego podemos ver una muy evidente, $+ 1 - 1 = 0$, y por lo tanto $3 + 2 - 1 = 4 + 1 - 1$, es lo mismo que $3 + 2 - 1 = 4$.

Tambien hay desigualdades que se expresan con el signo $>$ ó $<$, que se llama mayoría ó minoría, diciéndose $4 > 3$, cuatro es mayor que 3, ó $3 < 4$, tres es menor que 4.

Las propiedades de las desigualdades no son exactamente las mismas que las de las igualdades; pues si bien una desigualdad permanece siendo tal, cualquiera que sea la operacion, igual que con un mismo número se haga con sus dos miembros, el grado de la desigualdad podrá variar si la operacion no es suma ó resta, como despues veremos.

Así, $4 > 3$ es desigualdad, como $5 > 4$; pero $8 > 6$ ofrece una diferencia de 2 unidades, que no ofrece $4 > 3$.

## ARTÍCULO II.

### ADICION DE NÚMEROS ENTEROS.

**65**. El problema general de la adicion de números enteros se divide en dos generales tambien, cada uno de los cuales tiene su correspondiente solucion ó regla, que, aunque suponemos saberse por la aritmética práctica, diremos que son, *sumar números dígitos* y *sumar números compuestos* de dos ó más cifras.

**66**. Regla 1.ª *Para sumar números dígitos, puede operarse primeramente con dos, descomponiendo el uno en las unidades que contiene, y agregándola una á una al otro dado como quien cuenta; y una vez reunidos dos,* *descomponer en unidades otro, y proceder de una manera análoga con él: y sucesivamente del mismo modo con todos los sumandos.*

Este método, aunque seguro, y al que se suele recurrir á veces, es pesado é impropio de la ciencia, por lo que lo sustituyen hasta los niños de escuela, con el conocimiento de la suma de todos los números dígitos entre sí, que se aprende por medio de una tabla á propósito para grabar dichas sumas en la memoria. Y sabidas las sumas de los números dígitos entre sí, con la práctica muy fácilmente se van aprendiendo las sumas de los compuestos de sumar dos ó tres dígitos con otro dígito.

**67.** La Tabla II de las auxiliares de esta Aritmética, puede servir para el objeto; pero aunque de invencion ingeniosa, no es tan á propósito como la que se usa para niños, que dice: *dos y dos*, son *cuatro*, *dos y tres*, *cinco*, etc.

La construccion de la tabla citada es muy fácil, y se comprende con sólo inspeccionarla; y su uso tambien es muy sencillo, pues los números de las cuadrículas de la columna superior horizontal y los de la vertical primera de la izquierda, representan los sumandos, y los números de las cuadrículas de intercepcion señalados por los sumandos ofrecen las sumas. Así 7 y 9 se ve que suman 16, lo mismo que se tome el 7 en la columna superior, y el 9 en la de la izquierda, que al contrario. Y 16 y 5, aunque la suma no la da la tabla, como dice que 5 y 6 son 11, evidentemente 16 y 5 son 21, etc.

**68.** Regla 2.ª *Para sumar dos ó más números compuestos de dos ó más cifras, se colocan todos los sumandos, los unos debajo de los otros, de manera que las unidades queden bajo las unidades, las decenas bajo las decenas, etc., y se tira por debajo una raya horizontal. En seguida se suman las unidades simples de todos los sumandos por la regla 1.ª, y si la suma contiene sólo unidades simples, se ponen debajo de las de los sumandos. Si contiene decenas y unidades, se ponen estas debajo de las unidades, y se guardan las decenas para añadirlas á la suma de las decenas. Y si contiene decenas solamente, se pone cero en el lugar de las unidades, y se guardan las decenas para agregarlas á la suma de las decenas. Despues se suman las decenas de todos los sumandos, y á la suma se le agregan las que hubiera producido la suma de las unidades. Si el compuesto se compone de sólo decenas, se ponen debajo de las de los sumandos; si decenas y centenas, se ponen las decenas debajo de las de los sumandos, y se guardan las centenas para agregarlas á la suma de las centenas; y si se compone de centenas solamente, se pone cero en el lugar de las decenas, y las centenas se guardan para agregarlas á las centenas. Y análogamente se suman las centenas y demas unidades superiores que tengan los sumandos, y el número que resulte debajo de la raya, será la suma de los números dados.*

**69.** *Observacion importante.* A veces la suma de las unidades de alguna columna, da, no sólo unidades de órden superior inmediato, sino alguna de órden más elevado (cosa que suele aturdir al principiante); pero del mismo modo que si una suma de unidades simples produce 23, que por la numeracion sabemos que se compone de 2 decenas y 3 unidades (39), si la suma fuera 123 se compondria de 12 decenas y 3 unidades, y esas 12 decenas habria que guardarlas para sumarlas con las decenas: no habiendo ningun inconveniente en agregar á la suma de las decenas solo 2 y guardar una centena para agregarla á la suma de las centenas; pero este proceder está más sujeto á equivocaciones, porque la suma de decenas producirá probablemente algunas centenas, y habria que añadir á la suma de centenas dos cantidades.

*Ejemplos de adicion.*

| 1.º | 2.º | 3.º |
|---|---|---|
| 22 | 13 | 22 |
| 787 | 569 | 704 |
| + 59 | + 549 | + 5088 |
| + 550 | + 9709 | + 4050 |
| + 7409 | + 708 | + 7089 |
| = 8805 | = 11535 | = 16931 |

*Explicacion.* Omitiendo las palabras que se usan para ejecutar las operaciones, porque suponemos que se han aprendido por la Aritmética práctica de la primera enseñanza, diremos que en el primer ejemplo sumamos las unidades simples de todos los sumandos y obtuvimos 25, que componen 5 unidades y 2 decenas, por lo que pusimos 5 debajo de las unidades de los sumandos, y guardamos las 2 decenas para añadirlas á la suma de las decenas; escribiéndolas, desde luego, encima para no olvidarlas, y no tener que repetir todas las sumas parciales, en el caso de que nos equivocásemos en alguna. En seguida sumamos las decenas de los sumandos y obtuvimos 18, que con las 2 resultantes de la suma de unidades nos dió 20, que se compone de 2 centenas y ninguna decena; pusimos 0 en el lugar de las decenas, y guardamos las centenas para añadirlas á la suma de las centenas. Sumamos despues las centenas y encontramos 18, que componen 8 centenas y 1 millar, por lo que pusimos las 8 centenas en el lugar de las centenas, y guardamos un millar para agregarlo á la suma de los millares; y como esta solo nos dió 7, con el resultante de las centenas produjo 8 millares, que escribimos en el lugar de los millares; obteniendo así, por suma total, 8805.

De una manera igual obramos en el segundo y tercer ejemplos, de inútil explicacion.

**70.** *Demostracion.* Como por las prescripciones de la regla se reunen todas las unidades simples de todos los sumandos, todas las decenas, centenas y demas unidades superiores, se reunen evidentemente todas las partes de todos los sumandos; y como es un axioma que lo que se hace con las partes queda hecho con el todo, el número resultante debe ser siempre la suma exacta de todos los sumandos.

La colocacion de los datos, rayas, etc., en este y todas las operaciones, son para claridad y evitar equivocaciones.

**71.** La prueba de la adicion, ó sea la operacion por medio de la que se comprueba la suma, ó se ve si está bien hecha, es su repeticion en sentido inverso, ó sea de abajo para arriba; pues seria muy raro que cualquier error de la prueba compensase otro de la suma. Así, pues, si la prueba está conforme con la suma, es señal casi segura de que esta está bien hecha. Si hubiera desconformidad entre ambas, quedará la duda de cuál de las dos está bien hecha, y no habrá otro medio, para salir de ella, que repetirlas con mucho cuidado.

**72.** Otra prueba admite la adicion, poco ó nada usada, porque es más difícil ó pesada que ella. Consiste en sumar todos los sumandos ménos uno, y esta suma restarla de la total, y ver si da por resultado el sumando que se desatendió, que será señal de que la suma estuvo bien hecha.

**73.** Los números concretos se suman lo mismo que los abstractos, si bien es indispensable que sean homogéneos, si la suma ha de ser de la especie de ellos.

Es indudable que se pueden sumar 3 soldados y 4 pastores, si lo que se pretende saber es cuántas *personas* componen; pues se prescinde del género soldado y del género pastor, y se atiende á una circunstancia que les es comun, y atendiendo á la que pueden considerarse homogéneos. Pero es evidente que si se desea saber cuántos soldados son los que hay en un campamento, donde se ven 2500 de ellos y 345 paisanos, no podrá decirse que hay 2845 soldados ni paisanos, sino personas. Hechas estas consideraciones sobre los casos en que una suma de números concretos heterogéneos es soluble, no nos debe quedar la menor duda en que para sumar concretos deben ser los sumandos homogéneos, como hemos sentado; pues los casos indicados no vienen á ser más que sumandos de heterogeneidad desatendida ó sustituida por una homogeneidad verdadera. Es aquello del estudiante que dijo que 5 libras de azúcar, 2 de cacao y 1 de canela, *sumaban* 8 de... chocolate.

## ARTÍCULO III.

### SUSTRACCION DE NÚMEROS ENTEROS.

**74.** El problema general de la sustraccion de números enteros, se divide en dos tambien generales: restar un número dígito de otro dígito ó compuesto de dos cifras; y restar un número compuesto de dos ó más cifras de otro de igual ó mayor número de ellas.

Antes de dar las dos correspondientes reglas, tenemos que dejar sentado el principio siguiente.

**75.** Lema. *La diferencia entre dos números no varía aunque á ambos se les añada ó quite una cantidad igual.*

Porque se desprende de la definicion; pues al agregar, por ejemplo, 3 al número mayor ó minuendo, se alejará, digámoslo así, en valor 3 unidades del sustraendo; y al añadir á éste 3, se acercará su valor 3 unidades al minuendo, por lo que seguirán diferenciándose lo mismo; y lo propio sucederá si á ambos se quita cualquier cantidad.

**76.** Regla 1.ª *La sustraccion ó resta de un número dígito de otro dígito ó compuesto de dos cifras, se hace de memoria, por el conocimiento de una tabla á propósito que puede ser la de la adicion (II de las auxiliares). Y tambien puede hacerse esta operacion de una manera análoga á la expresada en la regla 1.ª de la adicion, ó sea quitando al minuendo una por una todas las unidades que tenga el sustraendo.*

**77.** La tabla de la adicion puede, como hemos dicho, servir para aprender las diferencias de todos los números pequeños entre sí. Para ello no hay más que buscar en las cuadrículas centrales un número igual al minuendo, si éste fuese menor de 20; y en la columna superior horizontal ó en la vertical, primera de la izquierda, un número igual al sustraendo, y el correspondiente á la otra columna será la resta. Así, si el minuendo es, por ejemplo, 17, y el sustraendo 9, veremos que la cuadrícula que tiene el número 17, y que corresponde á la columna vertical, cuyo número superior es 9, corresponde tambien á la columna horizontal, cuyo primer número es 8, que es la diferencia entre 17 y 9. Cuando el minuendo es mayor de 20, la tabla no sirve tan fácilmente; pero la práctica facilita su uso, sobre el que sólo diremos que si tenemos que restar de 37 9, quitando á aquel las decenas que sea necesario, para que resulte menor que 20, quedan 17, que, por lo antes dicho, la tabla da que del 9 difiere 8, al que agregando las decenas que se quitaron al 37, que fueron 2, nos dará 28, que es la diferencia entre 37 y 9.

**78.** Regla 2.ª *Para restar un número, compuesto de dos ó más cifras, de otro de igual ó mayor número de ellas (y lo mismo y más fácilmente si el sustraendo tiene una sola cifra, y más de dos el minuendo), se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de manera que las unidades queden bajo las* *unidades, las decenas bajo las decenas, etc. Se tira despues por debajo una raya horizontal, y por la regla 1.ª se restan las unidades simples del sustraendo de las del minuendo, y la diferencia se escribe debajo de las unidades. Se hace lo mismo con las decenas, y sucesivamente con todas las unidades superiores. Si alguna cifra del minuendo fuera menor que la correspondiente del sustraendo, se le añaden 10 unidades para verificar la resta parcial, agregando 1 á la cifra siguiente del sustraendo, ó restándola á la del minuendo. Y, finalmente, si el minuendo tuviera más cifras que el sustraendo, considérensele á éste los ceros necesarios á la izquierda, debiendo al primero de ellos añadírsele una unidad, si para hacer la resta parcial anterior hubo que agregar 10 unidades á la cifra del minuendo. Y de ese modo se obtendrá debajo de la raya un número que será la diferencia de los propuestos.*

79. La prueba de la sustraccion se consigue sumando el sustraendo con la resta, y viendo si da exactamente el minuendo, que será señal de que la operacion está bien hecha.

Δ 80. *Observacion.* Por todo lo dicho, sobre la sustraccion, se comprende que el minuendo debe ser mayor que el sustraendo, no siendo, en caso contrario, posible la resta. Sin embargo, aunque la Aritmética no enseña á restar un número mayor de otro menor, debemos advertir que el Algebra hace posible esa resta, aunque no se trate de cantidades literales ó algebráicas, sino numerales ó aritméticas. Para ello divide todas las cantidades en dos clases *positivas*, que señala con el signo +, llamado positivo, y *negativas* con el signo —, llamado negativo, segun que favorecen ó contrarían el resultado del problema. Si se busca la existencia que se tendrá, con tantas deudas y tantas rentas, éstas serán las positivas y aquellas las negativas, y al contrario, si se trata de averiguar cuánta deuda resultará. Dada esta ligera explicacion, fácil será comprender que un minuendo, por ejemplo, de 3000 rs. de renta se le podrá algebráicamente restar un sustraendo de 4000; pues el resultado será 1000 de déficit ó deuda, restando el minuendo del sustraendo. Y fácil será tambien comprender que hay cantidades menores que 0, que son las negativas; pues, en efecto, el que no tiene nada, tiene más que el que tiene 1000 rs. de deuda.

*Ejemplos de sustraccion.*

| | 1.º | | 2.º |
|---|---|---|---|
| | 7806457 | | 56740034 |
| | — 755534 | | — 853245 |
| | = 7050923 | | = 55886789 |
| prueba | 7806457 | prueba | 56740034 |

*Explicacion.* En el primer ejemplo, restamos las 4 unidades del sustraendo de las 7 del minuendo, y la diferencia 3 la pusimos debajo de las unidades de ambos. Hicimos lo propio con las decenas, y lo mismo quisimos hacer con las centenas; pero como no podíamos restar 5 de 4, le añadimos á éste 10, segun la regla, y restamos 5 de 14, cuya diferencia 9 la pusimos debajo de las centenas. En seguida restamos de 6 millares del minuendo, no 5 que tiene el sustraendo, sino 6, por el aumento de 1 que exige la regla, en virtud de haber añadido 10 á las centenas del minuendo, y la diferencia 0 la pusimos debajo de los millares. En seguida pasamos á las decenas de millar; pero como no habia ninguna en el minuendo, y de 0 no podíamos restar las 5 del sustraendo, restamos estas de 10, y nos dió 5 de diferencia. Despues de las 8 centenas de millar del minuendo, restamos 8, ó sean las 7 del sustraendo, y 1 de aumento por la regla, y, finalmente, pusimos los 7 millones en la resta porque no habia millones que restar en el sustraendo.

En el segundo ejemplo, obramos de una manera análoga, aunque con alguna mayor complicacion, porque á todas las cifras del minuendo tuvimos que añadir 10 unidades, y 1 á todas las del sustraendo, incluso el primer cero, que consideramos á la izquierda del sustraendo, y á excepcion de la cifra de sus unidades.

Finalmente, comprobamos ambos resultados, segun el procedimiento de la prueba.

**81**. *Demostracion*. Como todo lo que prescribe la regla y se ha practicado en los ejemplos anteriores no es otra cosa que hallar la diferencia entre todas las clases de unidades del sustraendo y las correspondientes del minuendo, pues en los casos en que á alguna cifra de éste se le añaden 10 unidades, tambien á la de órden superior inmediato del sustraendo se le añade 1, que vale 10 del órden inferior inmediato (55), y por lo tanto minuendo y sustraendo son aumentados en una misma cantidad, lo que no altera la resta (75); resulta que la que se halla por la regla, representa exactamente la diferencia que hay entre todas las partes del minuendo y las del sustraendo, y por lo tanto la diferencia de los números propuestos; luego la regla es general, y queda demostrada.

Relativamente á la operacion de prueba, diremos que no puede por ménos que servir á su objeto, pues que se funda en la principal y más general definicion de la sustraccion (61), pues el sustraendo que representa el sumando dado, agregado al hallado, debe dar el minuendo, que representa la suma dada.

**82**. La resta de los números concretos se ejecuta lo mismo que la de los abstractos, pero deben ser homogéneos.

No se pueden restar ciertamente de 500 pesetas, 80 melones, y ni áun á semejanza de lo dicho (73) en la suma se puede prescindir tan fácilmente de la hetereogeneidad; pues de 30 caballeros sentados á la mesa, no se pueden quitar 15 señoras, aunque lo que se pretende sea que en la mesa queden 15 personas, pues no habiendo en la mesa señoras, y sí sólo caballeros, es absurdo el pretender quitar señoras.

## ARTÍCULO IV.

### EJERCICIO DE SUMAR Y RESTAR NÚMEROS ENTEROS.

**83**. Pueden los siguientes ejemplos considerarse concretos de la especie que se quiera, pues que en nada afecta al resultado la naturaleza de los datos, si son homogéneos.

| | | | | |
|---|---|---:|---|---:|
| 1.º | | 754789 | | 10.004.799 |
| | + | 5697 | + | 7456989 |
| | + | 75988 | + | 795949 |
| | + | 56.799 | + | 89579 |
| | + | 57498 | + | 9899 |
| | + | 84698 | + | 989 |
| | + | 7099 | + | 7899 |
| | + | 489 | + | 89589 |
| | + | 7499 | + | 789459 |
| | + | 58499 | + | 8958495 |
| | + | 74999 | + | 8000000 |
| | + | 89999 | + | 29999999 |
| | + | 99 | + | 45080099 |
| | = | | = | |

$$
\begin{array}{rr}
 & 754.567,434.578,956 \\
- & 36\overset{2}{3}47354\overset{1}{6}383973 \\
\hline
= & \\
 & 543.478,907.056,789 \\
- & \overset{2}{7}68998\overset{1}{8}888888 \\
\hline
 & 300.400,700.500,505 \\
- & 7\overset{2}{7}88899\overset{1}{9}666747 \\
\hline
 & 700.800,900.000,000 \\
- & \overset{2}{\phantom{0}}\;\;9988\overset{1}{8}000009 \\
\hline
\end{array}
$$

# CAPÍTULO IV.

## MULTIPLICACION.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**84.** MULTIPLICACION *en general se llama el problema por medio del que, dados dos números, se quiere averiguar el valor de un tercero que sea relativamente á uno de los dos dados lo que el otro es á la unidad.*

**85.** El número que se multiplica se llama *multiplicando*, y el otro dato por el que se multiplica se llama *multiplicador*, y el resultado *producto;* llamándose tambien los números dados *factores* del producto.

El signo para indicar la multiplicacion es $\times$, que se lee *multiplicado por*, y tambien un punto; señalándose el resultado como en todos los problemas por el signo de igualdad.

**86.** *Escolio.* Como en Aritmética, y especialmente tratándose de enteros, el número que sea relativamente á uno de dos dados lo que el otro es á la unidad, deberá ser tantas veces mayor que el primero como unidades tenga el segundo (pues la relacion de este con la unidad será ser tantas veces mayor que ella como unidades contenga), se puede admitir como suficiente exacta la definicion, de que *multiplicar es tomar tantas veces un número como unidades tiene otro dado;* de cuya definicion han nacido indudablemente los nombres de multiplicando, multiplicador y producto.

**87.** *Observacion.* Por la definicion anterior, y aun sin violencia por lo general, se comprenderá que la multiplicacion es un caso particular de la suma, en el que todos los sumandos son iguales, pues que lo mismo es sumar varios números iguales que tomar uno de ellos tantas veces como sumandos iguales haya.

Sigue, por lo tanto, en pie la verdad de que con los números no se puede hacer más que tres cosas: expresarlos, componerlos y descomponerlos; y sigue tambien en pie la verdad, aunque ya indicamos que no es rigorosamente exacta (62), de que las fundamentales operaciones de la Aritmética son dos: la adicion y la sustraccion.

**88.** Un número se llama *duplo* de otro, ó dos veces mayor que él, cuando es ó puede considerarse producto de multiplicarlo por 2, ó sea tomarlo dos veces por sumando; *triplo* cuando pudo resultar de multiplicarlo por 3; *cuádruplo*, *quíntuplo*, etc., se llama un número de otro cuando puede considerarse como resultado de multiplicarlo por 4, por 5, etcétera. Y en general se llama un número *múltiplo* de otro, cuando el primero es ó puede ser el producto del otro por cualquier número. É inversamente, *submúltiplo* ó *factor* se llama el número del que otro es múltiplo.

**89.** *Observacion.* En la multiplicacion entran á veces más de dos datos ó factores; pero como ese caso en realidad, como despues veremos, no es otra cosa que varias multiplicaciones en un mismo problema; pues debe efectuarse primero la de dos factores, y despues la del producto resultante de esos factores con otro factor, y así sucesivamente, viene á ser casi lo mismo que si en la sustraccion se nos dijese que al minuendo se habian de restar dos sustraendos, pues habria que efectuar dos operaciones, ya la de restar uno de ellos y despues el otro, ya la de sumar los dos sustraendos y restar la suma de ellos del minuendo. Pero como los problemas de muchos factores son muy frecuentes, y por ello algunas reglas de la multiplicacion se generalizan á tres ó más factores, hemos debido explicar lo que en realidad representan.

## ARTÍCULO II. *

### PRINCIPIOS TEÓRICOS SOBRE LA MULTIPLICACION.

Los principios teóricos ó verdades especulativas que no podemos reservar para la Aritmética superior, son los siguientes:

**90.** Teorema. *El orden de dos factores no altera el producto.* Esto es, que lo mismo es $4 \times 3$ que $3 \times 4$.

*Demostracion.* Como por la segunda definicion de la multiplicacion (86), y áun por la principal (84), para multiplicar 4 por 3 debemos hacer el 4 tres veces mayor (porque la relacion de 3 con la unidad es ser tres veces mayor que ella), y por lo tanto equivaldria á tomarlo 3 veces por sumando, tendremos que $4 \times 3 = 4 + 4 + 4$. Y como lo mismo será sumar esos tres sumandos como se hallan, que sumarlos descompuestos en las unidades que contienen, podremos formar el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{r}
1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\
+ 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\
+ 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\
\hline
= 3 + 3 + 3 + 3 = 12
\end{array}$$

En el que vemos que la suma de los sumandos, sin descomponer, da 12, y la de los mismos, descompuestos, da $3 + 3 + 3 + 3 = 12$; luego lo mismo será sumar 3 veces un 4, que cuatro veces un 3, y por lo tanto $4 \times 3 = 3 \times 4$.

**91.** Corolario. *El órden de varios factores que deban formar un producto, tampoco lo alteran.*

Porque si tenemos $4 \times 3 \times 5$, por el teorema anterior será igual á $3 \times 4 \times 5$, y realizando provisionalmente el producto $3 \times 4$, ó considerándolo realizado, por el mismo teorema $12 \times 5$ será igual á $5 \times 12$, cuyo segundo factor, volviéndolo á descomponer, dará $5 \times 3 \times 4$, cuyo

* Este artículo cuadraría mejor despues del siguiente, si no supusiéramos sabida la aritmética práctica, y no nos hubiéramos propuesto seguir el método sintético con un rigor acaso excesivo. Sin embargo, el artículo anterior presta suficiente base al contenido de éste.

órden de factores es bien diferente del primitivo, sin haber variado de valor el producto que representa.

**92.** Teorema. *Un producto de enteros queda multiplicado por igual número entero, por el que se multiplica cualquiera de sus dos factores, y tantas veces menor, cuantas veces se hace menor cualquiera de sus factores.*

*Demostracion.* Si tenemos el producto 12, cuyos factores son 4 y 3, y duplamos el multiplicador 3, tendremos que tomar el multiplicando doble número de veces, y el producto resultará evidentemente duplado. Y en efecto, $4 \times 6 = 24$, que es duplo de 12. Si duplamos el multiplicando (aunque cualquiera de los dos factores puede tomarse por tal, segun el teorema anterior, y es inútil esta parte de la demostracion), diremos que como un duplo de 4 tenemos que tomarlo 3 veces, resultará un duplo de 12, y en efecto $8 \times 3 = 24$. Y como lo mismo demostraríamos si un factor fuera triplicado ó multiplicado por cualquier número, y de una manera análoga si el factor se hiciera un número de veces menor (pues no podemos todavía nombrar la palabra dividir), el teorema es general y queda demostrado.

**93.** Corolario. *El producto de más de dos factores enteros queda tambien multiplicado por el número entero, por el que se multiplica cualquiera de ellos.*

Porque si tenemos $4 \times 3 \times 5 = 60$, por el teorema anterior, si duplamos el 4 ó el 3, el producto de 4 por 3 quedará duplado, y duplado este producto por el mismo teorema, quedará duplado el total al multiplicar el parcial por 5. Y como si el que dupláramos fuera el 5, el producto de 5 por 3 quedaria duplado, y despues el total, consiguientemente, y cosa análoga sucederia, multiplicando un factor por cualquier número, la consecuencia del teorema queda evidenciada.

**94.** Teorema. *Si dos factores enteros se multiplican por igual ó diferente número entero, el producto resultará multiplicado por un número igual al producto de los números diferentes por los que se multiplicaron ambos factores, ó al producto del número por sí mismo si fué igual el número multiplicador, é inversamente, si los factores se hacen un número de veces menor.*

*Demostracion.* Porque, por el teorema anterior, al duplicar el multiplicando duplicamos el producto, y al triplicar el multiplicador triplicamos el producto; luego éste resultará duplicado por un motivo, y triplicado por otro, ó sea multiplicado por 2 y por 3, y sea su valor cual fuere, por ejemplo, 20 (producto de 4 por 5), resultará $20 \times 2 \times 3 = 20 \times 6 = 120$. Y, en efecto, $(4 \times 2) \times (5 \times 3) = 8 \times 15 = 120$.

Análogamente, si ambos factores se triplican, por ejemplo, el producto supuesto 20 resultaria, multiplicado por 3 y por 3, ó sea multiplicado por $3 \times 3 = 9$. Y como lo mismo se demostraria multiplicando los factores por cualquier número igual ó diferente, y haciéndolos un número de veces menor, el teorema es general y queda demostrado.

## ARTÍCULO III.

### MULTIPLICACION DE NÚMEROS ENTEROS ABSTRACTOS.

**95.** El problema general de la multiplicacion de enteros se divide en tres: multiplicar un número dígito por otro; multiplicar un compuesto de dos ó más cifras por un dígito, y multiplicar un número de varias cifras por otro de dos ó más.

**96.** Regla 1.ª *Para multiplicar un número dígito por otro, se hace de memoria la operacion, en virtud del conocimiento que se adquiere desde la primera enseñanza de los productos de todos los números dígitos entre sí.*

**97.** *Observacion.* Tambien puede efectuarse la multiplicacion sumando tantas veces el factor mayor como unidades tiene el otro; pero aunque este método sea el más seguro, y al que suele recurrirse cuando se olvida un producto de dígitos y no se tiene libro que consultar, es pesado é impropio del matemático, y sólo lo mencionamos porque envuelve la *única demostracion* que puede darse de la regla 1.ª ó problema de multiplicacion de dígitos, pues está conforme con la definicion.

**98.** Para aprender de memoria los productos de los números dígitos, se usa una tabla en la que aparecen por su órden de menor á mayor (2 por 2 son 4; 2 por 3 son 6, etc.), pues la tabla pitagórica, llamada así porque Pitágoras la inventó ó dió á conocer, y ofrecemos entre las auxiliares (II), aunque muy ingeniosa, sólo sirve para consulta. Su construccion se comprende con sólo su inspeccion, y su uso es semejante al explicado para la tabla de la adicion (67).

**99.** Regla 2.ª *Para multiplicar un número de dos ó más cifras por un dígito, se toma este como multiplicador y se coloca debajo de las unidades del multiplicando con una raya horizontal debajo. En seguida, por la regla primera, se multiplican las unidades del multiplicando por el multiplicador; si el producto se compone de solo unidades, se escribe debajo de los de los factores; si se compone de decenas y unidades, se ponen las unidades en el lugar de las unidades, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas del multiplicando; y si consta de solo decenas, se pone* 0 *en el lugar de las unidades, y se guardan las decenas para unirlas al producto parcial siguiente. En seguida se multiplican las decenas del multiplicando por el multiplicador, y al producto se añaden las decenas que hubiesen resultado de la multiplicacion parcial anterior, obrando con el segundo producto de una manera análoga que con el primero, y sucesivamente se multiplican todas las unidades de diferente órden del multiplicando, y el número que resulte debajo de la raya será el producto total.*

*Observacion.* Algunos principiantes, á semejanza de lo que se suele hacer en la suma, añaden á las cifras del multiplicando, antes de multiplicarlas, las unidades de su especie resultantes de la multiplicacion de las unidades inmediatas inferiores, creyendo que es indiferente hacerlo así ó hacer el agregado al producto, como indiferente es en la suma agregar las unidades que se llevan á un sumando ó á la suma. Para que se comprenda la diferencia, considérese la definicion y prácticamente que, por ejemplo, $(3 + 2) \times 4 = 5 \times 4 = 20$ y $(3 \times 4) + 2 = 12 \times 2 = 24$.

**100.** La prueba de la multiplicacion se hace cambiando el órden de los factores y viendo si resulta igual producto; pero como es casi impracticable siendo uno de los factores número dígito, se emplea como prueba la repeticion de la multiplicacion.

Tambien será prueba el dividir el producto por el multiplicador, y ver si produce el multiplicando; pero no se entiende generalmente por prueba una operacion más difícil que la que se trata de comprobar, ni el órden lógico de las ideas nos permite tratar todavía de la division.

*Ejemplos de multiplicacion.*

$$1.^{\circ}\quad \begin{array}{r} 37455 \\ \times\ 7 \\ \hline 262185 \end{array} \qquad\qquad 2.^{\circ}\quad \begin{array}{r} 900799 \\ \times\ 9 \\ \hline 8107191 \end{array}$$

*Explicacion.* En el primer ejemplo se han multiplicado las 5 unidades del multiplicando por el multiplicador 7, y siendo por la regla 1.ª el producto 35, ó sean 3 decenas y 5 unidades, se han escrito estas debajo de las unidades y guardado las 3 decenas para sumarlas al producto parcial siguiente. En seguida hemos multiplicado las 5 decenas del multiplicando por el multiplicador, y al producto 35 decenas le hemos añadido las 3 resultantes del producto parcial anterior, que dan 38, cuyas 8 decenas escribimos en el lugar de las decenas, y las 3 centenas las guardamos para sumarlas al producto parcial siguiente. Y análogamente obramos con las 4 centenas, los 7 millares, y las 3 decenas de millar, encontrando el producto total deseado.

En el ejemplo segundo obramos de una manera análoga, cuya explicacion es innecesaria.

**101.** *Demostracion de la 2.ª regla de la multiplicacion.* Como lo que prescribe la regla no es más que multiplicar todas las unidades, decenas, etc. del multiplicando por el multiplicador, y como lo que se hace con las partes queda hecho con el todo, el número de debajo de la raya será el producto total.

Δ Más luminosamente puede decirse que como la definicion de la multiplicacion es buscar un número que sea relativamente á uno de los dos dados lo que el otro es á la unidad, y en el ejemplo primero anterior se buscaba un número relativamente á 37455, como 7 es á la unidad; pero como 7 es 7 veces mayor que 1, el número que se buscaba debia ser 7 veces mayor que 37455, que evidentemente se encontraria tomándolo ó repitiéndolo 7 veces, que es lo que se hace al multiplicar todas sus partes, y segun la regla que queda demostrada.

*Observacion.* El tomar por multiplicador el número dígito, no necesita demostracion por muy sabida (90).

**102.** Regla 3.ª *Para multiplicar un número de dos ó más cifras por otro de igual ó mayor número de ellas, se toma por multiplicador el que tiene ménos, y se coloca debajo del multiplicando, de manera que se correspondan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc., y se tira una raya horizontal por debajo. En seguida, por la regla 2.ª se multiplica el multiplicando por las unidades simples del multiplicador, y el producto parcial se escribe debajo de la raya. Despues se multiplica todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y el producto se pone debajo del parcial anterior, pero un lugar hácia la izquierda, esto es, que la primer cifra de la derecha del segundo quede debajo de la segunda del primero. Análogamente se obra con todas las cifras del multiplicador, y si alguna ó algunas fueran ceros, se omite su inútil multiplicacion; pero el producto parcial siguiente se* *coloca dos, tres, etc. lugares hácia la izquierda, segun que los ceros seguidos del multiplicador fueran uno, dos, etc. En seguida se suman todos los productos parciales, y la suma será el producto total buscado.*

La prueba ya dijimos (100) que se consigue cambiando el órden de los factores.

*Ejemplos de multiplicacion.*

| 1.º | | 2.º | |
|---|---|---|---|
| | 2785 | | 2785 |
| | × 39 | | × 309 |
| | 25065 | | 25065 |
| | 8355 | | 8355 |
| | 108615 | | 860565 |

*Explicacion.* Con sujecion á la regla 1.ª, en el primer ejemplo se multiplicó todo el multiplicando por las 9 unidades del multiplicador, cuyo producto se puso debajo de la raya. En seguida se multiplicó todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, cuyo producto se puso debajo del anterior, pero un lugar hácia la izquierda, sumándose despues los dos productos parciales.

En el segundo ejemplo se obró de una manera análoga, sin más diferencia que la de poner el segundo producto parcial dos lugares hácia la izquierda del primero, porque, segun la regla, así lo reclama el cero de las decenas del multiplicador.

**103.** *Demostracion de la multiplicacion.* Contrayéndonos al ejemplo 1.º, diremos que, como segun la definicion (86), íbamos á tomar el multiplicando 2885 las 39 veces que indica el multiplicador, lo tomamos primeramente 9 por la regla 2.ª, ya demostrada, y nos faltaba que tomarlo 30 veces. Pero como 30 es diez veces mayor que 3 (55), si lo tomábamos tres veces, el producto resultaria diez veces menor de lo que debia (92), y añadiéndole un cero, lo haríamos diez veces mayor (54), y por lo tanto cual era debido; tomamos, pues, tres veces el multiplicando, y al producto, en lugar de añadirle un cero (inútil porque debia figurar debajo de las unidades del producto parcial primero), lo colocamos de manera que su primera cifra ó de unidades inferiores quedara debajo de las decenas del anterior. Y teniendo ya el multiplicando tomado 39 veces, evidentemente la suma de los dos resultados parciales debia ser el producto total verdadero.

Y en el ejemplo 2.º, como no son 39 las veces que habia que tomar el multiplicando, sino 309, si se tomaban primeramente 9, faltaria que tomarlo 300, que por ser 300 mayor 100 veces que 3, al tomarlo 3 veces se debia añadir al resultado dos ceros, que se suprimen tambien por inútiles, pero escribiendo el producto parcial segundo dos lugares hácia la izquierda.

Δ Esta demostracion puede más luminosamente fundarse en la definicion principal (84) diciendo sobre el mismo primer ejemplo que puesto que se busca un número relativamente á 2785 como 39 es á la unidad, como 39 es 39 veces mayor que ella, el número que se busca deberá ser 39 veces mayor que 2785, y para que lo sea se deberá tomar 39 veces por sumando, ó tomar 39 veces todas sus partes. Luego se toma primeramente 9, etc., pues la continuacion es igual á la anterior.

## ARTÍCULO IV.

### ABREVIACIONES DE LA MULTIPLICACION.

La multiplicacion puede abreviarse: 1.°, cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros; 2.°, cuando uno de los factores, sean cuales y cuantas sean sus cifras significativas, termina en ceros; y 3.°, cuando ambos factores tienen esa terminacion.

**104.** Regla 1.ª *Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, no hay más que añadir á aquel tantos como acompañan á la unidad, y se tendrá el producto correspondiente.*

*Ejemplo.* $789 \times 1000 = 789000$.

*Demostracion.* Porque por la numeracion (54) sabemos que un número se hace 10 veces mayor añadiéndole un cero, cien veces añadiéndole dos ceros, y hacer un número 10, 100, etc. veces mayor, es multiplicarlo por 10, 100, etc. (88); luego la regla está justificada.

**105.** Regla 2.ª *Para multiplicar un número por otro, cuando uno de ellos termina en ceros, se prescinde de ellos en la multiplicacion, y al producto se le añaden tantos como se desatendieron.*

*Ejemplo.* $578 \times 400 = 151200$.

$$\begin{array}{r} 578 \\ \times\ 4 \\ \hline 1512 \end{array}$$

*Demostracion.* Porque al prescindir ó desatender los dos ceros del multiplicador se hace 100 veces menor (54), y el producto tendrá que ser 100 veces menor de lo que debe ser (92); pero añadiéndole los mismos dos ceros se hace 100 veces mayor; luego será el producto de los factores propuestos.

**106.** Regla 3.ª *Para multiplicar dos números terminados en ceros, se desatienden todos los de su terminacion, y al producto se le añaden tantos como tenian por terminacion ambos factores juntos.*

*Ejemplo.* $35000 \times 400 = 14{,}000{,}000$.

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 4 \\ \hline 140 \end{array}$$

*Demostracion.* Por desatender los tres ceros del multiplicando, se hace 1000 veces menor; y el producto resultará 1000 veces menor de lo que debe; y por desatender los dos ceros del multiplicador, se hace 100 veces menor y el producto igualmente; luego este resultará menor de lo que debe 1000 veces por un motivo y 100 por otro, ó sea $1000 \times 100$ veces, ó sea 100000 veces (94); luego añadiendo cinco ceros al 140, producto de 35 por 4, resultará el verdadero.

**107.** Lema. *El número de cifras de un producto es igual al que tienen ambos factores juntos ó una ménos*, porque en cualquier ejemplo,

v. gr., $137 \times 45$, evidentemente que el producto será mayor que si el multiplicador fuera 10 (porque $45 > 10$) y menor que si fuera 100; pero $137 \times 10 = 1370$ y $137 \times 100 = 13700$ (54); luego el producto será mayor que 1370 y menor que 13700; luego tendrá ó 4 ó 5 cifras indispensablemente.

## ARTÍCULO V.

### MULTIPLICACION DE NÚMEROS CONCRETOS.

**108.** Regla general. *Para multiplicar números concretos, se ejecuta la operacion como en los abstractos, ó sea prescindiendo de su naturaleza, y el producto será de la especie del multiplicando. Si este es menor que el multiplicador, determinada la especie del producto, se puede tomar por multiplicador, y la operacion se hace más fácilmente.*

*Demostracion.* Como el multiplicador sólo dice (86) las veces que se ha de tomar el multiplicando, aunque aquel no sea abstracto, como en muchos problemas lo es, atendidas sus funciones se puede considerar como abstracto evidentemente; y por las mismas razones el producto deberá ser de la especie del multiplicando. Y como en el acto material de la multiplicacion, lo mismo que en el de la suma que viene á sustituir (87), el resultado no puede variar, sea cual sea la naturaleza del sumando repetido, que es lo que representa el multiplicando, es evidente que ese factor puede considerarse abstracto como el otro; y finalmente, tomar el más pequeño por multiplicador (90), pues la circunstancia de que el producto deba ser de la especie del multiplicando, se consigue determinándola préviamente.

**109.** Los problemas principales de multiplicacion de números concretos son tres ó de tres clases: 1.°, cuando simplemente se quiere hacer un número concreto cierto número de veces mayor; 2.°, cuando conociendo el valor de una unidad concreta se quiere averiguar el de muchas; y 3.°, cuando un número de unidades concretas se quiere convertir en otro de unidades de igual naturaleza, pero de menor magnitud.

**110.** Regla 1.ª *Para hacer cierto número de veces mayor un concreto dado, este se tomará como multiplicando y el otro como multiplicador; y hecha la operacion como la de los números abstractos, el producto será de la especie del multiplicando; pudiéndose, por la regla general (108), cambiar el órden de los factores, una vez determinada la especie del resultado.*

*Ejemplo.* Un padre tiene un capital de 80000 pesetas, y quiere hacerlo diez veces mayor para que cada uno de sus diez hijos herede igual capital que él tiene, y desea saber á cuánto su capital deberá llegar.

*Resolucion.* 80000 pesetas $\times$ 10 = 800000 pesetas.

*Demostracion.* Es la misma que la de los abstractos (101) y la general de los concretos (108).

**111.** Regla 2.ª *Para determinar el valor de muchas unidades conociendo el de una, este valor se tomará como multiplicando, y de su misma es-*

*pecie será el producto que se hallará multiplicando como abstractos los dos datos ó factores dados, en el órden más conveniente.*

*Ejemplo.* Se desea saber el valor de 1730 metros de paño, á razon de 54 rs. el metro.
*Resolucion.* Como lo que se busca son los reales que valen 730 metros, 54 será el multiplicando; pero siendo menor que el otro factor, se tomará como multiplicador, y será

$$\begin{array}{r} 1730^{\text{m}} \text{ á } 84^{\text{rs.}} = 145320^{\text{rs.}} \\ \times\ 84 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline 692 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ 1384 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \\ \hline 14532 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \end{array}$$

*Demostracion.* La misma que la de los abstractos (101) con la general de los concretos (108).

**112.** Regla 3.ª *Para reducir unidades concretas de cualquier magnitud á otras de magnitud inferior, pero de la misma naturaleza, el número dado de ellas se multiplicará por el de veces que cada una contiene á la de inferior magnitud á que se quiere reducir.*

*Ejemplo.* Se desea saber 3540 pesetas cuántos reales componen, ó á cuántos reales son equivalentes.
*Resolucion.* Como lo que se busca son reales, y la peseta tiene 4, éste será el multiplicando; pero por ser mucho menor que el 3540, se tomará por multiplicador, y será $3540 \times 4 = 14160$.

*Demostracion.* No solo es semejante á la de las reglas anteriores, sino que es evidente que si por cada una de las 3540 pesetas se toman 4 reales, se tendrá una cantidad de reales equivalente; y como lo mismo es tomar 3540 veces 4 que 4 veces 3540, la regla está justificada.

**113.** *Observacion.* Hay problemas de esta regla 3.ª, en combinacion con sumas y áun sin ellas; pero que exigen muchas multiplicaciones, que por ser de verdaderos números complejos, los reservamos para el capítulo de esos números.

## ARTÍCULO VI.

### POTENCIAS COMO CASO PARTICULAR DE LA MULTIPLICACION.

**114.** POTENCIA *de un número se llama, en general, al producto que resulta de tomarlo dos ó más veces por factor.* Si se toma dos veces, la potencia se llama *segunda* ó cuadrado; si tres veces, *tercera potencia* ó *cubo;* si cuatro veces, *cuarta potencia;* y análogamente *quinta*, *sexta*, etc.

**115.** La elevacion á potencias, que así se llama el acto de multiplicar un número por sí mismo cierto número de veces, se indica por medio de una cifra pequeña llamada *exponente*, colocada á la derecha del número que se debe elevar, y un poco más alta.

Así $8^2$ se lee *ocho elevado* á dos ú ocho cuadrado; $97^3$ se lee 97 elevado á tres ó al cubo, etc., y por la definicion evidentemente será

$$8^2 = 8 \times 8 = 64 \text{ y } 97^3 = 97 \times 97 \times 97 = 9409 \times 97 = 915673.$$

**116.** *Observacion.* Esta operacion es evidentemente un caso particular de la multiplicacion, en que los factores son iguales; y como la multiplicacion lo es de la suma, seguimos aduciendo pruebas de lo dicho (62), sobre que la Aritmética sólo puede hacer con los números tres operaciones, y aun tambien que las principales ó fundamentales son dos, adicion y sustraccion, siendo todas las demas modificaciones de ellas. Por este motivo hemos dado una idea de las potencias; pero es materia elevada que corresponde á la aritmética superior.

## ARTÍCULO VII.

### EJERCICIOS SOBRE LA MULTIPLICACION.

**117.** Ejecútense los problemas siguientes y otros semejantes:

*Problemas de números abstractos.*

| | | |
|---|---|---|
| 1.º 7845764 × 9 | 2.º 8979567 × 87 | 3.º 57009879 × 908 |
| 4.º 879768909 × 789 | 5.º 57009898 × 8907 | 6.º 90000009 × 7008 |

*Problemas de multiplicacion de concretos.*

1.º ¿Cuántas manzanas hay en 89 canastos, conteniendo cada uno 796?
2.º ¿Cuántas personas caben en un tren de 39 wagones, á 74 personas cada uno?
3.º ¿Cuántos vidrios se necesitan para 87 ventanas, á 38 cada una?
4.º ¿Cuántos minutos componen 48 horas?

*Problemas de multiplicacion de concretos combinados con sumas y restas.*

1.º Un hombre que muere á los 87 años, de los cuales 21 por ser bisiestos han sido de 366 dias, y los restantes de 365, se desea saber cuántos dias ha vivido.

2.º Un padre de familia gana diariamente 8 rs. y 25 mrs., y gasta 6 rs. y 12 mrs., y desea saber qué economía tendrá á los 10 años.

3.º En un taller hay 27 obreros, de los cuales 5 ganan á razon de 7 pesetas diarias; 9 á razon de 5, y los demas á 3, y se desea saber cuánto se necesita para pagarles los 6 dias de la semana.

4.º Un padre de familia recibe por renta 13,000 rs., por sueldo 27,600, por fondos públicos 18,000, y gasta en su casa 15,000, en colegios de sus hijos 16,000, en gastos extraordinarios 8,000, y desea saber cuál será su economia en 10 años.

# CAPÍTULO V.

## DIVISION.

## ARTÍCULO PRIMERO.

### PRELIMINARES.

**118**. División *ó particion es el problema por el que, dados un producto y uno de sus dos factores, se quiere averiguar el valor del otro factor*.

**119**. El número que representa el producto se llama *dividendo*, el que representa el factor conocido *divisor*, y el que se busca *cociente*.

El signo con que se indica este problema es : que se lee *dividido por*, y tambien para el acto material de la operacion se usa y entiende como signo de division una línea angular $\underline{|\qquad}$ encerrando al divisor. Tambien se toma como signo de division una rayita horizontal, separando dividendo y divisor, puesto éste debajo de aquel; pero este signo, siendo especial y propio de la representacion de los quebrados, no debe considerarse como signo de division, aunque equivalga por la equivalencia que sabremos existe entre un quebrado y una division indicada.

**120**. *Escolio* 1.° Como segun la definicion de la division, el cociente, multiplicado por el divisor, debe dar el dividendo, se podrá definir tambien la division, diciendo que es *buscar un número que, multiplicado por uno de dos dados, produzca el otro*.

*Corolario*. Como el divisor se habrá de tomar tantas veces como unidades tenga el cociente, para dar el dividendo (86), puede definirse tambien la division diciendo que *es el problema por el que se determina cuántas veces un número llamado dividendo contiene á otro llamado divisor*, aunque tal definicion no sea rigorosamente exacta, sino tratándose de números enteros.

En efecto, supone esta definicion que el dividendo ha de ser mayor que el divisor, cosa que no sucede siempre, por ejemplo, tratándose de quebrados, si bien para que comprenda á éstos, muchos autores la expresan diciendo *que es el problema por el que se determina cuántas veces un número contiene ó está contenido en otro;* pero como aun así no comprende toda clase de cantidades, por ejemplo, las algebráicas, tal definicion no se puede llamar general, y sólo la debemos conocer porque de ella indudablemente han nacido los nombres de dividendo y divisor, y apoyarse en ella es cómodo en la mayor parte de las operaciones aritméticas.

**122**. *Observacion*. Como el divisor, por esta última definicion, suficientemente exacta para números enteros, debe estar contenido tantas veces en el dividendo como unidades tenga el cociente, se podria tambien definir la division diciendo que *es el problema por el que se determina cuán-*

*tas veces un número se puede restar de otro*, y de ello se deduce que la division es un caso particular de la resta, y seguimos afirmando la verdad de que las dos operaciones fundamentales de la Aritmética son la adicion y la sustraccion.

**123**. *Division exacta* se llama aquella en la que el cociente, multiplicado por el divisor, produce exactamente el dividendo, en cuyo caso el número que sirve de dividendo se dice que es *divisible* por el divisor, y que éste *divide* á aquel ó es su parte *alicuota* ó *factor*.

**124**. *Escolio*. Un número que es divisible por otro lo será tambien por su cociente, pues que éste, multiplicado por el divisor, debe dar el dividendo; y tomándolo por divisor, el único número que multiplicado por él podrá dar el dividendo, es el que ántes era divisor, que pasará á ser cociente.

Esto es, que si $12 : 4 = 3$, tambien $12 : 3 = 4$.

**125**. *Division inexacta* ó aproximada es aquella en la que el cociente, multiplicado por el divisor, no da exactamente el dividendo, sino un poco ménos, cuya pequeña diferencia se llama *residuo*, y en cuyo caso se dice que el cociente es *aproximado* ó *entero*, y el divisor se llama entonces parte *alicuanta* del dividendo.

**126**. *Corolario*. En la division inexacta el cociente entero, multiplicado por el divisor, más el residuo, debe dar el dividendo, pues que el residuo es la diferencia que hay entre el producto del cociente entero por el divisor y el dividendo.

**127**. El residuo se escribe á la derecha del cociente entero, y con el divisor debajo, separado de él por una rayita horizontal, signo de division (119), que quiere decir que la division de aquella parte del dividendo ha quedado sin efectuar por ser menor que el divisor y no haber número entero que multiplicado por este dé aquel, pues la unidad daria el mismo divisor.

**128**. Se lee el residuo con su nombre natural, y despues el del divisor, si es menor de 10, con los nombres partitivos *medios*, *tercios*, *etc.*, y si es 10 ó mayor con el nombre natural y la palabra *avos*.

Así el residuo 3, siendo el divisor 4, se escribe $\frac{3}{4}$, y se lee tres cuartos, y si el divisor fuera 15, se escribiria $\frac{3}{15}$, y se leeria tres quince avos. Pero no hay inconveniente en decir 3 dividido por 4, y 3 dividido por 15, y hasta es más propio de que así ahora nombremos los residuos hasta saber lo que son quebrados.

## ARTÍCULO II.

### PRINCIPIOS TEÓRICOS SOBRE LA DIVISION.

Los principios que no podemos reservar para la Aritmética superior, son los siguientes:

**129**. Lema. *Un número se hace 2 veces, 3 veces, 10 veces, 100 veces, etc. menor, ó se le saca su mitad, tercera parte, décima ó centésima, etc., dividiéndolo respectivamente por 2, por 3, por 10, por 100, etc.*

Porque al hacerlo, por ejemplo, 2 veces menor, el número resultante hecho dos veces mayor dará el primitivo; y como para hacer un número 2 veces mayor se toma 2 veces por sumando, ó se multiplica por 2 (88), este será el divisor del número propuesto, y análogamente si el número se hace 3, 10, 100 veces menor.

**130.** Lema. *Todo número dividido por la unidad, da por cociente el mismo número.*

Porque no hay ningun otro que multiplicado por la unidad dé tal dividendo.

**131.** Lema. *Todo número dividido por sí mismo, da por cociente la unidad.*

Porque solo la unidad, multiplicada por un número, da de producto el mismo número.

**132.** Lema. *Todo número dividido por otro mayor, da por cociente* 0 *y un residuo igual al mismo número.*

Porque no hay ningun entero que, multiplicado por un número, dé otro menor que él, y por lo tanto el cociente tiene que ser menor que 1, ó sea 0 enteros y un residuo igual al mismo número, para que el producto del cociente entero 0 por el divisor más el residuo den el dividendo (125). Así, $3 : 4 = 0\frac{3}{4}$ y $(0 \times 4) + 3 = 3$, pues $0 \times 4 = 0$, y será $3 = 3$ evidentemente.

**133.** Teorema. *En toda division de números enteros, al cociente le sucede lo mismo que al dividendo y lo contrario que al divisor; y, por lo tanto, multiplicando ó dividiendo (no sumando ni restando) dividendo y divisor por un mismo número, el cociente queda el mismo.*

Esto es, que multiplicando el dividendo ó dividiendo el divisor por un número, el cociente queda multiplicado por el mismo, y dividiendo el dividendo ó multiplicando el divisor por un número, quedará dividido el cociente. Y, por lo tanto, que si el dividendo y el divisor se multiplican ó dividen por un mismo número, el cociente permanecerá el mismo.

*Demostracion.* Porque si duplicamos el dividendo siguiendo el mismo divisor, el cociente tendrá que ser duplo, para que multiplicado por el mismo divisor, dé el dividendo duplicado; y si sacamos la mitad del divisor, el cociente tendrá que ser duplo, para que, multiplicado por la mitad del divisor, dé el mismo dividendo. É inversamente, dividiendo por 2 el dividendo, el cociente tendrá que ser la mitad para que, multiplicado por el mismo divisor, dé un dividendo mitad que el primitivo; y duplicando el divisor, el cociente tendrá que ser la mitad para que, multiplicado por doble divisor, dé el mismo dividendo. Luego si duplicando el dividendo el cociente duplica y duplicando el divisor disminuye en la mitad, quedará el mismo duplicando dividendo y divisor, y lo mismo se demostraria tratándose de triplicar, cuadriplicar, etc. Luego el teorema es general.

En efecto, $8:4=2$ y $(8\times2):4=4$ y $8:(4:2)=4$; y $(8:2):4=1$ y $8:(4\times2)=1$; y finalmente, $(8\times2):(4\times2)=16:8=2$ y $(8:2):(4:2)=4:2=2$.

**134**. Teorema. *El número de cifras del cociente debe ser igual al número de cifras del dividendo, ménos el número de cifras del divisor, ó una más.*

Esto será en el caso de que tantas de la izquierda del dividendo como tiene el divisor, formen por sí solas un número igual ó mayor que este.

*Demostracion*. Como el cociente multiplicado por el divisor debe dar el dividendo (120), y éste, por lo tanto, se considera (118) como un producto, cuyos dos factores son el cociente y el divisor; y como todo producto debe tener tantas cifras ó una ménos que sus dos factores juntos (107), las cifras del cociente y el divisor deberán componer las del dividendo ó una más; luego queda demostrada la primera parte del teorema.

En cuanto á la segunda parte, diremos que, como la division de un número de muchas cifras (como despues veremos), tiene que hacerse por partes y empezando por las unidades de órden superior; y todo dividendo parcial menor que el divisor dará 0 (132) para las unidades de especie superior del cociente; luego el caso en que dicho cociente tendrá una cifra más que la diferencia entre las del dividendo y divisor será aquel en que tantas cifras de la izquierda del dividendo como tiene el divisor compongan un número igual ó mayor que él, pues en otro caso dará 0 al cociente, que á la izquierda de las demas cifras de él no valen nada (56), ni podrá contarse como tal cifra del mismo.

Esta segunda parte de la demostracion se comprenderá mejor despues de conocer la de la division, por lo que la completaremos en la Arimética superior.

## ARTÍCULO III.

### DIVISION DE ENTEROS ABSTRACTOS.

**135**. El problema general de la division de números enteros abstractos se divide en tres tambien generales, cada uno de los cuales tiene su correspondiente regla, y son: 1.° Dividir un número dígito ó compuesto de dos cifras, por un dígito. 2.° Dividir un compuesto de más de dos cifras por un dígito. Y 3.° Dividir un compuesto de más de dos cifras por otro de dos ó más.

**136**. Regla 1.ª *Para dividir un número de una ó dos cifras por otro de una, no hay más que determinar, de memoria ó por la tabla de la multiplicacion, qué número multiplicado por el divisor da el dividendo exactamente, y ese será el cociente; y si no hubiere ningun número que multiplicado por el divisor dé exactamente el dividendo, se tomará como cociente aproximado ó entero el que multiplicado por el divisor dé un poco ménos que el dividendo, cuya pequeña diferencia será el residuo, que será lo que faltará al dicho producto para valer el dividendo, residuo que para ser legítimo deberá ser menor que el divisor.*

*Ejemplos*. 1.° $42 : 7 = 6$. 2.° $51 : 6 = 8\frac{3}{6}$.

*Demostracion*. La definicion de la division exacta (123), la de la aproximada (125) y la del residuo, componen evidentemente la demostracion de la anterior regla, pues en cuanto á que el residuo no será legítimo si es igual ó mayor que el divisor, se demuestra con sólo indicar que en el segundo de los ejemplos anteriores, para que el residuo fuera igual ó mayor que el divisor, el cociente entero tendria que ser menor de 8, por ejemplo, 7, cuyo residuo seria, en efecto, 9 ó $\frac{9}{6}$. Pero para poner por cociente 7 no se habria seguido la regla, pues que 8 multiplicado por el divisor da un poco ménos que el dividendo y 7 da mucho ménos, y con igual razon que el 7 podria ponerse 6 ó 5; luego queda toda la regla demostrada.

**137**. Regla 2.ª *Para dividir un número compuesto de más de dos cifras por otro de una, se coloca el divisor á la derecha del dividendo, encerrando aquel en el que hemos llamado signo angular de la division. En seguida se separan con un punto de la izquierda del dividendo tantas cifras como sean necesarias para formar por sí solas un número igual ó mayor que el divisor, y con ellas, ó una sola en muchos casos, se forma el primer dividendo parcial. Despues se divide éste por el divisor, segun la regla 1.ª, y el resultado será la cifra de unidades superiores del cociente, de igual órden que las inferiores del primer dividendo parcial, y por lo que se pondrá debajo del divisor, y muy á la izquierda, para dejar lugar á las demas cifras del cociente. Despues se multiplica esa cifra hallada para el cociente por el divisor, y se resta del primer dividendo parcial. Con la resta, ó 0 si no la hubiese, y la cifra del dividendo inmediata al primero parcial, que se marca con un punto y se baja y pone á la derecha de dicha resta, se forma el segundo dividendo parcial; con el que se obra como con el primero, poniendo su cociente á la derecha del anterior, y análogamente se opera con todos los dividendos parciales que se vayan formando, mientras haya en el dividendo cifras que bajar ó considerar, siendo la última resta, si la hubiere, el residuo, y el número que produzcan todas las divisiones parciales será el cociente verdadero.*

**138**. Si al multiplicar alguna cifra hallada para el cociente por el divisor, diera un producto mayor que el dividendo parcial correspondiente, es señal de que dicha cifra es mayor de lo que debe ser, por lo que se le rebajará una unidad, y despues otra más, si á pesar de la primera rebaja el producto de ella fuera mayor de lo conveniente. Y si, por el contrario, el producto de una cifra del cociente por el divisor, restado del dividendo parcial, da una diferencia mayor ó igual que el divisor, es señal de que dicha cifra es menor de lo que debe ser, por lo que se le aumentará una ó más unidades. Y siempre que en virtud de ese aumento, ó antes de él por el cálculo de la regla 1.ª, se vea que alguna cifra del cociente debe ser mayor de 9, será señal de que la anterior es menor de lo que debe ser, y en ello no se reparó oportunamente como lo exige el complemento de la regla que contiene este párrafo.

**139**. Finalmente, siempre que un dividendo parcial sea menor que el divisor (lo que sucede muchas veces cuando se compone de una sola cifra, por haber sido 0 el resto del dividendo parcial anterior), se pone 0 en el cociente y se forma otro dividendo parcial con el último, aumentado con otra cifra del dividendo.

**140.** La operacion material de la division se puede abreviar, y se abrevia, hasta por los niños de escuela, multiplicando cada cifra del cociente por el divisor, y restando el producto, sin escribirlo, del correspondiente dividendo parcial.

**141.** La prueba de la division se consigue multiplicando el cociente por el divisor, y viendo si da exactamente el dividendo, ó con la diferencia del residuo si lo hubiere.

*Ejemplo de division.*

```
8.7637 | 4
0 7      21909 1/4
 36      × 4
  037    ─────      prueba.
    1    87636
         +   1
         ─────
         87637
```

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, se ha separado con un punto la primer cifra de la izquierda del dividendo, que es 8, y formado con ella el primer dividendo parcial. Por la regla 1.ª se ha dividido 8 por 4, y el cociente 2 se ha puesto debajo del divisor á la izquierda, por ser las decenas de millar del cociente, ó sea de igual órden que las 8 del dividendo. Se ha multiplicado esa cifra 2 por el divisor 4, y el producto 8, sin escribirlo, se ha restado del primer dividendo parcial 8. A la derecha de la resta 0 se ha bajado otra cifra 7 del dividendo, y formado así el segundo parcial que, dividido por 4, ha dado 1 para los millares del cociente. Se ha multiplicado 1 por 4, y el producto 4 se ha restado del segundo dividendo parcial 7, y á la diferencia 3 se le ha puesto á la derecha otra cifra del dividendo, con la que se ha formado el tercer dividendo parcial 36, que dividido por 4, dió 9 para las centenas del cociente. Multiplicadas por el divisor 4, dió 36, producto que, restado del tercer dividendo parcial, dió 0. Bajóse otra cifra del dividendo, y se formó el cuarto dividendo parcial 3, que por ser menor que el divisor, dió 0 para el cociente; y con tal dividendo parcial y la última cifra del divisor se formó el quinto dividendo parcial 37, que dividido por 4, dió 9, y un residuo, por lo que el cociente verdadero es, como se ve por la prueba, $21909\frac{1}{4}$.

**142.** *Demostracion de la 2.ª regla de la division.* En términos generales diremos que lo que prescribe la regla y se ha practicado en el anterior ejemplo, no es otra cosa que determinar una por una todas las partes de un número que, multiplicadas por el divisor, den todas las partes del dividendo; pues los excesos que estas ofrezcan sobre los productos parciales de aquellas, no se desprecian, sino que se agregan á otras partes del mismo dividendo, ninguna de las cuales se deja sin dividir, mientras es posible, ó sea mientras no aparece en último lugar un resto indivisible (que lo es al ménos por lo que suponemos haber aprendido de la Aritmética); y como es un axioma que lo que se hace con las partes queda hecho con el todo ó conjunto de ellas, todo el dividendo queda dividido por el divisor, y el número tomado por todos los cocientes parciales, multiplicado por el divisor, debe dar el dividendo (exactamente, ó con la diferencia igual al residuo); luego será el cociente verdadero.

Δ **143.** Más detalladamente, y refiriéndonos al ejemplo anterior, diremos que apoyándonos en la definicion (118) hemos podido obrar acordemente, pero sin sujecion á la regla, considerando primeramente sólo las 8 decenas de millar (= 80000) del dividendo; y hemos investigado qué número de igual órden de unidades deberia tener el cociente para que, multiplicadas por el divisor 4, diera las 8 dichas del dividendo; y hemos fácilmente descubierto que ese número debia ser 2 centenas de millar (= 20000) porque $2 \times 4 = 8$, y porque $20000 \times 8 = 80000$ (105).

Hemos puesto, pues, 2 en el cociente, sin los cuatro ceros que le corresponden; pero teniendo en cuenta que para ser decenas de millar debia tener á su derecha cuatro cifras, y por eso lo hemos escrito á la izquierda y podido ya determinar que de cinco cifras constaria el cociente.

En seguida hemos multiplicado esas 2 decenas de millar ( = 20000 ) del cociente por el divisor 4, y nos ha dado un producto de 8 decenas de millar ( = 80000 ) que hemos restado de las 8 del dividendo, desatendiendo de una y otras los ceros, cuya diferencia seria 0; pero teniendo en cuenta que la resta, si la hubiera seria de decenas de millar.

Hemos pasado á considerar la segunda cifra del dividendo 7 millares (=7000) que hemos bajado y colocado á la derecha del resto anterior, y formado el segundo dividendo parcial, y hemos averiguado qué número de millares deberia tener el cociente para que, multiplicados por el divisor, diera los del dividendo. Y como observamos que 2 millares ( = 2000 ) en el cociente, multiplicado por 4, dan 8 millares (= 8000), número mayor que los 7 millares del segundo dividendo parcial, conocimos que 2 millares era número demasiado grande para el cociente, y por lo tanto, que 1 deberia ser el número buscado. Pusimos, pues, 1 en el lugar de los millares del cociente, ó sea á la derecha de las decenas de millar, omitiendo los tres ceros correspondientes, por las mismas razones que omitimos los cuatro de las 2 decenas de millar del mismo cociente.

Multiplicamos en seguida 1 millar ( = 1000 ) del cociente por el divisor, y el producto 4 millares ( = 4000 ) lo restamos de los 7 del dividendo, y nos dió una resta de 3 millares. Pero esta resta no la podiamos despreciar, porque constituyendo una parte del dividendo, si no se dividia y determinaba el cociente parcial que le correspondiera, al multiplicar el total por el divisor, no podria dar el dividendo.

Para conseguir, pues, la division de esa parte, pensamos que si bien 3 millares no podian dividirse enteros, digámoslo así, por 4, pues daria 0 millares, que en nada harian variar los millares del cociente y dejarian el mismo residuo sin llevar su parte correspondiente al cociente, podian, sí, convertirse en 30 centenas (39), que con lás 6 del dividendo total, nos formarian un tercer dividendo parcial divisible de 36 centenas ( = 3600 ).

Averiguamos, pues, qué número de centenas deberia tener el cociente para que, multiplicados por el divisor, nos diera las 36 del dividendo parcial, y vimos que eran 9 ( = 900 ), que pusimos, por lo tanto, á la derecha de los millares del cociente, y las multiplicamos por el divisor y restamos el producto del dividendo parcial, dándonos 0 de diferencia.

Pasamos en seguida á considerar las 3 decenas del dividendo ( = 30 ) que bajamos y pusimos á la derecha del 0, resultado de la resta anterior, y formamos así el cuarto dividendo parcial de 3 decenas ( = 30 ), y como al buscar el parcial cociente vimos que no habia ningun número de decenas por pequeño que fuere, que, multiplicado por el divisor 4, diera las 3 del dividendo, conocimos que el cociente no podia tener decenas, y pusimos 0 en el lugar correspondiente, quedándonos como residuo el mismo dividendo parcial (porque $0 \times 4 = 0$ y $3 - 0 = 3$ ), el que tampoco podíamos despreciar; y por razones análogas á las dadas para otros restos, lo convertimos ó consideramos convertido en las 30 unidades que contiene, y que sumadas á las 7 del divendo total, nos formó el quinto dividendo parcial de 39.

Dividímoslo semejantemente á los anteriores, y nos dió 9 para las unidades del cociente, que multiplicadas por el divisor y restado el producto del correspondiente dividendo, nos dió un resto de 1, que, siendo ya indivisible por 4, lo consideramos como residuo de la division que para completar el cociente se lo pusimos á su derecha con la division indicada como impracticable.

Y como todas las partes del dividendo las hemos dividido, y todos los cocientes parciales que nos han producido los hemos multiplicado por el divisor y restado los productos de aquellas, el número total obtenido es el cociente verdadero; luego el procedimiento seguido para hallarlo es el conveniente, y siendo el mismo prescrito por la regla, ésta queda demostrada.

**144**. Regla 3.ª *Para dividir un número compuesto de más de dos cifras por otro de dos ó más, se coloca el divisor á la derecha del dividendo, y dentro de la línea angular correspondiente. En seguida se separan con un punto á la izquierda del dividendo tantas cifras como sean necesarias para formar por sí solas un número igual ó mayor que el divisor, y con ellas se formará el primer dividendo parcial. Se dividirá éste por el divisor, buscando qué cifra, multiplicada por él, produce el tal dividendo parcial, ó poco ménos, y esa será la primera de la izquierda del cociente ó de unidades superiores de él, cuyo órden será igual al de las inferiores del dividendo parcial, y por lo que desde luego se sabrá el número de cifras del cociente.*

*En seguida se multiplicará la cifra hallada por el divisor, y se restará del dividendo parcial, y á la derecha de su resta se escribirá, bajándola, la cifra del dividendo total inmediata á las tomadas para formar el primer dividendo parcial, y con la que se formará el segundo. Se dividirá éste por el divisor, y el resultado será la segunda cifra del cociente, por lo que se pondrá á la derecha de la primera hallada, y se multiplicará por el divisor, y el producto se restará del dividendo parcial correspondiente. Con su resta y otra cifra del dividendo total, se formará el tercer dividendo parcial, con el que se procederá como con el segundo, y así se continuará hasta que no haya más cifras que bajar ó considerar en el dividendo, y el número que se obtenga será el cociente.*

**145**. En este problema, como en el de la regla segunda, siempre que un dividendo parcial es menor que el divisor, produce 0 al cociente, y con el tal dividendo parcial y otra cifra del dividendo total, se forma otro parcial.

**146**. Tambien se conocerá igualmente que una cifra del cociente es mayor ó menor de lo que debe ser, segun que el producto de ella por el divisor no se pueda restar del dividendo parcial ó dé una resta igual ó mayor que el divisor, ó cuando la division parcial siguiente produzca más de 9 de cociente.

**147**. Esta operacion, como la de la regla 2.ª, tambien se abrevia no escribiendo los productos parciales de las cifras del cociente por el divisor para restarlos del dividendo; pero diferentemente de lo que ocurre en aquella, en ésta, para verificar las restas, no basta muchas veces añadir á la cifra del dividendo parcial 10 unidades para restarle el producto correspondiente, sino que es necesario añadirle 20, 30 y hasta 90 unidades (cosa que nunca sucede en la sustraccion ordinaria, ni en las correspondientes á la division de la regla 2.ª); pero en estos casos, por cada 10 que se añaden á una cifra del número que hace de minuendo, una unidad se aumenta á la siguiente cifra del número que hace de sustraendo.

**148**. Finalmente, la determinacion de los cocientes parciales en los problemas de esta regla no se consigue fácilmente, como en los de la regla 2.ª; al contrario, es cosa tan difícil, que son varios los métodos que para ello se emplean, y ninguno es de éxito seguro, si no se tiene mucha práctica en su empleo. En casi todos es preciso ensayar las cifras que se obtienen, y repetir á veces el ensayo, cuya operacion se llama *tanteo*.

**149**. El método más seguro, pero pesado, y al que se recurre cuando se trata de una division de números muy grandes, y hay, por lo tanto, ventaja en evitar el *tanteo*, que por este método es innecesario, consiste en formar una tablita auxiliar de todos los productos del divisor por los nueve números dígitos. Así, siendo, por ejemplo, el divisor 347, se forma tal tablita con los productos siguientes en columna vertical: $347 \times 1 = 347$; $347 \times 2 = 694$; $347 \times 3 = 1041$; $347 \times 4 = 1388$; $347 \times 5 = 1735$; $347 \times 6 = 2082$; $347 \times 7 = 2429$; $347 \times 8 = 2776$; y $347 \times 9 = 3123$. Y evidentemente todo dividendo parcial de una division cuyo divisor sea 347, si es menor que él, dará 0 al cociente; si es mayor que 3123, dará 9, y si es menor que este número, la tablita dará el cociente entero correspondiente.

**150**. El método que más se emplea, y que aunque obliga á tanteo, con la práctica se hace poco pesado, es ver las veces que la primera cifra del divisor está contenida en la primera del dividendo parcial correspondiente, ó en las dos primeras, si tuviese más que el divisor, y considerar la primera de éste aumentada de una unidad si la segunda fuera 8 ó 9 ó mucho mayor que la primera. Así un dividendo parcial 347, y un divisor 112, se dice: 347 entre 112 ó 3 entre 1 á 3 y 3 será casi seguramente la cifra del cociente. Y 4754 dividido por 653, se dirá: 4754 entre 653, ó 47 entre 6 á 7, cuya cifra será probablemente la del cociente. Y finalmente, 756 dividido por 493, se dirá: 756 entre 493, ó 7 entre 5 (en lugar de 4), á 1, etc., etc.

**151**. El tercer método, que con la práctica se hace más fácil que lo parece en la explicacion que de él puede darse, consiste en ver si tantas veces como la primera cifra de la izquierda del divisor está contenida en la primera ó dos primeras de la izquierda del dividendo parcial, tantas veces la segunda del divisor está contenida en la correspondiente del dividendo , con el aumento de una cifra á su izquierda que represente la diferencia del anterior contenido; y análogamente, la tercera, cuarta, etc., del divisor en las correspondientes partes del dividendo.

Por ejemplo, con el dividendo parcial de 3624 y el divisor 483, diremos: 36 entre 4 á 9, sin resto; pero como 6 no contiene á 8 ni 9 veces ni mucho ménos, la cifra del cociente tiene que ser mucho menor que 9, por lo que no se tantea la 8 y se ensaya la 7. Dícese, pues, 36 entre 4 á 7, que multiplicado por 4 da 28, cuya diferencia á 36 es 8 y que, unidos á 8, forman 88 que excede á 56, producto de 7 por 8 en 32; que con 4 forman 324, cuya suma contiene 7 veces al 3 y deja un resto de 301 que, por ser menor que el divisor, prueba que el 7 es buena cifra para el cociente.

*Ejemplo de division de la regla 3.ª*

| | | |
|---|---|---|
| 3624432 | 483 | |
| 2434 | 7504 | |
| 01932 | $\times$ 483 | prueba |
| 00000 | 22512 | |
| | 60032 | |
| | 30016 | |
| | 3624432 | |

*Explicacion.* Separamos cuatro cifras de la izquierda del dividendo total para formar el primero parcial, porque tres forman un número menor que el divisor que darian de cociente 0, inútil á la izquierda. El dividendo parcial, pues, 3624 lo dividimos por el divisor 483, viendo qué cifra multiplicada por este daba aquel ó poco ménos, y hallamos, por cualquiera de los tres métodos de la regla complemental (148), que tal cifra era 7 millares, porque millares eran las unidades inferiores del dividendo parcial primero. Escribimos, pues, 7 en lugar del cociente, muy á la izquierda, para que á su derecha pudieran fácil y ordenadamente ponerse tres cifras más, pues que de cuatro debia componerse el cociente, segun la regla. Multiplicamos 7 por el divisor 483, y sin escribir los productos parciales, los fuimos restando del dividendo parcial dicho, obteniendo de resto 243. A su derecha pusimos, bajándola, la cifra siguiente del dividendo, con la que formamos el segundo parcial de 2434 que, dividido como el primero por el divisor, nos dió 5 para segunda cifra del cociente, por lo que la escribimos á la derecha de la primera. Multiplicamos dicha cifra por el divisor, y su producto lo restamos en partes del dividendo parcial segundo, dándonos de diferencia 19. A su derecha escribimos ó bajamos otra cifra del dividendo total, con la que formamos el tercer dividendo parcial de 193. Al querer dividirlo como los anteriores, observamos que era menor que el divisor, por lo que su cociente era 0 y su residuo igual al mismo dividendo (132), por lo que pusimos 0 en el cociente á la derecha de las 2 cifras antes halladas, y al tercer dividendo parcial 193, considerado como resto, le pusimos á la derecha la cifra del dividendo último, formando con ella el cuarto dividendo parcial de 1932. Dividímoslo como los anteriores, obteniendo 4 para la última cifra del cociente y 0 de residuo, porque 4 multiplicado por el divisor nos dió un producto igual al último dividendo parcial; resultando, pues, como cociente total 7054, que para probar si era el verdadero ó nos habíamos equivocado en alguna multiplicacion ó resta, lo multiplicamos por el divisor y nos dió, como convenia, justamente el dividendo.

**152.** *Demostracion de la regla 3.ª de la division.* La demostracion general de esta regla es la misma que la de la regla 2.ª (142), pero la detallada, refiriéndose á cualquier ejemplo, ofrece algunas diferencias, que es lo único que tenemos que demostrar.

En efecto; en el ejemplo anterior vemos que los divisores parciales son siempre de tres ó cuatro cifras, y que para determinar los cocientes parciales correspondientes se obra con sujecion á uno de tres métodos explicados (149, 150 y 151), pero no demostrados.

La demostracion del primero (149) es casi inútil, pues evidentemente si formamos una tablita con los productos del divisor por todos los números dígitos, todo dividendo parcial que la operacion ofrezca, como su cociente no puede ser mayor de 9 (138), nos dirá la tabla cuál es, exacto ó aproximado, pues su producto por el divisor, no pudiendo ser mayor que el dividendo parcial, ni diferir de él en un número igual ó mayor que el divisor, será igual ó próximamente igual á alguno de la tabla, que por lo tanto señalará el cociente.

Los otros dos métodos (150 y 151) se fundan en que como cada cifra del cociente ha de decir las veces que el divisor está contenido en el dividendo parcial correspondiente, pues que el cociente total dice las veces que el divisor está contenido en el dividendo total (120), la misma cifra debe ser la que exprese aproximadamente las veces que la parte de unidades superiores del dividendo parcial contiene á las superiores del divisor. Próximamente, porque el resultado no es seguro y obliga al *tanteo*, aunque lo acorta, y por eso para acortarlo más por el método segundo (150), se considera la primera cifra de la izquierda del divisor con una unidad más si la siguiente es 8 ó 9, ó mucho mayor que la primera, por la evidente razon de que 58 ó 59 se aproximan más á 60 que á 50; y 37 y 16 se aproximan más respectivamente á 40 y á 20 que á 30 y á 10.

En los problemas de esta regla se halla ademas la diferencia con los de la primera, de que al multiplicar una cifra del cociente por todas las del divisor y restar los productos parciales sin escribirlos de las cifras del dividendo parcial correspondiente, hay muchas veces necesidad de añadir á las cifras de éste, no 10 unidades, sino 20, 30 y hasta 90, cosa que nunca sucede en la sustraccion ordinaria, á causa de que en ellas se restan sus partes, cifra por cifra, siempre menores de 10, al paso que en la division los productos que se restan son casi siempre mayores de 10; pero como tantas veces 10 unidades como se añaden á una cifra del dividendo parcial que hace de minuendo, tantas veces 1 unidad de órden inmediato superior se añade al producto que hace de sustraendo, la resta no puede variar (75).

Finalmente, el empezar la operacion por las unidades superiores del dividendo tiene varias razones, de las que sólo daremos la más acorde con la demostracion de la division que hemos dado. Es, pues, que como la division se verifica por partes, y casi todas ofrecen residuos que deben añadirse á otra parte del dividendo, para que todas produzcan su parte de cociente correspondiente, empezando la division por las unidades inferiores, no sería posible dividir los residuos de las divisiones parciales.

Y como la operacion de prueba no admite demostracion, por ser la misma definicion, resulta que todas las reglas dadas sobre la division quedan demostradas.

## ARTÍCULO III.

### ABREVIACIONES DE LA DIVISION.

**153.** Las abreviaciones más usadas en la division, además de la enseñada de restar de los dividendos parciales, los productos del divisor, por las cifras del cociente sin escribirlos (147), son las siguientes: 1.ª Cuando el divisor es 2 ó 3. 2.ª Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros. 3.ª Cuando el divisor es un número cualquiera, terminado en ceros. 4.ª Cuando el dividendo termina en ceros. Y 5.ª Cuando dividendo y divisor terminan en ceros.

**154.** Regla 1.ª *Para dividir un número cualquiera, por grande que sea, por 2 ó por 3, se ejecuta todo lo que previene la regla 2.ª de la division* (137); *pero sin escribir más que las cifras del cociente, que se van poniendo debajo de las del dividendo.*

Esta abreviacion se puede hacer, áun cuando el divisor sea cualquier otro número dígito; pero no siendo tan fácil, no se usa más que cuando el divisor es 3 ó 2.

*Ejemplo.* $\qquad — 3479854 : 3$

$$= 1159951 \tfrac{1}{3}.$$

*Explicacion.* Se dice: la tercera parte de 3 es 1 (y se escribe debajo como primera cifra del cociente). La de 4 es 1 y llevo 1 (que resta de multiplicar 1 por 3 y restar el producto de 4). y 7 son 17; su tercera parte 5 y llevo 2, y 9 son 29; su tercera parte 9 y llevo 2, con 8 son 28; su tercera parte 9 y llevo 1, con 5 son 15; su tercera parte 5 y no llevo nada. La tercera parte de 4 es 1 y queda 1 de residuo.

*Demostracion.* Es la misma que la de la regla 2.ª de la division (152), pues lo mismo es sacar la tercera parte de un número que dividirlo por 3 (129); y todo cuanto se practica, es sacar la tercera parte de todas las partes del dividendo, y por lo tanto, la tercera parte del todo; y como lo mismo se demostraria, para dividir por 2, sacando la mitad de todas las partes del dividendo, la regla es general y queda demostrada.

**155.** Regla 2.ª *Para dividir un número cualquiera por la unidad, seguida de ceros, se le quitan á la derecha del dividendo tantas cifras ó ceros como acompañen á la unidad del divisor, las cuales formarán el residuo, y el cociente entero serán las cifras restantes.*

*Ejemplo.* $784975 : 1000 = 784 \frac{975}{1000}$.

*Demostracion.* Como todo número dividido por la unidad, da por cociente el mismo número (130), y todo número, multiplicado por 1, da el mismo número tambien, resulta que todas las cifras del dividendo de órden igual á la superior del divisor, deberán ser iguales á las del cociente; y las de órden inferior del dividendo, iguales en órden á las de los ceros que acompañan á la unidad, siendo indivisibles por una de órden superior, quedarán de residuo; luego la regla es general y queda demostrada.

*Observacion.* Esta regla podia omitirse; pues por decimales se hace la division abreviada de este caso con la ventaja de no tener residuo ó tenerlo despreciable.

**156.** Regla 3.ª *Para dividir un número cualquiera por otro que no sea la unidad con ceros, pero terminado en ceros, se prescinde de éstos y de tantas cifras de la derecha del dividendo como ceros tiene el divisor en su terminacion, y hecha la division de las partes restantes de uno y otro número, se tendrá el cociente entero, y el residuo será el que produzca la dicha operacion, teniendo á su derecha las cifras del dividendo que se desatendieron, ó estas solas si la division no da residuo.*

*Ejemplo.* $3745 : 300 = 37 \,|\, 3$

$$\begin{array}{rl} 07 & 12 \frac{145}{300} \\ 1 & \end{array}$$

*Demostracion.* Porque el ser ceros las cifras de la derecha del divisor, hace que al multiplicar por ellos la última del cociente dé 0 de producto que, restado de las últimas cifras de la derecha del dividendo, dará las mismas cifras de diferencia; luego deberán figurar en el residuo y es inútil dividirlas, y no dividiéndolas, queda la division del anterior ejemplo reducida á 3700 : 300, que es lo mismo que 37 : 3 (159), que es lo que prescribe la regla y queda demostrada.

*Observacion.* Tambien esta regla se hace inútil conociendo los decimales; pues por ellos se abrevia la operacion, y se obtiene un resultado más sencillo ó exacto.

**157.** Regla 4.ª *Para dividir un número terminado en ceros, por otro que termine en cifra significativa, se efectúa la division por la regla ordinaria correspondiente; y en el momento en que algun producto de cifra del cociente por el divisor, sea igual al dividendo parcial correspondiente, y no queden más cifras que bajar del dividendo que ceros, se da por terminada la* *operacion, agregando al cociente tantos ceros como se dejaron de considerar en el dividendo.*

| | | |
|---|---|---|
| *Ejemplo.* | 374.500,000 | 35 |
| | 0245 | 10700000 |
| | 000 | |

*Demostracion.* Porque es evidente la inutilidad de seguir la operacion, cuando en el dividendo no quedan más que ceros y ha sido 0 un residuo; pues todas las cifras que salieran para el cociente serian ceros, y cero sus productos, y la resta de éstos á los dividendos parciales tambien ceros.

**158.** *Observacion importante.* No se crea que toda division en la que el dividendo termina en ceros, es susceptible de la abreviacion á que se refiere esta regla; pues aunque sean muchos los ceros del dividendo, pueden no producir ninguno para el cociente, y aún no darlo exacto ó sin residuo.

| | | |
|---|---|---|
| Así | 37000000 | 7 |
| | 50 | $6714285\frac{5}{7}$ |
| | 10 | |
| | 30 | |
| | 20 | |
| | 60 | |
| | 40 | |
| | 5 | |

**159.** Regla 5.ª *Para dividir un número por otro, terminados ambos en ceros, se les suprime á los dos igual número de ellos, y se obra despues con sujecion á una de las reglas anteriores, segun la forma en que queden; que podrá ser ó ambos terminados en cifra significativa, ó uno ú otro solamente terminado en ceros.*

*Ejemplos.* 1.º 374500 : 3500 = 3745 | 35

| | |
|---|---|
| 3745 | 35 |
| 0245 | 107 |
| 000 | |

2.º 374500000 : 3500 = 3745000 : 35 = 107000

3.º 394500 : 35000 = 3945 | 350

| | |
|---|---|
| 3945 | 350 |
| 044 | $11\frac{95}{350}$ |
| 9 | |

*Demostracion.* Suprimiendo igual número de ceros á dividendo y divisor, equivale á dividir ambos por la unidad seguida de tantos ceros como se suprimen á cada uno (55); y como un cociente no varía aunque dividendo y divisor se multipliquen ó dividan por un mismo número (133), la division quedará abreviada y susceptible todavia de otra abreviacion, acaso por alguna de las reglas anteriores demostradas.

En el primer ejemplo, suprimiendo dos ceros á dividendo y divisor, los dividimos por 100, y reducimos la division á la de 3745 por 35, cuyo cociente es evidentemente 107, igual al que daria los números propuestos con todos sus ceros.

En el segundo ejemplo, obrando análogamente, reducimos la division á la de 374000 por 35, y por la regla 4.ª á dividir 374 por 45, con el aumento al cociente de tres ceros.

Y en el ejemplo tercero reducimos la division á la de 3945 por 350, que por la regla 3.ª se consigue dividiendo 394 por 35, y añadiendo al residuo un cero.

## ARTÍCULO IV.

### DIVISION DE NÚMEROS CONCRETOS.

**160.** La division de los números concretos se hace lo mismo que la de los abstractos; pero los problemas que á aquellos se refieren no expresan á veces bien claramente cuál es el dividendo y cuál es el divisor; por lo que sólo la reflexion sobre el enunciado del problema, y sobre todo la práctica, puede servir para determinarlos.

En general dirémos que cuando dividendo y divisor son de distinta naturaleza, el dividendo es aquel de igual especie al cociente que se busca, y el divisor el otro, que se considera como abstracto. Mas siendo dividendo y divisor de una misma naturaleza, sólo el enunciado del problema en cada caso particular señala, más ó ménos claramente, cuál es el dividendo y cuál el divisor, lo que se comprenderá mejor por los siguientes sencillos ejemplos, en los cuales veremos las diferentes clases de problemas que pueden presentarse.

**161.** 1.º Cuando conociendo dos números concretos, se quiere averiguar el valor de un tercero que, multiplicado por uno de los dos dados, produzca el otro.

*Ejemplo.* Teniendo por cualquier concepto un ahorro anual de 350 pesetas, se quiere saber cuántos años han de pasar para reunir 1400 pesetas.

*Solucion.* Sin grande dificultad se comprenderá que el dividendo es 1400 pesetas, no por ser mayor que 350, pues no sólo hay casos en los que el dividendo es menor que el divisor, como veremos al tratar de los quebrados, sino que el problema podria no pertenecer á la division. Conocemos, pues, que el dividendo es 1400 pesetas, porque representa el ahorro que queremos tener con 350 anuales, y por lo tanto es un producto cuyos dos factores son 350, y el número de años que han de pasar para reunir aquella cantidad, y por la definicion de la division (118), el número que representa el producto es el dividendo, y el factor conocido el divisor, debiendo ser el cociente evidentemente, no pesetas, sino años.

Será, pues, $1400 : 350 = 140 : 35 = 4$ años.

*Demostracion.* La de este ejemplo, como la de los siguientes, como se ejecutan por reglas de números abstractos ya demostradas, puede decirse que consiste solamente en el razonamiento que es preciso hacer para plantear el problema (traducir el enunciado en números susceptibles de operaciones matemáticas), y para determinar la especie del resultado.

**162.** 2.º Cuando dados dos números concretos desiguales, pero homogéneos, se quiere saber cuántas veces el uno se podrá restar del otro.

*Ejemplo.* Teniendo un ahorro de 1200 duros, y un déficit anual de 60 duros, se desea saber cuántos años pasarán antes de consumir tal ahorro.

*Solucion.* Evidentemente que pasarán tantos años como veces se pueden restar 60 de 1200, y por lo tanto este último número es el dividendo, el otro el divisor, y el cociente será de años.

Será, pues, 1200 : 60 = 120 : 6 = 20 años.

**163.** 3.° Cuando se quiere repartir entre cierto número de personas cierto número de cosas.

*Ejemplo.* Un visitante á un hospicio dió para sus 35 pobres 7000 rs., y se quiere saber á cómo les toca á cada uno.

*Solucion.* Como los números dados son de diferente naturaleza, y lo que se busca son reales, el dividendo será 7000, y 35 pobres, considerado como abstracto, el divisor; porque en efecto, lo que debe darse á cada uno, multiplicado por el número de pobres, debe dar el donativo.

Y será 7000 : 35 = 200 reales.

**164.** 4.° Cuando se quiere dividir una cantidad concreta en un número determinado de partes.

*Ejemplo.* En un cuartel entró un batallon de 810 plazas, y se desea saber cuántos soldados deben alojarse en cada una de las 9 cuadras del edificio.

*Solucion.* Dividendo y divisor son de distinta especie, y el resultado que se busca es de soldados; luego 810 es el dividendo, y 9 cuadras el divisor.

Y será 810 : 9 = 90 soldados.

**165.** 5.° Cuando de un número concreto dado se quiere determinar su mitad, su 3.ª, 4.ª, etc., parte.

*Ejemplo.* Concedido un paseo extraordinario á la cuarta parte de un batallon de 1060 soldados, se desea saber cuántos deben salir.

*Solucion.* Como lo que se busca son soldados, 1060 será el dividendo, y 4 abstracto el divisor.

Y será 1060 : 4 = 265 soldados.

**166.** 6.° Cuando conociendo el valor en punto de un número de unidades, se quiere saber el correspondiente á cada una de ellas.

*Ejemplo.* Un pedazo de paño de 35 metros ha costado 700 rs., y se desea saber á cómo sale el metro.

*Solucion.* Como lo que se busca son los reales á que sale cada metro, 700 será el dividendo y 35 el divisor.

Y será 700 : 35 = 20 rs. el metro.

**167.** 7.° Cuando un número de unidades concretas se quiere convertir en otro equivalente, pero de unidades de mayor magnitud y de la misma naturaleza.

*Ejemplo.* Se desea saber 420 minutos cuántas horas componen.

*Solucion.* No hay más que un dato visible; pero 60 minutos que tiene la hora es el otro dato que encierra el problema. Como son de igual especie, el dividendo lo indica el problema, pues tantas horas corresponden á 420 minutos, como veces contengan á 60.

Y por lo tanto será 420 : 60 = 7 horas.

*Observaciones sobre un caso particular de la division.*

**168.** Hay un caso particular de la division, llamado *extraccion de raíces*, el cual, por su mucha importancia, dificultad de ejecucion y elevado de su teoría, corresponde á la aritmética superior. Adelantaremos, sin embargo, que consiste en buscar un número que multiplicado por sí mismo produzca otro dado; y por lo tanto raíz es lo contrario de potencia, pues si $8^2 = 8 \times 8 = 64$, la raíz cuadrada de 64 es 8. Con sólo estas indicaciones, veremos bien claro que se da un dividendo y se busca un cociente y un divisor iguales; luego es un caso particular de la division, aun tratándose de otras raíces, pues si $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$, la raíz cúbica de 27 será 3, cociente de buscar á 27 un divisor y un cociente, que el uno sea el cuadrado del otro $3^2$ y 3. No vemos todavía más que casos particulares de las operaciones fundamentales dichas.

## ARTÍCULO V.

### EJERCICIOS SOBRE LA DIVISION.

**169.** Ejemplos de division de números abstractos.

| | |
|---|---|
| 1.° 8745768 : 8 | 2.° 9999969 : 49 |
| 3.° 7940009 : 87 | 4.° 8989898 : 759 |
| 5.° 9576408 : 908 | 6.° 9987676 : 7590 |
| 7.° 5700008 : 5700 | 8.° 6875000 : 8700 |
| 9.° 9801000 : 9900 | 10.° 90000000 : 8000 |

*Ejemplos de division de números concretos.*

1.° ¿Cuántos dias durarán 44000 rs., gastando 4000 diarios?
2.° Un testamento dice que se repartan 12540 duros en dotes de 570. ¿Cuántos podrán darse?
3.° Un rico, al morir, ha legado 25500 pesetas á los 50 pobres de un hospicio. ¿A cómo les toca?
4.° Una deuda de 6270 duros hay obligacion de pagarla en once anualidades. ¿Cuánto se debe pagar cada año?
5.° Castigados por un crimen á ser *quintados* los 3985 soldados de una brigada, ¿cuántos deben fusilarse?
6.° En un ferro-carril se han tardado 255 minutos en recorrer 128 kilómetros. ¿Cuántos minutos se ha empleado en cada uno, ó á cómo resulta el andar por kilómetro?
7.° En un barato se ha comprado una partida de 150 docenas de medias por 1650 rs. ¿A cómo sale la docena?
8.° ¿Cuántos quintales componen 112000 onzas?
9.° ¿Cuántos duros componen 3120 rs.?
10. Un recaudador de contribuciones ha recibido 78800 pesetas, y desea saber cuánto le corresponde percibir por el 1 por 100 de comision.
NOTA. Sin necesidad de que sepamos la regla de interés, podemos ya decir, si por 100 le corresponde 1, por 1000 ($= 100 \times 10$) le corresponderán 10, que es el cociente de dividir 1000 por 100; luego dividiendo 10 recaudado por 100, se tendrá lo que se desea saber.

*Ejemplos de division de números complejos, combinados con adiciones, sustracciones y multiplicaciones.*

1.° Un negociante hace un balance para ver si puede retirarse, y halla que tiene en metálico 178450 rs., y en deuda cobrable 17778, y debe 47850 por un lado y por otro 5000, y desea saber, con su fortuna, para cuántos años tendrá, gastando á 15 rs. diarios.
2.° Un comerciante ha comprado 780 objetos, de casi igual valor, por 14570 rs., y deseando ganar en su venta 7000 rs., desea saber á cómo debe venderlos.
3.° Un general tiene á sus órdenes 18 batallones, de los cuales 5 tienen á 890 plazas, 3 á 877, 4 á 870, 5 á 520 y 1 con 496, y desea saber, no sólo la fuerza que reune, sino cuánta podrá enviar á una comision, quedándole la suficiente fuerza para hacer un servicio diario de 3000, relevándose cada tres dias, y cuántos de esos 3000 deberán ponerse de guardia en los 12 puntos más importantes.
4.° Un propietario, al morir, legó 5000 rs. á los hospitales, 7000 á los pobres, 4000 á un amigo, y el resto de una fortuna de 150000 rs. á sus siete sobrinos, mejorando á uno de ellos en el doble que á los otros, y se desea saber cuánto toca al mejorado y á los otros.
5.° Un maestro de obras, al concluir la semana, tiene que pagar á sus 29 trabajadores, de los cuales uno gana 9 rs. diarios, 2 á 7 rs., 5 á 5 y 21 á 3; pero de esos 29 hay 7 que han trabajado los seis dias de la semana, 5 sólo han trabajado tres dias y los demas cinco dias, y desea saber cuánto importa el pago total de ellos, y cuánto debe él recibir por el 2 por 100 de comision (doble que es 1 por 100) (10°).
6.° Un tendero compró 70 arrobas de patatas á 7 rs., y vendió 39 arrobas á 9 rs ; pero al remover el resto, vió que tenia podridas 3 arrobas, y desea saber á cómo debe vender el resto para ganar en cada arroba de las que compró 2 rs.
7.° Un recaudador de contribuciones ha recibido, en el primer trimestre del año, 7845 rs.; en el segundo, 5678; en el tercero, 5950, y en el cuarto, 9857: y sus entregas al Tesoro han sido respectivamente de 5780 rs. la primera; de 7000 la segunda; de 6000 la tercera; y de 7000 la cuarta, y desea saber cuánto debe tener en caja, y cuál es el 1 por 100 de comision que le corresponde por lo cobrado, y cuánto le falta que recibir de la contribucion de 42578 rs., y cuánto el tanto por ciento de lo que le falte por cobrar.
8.° Una casa comprada en 25500 duros ha ocasionado de gastos de reparacion 4900, y gastándose anualmente en contribuciones y otros gastos ordinarios 240 pesetas, se desea saber á cuánto se ha de alquilar para sacar al capital un 5 por 100 (5 veces mayor que 1 por 100).

# CAPÍTULO VI.

## QUEBRADOS COMUNES.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**170**. QUEBRADO COMUN *ó fraccion ordinaria se llama* (25) *el número que expresa una ó varias partes iguales de la unidad abstracta ó á que se refiere.*

*La mitad* de una peseta, *dos terceras partes* de un año, *tres cuartas partes* de una vara de cinta y *dos quintas partes* de 1 abstracto ó de una cosa cualquiera, sin determinar su especie, son quebrados.

**171**. Para expresar los quebrados se necesitan dos números, uno que se llama *denominador*, y dice las partes iguales en que se considera dividida la unidad; y otro que se llama *numerador*, y dice de cuantas de aquellas partes ó divisiones consta el número que representa el quebrado; llamándose ambos puntos *términos* del quebrado, y escribiéndose el denominador debajo del numerador con una rayita horizontal intermedia, ó sea el signo de la division (119), semejantemente á como se escriben los residuos para completar los cocientes de las divisiones inexactas ó aproximadas.

En los ejemplos anteriores, para expresar media peseta, se pone por denominador 2, que dice que la peseta se considera dividida en dos partes iguales ó mitades, y por numerador 1, que dice que de dichas dos mitades, sólo de una consta el número que representa el quebrado, en esta forma: $\frac{1}{2}$ de peseta; y análogamente, $\frac{2}{3}$ de año, $\frac{3}{4}$ de vara de cinta y $\frac{2}{5}$ abstracto.

**172**. Para leer los quebrados se da al numerador el nombre absoluto que le corresponde por la numeracion; y al denominador, sino llega á diez, los nombres partitivos, *medios*, *tercios*, *cuartos*, *quintos*, *sextos*, *séptimos*, *octavos* y *novenos;* y si llega ó pasa de diez, se le da el nombre absoluto correspondiente, añadiéndole la palabra *avos*. Todo segun dijimos (128).

Los ejemplos anteriores ya dijimos que se dictaban, y por lo tanto, pudimos añadir que se leian así: media peseta, dos tercios de año, tres cuartos de vara de cinta y dos quintos.

**173**. Cuando el denominador es 10, en lugar de diez avos se dice *décimos;* cuando es 100, *centésimos*, etc.; pero siendo estos quebrados de circunstancias especiales, por tener la unidad con ceros por denominador, y no habiendo llegado á ellos, hemos debido incluirlos en los que se leen sus denominadores con los nombres partitivos aunque así no sea.

**174**. *Número mixto ó fraccionario se llama* (26) *el que se compone de un entero y un quebrado.*

Cincuenta pesetas y media, que se escribe $50 \frac{1}{2}$ pesetas, es un número mixto.

**175**. El quebrado se llama *propio* cuando su numerador es menor que su denominador, y por lo tanto representa un valor menor que la unidad á que se refiere; y se llama *impropio* cuando su numerador es igual ó mayor que su denominador, y por lo tanto el quebrado vale tanto ó más que una unidad entera.

Así, $\frac{3}{5}$ es un quebrado propio, porque dividida la unidad en 5 partes, sólo de 3 consta el número que representa el quebrado; pero $\frac{5}{5}$ y $\frac{8}{5}$ son quebrados impropios, porque constan de tantas ó más partes que las que componen una unidad dividida en quintos.

*Quebrado de quebrado* es, dijimos (27), aquel *en que el denominador dice las partes* en que está divida, no la unidad á que se refiere, sino una parte de ella.

La tercera parte de media manzana, que se escribe $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de manzana, es un quebrado de quebrado, pudiendo ser mucho más complicado, como $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ de una cosa cualquiera.

**177**. El orígen de todo quebrado es en realidad, y puede así considerarse, ó la indivisibilidad exacta de los números por algunos, que produce un cociente entero ó aproximado, y un residuo que lo completa (126), ó la inconmensurabilidad ó innumerabilidad exacta de algunas cantidades indeterminadas, que al convertirlas en determinadas ó números (21), de una unidad dada, producen un entero y una parte de la unidad de medida; y tambien ésta solamente sin entero.

Δ **178**. En efecto, en el primer caso, no sólo el residuo se expresa bajo la misma forma que se ha asignado al quebrado, sino que es realmente un quebrado y quebrado propio, porque su verdadero valor, para completar el cociente, es de ménos de una unidad del mismo, sea de la especie que fuere. Y en el segundo caso, el pico de la medicion ó cuenta es menor que la unidad de medida, y sólo puede expresarse exactamente por una ó varias partes iguales de tal unidad, siendo dada, ó en la que se quiere el resultado; pues en otra clase de unidades inferiores, ya sabremos que la expresion sería un número entero.

## ARTÍCULO II.

### PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS QUEBRADOS.

**179**. Teorema fundamental. *Todo quebrado es equivalente á una division de su numerador por su denominador, y por lo tanto al cociente que corresponda á tal division más ó ménos practicable en una ó en otra forma; y toda division equivale á un quebrado cuyo numerador será el dividendo y cuyo denominador será el divisor.*

*Demostracion.* Todo quebrado es equivalente por su origen (177), ó á un residuo de una division inexacta, ó á una parte de una unidad de medida ó cuenta que no está contenida un número exacto de veces en una cantidad continua ó discreta que se ha medido ó contado. En el primer caso, como todo residuo es una parte del dividendo, que no se ha podido dividir, su verdadero valor será el cociente que le corresponda al conseguir su division en una ó en otra forma; por lo que, si tenemos, por ejemplo, un residuo de 3 manzanas, que no hemos podido dividir entre 4 niños, y averiguamos de algun modo el cociente correspondiente á esa division, ese será el valor del residuo. Mas para dividir 3 manzanas entre 4 niños, lo mismo será dividir cada una de las 3 manzanas en 4 partes, y dar á cada uno una cuarta parte de la primera, otra cuarta parte de la segunda, y otra de la tercera, que dar á cada uno tres cuartas partes de cualquiera de ellas, pues se deben suponer iguales; luego el cociente de dividir 3 manzanas por 4 niños es $\frac{3}{4}$ de manzana, y por lo tanto $\frac{3}{4}$ equivale á $3 : 4$, y á su cociente, que es el mismo $\frac{3}{4}$.

En el segundo caso, como al contar un monton de monedas con la unidad *peseta*, y lo mismo al medir el largo de un jardin con la unidad *vara*, la parte que pueda hallarse de pico no puede expresarse en pesetas ó varas, sino considerando la peseta ó vara dividida en partes, y viendo cuántas de dichas partes caben exactamente en el resto del monton de pesetas que se cuenta, ó del jardin que se mide; si se halla, por ejemplo, que es $\frac{3}{4}$ de peseta ó de vara, como por lo dicho sobre el caso primero $\frac{3}{4} = 3 : 4$, y el valor del quebrado no puede evidentemente variar sea cual sea su orígen, queda demostrada la primera parte del teorema.

En cuanto á la segunda, tambien lo estaria con lo dicho, si fuera verdadera recíproca de la primera, pero no lo es rigorosamente, porque aun siendo todo quebrado una division indicada del numerador por el denominador, podian no ser todas las divisiones iguales ó equivalentes á quebrados, aunque algunas lo fueran. Diremos, por lo tanto, que si tenemos que dividir 26 por 3, lo que en realidad buscamos como cociente es la tercera parte de 26 (165); pero la tercera parte de 1 es $\frac{1}{3}$; luego la tercera parte de 26 será $\frac{26}{3}$, y lo mismo se demostraria que $52 : 5 = \frac{52}{5}$ y $5 : 8 = \frac{5}{8}$; luego el teorema es general, y queda demostrado.

Δ *Observacion.* No solamente es evidente que un quebrado vale lo mismo, sea cual fuere su orígen, sino que en realidad puede decirse que el orígen de todo quebrado es un residuo; pues áun en el caso del pico de medicion ó cuenta, el tal pico es un verdadero residuo. En efecto, si medimos el largo de un jardin con la unidad vara y hallamos que es de 70 varas, no hacemos otra cosa que dividir el largo ó magnitud indeterminada por 1 vara, cuyo cociente es 70, igual al dividendo, porque el divisor es la unidad.

Mas si encontramos que el largo es de un poco más de 70 varas, ese poco más ó pico será un verdadero residuo, que para valorar habrá que dividir. Si le llamamos $x$, su expresion para completar el cociente entero de 70 varas, será $\frac{x}{1 \text{ var.}}$. Considerando ahora que $x$ es una cantidad de magnitud indeterminada, y que para convertirla en número tenemos que dividirla (como el total largo del jardin), por una unidad que quepa dentro de ella un número exacto de veces, tendremos que acaso será el conveniente divisor un cuarto de vara; y dividiendo $x$ por esa nueva unidad, si nos da 3 de cociente, lo tendremos que expresar por 3 *cuartos de vara;* como el anterior cociente lo expresamos por 70 varas, y conociendo ya el valor de $x$, lo sustituiremos en la expresion $\frac{x}{1 \text{ var.}}$ y será $\frac{\frac{3}{4} \text{ de vara}}{1 \text{ vara}}$, lo que evidentemente es igual á $\frac{3}{4}$ de vara; luego todo quebrado puede considerarse sin violencia equivalente á un residuo.

**180.** Corolario. *Todo entero se puede poner en forma de quebrado con la unidad por denominador*, porque segun el teorema anterior $25 : 1 = \frac{25}{1}$, y como $25 : 1 = 25$, será $25 = \frac{25}{1}$. Y lo mismo $87 = \frac{87}{1}$, etc.

Lema. *Todo quebrado cuyo denominador es igual al numerador, equivale á la unidad.*

Porque no sólo por el teorema anterior $\frac{5}{5} = 5 : 5 = 1$, sino que podemos decir que si la unidad se considera dividida en 5 partes y se toman todas 5, se tendrá toda la unidad.

**181.** Corolario. *Para poner la unidad en forma de quebrado, con un denominador dado, se le pondrá á este un numerador igual á él. Así, si se quiere poner en forma de quebrado con denominador* 8, *será* $\frac{8}{8}$, etc.

**182.** Lema. *Todo quebrado impropio cuyo denominador divide exactamente al numerador, equivale á un entero.*

Porque si, por ejemplo, en el quebrado $\frac{24}{8}$, impropio, 24 es divisible exactamente por 8, dará un cociente sin residuo, y por lo tanto un número entero será el valor del quebrado.

**183.** Corolario. *Para poner un entero en forma de quebrado de un denominador dado, se multiplica el entero por tal denominador, y el producto será el numerador del quebrado deseado.* Pues si 7 lo queremos en forma de quebrado con denominador 5, será $\frac{5 \times 7}{5} = \frac{35}{5}$, pues $\frac{5 \times 7}{5} = (5 \times 7) : 5 = 7$.

**184.** Lema. *Todo quebrado impropio cuyo denominador no divide exactamente al numerador, equivale á un número mixto.*

Porque si el numerador no es divisible exactamente por el denominador, dividiéndolo dará un cociente entero y un residuo que originará un quebrado, que con el entero formará un número mixto.

Pues en efecto $\frac{51}{7} = 51 : 7 = 7\frac{3}{7}$.

**185.** Corolario. *Para reducir un número mixto á quebrado, que indispensablemente será impropio, se multiplica el entero por el denominador del quebrado; al producto se le suma el numerador, y á la suma se le pone por denominador el mismo del quebrado.*

Así $9\frac{3}{5} = \frac{9 \times 5 + 3}{5} = \frac{48}{5}$, pues $\frac{48}{5} = 48 : 5 = 9\frac{3}{5}$.

*Inversamente para reducir un quebrado impropio á mixto, ó sea deducir los enteros que contiene, se divide el numerador por el denominador.*

**186.** Lema. *Dos quebrados que tienen igual denominador es mayor el que tiene mayor numerador; y dos quebrados que tienen igual numerador es mayor el que tiene menor denominador.*

Porque no expresando los denominadores otra cosa que el número de partes en que se considera dividida la unidad, y los numeradores las partes ó divisiones de que consta el quebrado, es evidente que si de partes iguales se toma mayor número de ellas, más cantidad se habrá tomado; y si se toma igual número, pero de partes desiguales, el número de las mayores (que serán las de un denominador menor), será el más grande. Esto es, que $\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{3}{5}$ y menor que $\frac{4}{3}$.

**187**. Lema. *Todo quebrado aumenta aumentando su numerador ó disminuyendo su denominador, y disminuye disminuyendo su numerador ó aumentando su denominador; y si el aumento ó disminucion es por via de multiplicacion ó division, el quebrado quedará multiplicado por igual número por el que se multiplique su numerador ó se divida su denominador, y quedará dividido por igual número por el que se divida su numerador ó se multiplique su denominador*.

Porque siendo el quebrado equivalente á una division del numerador por el denominador (173), como aumentando el dividendo ó disminuyendo el divisor aumenta el cociente, y disminuye éste disminuyendo el dividendo ó aumentando el divisor, etc. (133), lo mismo debe sucederle al quebrado.

**188**. Corolario. *Para duplicar, triplicar, etc., el valor de un quebrado, se multiplica el numerador ó divide el denominador por 2, por 3, etc., y para sacar la mitad, tercera parte, etc., de un quebrado, se divide su numerador ó se multiplica su denominador por 2, por 3, etc.*

**189**. Lema. *Un quebrado no se altera en valor multiplicando ó dividiendo sus dos términos por un mismo número.*

Porque al duplicar, por ejemplo, el numerador, se duplica el valor del quebrado, y al duplicar el denominador se saca la mitad del mismo y quedará como estaba; y análogamente triplicando, cuadruplicando, etc., é inversamente dividiendo los dos términos por un mismo número.

**190**. Lema. *Un quebrado cuyo numerador aumenta ó disminuye por via de suma ó resta en tantas unidades como tiene su denominador, aumenta ó disminuye en 1; y análogamente en 2, si el aumento ó disminucion es de duplo número de unidades que tiene el denominador.*

Porque si el dividendo, por ejemplo, 12, contiene el divisor 3 exactamente 4 veces, aumentado el 12 en 4, lo contendrá una vez más, y dos veces más si aumenta en 8, y una vez ménos si disminuye en 4.

*Observacion*. Esta última propiedad de los quebrados es la única que tiene aplicacion, entre las que se refieren á sus alteraciones por aumento ó disminucion, por via de suma ó resta á sus términos; y la única susceptible de ser expuesta como observando una ley ó regla. Diremos, sin embargo, que sumando una misma cantidad á los dos términos de un quebrado, crece el propio y mengua el impropio, y lo contrario se verifica restando igual cantidad á los dos términos.

## ARTÍCULO III.

### REDUCCION DE QUEBRADOS Á UN COMUN DENOMINADOR.

**191**. *Reducir quebrados á un comun denominador, es convertirlos en otros equivalentes, pero de igual denominador.*

Esta circunstancia es indispensable para ejecutar con ellos muchas operaciones, porque es la que los hace verdaderamente homogéneos, pues el denominador sólo expresa la especie ó magnitud de las partes de la unidad á que se refiere el quebrado, y esta homogeneidad partitiva, digámoslo así, á todos los quebrados se le puede dar, reduciéndolos por subdivision de sus denominadores á un comun denominador.

Un monton de medias manzanas, y otro de terceras partes de la misma fruta, son ciertamente cantidades homogéneas, porque ambas son manzanas; pero evidentemente no se pueden contar exactamente si se mezclan, como se contarian si todos los pedazos fueran mitades ó tercios de manzana. En efecto, 7 medias manzanas y 8 medias compondrán 15 medias, y 7 terceras partes y 8 terceras partes, compondrán 15 terceras partes; pero 7 medias y 8 terceras partes, no compondrán ni 15 medias, ni 15 terceras partes, sino 15 pedazos desiguales, cuyo valor en junto no hay número que lo pueda expresar, como no se puede el de dos cantidades verdaderamente heterogéneas, por ejemplo, soldados y carneros, ó varas y libras. Pero la especial heterogeneidad dicha de los quebrados, se puede hacer desaparecer siempre por la regla que vamos á ver, cuya esencia podemos apreciar desde ahora materialmente, con sólo considerar que todos esos pedazos de manzana se pueden subdividir, las mitades en tres partes cada una y serán las 7 medias, 21 sextas partes; y las 8 terceras partes en dos cada una, y compondrán 16 sextas partes, y se tendrá que 7 medias y 8 tercias equivaldrán á 21 sextas y 10 sextas. Pues análogamente $\frac{7}{2}$ y $\frac{8}{3} = \frac{21}{6}$ y $\frac{16}{6}$, que son quebrados reducidos á un comun denominador.

**192.** Regla general. *Para reducir dos ó más quebrados á un comun denominador, se multiplica el numerador de cada uno por el denominador del otro si son dos, ó por el producto de los denominadores de los otros si son varios, y se tendrán los numeradores de los nuevos quebrados equivalentes, cuyo denominador comun se hallará multiplicando los denominadores entre sí.*

*Ejemplos.* 1.º $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5}$ y $\frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{15}{20}$ y $\frac{8}{20}$.

2.º $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{7} = \frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 5 \times 7}$ y $\frac{2 \times 4 \times 7}{5 \times 4 \times 7}$ y $\frac{6 \times 5 \times 4}{7 \times 5 \times 4} = \frac{105}{140}$ y $\frac{56}{140}$ y $\frac{120}{140}$.

*Demostracion.* Los quebrados resultantes en el primer ejemplo provienen de multiplicar los primitivos ó propuestos, el primero $\frac{3}{4}$ sus dos términos por 5, y el segundo $\frac{2}{5}$ sus dos términos por 4; luego los nuevos quebrados serán equivalentes á ellos (188). Y en el segundo ejemplo el primer quebrado resultante proviene de multiplicar los dos términos del primero propuesto por $5 \times 7$, y el segundo resultante de multiplicar los dos términos del segundo propuesto por $4 \times 7$, y el tercero resultante de multiplicar los dos términos del tercero dado por $4 \times 5$; luego los tres nuevos quebrados serán de igual valor que los propuestos. Y como lo mismo se demostraria en cualquier ejemplo en el que se obrase segun la regla, ésta es general y queda demostrada.

**193.** Regla complemental. *Se puede abreviar la operacion de reducir los quebrados á un comun denominador y obtener nuevos quebrados equivalentes con términos más pequeños que los que produce la aplicacion de la regla general, siempre que á primera vista ó fácilmente se vea que alguno de los denominadores es múltiplo de todos los otros, ó que lo es duplicándolo, triplicándolo, etc. Pues en el primer caso, el denominador que sea múltiplo de los otros podrá ser el comun. Para ello no habrá más que multiplicar los dos términos de los demas por el número que se vea conviene para que su producto por el denominador dé el que se quiere sea el comun; y en el segundo caso, el duplo, triplo, etc., del denominador, que duplado, triplicado, etc., sea múltiplo de los demas, será el denominador comun, para lo que no habrá más que* *duplicar, triplicar, etc., su numerador, y hacer con los dos términos de los demas quebrados una cosa análoga á la del caso primero.*

*Ejemplos.* 1.° $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{15} = \frac{3\times3}{5\times3}, \frac{2\times5}{3\times5}, \frac{4}{15} = \frac{9}{15}, \frac{10}{15}, \frac{4}{15}.$

2.° $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8} = \frac{1\times12}{2\times12}, \frac{5\times4}{6\times4}, \frac{7\times3}{8\times3} = \frac{12}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}.$

*Explicacion.* En el primer ejemplo, como á primera vista se observa que el denominador 15 es múltiplo de 5 y de 3, segun la regla, 15 podrá ser el denominador comun, por lo que hemos multiplicado los dos términos del primero por 3 y los del segundo por 5.

En el segundo ejemplo, como fácilmente tambien se ve que el triplo del denominador 8 es múltiplo de los demas, 24 que es el tal múltiplo, será el denominador comun; multiplicamos, pues, por 12 los dos términos del primero, por 4 los del segundo, y por 3 ó triplicamos los del tercero.

*Demostracion.* Como cuanto se practica, segun la regla complemental, no es más que multiplicar los dos términos de cada quebrado por un mismo número, y esto no altera su valor, los nuevos quebrados serán siempre equivalentes á los primitivos, y queda la regla demostrada.

En la Aritmética superior aprenderemos otro método más científico y conveniente para quebrados de términos muy grandes; pero en los que la regla general seria de muy pesada aplicacion y los resultados muy embarazosos, pues la regla complemental anterior no tiene fácil aplicacion más que para quebrados de términos pequeños, pues en los grandes no es posible ver si un denominador es múltiplo de los otros.

El método á que nos referimos, se funda en el mismo principio que las reglas anteriores, de que el valor de un quebrado no varía, aunque sus dos términos se multipliquen por un mismo número, pues se reduce á determinar el menor dividendo comun á todos los denominadores, ó sea el mínimo comun múltiplo, que es lo que viene á hacerse por la regla complemental anterior.

**194.** *Escolio.* En dos quebrados iguales los productos de sus términos multiplicados en cruz ó sea el numerador del uno por el denominador del otro, son iguales; porque si, por ejemplo, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ reducidos á un comun denominador, serán $\frac{5\times10}{5\times10} = \frac{6\times5}{5\times10}$ quebrados que, por ser iguales y tener sus denominadores iguales, sus numeradores tienen evidentemente que serlo.

## ARTÍCULO IV.

### SIMPLIFICACION DE QUEBRADOS.

**195.** SIMPLIFICAR UN QUEBRADO *es convertirlo en otro equivalente, pero de términos más pequeños.*

En la Aritmética superior aprenderemos á simplificar los quebrados por un método más breve y científico que el que ahora vamos á exponer, del que tambien omitiremos los teoremas referentes al carácter de divisibilidad de los números, por ser más propios de la Aritmética superior.

**196.** Regla. *Divídanse los dos términos del quebrado que se trata de simplificar, primeramente por* 2 *todas las veces que se pueda; y se conocerá que se puede, si terminan en* 0, *ó cualquiera cifra par* 2, 4, 6, *etc. Despues se dividirán ambos términos por* 3 *todas las veces que se pueda; y se conocerá que se puede, si sumadas como si fueran unidades simples todas sus cifras componen* 3, *ó cualquiera de sus múltiplos* 6, 9, 12, 15, *etc. Y por último, divídanse sus dos términos por* 5 *todas las veces que se pueda, que se conocerá que se puede si terminan en* 0 *ó* 5.

Pudiéndose, sin embargo, observar cualquier otro órden en las divisiones, y hacerlas, por cualquier otro divisor que no sea 2, 3 ó 5, si se conoce que los dos términos son divisibles por él. Si el quebrado es impropio, debe convertirse en mixto, si el objeto del problema lo permite, que es lo que se llama *sacarle los enteros que contiene*, y que es una verdadera simplificacion (185). Finalmente, se puede abreviar la simplificacion, cuando fácilmente se ve que los dos términos pueden descomponerse en factores, alguno de los que sea comun ó ambos, pues bastará suprimirlos.

*Ejemplos.* 1.° $\frac{72}{252}=\frac{36}{126}=\frac{12}{42}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$,

ó tambien $\frac{72}{252}=\frac{24}{84}=\frac{8}{28}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$.

2.° $\frac{9450}{10800}=\frac{4725}{5400}=\frac{945}{1080}=\frac{189}{216}=\frac{63}{72}=\frac{21}{24}$,

ó $\frac{9450}{10800}=\frac{1890}{2160}=\frac{378}{432}=\frac{189}{216}=\frac{63}{72}=\frac{21}{24}$.

*Explicacion.* En el primer ejemplo dividimos los dos términos del quebrado, primeramente por 2, despues por 3 dos veces, y luego por 2, ó primeramente dos veces por 3, y luego dos veces por 2.

Y en el segundo ejemplo dividimos el quebrado por 2, despues por 5 dos veces, y luego dos veces por 3, ó primero dos veces por 5, despues por 3, luego por 2, y últimamente otra vez por 3.

*Demostracion.* Todo cuanto se prescribe por la regla no es otra cosa que dividir los dos términos de un quebrado por un mismo número, lo que no altera su valor (189), pues aun en el caso de la descomposicion de los términos en factores, y suprimir uno comun, equivale á dividirlos por el factor suprimido; luego la regla es general, y queda demostrada.

**197.** *Observacion.* Los ejemplos evidencian que el resultado es el mismo, sea cual sea el órden en que se elijan los divisores, y que tambien despues de haber dividido por 5 puede á veces dividirse por 3 y por 2, y finalmente, que hay números divisibles por 3 y por 5, y es más breve el preferir siempre el mayor divisor.

# CAPÍTULO VII.

## OPERACIONES PRINCIPALES DE LOS QUEBRADOS Y MIXTOS.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**198**. Las operaciones principales que pueden hacerse con los quebrados, ademas de las auxiliares que hemos enseñado en el capítulo anterior, de simplificarlos y reducirlos á un comun denominador, y de otra que despues sabremos que es la de valuarlos, son cuatro: adicion, sustraccion, multiplicacion y division, cuyas definiciones son las mismas dadas para los enteros como principales, pues la segunda de la multiplicacion (86) y la tercera de la division (121) no serian rigorosamente exactas aplicadas á los quebrados.

En efecto, multiplicar un quebrado por otro, no es rigorosamente tomar uno tantas veces como unidades tiene otro; pues que si el multiplicador es quebrado propio, no valdrá ni una unidad, y aunque valiendo media unidad, por ejemplo, sería tomarlo media vez ó su mitad, tal definicion no sería completamente exacta.

Tampoco dividir un quebrado por otro es buscar las veces que el dividendo contiene al divisor; pues aquel puede ser menor que éste, y aunque esa definicion, con poca variacion, sería aceptable, no puede tampoco convenir á los quebrados exactamente como conviene á los enteros.

Fundándonos en lo expuesto, ya dijimos aceptamos (62) las llamadas cuatro reglas, como operaciones fundamentales de la Aritmética, aunque ya hemos visto que la multiplicacion es un caso particular de la suma (87), la elevacion á potencias de la multiplicacion (116), la division de la sustraccion (122), y la extraccion de raices de la division (168).

### ARTÍCULO II.

#### ADICION DE QUEBRADOS Y MIXTOS.

**199**. El problema general de la adicion de los quebrados y mixtos, se divide en tres tambien generales, cada uno de los cuales tiene su correspondiente regla: 1.° Sumar dos ó más quebrados. 2.° Sumar un entero con un quebrado. Y 3.° Sumar dos ó más números mixtos, aunque alguno de los sumandos sea entero ó simple quebrado.

**200**. Regla 1.ª *Para sumar dos ó más quebrados, se reducen primeramente á un comun denominador si no lo tienen; despues se suman los nume-*

*radores, y á esta suma se le pone por denominador el comun, simplificándose si se puede el quebrado resultante.*

*Ejemplos.* $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{2\times4\times3}{5\times4\times3}+\frac{3\times5\times3}{4\times5\times3}+\frac{2\times4\times5}{3\times4\times5}=$

$$\frac{24}{60}+\frac{45}{60}+\frac{40}{60}=\frac{24+45+40}{60}=\frac{109}{60}=1\,\frac{49}{60}.$$

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, se han reducido á un comun denominador los quebrados propuestos para sumarlos; se han sumado despues los numeradores, y á la suma se ha puesto por denominador el comun; y como el quebrado resultante era impropio, se redujo á mixto, única simplificacion que admitia.

*Demostracion.* El reducir los quebrados á un comun denominador, es para que sean verdaderamente homogéneos (191), y puedan sumarse. El sumar despues los numeradores es porque ellos representan el valor de los quebrados (171). El poner á la suma el denominador comun, es porque el denominador sólo dice á qué partes de la unidad se refiere el quebrado (171). Y finalmente, el simplificar el quebrado resultante es porque los resultados deben expresarse siempre de la manera más sencilla posible.

**201.** Regla 2.ª *Para sumar un entero con un quebrado, ó un quebrado con un entero* (operacion que suele llamarse reducir un entero á la especie del quebrado que le acompaña), *se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y al producto se le suma el numerador, poniendo á la suma por denominador el del quebrado.*

*Ejemplo.* $8+\frac{3}{5}=\frac{(8\times5)+3}{5}=\frac{40+3}{5}=\frac{43}{5}.$

*Observacion.* No se da al quebrado la simplificacion única que admite, porque volveria á dar los mismos dos sumandos, pero sí cualquiera otra simplificacion que admita.

*Demostracion.* Aunque esta regla se funda en la propiedad del quebrado impropio, cuyo denominador no divide exactamente al numerador, que equivale á un mixto (175), diremos, sin embargo, que si al entero se le pone por denominador la unidad y se suman los dos quebrados sumandos, tendremos en el ejemplo anterior

$$\frac{8}{1}+\frac{3}{6}=\frac{8\times6}{1\times6}+\frac{3\times1}{1\times6}=\frac{8\times6+3}{6},$$

cuyo último quebrado dice lo que prescribe la regla.

**202.** Regla 3.ª *Para sumar dos ó más mixtos, aunque algun sumando no lo sea, se suman todos los quebrados por la regla* 1.ª, *y los enteros por la correspondiente, agregando á la suma de estos los que pudiera contener la suma de los quebrados.*

*Ejemplo.* $\begin{array}{r} 42\,\frac{3}{5} \\ +\,745 \\ +\quad 9\,\frac{1}{2} \\ +\quad \frac{8}{9} \\ \hline =797\,\frac{89}{90}\end{array}$ $\quad\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{8}{9}=\frac{54}{90}+\frac{45}{90}+\frac{80}{90}=\frac{179}{90}=1\,\frac{89}{90}.$

*Demostracion.* Sumados los quebrados de los sumandos por la regla 1.ª demostrada, y los enteros por la que les es propia, y añadiendo á la suma de estos los enteros de aquella, se reunen evidentemente todas las partes de los sumandos, y por lo tanto deben quedar reunidos todos ellos.

**203**. La adicion de los quebrados concretos se ejecuta como la de los abstractos, pues sólo se atiende á su valor numérico para efectuarla; pero los quebrados deben ser homogéneos si la suma no ha de ser de especie indeterminada ó considerada en abstracto.

## ARTÍCULO III.

### SUSTRACCION DE LOS QUEBRADOS Y MIXTOS.

**204**. El problema general de la sustraccion de los quebrados se divide en cuatro: 1.° Restar un quebrado de otro. 2.° Restar un mixto de otro. 3.° Restar un quebrado de un mixto. Y 4.° Restar un quebrado ó un mixto de un entero.

**205**. Regla 1.ª *Para restar un quebrado de otro, se reducen ambos á un comun denominador si no le tienen igual; se restan en seguida los numeradores, y á la diferencia se le pone por denominador el comun.*

*Ejemplo.* $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{20}{24}-\frac{18}{24}=\frac{20-18}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$.

*Demostracion.* Se reducen á un comun denominador minuendo y sustraendo, para que sean verdaderamente homogéneos y puedan restarse (82). Se restan los numeradores, porque en ellos está representado el valor de los quebrados, y se le pone á la resta por denominador el comun, porque ese dice sólo á qué clase de partes de la unidad se refieren los quebrados.

**206**. Regla 2.ª *Para restar un número mixto de otro mixto, se resta el quebrado del sustraendo del quebrado del minuendo, y se restan tambien los enteros; y si el quebrado del minuendo, despues que tenga igual denominador que el del sustraendo, se ve que es menor que él, para que pueda hacerse la resta se le agrega una unidad en forma de quebrado, y otra al entero del sustraendo.*

*Ejemplo.*

$$\begin{array}{r} 37\frac{3}{4} \\ -\overset{1}{1}2\frac{6}{7} \\ \hline =24\frac{25}{28} \end{array} \qquad \frac{3}{4}-\frac{6}{7}=\frac{21}{28}-\frac{24}{28}$$

$$\left(\frac{21}{28}+\frac{28}{28}\right)-\frac{24}{28}=\frac{49}{28}-\frac{24}{28}=\frac{25}{28}$$

prueba

$$\begin{array}{r} 12\frac{6}{7} \\ +24\frac{25}{28} \\ \hline =37\frac{3}{4} \end{array} \qquad \frac{6}{7}+\frac{25}{28}=\frac{24}{28}+\frac{25}{28}=\frac{49}{28}=1\frac{21}{28}=1\frac{3}{4}.$$

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, se iban á restar los quebrados reducidos á un comun denominador; pero como $\frac{21}{28}<\frac{24}{28}$, se le unió al primero 1 en forma de quebrado $\frac{28}{28}$, y siendo posible ya la resta, se obtuvo $\frac{25}{28}$ restándose despues los enteros; pero con una unidad más el sustraendo, por la que se añadió al quebrado minuendo. En la prueba se obró con sujecion á la regla de la suma, y dando el resultado ó suma un quebrado $\frac{21}{28}$, cuyos dos términos evidentemente eran divisibles por 7, se obtuvo exactamente el minuendo.

*Demostracion.* Efectuada la resta de los quebrados por la regla 1.ª, ya demostrada, y la de los enteros por la correspondiente, evidentemente que se halla la diferencia de todas las partes del sustraendo á las correspondientes del minuendo, y por lo tanto la diferencia de ambos todos.

**207.** Regla 3.ª *Para restar un quebrado de un mixto, se resta el quebrado sustraendo de el del minuendo por la regla 1.ª, añadiéndole á aquel una unidad en forma de quebrado si fuera menor, y poniendo por entero de la resta el del minuendo con una unidad ménos si se le añadió al quebrado que le acompañe.*

*Ejemplo.* $37\frac{2}{5}$ $\quad \frac{2}{5}-\frac{5}{6}=\frac{12}{30}-\frac{25}{30}$

$-\ \frac{5}{6}$ $\quad \left(\frac{12}{30}+\frac{30}{30}\right)-\frac{25}{30}=\frac{42}{30}-\frac{25}{30}=\frac{17}{30}$

$=36\frac{17}{30}$

prueba $+\ \frac{5}{6}$ $\quad \frac{17}{30}+\frac{5}{6}=\frac{17}{30}+\frac{25}{30}=\frac{42}{30}=1\frac{12}{30}=1\frac{2}{5}$

$37\frac{2}{5}$

*Demostracion.* Restados los quebrados, segun la regla 1.ª demostrada, y aumentado el del minuendo con una unidad cuando es menor que el del sustraendo, es evidente que el entero que deberá acompañar á la resta de los quebrados, será en el primer caso el mismo del minuendo, pues que no hay ningun entero que restarle en el sustraendo; y que tendrá una unidad ménos cuando al quebrado que le acompañe se le añada, única manera de que la resta no sufra alteracion por tal aumento.

**208.** Se puede abreviar la operacion en el caso de que el quebrado del minuendo sea menor que el del sustraendo, añadiéndole simplemente á su numerador tantas unidades como tiene su denominador, pues equivale á la suma de una unidad en forma de quebrado.

En efecto; lo mismo es $\frac{3}{5}+\frac{5}{5}$ que $\frac{3+5}{5}=\frac{8}{5}$.

**209.** Regla 4.ª *Para restar un quebrado ó un mixto de un entero, se considera éste con una unidad ménos, y á su derecha tal unidad en forma de quebrado con igual denominador que el del sustraendo; verificando despues la operacion por la regla 2.ª ó por la 3.ª, segun que el sustraendo sea mixto ó quebrado.*

*Ejemplo* 1.° $\quad 37-\frac{2}{5}=36\frac{5}{5}$

$-\ \frac{2}{5}$

$=36\frac{3}{5}$

prueba $\quad 36\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=36\frac{5}{5}=37$

*Ejemplo 2.°* $58 - 15\frac{3}{4} = 57\frac{4}{4}$

$$\begin{array}{r} 57\frac{4}{4} \\ -15\frac{3}{4} \\ \hline =42\frac{1}{4} \end{array}$$

prueba $15\frac{3}{4} + 42\frac{1}{4} = 57\frac{4}{4} = 58$

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, el minuendo entero se convierte en mixto, y se resta un quebrado de un mixto en el primer ejemplo, y un mixto de otro mixto en el segundo.

*Demostracion.* El considerar el entero del minuendo con una unidad ménos y ponérsela á su derecha en forma de quebrado, evidentemente no altera su valor; y como despues se obra con sujecion á la 2.ª ó 3.ª reglas ya demostradas, ésta lo queda igualmente.

**210.** La sustraccion de los quebrados ó mixtos concretos se hace como la de los abstractos, pues se atiende al hacerla á su valor numérico; pero ambos datos deben ser homogéneos, pues lo mismo que los enteros, no se pueden restar partes de unidad de una naturaleza de partes de unidad de otra.

## ARTÍCULO IV.

### MULTIPLICACION DE QUEBRADOS Y MIXTOS.

**211.** El problema general de la multiplicacion de los quebrados y mixtos, se divide en cuatro: 1.° Multiplicar un entero por un quebrado. 2.° Multiplicar dos ó más quebrados entre sí. 3.° Multiplicar dos ó varios números mixtos. Y 4.° Multiplicar un quebrado ó mixto por un entero, ó al contrario, un entero por un quebrado ó un mixto.

**212.** Regla 1.ª *Para multiplicar un entero por un quebrado, ó un quebrado por un entero, se multiplica el entero por el numerador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el del mismo quebrado, simplificándose el resultado si se puede. Y tambien puede hacerse la multiplicacion dividiendo el denominador del quebrado por el entero, y al producto poniéndole por numerador el del quebrado; pero es menester, para obrar así, que el denominador sea divisible exactamente por el entero.*

*Ejemplo.* $\frac{5}{6} \times 3 = \frac{5 \times 3}{6} = \frac{15}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}$,

ó bien $\frac{5}{6} \times 3 = \frac{5}{6:3} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

*Demostracion.* Esta regla se funda en la propiedad de los quebrados (187), por la que multiplicando su numerador ó dividiendo su denominador por un número, queda el quebrado hecho tantas veces mayor como unidades tiene ese número, y por lo tanto multiplicado por él (212). Y evidentemente que si el denominador del quebrado no es divisible exactamente por el entero, la multiplicacion no deberá hacerse por el segundo método, pues el resultado sería un quebrado cuyo denominador sería un número mixto, y por lo tanto no sería todo lo sencillo que es conveniente.

En efecto; $\frac{5}{7} \times 3 = \frac{15}{7}$; pero $\frac{5}{7} \times 3 = \frac{5}{7:3} = \frac{5}{2\frac{1}{3}}$.

**213.** Regla 2.ª *Para multiplicar dos ó varios quebrados entre sí, se multiplican todos los numeradores, y el resultado será el numerador del producto total, cuyo denominador será el producto de todos los denominadores.*

*Ejemplo.* $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{3 \times 2 \times 7}{4 \times 5 \times 9} = \frac{42}{180} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$.

*Demostracion.* Fúndase esta regla en la propiedad de los quebrados (187). Porque, en efecto, si tuviéramos que multiplicar $\frac{3}{4}$ por 2, segun dicha propiedad, sería $\frac{3 \times 2}{4}$; pero como el segundo factor no es 2, sino $\frac{2}{5}$, que es 5 veces menor que 2 (129), el producto $\frac{3 \times 2}{4}$ sería 5 veces mayor de lo que debia ser para representar el de $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$; luego tendríamos que hacerlo 5 veces menor, lo que por la misma propiedad de los quebrados conseguiríamos multiplicando su denominador por 5, y daría $\frac{3 \times 2}{4 \times 5}$; y por consideracion análoga, este quebrado multiplicado por $\frac{7}{8}$ daria $\frac{3 \times 2 \times 7}{4 \times 5 \times 9}$. Y como lo mismo se demostraria sobre cualquier ejemplo, la regla es general y queda demostrada.

**214.** Regla 3.ª *Para multiplicar dos ó varios mixtos entre sí, se reducen á quebrados* (185), *y se estará en el caso de la regla 2.ª anterior*, pudiéndose, cuando sean dos los factores y los quebrados muy pequeños, multiplicar el quebrado del que se tome por multiplicador por el del multiplicando, y despues por el entero de éste; y en seguida, el entero del multiplicador por el quebrado del multiplicando, y despues por su entero y sumando todos los productos parciales.

*Ejemplo.* $3\frac{2}{5} \times 7\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} \times \frac{3 \times 4 + 3}{4} = \frac{17}{5} \times \frac{31}{4} = \frac{527}{20} = 26\frac{7}{20}$,
ó bien

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$ y $\frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}$ y $7 \times \frac{2}{5} = \frac{14}{5}$ y $7 \times 3 = 21$,
que dará

$$\frac{6}{20} + \frac{9}{4} + \frac{14}{5} + 21 = \frac{6}{20} + \frac{45}{20} + \frac{56}{20} + 21 = \frac{107}{20} + 21 = 5\frac{7}{20} + 21 = 26\frac{7}{20}.$$

*Explicacion.* Como se ve, el segundo método, áun siendo los quebrados pequeños, es mucho más complicado que el primero, y sólo se enseña para adquirir costumbre de reflexionar sobre los números.

*Demostracion.* La reduccion de los mixtos á quebrados está demostrada (185), y convertidos en quebrados se obra por la regla 2.ª tambien demostrada. En cuanto al segundo método, como lo que se hace no es otra cosa que multiplicar todas las partes del multiplicador por todas las del multiplicando, la suma de los productos parciales de todas esas partes debe ser el producto total de todo el multiplicando por todo el multiplicador.

**215.** Regla 4.ª *Para multiplicar un mixto por un quebrado, ó por un entero, ó al contrario, se reduce el mixto á quebrado, y se estará en el caso de la regla 4.ª ó de la 2.ª*. Pudiéndose tambien, cuando el quebrado del mixto sea pequeño y su entero muy grande, multiplicar el multiplicador por el quebrado del multiplicando, y despues por su entero sumando los dos productos parciales para obtener el total.

*Ejemplo* 1.º $7\frac{3}{4} \times 5 = \frac{7\times4+3}{4} \times 5 = \frac{31\times5}{4} = \frac{155}{4} = 38\frac{3}{4}$,
ó bien $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4}$ y $7 \times 5 = 35$, que da $35 + \frac{15}{4} = 38\frac{3}{4}$.

*Ejemplo* 2.º $6\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{6\times3+2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{20}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{80}{15} = 5\frac{5}{15} = 5\frac{1}{3}$,
ó bien
$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ y $6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$ que da $\frac{8}{15} + \frac{24}{5} = \frac{8}{15} + \frac{72}{15} = \frac{80}{15} = 5\frac{1}{3}$.

*Explicacion.* Como puede observarse, el método segundo no es mucho más pesado que el primero, y es preferible cuando el entero del mixto es muy grande, pues se ahorra una multiplicacion pesada.

*Demostracion.* La reduccion del mixto á quebrado está demostrada, y lo mismo los procedimientos del primer método, y la demostracion del segundo es semejante á la de la regla 3.ª

**216.** *Escolio.* Por todo lo expuesto se comprenderá mejor que la definicion de la multiplicacion (86), aplicada á los quebrados, como dijimos, no es rigorosamente exacta, y por ello nos conviene dejar sentado que cuando el multiplicador es un quebrado propio, lo que en realidad se halla en el producto es la mitad, tercera ó cuarta parte, segun que el multiplicador es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; y análogamente las $\frac{2}{5}$ partes, siendo $\frac{2}{5}$ el multiplicador, por lo que el multiplicador viene á hacer las veces de divisor (129), sin embargo que por la definicion de multiplicar, si el multiplicador es 2, se toma 2 veces el multiplicando, y si $\frac{1}{2}$ debe tomarse media vez.

## ARTÍCULO V.

### DIVISION DE QUEBRADOS Y MIXTOS.

**217.** El problema general de la division de los quebrados y de los mixtos se divide en seis: 1.º Dividir un quebrado por un entero. 2.º Dividir un mixto por un entero. 3.º Dividir un quebrado por otro. 4.º Dividir un entero por un quebrado. 5.º Dividir un entero por un mixto. Y 6.º Dividir un mixto por otro mixto.

**218.** Regla 1.ª *Para dividir un quebrado por un entero se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y al producto se le pone por numerador el mismo del quebrado. Y tambien se puede dividir el numerador del quebrado por el entero, y al cociente ponerle por denominador el del que-*

*brado dado; pero para ello es preciso que el numerador del quebrado sea divisible exactamente por el entero.*

*Ejemplo.* $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7 \times 3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

ó bien $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$

prueba $\frac{2}{7} \times 3 = \frac{6}{7}$.

*Demostracion.* Fúndase esta regla en la propiedad de los quebrados (187), por la que dividiendo el numerador ó multiplicando el denominador de un quebrado por un número, el quebrado queda hecho tantas veces menor como unidades tiene dicho número, y por lo tanto (129), dividido por el mismo. Y en cuanto á ser impracticable el segundo método cuando el numerador del quebrado no es divisible exactamente por el entero, es porque el cociente sería un número mixto para numerador del resultado, el que no se presentaría con la sencillez conveniente.

**219**. Regla 2.ª *Para dividir un mixto por un entero, se reduce el mixto á quebrado, y se está en el caso de la regla 1.ª*

*Ejemplo.* $3\frac{2}{5} : 2 = \frac{3 \times 5 + 2}{5} : 2 = \frac{17}{5} : 2 = \frac{17}{10} = 1\frac{7}{10}$

prueba $\frac{17}{10} \times 2 = \frac{34}{10} = 3\frac{4}{10} = 3\frac{2}{5}$.

*Demostracion.* Porque la reduccion del mixto á quebrado no altera el dividendo, y como despues se obra segun la regla 1.ª, ya demostrada, ésta lo está igualmente.

**220**. Regla 3.ª *Para dividir un quebrado por otro, se multiplican ambos en cruz, esto es, el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el producto será el numerador del cociente, cuyo denominador será el producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor.*

*Ejemplo.* $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3 \times 6}{4 \times 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

prueba $\frac{9}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{45}{60} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

*Demostracion.* Se funda esta regla en la propiedad de los quebrados (187). En efecto; si tuviéramos que dividir $\frac{3}{4}$ por 5, por la regla 1.ª sería $\frac{3}{4 \times 5}$; pero como 5 es 6 veces mayor que $\frac{5}{6}$, el cociente de dividir por 5 será 6 veces menor de lo que debe ser (133), y para hacerlo 6 veces mayor, se deberá multiplicar su numerador por 6, y será $\frac{3 \times 6}{4 \times 5}$, que es lo que se obtiene segun la regla.

**221**. Regla 4.ª *Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el numerador del mismo.*

*Ejemplo.* $8 : \frac{4}{5} = \frac{8 \times 5}{4} = \frac{40}{4} = 10$

prueba $10 \times \frac{4}{5} = \frac{40}{5} = 8$.

*Demostracion.* Porque poniendo al dividendo la unidad por denominador (180), será el ejemplo anterior $\frac{8}{1} : \frac{4}{5} = \frac{8 \times 5}{1 \times 4} = \frac{8 \times 5}{4} = \frac{40}{4} = 10$, segun la regla 3.ª ya demostrada.

222. *Observacion.* Los principiantes suelen confundir este problema con el de la regla 1.ª, y obran con arreglo á ella, por razon de la costumbre que han adquirido de multiplicar lo mismo un entero por un quebrado, que un quebrado por un entero. Para no equivocarse, conviene que tanto en los problemas de esta regla cuanto en los de la primera, consideren, siquiera sea mentalmente, al entero con la unidad por denominador, y obren, con sujecion á la regla 3.ª, hasta acostumbrarse á distinguir los dos casos.

**223.** Regla 5.ª *Para dividir un entero por un número mixto, se reduce éste á quebrado, y se obra segun la regla anterior.*

*Ejemplo.* $5 : 2\frac{3}{4} = 5 : \frac{2 \times 4 + 3}{4} = 5 : \frac{11}{4} = \frac{20}{11} = 1\frac{9}{11}$

prueba $\frac{20}{11} \times \frac{11}{4} = \frac{220}{44} = 5.$

*Demostracion.* La reduccion del mixto á quebrado está demostrada, y no altera el valor del divisor; y como despues se obra segun la regla anterior que se acaba de demostrar, éste lo está igualmente.

**224.** Regla 6.ª *Para dividir un número mixto por otro mixto, se reducen ambos á quebrados, y se obra segun la regla 3.ª*

*Ejemplo.* $3\frac{2}{5} : 2\frac{1}{2} = \frac{17}{5} : \frac{5}{2} = \frac{34}{25}$

prueba $\frac{34}{25} \times \frac{5}{2} = \frac{170}{50} = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}.$

*Demostracion.* Como la reduccion de los mixtos á quebrados no altera su valor, y despues se obra con sujecion á la regla 3.ª, ya demostrada, ésta lo estará igualmente.

**225.** La division de los quebrados concretos se efectúa lo mismo que la de los abstractos, y sólo para el planteo del problema es preciso tener presente cuanto se dijo en la division de los enteros concretos (160), para distinguir cual es el dividendo y cual el divisor.

226. *Observacion.* En los ejemplos de las reglas anteriores, se habrá visto claramente que las definiciones de la division de números enteros son aplicables á los quebrados, á excepcion de una (121), que no seria rigorosamente exacta, como ya se indicó (62); pues el cociente no dice siempre, al ménos con claridad, las veces que el divisor está contenido en el dividendo, ni ménos puede decirse que el cociente sea ménos que él. Sin embargo, en cuanto á lo primero, observaremos que en el ejemplo de la regla 4.ª, $8 : \frac{4}{5} = 10$; este número dice evidentemente que el $\frac{4}{5}$ está 10 veces contenido en 8, y áun en el ejemplo de la regla 1.ª $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$, este quebrado, valiendo como vale ménos de 1, dice tambien que el 3 está contido en $\frac{6}{7}$ ménos de una vez, esto es, $\frac{2}{7}$ de una vez. Y en el segundo, debemos tambien observar que el cociente debe ser mayor que el dividendo y que el divisor, porque multiplicado por el segundo, debe dar el primero, y ya vemos que el producto de dos quebrados propios es menor que cualquiera de ellos. Estas observaciones nos permitirán comprender que la divi-

sion de los quebrados viene á ser un caso de la adicion, más bien que de la sustraccion, así como vimos lo contrario en la multiplicacion.

## ARTÍCULO VI.

### QUEBRADOS DE QUEBRADOS.

**227.** Sabemos lo que son estos números menores que la unidad (25), en los que no es sino una parte de ella la que se considera dividida, de los cuales apenas se ocupan las matemáticas, porque rara vez se presentan en los cálculos; al ménos como tales quebrados de quebrados, aunque muchas veces como quebrados multiplicados por quebrados, que es á lo que equivalen, como vamos á demostrar seguidamente.

**228.** Teorema. *Todo quebrado de quebrado es equivalente al producto de todos los quebrados ordinarios que lo componen.*

Esto es, que $\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{3 \times 2 \times 4}{7 \times 3 \times 5} = \frac{2 \times 4}{7 \times 5} = \frac{8}{35}$.

*Demostracion.* Si consideramos un quebrado de quebrado todavía más sencillo y concreto para ayudar á la inteligencia, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ manzana, tendremos que deberemos dividir una manzana en 2 partes ó mitades, y tomando una de ellas subdividirla en otras dos y tomar una de las subdivisiones, que será evidentemente un cuarto de manzana, ó sea $\frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$.

Y análogamente $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ será $\frac{1}{9}$ y $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$.

Bajo otro punto de vista, como la definicion de la multiplicacion es tomar un número tantas veces como unidades tiene otro (86), cuando uno de ellos sea quebrado propio (como ya dijimos (216), áun cuando para desvirtuar la exactitud de tal definicion, pero no más que hasta cierto punto), será tomar del otro factor la mitad, tercera parte, etc., el multiplicarlo por $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{3}$, etc., y por lo tanto, $\frac{1}{2}$ de 2 será $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2} = 1$, y $\frac{2}{3}$ de 6 será $\frac{2}{3} \times 6 = \frac{2 \times 6}{3} = \frac{12}{3} = 4$, luego $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ será $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ y $\frac{3}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{6}{7}$ será igual á $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7} = \frac{48}{105}$.

**229.** *Corolario.* Luego todo quebrado de quebrado que se nos presente, podremos desde luego sustituirlo por uno ordinario, cuyo numerador se componga del producto de todos los numeradores del quebrado de quebrado, y cuyo denominador sea el producto de todos los denominadores; pudiéndose simplificar el quebrado resultante con la simple supresion de los factores comunes que pueda haber en sus términos, como los hay, por ejemplo, en el $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{5}{7} = \frac{2 \times 3 \times 1 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 7} = \frac{1}{7}$, porque la supresion del factor 2 de sus términos equivale á dividirlos por 2, y análogamente la supresion del factor 3 y la del 5 (196).

## ARTÍCULO VII.

### VALUACION DE LOS QUEBRADOS.

**230.** *Valuar un quebrado* (que indispensablemente debe ser concreto), *es determinar cuántas unidades enteras de magnitud inferior á la del quebrado contiene ó equivale éste.*

Valuar, pues, el quebrado $\frac{2}{3}$ de vara, es convertirlo en 2 pies; por lo que no es exacta la definicion que suele darse de la valuacion de un quebrado, diciendo que es convertirlo en un complejo equivalente; pues como se ve en el ejemplo anterior, 2 pies no es complejo, y sin embargo, el quebrado $\frac{2}{3}$ de vara equivale á 2 pies, y la determinacion de esa equivalencia es la valuacion del quebrado propuesto. Se funda esa definicion en que generalmente al evaluar un quebrado se obtienen unidades de diferente magnitud, ó sea un complejo, como veremos luego. La Tabla III nos servirá para comprender mejor las operaciones siguientes.

**231.** Regla. *Para valuar un quebrado, se multiplica su numerador por el número de veces que la unidad concreta, de magnitud inmediata inferior á la del quebrado, esté contenida en ella, y el producto se divide por el denominador. Si el cociente es exacto, representará el valor del quebrado en unidades enteras; y si fuese inexacto, el residuo constituirá con el divisor un nuevo quebrado, que se valuará del mismo modo que el primero; y se irán así determinando las diferentes unidades de un complejo, equivalente al quebrado propuesto, pudiendo ser el último término un quebrado invaluable, ó sea de unidad de magnitud ínfima.*

Si el quebrado que debe valuarse es propio, deberá empezarse por sacarle los enteros que contenga (184), y constituirán el primer término del complejo.

*Ejemplo.* $\frac{17}{7}$ arrob. = 17 arrob. | 7

3 = 2 arrob., 10 lib., 11 onz., 6 ad. $\frac{6}{7}$

× 25

75 lib.

05

× 16

80 onz.

10

3

16

48

6

*Explicacion.* Como el quebrado propuesto es impropio, se determinó primeramente las arrobas que contenia, y hallamos 2. En seguida el residuo 3, como numerador del quebrado $\frac{3}{7}$ complemento del cociente 2, lo valuamos, segun la regla, multiplicando 3 por 25 libras que tiene la arroba, y el producto 75 libras lo dividimos por el denominador 7, y nos dió 10 libras y un residuo 5, que lo multiplicamos por 16 onzas que tiene la libra, y nos dió 80 onzas. Las dividimos por el mismo 7, y nos dió 11 onzas y un residuo 3, que lo multiplicamos por 16 adarmes que tiene la onza, y nos dió 48. Los dividimos por 7, y nos dió 6 adarmes y un residuo $\frac{6}{7}$ de adarme invaluable porque no se usan unidades de inferior magnitud al adarme.

*Demostracion.* La regla anterior se funda en que así como un número entero concreto se reduce á unidades de magnitud inferior, multiplicándolo por el número de veces que una unidad del mismo contiene á la unidad á que se quiere reducir (112), si el número concreto dado es un quebrado, se reducirá tambien multiplicándolo análogamente; pero un quebrado se multiplica por un entero multiplicando su numerador por el entero y dividiendo el producto por su denominador (212), y eso justamente es lo que se hace con cada uno de los quebrados que van apareciendo segun la regla; luego esta es general, y queda demostrada.

Refiriéndonos al ejemplo, si los $\frac{3}{7}$ de arroba (residuo de sacar á $\frac{17}{7}$ de arroba las arrobas enteras que contiene) queremos reducirlo á libras, será 3 veces 25, ó $3 \times 25$, y como $\frac{3}{7}$ de arroba es 7 veces menor que 3 arrobas (186), dividiremos por 7 tres veces 25, y será $\frac{3 \times 25 = 10}{7}$ libras y $\frac{5}{7}$ de libra. Análogamente, $\frac{5}{7}$ de libra será igual á $\frac{5}{7} \times 16$ onzas, $\frac{15 \times 6}{7} = \frac{80}{7} = 11$ onzas y $\frac{3}{7}$ de onza. Y finalmente, $\frac{3}{7}$ de onza será igual á $\frac{3}{7} \times 16$ adarmes $= \frac{3 \times 16}{7} = 6$ adarmes $\frac{5}{7}$ que es todo lo que prescribe la regla.

**232.** Regla complemental. *Si los términos del enunciado del problema fueran tales, que el número equivalente al quebrado que se quiere valuar debe ser un incomplejo de magnitud señalada* (aunque tambien fuera quebrado posiblemente impropio, y por lo tanto equivalente á un mixto), *se multiplica el numerador del quebrado propuesto por el número de veces que una de sus unidades contiene á una de la magnitud á que se quiere reducir, dejándole el mismo denominador, y convirtiéndolo en mixto si fuera impropio.*

*Ejemplo.* $\frac{17}{7}$ arroba, se desea saber cuántas onzas contiene.

*Resolucion.*

$$\frac{17 \text{ arrob.} \times (25 \text{ lib.} \times 16 \text{ onz.})}{7} = \frac{17 \text{ arrob.} \times 400 \text{ onz.}}{7} = \frac{6800 \text{ onz.}}{7} = 971 \text{ onz. y } \frac{3}{7}.$$

*Demostracion.* Porque si la arroba tiene 25 libras y la libra 16 onzas, una arroba tendrá $25 \times 16 = 400$ onzas; y para reducir 17 arrobas á onzas, multiplicaríamos 17 por 400; luego para reducir $\frac{17}{7}$ á onzas, multiplicaremos 17 por 400 y lo dividiremos por 7, y dará las onzas y pico de onzas equivalentes á $\frac{17}{7}$ de arroba.

**233.** *Observacion.* Nos hemos referido, al tratar de complejos é incomplejos, á pesos y medidas de un sistema ya anticuado, porque se presta mejor á las operaciones que nos han ocupado, pues las del sistema moderno son susceptibles de métodos más abreviados. En las tablas auxiliares del fin de la Aritmética se hallarán todos los pesos y medidas de ambos sistemas, y como adelantamos (230) la Tabla III, nos puede servir para la valuacion de los quebrados, porque expresa las veces que cada unidad concreta que se nos puede presentar, contiene ó está contenida en otras de la misma naturaleza, aunque de diferente magnitud.

## ARTÍCULO VIII.

### QUEBRADOS CON QUEBRADOS.

**234.** Quebrados con quebrados *podemos llamar á aquellos cuyos dos términos, ó uno de ellos, sea otro quebrado*; números doblemente quebrados, digámoslo así, que presentándose á veces en los cálculos (aunque de ello se huye siempre), conviene sepamos si en algo se diferencian de los demas quebrados, pues si en nada difieren, podemos considerar como completamente generales y aplicables á todos los casos los principios y reglas expuestas en este capítulo y en el precedente.

**235.** Teorema. *Todas las propiedades asignadas á los quebrados corresponden á los quebrados con quebrados.*

*Demostracion.* Fijándonos en una propiedad cualquiera, por ejemplo, la de que multiplicando el denominador de un quebrado por un número, el quebrado quede dividido por el mismo número (187), veamos si tratándose de un quebrado con quebrado tal propiedad se verifica. Sea, pues, $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} : \frac{6}{7}$, y vamos á demostrar que $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5} \times \frac{6}{7}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} : \frac{6}{7}$.

Para ello diremos que el primer miembro de esa igualdad puede expresarse por $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4 \times 6}{5 \times 7}}$ (119) $= \frac{2}{3} : \frac{4 \times 6}{5 \times 7}$ (213) $= \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 4 \times 6}$, y el segundo miembro de aquella igualdad por (220) $\frac{2 \times 5}{3 \times 4} : \frac{6}{7} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 4 \times 6}$.

Siendo estos dos resultados evidentemente iguales, los dos miembros de que proceden lo son tambien, y la tal igualdad exacta y verdadera. Y como lo mismo se podria demostrar cualquier otra propiedad ó regla, el teorema es general y queda demostrado, y con él completamente generalizadas todas las propiedades de los quebrados y soluciones de problema fundados en ellas.

## ARTÍCULO IX.

### EJERCICIOS SOBRE LOS QUEBRADOS.

**236.** Reduccion de quebrados á un comun denominador por el primer método (192).

*Problemas.* 1.° $\frac{5}{7}, \frac{4}{9}$ 2.° $\frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$

3.° $\frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{7}{8}$ 4.° $\frac{7}{9}, \frac{4}{7}, \frac{15}{16}, \frac{18}{19}$

5.° $\frac{7}{19}, \frac{11}{21}, \frac{45}{18}, \frac{15}{30}$ 6.° $\frac{6}{7}, \frac{7}{9}, \frac{80}{96}, \frac{15}{37}$.

*Idem por el segundo método* (193).

*Problemas.* 1.° $\frac{8}{9}, \frac{4}{18}, \frac{2}{3}$ 2.° $\frac{7}{12}, \frac{5}{24}, \frac{5}{6}$

3.° $\frac{3}{6}, \frac{5}{12}, \frac{11}{48}$ 4.° $\frac{11}{13}, \frac{13}{26}, \frac{19}{52}$

5.° $\frac{4}{5}, \frac{2}{6}, \frac{7}{15}$ 6.° $\frac{3}{5}, \frac{7}{15}, \frac{8}{10}$.

*Simplificacion de quebrados: primer método* (196).

*Problemas.* 1.° $\frac{56}{84}$ 2.° $\frac{102}{408}$ 3.° $\frac{27}{93}$

4.° $\frac{102}{405}$ 5.° $\frac{45}{50}$ 6.° $\frac{95}{105}$.

*Idem por el segundo método* (197).

*Problemas.* 1.° $\frac{30}{40}$ 2.° $\frac{21}{49}$.

*Adicion de quebrados: y mixtos.*

*Problemas.* 1.° $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}$ 2.° $\frac{12}{17}+\frac{4}{9}+\frac{15}{23}$

3.° $8\frac{17}{18}+9\frac{40}{58}+5\frac{3}{8}$ 4.° $19\frac{15}{21}+17\frac{7}{8}+90\frac{33}{46}$.

*Sustraccion de quebrados y mixtos.*

*Problemas.* 1.° $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$ 2.° $\frac{9}{11}-\frac{4}{5}$ 3.° $18-\frac{2}{3}$

4.° $19\frac{8}{9}-15\frac{3}{4}$ 5.° $21\frac{5}{6}-7\frac{8}{9}$ 6.° $77\frac{3}{8}-17\frac{6}{7}$.

*Multiplicacion de quebrados y mixtos.*

*Problemas.* 1.° $\frac{3}{7}\times 4$ 2.° $\frac{8}{9}\times\frac{5}{3}$ 3.° $8\frac{4}{7}\times 9$

4.° $5\frac{3}{4}\times 7\frac{2}{7}$ 5.° $327\frac{2}{5}\times 6$ 6.° $528\times 4\frac{2}{7}$.

*Division de quebrados y mixtos.*

*Problemas.* 1.° $\frac{3}{4}:4$ 2.° $\frac{5}{6}:\frac{3}{8}$ 3.° $7:\frac{8}{9}$

4.° $4\frac{3}{5}:\frac{8}{9}$ 5.° $\frac{7}{9}:7\frac{4}{7}$ 6.° $15\frac{5}{6}:9\frac{3}{5}$.

*Problemas de quebrados concretos.*

1.° ¿Cuánto componen 2 pedazos de tela, uno de $17\frac{3}{4}$ de vara, y otro de $15\frac{2}{7}$?

2.° En lugar de 5 varas y $\frac{1}{2}$ se ha tomado 5 y $\frac{3}{7}$; ¿qué error ha habido?

3.° ¿Cuántos minutos componen 18 horas y $\frac{3}{4}$?

4.° ¿Cuánto valen $78\frac{1}{2}$ varas, á 7 pulgadas y $\frac{3}{4}$?

5.° ¿Cuántas horas componen 785 minutos $\frac{1}{2}$?

6.° ¿Á cómo sale la vara de una pieza de $75\frac{4}{5}$ que ha costado $873\frac{1}{4}$ pesetas?

7.° ¿Cuántas unidades inferiores enteras contiene el quebrado $\frac{11}{19}$?

8.° ¿Cuántas unidades enteras componen $\frac{17}{9}$ de vara?

9.° ¿Cuántas pulgadas tienen $\frac{17}{19}$ de vara?

10. ¿Cuántas libras contiene $\frac{17}{7}$ de arroba?

# CAPÍTULO VIII.

## QUEBRADOS DECIMALES.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**237.** QUEBRADOS DECIMALES *se llaman aquellos que tienen por denominador la unidad seguida de ceros, como* 10, 100, 1000, etc., llamándose así porque las partes en que se considera dividida la unidad son tales, que cada una equivale á 10 de la magnitud inferior inmediata, justamente lo mismo que sucede con las unidades de diferente órden que componen los números enteros.

Y evidentemente, si la unidad se divide en 10 partes y en 100, una de las primeras se expresará por $\frac{1}{10}$, y una de las segundas por $\frac{1}{100}$, que es 10 veces menor que $\frac{1}{10}$ (186).

•Como ya dijimos (40), el sistema de numeracion de enteros se llama decenario ó décuplo, para distinguirlo del que nos ocupa, aunque uno y otro pueden, sin impropiedad, llamarse decimales.

**238.** Las partes de la unidad dividida en 10 se llaman *décimos*, las de la unidad dividida en 100 *centésimos*, y análogamente *milésimos, diez milésimos, cien milésimos, millonésimos, diez millonésimos, etc.*, llamándose tambien unidades decimales de primer órden á los décimos, de segundo á los centésimos, etc.

**239.** *Número decimal* se llama generalmente todo el que se compone de partes decimales, aunque tenga enteros y sea, por lo tanto, un número mixto ó decimal impropio, nombre que le daremos casi siempre.

### ARTÍCULO II.

#### NUMERACION DECIMAL.

**240.** *Numeracion decimal* se llama el sistema por medio del que se pueden expresar todos los quebrados decimales imaginables, con el menor número posible de palabras ó de cifras, análogamente á la numeracion de los números enteros.

**241.** Para expresar oralmente los quebrados decimales, no se necesitan más palabras que las usadas para la numeracion de enteros y las que acabamos de ver en el artículo anterior; y la manera de servirse de unas y otras se comprenderá al tratar en seguida de escribir y leer estos números, pues siendo inverso el sentido, pero semejante, en que varian de magnitud sus unidades comparadas con los enteros, la explicacion del sistema de números enteros conviene al de los quebrados decimales.

**242.** Para escribir los quebrados decimales podria procederse como para escribir los quebrados comunes; pero la regularidad de sus denominadores ha permitido suprimirlos, ó mejor dicho, sustituirlos con una coma, llamada *signo decimal*, puesta entre la primera y segunda cifra de la derecha si el denominador es 10; entre la segunda y la tercera si el denominador es 100, etc., poniendo ceros si las cifras significativas son en menor número que se necesiten para que el signo esté donde es debido, y por lo tanto, la coma ó signo decimal equivale al 1 del denominador suprimido, y el número de cifras que hay á la derecha del tal signo dice el de ceros de dicho denominador. Debiéndose á la izquierda del signo decimal escribir los enteros que puede tener el número si es mixto, ó 0 en lugar de ellos si fuera decimal propio.

Así, $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{7}{100} = 0{,}07$; $\frac{457}{100} = 4{,}57$.

Estos sencillos ejemplos, y lo anteriormente expuesto, bastará para que comprendiéndose desde luego la semejanza que hay entre el sistema de numeracion de los enteros y el de decimales, podamos establecer la siguiente.

**243.** Regla. *Para escribir decimales, se marcará desde luego que lo son con el signo correspondiente, puesto á la derecha de los enteros, si los hubiere, y, en caso contrario, á la derecha de* 0 *enteros. En seguida se colocarán los décimos en el primer lugar decimal, contando desde el signo hácia la derecha, los céntésimos en el segundo lugar*, etc., *poniendo* 0 *en todo lugar en que falten unidades decimales del órden correspondiente.*

*Ejemplos.* Para escribir *veinte y tres centésimos*, que desde luego veremos que equivalen á decir *dos décimos* y *tres centésimos*, escribiremos $0{,}23 = \frac{23}{100}$. Para escribir cuarenta y cinco milésimos, que debemos ver que equivalen á *cuatro centésimos, cinco milésimos* y ningun *décimo*, escribiremos $0{,}045 = \frac{45}{1000}$. Y para escribir 4 enteros y 23 milésimos, escribiremos análogamente $4{,}023 = 4\frac{23}{1000} = \frac{4023}{1000}$.

**244.** *Escolio.* Como del mismo modo que un décimo tiene diez centésimos y cien milésimos, y un centésimo diez milésimos y cien diezmilésimos, un entero tiene diez décimos y cien centésimos, y diez enteros tienen cien décimos y mil centésimos, se pueden dictar los decimales (y así se hace con frecuencia) sin marcar la separacion de los enteros. En este caso no habrá más que escribir todo el número como si fuese entero, y poner despues el signo decimal donde corresponda por la regla anterior. Sentado esto, se puede ya establecer una regla más general para escribir decimales al dictado.

**245.** Regla general. *Para escribir un número decimal al dictado, ya* *se marque la separacion de enteros y decimales, ya deje de indicarse, se escribirán, segun se van dictando, por la regla de la numeracion de enteros, hasta oir la palabra enteros, en cuyo caso se pondrá el signo decimal; y en seguida se escribirá la parte decimal, teniendo en cuenta que el número de sus cifras deberá ser de tantas como ceros deban considerarse al denominador del decimal, supliendo con ceros las que faltasen; y conociendo el denominador que debe considerarse al decimal por la terminacion, décimos, centésimos, etc., con que se termine el dictado. Y si no se oye la palabra enteros, escrito todo el número como si fuera entero, al oir la terminacion decimal, ésta dirá cuántas cifras de la derecha deben separarse con el signo decimal.*

*Ejemplo* 1.º Si se nos dicta *siete enteros* y *siete milésimos*, despues de escribir los 7 enteros con el signo decimal á su derecha, como la palabra *milésimos* dice que el denominador que puede suponérsele al quebrado decimal es 1000, y sus tres ceros reclaman tres cifras decimales, no teniendo más que una significativa el decimal siete milésimos, deduciremos que deben escribirse dos ceros entre el signo decimal y el 7 para que sean milésimos, en esta forma: $7{,}007 = \frac{7007}{1000}$.

*Ejemplo* 2.º Si se nos dictara *cero enteros* y *mil ochocientos ocho millonésimos*, pondremos desde luego 0 enteros con el signo decimal á la derecha; y como 1808 tiene cuatro cifras, y las decimales deben ser seis para que sean millonésimas, pues el denominador que debe suponérsele al quebrado, es 1.000,000, tendremos que escribir $0{,}001808 = \frac{1808}{1000000}$.

*Ejemplo* 3.º Si se nos dicta, finalmente, *tres millones ocho mil quinientos ocho cien milésimos*, desde luego, al no decirnos nada de enteros, debemos suponer que no los hay, ó que están en la expresion convertidos en cien milésimos, por lo que, por las reglas de la numeracion de enteros, escribiremos 3008508, y como son cien milésimos, el número de ceros del denominador 100000, que debe suponérsele al quebrado, serán cinco, y por lo tanto, el número de cifras decimales deberá ser de cinco, por lo que pondremos el signo decimal despues de 30, que serán los enteros, en esta forma: $30{,}08508 = \frac{3008508}{100000}$.

Para leer los números decimales, puede procederse de dos maneras: ó leyendo aparte los enteros, y separadamente los decimales, ó todos unidos, sin distinguir los enteros, á semejanza de los dos modos de dictar que acaban de enseñarse, segun la regla siguiente.

**246.** Regla general. *Para leer un número mixto de enteros y decimales, por grande que sea, lo más usual es leer primeramente los enteros por las reglas correspondientes, y despues los decimales como si fueran enteros; pero añadiéndoles despues el nombre de las unidades decimales, correspondientes á un denominador con la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número propuesto; cuya lectura se facilitará con las divisiones de tres en tres cifras que se emplean en la lectura de los enteros* (48). *Y si se quiere leer todo el mixto, sin distincion de enteros, se prescindirá del signo decimal para la division de la lectura, y se hará ésta como si todo el número fuera de enteros, añadiendo despues el adjetivo correspondiente á las unidades decimales que exija la situacion del signo decimal por el denominador que deba suponérsele.*

*Ejemplo.* Si tenemos 34570,04568, no teniendo el entero ni el decimal más que cinco cifras, es inútil hacer divisiones de á tres, y por lo tanto diremos: *treinta y cuatro mil quinientos setenta enteros* y *cuatro mil quinientos sesenta y ocho cien milésimas;* porque el denominador, que debe suponérsele al quebrado, es 100,000. Y si se quiere leer todo el número sin distinguir los enteros, se dividirá en esta forma: 3.457$_{1}$0,04.568, y se leerá *tres mil cuatrocientos cincuenta y siete millones, cuatro mil quinientos sesenta y ocho cien milésimos* tambien, porque el denominador, que debe suponérsele al quebrado, es siempre el mismo 100,000.

## ARTÍCULO III.

### PROPIEDADES PRINCIPALES DE LOS DECIMALES.

**247.** Los números decimales tienen propiedades particulares, pocas en número, pero de variada aplicacion y de utilidad grande, y que por ser hijas de la manera de expresarlos y del órden especial que entre sí guardan los denominadores que pueden suponérseles, no son aplicables á los quebrados ordinarios. No sucede lo mismo relativamente á las propiedades de estos, pues son aplicables á los decimales, si bien para ello es menester considerarlos como qüebrados comunes, y hasta tomar la forma de tales, la cual casi nunca pueden perder despues de cualquier trasformacion que experimentan en virtud de la aplicacion de algunas de tales propiedades.

Por ejemplo, la propiedad de los quebrados comunes, de que multiplicando sus dos términos por un mismo número no varía su valor, es aplicable á los quequebrados decimales; pero es menester ponerlos en forma de ordinarios, y será v. gr. $0{,}2 = \frac{2}{10}$, y multiplicando sus dos términos por 3, su valor no variará (189), pero dará $\frac{6}{30}$, quebrado que ya no es decimal. Y lo mismo $4{,}5 = \frac{45}{10} = \frac{45 \times 2}{10 \times 2} = \frac{90}{20}$.

Hechas estas consideraciones, ocupémonos únicamente de las propiedades particulares de los decimales.

**248.** Lema. *A todo decimal se le pueden poner á su derecha todos los ceros que quiera, sin que varíe de valor.*

Así $0{,}2 = 0{,}20 = 0{,}200$, y $4{,}5 = 4{,}50 = 4{,}500$.

Porque como se dijo en la numeracion decimal (238), 1 décimo vale 10 centésimos y 100 milésimos, y consiguientemente 2 décimos valdrán 20 centésimos y 200 milésimos, y 4 enteros y 5 décimos valdrán 45 décimos y 450 centésimos y 4500 milésimos.

**249.** Lema. *Todo entero puede considerarse como un mixto de entero y decimal, compuesto éste de los ceros que se quieran.*

Así $34 = 34{,}0 = 34{,}00$, etc.

Porque no sólo es evidente que 34 enteros es igual á 34 enteros y 0 décimos y 0 centésimos, etc., sino que 34 enteros es igual á 340 décimos y á 3400 centésimos, etc. (248).

**250.** Lema. *Un número decimal, tenga ó no tenga enteros, se hace diez veces mayor si el signo decimal se traslada un lugar hácia la derecha; cien veces mayor si se traslada dos lugares; mil si tres, etc.*

Así 3 4,4 5 es 10 veces menor que
3 4 4,5 y 100 veces menor que
3 4 4 5 y 1000 veces menor que
3 4 4 5 0

Porque trasladando el signo un lugar hácia la derecha, los décimos se convierten en unidades simples diez veces mayores que los décimos; los centésimos en décimos, diez veces mayores que los décimos, etc., y las unidades simples se convierten en decenas, etc.; luego todas las partes del número se hacen diez veces mayores, y el total tambien debe hacerse. La supresion del signo á la derecha en los dos últimos ejemplos, es por inútil, pero debe considerarse como trasladado.

**251**. Lema. *Un número decimal se hace diez veces menor trasladando el signo un lugar hácia la izquierda; cien veces trasladándolo dos lugares; mil si se traslada tres, etc.*

| | | |
|---|---|---|
| Así | 3 4,4 5 | es 10 veces mayor que |
| | 3,4 4 5 | y 100 veces mayor que |
| | 0,3 4 4 5 | y 1000 veces mayor que |
| | 0,0 3 4 4 5 | |

Porque trasladando el signo un lugar hácia la izquierda, las unidades simples se convierten en décimos, que son diez veces menores que ellos; los décimos en centésimos, etc., y por lo tanto todas las partes del número se hacen 10 veces mayores, y al total debe sucederle lo mismo; y análogamente 100 veces trasladando el signo dos lugares hácia la izquierda, etc.

**252**. *Observacion.* Como se ha visto en el ejemplo anterior, el signo decimal puede trasladarse todos los lugares á la izquierda que se quiera, poniendo los ceros correspondientes, pues evidentemente 0,3 es diez veces mayor que 0,03, etc., y, en el caso contrario, el signo decimal tambien puede trasladarse todos los lugares hácia la derecha que se quiera, aunque se suprime por inútil, como se indicó (250); pues evidentemente 3, 3 es diez veces menor que 33,0 y 100 veces menor que 330,0 y 33,0 = 33 y 330,0 = 330; pero decimos que se considere el signo como existente por la conveniencia de que se vea generalizado el lema.

## ARTÍCULO IV.

### ADICION DE DECIMALES.

**253**. El problema general de la adicion ó suma de los decimales no se divide en otros, pues sean los sumandos todos ó algunos decimales ó mixtos, sean unos enteros y otros decimales, sean todos ó algunos decimales propios, se opera siempre segun la siguiente.

**254**. Regla. *Colóquense todos los sumandos, los unos debajo de los otros, de manera que formen columna vertical los signos decimales, con lo que quedarán las unidades enteras y decimales de igual órden formando columnas verticales. Súmense despues los sumandos como si fuesen enteros, y á la suma póngase el signo decimal debajo de los signos de los sumandos.*

| *Ejemplos.* 1.° | | 2.° |
|---|---|---|
| | 37,04 | 5784,5 |
| | + 9,7 | + 745,0 |
| | + 45,577 | + 0,7 |
| | = 92,317 | = 6530,2 |

*Demostracion.* Es la misma que la de los números enteros (70), pues no se hace otra cosa que reunir todas las unidades de igual órden, tanto decimales como enteras, y reuniendo todas las partes de los sumandos, deben quedar reunidos éstos y el número que se halle debe ser la suma.

*Observacion.* Desde luego si los sumandos son concretos, se operan del mismo modo, pero deben ser homogéneos (73).

## ARTÍCULO V.

### SUSTRACCION DE DECIMALES.

**255.** El problema general de la sustraccion de decimales es tambien uno solo, pues todos los casos se resuelven por la siguiente regla.

**256.** Regla. *Para sustraer decimales, se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de manera que los signos decimales formen columna, con lo que las unidades de cada órden quedarán debajo de sus semejantes.* Si el minuendo tiene ménos cifras decimales que el sustraendo, ó no tiene ninguna, se igualarán escribiendo los ceros que sean necesarios. Despues se hará la sustraccion como si los números fueran enteros, y á la resta se pondrá el signo decimal debajo de los del minuendo y sustraendo.

| *Ejemplos.* 1.° | | | 2.° | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 527,4 | = 527,40 | | 7567 | = 7567,00 |
| | — 346,57 | = — 346,57 | | — 898,45 | = — 898,45 |
| | | = 181,03 | | | = 6668,55 |
| | prueba | 527,40 | | prueba | 7567,00 |

*Demostracion.* Es la misma que la de los enteros (81), pues se halla la diferencia de todas las partes de los datos, y debe, por lo tanto, hallarse la diferencia de ellos.

La sustraccion de decimales concretos se efectúa lo mismo, pero deben ser homogéneos (82).

## ARTÍCULO VI.

### MULTIPLICACION DE DECIMALES.

**257.** El problema general de la multiplicacion de decimales se divide en tres: 1.° Multiplicar un decimal por la unidad con ceros. 2.° Multiplicar un entero por un decimal, ó al contrario. Y 3.° Multiplicar un decimal por otro.

**258.** Regla 1.ª *Para multiplicar un decimal por la unidad, seguida de ceros, se corre simplemente el signo decimal tantos lugares hácia la derecha como ceros acompañen á la unidad, supliendo con ceros á la derecha las cifras que puedan faltar al multiplicando.*

*Ejemplos.* 1.° $37{,}457 \times 100 = 3745{,}7.$
2.° $578{,}459 \times 1000 = 578459.$
3.° $375{,}406 \times 10000 = 3754060.$

*Demostracion.* Es la misma que la de la propiedad de los decimales enseñada (250).

**259.** Regla 2.ª *Para multiplicar un decimal por un entero, ó al contrario, se hace la multiplicacion, prescindiendo del signo decimal, por la regla de multiplicar enteros* (99), *y al producto se separan con el signo decimal tantas cifras á la derecha como decimales hubiere en el factor decimal propuesto.* Y si el factor entero terminase en ceros, se prescinde tambien de ellos y se agregan al producto antes de la dicha colocacion del signo decimal correspondiente.

*Ejemplos.*

1.°
$$\begin{array}{r} 38{,}71 \\ \times\ 32 \\ \hline 7742 \\ 11613\phantom{0} \\ \hline 1238{,}72 \end{array}$$

2.°
$$\begin{array}{r} 0{,}0045 \\ \times\ 14 \\ \hline 180 \\ 45\phantom{0} \\ \hline 0{,}0630 \end{array}$$

3.°
$$\begin{array}{r} 7{,}57\phantom{000} \\ \times\ 52{,}000 \\ \hline 1514\phantom{000} \\ 3785\phantom{0000} \\ \hline 693640{,}00 \end{array}$$

*Demostracion.* Al prescindir del signo decimal del multiplicando en el primer ejemplo, se hace 100 veces mayor (250), y el producto resultará, por lo tanto, 100 veces mayor de lo que debe ser (133); y como al separarle con el signo decimal dos cifras se le hace 100 veces menor, quedará como es debido. Y análogamente en el segundo ejemplo se hace el multiplicando 10000 mayor y el producto igual número de veces menor. Y en el tercer ejemplo se sigue la misma regla, pero se aplica tambien la de los enteros (105). Y como lo mismo podriamos demostrar cualquier otro ejemplo, la regla es general y queda demostrada.

**260.** Regla 3.ª *Para multiplicar un decimal por otro, se prescinde del signo decimal en ambos factores, y al producto se le separan con tal signo tantas cifras á la derecha como decimales tienen ambos factores juntos.*

*Ejemplos.* 1.°
$$\begin{array}{r} 34{,}7 \\ \times\ 3{,}5 \\ \hline 1735 \\ 1041\phantom{0} \\ \hline 121{,}45 \end{array}$$

2.°
$$\begin{array}{r} 2{,}59 \\ \times\ 0{,}035 \\ \hline 1295 \\ 777\phantom{0} \\ \hline 0{,}08965 \end{array}$$

*Demostracion.* Al prescindir del signo decimal del multiplicando, se le hace 10 veces mayor (250), y el producto deberá, por lo tanto, resultar 10 veces mayor de lo que debe ser. Al prescindir del signo decimal del multiplicador, se le hace tambien 10 veces mayor, y lo mismo al producto, por lo que éste resultará mayor de lo que debe 10 veces por un motivo y 10 veces por otro, ó sea $10 \times 10 = 100$ veces (94), y no 20 veces como acaso aparezca (pues, por ejemplo, la tercera parte de un número, tomada la tercera parte de veces, no es su sexta, sino su novena parte). Y como lo mismo análogamente podremos demostrar sobre el segundo ejemplo y sobre cualquier otro, pues la regla de multiplicacion de enteros está demostrada (103), la regla que nos ocupa es general y queda tambien demostrada.

La multiplicacion de los decimales concretos se hace lo mismo que la de los abstractos, ateniéndose ademas á cuanto se dijo sobre estos cuando son concretos y deben multiplicarse (108).

La misma regla dada y practicada en ejemplos de dos factores puede seguirse cuando sean tres ó más, pues que las multiplicaciones son sucesivas.

## ARTÍCULO VII.

### DIVISION DE DECIMALES.

**261.** El problema general de la division de decimales se divide en cinco: 1.° Dividir un decimal por la unidad seguida de ceros. 2.° Dividir un decimal por un entero. 3.° Dividir un decimal por un entero (diferente de la unidad) terminado en ceros. 4.° Dividir un entero por un decimal. Y 5.° Dividir un decimal por otro decimal.

**262.** Regla 1.ª *Para dividir un decimal por la unidad seguida de ceros, se traslada simplemente en el dividendo el signo decimal tantos lugares hácia la izquierda como ceros acompañen á la unidad, supliendo con ceros á la izquierda las cifras que pueden faltar al decimal propuesto.*

*Ejemplos.* 1.° $374{,}56 : 100 = 3{,}7456$
2.° $78{,}67 : 1000 = 0{,}07867$.

*Demostracion.* Es la misma que la de la propiedad de los decimales (251) de hacerse 10, 100, etc. veces menores cuando el signo se traslada uno, dos, etc. lugares hácia la izquierda, pues hacer un número 10, 100, etc. veces menor, es lo mismo que dividirlo por 10, 100, etcétera (129).

**263.** Regla 2.ª *Para dividir un número decimal por un entero, se hace la division como si ambos fuesen enteros, teniendo únicamente cuidado de poner el signo decimal en el cociente tan luego como la cifra de los décimos del dividendo forme parte de algun dividendo parcial, y si hubiere residuo será inferior á las unidades decimales inferiores del cociente.*

*Ejemplo.*

$$\begin{array}{r|l} 7442{,}87 & 32 \\ \cline{2-2} 104 & 232{,}58\tfrac{31}{32} \text{ de centésimo} \\ 082 & \times\ 32 \\ \cline{2-2} 188 & 46516 \quad \text{prueba} \\ 287 & 69774 \\ \cline{2-2} 31 & 7442{,}56 \\ & +\ 0{,}31 \\ \cline{2-2} & 7442{,}87 \end{array}$$

*Demostracion.* Es exactamente la misma que la de la division de números enteros (152), pues se determinan todas las partes enteras y decimales de un número, que multiplicadas por el divisor den todas las del dividendo; y por lo tanto el número total de tales partes halladas, multiplicadas por el divisor, que dan el dividendo, es el cociente verdadero. Y en cuanto á que el residuo vale siempre ménos de una unidad decimal de las inferiores del cociente, basta considerar que si valiera tanto ó más que una de ellas, sería igual ó mayor que el divisor, y la cifra anterior del cociente deberia aumentarse en una unidad (146).

**264.** *Escolio.* Como á todo decimal se le pueden suponer á la derecha todos los ceros que se quieran (248), y todo entero se puede suponer mixto de entero y decimal, se comprenderá fácilmente que todo dividendo decimal ó entero podrá producir al cociente todas las cifras decimales que se quieran, pues en vez de dividir, por ejemplo, 3,4 por 3 podremos dividir 3,400000; verdad tan importante y de tanta aplicacion, que, aunque la señalamos á continuacion de la regla y demostracion de que es consecuencia, reservamos su esplanacion y variada aplicacion para un artículo separado.

**265.** Regla 3.ª ***Para dividir un decimal por un entero cualquiera terminado en ceros, se suprimen éstos, y en el dividendo se corre el signo decimal tantos lugares hácia la izquierda como ceros se supriman al divisor, efectuándose despues la division por la regla anterior 2.ª***

*Ejemplo.*

$$578{,}92 : 600 = \begin{array}{r|l} 5{,}7894 & 6 \\ \cline{2-2} 38 & \\ 29 & 0{,}9649 \\ 54 & +\ 6 \quad \text{prueba} \\ \cline{2-2} 00 & 5{,}7894 \end{array}$$

*Demostracion.* Suprimiendo dos ceros en el divisor, lo hacemos 100 veces menor (250), ó lo dividiremos por 100 (129), y corriendo el signo decimal del dividendo dos lugares hácia la izquierda, lo hacemos 100 veces menor tambien, luego el cociente no debe alterarse; y como despues se opera con sujecion á la regla 2.ª, esta es general, y queda demostrada.

**266.** *Escolio.* Como á todo entero se le puede suponer á su derecha el signo decimal, la division de un entero por otro terminado en ceros, puede abreviarse suprimiendo los ceros y separando con el signo decimal en el dividendo tantas cifras como sean los ceros suprimidos al divisor, lo que ya esplanaremos despues convenientemente.

**267.** Regla 4.ª *Para dividir un entero por un decimal, se suprime á éste el signo decimal, y se agregan al dividendo tantos ceros á la derecha como cifras decimales tenia el divisor, quedando la operacion reducida á la division de un entero por otro.*

*Ejemplo.* 3745 : 3,52 = 374500 | 352

2250 — 1063 $\frac{324}{352}$

1380

324

*Demostracion.* Suprimiendo el signo decimal en el divisor, lo hacemos en el ejemplo anterior 100 veces mayor (250), y como agregando dos ceros al dividendo lo hacemos 100 veces mayor tambien (104), el cociente no puede alterarse. Y como lo mismo podria demostrarse cualquier otro ejemplo, la regla es general y queda demostrada.

**268.** Regla 5.ª *Para dividir un decimal por otro, si el dividendo tiene mayor número de cifras decimales que el divisor, se le suprime á éste el signo decimal, y en el dividendo se corre el signo decimal tantos lugares hácia la derecha como cifras decimales tenia el divisor; y si éste tuviera mayor número de ellas que el dividendo, se le agregan á éste tantos ceros como sean necesarios para tener tantas cifras decimales como el divisor, suprimiendo despues de uno y otro el signo decimal. En el primer caso, el problema quedará convertido en una division de enteros, ó de un decimal por un entero, y en el segundo caso, á la de un entero por otro.*

*Ejemplos.*

1.º 9,315 : 0,45 = 9 3 1,5 | 4 5

3 1 5 — 2 0,7

0 0 0 — × 0,4 5

prueba — 1 0,3 5

8 2 8

9,3 1 5

2.º 150,5 : 0,43 = 15050 | 4 3

215 — 3 5 0

000 — 0,4 3

prueba — 1 0 5 0

1 4 0 0

1 5 0,5 0

*Demostracion.* Al suprimir en el primer ejemplo el signo decimal del divisor, lo hacemos 100 veces mayor (250), y 100 veces mayor al dividendo al trasladar dicho signo dos lugares hácia la izquierda; luego el cociente no debe variar (133). Y en el segundo ejemplo, análogamente, se hace el dividendo y divisor 100 veces mayor suprimiendo el signo decimal, despues de igualar con ceros el número de cifras decimales de ambos. Y como lo mismo podria demostrarse sobre cualquier ejemplo, la regla es general y queda demostrada.

**269.** *Observacion.* La primera parte de la anterior regla parece que debiera suprimirse, pues que en todo caso, igualando el número de cifras decimales de dividendo y divisor, y suprimiendo el signo decimal de ambos, la operacion quedaba reducida á la division de un entero por otro. Mas si se considera que en el caso de que el número de cifras decimales del divisor sea menor que el del dividendo, para igualarlo habria que agregar á aquel ceros, los que obligarian despues para abreviar á recurrir á la regla 3.ª, lo que ésta previene es lo que viene á hacerse desde luego.

**270.** *Escolio.* Las reglas anteriores 3.ª, 4.ª y 5.ª, pueden reducirse á una sola, y por eso se han puesto en letra menuda, y es la siguiente: *Siempre que el divisor tenga decimales ó termine en ceros, sea cual sea el dividendo, considérense el signo decimal ó los ceros de tal divisor como un inconveniente para hacer fácilmente la division, y háganse desaparecer, proporcionando al dividendo un aumento ó disminucion igual por medio de la tras-*

*lacion de su signo decimal ó por el agregado ó supresion de ceros correspondiente.*

Véanse los mismos ejemplos de las reglas anteriores.

Nota. En estas reglas, como en muchas partes de la Aritmética, se ha mirado más á la conveniencia de que el estudiante se familiarizase con las propiedades de los números, que á la conveniencia tambien indudable de darle el menor número posible de reglas.

## ARTÍCULO VIII.

### APROXIMACION DE LOS RESIDUOS POR DECIMALES.

**271.** Regla general. *A todo residuo de una division inexacta ó aproximada, ya sea ésta de números enteros, ya sea de decimales, se podrá determinar su valor en decimales, exactamente, ó con toda la aproximacion que se quiera, continuando la division que lo produjo con el aumento de ceros decimales en el dividendo, ó sea añadiendo uno á cada residuo indivisible ó menor que el divisor, por cada cifra decimal que se quiera encontrar en el cociente; cifra que será del órden inferior inmediato al de la última antes hallada; pudiéndose seguir la operacion hasta obtener un cociente exacto, ó hasta que se vea que las cifras del cociente se repiten bajo un mismo órden, que será señal de que la division no tiene límite y que hay, por lo tanto, que tener siempre un residuo.*

*Ejemplos.*

```
1.° 37,45 | 4                     2.° 39,457 | 6
    14      9,3625                    34       6,57616666...
     25                                45
      10                                37
       20                                10
        00                                40
                                           40
                                            40
                                             40

          3.° 37,37 | 7
              23      5,338571428571425...
               27
                60
                 40
                  50
                   10
                    30
                     20
                      60
                       40
```

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, se ha continuado la division en el primer ejemplo hasta obtener cociente exacto; en el segundo, hasta ver que se repite la cifra 6 ilimitadamente; y en el tercero, hasta ver que las cifras se repiten en el órden de 571428, y, por lo tanto, sin límites.

*Demostracion.* Esta regla se funda, segun ya indicamos (264), en que á todo decimal se le pueden añadir todos los ceros á su derecha que se quieran (248) sin alterarlo; y que todo entero se puede considerar como un mixto de entero y decimal de ceros (249), y, por lo tanto, á todo dividendo se le puede añadir á la derecha los ceros decimales que se quiera, y efectuar la division por la regla (144) de dividir un decimal por un entero; pues lo mismo es añadir cierto número de ceros al dividendo que uno á cada residuo. Y evidentemente los decimales que vayan saliendo para el cociente, serán del órden que el cero añadido debia ocupar en el dividendo.

Esto es, que en el ejemplo primero, al hallar el cociente aproximado 9,36 y un residuo 1, que será centésimos, si se le agrega un 0, que puede considerarse en el dividendo en el lugar de milésimos, formará un dividendo parcial de 10 milésimos, que da por cociente 2 milésimos, y 2 de residuo; que, con otro cero, como bajado del dividendo del lugar de los diezmilésimos, formará otro dividendo parcial de 20 diezmilésimos que da para el cociente 5 diezmilésimos y 0 de residuo.

## ARTÍCULO IX.

### CONVERSION DE DECIMALES Á QUEBRADOS COMUNES, Y DE ÉSTOS Á AQUELLOS.

Por los anteriores ejemplos, debemos haber empezado á conocer que hay decimales ilimitados, y aunque su teoría la reservamos para la aritmética superior, adelantaremos lo indispensable para llenar el objeto que expresa el título de este artículo.

**272.** *Decimal exacto* se llama el que consta de un número limitado de cifras decimales, y *decimal inexacto ó periódico*, aquel que tiene un número ilimitado de cifras; dividiéndose los periódicos en *periódicos puros* cuando las cifras que se repiten empiezan desde los décimos inclusive, y *periódicos mixtos* cuando las cifras que se repiten y forman el período (ó cifras repetidas de igual órden) empiezan desde una de las unidades inferiores á los décimos.

**273.** El orígen de los decimales es el mismo que el de los quebrados comunes, y como el de estos, aunque de dos especies, siempre puede considerarse como de una division (178), por lo que los decimales podemos tambien decir que equivalen á quebrados ordinarios ó divisiones indicadas, llamándose *fraccion generatriz* de un decimal el quebrado que la produjo ó pudo producirla por ser equivalente á ella, aunque un decimal puede ser producido por varios quebrados iguales entre sí, y el verdadero generador es el irreducible.

Para determinar la fraccion generatriz de un decimal, ó sea un quebrado equivalente á ella, pueden ocurrir tres casos: 1.º Que el decimal sea exacto. 2.º Que sea periódico puro. Y 3.º Que sea periódico mixto; y hay, por lo tanto, tres reglas.

**274.** Regla 1.ª *Para hallar la fraccion generatriz de un decimal exacto, se le suprimirá el signo decimal y se le pondrá por denominador la unidad con tantos ceros como cifras decimales tenia el número y se simplifica si se puede.*

*Ejemplos.* 1.º $0{,}745 = \frac{745}{1000}$ 2.º $3{,}07 = \frac{307}{100}$.

*Demostracion.* Es la convencion expresada en la numeracion decimal (240), pero ademas, si se divide 745 por 1000, segun la regla correspondiente (271), dará 0,745.

**275.** Regla 2.ª *Para determinar la fraccion generatriz de un decimal periódico puro, se pondrá por numerador el período y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período.*

*Ejemplo.* $0{,}373737... = \frac{37}{99}$.

*Demostracion.* En la Aritmética superior se demostrará teóricamente, y por ahora sólo diremos que $37 : 99 = 0,3737\ldots$

**276.** Regla 3.ª *Para hallar la fraccion generatriz de un decimal periódico mixto, se pondrá por numerador la diferencia entre la parte no periódica del decimal y el número que ella forme con el periodo, y por denominador tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguidos de tantos ceros como cifras no periódicas haya.*

*Ejemplo.* $0,45757\ldots = \frac{457-4}{990} = \frac{453}{990} = \frac{151}{330}$.

*Demostracion.* Prácticamente, por ahora, diremos que $151 : 330 = 0,45757\ldots$ como puede verse efectuando la division, y lo mismo si se divide 453 por 990.

**277.** *Observacion.* Si el decimal que se quiere convertir es mixto, ó sea con enteros, éstos formarán con el quebrado ordinario el mixto equivalente, ó se considerarán como parte no periódica de un decimal mixto, y se obrará, segun la anterior regla, pero poniendo al denominador sólo los ceros que correspondan por el verdadero período.

Así $3,45737 = \frac{3457-34}{990}$, como prácticamente puede verse.

**278.** *Observacion.* Con las tres reglas anteriores, se puede evidentemente convertir en quebrados comunes cualesquiera decimales que se presenten. Hay, sin embargo, decimales que no son exactos, ni son periódicos, y no es, por lo tanto, rigorosamente exacto lo que dijimos (273) de que todos equivalen á divisiones indicadas ó quebrados. Nos referimos á los producidos por la extraccion de raices, que, como veremos en la aritmética superior, se llaman *inconmensurables*, y no equivaliendo á quebrados, no pueden convertirse en tales. Son ilimitados, y sus cifras se repiten sin ningun órden; pero de ellos no podemos aún ocuparnos. Pasemos, pues, á la conversion de quebrados comunes en decimales.

**279.** Regla. *Para convertir un quebrado ordinario en decimal, se divide su numerador por su denominador, aproximando la division por decimales, segun la regla correspondiente* (271).

*Ejemplos.*

1.º $\frac{3}{4} = 3,0 \,|\, 4$

```
3,0 | 4
2 0   0,75
0 0
```

2.º $\frac{2}{3} = 2,0 \,|\, 3$

```
2,0 | 3
20    0,666...
20
```

3.º $\frac{3}{7} = 3,0 \,|\, 7$

```
3,0 | 7
20    0,4285714...
 60
  40
   50
    10
     30
```

*Demostracion.* Esta regla se funda en que todo quebrado equivale á una division indicada (179), y á que toda division se puede aproximar por decimales (271). Y en cuanto al resultado, muchas veces inexacto, como en los ejemplos segundo y tercero, siempre es legítimo, como puede comprobarse prácticamente, pues por las reglas anteriores $0,666\ldots = \frac{6}{9}$ que evidentemente es igual á $\frac{2}{3}$.

**280.** *Escolio.* Como las aproximaciones por decimales, de las divisiones, y muchas otras operaciones de decimales se hacen muy pesadas innecesariamente, porque rara vez se necesita un resultado, en el que sea de importancia el error de algunos milésimos, puede, por lo pronto, establecerse la abreviacion siguiente (mientras no aprendemos en la aritmética superior á abreviar las operaciones de decimales, no operando más que con los necesarios para obtener un resultado con un error máximo de una unidad decimal determinada). En las sumas y en las restas no se opera con más cifras decimales que aquellas que se conozca tienen importancia para el resultado. Tratándose, pues, de restar pesetas, los centésimos son muy suficientes, y áun tratándose de sumar; pero si los sumandos fueran muchos, como diez milésimos valen un centésimo, pueden los milésimos considerarse importantes. Y, análogamente, en las multiplicaciones y divisiones, pues para dividir pesetas entre varias personas, sólo los centésimos deben considerarse; pero para hacer una multiplicacion, si los factores son muy grandes, pueden tener importancia hasta los cienmilésimos. Y siempre que en virtud de estas consideraciones se abrevien los datos de un problema ó su resultado, despreciando algunas cifras decimales, añádase una unidad decimal á la última considerada, si la primera despreciada vale más de 4, porque 5, y sobre todo 6, 7, 8 ó 9 milésimos, por ejemplo, despreciados, producen más error que si por ellos se toma un centésimo.

## ARTÍCULO X.

### VALUACION DE DECIMALES.

**281.** *Para valuar un decimal, que naturalmente debe ser concreto, se multiplica por el número de veces que una de sus unidades contiene á la de magnitud inferior inmediata, y la parte de enteros del producto dirá las unidades de dicha magnitud que contiene el decimal propuesto. Si ademas tiene el tal producto cifras decimales, considerándolas solas, se multiplican por el número de veces que una de ellas contiene á la de magnitud inferior inmediata, y así se continúa hasta obtener un resultado sin decimales, ó hasta que no haya unidades inferiores por que multiplicar los decimales.*

*Ejemplo.* 0,43 var. = 1 pie, 3 pulg., 5,78 lín.

$$\begin{array}{r l}
0,43 & \text{var.} \\
\times\ 3 & \\
\hline
1,29 & \\
\times\ 12 & \text{pulg.} \\
\hline
58 & \\
29\phantom{0} & \\
\hline
3,48 & \\
\times\ 12 & \text{lín.} \\
\hline
96 & \\
48\phantom{0} & \\
\hline
5,76 &
\end{array}$$

*Demostracion.* Si tuviéramos que reducir 43 varas á pies, multiplicaríamos por 3, y el resultado sería 129 pies; pero como 0,43 varas es 100 veces menor que 43 varas (262), 129 pies será 100 veces mayor de lo que debe ser para representar el decimal propuesto convertido en pies; luego será 1,29 pies (262). Y como análogamente puede decirse que 0,29 pies es igual á 3,48 pulgadas y 0,48 pulgadas = 5,78 libras, evidentemente que el decimal propuesto equivale al complejo hallado por la regla, y ésta queda demostrada.

# ARTÍCULO XI.

## EJERCICIOS SOBRE DECIMALES.

### *Numeracion.*

**282.** Escríbense los decimales siguientes:
1.° Cuatro enteros y quinientos cuatro mil ochocientos cinco millonésimos.
2.° Treinta enteros y tres mil cuatrocientos cuarenta y cuatro cienmilésimos.
3.° Cuatrocientos enteros y cuatrocientos seis diezmillonésimos.
4.° Ochocientos millones cuatro mil quinientos treinta y tres millonésimos.
5.° Ocho mil millones ochocientos ocho diezmillonésimos.
6.° Ochocientos cuatro millones cuarenta mil cuarenta y dos billonésimos.
Léanse los números siguientes por los dos métodos:

1.° 7 4 5 6,7 8 9 0 5 — 2.° 7 0 0 0,0 0 0 4 0 0 5
3.° 7 0 0 1,0 0 0 4 5 0 0 7 — 4.° 1 1 1 1,0 0 0 0 4 0 4
5.° 0,0 0 0 8 4 5 0 0 7 — 6.° 7 0 7,0 0 0 0 0 0 0 0 5 0 2

### *Adicion.*

1.° 304,975 + 40,097 + 8,0078 + 50,09 =

2.° 7400,847 + 809,57 + 89,5 + 782,48 =

### *Sustraccion.*

1.° 7450,089 — 479,988 =

2.° 757,845 — 888,88888 =

### *Multiplicacion.*

1.° 745,7843 × 309 =

2.° 7,4987009 × 0,89 =

### *Division.*

1.° 5 4 5 7,5 4 : 3 4 5 — 2.° 5 7 8,4 5 7 1 : 3 7 0 0 0 0
3.° 5 7 8 4 5 7 : 4,5 7 — 4.° 0,0 0 0 5 7 8 : 0,0 0 3 5.

### *Convertir los decimales siguientes en quebrados ordinarios.*

1.° 0,87456 — 2.° 3,50047 — 3.° 0,00578
4.° 0,854854... — 5.° 0,75434... — 6.° 7,85757...

### *Convertir en decimales los quebrados ordinarios siguientes.*

1.° $\frac{2}{9}$ — 2.° $\frac{15}{18}$ — 3.° $\frac{17}{49}$.

ADVERTENCIA. Se suprimen ejemplos de decimales concretos, porque pueden servir los ejemplos del ejercicio de enteros, poniendo el signo decimal donde se crea conveniente; pues en estos ejercicios no pretendemos más que indicar al profesor la clase de los que creemos convenientes, ampliándolos ó acortándolos, segun la disposicion del discípulo.

# CAPÍTULO IX.

## NÚMEROS COMPLEJOS.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**283.** *Números complejos sabemos* (28) *se llaman los que en una misma expresion contienen unidades de diferente magnitud, pero de una misma naturaleza.*

Las operaciones con estos números constituian antes una de las partes más importantes y difíciles de la Aritmética; pero la aplicacion del sistema decimal á los pesos y medidas les ha quitado mucho de su importancia. Sin embargo, los números complejos no han desaparecido, ni pueden desaparecer de la ciencia, no sólo porque pasarán muchos años sin que en muchas provincias se adopte por completo el sistema métrico decimal, sino porque las divisiones del tiempo en siglos, años, meses, dias, horas, minutos y segundos; y las de la circunferencia en grados, minutos y segundos, son complejos, que probablemente no se sustituirán nunca por unidades decimales.

**284.** Los complejos, que son medidas del tiempo y de la circunferencia, únicos verdaderamente hoy existentes, son susceptibles de algunas abreviaciones en sus operaciones, porque tienen una circunstancia que les asemeja algo á los decimales, y por lo que en la ciencia que más se sirve de ellos, que es la cosmografía, se llaman *sexagesimales.* Esa circunstancia es la de que cada unidad contiene sesenta de la magnitud inferior inmediata; pues la hora tiene sesenta minutos, el minuto sesenta segundos y el segundo sesenta terceros; y el grado tiene divisiones análogas, y aunque las unidades superiores no guarden el mismo órden, las inferiores dichas son las que más entran en los cálculos de la cosmografía y de la náutica.

Por lo expuesto sobre estos números complejos, y porque las medidas antiguas no están completamente desterradas, tenemos que aprender á operar con ellos, aunque por métodos sencillos; no extremándonos en la práctica de problemas complicados, pues rara vez podrán presentársenos en la vida. Los grados se expresan con un 0, y los minutos, segundos, etc., con una, dos ó tres comas á la derecha, y un poco más alto del número á que afectan.

En las Tablas auxiliares III, IV y V, al fin de la Aritmética, se verá todo el sistema de pesos y medidas, antiguo y moderno, y la correspondencia de uno con otro, de los cuales desde luego debemos aprender algo para efectuar las operaciones de que vamos á ocuparnos.

**285.** El orígen de los complejos puede decirse que es el mismo que el de los quebrados. Es decir, la medicion ó cuenta de una cantidad, que no conteniendo un número exacto de unidades de magnitud importante, se mide el exceso por otras de menor magnitud.

## ARTÍCULO II.

### REDUCCION DE COMPLEJOS Á INCOMPLEJOS, Y AL CONTRARIO.

**286.** Regla. *Para reducir un complejo á incomplejo, se reducen todas sus unidades á la ínfima, multiplicando primero las superiores por las veces que una de ellas contiene á la de magnitud inferior inmediata, y añadiéndole al producto las unidades de dicha magnitud que tenga el complejo. Reduciendo despues el conjunto á unidades de magnitud inferior inmediata, y así sucesivamente hasta tener sólo unidades de la magnitud ínfima del complejo, las cuales formarán un incomplejo equivalente al complejo propuesto.*

**287.** Si el incomplejo se quisiere de unidades de una magnitud superior á las más pequeñas del complejo, se dividirá el incomplejo hallado por la regla anterior, por las veces que una unidad de las más pequeñas esté contenida en otra de las que se quiere sea el incomplejo; pero se dejará indicada la division, porque efectuándola dará un mixto que, aunque incomplejo, no se presta tan bien al cálculo como un quebrado ordinario.

**288.** Si se quiere en forma decimal, en lugar de quebrado comun, se reducen á unidades de la magnitud que se quiere el incomplejo todas las superiores á ellas, y todas las inferiores ó unidades de las más pequeñas del complejo, dividiendo este segundo resultado por las veces que la unidad más pequeña está contenida en una de la magnitud que se desea, aproximando la division por decimales y juntando el cociente decimal á las unidades enteras resultantes de la reduccion de las unidades superiores á las deseadas.

*Problema.* Reducir primero á incomplejo de segundos, despues á incomplejo de minuto, y últimamente, á incomplejo de hora, el complejo sexagesimal siguiente:

$$7^{h.}\ 5'\ 6'' = 25566'' = \frac{25566'}{60} = \frac{25566\ h.}{60 \times 60}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 60 \\ \hline 425 \\ \times\ 60 \\ \hline 25506 \end{array}$$

El incomplejo de minuto por decimales, será

$$7 \times 60 + 5' + \frac{6}{60} = 425'1.$$

*Explicacion.* Las 7 horas, reducidas á minutos y sumados los 5 que tiene el complejo, dan 425' que, reducidos á segundos y sumados los 6 del complejo, dan 25506'' incomplejo de segundos, y dividido por 60 da un quebrado incomplejo de minuto, y dividido por 60 × 60'' que tiene la hora da un incomplejo de hora. Y por decimales, 7 horas y 5' hacen 425', y 6'' reducidos á decimal de minuto, hacen en minutos 0,1, y el incomplejo será 425'1

*Ejemplos.*

1.° 2 arrob., 3 lib., 4 onz. = 852 onz. = $\frac{852 \text{ lib.}}{16} = \frac{852 \text{ ar.}}{16 \times 25}$

$\times$ 25
50
+ 3 lib.
53
$\times$ 16
318
534
852 onz.

En decimal de libra.

lib. 53,25

onz. 4,0 | 16 onzas que tiene la libra.
0 8 0 | 0,2 5
0 0

2.° 3 quint., 2 ar., 5 lib., 4 onz. = 5684 onz. = $\frac{5680 \text{ lib.}}{16} = \frac{5684 \text{ ar.}}{16 \times 25} = \frac{5684 \text{ quint.}}{16 \times 25 \times 4}$

12
14
25
70
28
355
$\times$ 16
2130
355
5684

En decimal de arroba.

arrob. 14,2

lib. 16
5
80
onz. 84,0 | 410
20 | 0.20

**289**. *Demostracion*. Es innecesaria despues de la explicacion del primer ejemplo, pues se opera siguiendo las reglas de multiplicacion de complejos demostradas, y las de decimales que tambien lo están.

**290**. Reducir un incomplejo á complejo, si es quebrado, es lo que aprendimos bajo el nombre de valuarlo; y si es entero, no hay más que proceder de una manera análoga, pero en sentido inverso á la regla anterior, haciendo tantas divisiones como clases de unidades de diferente magnitud tenga el complejo que se desea, y los diferentes cocientes lo constituirán.

En efecto; si $\frac{28506''}{3600}$ se quiere convertir en complejo, dará 425′ y 6″, y 425, dará, dividido por 60, 7^h· y 5′, y será 7^h·, 5′, 6″.

Y el incomplejo 700 onz. = 700 | 16 = 9 lib. 16 onz.
16 9

## ARTÍCULO III.

### ADICION DE COMPLEJOS.

**291**. Regla. *Para sumar los números complejos, se colocan todos los sumandos de manera que las unidades de magnitud semejante formen colum-*

*nas verticales. Despues, empezando por las menores, se suman las de cada magnitud, añadiendo á cada suma las unidades iguales que haya producido ó contenga la suma parcial anterior, deduccion muy fácil de hacer si los números son sexagesimales.*

*Ejemplos.* 1.°

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7° | 55′ | 56″ |
| + | | 37 | 54 |
| + | 8 | | 59 |
| = | 16 | 34 | 49 |

2.°

| | var. | pies | pulg. |
|---|---|---|---|
| | 7 | 2 | 5 |
| + | 3 | 2 | |
| + | 5 | 2 | 9 |
| = | 17 | 1 | 2 |

*Explicacion.* Sólo diremos, para que se comprenda lo que con la práctica se abrevian las operaciones de sexagesimales, que al sumar en el primer ejemplo se dice: 6 y 4 son 10, y 9 son 19 (se pone un 9); y llevo 1, y 5 son 6 y 5 son 11, y 5 son 16; *fuera los seises*, quedan 4. (Quiere decir que 16 decenas de segundo son 160 segundos, los que componen 2 minutos ( = 60″ + 60″ y 40 segundos). Y despues de poner el 4, se sigue diciendo: y llevo 2, y 5 son 7, y 7 son 14 (y se pone un 4 debajo de los minutos); y llevo 1, y 5 son 6 y 3 son 9, *fuera los seises* quedan 3 (que se escribe); y llevo 1 (es decir, que 9 decenas de minuto = 90, valen 1 hora y 30 minutos): 1 que llevo y 7 son 8, y 8 son 16 grados, y por lo tanto, la suma es 16° 34′ 49″.

*Demostracion.* Es la misma que la de los enteros, pues se suman todas las partes de los sumandos, y se reunen, por lo tanto, todos.

Es inútil advertir que los sumandos deben ser homogéneos (75).

## ARTÍCULO IV.

### SUSTRACCION DE COMPLEJOS.

**292.** *Póngase el sustraendo debajo del minuendo de manera que se correspondan unas debajo de otras las unidades de igual magnitud. Hállese en seguida la diferencia entre cada parte del sustraendo y su correspondiente del minuendo, y si alguna de ésta fuera menor que la correspondiente de aquel, añádansele tantas unidades como veces la unidad superior inmediata contenga á otra de las que se consideran, añadiendo despues una de dicha magnitud superior á las semejantes del sustraendo.*

*Ejemplos.* 1.°

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7h. | 15′ | 7″ |
| — | 4 | 18 | 9 |
| = | 2 | 56 | 58 |

2.°

| | ar. | lib. | onz. |
|---|---|---|---|
| | 7 | 2 | 8 |
| — | 4 | 7 | 9 |
| = | 2 | 19 | 15 |

*Explicacion.* Diremos solamente que en el primer ejemplo no pudiendo restar 9 de 7, le añadimos á éste 60, que son las veces que 1′ contiene á 1″ y se restan de 67 las 9, dando de diferencia 58. Despues se restan, no 8 de 5, sino 9 de 15, por no poderse restar de 5, y se halla 6 de diferencia, y se lleva 1 que, con 1 decena de los 18′, forman 2, que no pudiendo restarlas de la 1 sola decena del minuendo, se le agregan 6 que, como son decenas, valen 60, ó sea las veces que 1′ contiene á 1″, y restando de 7 las 2, resultan 5. Restando, finalmente, de 7 horas, no 4, sino 5 horas, por el aumento de una á causa del aumento de 60 minutos del minuendo.

*Demostracion.* Es la misma que la de los enteros, pues se halla la diferencia de todas las partes de los números dados, y debe hallarse la diferencia de ellos, pues en cuanto al aumento dado á algunas del minuendo está compensado con el equivalente dado á otras del sustraendo.

## ARTÍCULO V.

### MULTIPLICACION DE COMPLEJOS.

**293.** Este problema general se divide en dos: 1.° Multiplicar un complejo por un incomplejo. Y 2.° Multiplicar un complejo ó incomplejo por un complejo.

**294.** Aunque parezca que lo mismo es multiplicar un complejo por un incomplejo, que un incomplejo por un complejo, porque el órden de los factores no altera el producto, y porque si bien en los concretos el producto debe ser de la especie del multiplicando, determinada esa especie, se puede tomar como multiplicador el más pequeño; no sucede lo mismo tratándose de números complejos, porque la naturaleza de sus problemas da especial importancia á una parte de uno de los factores que no permite alterar su órden, al ménos mientras no se han reducido á incomplejos, y uno de ellos de la unidad especialmente importante del problema, segun apreciaremos por los ejemplos.

**295.** Regla 1.ª *Para multiplicar un número complejo por un incomplejo, se multiplican por el multiplicador incomplejo todas las partes del multiplicando complejo, haciendo tantas multiplicaciones parciales como términos ó porciones tiene el complejo, añadiendo á cada producto parcial las unidades de igual magnitud que contenga el producto parcial anterior, ó de unidades más pequeñas, para que el resultado sea complejo regular.*

*Problema* 1.° Si en hacer un trabajo mecánico se emplean 3 horas, 2″ y 55″, cuánto tiempo se empleará en hacer 9 obras semejantes.

*Resolucion.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $3^{h.}$ | $20'$ | $55''$ |
| $\times$ | | | 9 |
| = | 30 | 8 | 15 |

*Explicacion.* Diremos, para acostumbrarse á operar abreviadamente con sexagesimales: 5 por 9 son 45 (y se pone un 5), y llevo 4. Despues 5 por 9 son 45 y 4 son 49, *fuera los seises* (que son 8, porque 8 × 6 son 48), queda 1 (que se escribe á la izquierda del 5). Despues 0 por 9 es 0, y 8 que llevo (de la multiplicacion de los segundos), son 8 (que se escriben): 2 por 9 son 18, *fuera los seises*, queda 0 (que no se escribe), porque á la izquierda del 8 no valdria nada. Llevo 3, y 3 por 9 son 27 y 3 son 30 horas, y se tiene el producto total 30 horas 8′ 15″.

*Problema* 2.° De un género que vale á 117 rs. 15 mrs. el metro, se desea saber el costo de 13 metros.

*Resolucion.*

| | | |
|---|---|---|
| | 117 rs. | 15 mrs. |
| $\times$ | | 13 |
| | 351 | 45 |
| | 117 | 15 |
| | 1521 rs. | 195 mrs. |
| = | 1526 rs. | 25 mrs. |

*Explicacion.* Hechas las dos multiplicaciones parciales, resultó un incomplejo irregular de 1521 reales y 195 mrs., porque 195 mrs. componen algunos reales. Deducidos éstos, se añadieron á los 1521, y dió el complejo regular 1526 rs. y 25 mrs.

*Demostracion.* Es la misma que la de los enteros, pues se toman tantas veces todas las partes del multiplicando como unidades tiene el multiplicador.

296. Regla 2.ª *Para multiplicar un complejo ó incomplejo por un multiplicador complejo precisamente, lo más sencillo es reducir el multiplicador á decimal incomplejo, pero de aquella clase de unidades á las que el problema da especial importancia, y haciendo lo mismo con el multiplicando si tambien fuera complejo, pero de cualquiera clase de unidades, se estará en el caso de la multiplicacion de decimales. Si al reducir á incomplejo el multiplicador resulta entero, y el multiplicando es complejo, se estará en el caso de la regla anterior, y si es incomplejo en el caso de un entero concreto por otro.*

297. *Segundo método.* Se puede reducir el multiplicador á incomplejo, generalmente quebrado ordinario, y multiplicarlo por todos los términos del multiplicando sucesivamente, ó de una vez reduciéndolo tambien á incomplejo de sus unidades más pequeñas; pero de todos modos, la operacion resulta pesada y enfadosa.

*Ejemplos. Primer método.* Un obrero, ajustado por dias de 12 horas de trabajo, á 19 rs. 25 maravedís cada dia de 12 horas de trabajo, se desea saber lo que le corresponde por siete dias y cuatro horas.

*Resolucion.* 19 rs., 25 mrs. = rs. 19,7353
7 dias 4 horas = dias. 7,333

$$\begin{array}{r} 592059 \\ 5{,}92059 \\ 592059 \\ 1381471 \\ \hline \end{array}$$

144 rs., 24,44 mrs. 144,7189549 rs.

No considerando más que los centésimos de los factores, se halla un resultado dos centésimos menor.

2.º *método.* 19 rs. 25 mrs. $= 19 \times 34$ m. $+ 25 = 671$ mrs.

$\times$ 7 dias, 4 h. $\frac{7 \times 12\text{ h.} + 4}{12} = \frac{88}{12}$ dias de 12 horas.

*Producto.* $\frac{671 \times 88}{12} = 4920\frac{2}{3}$ mrs. $= 144$ rs. 24,66 mrs.

Resultado poco diferente del anterior y de mayor probable error por el mayor número de operaciones auxiliares que se necesita.

*Demostracion.* Es la misma que la de los enteros concretos y la de los quebrados.

## ARTÍCULO VI.

### MULTIPLICACION DE COMPLEJOS POR EL MÉTODO DE LAS PARTES ALÍCUOTAS.

298. Regla de partes alícuotas se llama el método abreviado de multiplicar números complejos, multiplicando las unidades superiores de ellos y deduciendo de ese producto la parte que al mismo se ha de sumar para obtener el producto total por la correspondiente á las unidades inferiores de los factores que no se multiplican.

Como este método es muy usado en el comercio, á pesar de lo que hemos dicho (283) sobre la decadente importancia de los complejos, debemos aprenderlo, aunque no nos extrememos en su práctica.

**299.** Regla 1.ª *Para multiplicar un complejo por un incomplejo, se multiplican las unidades superiores ó de más importancia del multiplicando por el multiplicador, y al producto se le suman la mitad, tercera parte ó cuarta, etc. del multiplicador, segun que las inferiores del multiplicando que se dejan sin multiplicar compongan la mitad, tercera parte, cuarta, etc., de una de las superiores.*

*Ejemplo.* 7 arrobas de cualquier cosa, á 30 rs. y 17 mrs.

*Resolucion.*

$30 \times 7 = 210$ rs.

17 mrs. $= \frac{1}{2}$ real y $\frac{7}{2} =$ 3 — 17

Producto total. . . . 213 rs. 17 mrs.

*Demostracion.* Evidentemente que si la arroba costara á 30 reales, $30 \times 7 =$ 210 reales sería el costo de las 7 arrobas; pero como cuesta á 17 mrs. más que es $\frac{1}{2}$ real y á 1 real la arroba, las 7 arrobas costarian 7 rs.; á $\frac{1}{2}$ real costarán $\frac{7 \text{ rs.}}{2} = 3$ rs. 17 mrs. Y análogamente si los maravedises del multiplicando que componen $\frac{1}{2}$ real, compusieran $\frac{1}{3}$, se deberia tomar $\frac{1}{3}$ de 7, ó $\frac{7}{3}$; luego la regla es general.

**300.** Regla 2.ª *Cuando los dos factores son complejos y lo mismo cuando lo es sólo el multiplicador, se atiende sólo á sus unidades superiores ó más importantes por los términos del problema, y á las superiores á ellas convertidas en su magnitud, y se obra segun la regla anterior, y al producto resultante se le añade la mitad, tercera parte, etc., del multiplicando, segun que las unidades inferiores del multiplicador, que no se multiplicaron, compongan la mitad, tercera parte, cuarta, etc., de una de las superiores multiplicadas.*

*Demostracion.* Si en el mismo ejemplo anterior no fuera sólo 7 arrobas el multiplicador, sino 7 arrobas y 5 libras, por la regla anterior las 7 arrobas costarian 213 rs. y 17 maravedises; mas como 5 libras es la quinta parte de una arroba, y una arroba vale 30 rs. y 17 mrs., el valor de 5 libras será la quinta parte de 30 17 $= \frac{30 \text{ rs. y } 17 \text{ mrs.}}{5} = 6$ rs. y 3 mrs. $\frac{2}{5}$ que, sumados á 213 17, dan un producto total evidentemente de 219 rs. y 20 mrs. $\frac{2}{5}$.

**Pongamos otro ejemplo de la regla 2.ª, suficientemente explicado para la mejor aplicacion ulterior de la misma.**

76 var. 2 pies de un rico género á 81 pesetas y 1 real la vara.

*Resolucion.*

$$\begin{array}{lrl} & 81 & \text{pts.} \\ & \times\, 76 & \\ \hline & 486 & \\ & 567\phantom{0} & \\ \hline 1.^{er} \text{ producto parcial. . . . . . . . . .} & 6156 & \text{pts.} \\ 2.^{o} \text{. . . . . . . . . . . . . . . . . } \frac{76}{4} = & 19 & \\ 3.^{o}\ \frac{2}{3} \text{ de } 81 \text{ pts. } 1 = \frac{81 \text{ pts. } 1 \text{ rs.} \times 2}{3} = & 6 & 12{,}66 \text{ mrs.} \\ \hline \text{Producto total. . . . . . . .} & 6181 & 12{,}66 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \text{ pts. y } 1 \text{ real} = 325 \text{ rs.} \\ \times\ 2 \\ \hline 650\ |\underline{3\phantom{00000}} \\ 020\quad 216{,}66\ |\underline{34} \\ 20\quad\quad 12{,}6\quad 6 \end{array}$$

*Explicacion y demostracion.* 76 varas á 81 pesetas, evidentemente valen $81 \times 76 = 6156$ pesetas. A 1 real más, que es la cuarta parte de una peseta, como á peseta las 76 varas, valdrian 76 pesetas, á 1 real valdrán $\frac{76 \text{ pts.}}{4} = 19$ pesetas. Pero no son sólo 76 varas, sino 2 pies más, que componen $\frac{2}{3}$ de vara, y como 1 vara vale 81 pesetas y 1 real, los $\frac{2}{3}$ de vara valdrá $\frac{2}{3}$ de 81 1 real, ó sea $\frac{2 \times 81 \text{ pts. y } 1 \text{ real}}{3}$; luego el producto total será 6181 pesetas 12,66 reales.

**301.** *Observacion.* Si la unidad principal, segun los términos del problema, no fuese la vara, sino el pie, habria que reducir á pies el multiplicador, y obrar segun la regla 1.ª, y si el multiplicador fuese de varas, pies y pulgadas, y la unidad principal fuese el pie (es decir, que á 81 pesetas y 1 real el pie se quiere saber el valor, por ejemplo, de 76 varas, 2 pies y 5 pulgadas), se reducirian las varas á pies, y el producto, unido á los pies del multiplicador, formaria uno de los dos términos del mismo, cuyo otro serian las pulgadas; y con pies y pulgadas, por la anterior regla, se obraria análogamente á como se ha hecho respecto á varas y pies.

## ARTÍCULO VII.

### DIVISION DE COMPLEJOS.

**302**. Este problema general se divide en tres. 1.º Dividir un complejo por un incomplejo de diferente naturaleza. 2.º Dividir un complejo ó incomplejo por un complejo de diferente naturaleza tambien. Y 3.º Dividir un complejo por un incomplejo, ó un complejo ó incomplejo por un complejo, pero en los dos casos dividendo y divisor de la misma naturaleza.

**303**. Regla 1.ª *Para dividir un complejo por un incomplejo de diferente naturaleza, se procede dividiendo primeramente las unidades superiores del dividendo por el divisor, y el residuo, si lo hubiere, se reduce á unidades de magnitud inmediata inferior, y al resultado se le añaden las semejantes que tenga el dividendo, y con la suma se forma el segundo dividendo parcial, que se dividirá como el primero, y su cociente será el segundo término del complejo del cociente. Continuándose análogamente mientras en el dividendo haya unidades que considerar ó dividir.*

*Ejemplo.* 715 rs. y 20 mrs. han costado 7 metros de género, y se desea saber á cómo sale el metro.

*Resolucion.*

| | |
|---|---|
| 715 rs. 20 mrs. | 7 |
| 015 | 102 rs., 7 $\frac{5}{7}$ |
| 1 = 34 | |
| 54 | |
| 5 | |

*Demostracion.* Es la misma exactamente que la de dividir enteros abstractos.

**304**. Regla 2.ª *Para dividir un complejo ó incomplejo por un complejo, el método más sencillo es reducir ambos datos á incomplejos enteros ó decimales, debiendo el divisor ser de la clase de unidades principales ó á que dé mayor importancia el problema, y ya incomplejos, se obrará por la regla correspondiente. Tambien se puede reducir el divisor á incomplejo quebrado ordinario de la especie que reclama el problema; y el dividendo á incomplejo tambien de unidades de su ínfima magnitud; y obrar despues, segun la regla de dividir un entero por un quebrado; pero como se pudo ver en la multiplicacion, las operaciones con quebrados de términos muy grandes son pesadas, y por lo tanto, susceptibles de equivocaciones.*

*Ejemplo.* Un pedazo de rico género, cuyo costo es de 715 rs. y 20 mrs., y cuyo largo es de 7 varas, 1 pie, 7 pulgadas, se desea saber á cómo sale el pie, ó cuánto es el valor de un pie de género que se necesita para cubrir un objeto pequeño.

*Resolucion.* 715 rs. 20 mrs. = reales 715, 588.
7 varas, 1 pie y 7 pulgadas = pies 22, 583.

rs. 7 1 5 5 8,8 | 2 2 5 8
0 3 8 1 8 — 3 1,6 9 rs.
1 5 6 0 8
2 0 6 0 0
0 2 7 8

Luego el pie valdrá reales 31,69, y un poco ménos de un centésimo.

*Demostracion.* La conversion de complejos á incomplejos decimales está demostrada (288), y la division de incomplejos tambien (152); luego lo está la regla 2.ª, que se acaba de explicar.

**305.** Regla 3.ª *Para dividir complejos de igual naturaleza, lo primero que hay que hacer es determinar cuál es el dividendo, pues no siempre será el mayor, y sólo puede decirse que se conoce por el enunciado del problema. Una vez determinado dividendo y divisor, se estará en uno de los dos casos de las reglas anteriores, y se obrará con sujecion á la correspondiente.*

*Ejemplo.* Existiendo en un hospicio un fondo de 2420 pesetas y 3 céntimos para comprar prendas de vestir, que cuestan, segun contrato, unas con otras á 7 pesetas y 3 céntimos, se desea saber cuántas prendas se van á adquirir.

*Solucion.* Evidentemente que *tantas* veces como 7 pesetas y 3 céntimos se puedan sacar del fondo, tantos serán los vestidos que se adquieran; y por lo tanto, el dividendo será el fondo disponible y el divisor el costo de una prenda. Luego reduciendo los dos datos á incomplejos decimales de peseta (aunque mejor ó más fácilmente á reales), se tendrá el resultado deseado en pesetas ó reales. (Preferimos en pesetas para no extrañar casos en que alguno de los datos tenga unidades de magnitud inferior á las inferiores del otro.)

Será, pues, 242075 pts. | 775
00957 — $312\frac{275}{775}$
1825
275

Se podrán, pues, adquirir 312 prendas, y quedarán 2,75 rs.

**306.** *Observacion importante.* Como se ve en el anterior ejemplo, aunque un cociente no varía, multiplicando ó dividiendo dividendo y divisor por un mismo número, el residuo sí varía al tenerlo que considerar aisladamente como resto del dividendo. El residuo del ejemplo es $\frac{275}{775}$ enteramente igual al $\frac{2,75}{7,75}$ que daria la division de los decimales sin convertirlos en enteros, multiplicándoles por 100, con la supresion del signo decimal; pero al considerar su residuo, no como parte de prendas que es el cociente, sino como resto de pesetas, no será 275 pesetas, sino 2,75 pesetas.

## ARTÍCULO VIII.

### EJERCICIO SOBRE COMPLEJOS.

**307.** El ejercicio sobre complejos es interesante para que el estudiante se acostumbre á reflexionar. Ponemos á continuacion, como guía, algunos ejemplos; y ademas los problemas de concretos simples (169) podrán servir para proponerlos, convirtiéndolos al enunciarlos en complejos.

*Convertir en incomplejos los complejos siguientes.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| En incomplejo de libras en quebrados ordinarios y decimales...... | 3 arrob. | 4 lib. | 8 onz. | y | 13 ad. |
| | 3 | 23 | 4 | | 11 |
| En incomplejo de pie ............. | 8 var. | 2 pies | 7 pulg. | | 15 lín. |

*Sumar los complejos.*

3 ar. 8 lib. 5 onz. + 2 quint. 0 ar. 4 lib. 17,4 ad. + 1 ar. 0 lib. 7 onz. 14 ad.

*Restar los complejos.*

117 var. 8 pies 4 pulg. × 5 lín. — 102 var. 0 pies 7 pulg. 9 lín.

*Multiplicar los complejos.*

1.º 17 h. 15′ 25″ × 37. 2.º 2 quint. 3 arrob. 12 lib. 17 onz. × 37 rs. y 24 mrs.

*Dividir los complejos.*

1.º 527 pts. 3 rs. 24 mrs. : 89 2.º 617 rs. 24 mrs. : 79 var. 2 p. 7 pulg.
3.º 817 p. 2 var. 17 h. : 17 pulg. 4.º 119 var. 2 p. 7 p. : 8 var. 2 p. 3 pulg.

El enunciado de este último problema y análogamente y más fácilmente de los otros puede ser: de una pieza de 119 varas, 2 pies y 7 pulgadas, ¿cuántos trajes saldrán de á 8 varas, 2 pies y 3 pulgadas?

# CAPÍTULO X.

## SISTEMA DE PESOS Y MEDIDAS.

## ARTÍCULO PRIMERO.

### PRELIMINARES.

**308.** SISTEMA DE PESOS Y MEDIDAS *se llama el conjunto de unidades de distinta naturaleza y de diferente magnitud, reales ó imaginarias, que se ha convenido emplear para convertir en números concretos (complejos ó incomplejos) las cantidades contínuas de magnitud indeterminada, y las discretas cuando se prescinde del número de sus partes ó unidades naturales, y de unas y otras cuando se atiende solo á su grado de pesadez.*

**309.** Las unidades que constituyen el sistema son y tienen que ser necesariamente de diferente especie, porque diferente es la naturaleza de las cantidades concretas; y tienen que estar divididas y subdivididas, ó haberlas de diferente magnitud en cada especie, porque de otro modo casi todas las mediciones y pesos producirian fracciones innecesariamente.

Para convertir, pues, en cantidad determinada ó número la indeterminada del tiempo que media entre un acontecimiento y otro, se emplea la unidad de tiempo *año* y sus divisiones ó unidades de igual naturaleza pero de menor magnitud, meses, dias, horas, etc. Para medir lo largo de un camino, se emplea la unidad vara ó metro y sus múltiplos legua, kilómetro, etc.; y para extensiones menores sus divisiones pies, pulgadas ó decímetros, centímetros, etc. Para convertir en cantidad determinada de extension la cantidad discreta de 1000 soldados, se prescinde de la unidad soldado y se averigua las varas que ocupan en la formacion que se proponga. Finalmente, para convertir en cantidad determinada de peso una cantidad contínua de una gran barra de plomo, ó la discreta de 100 melones (y aunque esta no fuera determinada y fuera solo una porcion dada de melones), se desatiende en el plomo, si es una ó más barras y su tamaño, y en los melones se prescinde de la unidad melon, y sólo en uno y otro caso se atiende al grado de pesadez (que es la fuerza llamada científicamente gravedad) con que todos los cuerpos se dirigen al centro de la tierra, más fuertemente aquellos de materia más compacta, porque el aire no les opone tanta resistencia proporcionalmente.

**310.** Hay dos sistemas de pesos y medidas: el antiguo, cada dia más en desuso, y el moderno, cada dia más generalizado; y ambos tienen una parte que es comun á los dos, porque probablemente no se sustituirá nunca por ninguna exclusiva del moderno.

311. El sistema antiguo, que no es igual en todas las naciones, ni áun en todas las provincias de un mismo Estado, consiste en una série de unidades de tantas especies como reclama la diferente naturaleza de las cosas; y dentro de cada especie otra série de unidades de diferente magnitud que equivalen á múltiplos y submúltiplos de las mayores, que pueden llamarse principales; pero que, en realidad, tales no las tiene el sistema, ni ménos hay en él ninguna unidad que pueda llamarse fundamental como la hay en el moderno.

Si se trata del peso de grandes cantidades, puede llamarse unidad principal el *quintal*, y sus divisiones serán las *arrobas*, *libras*, etc.; pero si se trata del peso de cantidades pequeñas, la arroba, y á veces la libra, se mira como principal. Es, por lo tanto, arbitrario el tomar como unidad principal la que se quiera, pero generalmente se considera tal la mayor de las que caben en la cantidad que se mide ó que se pesa.

312. El sistema moderno es más regular que el antiguo; tiene unidad principal en cada especie, y ademas unidad fundamental de todo el sistema. Llámase *métrico*, ó *métrico decimal*. Decimal, porque cada unidad contiene diez veces á la inferior inmediata de su especie; y métrico, porque el metro ó extension de poco más de una vara es la unidad fundamental del sistema.

313. El tiempo sólo puede medirse imaginariamente (por años, dias, horas, etc.), por más que sean reales y positivas las bases de sus medidas, pues que es el sol el que determina la duracion ó magnitud del año y del dia (aparentemente, pues en realidad es la tierra la que se mueve, y con sus movimientos de rotacion y traslacion produce el año y el dia), y por más que materialmente pueda apreciarse en las muestras de los relojes por las vueltas de sus manecillas ó agujas.

314. Los cuerpos sólidos (duros) por grandes que sean, hasta la misma tierra que habitamos, y las partes materialmente distintas de ella ó imaginariamente separadas, se miden por medio de otro cuerpo de magnitud convencionalmente determinada, y sus múltiplos y submúltiplos (que en el sistema antiguo, como ya indicamos, se consideran unidades ó medidas principales, segun la magnitud del objeto ó extension de que se trata); medidas que tambien son distintas si se trata del largo de los cuerpos, prescindiendo de su ancho y su grueso ó profundo, ó se trata de lo largo y lo ancho solamente, ó si se trata de lo largo, lo ancho y lo grueso ó profundo de los cuerpos.

315. Las medidas para determinar lo largo de los cuerpos, prescindiendo de lo ancho y de lo grueso, ó del ancho, prescindiendo de lo largo y grueso, ó de lo grueso, prescindiendo de lo largo y de lo ancho, se llaman *lineales* ó *longitudinales*. Las de lo largo y lo ancho, á la vez considerado, prescindiendo de lo grueso, se llaman *superficiales;* y las medidas de los cuerpos, con relacion á su largo, ancho y grueso, se llaman *cúbicas*.

Por ejemplo, el metro en el sistema moderno, y la vara en el antiguo, son medidas lineales; superficiales son el metro cuadrado ó vara cuadrada, y cúbicas, el metro cúbico y la vara cúbica.

316. Los cuerpos materiales líquidos se miden por la magnitud del

espacio ó lugar que ocupan. Esto es, por el tamaño de la vasija de magnitud, convencionalmente determinada que los contiene ó puede contenerlos en una ó muchas veces. El comercio ha exceptuado el aceite que se vende al peso.

**317**. La pesadez de los cuerpos, que ya indicamos que es la fuerza con que se acercan á la tierra, se mide por la pesadez de otros cuerpos de magnitud convencionalmente determinada, puesto el cuerpo que se pesa en un extremo de una balanza, y las pesas en la opuesta; ó por otros mecanismos que ofrecen igual resultado.

Los pesos y medidas materiales son pocos en número y equivalen á pesos y medidas de pequeñas cantidades, pues las grandes se miden ó pesan por los múltiplos imaginarios de ellas.

En la geometría nos ocuparemos de sus circunstancias, y sólo allí, por lo tanto, completaremos la explicacion del sistema moderno, que va á ser objeto del artículo siguiente; pues del antiguo basta lo dicho y lo que ofrece la simple inspeccion de la Tabla auxiliar III.

## ARTÍCULO II.

### SISTEMA MÉTRICO DECIMAL.

**318**. El metro es igual á la diezmillonésima parte del cuadrante, ó cuarta parte del meridiano que pasa por París, y equivale en medidas antiguas á 3 pies, 7 pulgadas y 0,74 líneas.

Meridiano terrestre de un lugar es un círculo máximo imaginario que pasa por los polos Norte y Sur del mundo y por cada punto de la tierra.

**319**. Al metro se le dió ese orígen para que más fácilmente pudiera generalizarse el sistema sobre él fundado, y fuera más difícil variarlo con el curso de los tiempos. Con este objeto, ademas, se procuró fuese la extension que fácilmente puede una persona regular medir con los brazos abiertos.

Las unidades de diferente especie del sistema métrico que reclama la diferente naturaleza de los casos y que se han establecido, son las siguientes:

**320**. El *metro*, cuyo orígen y circunstancias acabamos de explicar, sirve para las medidas longitudinales.

Metro es palabra griega μετρου, que significa medida.

El *área* para las medidas *superficiales* es un cuadrado cuyos cuatro lados iguales tienen cada uno de largo diez metros. La palabra área es la latina *área*, que significa campo de cultivo, y equivale la medida próximamente á 143 varas cuadradas.

Para formarse de ella una idea, consideremos lo largo y lo ancho de un salon cuadrado, cuyos lados sean de 10 metros, y cuyos rincones sean de igual figura á las puntas de un pañuelo de bolsillo.

El *esterio* ó *metro cúbico* para la medida de los cuerpos, atendiendo á su largo, á su ancho y á su altura, profundidad ó grueso, es un cubo (como si dijéramos un dado), cuyos lados iguales son de un metro.

El *litro* para las medidas de capacidad de ácidos y líquidos, es un vaso ó vasija, de cualquier figura, pero cuya capacidad interior es igual á la de un cubo (dado), cuyos lados iguales son de la décima parte de un metro.

Litro, palabra griega λιτρα, que era el nombre de una medida de líquido entre los griegos.

El *gramo* para las medidas de peso es lo que pesa en el vacío (ó sea sin el aire que respiramos) un volúmen de agua destilada á la temperatura de cuatro grados centígrados, igual á un cubo cuya arista (lado) sea la centésima parte del metro. Ese nombre se deriva de la palabra griega γραμμα, que quiere decir medida de peso.

**321.** Estas medidas principales, que como acabamos de ver, se derivan todas del metro, tienen sus múltiplos y sus submúltiplos ó divisores arreglados, como se dijo, por el sistema decimal, y expresados los múltiplos con palabras griegas y los submúltiplos con latinas del modo siguiente:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Múltiplos: | *Deca*, | *Hecto*, | *Kilo*, | *Miria*, |
| que dicen. . . . | diez, | ciento, | mil, | diez mil. |
| Divisores: | *deci*, | *centi*, | *mili*, | |
| que dicen. . . . | décimo, | centésimo, | milésimo. | |

El metro, pues, se divide en diez decímetros, cien centímetros y mil milímetros, y diez metros forman un decámetro, cien metros un hectómetro, mil un kilómetro y diez mil un miriámetro. Y análogamente las demas medidas tienen sus múltiplos y submúltiplos con nombres semejantes á los dichos; así el litro se divide en diez decílitros, etc.

**322.** Las medidas de superficie y de volúmen ó cúbicas no son verdaderos decimales, pues en las primeras las unidades de diferente magnitud van aumentando en los múltiplos de ciento en ciento, y disminuyendo análogamente en los submúltiplos. Y en las segundas los múltiplos aumentan de mil en mil, y de mil en mil disminuyen los submúltiplos*.

La *hectárea* y la *centiárea* son una excepcion verdaderamente, porque se ha convenido en que cien áreas compongan una hectárea y cien centiáreas un área; pero el área se llama tambien *decámetro*, y tiene, sin embargo, 100 metros cuadrados; el hectómetro cuadrado no tiene 100 metros, sino 10000 ó 100 lineales en cada uno de sus lados, y análogamente los submúltiplos.

**323.** De las unidades principales del sistema, hay algunas que el uso las ha hecho pasar á la categoría de divisores de otros verdaderos múltiplos que se toman como principales, por ser su magnitud más á propósito para el uso á que se destinan. Y el uso y causas semejantes ha hecho tambien que no se empleen algunos múltiplos y submúltiplos, y se hayan inventado otros no semejantes á los admitidos en otras especies.

Así el gramo, medida demasiado pequeña para el uso de los pesos más frecuentes, se ha sustituido por el kilógramo, y para pesos de grandes cantidades se han establecido otros múltiplos del kilógramo, como son el *quintal métrico*, igual á diez miriágramos ó cien kilógramos, y la *tonelada* de peso mil kilógramos.

Tambien para medir grandes distancias, se toma como unidad principal el kilómetro = 1000 metros, y han caido en completo desuso los decámetros y hectómetros, y ni áun se emplea el miriámetro, por grande que sea la distancia

---

* Para formarse una idea de las medidas superficiales y cúbicas sin llegar al complemento de esta explicacion, que daremos en la geometría, segun indicamos, no hay más que para las cuadradas considerar cuántos dados de juego cabrán en el fondo de una caja cuadrada, y se conocerá que cabrán tantas filas de ellos como dados tiene una fila; así, si son 10 serán 10 filas de á 10, ó sea $10 \times 10 = 100$. Y para las cúbicas considerar cuántas tongadas de á $10 \times 10 = 100$ cabrán en la caja, si es tan alta como larga y ancha, y se verá que son tantas como dados tiene una fila, y por lo tanto, $10 \times 10$, que es un tongada $\times 10 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$.

de que se trate. El kilómetro es lo que un hombre á paso regular anda en 12 minutos.

En las Tablas auxiliares de la Aritmética (IV y V) se verán todas las medidas del sistema métrico decimal, incluso las cúbicas, que no figuran en la ley de pesas y medidas. En la III se verán las medidas del sistema antiguo y la correspondencia con el moderno.

## ARTÍCULO III.

### ESCRITURA Y LECTURA DE CONCRETOS DEL SISTEMA MÉTRICO-DECIMAL.

**324.** Para escribir los números concretos del sistema métrico-decimal, se siguen las mismas reglas que para escribir los decimales de otra naturaleza, pues los múltiplos se consideran como decenas, centenas, millares, etc., y los submúltiplos como décimos, centésimos, etc., pudiéndose dictar tambien (244) separadamente los enteros y decimales, ó todos como decimales y áun tambien como complejos, aunque no lo sean realmente.

Así, cuarenta kilómetros, cinco metros y cuatro milímetros, se escribe $40.005^{m},004$, y considerando el kilómetro como unidad principal, evidentemente $40^{k},005004$.

Y cuatrocientos cuatro litros y treinta y dos centílitros, que tambien pueden dictarse cuarenta mil cuatrocientos treinta y dos centílitros, se escribe 404,32 litros.

Y siete kilógramos y siete gramos, que se pueden dictar siete mil siete gramos, se escribe $7007^{g}$, y tomando por unidad principal, como es costumbre, el kilógramo, $7,007^{k}$.

**325.** Para leer los números concretos del sistema métrico, se leen como los decimales abstractos, dando á los enteros el nombre que corresponde á la unidad del sistema que se tome como principal, y á los decimales el que le corresponda, segun cual sea la unidad principal, ó segun que se quiera leerlo en dos partes como complejos ó como un solo número concreto de una vez.

Así, $347^{k},58$, se lee trescientos cuarenta y siete kilómetros y cincuenta y ocho centésimos, ó trescientos cuarenta y siete kilómetros y cincuenta y ocho decímetros.

**326.** Para escribir los números de unidades cuadradas ó cúbicas, ó sean superficiales y de volúmen, no puede hacerse por la regla general de los decimales, pues hay que tener en cuenta que las unidades cuadradas van aumentando ó disminuyendo de 100 en 100, y de 1000 en 1000 las cúbicas. Es, pues, preciso que en las cuadradas los múltiplos superiores inmediatos á la unidad principal ocupen los lugares de decenas y centenas, y análogamente los de millares y decenas de millar los múltiplos siguientes. Y los submúltiplos inmediatos á las unidades principales ocupen los lugares de los décimos y centésimos, y los siguientes los de los milésimos y diezmilésimos. Y en las medidas cúbicas los múltiplos inmediatos á las unidades principales, deben ocupar los lugares de las decenas, centenas y millares, y los submúltiplos inmediatos á las unidades principales los lugares de los décimos, centésimos y milésimos. Y análogamente los demas múltiplos y submúltiplos, poniendo ceros en los lugares en que convenga, para que cada cifra significativa esté en el lugar que le corresponda.

*Ejemplo* 1.° Ocho miriámetros, siete kilómetros, cinco hectómetros, cuatro decámetros, cinco metros y ocho centímetroscuadrados, se escribe 807050405,0008 metros cuadrados.

*Ejemplo* 2.° Dos hectómetros, ocho decámetros, cuatro metros y seis decímetros cúbicos, se escribirá 2008004,006 metros cúbicos, y tomando el hectómetro por unidad principal, 2,008004006 hectómetros cúbicos. Como se ve, el cambiar la unidad principal, equivale á trasladar el signo, lo que no altera el valor del decimal, cambiando correspondientemente el nombre de la unidad principal. En efecto, 44,4 es diez veces mayor que 4,44; pero evidentemente lo mismo es 44,4 metros que 4,44 decámetros; pues 4 decámetros son 40 metros, y 4 décimos de decámetro son 4 metros, y 4 centésimos de decámetro son 4 decímetros. Análogamente en decimales de concretos cuadrados ó cúbicos.

**327.** Para leer los concretos cuadrados ó cúbicos, se leen como los demas del sistema, pero teniendo en cuenta que las cifras decimales deben ser en los cuadrados pares, y múltiplos de tres en los cúbicos; y que habrá que completar con ceros los que falten. Así, $7^m,7$ cuadrados, se leerá siete metros y setenta decímetros cuadrados; y $8^m,45$ cúbicos, se leerán ocho metros y cuatrocientos cincuenta decímetros cúbicos. Fúndase esto en que no hay cuadrado decimal de cifras decimales par, ni cubo de cifras que no sean tres ó sus múltiplos, pues $0,4 \times 0,4 = 0,16$ y $0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,064$.

**328.** Las operaciones sobre concretos del sistema métrico, se hacen una vez escritos por las reglas anteriores, lo mismo que las de los decimales ordinarios.

## ARTÍCULO IV

**329.** EJERCICIO SOBRE CONCRETOS DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL.

1.° Escríbense los números siguientes:
Siete hectómetros, cuatro metros y cinco centímetros.
Noventa y cuatro decálitros y setenta y cinco mililitros.
Ocho decámetros cuadrados, siete metros y ocho centímetros.
Seis decálitros cúbicos, dos metros y ocho decilitros,

2.° Léanse los números siguientes de todas maneras.

$7^k,875407$. $207456^m,45$.
2007 metros cuadrados. 7004,4005 litros cúbicos.

3.° Súmense los números siguientes, reduciéndolos préviamente á una misma unidad principal.

$57^k,4577 + 50074^m,57 + 87^{dec.},576$.

4.° Réstense los números siguientes, reduciéndoles á una unidad principal.

$578^k,57607$ $37457^m,857$.

5.° Multiplíquense los números siguientes:

$37^m,007 + 45^m,2$.

6.° Division: litros 3027,45 han cabido en 37,2 barriles, ó sea 37 y uno de 2 décimos de la magnitud de los grandes, y se desea saber cuánto contiene cada barril.

Pónganse diferentes ejemplos y problemas semejantes al anterior, hasta que el estudiante los resuelva con facilidad.

# LIBRO SEGUNDO.

## ARITMÉTICA SUPERIOR.

# CAPÍTULO PRIMERO.

## RECAPITULACION Y COMPLEMENTO DE LOS PRINCIPIOS TEÓRICOS RELATIVOS Á LAS OPERACIONES PRINCIPALES DE LA ARITMÉTICA.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**330.** *Aritmética superior* llamamos á la parte de la Aritmética que es ménos usual y conocida y es más elevada y difícil de entender, y que comprende, segun nuestro criterio (y comprenderá este libro): la recapitulacion y complemento de los principios teóricos de la Aritmética inferior; la teoría de la divisibilidad de los números y sus principales aplicaciones, así como la de los decimales y razones y proporciones; la elevacion á potencias y extraccion de raíces, y nociones sobre las progresiones y logaritmos y uso práctico de estos.

### ARTÍCULO II.

#### SOBRE LA NUMERACION DÉCUPLA Y LA DECIMAL.

**331.** El sistema de numeracion de enteros, llamado décuplo (40), para distinguirlo del decimal correspondiente á los quebrados decimales, no encierra verdadera teoría, pues se compone de convenciones verdaderamente prácticas que ni áun admiten demostracion (57), por lo que nos ceñiremos á recordar de uno y otro los principios teóricos que nacen de las convicciones que los constituyen, y tambien sentaremos alguno nuevo.

**332.** *Lema* r *. Un número entero no varía de valor aunque á su izquierda se le pongan uno ó varios ceros. *Demostracion* se dió (56).

**333.** *Lema* r. Un número entero se hace diez, ciento, etc., veces mayor, añadiéndole á su derecha uno, dos, etc. ceros. *Demostracion* se dió (54).

---

* A todas las verdades ya conocidas y que se repiten, se les pone la señal *r*, y ademas se expresan en letra de menor tamaño, aunque por su importancia requieran otra.

334. *Lema recíproco* r. Un número entero, terminado en ceros, se hace diez, ciento, etc., veces menor, suprimiendo de su terminacion uno, dos, etc., ceros. *Demostracion* se dió (55).

335. *Lema* r. Un número decimal propio ó impropio no varía de valor aunque á su derecha se le pongan ceros. *Demostracion* se dió (248).

336. *Lema* r. Un número entero puede siempre considerarse como un decimal impropio con ceros á la derecha del signo decimal. *Demostracion* se dió (250).

337. Lema. *Un número decimal propio, ó sin enteros, se hace diez, ciento, etc. veces menor, poniéndole uno, dos, etc., ceros entre el signo decimal y la primer cifra decimal significativa, y recíprocamente un decimal sin enteros y con ceros á la derecha del signo decimal, se hará diez, ciento, etc., veces mayor, suprimiendo uno, dos, etc., ceros de los dichos.*

Porque la cifra que represente décimos en un decimal sin enteros, representará centésimos, diez veces menores que los décimos, si se le pone entre ella y el signo decimal un cero, y semejante disminucion de valor sufrirán todas las demas partes del decimal; y análogamente agregando dos, tres ó más ceros á la derecha del signo, é inversamente suprimiéndolos.

338. *Lema* r. Un número decimal, con ó sin enteros, se hace diez, ciento, etc., veces mayor, trasladando el signo decimal uno, dos, etc., lugares hácia la derecha, y recíprocamente un decimal se hace diez, ciento, etc., veces menor trasladando el signo decimal uno, dos, etc., lugares hácia la izquierda. *Demostracion* se dió (250 y 251).

339. Explicados en la aritmética inferior el sistema de numeracion de enteros y el de los decimales, y recordados ahora los principios teóricos de tanta sencillez como grande aplicacion que de tales sistemas se deducen, concluiremos este artículo considerando lo que sería otro sistema de numeracion, por ejemplo, el que podria llamarse docenario ó duodecimal.

Constaria de doce cifras, y con ellas podrian escribirse evidentemente todos los números imaginables, cuya expresion oral sería *cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, doce y uno, doce y dos... doce y nueve, dos doces ó veinte,* ú otro nombre inventado para expresar dos docenas, etc., etc.

Las ventajas de este sistema serian las consiguientes á la diferencia que hay entre el 10 y el 12, de ser el 10 sólo divisible por 2 y por 5, y el 12 serlo por 2, por 3, por 4 y por 6, la que apreciaremos mejor más adelante. Pero como ya indicamos (40), no es de esperar que nunca pueda cambiarse de sistema, por lo que creemos completamente inútil el aprender la relacion que hay entre el establecido y otro cualquiera, como enseñan algunos autores, tomando en consideracion hasta el binario, ó sea el que se compondria de unidades de diferentes órdenes, cada una de las que contendria sólo dos veces á la de órden inferior inmediato.

## ARTÍCULO III.

### SOBRE LA SUMA.

340. Lema. *Una suma aumenta ó disminuye en tantas unidades como se suman ó restan respectivamente á cualquier sumando, ó como compongan las que se suman ó restan á varios, ó como tenga de exceso la suma de las que se añadan ó quiten á unos sumandos sobre la suma de las que se quiten ó añadan respectivamente á otros.*

Porque la regla y la demostracion de la adicion (70) evidencian que en la suma aparecerán como aumento ó disminucion todas las unidades que se añadan ó quiten á varios sumandos, ó como excedan las que se añadan ó se quiten de las que se quiten ó añadan.

**341**. Lema. *Si á algunos ó todos los sumandos se les suma ó resta igual cantidad, la suma quedará aumentada ó disminuida respectivamente en tantas unidades como tenga el producto de las añadidas á cualquier sumando por el número de sumandos aumentados.*

Porque si á los sumandos $3 + 4 + 2 = 12$ se les suma á todos por ejemplo 3, ó solamente al segundo y tercero, la suma aumentará por el lema anterior en $3 + 3 + 3$ en el primer caso y en $3 + 3$ en el segundo, ó sea $3 \times 3$ en uno y $3 \times 2$ en otro. Y análogamente quitando igual cantidad á varios sumandos.

**342**. Teorema. *Una suma queda multiplicada ó dividida por igual número por el que se multipliquen ó dividan todos los sumandos, y por lo tanto lo mismo será multiplicar ó dividir la suma que multiplicar ó dividir respectivamente todos los sumandos.*

*Demostracion.* Si tenemos, por ejemplo, que sumar $3 + 4 = 7$, y ambos sumandos los duplicamos, en vez de cada uno, tendremos dos iguales en valor al duplo de uno, esto es $(3 + 3) + (4 + 4)$, cuya suma evidentemente será 14, duplo de 7. Y como lo mismo se demostraria multiplicando pór cualquier número todos los sumandos, ó dividiéndolos, pues sacando, por ejemplo, la mitad de ellos, de todas sus mitades tendríamos la mitad de la suma, el teorema es general y queda demostrado.

**343**. *Corolario.* Una suma no queda duplicada, triplicada, etc., aunque se dupliquen ó tripliquen uno ó varios sumandos como no sean todos, ni dividida por un número aunque por él se dividan algunos sumandos; y sólo sí aumentará ó disminuirá en tantas unidades como compongan los aumentos ó disminuciones que experimenten los sumandos en virtud de la multiplicacion ó division de que hayan sido objeto, porque se deduce claramente del teorema anterior y de los lemas que le preceden.

**344**. Las anteriores verdades prueban la necesidad de encerrar en paréntesis los sumandos que sumados deban formar factores, y los factores cuyos productos constituyan sumandos, pues $(3 \times 2) + 4$, no es lo mismo que $3 \times (2 + 4)$, porque $6 + 4 = 10$ y $3 \times 6 = 18$.

## ARTÍCULO IV.

### SOBRE LA RESTA.

**345**. *Lema* r. Una resta ó diferencia entre dos números, aumenta en tantas unidades como se suman al minuendo ó se restan al sustraendo; y disminuye en tantas como se restan al minuendo ó se suman al sustraendo; y consiguientemente la resta permanece invariable si igual número se suma ó resta al minuendo y al sustraendo. *Demostracion* se dió (75).

La primera parte se expresa vulgarmente diciendo que á la resta le sucede lo mismo que al minuendo y lo contrario que al sustraendo, lo que no es rigorosamente exacto, si no se expresa que el aumento ó disminucion ha de ser por vía

## ARTÍCULO VI.

### SOBRE EL COCIENTE.

357. *Teorema* I. Un cociente queda multiplicado por igual número por el que se multiplica el dividendo ó se divide el divisor, y queda dividido por el número por el que se divide el dividendo ó se multiplica el divisor. Y finalmente, el cociente no varía si por igual número se multiplican ó dividen dividendo y divisor. *Demostracion* se dió (133).

Las dos primeras partes del teorema se expresan vulgarmente diciendo que al cociente le sucede lo mismo que al dividendo y lo contrario que al divisor, lo que no es rigorosamente exacto, si no se expresa que el aumento y disminucion deba ser por multiplicacion ó division, y no por suma ó resta.

358. *El cociente de una division inexacta ó aproximada no se altera multiplicando ó dividiendo dividendo y divisor por un mismo número, pero el residuo quedará multiplicado ó dividido por tal número, aunque su valor intrinseco como parte del cociente no será alterado.*

*Demostracion.* Si tenemos $52 : 6 = 8\frac{4}{6}$, y triplicamos, por ejemplo, dividendo y divisor, pero descomponiendo aquel antes en dos sumandos, uno de los cuales sea igual al residuo, pues $52 = 48 + 4$, tendremos $(48 \times 3) + (4 \times 3) : (6 \times 3)$. En esta division tendremos que la primera parte ó primer término del dividendo $48 \times 3$, dividido por el divisor $6 \times 3$, debe producir el mismo cociente 8 por el teorema anterior. Y la segunda parte del dividendo $4 \times 3$ no puede alterar tal cociente, no sólo porque destruiria la verdad de tal teorema, sino porque si 4 era en la division primitiva residuo por ser menor que el divisor 6, residuo tendrá que seguir siendo $4 \times 3$, porque debe ser menor evidentemente tambien que $6 \times 3$; pero triplicado como dice el teorema que se demuestra, aunque su valor, como parte del cociente, será el mismo, pues $\frac{4}{6} = \frac{4 \times 3}{6 \times 3}$.

359. Teorema. *El cociente correspondiente á un dividendo compuesto de varios factores y á un divisor cualquiera, es igual al cociente de la division de uno de los factores por el divisor, multiplicado este cociente por los demas factores del dividendo no divididos.*

*Demostracion.* Si tenemos, por ejemplo $(4 \times 9) : 2$, el cociente es $\frac{4}{2} \times 9$, porque éste, multiplicado por el divisor 2, da el dividendo propuesto, pues

$$\left(\frac{4}{2} \times 9\right) \times 2 = \frac{4}{2} \times 2 \times 9 = \frac{4}{2} \times 2 \times 9 = 4 \times 9,$$

que es el dividendo.

Δ 360. Teorema. *El cociente correspondiente á un dividendo cualquiera y á un divisor compuesto de varios factores, es igual al cociente que resulta definitivamente de dividir primero el dividendo por uno de los factores del divisor; despues el cociente de esa division por otro de los factores del divisor propuesto, y sucesivamente por todos ellos, si todos los cocientes son exactos, á excepcion del primero que es indiferente.*

*Demostracion.* Si tenemos $745 : (4 \times 2 \times 3)$ haciendo las divisiones dichas, darán

$$\begin{array}{llll}
745 & \underline{|\,4\quad} & & \\
34 & 186 & \underline{|\,2\quad} & \\
24 & 06 & 93 & \underline{|\,3\quad} \\
01 & 0 & 03 & \\
 & & 0 & 31\frac{1}{24}
\end{array}$$

, por cuyas operaciones podremos decir que $745 = 4 \times 186 + 1$ y $186 = 2 \times 93$ y $93 = 3 \times 31$, y sustituyendo en la primera igualdad, en lugar de 186, su igual $2 \times 93$, y en lugar de 93 su igual $3 \times 31$, será $745 = 4 \times 2 \times 3 \times 31 + 1$; luego 31 que, multiplicado por el divisor propuesto $4 \times 2 \times 3$, es igual al dividendo ménos el residuo 1, será el cociente verdadero; residuo que, para formar parte del cociente, será evidentemente $\frac{1}{4 \times 2 \times 3} = \frac{1}{24}$.

**361.** Lema. *Un cociente aumenta ó disminuye en una unidad, cuando al dividendo se le añaden ó quitan tantas como tiene el divisor; y consiguientemente el cociente aumentará dos unidades ó disminuirá en ellas, si al dividendo se le añaden ó quitan el doble de las que tiene el divisor.*

Porque si tenemos, por ejemplo, que dividir 12 por 4, como el cociente 3 multiplicado por 4 debe dar el dividendo, si este aumenta en 4, el cociente tendrá que aumentar en 1 para tomar una vez más al divisor, á fin de que el producto iguale al dividendo aumentado. Y análogamente se demuestra si al dividendo se le suman 8, 12, etc., ó se restan 4, 8, etcétera. Y en efecto, $12 : 4 = 3$ y $16 : 4 = 4$ y $8 : 4 = 2$.

**362.** *Observacion.* La anterior verdad es la sola de alguna importancia y aplicacion entre las relativas á las variaciones del cociente como consecuencia de sumar ó restar cantidades al dividendo ó divisor. Tales variaciones son ademas tan irregulares, que no se prestan fácilmente á que sobre ellas se formule una ley ó regla. Pruébese, en efecto, á dividir un número cualquiera por otro, y háganse despues divisiones con los mismos datos, pero aumentados ó disminuidos de 1, de 2. etc., sucesivamente, y se verá la irregularidad que hemos indicado.

**363.** *Teorema.* Todas las verdades demostradas sobre el cociente son aplicables á los quebrados.

*Demostracion.* Como todo quebrado equivale á una division indicada de su numerador por su denominador, es evidente que el valor del quebrado equivale al del cociente de la division que representa, y por lo tanto, que le sucede lo mismo, relativamente á las alteraciones del numerador ó denominador, que á cualquier cociente por las alteraciones del dividendo ó divisor.

En efecto, $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{15}{8}$ y $\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) : \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} : \frac{4}{15} = \frac{90}{48} = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$.

# CAPÍTULO II.

## DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**364**. *Divisibilidad* de los números se llama la posibilidad que ofrecen unos más que otros de dividirse exactamente por algunos, pues aunque todo número es multiplicable, digámoslo así, por cualquier otro, todo número no es divisible exactamente por cualquiera, y hay muchos que solo son divisibles por sí mismos y por la unidad.

### ARTÍCULO II.

#### DEFINICIONES SOBRE LA DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS.

**365**. 1.ª Número primo *ó factor simple se llama el que sólo es divisible exactamente por sí mismo y por la unidad; divisibilidad de que gozan todos los números imaginables.*

Así son primos los números 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc.

**366**. 2.ª Número compuesto *ó factor compuesto se llama todo número que es divisible exactamente por otro ú otros, ademas de serlo por sí mismo y por la unidad.*

Así son compuestos 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, etc., porque 4 es divisible exactamente por 2, ademas de serlo por 4 y por 1. Y 6 es divisible por 2 y por 3 ademas de serlo por 6 y por 1, etc.

**367**. 3.ª Múltiplo *de un número se llama, como ya sabemos* (88), *el que es divisible exactamente por él, y divisor ó múltiplo de un número es el que lo divide exactamente.*

Así, 12 es múltiplo de 4 y de 3, porque $3 \times 4$ y $4 \times 3$ dan 12, y 4 es múltiplo de 2, porque $2 \times 2 = 4$ y 24 es múltiplo de 12, etc. E inversamente 12 es submúltiplo ó divisor de 24, etc.

**368**. 4.ª Números primos entre sí *se llaman los que aunque no sean los dos primos, ni aun ninguno de ellos, no tienen más divisor comun que la unidad.*

Así 10, aunque es factor compuesto (porque es divisible por 5 y por 2); pero es primo con 9, que tambien es compuesto (porque es divisible por 3), porque ni 9 es divisible por 5, ni por 2, ni 10 por 3, y el único divisor comun que tienen es la unidad, que esa divide á todos los números.

**369.** 5.ª MÁXIMO COMUN DIVISOR *de dos ó más números se llama al mayor de los divisores comunes que tengan ellos.*

Así el máximo comun divisor de 18 y 24 es 6, porque 18 es divisible exactamente por 9, por 6, por 3 y por 2; y 24 lo es por 12, por 8, por 6, por 4 y por 2, y por lo tanto, los números propuestos 18 y 24 tienen por comunes divisores 6 y 2, pero el mayor de ellos es 6. Y el máximo comun divisor de 8, 24 y 36, es 4, porque tienen sólo de comunes divisores á 4 y á 2, y el mayor es 4.

**370.** 6.ª MÍNIMO COMUN DIVIDENDO, Ó MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO DE DOS Ó MÁS NÚMEROS, *se llama el menor de los varios que haya divisibles por todos ellos.*

Así el mínimo comun múltiplo de 2, de 4 y de 5, es 20, porque aunque hay muchos números múltiplos de 2 (la mitad de todos los imaginables), y hay muchos múltiplos de 4 y de 5, y de ellos bastantes que son comunes á los tres números propuestos, como, por ejemplo, 20, 40, 60, etc., el menor de ellos es 20; pues 18, aunque es divisible por 4 y por 2, no lo es por 5; y 10, aunque es divisible por 5 y por 2, no es divisible por 4.

Y el mínimo comun dividendo, ó mínimo comun múltiplo de 5, de 10 y de 15, es 30, porque de los muchos múltiplos de ellos que son 30, 60, 90, etc., el menor es 30; pues 20, aunque es divisible por 5 y por 10, no lo es por 15, etc.

## ARTÍCULO III.

### PRINCIPIOS TEÓRICOS SOBRE LA DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS.

**371.** Lema. *Si un número primo no divide exactamente á otro cualquiera, ambos son primos entre sí.*

Porque como el primo no tiene más divisores que á sí mismo y á la unidad (365), no dividiendo exactamente á otro no tendrá con él más divisor comun que la unidad.

Así 21 no es primo con 7, porque es divisible por él exactamente, y por lo tanto, el comun divisor de ambos es 7; pues $27 : 7 = 3$ y $7 : 7 = 1$. Pero 22 es primo con 7, porque no tienen más comun divisor que la unidad,

**372.** Corolario. *Los números primos son primos entre sí*, pues por ser primos no tienen más divisores que á sí mismos y á la unidad, y no serán divisibles uno por el otro, ni tendrán, por lo tanto, más comun divisor que la unidad.

**373.** Teorema. *Todo número que divide exactamente á otro, divide tambien á la suma de ellos.*

*Demostracion.* Si, por ejemplo, 4 divide exactamente á 8, á 12 y á 20, por dividir á 8, éste será su múltiplo y podrá descomponerse en sumandos iguales á él, y será $8 = 4 + 4$. Por semejante razon será $12 = 4 + 4 + 4$ y $20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$. Y si en vez de sumar los números propuestos, los sumamos descompuestos en sumandos, será $8 + 12 + 20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$, suma que evidentemente, siendo múltiplo de 4, será divisible por él. Y como lo mismo podria demostrarse cualquier otro ejemplo, el teorema es general y queda demostrado.

Puede demostrarse este teorema de una manera más científica, pero más propia del Algebra que de la Aritmética, diciendo: si 8 divide á 4, será

$$8 = 4 \times 2.$$

Por semejante razon, será $12 = 4 \times 3$,

y análogamente, $20 = 4 \times 5$.

Y si estas tres igualdades se suman ordenadamente, ó sea los primeros miembros y los segundos, será $8 + 12 + 20 = (4 + 2) + (4 \times 3) + (4 \times 5)$. Pero como el multiplicar los sumandos equivale á multiplicar la suma (342), será $8 + 12 + 20 = 4 \times (2 + 3 + 5)$, igualdad en la que, existiendo en su segundo miembro el factor 4, todo el miembro será divisible por 4, y consiguientemente su igual el primer miembro, que es la suma de los números propuestos.

**374.** Corolario. *Si un número divide á otro, dividirá tambien á todos sus múltiplos*, porque podrán descomponerse en sumandos iguales á él y divisibles todos, y su suma por el mismo número.

Así, si 8 divide 16, dividirá á $64 = 16 \times 4$; pues $64 = 16 + 16 + 16 + 16$, y si divide á todos esos sumandos, divide á la suma.

**375.** Escolio. *Un número puede dividir á otro y no dividir á sus submúltiplos ó factores*, pues no sólo pueden ser menores que él, sino que pueden ser con él primos tambien.

Así 6 divide á 24; pero ni divide á los submúltiplos de 24, como 2 y 3 por ser menores que él, ni tampoco á 8, que es mayor, pero que con él es primo.

**376.** Lema. *Un número que es divisible por otro lo será con más razon por sus submúltiplos; pero puede serlo por estos y no serlo por sus múltiplos. Y un número que no es divisible por otro, no puede serlo por sus múltiplos.*

Porque si 32 es divisible por 16, con más razon será por 8, pues $32 = 16 \times 2$ y $16 = 2 \times 8$, y consiguientemente $32 = 2 \times 2 \times 8$, igualdad cuyo segundo miembro, siendo divisible por 8, tiene que serlo el primero. Pero 32 es divisible por 8 y no lo es por 24, aunque no es primo con él, sin embargo de que 24 es múltiplo de 8, pues $24 = 3 \times 8$.

Y si 32 no es divisible por 9, tampoco puede serlo por $18 = 2 \times 9$, pues 18 dividiria á 32, y 2 y 9 tambien, lo que es contra la hipótesis de que 32 no es divisible por 9.

**377.** Teorema. *Un número que divide exactamente á otros dos, divide tambien á su diferencia.*

*Demostracion.* Si tenemos que 8 divide exactamente á 16 y á 32, restándolos uno de otro, pero despues de descomponerlos en sumandos iguales á 8, será $(8 + 8 + 8 + 8) - (8 + 8)$, resta que será $8 + 8$, divisible evidentemente por 8.

Tambien podria demostrarse este teorema más científicamente diciendo: si 32 es divisible por 8, será $32 = 8 \times 4$, y si 16 divide á 8, será tambien $16 = 8 \times 2$; y restando ordenadamente esas igualdades dará $32 - 16 = (8 \times 4) - (8 \times 2)$; y como lo mismo es multiplicar una resta que multiplicar minuendo y sustraendo (346), será $32 - 16 = 8 \times (4 - 2)$, igualdad cuyo segundo miembro, siendo divisible por 8, el primero tambien lo será, y como éste representa la diferencia de los números propuestos, el teorema queda demostrado.

**378.** Teorema. *Un número que divide á uno de dos sumandos, si no divide al otro, no puede dividir á la suma de ellos.*

*Demostracion.* Si en $8 + 6$ sabemos que 4 divide á 8 y no divide á 6, y suponemos que pudiera dividir á la suma de 8 y 6, que es 14; como uno de dos sumandos tiene que ser igual siempre á la suma de los dos ménos el otro sumando (61), tendriamos que $6 = 14 - 8$, en cuya igualdad, dividiendo 4 á 8 y á 14, dividiria por el teorema anterior á su diferencia 6, lo que es contra la hipótesi de este teorema; luego si no divide á 6, no puede dividir á 14. Y como lo mismo se demostraria en otro cualquier ejemplo, el teorema es general y queda demostrado.

**379.** Corolario. *Un número que divide á varios sumandos, si no divide á uno de ellos, no dividirá á la suma.*

Pues si 4, aunque divide á 8 y á 16, no divide á 6, no puede dividir á la suma $8 + 16 + 6$, porque los dos sumandos divisibles se pueden reducir á uno solo y quedará $24 + 6$, que por el teorema anterior no puede ser divisible por 4.

**380.** Teorema. *Si un número divide á otros dos que no se dividen exactamente entre sí, dividirá al residuo de la division del mayor por el menor.*

*Demostracion.* Si sabemos que 4 divide á 56 y 20, que no se dividen exactamente, pues $56 : 20 = 2\,\frac{16}{20}$, como todo residuo es igual al dividendo, ménos el producto del cociente por el divisor, tendremos que $16 = 56 - (20 \times 2)$, en cuya igualdad sabemos que 56 y 20 son divisibles por 4 por la hipótesi del teorema, y $20 \times 2$ tambien debe serlo (374); luego todo el segundo miembro es divisible por 4, y consiguientemente el primero; pero este es el residuo; luego el teorema queda demostrado.

**381.** Corolario. *Si un número divide á un divisor y á un residuo de una division inexacta ó aproximada, dividirá al dividendo*, porque este es igual al cociente multiplicado por el divisor más el residuo, y en el ejemplo del teorema anterior seria $56 = (20 \times 2) + 16$, igualdad en la que, siendo todo el segundo miembro divisible por 4, tiene que serlo el primero, que es el dividendo.

**382.** Teorema. *El máximo comun divisor de dos números es exactamente igual al máximo comun divisor del menor de ellos y del residuo correspondiente á la division del mayor por el menor.*

*Demostracion.* Si al máximo comun de 56 y 20, por ejemplo, que es 4, no fuera tambien el máximo comun divisor de 20 y 16, residuo de $56 : 20$, tendriamos que, como por el teorema anterior, el número que divide á dividendo y divisor divide al residuo, y por su corolario que el número que divide al divisor y al residuo divide al dividendo, 4 dividirá á 56, á 20 y 16, y el máximo comun divisor de 56 y 20 no podrá ser mayor que el de 20 y 16, ni el de 20 y 16 mayor que el de 56 y 20 (pues dos números no pueden tener mayor comun divisor que su máximo comun divisor). Y no pudiendo el de 56 y 20 ser mayor que el de 20 y 16, ni éste mayor que aquel, tendrán que ser iguales, que es lo que dice el enunciado del teorema que queda demostrado.

*Observacion.* La anterior demostracion la dan muchos autores embebida en la correspondiente á la determinacion del máximo comun divisor de dos números, y sin explicarla mucho, sin duda por lo axiomática que verdaderamente es la verdad á que se refiere. La experiencia nos ha hecho ver que en esa forma muchos principiantes no la comprendian, pues aunque claramente veian que un número que divide á dividendo y divisor divide al residuo, no percibian por qué el máximo comun divisor de aquellos, que pueden ser muy grandes, no pudiera ser mayor que el máximo comun divisor de uno de ellos y de un residuo que puede ser muy pequeño. Para convencerlos, necesitamos hacerles fijarse bien en la circunstancia (dicha en la anterior demostracion) de que el máximo comun divisor de dos números por dividir tambien al residuo de la division de ellos, es comun divisor de los *tres*, que no puede ser evidentemente mayor que el máximo comun divisor de dos de ellos, pues el nombre de máximo dice que es el mayor. Por eso hemos presentado la verdad en teorema especial, y con demostracion más ámplia que muchos podrán necesitar.

## ARTÍCULO IV.

### TEORÍA DEL CARÁCTER DE DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS.

Sabemos cuál es el carácter ó circunstancia visible fácilmente de los números, por el que se conocen si son divisibles por 2, por 3 ó por 5 (196); fáltanos dar las correspondientes demostraciones.

**383.** Teorema. *Un número es divisible por* 2 *cuando termina en* 0, *ó cualquiera de las cifras pares* 2, 4, 6, *etc.; y no lo será si termina en cifra impar.*

*Demostracion.* Sabemos por la numeracion, que todo número terminado en 0 es múltiplo de 10 (54), y como $10 = 5 + 5 = 2 \times 5$, y por lo tanto divisible por 2, todo número terminado en 0 se podrá descomponer en sumandos iguales á 10, cuya suma será tambien divisible por 2 (373), y así $70 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$ es divisible por 2. Si el número termina en cifra par, por ejemplo 36, se podrá descomponer en sumandos $10 + 10 + 10 + 6$, todos los que son divisibles por 2, y la suma tambien debe serlo. Y finalmente, si el número termina en cifra impar, por ejemplo 23, descompuesto en sumandos, será $10 + 10 + 3$, que no siendo uno de ellos divisible por 2, como no lo es el 3, la suma no puede serlo (379).

**384.** Teorema. *Un número es divisible por* 5 *cuando termina en* 0 *ó en* 5, *y no lo es sino tiene esa terminacion.*

*Demostracion.* Porque si tenemos un número terminado en 0, por ejemplo 30, y otro en 5, por ejemplo 25, ambos los podremos descomponer en sumandos divisibles por 5, y la suma lo será. Así, $30 = 10 + 10 + 10$ y $25 = 10 + 10 + 5$; y si la terminacion fuera otra, habria un sumando no divisible por 5, por ejemplo $29 = 10 + 10 + 9$, cuya suma no puede ser divisible por 5, porque el sumando 9 no lo es (379). Luego el teorema es general y queda demostrado.

**385.** Teorema. *Un número es divisible por* 3, *cuando sumadas sus cifras como si fueran todas unidades simples componen* 3 *ó uno de sus múltiplos* 6, 9, 12, *etc:*

*Demostracion.* Como $10 = 9 + 1$ y $100 = 99 + 1$, etc., todo número se podrá descomponer en sumandos, cuya mayor parte se compongan de nueves, y tendremos, por ejemplo,

$$342 = 99 + 99 + 99 + 3 + 9 + 9 + 9 + 9 + 4 + 2$$

$$\text{y } 342 = 99 + 99 + 99 + 9 + 9 + 9 + 9 + 3 + 4 + 2.$$

En la última igualdad y aun en la primera, vemos que hay siete sumandos múltiplos evidentemente de 3 y divisibles por 3; y tres sumandos justamente compuestos de las cifras del número propuesto, que reunidas componen 9, divisible tambien por 3; luego todos los sumandos lo serán, y por lo tanto la suma; luego el carácter de divisibilidad por 3 es el que dice el teorema que queda demostrado, pues si las cifras del número sumadas dieran un número que no fuera múltiplo de 3, el sumando que, en virtud de la descomposicion produjesen, haria ver que la suma no podia dividirse por 3 (379).

**386**. *Corolario*. La anterior demostracion evidencia que todo número cuyas cifras sumadas como unidades produzca 9 ó un múltiplo de 9, será divisible por 9.

**387**. *Observacion*. De una manera análoga podria haberse determinado el carácter de divisibilidad de los números con relacion á otro divisor; pero no está en práctica el hacer uso de otras divisiones que 2, 3 y 5, por ser suficientes estos para los usos ordinarios, y porque el carácter de los números con relacion á otros divisores no se conoce tan fácilmente.

## ARTÍCULO V.

### DETERMINACION DE SI UN NÚMERO ES PRIMO Ó COMPUESTO.

**388**. Regla general. *Para determinar si un número es primo ó compuesto, se divide sucesivamente de menor á mayor por los primos* 2, 3, 5, 7, *etc., hasta que algun divisor dé cociente exacto, lo que probará que el número dado es compuesto; ó hasta que el cociente aproximado ó entero sea menor que el divisor, lo que es señal de que el número dado es primo, pudiéndose omitir la materialidad de la division por* 2, *por* 3 *y por* 5, *porque la simple inspeccion del número propuesto dirá si es divisible por esos primos* (383, 384 y 385).

*Ejemplos.*

```
1.°  840                          4.°  487 | 7  | 11 | 13 | 17 | 19 | 23
                                        67 |----|----|----|----|----|----
2.°  849                                 4 | 61 | 44 | 37 | 28 | 25 | 21
                                       ----|
3.°  377 | 7  | 11 | 13                  47 |
      27 |----|----|----                03 |
       6 | 53 | 34 | 29                ----|
    -----|                              97 |
      47 |                               6 |
      03 |                             ----|
    -----|                             147 |
     117 |                              11 |
     000 |                             ----|
                                       107 |
                                        12 |
                                       ----|
                                       027 |
                                         4 |
```

*Explicacion*. El ejemplo 1.°, como el número termina en 0, es divisible por 2, y por lo tanto, compuesto. En el ejemplo 2.°, como sumadas las cifras componen 18, múltiplo de 3, el número es divisible por 3, y por lo tanto, compuestó. En el ejemplo 3.°, con sujecion á la regla, se divide el número propuesto por 7, porque no es divisible por 2, por 3, ni por 5, y despues por 11 y por 13, que da cociente exacto, y por lo tanto el número propuesto es compuesto. Y en el ejemplo 4.° se divide el número propuesto hasta que el cociente 21 sea menor que el divisor 23.

*Demostracion.* Se omiten las divisiones por los números compuestos 4, 6, 8, etc., porque si un número no es divisible por otro, no lo será por sus múltiplos (376). Se hacen las divisiones sucesivas por los primos de menor á mayor, para conseguir el objeto por medio de menor número de divisiones y más fáciles, como son las que tienen menor divisor; pero se podrian hacer de mayor á menor, empezando por un número primo próximamente menor á la mitad del producto, pues ningun número es divisible por otro mayor que su mitad, ofreciendo este procedimiento el inconveniente tambien de que si el número era muy grande habria que dividirlo por primos y compuestos menores que su mitad, pues á primera vista no se conocen los números mayores de dos cifras si son primos ó no. Y finalmente se reconoce que un número es primo cuando en las divisiones por un primo da un cociente menor que el divisor; porque, por ejemplo, en el ejemplo 4.°, si supiéramos que continuando las divisiones alguna diera cociente exacto, como el divisor sería mayor de 23, el tal cociente supuesto sería menor de 21, y el número propuesto sería divisible por él (124), lo que es absurdo, porque se han ensayado las divisiones de los números menores que 21 y ninguna ha dado cociente exacto, y las de los compuestos que no se han ensayado ha sido por inutilidad. Luego cuanto prescribe la regla es lo conveniente para saber si un número es divisible por algun otro á más de serlo por sí mismo y por la unidad, y por lo tanto queda demostrada.

## ARTÍCULO VI.

### Á FORMACION DE TABLAS DE LOS NÚMEROS PRIMOS.

**389.** Los números primos menores de los que conviene saber de memoria son los siguientes:

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43
47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Para determinar éstos, así como para formar tablas de ellos y otros mayores, se emplea el procedimiento siguiente.

**390.** Regla. *Para formar una tabla de números primos, se escriben por su órden natural todos los impares despues de 1 y de 2 hasta el número á que se quiera alcance la tabla, por ejemplo:*

1 2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 69 71
73 75 77 79 81 83 85 87 89 91 93 95 97 99 101 103 105
107 109 111 113 115 117 119 121 123 125 127 129 131 133
135 137 etc.

*En seguida márquense con una señal cualquiera el sexto, el noveno, etc., contando de tres en tres despues del 3. Hágase despues lo mismo de cinco en cinco ci-*

*fras, empezando á contar despues del 5, y póngase otra señal á los números no señalados. Hágase en seguida lo mismo de siete en siete, empezando á contar despues del 7. Y hágase lo propio con 11, con 13, con 17 y demas números primos, siendo inútil el señalar los que ya una vez estén señalados, y todos los que resulten sin señal serán números primos.*

La Tabla auxiliar VI contiene todos los números primos menores de 1000.

*Demostracion.* Esta Tabla, para determinar los números dígitos, llamada *criba de Eratosthenes,* por el nombre del que la inventó, ya inventada, el procedimiento para formarla tiene muy fácil demostracion. En efecto, como los números impares, colocados todos segun su órden natural, difieren cada uno de su inmediato en dos unidades, el 3 distará de su mínimo múltiplo, que es 9, *tres* lugares, porque $3 + (2 \times 3) = 9$; de 15 *seis* lugares, porque $3 + (2 \times 6) = 15$; de 21 *nueve* lugares, porque $3 + (2 \times 9) = 21$, etc.; luego contando desde el 3 de tres en tres cifras, se deben hallar todos sus múltiplos. Análogamente el 5 distará de sus múltiplos impares *cinco, diez, quince* lugares, porque el mínimo múltiplo de 55 que es 15, es igual á $5 + (2 \times 5)$ y $25 = 5 + (2 \times 10)$, etc. Y como los números que no resulten señalados no serán múltiplos de 3, de 5, de 7, etc., ni serán, por tanto, divisibles por ningun número dígito primo, ni ménos por un compuesto, no siéndolo por ningun primo (376), serán, pues, números primos.

## ARTÍCULO VII.

### DETERMINACION DEL MÁXIMO COMUN DIVISOR DE DOS Ó MÁS NÚMEROS.

**391.** Regla. *Para hallar el máximo comun divisor de dos números, se divide primeramente el mayor por el menor; en seguida éste por el residuo; despues este residuo por el que produzca la division por él, y así sucesivamente hasta encontrar un cociente exacto, que dirá que el divisor que lo produce es el máximo comun divisor de los números propuestos; ó hasta tener un cociente inexacto correspondiente á un divisor evidentemente primo, que será señal de que los números propuestos son primos entre sí; y lo mismo si se llega á tener por residuo la unidad.*

**392.** Si la primera division, ó sea la del número mayor por el menor de los dados, da cociente exacto, el máximo comun divisor será el mismo número menor.

*Ejemplos.*

1.°

| | |
|---|---|
| 324 | 54 |
| 000 | 6 |

3.°

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 827 | 342 | 143 | 56 | 31 | 25 | 6 | 1 |
| 143 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | 6 |
| | 56 | 31 | 25 | 6 | 1 | 0 | |

2.°

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 895 | 55 | 15 | 10 | 5 |
| 345 | 16 | 3 | 1 | 2 |
| 15 | 10 | 5 | 00 | |

4.°

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 347 | 57 | 5 | 2 | 1 |
| 005 | 6 | 11 | 2 | 6 |
| | 02 | 1 | 00 | |

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, en el primer ejemplo hemos dividido el número mayor por el menor, y como ha dado cociente exacto, hemos deducido que el máximo comun divisor de los números propuestos es el menor de ellos.

En el segundo ejemplo hemos dividido el número mayor por el menor, despues éste por el residuo 15; luego este residuo por el 10, y, finalmente, el 10 por 5, obteniendo cociente exacto y deduciendo, por lo tanto, que 5 es el máximo comun divisor de los números propuestos.

En el tercer ejemplo obramos de una manera análoga, pudiendo haber suspendido la operacion

*Demostracion.* Se omiten las divisiones por los números compuestos 4, 6, 8, etc., porque si un número no es divisible por otro, no lo será por sus múltiplos (376). Se hacen las divisiones sucesivas por los primos de menor á mayor, para conseguir el objeto por medio de menor número de divisiones y más fáciles, como son las que tienen menor divisor; pero se podrian hacer de mayor á menor, empezando por un número primo próximamente menor á la mitad del producto, pues ningun número es divisible por otro mayor que su mitad, ofreciendo este procedimiento el inconveniente tambien de que si el número era muy grande habria que dividirlo por primos y compuestos menores que su mitad, pues á primera vista no se conocen los números mayores de dos cifras si son primos ó no. Y finalmente se reconoce que un número es primo cuando en las divisiones por un primo da un cociente menor que el divisor; porque, por ejemplo, en el ejemplo 4.°, si supiéramos que continuando las divisiones alguna diera cociente exacto, como el divisor seria mayor de 23, el tal cociente supuesto seria menor de 21, y el número propuesto seria divisible por él (124), lo que es absurdo, porque se han ensayado las divisiones de los números menores que 21 y ninguna ha dado cociente exacto, y las de los compuestos que no se han ensayado ha sido por inutilidad. Luego cuanto prescribe la regla es lo conveniente para saber si un número es divisible por algun otro á más de serlo por sí mismo y por la unidad, y por lo tanto queda demostrada.

## ARTÍCULO VI.

### Δ FORMACION DE TABLAS DE LOS NÚMEROS PRIMOS.

**389.** Los números primos menores de los que conviene saber de memoria son los siguientes:

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43
47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Para determinar éstos, así como para formar tablas de ellos y otros mayores, se emplea el procedimiento siguiente.

**390.** Regla. *Para formar una tabla de números primos, se escriben por su órden natural todos los impares despues de 1 y de 2 hasta el número á que se quiera alcance la tabla, por ejemplo:*

1 2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35
37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 69 71
73 75 77 79 81 83 85 87 89 91 93 95 97 99 101 103 105
107 109 111 113 115 117 119 121 123 125 127 129 131 133
135 137 etc.

*En seguida márquense con una señal cualquiera el sexto, el noveno, etc., contando de tres en tres despues del 3. Hágase despues lo mismo de cinco en cinco ci-*

*fras, empezando á contar despues del 5, y póngase otra señal á los números no señalados. Hágase en seguida lo mismo de siete en siete, empezando á contar despues del 7. Y hágase lo propio con 11, con 13, con 17 y demas números primos, siendo inútil el señalar los que ya una vez estén señalados, y todos los que resulten sin señal serán números primos.*

La Tabla auxiliar VI contiene todos los números primos menores de 1000.

*Demostracion.* Esta Tabla, para determinar los números dígitos, llamada *criba de Eratosthenes*, por el nombre del que la inventó, ya inventada, el procedimiento para formarla tiene muy fácil demostracion. En efecto, como los números impares, colocados todos segun su órden natural, difieren cada uno de su inmediato en dos unidades, el 3 distará de su mínimo múltiplo, que es 9, *tres* lugares, porque $3+(2\times3)=9$; de 15 *seis* lugares, porque $3+(2\times6)=15$; de 21 *nueve* lugares, porque $3+(2\times9)=21$, etc.; luego contando desde el 3 de tres en tres cifras, se deben hallar todos sus múltiplos. Análogamente el 5 distará de sus múltiplos impares *cinco*, *diez*, *quince* lugares, porque el mínimo múltiplo de 55 que es 15, es igual á $5+(2\times5)$ y $25=5+(2\times10)$, etc. Y como los números que no resulten señalados no serán múltiplos de 3, de 5, de 7, etc., ni serán, por tanto, divisibles por ningun número dígito primo, ni ménos por un compuesto, no siéndolo por ningun primo (376), serán, pues, números primos.

## ARTÍCULO VII.

### DETERMINACION DEL MÁXIMO COMUN DIVISOR DE DOS Ó MÁS NÚMEROS.

**391.** Regla. *Para hallar el máximo comun divisor de dos números, se divide primeramente el mayor por el menor; en seguida éste por el residuo; despues este residuo por el que produzca la division por él, y así sucesivamente hasta encontrar un cociente exacto, que dirá que el divisor que lo produce es el máximo comun divisor de los números propuestos; ó hasta tener un cociente inexacto correspondiente á un divisor evidentemente primo, que será señal de que los números propuestos son primos entre sí; y lo mismo si se llega á tener por residuo la unidad.*

**392.** Si la primera division, ó sea la del número mayor por el menor de los dados, da cociente exacto, el máximo comun divisor será el mismo número menor.

*Ejemplos.*

1.°

| | |
|---|---|
| 324 | 54 |
| 000 | 6 |

3.°

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 827 | 342 | 143 | 56 | 31 | 25 | 6 | 1 |
| 143 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | 6 |
| | 56 | 31 | 25 | 6 | 1 | 0 | |

2.°

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 895 | 55 | 15 | 10 | 5 |
| 345 | 16 | 3 | 1 | 2 |
| 15 | 10 | 5 | 00 | |

4.°

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 347 | 57 | 5 | 2 | 1 |
| 005 | 6 | 11 | 2 | 6 |
| | 02 | 1 | 00 | |

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, en el primer ejemplo hemos dividido el número mayor por el menor, y como ha dado cociente exacto, hemos deducido que el máximo comun divisor de los números propuestos es el menor de ellos.

En el segundo ejemplo hemos dividido el número mayor por el menor, despues éste por el residuo 15; luego este residuo por el 10, y, finalmente, el 10 por 5, obteniendo cociente exacto y deduciendo, por lo tanto, que 5 es el máximo comun divisor de los números propuestos.

En el tercer ejemplo obramos de una manera análoga, pudiendo haber suspendido la operacion desde que se vió que no daba cociente exacto la division de 56 por 31, número evidentemente primo.

En el cuarto ejemplo hemos tambien hecho la correspondiente division, y al dividir por 5, número evidentemente primo, y no dar cociente exacto, pudimos deducir que los números dados eran primos entre sí, pero continuamos las divisiones para ver si lo eran realmente.

**393.** *Demostracion.* Se empieza la operacion dividiendo el número mayor de los dos que se proponen por el menor, porque el máximo comun divisor de dos números no puede evidentemente ser mayor que el menor de ellos; y si éste divide al mayor, será el máximo comun divisor de ambos, pues que tambien se divide á sí mismo (380). Despues se divide el número menor por el residuo de la primera division, porque el máximo comun divisor de dos números es exactamente igual al del divisor y residuo (382) de la division del mayor por el menor. Y por razones análogas á las dadas para la primera division, se debe ver si el número menor divide al primer residuo, porque éste seria el máximo comun divisor deseado, si dividiera exactamente al número menor de los propuestos. En seguida se divide el primer residuo por el segundo, y éste por el tercero, porque el máximo comun divisor de los números que van entrando en cada division debe ser igual al máximo comun divisor del que sirve de divisor y del residuo que pueda producir. Y finalmente, se da por terminada la operacion cuando no se obtiene cociente exacto al dividir por un número evidentemente primo, porque si un número primo no divide exactamente á otro, los dos son primos entre sí (371), y seria inútil continuar la operacion, como se ve por los ejemplos 3.° y 4.°, pues se llega á hallar un residuo 1, que dividirá exactamente al anterior residuo y al tras-anterior, y á los números propuestos, los cuales por no tener otro comun serán primos entre sí (368); luego la regla queda demostrada.

**394.** Lema. *Si un número divide á otros dos, dividirá tambien al máximo comun divisor de ellos.*

Porque, refiriéndonos al ejemplo 2.°, si un número divide á 895 y á 55, dividirá á 15 (381). Si divide á 15 y 55, dividirá á 10, y si divide á 15 y á 10, dividirá á 5, que es el máximo comun divisor de los números propuestos.

**395.** *Corolario.* De lo evidenciado en el anterior lema, se deduce claramente que para hallar el máximo comun divisor de tres ó más números, se halla el máximo comun divisor de dos de ellos; despues el de ese máximo comun divisor hallado y otro número de los propuestos; en seguida el máximo comun divisor del último hallado y otro número de los dados si son más de tres; y así se continuará hasta tomarlos en consideracion todos, y el último máximo comun divisor que se halle será el deseado.

Pondremos un ejemplo, aunque esta operacion tiene poca aplicacion en las matemáticas.

Sean los números 345, 140, 135.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 345 | 140 | 65 | 10 | 5 |
| 65 | 2 | 2 | 6 | 2 |
| | 10 | 05 | 00 | |

| | |
|---|---|
| 135 | 5 |
| 35 | 27 |
| 00 | |

Y se tendrá que 5 es el máximo comun divisor de los tres números propuestos.

*Observacion.* Es inútil poner ejemplos para ejercicios de determinar el máximo comun divisor de dos ó más números, y para ver si un número es primo ó compuesto, pues el profesor les podrá dictar completamente á su capricho.

# CAPÍTULO III.

## COMPLEMENTO Á LA TEORÍA SOBRE LA DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**396.** Los principios teóricos que hemos expuesto en el capítulo anterior sobre la divisibilidad de los números, no nos han permitido todavía otra aplicacion que la determinacion de si un número es primo ó compuesto, y la de hallar el máximo comun divisor de dos ó más números entre los varios que tengan. Ahora tenemos que ocuparnos de la determinacion de los diferentes divisores que tienen los números, de su mínimo comun dividendo, ó mínimo comun múltiplo, y para ello tenemos que demostrar nuevos principios.

### ARTÍCULO II.

#### PRINCIPIOS TEÓRICOS FUNDAMENTALES PARA LA DESCOMPOSICION DE UN NÚMERO EN FACTORES Y PARA LA DETERMINACION DEL MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO DE VARIOS.

**397.** Teorema. *Si dos números se multiplican por un entero, el máximo comun divisor de ambos quedará multiplicado por dicho entero. E inversamente si dos números se dividen por un entero, el máximo comun divisor de ambos quedará dividido por dicho entero.*

Pero dicho entero ha de dividir exactamente á los números propuestos, pues en otro caso la division sería impracticable en el sentido del teorema.

*Demostracion.* Porque multiplicando ó dividiendo los dos números propuestos por un entero, quedará multiplicado ó dividido respectivamente por dicho entero el residuo correspondiente á la division del mayor por el menor (380). Y multiplicado ó dividido tal residuo y el número menor, tambien lo estará el residuo de la division del menor por el primer residuo; y por razones análogas todos los residuos que vayan resultando de dividir uno por otro, hasta encontrar el máximo comun divisor, que siendo tambien un residuo quedará multiplicado ó dividido por el número por el que se multipliquen ó dividan los números propuestos.

Esto es, que si tenemos 25 y 15, cuyo máximo comun divisor es 5, duplicados aquellos, será $25 \times 2 = 50$ y $15 \times 2 = 30$, que tendrán por máximo comun divisor $5 \times 2 = 10$.

**398.** Teorema. *Si dos números se dividen por su máximo comun divisor, los cocientes serán primos entre sí.*

*Demostracion.* Si tenemos los números 895 y 55, cuyo máximo comun divisor es 5, y dividimos aquellos por 5, por el teorema anterior el máximo comun divisor 5 tambien quedará dividido por 5. Pero $\frac{5}{5} = 1$ y los números que tienen por máximo comun divisor la unidad, se llaman entre sí primos; luego $\frac{895}{5} = 175$ y $\frac{55}{5} = 11$ son entre sí primos.

**399.** Teorema. *Si un número divide al producto de dos factores, y es primo como uno de ellos, dividirá precisamente al otro factor.*

*Demostracion.* Si tenemos, por ejemplo, que 5 divide al producto $10 \times 17$ y es primo con 17, el máximo comun divisor de 5 y 17 será 1 (368); y si multiplicamos 5 y 17 por 10, su máximo comun divisor quedará multiplicado por 10 y será $1 \times 10 = 10$. Pero $17 \times 10$ es múltiplo de 5 por la hipótesis del teorema, y $5 \times 10$ tambien lo es por tener el factor 5; luego su máximo comun divisor 10 tambien lo será, y por lo tanto divisible por 5; y como lo mismo se demostraria sobre cualquier otro ejemplo, el teorema es general y queda demostrado.

**400.** *Observacion.* La anterior verdad es de mucha importancia, y conviene familiarizarse con ella.

**401.** Corolario. *Si un número primo divide al producto de tres ó más factores, tiene que dividir precisamente á uno de ellos.*

Porque por el teorema anterior si, por ejemplo, 7 divide al producto $5 \times 9 \times 24 \times 14$ y no divide á 5, será primo con él y dividirá á $9 \times 24 \times 14$. Sino divide á 9, dividirá á $24 \times 14$, y sino divide á 24, dividirá á 14; luego tiene que dividir á alguno de los factores.

**402.** *Observacion importante.* El teorema anterior supone como indispensable que el divisor sea primo con uno de los factores, y en el corolario que sea ademas primo por sí mismo para que sea primo con el factor que no divida; porque, en efecto, un número puede dividir á otro y no dividir á ninguno de sus factores si ninguno es primo con él (376). Así, 12 divide á 60; pero no á sus factores 20 y 3, porque ninguno es primo con él, pues ambos tienen con 12 un comun divisor ademas de la unidad, porque 20 y 12 son divisibles por 2 y 3, y 12 por 3. Y, por lo tanto, 12 teniendo con 20 un divisor comun y otro con 3, y no siendo primo con ninguno de los dos, no puede dividir al otro, segun el teorema anterior.

**403.** Lema. *Si un número es divisible por cada uno de otros dos primos entre sí, será divisible tambien por su producto*, pues si 24 es divisible por 3 y por 4, será $24 = 3 \times 8$ y tambien $24 = 4 \times 6$, y multiplicando ordenadamente estas dos igualdades será $24 \times 24 = 3 \times 8 \times 4 \times 6 = 3 \times 4 \times 8 \times 6 = (3 \times 4) \times 8 \times 6$, en la que el segundo miembro, siendo divisible por $3 \times 4$ su igual, $24 \times 24$ tambien lo será, y su submúltiplo 24 igualmente.

**404.** Corolario 2.° *Si un número primo divide á una potencia cualquiera de un número, dividirá á este*, porque toda potencia de un número se podrá descomponer ó considerar descompuesta en factores iguales al mismo; y el número primo que divida al producto, que es la potencia, deberá dividir á alguno de los factores (411), que siendo iguales, es evidente que dividirá al número de que es potencia. Esto es, que si el número primo 3 divide á 9, dividirá á $9^2 = 81$, pues $81 = 9 \times 9$, y si 3 divide á $9 \times 9$, tiene que dividir á uno de los dos factores, ó sea á 9.

**405.** Corolario 3.º *Las potencias de los números primos entre sí forman números tambien entre sí primos.*

Porque sino lo fuesen tendrian algun divisor comun ademas de la unidad, y ese divisor comun, por el corolario anterior, dividiria á los números de que son potencias, lo que es contra la hipótesi de que son entre sí primos. Esto es, que si 7 y 9 son primos entre sí, $7^2 = 249$ y $9^2 = 81$ tambien lo serán, porque sino lo fuesen, el divisor comun que tuvieran dividiria á 7 y á 9, y estos no serian primos.

**406.** Teorema. *Si un número es divisible por dos ó más que sean primos entre sí dos á dos, es divisible por el producto de todos ellos.*

*Demostracion.* Sea el número 1890 que se propone, por ejemplo, divisible por 5, por 6 y por 7, primos entre sí dos á dos; esto es, 5 con 6 y con 7, y 6 con 7.

Por ser el número dado 1890 divisible por 5, será $1890 = 5 \times 378$, que es el cociente de dividir 1890 por 5. Por ser el mismo número 1890 divisible por 6, su igual $5 \times 378$ tambien lo será, y como 6 es primo con 5 por hipótesis, dividirá á 378 (399), y dará $378 = 6 \times 63$; valor de 378 que podremos desde luego sustituir en la primera igualdad y dará $1890 = 5 \times 6 \times 63$. Y por ser 1890 divisible por 7, su igual $5 \times 6 \times 63$ tambien lo será; pero como 7 es por hipótesis primo con 6 y con 5, dividirá á 63 (399), y dará $63 = 7 \times 9$; cuyo valor sustituido en la igualdad anterior dará $1890 = 5 \times 6 \times 7 \times 9$, en la que el segundo miembro es evidentemente divisible por el producto $5 \times 6 \times 7$; luego su igual 1890 tambien debe serlo; luego el teorema queda demostrado.

**407.** *Observacion.* Es indispensable que los divisores del número propuesto sean todos primos entre sí como lo son los del ejemplo anterior; pues no basta que lo sean cada uno con otro, por ejemplo, 576 que divide á 8, á 4 y á 3, los cuales son primos entre sí el 8 con el 3, y el 4 con el 3, pero no 8 con el 4; pues aunque en este caso tambien se verifica la verdad esencial del teorema, pues $8 \times 4 \times 3 = 96$, y $576 : 96 = 6$ exactamente, pero es porque 576 tambien es divisible por 9 y por 64 que son primos entre sí. Mas 120 que es divisible por 3, por 6 y por 5, no es divisible por $90 = 3 \times 6 \times 5$, porque aunque 3 es primo con 5, y 6 con 5, no es 3 con 6.

**408.** Teorema. *Un número no puede considerarse compuesto, ni, por lo tanto, descomponerse en más factores simples que en todos aquellos números primos que lo dividan exactamente, lo que se acostumbra á expresar diciendo que un número no admite dos descomposiciones distintas en factores simples.*

*Demostracion.* Si suponemos, por ejemplo, que el número 18, que es igual á $2 \times 3^2$, que son sus factores simples, y que todos lo dividen exactamente, pudiera admitir otra descomposicion en la que entrara algun otro factor primo ó no entrara alguno de los expresados ó que alguno de ellos estuviera elevado á diferente potencia, tendriamos, en el primer supuesto, que $18 = 5 \times 2 \times 3^2$, y por lo antes dicho seria $5 \times 2 \times 3^2 = 2 \times 3^2$. Pero esto, no sólo es evidentemente absurdo, sino que se evidencia más considerando que el primer miembro de esa igualdad es múltiplo de 5, y por lo tanto divisible por 5; y el segundo tendrá tambien que serlo; pero este es 18, que no es divisible por 5 por hipótesis, luego tampoco puede 5 dividir á su igual ni figurar en la descomposicion supuesta.

En el segundo caso, si se supone que 18 tambien puede ser igual á $3^2$, tendríamos $2 \times 3^2 = 3^2$, en cuyo primer miembro hay un factor 2 que lo hace, por lo tanto, divisible por 2, y debe serlo tambien el segundo miembro; pero este se compone de números primos, luego el primo 2 tampoco puede dividirlos ni á su producto; luego 2 tiene que figurar en un miembro de la igualdad si figura en el otro.

En el tercer caso, si suponemos que 18 sea tambien igual á $2 \times 3$, será $2 \times 3^2 = 2 \times 3$, dividiendo los dos miembros de la igualdad por 3 resultará $2 = 2 \times 3$, cuya igualdad tiene su segundo miembro divisible por 3, y no pudiendo serlo el primero porque 3 es primo con 2, resulta que el 3 debe figurar en ambos miembros con igual potencia, si la igualdad ha de ser verdadera; luego un número no admite dos descomposiciones en factores simples, y queda demostrado el teorema.

**409.** Teorema. *Un número no es divisible por otro si no contiene todos los factores simples de éste, repetidos cada uno tantas veces al ménos como lo estén en el divisor.*

*Demostracion.* Si suponemos que, por ejemplo, 84, que es igual á $7 \times 3 \times 2^2$, sea divisible por 15, que es igual á $3 \times 5$, uno de cuyos factores no entra en la composicion de 84, tendriamos que llamando $\alpha$ al cociente de esa supuesta division exacta, sería $84 = 15 \times \alpha$ y $84 = 3 \times 5 \times \alpha$, y como sea cual sea el valor del cociente $\alpha$, el factor 5 no puede desaparecer del segundo miembro de esa igualdad, todo él sería evidentemente divisible por 5, y el primero consiguientemente. Pero esto es absurdo, porque si 84 fuese divisible por 5, factor simple que no entra en su composicion, admitiria dos descomposiciones, lo que no puede ser (408). Y si suponemos que el divisor fuera $18 = 2 \times 3^2$, en el que el factor 3 tiene distinta potencia que la de la descomposicion de $84 = 7 \times 3 \times 2^2$, tendriamos que en ese supuesto sería $84 = 2 \times 3^2 \times \alpha$, en cuyo segundo miembro, no pudiendo desaparecer el factor $3^2$, tambien tendria que figurar en la descomposicion del primero, y 84 tendria dos descomposiciones, una en la que figurase el factor 3, y otra en la que se hallase $3^2$, lo que es absurdo. Luego el teorema queda demostrado.

## ARTÍCULO III.

### DESCOMPOSICION DE UN NÚMERO EN FACTORES SIMPLES, Y DETERMINACION DE SUS FACTORES SIMPLES Y COMPUESTOS.

**410.** DESCOMPONER UN NÚMERO EN SUS FACTORES SIMPLES es determinar todos los números primos que, dividiéndolo una ó más veces, producen un producto igual al mismo. Y determinar sus factores simples y compuestos, es hallar todos los números que lo dividen exactamente.

**411.** Regla 1.ª *Para descomponer un número en sus factores simples, se dividirá por los números primos* 2, 3, 5, 7 *por su órden natural* (aunque el órden sea indiferente), *segun que por su carácter se vea que es divisible exactamente por ellos, y los divisores constituirán los factores simples del número dado descompuesto en ellos, ordenándose la operacion como se ve en los siguientes ejemplos:*

*Ejemplos.* 1.º

| | |
|---|---|
| 880 | 2 |
| 440 | 2 |
| 220 | 2 |
| 110 | 2 |
| 55 | 5 |
| 11 | 11 |

$880 = 2^4 \times 5 \times 11$

2.º

| | |
|---|---|
| 252 | 2 |
| 126 | 2 |
| 63 | 3 |
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

3.º

| | |
|---|---|
| 2100 | 2 |
| 1050 | 2 |
| 525 | 3 |
| 175 | 5 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |

ó

| | |
|---|---|
| 2100 | 5 |
| 420 | 5 |
| 84 | 3 |
| 28 | 2 |
| 14 | 2 |
| 7 | 7 |

y será $2100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ ó bien $2100 = 5^2 \times 3 \times 2^2 \times 7$.

*Explicacion.* En el ejemplo primero, con sujecion á la regla, se dividió el número propuesto (por acabar en 0) por 2; el cociente 440 por 2 tambien (por igual razon); el nuevo cociente 220 por 2 igualmente; el 110 por 2 tambien, el 55 por 5 y el 11 por sí mismo.

En el segundo ejemplo, el número propuesto se dividió por 2, el cociente por 2 tambien, el nuevo cociente por 3 y por 3 el siguiente, y el cociente siguiente por sí mismo.

En el tercer ejemplo, el número propuesto se dividió por 2, su cociente por 2 tambien; el cociente de esta division por 3, el de este último por 5, y por 5 tambien el cociente siguiente; y, finalmente, por 7. Pero tambien el número propuesto pudo dividirse, como se ve, por 5; su cociente por 5 tambien; y el cociente de esta division por 3; el de la siguiente por 2, y por 2 el obtenido despues; y finalmente, por 7, dando el mismo resultado.

**412.** *Demostracion.* Refiriéndonos á cualquier ejemplo, v. gr., el segundo, diremos que por ser 252 divisible por 2, será $252 = 2 \times 126$, que es el cociente de tal division.

Por ser 126 divisible tambien por 2, será $126 = 2 \times 63$.

Por ser 63 divisible por 3, será $63 = 3 \times 21$.

Y por ser 21 divisible por 3, será $21 = 7 \times 3$.

Sustituyendo en la penúltima igualdad $63 = 3 \times 21$ por 21 su igual $7 \times 3$, dará $63 = 3 \times 3 \times 7$; y sustituyendo este valor de 63 en la antepenúltima igualdad $126 = 2 \times 63$, dará $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$; y sustituyendo este valor de 126 en la primera igualdad, dará $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7$; luego los factores simples de 252 son los hallados por la regla, pues el número no puede tener dos descomposiciones (408); y como lo mismo se podria demostrar en cualquier otro ejemplo, la regla queda demostrada.

**413.** *Escolio.* Todo número que divide á un cociente, divide con más razon al dividendo; verdad que, aunque se demostró (374), repetimos, porque recibe comprobacion con la anterior regla y facilita la comprension de la siguiente;

pues, en efecto, si en el ejemplo segundo anterior 3 divide á 63, tambien debe dividir á 252, porque resultando despues $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$, y habiendo en esta igualdad un factor 3 en el segundo miembro, éste será divisible por 3, y lo mismo su igual el miembro primero.

**414.** Regla 2.ª *Para (no descomponer, sino) determinar los factores simples y compuestos de un número, se determinan primeramente los simples por la regla 1.ª Despues se multiplica cada factor simple por los que tiene debajo, y se encuentran los factores compuestos de dos. En seguida cada compuesto de dos por los simples que tiene debajo, y se tienen los compuestos de tres. Y así sucesivamente hasta que la multiplicacion de un factor simple por uno compuesto, produzca un producto igual al número propuesto.*

**415.** *Observacion.* Como se ha indicado al principio de la regla y en la misma definicion, no se puede decir que un número se descompone en factores simples y compuestos; pues que evidentemente, aunque el producto de los simples produzca el número propuesto, el producto de los compuestos producirá números mucho más grandes. Son, pues, sólo sus divisores los factores compuestos de cualquier número.

*Ejemplos de determinacion de los factores compuestos de un número.*

| | | Compuestos de dos. | Compuestos de tres. | Compuestos de cuatro. | Compuestos de cinco. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2100 | 2 | | | | | |
| 1050 | 2 | 4 | | | | |
| 525 | 3 | 6 | 12 | | | |
| 175 | 5 | 10 15 | 20 30 | 60 | | |
| 35 | 5 | » » 25 | » » 50 75 | » 100 150 | 300 | |
| 7 | 7 | 14 21 35 | 28 42 70 105 175 | 84 140 210 350 525 | 420 700 1050 | 2100 |

*Explicacion.* Hemos hallado los factores simples del número propuesto por la regla 1.ª, y encontrado que son 2, 2, 3, 5, 5 y 7. Despues, por la regla 2.ª, hemos hallado los compuestos de dos, multiplicando cada uno de los simples por los que tiene debajo, ó sea mayores, diciendo: dos por dos 4, dos por tres 6, etc., y hallado, como compuestos de dos, 4, 6, 10, 14, 15, 21, 25 y 35. Análogamente, por la misma regla 2.ª, hemos multiplicado cada uno de los compuestos de dos por los simples que tiene debajo, y hallado los compuestos de tres (diciendo: cuatro por tres 12, cuatro por cinco 20, etc.), 12, 20, 28, 30, 42, 50, 70, 75, 105 y 175. Del mismo modo hemos hallado los compuestos de cuatro, 60, 84, 100, 140, 150, 210, 350 y 525. Y como compuestos de cinco, 300, 420, 700 y 1050. Y, finalmente, multiplicando el compuesto de cinco 300 por el simple 7, único que tiene debajo, nos ha dado el número propuesto, y terminado, por lo tanto, la operacion.

**416.** *Demostracion.* Fúndase esta regla en que si un número es divisible por otros primos entre sí, es divisible por el producto de ellos (406), pues en efecto, cuanto se previene en la regla y se ha practicado en el anterior ejemplo, no es otra cosa que determinar los diferentes productos que forman los divisores del número propuesto, que son primos entre sí. Así siendo el número propuesto divisible por 2 y por 2 (números primos entre sí aunque sean iguales, pues no tienen más divisor comun que la unidad), tambien tiene que serlo por 4. Siéndolo por 2 y por 3 tiene que serlo por 6, y análogamente por los demas compuestos de á dos. Y semejantemente siéndolo por 4 y por 3, tiene que serlo por 12 y por 20, etc., y no por 8, pues 2 y 4 no son primos entre sí, y en efecto, 2100 no es divisible por 8. Y aunque hay productos de números que no son primos entre sí que dividen al propuesto, por ejemplo, 175, que es igual á $5 \times 35$, es porque 175 es tambien igual á $25 \times 7$, números que son primos entre sí. Y como todas las multiplicaciones posibles entre los divisores primos entre sí se hallan por la regla, tales productos son todos los factores compuestos del número propuesto, y la regla queda demostrada.

## ARTÍCULO IV.

### DETERMINACION DEL MÍNIMO COMUN DIVIDENDO Ó MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS.

**417.** Regla. *Para determinar el mínimo comun dividendo ó múltiplo de varios números, se descomponen en sus factores simples todos á excepcion de aquellos que sean evidentemente submúltiplos de otros de los dados, y el producto de todos los factores simples de todos ellos, omitiendo los que estén repetidos en dos ó más descomposiciones* (aunque tengan diferente exponente que se conservará al de mayor), *pero no los que se hallen repetidos en una misma* (que forman la correspondiente potencia); *ese producto será el mínimo comun dividendo de los números propuestos.*

*Ejemplo.* 12 15 20 45

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \times 3 \qquad 20 = 2^2 \times 5 \qquad 45 = 3^2 \times 5$$

Mínimo comun múltiplo $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

*Explicacion.* Descompusimos en factores simples los números dados, á excepcion del 15, por ser evidentemente submúltiplo de 45, y hallamos las igualdades que ofrece el ejemplo de las que, segun la regla, dedujimos el mínimo comun múltiplo $2^2 \times 3^2 \times 5$, omitiendo el factor 3 de la primera descomposicion, porque está en la tercera, aunque con mayor exponente, y el 5 de éste porque está en la segunda.

**418.** *Demostracion.* El número hallado 180 es divisible por 12, porque tiene todos los factores simples de éste, y repetidos tantas ó más veces que él (409). Por semejante razon es divisible por 20, y tambien por 45; y como siendo divisible por 45 lo es por su submúltiplo 15 (376), resulta que el número hallado es comun dividendo ó múltiplo de los cuatro propuestos. Y es ademas el mínimo de los muchos que pueden tener, porque si se supusiera que habia otro comun dividendo menor que $180 = 2^2 \times 3^3 \times 5$, tendria algun factor simple menos que él, y seria, por ejemplo, su descomposicion $2^2 \times 3^2$, por lo que seria divisible por 12, pero no por los demas números propuestos que tienen un factor 5. Suponiendo que fuera $2^2 \times 5$ seria divisible por 20, pero no por 45 ni por 12, que tienen el factor 3; y finalmente, suponiendo que fuera $2^2 \times 3 \times 5$, seria divisible por 12 y por 20, pero no por 45, porque tiene el factor $3^2$. Luego para ser divisible por todos los dados, tiene que contener todos sus factores simples como el número hallado; luego ese es el mínimo comun múltiplo. Y como lo mismo se podria demostrar sobre cualquier otro ejemplo, la regla es general y queda demostrada.

**419.** *Observacion.* No estará demas para algunos advertir que si alguno de los números propuestos fuera primo, su descomposicion es el mismo número, que entrará como factor del mínimo comun múltiplo, si no se suprime su descomposicion porque sea submúltiplo de alguno de los dados. Y consiguientemente si todos los números dados son primos, su mínimo comun múltiplo será el producto de ellos.

Así, el mínimo comun múltiplo de 7 y 15, es $7 \times 3 \times 5$, y el de 7, 5 y 3 es $7 \times 5 \times 3$.

# CAPÍTULO IV.

## APLICACION DE LA TEORÍA SOBRE LA DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS Á LOS QUEBRADOS COMUNES Ú ORDINARIOS.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**420.** Simplificar un quebrado, sabemos lo que es (195), y tambien sabemos (196) cómo se consigue la simplificacion. Pero como tal operacion en quebrados de grandes términos es pesada y susceptible de errores, vamos á aprender otro método, basado en el mismo principio (189), aunque deducido de la anterior teoría sobre la divisibilidad de los números.

Ademas, reducir quebrados á un comun denominador, sabemos tambien (191) lo que es, y cómo se consigue (192); mas como el procedimiento ordinario es pesado y el abreviado (193) sólo práctico en ciertos casos, vamos á aprender tambien otro basado en el mismo principio.

Antes de exponer uno y otro procedimiento, sentaremos algunos principios.

### ARTÍCULO II.

#### PRINCIPIOS TEÓRICOS COMPLEMENTALES SOBRE LOS QUEBRADOS COMUNES.

**421.** Quebrado irreducible *se llama aquel que no puede simplificarse y se halla, por lo tanto, todo lo sencillo que es posible.*

**422.** Teorema. *Un quebrado irreducible, propio ó impropio, no puede ser igual á un número entero.*

*Demostracion.* Si, por ejemplo, el quebrado $\frac{18}{19}$, que es propio y evidentemente irreducible porque sus términos no pueden dividirse exactamente por ningun número, se supone pueda ser equivalente á un número entero, por ejemplo 1, el denominador dividiria al numerador exactamente, pues de otro modo sería equivalente á un mixto (175); y como el denominador se dividiria á sí mismo, ambos términos tendrian un comun divisor, lo que es contra la hipótesis del teorema. Si el quebrado supuesto fuese impropio, por ejemplo, $\frac{19}{18}$ tambien irreducible, aunque sea igual al mixto $1\frac{1}{18}$, la demostracion sería la misma, pues si 18 dividia á 19, sería 18 comun divisor de ambos términos, y el quebrado no sería irreducible; luego el teorema queda demostrado.

**423.** Teorema. *Un quebrado cuyos dos términos son primos entre sí es irreducible.*

*Demostracion*. Si, por ejemplo, el quebrado $\frac{7}{8}$, cuyos dos términos son primos entre sí, se supone que pueda convertirse en otro equivalente de términos más pequeños, por ejemplo $\frac{5}{6}$, tendríamos que $\frac{7}{8} = \frac{5}{6}$; y reduciendo ambos quebrados á un comun denominador, daria $\frac{7 \times 6}{8 \times 6} = \frac{5 \times 8}{8 \times 6}$, quebrados que, teniendo iguales sus denominadores y siendo por supuesto iguales, sus numeradores deberian serlo, y sería $7 \times 6 = 5 \times 8$. Igualdad en la que, siendo el primer miembro múltiplo de 7, sería divisible por él, y lo mismo el segundo miembro. Pero 7 es primo con 8 por la hipótesis del teorema; luego dividirá á 5 (399); lo que es absurdo, porque 5 es menor que 7, y tiene que serlo en cualquier ejemplo, pues mayor que 7, el quebrado equivalente no sería simplificacion de $\frac{7}{8}$; luego éste, por ser sus términos primos entre sí, es irreducible; luego el teorema queda demostrado.

**424**. Teorema. *Si un quebrado irreducible es igual á otro, los dos términos de éste serán equimúltiplos de los dos términos de aquel.*

*Demostracion*. Vamos á demostrar que, si por ejemplo, $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, 9 es múltiplo de 3 y 15 de 5, y ademas que las veces que 9 contenga á 3 serán tantas como el 15 contenga á 5.

En efecto, si tales quebrados los reducimos á un comun denominador, tendremos $\frac{3 \times 15}{5 \times 15} = \frac{9 \times 5}{5 \times 15}$, quebrados que, siendo iguales, y teniendo evidentemente iguales sus denominadores, tendrán los numeradores iguales tambien, y será $3 \times 15 = 9 \times 5$. De esta igualdad podemos ya deducir, que puesto que el primer miembro es múltiplo de 3, será por él divisible, y lo mismo su igual el segundo miembro; y como 3 es primo con 5 por hipótesis, dividirá á 9 (319), y por tanto, 9 será múltiplo de 3. Análogamente, como el segundo miembro de la igualdad es múltiplo de 5, será divisible por 5 y su igual el primer miembro; pero como 5 por hipótesis es primo con 3, dividirá á 15, y, por lo tanto, 15 será múltiplo de 5; luego los dos términos del quebrado $\frac{9}{15}$ serán múltiplos de los de $\frac{3}{5}$. Finalmente, si dividimos por los dos miembros de la igualdad una misma cantidad $9 \times 15$, la igualdad no desaparecerá, porque los cocientes deberán ser iguales, y será $\frac{9 \times 15}{3 \times 15} = \frac{9 \times 15}{9 \times 5}$; quebrados que, simplificados, serán $\frac{8}{3} = \frac{15}{5}$, y como acabamos de demostrar que 9 es múltiplo de 3 y 15 de 5, los cocientes que esos quebrados iguales representan serán enteros y tambien iguales, y por lo tanto el mismo número de veces que 9 contenga á 3 contendrá 15 á 5; luego los términos del quebrado $\frac{9}{15}$ no sólo son múltiplos de los del $\frac{3}{5}$, sino equimúltiplos. Y como lo mismo se podria demostrar en otro cualquier ejemplo, el teorema es general y queda demostrado.

**425**. Corolario 1.° *Un quebrado irreducible no puede ser igual á otro irreducible, á no ser idéntico.*

Porque debiendo ser los términos del uno equimúltiplos de los del otro por el anterior teorema, en quebrados ambos irreducibles no cabe tal circunstancia. Esto es, que podrá ser $\frac{3}{5}=\frac{2+1}{3+2}$, porque el segundo quebrado, simplificado, es idéntico á $\frac{3}{5}$, pues $2+1=3$ y $3+2=5$; pero no puede existir igualdad entre los quebrados irreducibles, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{9}$, porque el 5 y el 9 deberian ser equimúltiplos de 3 y de 4, y por lo tanto divisibles por un mismo número, lo que es contra la hipótesis de que $\frac{5}{9}$ es irreducible.

## ARTÍCULO III.

### SIMPLIFICACION DE LOS QUEBRADOS.

**426.** Regla. *Para reducir un quebrado á su expresion más sencilla, se determina el máximo comun divisor de sus dos términos, y por él se dividen, siendo los cocientes los términos del quebrado simplificado.*

*Ejemplo.*

$\frac{888}{1272}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1272 | 888 | 384 | 120 | 24 |
| 384 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| | 120 | 24 | 00 | |

Quebrado simplificado $\frac{37}{53}$.

$$\begin{array}{r|l} 888 & 24 \\ \hline 168 & 37 \\ 000 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1272 & 24 \\ \hline 072 & 53 \\ 00 & \end{array}$$

*Explicacion.* Hallado el máximo comun divisor de los dos términos del quebrado 888 y 1272 que es 24, dividimos uno y otro término por él, y sus cociente 37 y 53 resultaron los términos del quebrado simplificado.

**427.** *Demostracion.* Que el máximo comun divisor de dos números es el mayor divisor comun que pueden tener, su nombre mismo lo indica y la regla para hallarlo está demostrada (393). Y como despues lo que se hace es dividir los dos términos de un quebrado por un mismo número, cosa que no altera su valor, sólo tenemos que demostrar que el quebrado simplificado queda ya irreducible ó convertido en su expresion más sencilla. Para esto bastará que consideremos que como un cociente disminuye segun aumenta el divisor, no habiendo ningun divisor comun á los dos términos del quebrado mayor que su máximo, no puede haber cocientes menores que los hallados, ni por lo tanto términos más sencillos para expresar el valor del quebrado. Ademas tenemos demostrado que si dos números se dividen por su máximo comun divisor, los cocientes son primos entre sí (398), y hemos demostrado tambien (423) que un quebrado cuyos términos son primos entre sí es irreducible; luego lo prescrito por la regla y practicado en el anterior ejemplo, produce un quebrado simplificado é irreducible, y tal regla queda demostrada.

## ARTÍCULO IV.

### REDUCCION DE QUEBRADOS Á UN COMUN DENOMINADOR.

**428**. Regla. *Para reducir quebrados á un comun denominador, el menor posible, se determina el mínimo comun dividendo ó múltiplo de todos los denominadores por la correspondiente regla* (427), *y ese será el denominador comun de los nuevos quebrados equivalentes, cuyos numeradores serán los productos de cada uno de los numeradores de los quebrados propuestos por los cocientes de las divisiones del mínimo comun múltiplo, por cada uno de los denominadores respectivamente.*

*Ejemplo.* $\frac{7}{12} - \frac{9}{15} - \frac{5}{20} - \frac{3}{45}$.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Mínimo comun múltiplo

$$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 180 \| 12 | 180 \| 15 | 180 \| 20 | 180 \| 45 |
| 60   15 | 30   12 | 9 | 000   4 |
| $\times 7$ | 00   $\times 9$ | $\times 5$ | $\times 5$ |
| 105 | 108 | 45 | 12 |

Quebrados equivalentes á los propuestos $\frac{105}{180} - \frac{108}{180} - \frac{45}{180} - \frac{12}{180}$.

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, procedimos á determinar el mínimo comun múltiplo de los denominadores, descomponiéndolos en factores simples, á excepcion del 15, por ser submúltiplo de 45, y hallamos 180. Dividido éste sucesivamente por los denominadores dados, nos dió los cocientes 15, 12, 9 y 4, que, multiplicados por los correspondientes numeradores 7, 9, 5 y 3, nos dió los de los nuevos quebrados 105, 108, 45 y 12, cuyo denominador comun debió ser por la regla el mínimo comun múltiplo 180.

**429**. *Demostracion.* Como la reduccion de los quebrados á un comun denominador se funda en el principio de que el quebrado no varía, aunque sus dos términos se multipliquen por un mismo número (189); todo comun denominador hallado á varios quebrados, sea por el procedimiento que sea, será múltiplo de los denominadores de los primitivos; y es, por lo tanto, evidente, que el más sencillo y conveniente que pueden tener es el mínimo comun dividendo de todos ellos. Hallado este, como lo que se prescribe por la regla y se ha practicado en el anterior ejemplo, es multiplicar los dos términos de cada quebrado por un mismo número, pues al dividir 180 por 12 y hallar por cociente 15, este número es el que, en realidad, sirve de factor á los dos términos del quebrado primero propuesto $\frac{7}{12}$ para dar el equivalente $\frac{105}{108}$, porque $105 = 15 \times 7$ y $180 = 15 \times 12$ (aunque esta última multiplicacion no se haga por innecesaria), y análogamente el segundo hallado $\frac{108}{180}$ es igual á $\frac{12 \times 9}{12 \times 15}$, y lo mismo los otros dos, resulta que los nuevos quebrados tienen que ser equivalentes á los propuestos, y tener por denominador comun el menor posible, sean cuales fueren los quebrados que se propongan si se sigue igual procedimiento. Luego la regla es general y queda demostrada.

---

# CAPÍTULO V.

## TEORÍA COMPLEMENTAL DE LOS DECIMALES.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**430.** Sabemos lo que son decimales (237) propios é impropios ó mixtos, exactos y periódicos, y áun inconmensurables (278). Sabemos expresarlos por escrito y oralmente, sumarlos, restarlos, multiplicarlos, dividirlos y valuarlos; convertir los quebrados comunes en decimales y éstos en aquellos; pero no sabemos la demostracion de la conversion de los decimales periódicos en quebrados ordinarios, ni la causa determinante de tal periodicidad; todo lo que va á ser objeto de este capítulo, en el que repetiremos algo de lo que ya sabemos y acabamos de indicar, para fijar bien las ideas.

### ARTÍCULO II.

#### CONVERSION DE QUEBRADOS ORDINARIOS EN DECIMALES.

**431.** Sabemos cómo se convierte un quebrado ordinario en decimal (279) y la demostracion.

*Ejemplos.* 1.° $\frac{3}{5} = 3{,}0 \;\underline{|\;5\quad}$ ; luego $\frac{3}{5} = 0{,}6$.

```
            0,6
```

2.° $\frac{7}{12} = 7{,}0 \;\underline{|\;12\qquad}$ ; luego $\frac{7}{12} = 0{,}5833...$

```
   1 00   0,5833...
    040
     040
      040
```

3.° $\frac{13}{7} = 13{,}0 \;\underline{|\;7\qquad\qquad}$ ; luego $\frac{13}{7} = 1{,}8571428...$

```
    6 0   1,8571428...
     50
      10
       30
        20
         60
```

*Explicacion*. En el primer ejemplo, la division del numerador por el denominador ha dado desde luego cociente exacto. En el segundo, al ver que la cifra 3 del cociente empezó á repetirse, se dió por terminada la operacion, obteniendo por resultado un decimal periódico mixto. Y en el tercer ejemplo, al ver que la cifra decimal 8 volvia á aparecer, se dió por terminada la operacion, cuyo resultado fué un decimal periódico puro con seis cifras en el período.

Ⓓ *Demostracion*. Ya la sabemos (279); pero diremos, bajo otro punto de vista, que si al numerador del quebrado propio ó impropio se le añaden á su derecha ceros, el cociente deberá resultar multiplicado por la unidad con tantos ceros como se le añadieron al dividendo (133), y para que resulte el conveniente no habrá más que separar en tal cociente, con el signo decimal, tantas cifras como ceros se añadieron al dividendo. Y como viene á ser lo mismo lo que se prescribe en la regla y se ha practicado en los anteriores ejemplos, aquella queda demostrada.

Lo mismo es, pues, $3{,}0 \,\underline{|\ 5\quad}$ que $30 \,\underline{|\ 5\quad}$

$0{,}6 \qquad 6 : 10 = \frac{6}{10} = 0{,}6.$

**432**. Lema. *El cociente de toda aproximacion por decimales, será ilimitado ó periódico desde el momento que se encuentre un residuo igual á otro anterior*.

Porque tal residuo dará evidentemente igual cifra para el cociente que dió el anterior y con igual exceso que él, que producirá necesariamente despues otra cifra igual tambien á la que produjo el tras-anterior, etc.

Ⓓ Pues en efecto; en el ejemplo segundo, al tener el residuo 40 igual al anterior, su cociente será necesariamente 3 como el parcial anterior; y su residuo 4 igual tambien al otro, y así sucesivamente todos. Y análogamente en el ejemplo tercero, al tener 4 de residuo despues del 6, como ya otro residuo 4 produjo 8 para el cociente y con resto de 5 que produjo 5 al cociente, y sucesivamente 7, 1, 4, 2 y 8, necesariamente esas mismas cifras tendrán que repetirse ilimitadamente.

**433**. Lema. *El número de cifras del periodo de un cociente decimal ilimitado, no puede ser igual ni mayor que el número de unidades de que conste el divisor*.

Porque como todo residuo ha de ser menor que el divisor, pues igual ó mayor que él no sería legítimo y probaria que la cifra anterior del cociente era menor de lo que debia ser (138), todos los residuos menores que el divisor diferentes necesariamente (pues al repetirse alguno ya por el lema anterior empezaria nuevo período), no pueden ser más que tantos cuantas unidades ménos una tiene el divisor, pues números menores que 5, por ejemplo, no hay más que 1, 2, 3 y 4.

Así, en el ejemplo tercero de los anteriores, los residuos son siempre números menores que 7, pues un 8 ó un 9 no serian residuos legítimos, y por eso el periodo tiene seis cifras, que es lo más que con ese divisor puede tener. Y en el ejemplo segundo los residuos diferentes pudieron ser once; pero siendo despues del 10 todos los residuos 4, el periodo es de una cifra.

**434**. *Escolio*. Para completar un cociente inexacto ó aproximado por decimales que sea ilimitado ó periódico, se puede poner el residuo que se quiera en forma de quebrado ordinario con el divisor por denominador, pero cuya especie será de la unidad decimal últimamente hallada en el cociente.

Así, en el ejemplo anterior segundo, si se quiere completar el cociente con cualquier objeto, por ejemplo, el de multiplicarlo por el divisor para ver si da el dividendo, se pondrá $\frac{7}{12} = 0{,}5833\,\frac{4}{12}$ de diezmilésimos, ó $0{,}583\,\frac{4}{12}$ de milésimo, y áun tambien $0{,}5\,\frac{10}{12}$ de décimo. Y análogamente, en el ejemplo tercero, el cociente completo será $1{,}857142\,\frac{6}{7}$ de millonésimo.

Conocer esto es conveniente, no sólo para completar el cociente cuando pueda convenir, sino para saber lo que se desprecia al considerar una parte de un decimal periódico.

## ARTÍCULO III.

### CONVERSION DE DECIMALES EN QUEBRADOS COMUNES.

**435**. Cuatro clases de decimales sabemos (272) pueden presentarse para convertirlos en quebrados ordinarios, lo que se expresa generalmente diciendo *hallar la fraccion generatriz de un decimal;* aunque esta expresion sea poco exacta, pues, como veremos, un decimal tiene varios quebrados equivalentes, aunque iguales entre sí, y lo más exacto sería llamar generador al irreducible.

Repitamos las reglas para la conversion, á fin de darles las demostraciones correspondientes.

**436**. Regla 1.ª r. *Para convertir un decimal exacto en quebrado, sabemos* (274) *que se pone el decimal sin el signo por numerador, y por denominador la unidad con tantos ceros como cifras decimales tenga el decimal propuesto.*

*Ejemplos.* 1.° $0{,}53 = \frac{53}{100}$  2.° $4{,}53 = \frac{453}{100} = 4\frac{53}{100}$.

*Demostracion.* La definicion de los decimales (257) es la única que puede darse.

**437**. Regla 2.ª r. *Para convertir un decimal periódico puro en quebrado ordinario, sabemos* (275) *que se pone por denominador el número dado sin el signo decimal, y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el período.*

*Ejemplo.* $0{,}4324... = \frac{432}{999} = \frac{144}{333} = \frac{48}{11}$.

*Demostracion.* Si en el decimal propuesto trasladamos el signo decimal á la derecha del período, lo haremos 1000 veces mayor, y será 432,432432... (pues es ilimitado el número de períodos); y si á ese número mil veces mayor que el dado le restamos este, el resultado será evidentemente 999 veces mayor que el número propuesto, pues $(1000 - 1 = 999)$, y tendremos

$$\begin{array}{r} 432{,}4324... \\ -\ 0{,}4324... \\ \hline \end{array}$$

cuyo resultado $= 432$

para hacerlo 999 veces menor y que sea igual al decimal propuesto, lo dividiremos por ese número y será $0{,}4324... = \frac{432}{999}$, decimal que tambien equivaldrá á los quebrados iguales al $\frac{432}{999}$, por ejemplo, $\frac{432 \times \alpha}{999 \times \alpha}$ y $\frac{432 : \alpha}{499 : \alpha}$; luego la regla queda demostrada.

**438**. Regla 3.ª r. *Para convertir un decimal periódico mixto en quebrado ordinario, sabemos* (276) *que se pone por numerador el número que formen las cifras no periódicas, y las de un período, ménos el número que formen las cifras no periódicas, y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras no periódicas haya en el decimal propuesto, simplificándolo si es posible para hallar el verdadero generador.*

*Ejemplo.* $0{,}456767... = \frac{4567 - 45}{9900} = \frac{4522}{9900} = \frac{2261}{4950}$.

*Demostracion.* Si trasladamos el signo decimal á la derecha del primer periodo del decimal propuesto, lo haremos 10000 veces mayor, y será . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4567,6767...

Y si trasladamos el signo á la derecha de la parte no periódica, tendremos un número 100 veces mayor que el propuesto, y será. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45,6767...

Y como la diferencia entre un número 10000 veces mayor que el propuesto y otro 100 veces mayor, debe ser uno 9900 veces mayor, porque (10000 = 100 = 9900), si restamos los dos números trasformados, dejando indicada la operacion de los enteros, dará 4567 — 45, expresion numérica que será 9900 veces mayor que el número propuesto, y que para ser igual á él no habrá más que dividirla por 9900; luego $0,45676... = \frac{4567-45}{9900}$, quebrado que se podrá llamar generador del decimal, aunque éste tambien sea producido por todos los quebrados iguales á $\frac{4567-45}{9900}$, como son $\frac{(4567-45)\times\alpha}{9900\times\alpha}$ y $\frac{(467-45):\alpha}{9900:\alpha}$.

**439.** Regla complemental r. *Para convertir un decimal periódico impropio, ó sea con enteros, en quebrado ordinario* (277), *se considerarán tales enteros como parte no periódica del decimal, y se obrará segun la regla anterior; pero al denominador del quebrado que se halle, se le suprimirán tantos ceros como cifras hubiere en la parte entera del número propuesto,* ó, *lo que es lo mismo, no se contarán tales enteros para el aumento de ceros que deben ponerse al denominador por las cifras no periódicas.*

*Ejemplo.* $6,53434... = \frac{6534-65}{990}$.

*Demostracion.* Si trasladamos el signo decimal un lugar á la izquierda en el número propuesto, lo haremos 10 veces menor y será 0,65343..., y convirtiendo este decimal en quebrado por la regla anterior, dará $\frac{6534-65}{9900}$; pero como el decimal que se convierte en quebrado es 10 veces que el propuesto, el quebrado hallado será tambien 10 veces menor que el propuesto, el quebrado hallado será tambien 10 veces menor; y será igual si lo hacemos 10 veces mayor, dividiendo su denominador por 10 (188), lo que conseguiremos supriméndole un cero, y será $\frac{6534-65}{990}$; luego la regla queda demostrada.

## ARTÍCULO IV. Δ

### DIFERENTE CARÁCTER DE LAS FRACCIONES ORDINARIAS COMO GENERATRICES DE DECIMALES EXACTOS Ó DE LOS ILIMITADOS.

**440.** Los quebrados comunes por su carácter ó circunstancias visibles, cuando están convertidos en irreducibles, como generadores de decimales ó equivalentes á ellos, pueden dividirse en tres clases: 1.ª De aquellos cuyo denominador se compone sola y exclusivamente de los factores 2 y 5, con ó sin exponente, ó de uno solo de esos factores. 2.ª De aquellos cuyo denominador se compone exclusivamente de factores primos otros que 2 y 5. Y 3.ª De aquellos cuyo denominador se compone de los factores 2 y 5 ó uno de ellos, pero tambien de alguno ó algunos otros factores primos. Pero no son clasificables los quebrados reducibles, porque al simplificarlos podrán perder factores de su denominador, sin los que pertenecerán muchas veces á una clase diferente de aquella á la que parecian pertenecer antes de simplificarlos. Sin embargo, los que tengan en su denominador sólo los factores 2 y 5, como no podrán perderlos los dos por la simplificacion, á no ser impropios y equivalentes á enteros, y no podrán adquirir en su denominador ningun factor nuevo, puede asegurarse desde luego que pertenecen á la primera clase, y, análogamente, á la segunda los reducibles que no tengan en su denominador ninguno de los factores 2 y 5.

**441.** No se da generalmente grande importancia al conocimiento del carácter de los quebrados como generadores de decimales; pero sabiendo como sabemos que todo decimal equivale á un quebrado ordinario (273), que puede considerarse como su generador, y sabiendo como sabemos que hay decimales exactos y periódicos, y que estos unos son puros y otros mixtos; y teniendo sus generadores, como tienen, un carácter particular que los distingue como equivalentes á unos ú otros decimales, muy conveniente es conocerlo y lo vamos á explicar, si bien bajo la forma de importancia secundaria.

**442.** *Quebrados de la primera clase.* Todo quebrado de esta clase es equivalente á un decimal exacto del que puede considerarse generador, cuyo número de cifras decimales será igual al de unidades del mayor exponente de los factores 2 y 5, de que sola y exclusivamente se compone el quebrado generador.

**443.** *Quebrados de la segunda clase.* Todo quebrado de esta clase equivale á un decimal periódico puro, del que podrá considerarse generador, cuyo período constará precisamente de ménos cifras que unidades tenga el denominador del generador, que tendrá otros factores que 2 y 5.

**444.** *Quebrados de la tercera clase.* Todo quebrado de esta clase equivale á un decimal periódico mixto, del que puede llamarse generador, cuyo número de cifras no periódicas será igual al de unidades del mayor exponente de los factores de 2 y 5 de que con otros números primos se componga el denominador del quebrado generador, y cuyo período tendrá ménos cifras que unidades el denominador del generador.

**445.** *Quebrados reducibles.* Serán equivalentes á decimales exactos, periódicos puros ó mixtos, segun que, convertidos en irreducibles, se vea á qué clase pertenecen; y áun sin simplificarlos, los producirán exactos si no tienen en su denominador más factores que el 2 y el 5, y no son impropios equivalentes á números enteros; y los producirán periódicos puros si no tienen en su denominador factores 2 y 5. Pero no los producirán periódicos mixtos los quebrados reducibles, aunque en su denominador tengan los factores 2 y 5 y otros, si al simplificarlos pierden factores que les hagan pertenecer á la primera ó segunda clase, pues producirán los decimales correspondientes á ellas.

**446.** *Demostracion* 1.ª Todo quebrado de la primera clase puede convertirse en otro igual, cuyo denominador sea la unidad con ceros, multiplicando sus dos términos por 2 ó por 5, con ó sin exponente, teniendo para ello en cuenta que $10 = 2 \times 5$ y $100 = 2^2 \times 5^2$, etc. Y como teniendo por denominador la unidad con ceros, será evidentemente igual á un decimal exacto (237), tambien lo será el quebrado irreducible igual al convertido, como se ha dicho.

$$\text{Asi, } \frac{7}{5} = \frac{7 \times 2}{5 \times 2} = \frac{14}{10} = 1{,}4, \text{ y } \frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \times 5} = \frac{7 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{35}{10} = 0{,}35.$$

Luego todo quebrado de la primera clase produce necesariamente un decimal exacto.

Y ese decimal tendrá tantas cifras como unidades el mayor exponente de los factores 2 y 5 del denominador del quebrado irreducible, porque como todo quebrado con la unidad con ceros por denominador (que, segun acabamos de demostrar, es igual á un decimal exacto), no puede tener su numerador terminado en cero, porque equivaldria á un cero á la derecha de un decimal que no tiene valor ninguno $\left(\text{pues } \frac{30}{100} = 0{,}30 = 0{,}3\right)$ no podria, sin terminar en 0 tal numerador ser divisible por 10 (373), y no siéndolo, el quebrado no se podrá simplificar dividiendo sus dos términos por 10; y, por lo tanto, en la simplificacion podrá el denominador dividirse por 5 ó por 2, con ó sin exponente; pero no por 5 y por 2, pues $2 \times 5 = 10$, y uno de tales factores no podrá desaparecer ni cambiar de exponente; y como éste dice con sus unidades el número de cifras del decimal equivalente $\left(\text{pues } 0{,}3 = \frac{3}{10} = \frac{3}{2 \times 5} \text{ y } 0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{34}{2^2 \times 5^2}\right)$, tambien lo dirá como parte del denominador del quebrado; en efecto, $\frac{3}{5} = 0,6$, etc.; luego queda demostrada la verdad sobre los quebrados de la primera clase.

**447.** *Demostracion* 2.ª Relativamente á los quebrados de la segunda clase, diremos que si suponemos que, por ejemplo, el quebrado $\frac{3}{7}$ pudiera producir el decimal exacto 0,54, éste sería igual á $\frac{54}{100}$, y, consiguientemente $\frac{3}{7} = \frac{54}{100}$. Pero los factores 2 y 5, de que se compone el denominador de $\frac{54}{100}$, no pueden los dos desaparecer en la simplificacion, por lo dicho en la demostracion anterior; ni en la simplificacion podrán adquirir ningun factor nuevo; luego el quebrado $\frac{54}{100}$ convertido en irreducible con factores 2 y 5, ó uno de ellos en el denominador, sería igual al irreducible propuesto $\frac{3}{7}$, cuyo denominador tiene otros factores; lo que es absurdo, porque dos quebrados irreducibles iguales tienen que ser idénticos (425), y, por lo tanto, tener los mismos factores en sus denominadores, pues un número no admite dos descomposiciones en factores simples (408); luego $\frac{3}{7}$ no puede producir un decimal exacto.

Tampoco puede $\frac{3}{7}$ producir un decimal periódico mixto, por ejemplo, 0,544... porque sería (438) $0,544... = \frac{54-5}{90} = \frac{54-5}{3^2 \times 2 \times 5}$ en cuyo denominador no sólo hay factores 2 y 5, que los dos no pueden desaparecer en la simplificacion, pues para ello era menester que el numerador acabase en 0, y para ello se necesitaba que la cifra de la derecha (única en este caso), de la parte no periódica 5, fuese igual á la cifra de la derecha (única tambien en este caso) del período 4, y entonces el período empezaria antes de lo supuesto. Y tampoco puede del denominador desaparecer el otro factor 3, pues desapareciendo quedaria un quebrado de la primera clase igual á uno de la segunda, lo que, como irreducible, es absurdo (135); y habiendo, por lo tanto, de conservar alguno de los factores 2 ó 5 y tambien el 3, tendríamos que $\frac{3}{7}$ sería igual á un quebrado irreducible, cuyo denominador tendria factores distintos, lo que no puede ser; luego no puede producir un decimal periódico mixto; y no pudiendo producir tampoco uno exacto, es evidente que necesariamente deberá producir uno periódico puro. En cuanto al número de cifras del período, está demostrado (433).

**448.** *Demostracion* 3.ª Con respecto á los quebrados de la tercera clase diremos, que si suponemos que el quebrado irreducible $\frac{9}{14} = \frac{9}{2 \times 7}$ produzca un decimal exacto 0,46, sería evidentemente $\frac{9}{2 \times 7} = \frac{46}{100} = \frac{46}{2^2 \times 5^2}$. Pero este último quebrado, al simplificarlo, no puede perder los dos factores 2 y 5 de su denominador, ni cambiar de exponente el que quedase, por lo dicho en la primera demostracion (446), ni podrá tampoco adquirir ningun factor nuevo evidentemente (pues la simplificacion se consigue dividiendo y no multiplicando); luego resultaria que el quebrado irreducible $\frac{9}{2 \times 7}$, sería igual á otro irreducible con denominador de factores 2 y 5, ó uno de ellos, lo que ya hemos repetidamente demostrado que es absurdo.

Tampoco puede el tal quebrado $\frac{9}{2 \times 7}$ producir un decimal periódico puro, por ejemplo, 0,4646..., pues será $0,4646 = \frac{46}{99}$ (437), y como el denominador, por terminar en 9, no es divisible por 2 ni por 5 (379), y no tiene, por lo tanto, esos factores, ni los podrá adquirir en la simplificacion, y con ella nos daria un quebrado irreducible con otros factores que 2 y 5, tendríamos que el irreducible propuesto $\frac{9}{2 \times 7}$ sería igual á otro, cuyo denominador no tendria el factor 7, lo que es absurdo. Luego si $\frac{9}{2 \times 7}$ no puede producir ni un decimal exacto, ni uno periódico puro, tendrá necesariamente que producirle periódico mixto. Y las cifras de su período serán en menor número que unidades tenga su denominador, por lo demostrado (433); y las cifras no periódicas serán tantas como unidades tenga el mayor exponente de los factores 2 y 5 del denominador, por razones semejantes á las expresadas en la demostracion primera (446). Luego queda completamente demostrada la verdad sobre los quebrados de la tercera clase.

**449.** *Demostracion 4.ª* Sobre los quebrados reducibles poco tenemos que demostrar. Evidentemente, que si un quebrado reducible no tiene en su denominador más factores que el 2 y el 5 ó uno de ellos, al simplificarlo, por lo demostrado repetidamente, no podrá perder los dos, si no se trata de un quebrado impropio, igual á un entero; y como tampoco podrá adquirir otro factor nuevo, áun sin simplificar, se puede asegurar que corresponde á la primera clase.

Análogamente, un quebrado reducible, cuyo denominador no tenga ninguno de los factores 2 y 5, como no los podrá adquirir en la simplificacion, sin simplificarlo, se puede asegurar que corresponde á la segunda clase.

Pero evidente es tambien que un quebrado reducible, en cuyo denominador haya los factores 2 y 5 ó uno de ellos, y ademas otro ú otros que no sean 2 y 5, como en la simplificacion podrán perder factores, sólo despues de convertido en irreducible, podrá saberse con toda seguridad á qué clase corresponde, y, por lo tanto, qué clase de decimal produce.

**450.** *Observacion.* Segun ya indicamos (272), se comprenderá ahora mejor que el verdadero generador de un decimal debia llamarse el quebrado irreducible equivalente, y no como se llama el reducible que tiene un denominador con nueves solos ó seguidos de ceros, ó con la unidad con ellos. En efecto; el decimal 0,24 lo produce $\frac{24}{100}$, pero tambien $\frac{48}{200}$ y $\frac{12}{50}$ y $\frac{6}{25}$, etc., y todos ellos, pudiendo llamarse sus generadores, el único que tiene marcadas circunstancias diferentes de los otros, para conocerse qué clase de decimal puede y debe producir, es el irreducible $\frac{6}{25}$; y ese, por lo tanto, debería llamarse su generador. Y, análogamente, si $0,4545 = \frac{45}{99}$; como tambien $0,4545 = \frac{15}{33}$, y tambien á $\frac{5}{11}$, este que produce el mismo decimal, deberá llamarse el generador, siendo ademas muy fácil hallarlo, simplificando los quebrados reducibles resultantes.

---

# CAPÍTULO VI.

## ABREVIACION DE LOS PROBLEMAS SOBRE DECIMALES.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**451.** Como hemos visto que hay decimales con número ilimitado de cifras, y en las que un solo período puede ser muy largo ($\frac{7}{23}$ da un decimal ilimitado con 22 cifras en el período), y aun los decimales exactos pueden tener muchas; y como en la mayor parte de los casos basta obtener el resultado con un error menor que un centésimo ó que un milésimo, ó sea un decimal de dos ó tres cifras; y aun en los problemas más importantes basta obtener el resultado con cinco ó seis cifras decimales, siendo, por lo tanto, inútiles las pesadas operaciones con largos decimales, es de grande conveniencia el saber abreviarlas, aunque con el conocimiento del máximo error que se comete con la abreviacion, todo lo que va á ser objeto de este capítulo, como ya prometimos (282).

## ARTÍCULO II.

### ABREVIACION DE LA SUMA DE DECIMALES.

**452**. Regla. *Despréciense de todos los sumandos todas las cifras decimales de unidades inferiores á aquellas, dentro de una de las que se quiera que esté el máximo error del resultado; añadiendo una unidad decimal á la última inferior que en cada sumando se conserve, si la cifra de unidades superiores que se desprecian es mayor de 4.*

*Ejemplo.* Se desea la siguiente adicion con un resultado de error menor de un milésimo.

| *Operacion sin abreviar.* | *Operacion abreviada.* |
|---|---|
| 3,75457 | 3,755 |
| + 7,56742 | + 7,567 |
| + 8,45079 | + 8,451 |
| + 1,53836 | + 1,538 |
| = 21,31114 | = 21,311 |
| | — 21,31114 |
| Error de la operacion abreviada | 0,00014 |

**453**. *Demostracion*. Se funda la anterior regla en que las unidades decimales que se añaden á unos sumandos, al despreciar algunas cifras decimales, compensan casi siempre las que se quitan á otros al despreciar cifras decimales sin añadir ninguna unidad á la última considerada, por no pasar de 4 la superior que se desprecia. Y el resultado, como se ve en el anterior ejemplo, corresponde al objeto de la regla, pues el error de 14 diezmilésimos es menor que un milésimo.

**454**. *Observacion*. Cuando á la mayor parte de los sumandos se les añade una unidad decimal, como la compensacion no se verifica, el resultado suele salir con un error mayor del que se desea. Para evitarlo, basta tener presente que solo á la mitad próximamente de los sumandos conviene añadirles una unidad decimal, como se ha hecho en el anterior ejemplo. Lo más acertado, si el problema es importante, es no despreciar en los sumandos tantas cifras como dice la regla, sino una ménos.

## ARTÍCULO III.

### ABREVIACION DE LA SUSTRACCION DE DECIMALES.

**455**. Regla. *Despréciense de minuendo y sustraendo las cifras decimales de unidades inferiores á aquellas, dentro de una de las que se quiere que esté el error máximo, no debiéndose añadir unidad ninguna á la última cifra decimal que se considera, aunque la primera despreciada sea mayor de 4.*

*Ejemplo.* Se desea efectuar la siguiente sustraccion con un error menor de un milésimo.

| *Operacion sin abreviar.* | *Operacion abreviada.* |
|---|---|
| 15,456954 | 15,456 |
| — 8,543662 | — 8,543 |
| = 6,913292 | = 6,913 |
| | — 6,913292 |
| Error de la sustraccion abreviada | 0,000292 |

**456**. *Demostracion.* Al despreciar del minuendo las 9 diezmilésimas y otras unidades inferiores, se hace menor en una cantidad que quedaria exactamente compensada (75) si las cifras despreciadas del sustraendo fueran iguales, ó sea 9 diezmilésimos, etc.; pero como aunque no sean iguales, su diferencia máxima con las del minuendo, sean unas y otras cuales sean, no puede ser mayor de 9 diezmilésimos, 9 cienmilésimos, etc., ó sea siempre ménos de 1 milésimo, la regla conduce al resultado que se desea. Y no conduciria si no prescribiera no añadir unidad ninguna á la última cifra considerada, porque un aumento, por ejemplo, al minuendo, si no se hacia tambien al sustraendo, porque la primer cifra despreciada fuera menor de 5, lejos de compensarlo haria que el error del resultado fuera mayor de lo que se deseara (75). Luego la regla está justificada.

## ARTÍCULO IV.

### ABREVIACION DE LA MULTIPLICACION DE DECIMALES.

**457**. La costumbre de abreviar los datos en la adicion y sustraccion, suprimiendo cifras decimales de unidades inferiores á aquellas dentro de una de las que se quiere que esté el error máximo del resultado, es causa de que muchos procedan de un modo análogo en la multiplicacion y division, cuyo proceder, si bien no tiene grande inconveniente en la division, lo tiene, sí, en la multiplicacion, porque el resultado sale muchas veces con un error mayor del que se cree, al abreviar los datos por el indicado sistema. Para convencerse de ello, basta observar lo que sucede en cualquier sencillo ejemplo, v. gr., $0,36 \times 0,43 = 0,1548$ y $0,3 \times 0,4 = 0,12$ y aun $0,4 \times 0,4 = 0,16$.

Ese procedimiento puede mejorarse en virtud de la siguiente regla, suficientemente exacta, si los enteros de los factores son próximamente iguales.

**458**. Regla. *Para multiplicar decimales abreviadamente con enteros próximamente iguales, con un error máximo determinado, despréciense de los factores las cifras decimales de unidades inferiores á aquellas, dentro de una de las que se quiera que esté el error máximo, á excepcion de la inmediata, aumentando una unidad decimal á uno de ellos, aunque la prima despreciada sea menor de* 5; *y del resultado despréciense las cifras decimales inferiores á la determinada para el máximo error.*

*Ejemplo.* Se desea efectuar la siguiente multiplicacion con un error menor de un centésimo.

| *Multiplicacion sin abreviar.* | *Multiplicacion abreviada.* |
|---|---|
| 3,4538403 | 3,453 |
| × 5,2382 | 5,239 |
| 69076806 | 31077 |
| 276307224 | 10359 |
| 103615209 | 6906 |
| 69076806 | 17265 |
| 172692015 | = 18,090267 |
| = 18,09190624946 | 18091906 |
| Error de la multiplicacion abreviada. | 0,001639 |

**459.** *Demostracion.* Fúndase esta regla en que al despreciar cifras decimales de un factor se le hace menor, y el producto debe disminuir (354), y al agregarle una unidad decimal á la última cifra considerada del otro factor se le hace mayor y el producto debe aumentar; y aunque un efecto no compense al otro, porque el aumento ó disminucion es por vía de suma y resta (357), la diferencia debe generalmente ser pequeña si los enteros de los factores no son muy desiguales, y para que más lo sea se debe hacer el aumento al decimal cuya parte despreciada es más pequeña.

La razon de que los enteros de los factores deben ser próximamente iguales, es que al despreciar, por ejemplo, 9 centésimos (cerca de un décimo) del multiplicando, se hace el producto cerca de una décima parte menor del valor total del multiplicador (352), y al aumentar un décimo á éste, se hace el producto mayor una décima parte del total valor del multiplicando, y siendo los factores casi iguales, el aumento casi compensará á la disminucion; pero siendo muy desiguales, el producto sufrirá una grande alteracion. Luego la regla está demostrada.

En efecto; en 12 multiplicado 13 (importan poco los decimales, porque por muchos que haya no llegarán á valer un entero), la décima parte de 12 y la décima parte de 13 serán casi iguales; pero en 99 multiplicado por 9, la décima parte del primero será cerca de 10, y la del segundo ménos de 1. No sólo, pues, el producto de una multiplicacion abreviada de enteros desiguales podrá tener error mayor que una unidad decimal cualquiera, sino mayor que un entero.

**460.** *Observacion.* Por lo expuesto en la anterior regla y su demostracion, se comprenderá que los casos á que se refiere son pocos, pues lo más general es que el multiplicador sea mucho más pequeño que el multiplicando, por lo que la verdadera abreviacion de la multiplicacion de decimales se obtiene por logaritmos, y por eso no debemos dar grande importancia al ingenioso método de que vamos á ocuparnos en seguida.

**461.** Regla. *Para multiplicar abreviadamente dos decimales de muchas cifras, con un error menor que una unidad decimal de un órden algo superior* (como decimos centésimos ó milésimos, pues en otro caso no sería grande la abreviacion), *se escribe el multiplicando tal cual es, y debajo se pone el multiplicador invertido, de manera que la cifra de las unidades simples del mismo quede debajo de las unidades decimales del multiplicando de especie inferior inmediata á aquellas, dentro de una de las que se quiera que* *esté el máximo error del resultado. En seguida se multiplica cada cifra del multiplicador invertido, empezando por la derecha, por las del multiplicando, principiando por la correspondiente ó que tenga encima, desatendiendo todas las de la derecha, á excepcion de la primera que se multiplica tambien, pero sólo para ver si produce su multiplicacion alguna unidad de órden superior al suyo y sumarla al producto de la cifra inmediata. Los productos parciales así obtenidos se irán colocando, no ganando cada uno un lugar hácia la izquierda, como se hace en la multiplicacion, sino formando columna vertical las unidades inferiores que se obtengan, que serán todas de la especie inferior inmediata á aquellas, dentro de una de las que se quiera que esté el máximo error. Se sumarán en seguida todos los productos parciales, y en el total se colocará el signo decimal debajo de el del multiplicando.*

**Ejemplo de multiplicacion de decimales abreviada con un error menor de un centésimo.**

| *Multiplicacion sin abreviar.* | *Multiplicacion abreviada.* |
| ---: | ---: |
| 425,8624345 | 425,8624345 |
| $\times$ 3,4534 | 43543 |
| 17034497380 | 1277587 |
| 12775873035 | 170345 |
| 21293121725 | 21293 |
| 17034497380 | 1277 |
| 12775873035 | 170 |
| 1470,67333130230 | 1470,672 |

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, escribimos debajo del multiplicando (tomando como tal el de más cifras) el multiplicador invertido, colocando sus 3 unidades simples debajo de los milésimos del multiplicando (pues que el problema pide que el error sea de ménos de un centésimo); los 4 décimos del multiplicador debajo de los centésimos del multiplicando; los 5 centésimos del multiplicador debajo de los décimos del multiplicando; los 3 milésimos del multiplicador debajo de las unidades simples del multiplicando, y los 4 diezmilésimos del multiplicador debajo de las decenas del multiplicando. En seguida multiplicamos la primera cifra de la derecha del multiplicador invertido, por la del multiplicando de encima de ella; y por todas las de su izquierda despreciando las de la derecha, á excepcion de la primera, que multiplicamos sólo para ver si su producto daba algunas unidades superiores á las de su órden. Dijimos, pues, 3 por 4 son 12 y llevo 1 (no escribiendo nada); 3 por 2 son 6 y 1 que llevo 7 (y escribimos el 7 debajo del 3 del multiplicador). Despues 3 por 6 son 18 (y pusimos 8) y llevo 1, y así continuamos sacando el primer producto parcial. Para sacar el segundo, dijimos: 4 por 2 son 8 (que no escribimos) y no llevo nada en realidad; pero como 8 es mayor de 4 se lleva 1 (para despreciar ménos cantidad); 4 por 6 son 24 y 1 son 25 (pusimos el 5) y llevo 2, y así continuamos sacando el segundo producto parcial, que escribimos sin ganar lugares hácia la izquierda. Análogamente obramos para sacar los demas productos parciales, y al total le separamos con el signo decimal tres cifras, obteniendo un resultado diferente de la multiplicacion sin abreviar en poco más de un milésimo.

**462.** *Demostracion.* El procedimiento que prescribe la regla se funda en que á causa de la colocacion en órden invertido de las cifras del multiplicador, todos los productos que se hallen deben ser de milésimos. Pues en efecto, cualquier número de unidades simples multiplicado por milésimos da milésimos ($1 \times 0,001 = 0,001$ y $8 \times 0,009 = 0,081$), y por lo tanto 3, primera cifra de la derecha del multiplicador invertido, como son unidades simples, multiplicadas por milésimos y otras unidades superiores del multiplicando, debe dar milésimos y otras unidades superiores. Análogamente, como cualquier número de décimos multiplicado por cualquier número de centésimos, da milésimos ($0,1 \times 0,01 = 0,001$ y $0,9 \times 0,09 = 0,081$), el producto de la segunda cifra del multiplicador invertido, que son los décimos del verdadero multiplicador, multiplicada por la que tiene encima del multiplicando, da milésimos, por lo que se colocan debajo de los milésimos del producto parcial. Y análogamente, como centésimos multiplicados por décimos, y milésimos multiplicados por unidades simples, y diezmilésimos multiplicados por decenas, dan siempre milésimos, todos los productos parciales, debiendo ser milésimos, se escriben y reunen como prescribe la regla. Y para que sean milésimos, deberá ponerse el signo decimal donde prescribe la regla. Finalmente, todas las cifras del multiplicando que no se multiplican nunca, y las que se van dejando de multiplicar, se desprecian, porque sus productos no producirian ningun milésimo, ó al ménos ningun centésimo, pues diezmilésimos por enteros dan diezmilésimos, y millonésimos por enteros dan millonésimos, y décimos por milésimos, dan diezmilésimos. Y para que la acumulacion de los productos que se desprecian no llegue á valer un centésimo, se sacan los productos en milésimos, y se ve ademas si el producto de la cifra de unidades superiores de las despreciadas, da ó compone alguna de órden superior que se suma al producto correspondiente. Y como lo mismo se podria demostrar sobre cualquiera otro ejemplo, aunque el producto hubiera de hallarse en diezmilésimos, porque el error se quisiera menor que un milésimo, y lo mismo aun cuando los enteros del multiplicador tuvieran más cifras, la regla es general y queda demostrada.

## ARTÍCULO V.

### ABREVIACION DE LA DIVISION DE DECIMALES.

**463**. La abreviacion más usada en la division de decimales es no sacar más cifras para el cociente que hasta la de un órden inferior inmediato al de aquellas unidades decimales dentro de una de las que se quiere que esté el error máximo del resultado, aparte, por supuesto, de la operacion prévia de hacer desaparecer los decimales del divisor (270). Este método es suficientemente exacto para la mayor parte de los casos, por lo que sólo por completar, digámoslo así, el artículo anterior, expondremos á continuacion el método ingenioso inverso del que acabamos de exponer para la multiplicacion, y que es de aplicacion útil en muchos casos cuando el divisor tiene muchas cifras.

**464**. Regla. *Para dividir abreviadamente un decimal por otro, teniendo ambos muchas cifras, y deseando el cociente con un error menor de un décimo, un centésimo ó un milésimo (pues con menor error no produce notable abreviacion), se determina primeramente cuántas cifras de enteros debe tener el cociente* (134), *pues el número de las decimales lo marcarán los términos del problema. En seguida se tomarán de la izquierda del divisor tantas cifras, más dos, como deba tener el cociente entre enteros y decimales, sin hacer caso del signo decimal, señalando todas las demas con una raya horizontal superior para desatenderlas. Tómense despues de la izquierda del dividendo, prescindiendo tambien del signo de-*

cimal, tantas cifras como sean necesarias para contener alguna vez al divisor, disminuido, como se ha dicho, y las cifras restantes señálense tambien para desatenderlas por completo. Véase cuántas veces el dividendo disminuido contiene al disminuido divisor, y el número que exprese tal contenido, será la cifra de unidades superiores del cociente, que, multiplicadas por el divisor (siempre el disminuido), pero multiplicando la primera cifra desatendida sólo para ver si el producto contiene algunas unidades superiores, y restado aquel producto del dividendo, dará una resta que será el segundo dividendo parcial. Para hacer la division de éste, no se le añade á su derecha una cifra, no considerada antes del dividendo, como se hace por el método ordinario, sino que se tacha la última de la derecha del divisor que sirvió para la division parcial anterior, y si á pesar de ello el segundo dividendo parcial no contuviese ninguna vez al divisor, se disminuye más tachándole otra cifra, pero poniendo antes 0 en el cociente. Hallada otra cifra para éste, se multiplica por el divisor que como tal ha servido, y ademas la primera cifra tachada sólo para ver si su producto da alguna unidad superior, y el producto se resta del segundo dividendo parcial, y su diferencia dará el tercer dividendo parcial, con el que se obrará como con el segundo, y análogamente, mientras haya divisor, pues que en cada division parcial se irá disminuyendo en una cifra; pero pudiéndose suspender la operacion en cuanto se obtenga el número de decimales que exija el problema.

*Ejemplo.* Deseándose el cociente con un error menor de un milésimo.

$$\begin{array}{r|l}
1470{,}673\;\overline{3310230} & 425{,}\overline{8}\,\overline{6}\,\overline{2}\,\overline{4345} \\
\underline{1277587} & \overline{3{,}4533} \\
195086 & \\
\underline{170344} & \\
22742 & \\
\underline{21293} & \\
1449 & \\
\underline{1277} & \\
172 & \\
\underline{170} & \\
2 &
\end{array}$$

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, se determinó primeramente que las cifras de enteros en el cociente debian ser una, y como el problema pide tres decimales, se separaron del divisor seis cifras, y las restantes se super-rayaron para desatenderlas. Se consideraron de la izquierda del dividendo siete cifras, que eran necesarias para formar el primer dividendo parcial, y las restantes se señalaron tambien para despreciarlas. Se hizo la primera division parcial, y se obtuvo para el cociente 3 que debian ser enteros y unidades simples ademas. Se multiplicó y restó correspondientemente, y el resto nos dió el número que debia servir de segundo dividendo parcial. Para hacer la division de él, tachamos el 2, cifra de la derecha del divisor que antes habia servido, y con el nuevo obtuvimos 4 para décimos del cociente. Su multiplicacion por el divisor último, y la resta del producto del dividendo parcial nos dió el tercero que dividimos, disminuyendo el divisor de otra cifra, tachando el 6, y obtuvimos 5 para centésimos del cociente. Los multiplicamos por el correspondiente divisor, y el producto lo restamos del tercer dividendo parcial, obteniendo el cuarto que dividimos por 425 y nos dió 3 para milésimos del cociente. Y aquí pudimos terminar, pero sacamos un quinto dividendo parcial y 3 diezmilésimos más para el cociente.

**465.** *Demostracion.* Si se compara el ejemplo que acabamos de explicar con el anterior de la multiplicacion, puestos frente á frente, de la comparacion deduciremos mejor la demostracion.

Sean, pues, la multiplicacion y division anteriores, sin las cifras que se desprecian completamente en las operaciones.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 425,8624 × 3,4534 | | 1470,673 | 4258624 |
| × 43543 | | | 3,4533 |
| 1277587 | producto por 3 = | 1277587 | |
| | | 193086 | |
| 170344 | producto por 4 = | 170344 | |
| | | 22742 | |
| 21293 | producto por 5 = | 21293 | |
| | | 1449 | |
| 1277 | producto por 3 = | 1277 | |
| | | 172 | |
| 170 | producto por 3 = | 170 | |
| 1470,671 | | | |

Comparando los dos anteriores ejemplos, se verán en la division los productos parciales de la multiplicacion abreviada, lo que es natural, pues que por la division se descompone el producto total que representa el dividendo en diferentes productos parciales nacidos de la multiplicacion de las partes del cociente por el divisor; luego la regla que se acaba de enseñar y aplicar es una consecuencia directa de la de la multiplicacion abreviada; luego queda tambien demostrada.

Pero puede decirse ademas que el método de la division abreviada se funda en el de la práctica de la division ordinaria, pues que en efecto en esta, para obtener cada cifra del cociente, se atiende casi exclusivamente á las dos ó tres primeras cifras de cada dividendo parcial, para ver cuántas veces contiene el número que forman el que componen las primeras de la izquierda del divisor; y por lo tanto, para determinar con certeza un cociente limitado, bastar debe tener en cuenta las primeras cifras de cada dividendo parcial, pues para que el resultado no sea diferente del que se desea, se toman en el divisor dos cifras más que las que suman las de los enteros y decimales del cociente deseado; y áun se tiene algo en cuenta el producto de las cifras de unidades superiores que se van despreciando, para ver si componen alguna superior y no despreciarlas. Y casi evidentemente, aunque no se haya dicho en la regla, si una cifra despreciada es, por ejemplo, 9, y la del cociente porque se multiplica es 3, del producto 27 no sólo deben tomarse las 2 unidades superiores, sino 3, porque 27 se acerca más á 30 que á 20.

Finalmente puede decirse, á semejanza de lo dicho en la demostracion de la multiplicacion, que cuanto previene la regla de la division se funda en que todos los dividendos parciales son milésimos, y milésimos divididos primeramente por milésimos, deben dar de cociente unidades simples enteras; porque $0{,}027 : 0{,}009 = 27 : 9 = 3$, y milésimos divididos por centésimos (al despreciar la cifra de los milésimos del divisor) dan de cociente décimos (porque $0{,}027 : 0{,}09 = 7{,}7 : 9 = 0{,}3$), y análogamente milésimos, divididos por décimos, deben dar centésimos, etc. Y consiguientemente, todas las cifras que se desprecien de dividendo y divisor, no producirán más que unidades decimales en el cociente, muy inferiores á aquellas dentro de una de las que se quiera esté el máximo error. Luego queda la regla completamente demostrada.

## ARTÍCULO V.

### SOBRE EL ERROR ABSOLUTO Y EL RELATIVO EN LAS ABREVIACIONES DE DECIMAL.

466. Error absoluto *es la diferencia que hay entre un decimal abreviado y aquel á quien sustituye; y refiriéndose al resultado de un problema, es evidentemente la diferencia entre el resultado que se obtiene por una operacion abreviada y el que se obtendria por el método ordinario sin abreviar.*

El error absoluto es el único que hasta ahora conocemos, aunque sin darle ese calificativo, porque no conociamos otro del que debiéramos distinguirlo.

467. Error relativo *de un decimal abreviado ó que resulta de una operacion abreviada, se llama el cociente que representa la division del error absoluto por el decimal sin abreviar á que sustituye el abreviado, ó por el decimal que debió resultar si la operacion de que se trata no se hubiese abreviado.*

Evidentemente, tanto el relativo como el absoluto, pueden ser por *defecto* y por *exceso.*

468. Para formarse una idea clara de lo que es el error absoluto y el relativo, la diferencia de uno á otro y la importancia de ambos, reflexionemos sobre el sencillo ejemplo siguiente.

Si tenemos que recibir ó cobrar la cantidad de 10 pesetas, y por un error de cuenta ó por otra causa, recibimos 9 pesetas, el error absoluto será ciertamente 1 peseta; pero su importancia será muchísimo menor que si teniendo que recibir 1000 pesetas recibiéramos 999. En uno y en otro caso el error es el mismo de 1 peseta; pero su importancia es tan diferente por la cantidad con que se relaciona, que si en lugar de 1000 pesetas tuviéramos que recibir 1.000,000, el error de 1 sería completamente despreciable. En el primer caso, 1 peseta de ménos hace que se tome la *décima* parte ménos de lo que se debe tomar; en el segundo caso, se toma una *milésima* parte ménos; y en el tercero, una *millonésima* parte. Por esta sencilla consideracion, se comprenderá lo exacto de la definicion del error relativo; pues en los tres casos expresados el error absoluto es el mismo, y el relativo es $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{1000}$ y $\frac{1}{1000000}$, y por lo tanto, en el segundo caso es el error relativo mil veces menor que el absoluto, y en el tercero un millon de veces.

469. Aunque sea, como es tan grande la diferencia de importancia entre el error absoluto y el relativo, se aprecia y atiende á éste con suficiente aproximacion para los casos ordinarios, con sólo lo que sabemos sobre el error absoluto; pues evidentemente, al abreviar un decimal ó un problema, lo haremos buscando un resultado con un error absoluto menor de un milésimo si se trata de cantidades pequeñas; y de un centésimo ó un décimo si se trata de grandes.*

* La teoría del error relativo y su aplicacion, la hemos omitido despues de preparada para la prensa, por innecesaria, pero acaso en otra edicion la espongamos.

# CAPÍTULO VII.

## POTENCIAS Y RAÍCES.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**470**. POTENCIA *de un número, sabemos* (114) (pero repetiremos para fijar las ideas en su conveniente sitio) *se llama al producto que resulta de multiplicarlo por sí mismo cualquier número de veces; y recíprocamente* RAÍZ *de un número es el que, repetido dos ó más veces por factor, da como producto aquel de quien se llama raíz.*

*Cuadrado ó segunda potencia* se llama, sabemos tambien, el producto de un número por sí mismo, ó sea entrando 3 veces por factor; *cubo ó tercera potencia* el producto de multiplicarlo por sí mismo 2 veces, ó sea entrando 3 veces por factor; *cuarta potencia* el producto de multiplicarlo por sí mismo 3 veces, ó sea entrando 4 veces por factor; y análogamente quinta, sexta, sétima, etc., potencias. Y recíprocamente *raíz cuadrada* de un número se llama aquel que, multiplicado por sí mismo una sola vez, produce aquel de quien se llama raíz; *raíz cúbica* de un número el que, multiplicado por sí mismo 2 veces, ó sea entrando 3 veces como factor, produce aquel de quien se llama raíz. Y análogamente *raíz* tercera, cuarta, quinta, etc., de un número, se llama aquel que, multiplicado por sí mismo 3, 4, 5, etc. veces, produce aquel de quien se llama raíz.

**471**. Se dice que un número *se eleva al cuadrado* ó segunda potencia, al cubo ó tercera potencia, á la cuarta, quinta, etc., cuando se ejecuta con él la operacion necesaria para determinar su cuadrado, cubo, tercera potencia, etc. Y recíprocamente se dice que *se extrae la raíz* cuadrada, cúbica, tercera, cuarta, etc. de un número, cuando se hace con él la operacion conveniente, para determinar cuál es su raíz cuadrada, cúbica, tercera, cuarta, etc.

**472**. El signo para indicar la elevacion á potencias es, como tambien sabemos (115), un número pequeño puesto á la derecha y un poco más alto de aquel á que se refiere, que se llama *exponente*, y se lee *elevado á* ó simplemente *cuadrado*, *cubo* en esas dos potencias. Y para indicar la raíz se usa el signo especial $\sqrt{\phantom{x}}$, poniendo debajo de él el número cuya raíz se debe extraer, y entre sus brazos el del grado de la raíz, y se llama *índice de la raíz*, el cual se suprime y sobreentiende en la raíz cuadrada.

Así, $3^2$ se lee tres cuadrado; $2^3$ dos cubo ó elevado á tres; $2^4$ dos elevado á cuatro, y $\sqrt{9}$ se lee raiz cuadrada de nueve, y $\sqrt[3]{8}$ raiz cúbica de ocho, y $\sqrt[4]{16}$ raiz cuarta de diez y seis; y por las definiciones simplemente, se conocerá que $3^2 = 3 \times 3 = 9$ y $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ y $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, y $\sqrt{9} = 3$, y $\sqrt[3]{8} = 2$, y $\sqrt[4]{16} = 2$.

473. *Raiz entera de tal grado de un número ó aproximada*, se llama á la raiz de la mayor potencia de igual grado contenida en el número mismo.

Así, la raiz cuadrada de 35 no la hay exacta, porque $6 \times 6 = 36$ y $5 \times 5 = 25$; pero 5, cuyo cuadrado es el mayor contenido, es 35, se llama la raiz entera de 35.

474. *Residuo de la raiz* de un número se llama la diferencia ó exceso que hay entre el mismo y la potencia de igual grado mayor de las que contiene.

Así, en el ejemplo anterior 10 es el residuo de la raiz cuadrada de 35, porque el cuadrado de su raiz entera es 25, y $35 - 25 = 10$.

475. *Observacion importante.* Es de mucha importancia saber bien desde ahora, no sólo que el residuo de una raiz no puede expresarse exactamente ni por un entero, ni por un quebrado, ordinario ni decimal, exacto ni periódico, como se demostrará muy luego, sino que tampoco se puede unir á la raiz entera para completarla, á semejanza de lo que se practica con los residuos de la division, dejando la operacion indicada; pues $\sqrt{35} = 5 + \sqrt{10}$ es un absurdo, porque la raiz cuadrada de 10 es más de 3, y $5 + 3 = 8$, y ni 6 aun puede ser la raiz cuadrada de 35, pues $6 \times 6 = 36$.

476. Se llaman *números irracionales* ó *inconmensurables* los afectados de un radical que no contiene exactamente una potencia de igual grado que el índice de la raiz.

Así, $\sqrt{35}$ es número irracional, porque no contiene exactamente ningun cuadrado de ningun número.

*Observacion.* El nombre de inconmensurable se les aplica más bien, porque el residuo de su raiz, como se verá despues, y ya se ha indicado, no puede expresarse exactamente por ningun entero, ni quebrado ordinario, ni decimal exacto ó periódico; pues el que producen es irregular, y ya adelantamos que se llama inconmensurable, y todos los números en general que no pueden expresarse por enteros ó quebrados, se llaman inconmensurables.

477. La elevacion á potencias, como caso particular que es de la multiplicacion en que los factores son iguales, no necesita reglas para su ejecucion, pues son las mismas que las de la multiplicacion de los enteros, los quebrados y los decimales, segun la clase del número que deba elevarse.

478. La extraccion de raices, aunque fácil tambien cuando se trata de un número pequeño, en el que se ve sin trabajo, cual otro multiplicado por sí mismo tantas veces como unidades tiene el índice de la raiz, produce el propuesto ó poco ménos, es difícil tratándose de números grandes; y como es materia muy importante, constituirá un capítulo aparte, y en este sentaremos solamente las propiedades principales de las potencias y las raices.

Por lo que de éstas ya hemos dicho, se comprenderá que la extraccion de raíces puede, sin violencia, como ya dijimos (168), considerarse como un caso particular de la division en el que se conoce sólo el dividendo, y se busca el divisor y el cociente que deben ser iguales.

479. *Observacion.* La extraccion de raíces se facilita mucho por logaritmos, pues la convierten en una simple division; y por ello parecerá inútil toda la teoría si no se piensa que las matemáticas dejarian de ser ciencias, si todos los problemas se resolvieran prácticamente sin conocimiento de su teoría fundamental.

## ARTÍCULO II.

### PROPIEDADES CASI EVIDENTES DE LAS POTENCIAS Y RAÍCES.

Las propiedades de las potencias y raíces casi evidentes, y que no son, por lo tanto, teoremas, son las siguientes, las cuales podrian deducirse de la tabla VII de las auxiliares.

**480.** Lema. *El cuadrado, el cubo y cualquier potencia de* 0 *es* 0.

Porque en efecto $0 \times 0 = 0$ y $0 \times 0 \times 0 = 0$.

Recíproco. *La raiz cuadrada, la cúbica y cualquier otra raiz de* 0 *es* 0.

Porque evidentemente, si $0 \times 0 = 0$, $\sqrt{0} = 0$.

**481.** Lema. *El cuadrado, cubo ó cualquier potencia de* 1 *es* 1.

Porque $1 \times 1 = 1$ y $1 \times 1 \times 1 = 1$.

Recíproco. *La raiz cuadrada, la cúbica ó la de cualquier grado de* 1 *es* 1.

Porque si $1 \times 1 \times 1 = 1$, será $\sqrt[3]{1} = 1$

**482.** Lema. *El cuadrado de un número compuesto de la unidad con ceros, es la unidad con doble número de ellos, y con triple el cubo.*

Porque $10^2 = 10 \times 10 = 100$ y $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 100 \times 10 = 1000$.

Recíproco. *La raiz cuadrada de la unidad seguida de ceros, es la misma unidad seguida de la mitad de ellos, y la tercera parte la raiz cúbica.*

Porque si $10 \times 10 \times 10 = 1000$, $\sqrt[3]{1000} = 10$.

*Observacion.* La unidad seguida de un número impar de ceros, no tiene raíz cuadrada exacta, ni cúbica la unidad con ceros que no sean tres, ó en número múltiplo de tres.

**483.** Lema. *El cuadrado de un número terminado en ceros es igual al cuadrado del mismo sin tales ceros y aumentado despues con duplo número de ellos, y triplo si se trata del cubo.*

Porque $30^2 = 30 \times 30 = 3^2 \times 100 = 900$ y $30^3 = 30 \times 30 \times 30 = 3^3 \times 1000 = 27000$.

Recíproco. *La raiz cuadrada de un número terminado en ceros es la raiz del mismo sin ellos, aumentada con la mitad de ellos y con la tercera parte la raiz cúbica;* pero es preciso que el tal número sin los ceros sea un cuadrado ó cubo perfecto, como por ejemplo, $\sqrt{3600} = 60$, pues $\sqrt{3500}$, como la aproximada de 35 es 5 y un residuo de 10, éste, con los dos ceros, forma 1000, cuya raiz cuadrada no es exacta (482).

**484.** Lema. *El cuadrado de* 2 *es* 4, *y el cubo* 8.

Porque $2^2 = 2 \times 2 = 4$ y $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Recíproco. *La raiz cuadrada de* 4 *es* 2, *y la cúbica de* 8 *es tambien* 2.

**485.** Corolario. *La raiz cuadrada entera de 2 y de 3 es 1, con diferente residuo, y la cúbica de 7, de 6, de 5, de 3 y de 2, es tambien 1.*

**486.** Lema. *Las potencias de los números mayores que la unidad van aumentando, y disminuyendo la de los números menores que ella, ó sean los quebrados propios.*

Porque todo número entero multiplicado por sí mismo, tendrá que ser tomado tantas veces como unidades tiene, y cuantas más veces se multiplique mayor será el producto; y todo quebrado ordinario ó decimal, multiplicado por sí mismo, se habrá de tomar ménos de una vez, y por lo tanto dará un producto menor cuanto más veces se multiplique.

Y en efecto, $3^2 = 9$, y $3^3 = 27$, y $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ y $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

*Recíproco.* Las raíces de los números mayores que la unidad son menores que ellos, y las de los quebrados propios son mayores que los mismos quebrados.

Porque $\sqrt[3]{27} = 9$, y $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

**487.** Lema. *El cuadrado de todo número consta de duplo número de cifras que el mismo ó una ménos, y el cubo de triplo ó una ó dos ménos.*

Porque el número menor de dos cifras que puede considerarse es 10 y $10^2 = 10 \times 10 = 100$, que tiene de cifras una ménos que el duplo de las de 10; y el menor número de tres cifras que puede considerarse, que es 100, será $100^2 = 100 \times 100 = 10000$; y por lo tanto, el mayor de dos cifras, que es 99, debe tener un cuadrado algo menor que 10000, y por lo tanto de cuatro cifras, que es el duplo de las del 99. Y análogamente $10^3 = 1000$ y $100^3 = 1000000$; luego el cubo de 99 tendrá seis cifras, ó sea el triplo de 99, y $10^3$ cuatro, que es dos ménos del triplo.

Recíprocamente. *La raiz cuadrada de un número consta de tantas cifras como porciones de á dos tenga el número, contando como tal una cifra sola si el número de ellas es impar; y la raiz cúbica de un número consta de tantas cifras como porciones de á tres tenga el número, contando como tal la de dos ó una que puede haber si el número de ellas no es múltiplo de tres.*

Porque si no se ve claramente como verdad recíproca del lema anterior, se considerará que, si por ejemplo, tenemos $\sqrt{144}$, como $10^2 = 100$ y $100^2 = 10000$ y 144 es mayor que 100 y menor que 10000, su raiz debe ser mayor de 10 y menor de 100; luego tendrá 2 cifras; y deduccion análoga haríamos sobre la raiz cúbica.

**488.** Lema. *Los cuadrados de los nueve números dígitos son tres dígitos y seis compuestos de dos cifras, y sus cubos son dos dígitos, dos compuestos de dos cifras, y cinco de á tres,* como lo demuestra la Tabla VII.

*Recíproco.* Raiz cuadrada exacta no la tienen más que tres números dígitos de los nueve que hay, y seis compuestos de á dos cifras de los noventa que existen. Y raiz cúbica exacta sólo la tienen dos números dígitos, dos compuestos de dos cifras y cinco de tres.

**489.** Lema. *Ningun cuadrado ni cubo de número dígito ó de compues-*

*to, terminado en cifra significativa, puede terminar en* 0, *y por lo tanto, ha de ser un número exacto de unidades simples*; entendiéndose que no ha de carecer de ellas, pues por su grande número pueden componer decenas y otras superiores.

Porque para que de dos números terminados en cifra significativa un producto termine en 0, es menester que uno de los factores termine en 5 y el otro en 2 ó sus múltiplos, cosa que no puede suceder en las potencias, porque todos los factores son iguales y terminan en el mismo número dígito.

*Recíproco*. La raiz cuadrada de un número terminado en 0, ó en número impar de ceros, ó la cúbica de uno terminado en uno ó dos ceros, ó en ceros en número que no sea tres ó sus múltiplos, no puede ser exacta. Esta verdad se desprende tambien del lema (482), segun se indicó allí.

**490**. Lema. *El cuadrado de un decimal, con ó sin enteros, es igual al cuadrado del mismo considerado como entero, ó sea sin el signo decimal, dividido el tal cuadrado por la unidad seguida de duplo número de ceros al de cifras decimales que tenga el propuesto. Y el cubo será el del número considerado como entero, dividiéndolo despues por la unidad seguida de triple número de ceros que cifras decimales tenga el propuesto.*

Porque $(0,3)^2 = 0,3 \times 0,3 = 0,09$ y $\left(\frac{3}{100}\right)^2 = \frac{9}{100} = 0,09$, y $(0,3)^3 = 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,027$ y $\left(\frac{3}{1000}\right)^3 = \frac{27}{1000} = 0,027$.

Puede demostrarse, como teorema, diciendo que en el primer ejemplo, al considerar el número propuesto como entero, se hace diez veces mayor, y su cuadrado, compuesto de dos factores iguales, cada uno hecho diez veces mayor, resultará $10 \times 10 = 100$ veces mayor; luego el resultado se deberá dividir por 100 para que sea el cuadrado del número propuesto. Y análogamente, se demostraría lo correspondiente al cubo.

Recíproco. *La raiz cuadrada de todo decimal es igual á la raiz del número considerado como entero, dividida por la unidad seguida de ceros en número igual á la mitad del de cifras decimales que tenga el número propuesto. Y la cúbica será la del número considerado como entero, y dividida despues por la unidad con ceros, en número de la tercera parte del de cifras decimales que tuviera el propuesto.*

Porque $\sqrt{0,09} = 03$.

Y ademas, porque 9 es cien veces mayor que 0,09, y la raiz de aquel, para que sea igual á la de éste, es menester hacerla menor $\sqrt{100}$ que es 10 veces.

**491**. Lema. *El cuadrado de un decimal tiene duplo número de cifras decimales que él y triple el cubo.*

Porque la regla de la multiplicacion de decimales (260) evidencia que el producto debe tener tantas cifras decimales como ambos factores juntos; y como el cuadrado es un producto de dos factores iguales, tendrá doble número de cifras decimales que uno de ellos, que es el número elevado al cuadrado; y como el cubo resulta de dos multiplicaciones, tendrá triple número de cifras decimales que el elevado al cubo.

Así $(0,2)^2 = 0,2 \times 0,2 = 0,04$ y $(0'3)^3 = 0'3 \times 0'3 \times 0'3 = 0,027$.

Recíproco. *Por cada dos cifras decimales que tenga un número, tendrá* *una su raiz cuadrada, y una tambien la raiz cúbica por cada tres que tenga el número propuesto.*

Porque si $(0,2)^2 = 0,04$, $\sqrt{0,04} = 0,2$ y $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$.

**492.** *Observacion.* No se sigue precisamente de la anterior verdad que no pueda extraerse la raíz cuadrada de un decimal que no tenga sus cifras decimales en número par, ni la raíz cúbica si no tiene tres ó un múltiplo de tres, pues con ceros á la derecha se puede hacer que un decimal tenga las cifras que se quiera (248).

**493.** Lema. *Todos los números enteros, quebrados ordinarios y decimales, tienen potencias exactas.*

Porque todo número es multiplicable por sí mismo, y el producto es en todos casos exacto.

Recíproco. *Todos los números no tienen raiz exacta, y los que la tengan entera ó aproximada, diferirán de la verdadera en ménos de una unidad simple ó decimal, segun que el número que se proponga sea entero ó decimal.*

**494.** *Observacion.* No es esta propiedad verdaderamente recíproca de la anterior, y más bien es un corolario, por lo directamente que se deduce de ella.

En efecto, si inspeccionamos la tabla VII de los cuadrados y cubos de los números más notables, veremos que, por ejemplo, desde el cuadrado de 3, que es 9, hasta el de 4, que es 16, hay seis números que, no teniendo raíz cuadrada exacta, la tendrán de raíz entera 3; y esta diferirá evidentemente de la verdadera, ménos de la unidad en que se diferencia 3 de 4. Y lo mismo tratándose de cubos. Y es tambien evidente, que si el cuadrado de 0,3 es 0,09 y el de 0,4 es 0,16, la raíz cuadrada de los números intermedios 0,17, 0,18, etc., será la raíz entera 0,3, y diferirá de la verdadera ménos de un décimo, que es en lo que se diferencia 0,3 de 0,4.

**495.** Corolario. *El residuo de una raiz inexacta vale ménos de la unidad inferior del número á quien se extrae, sea entero ó sea decimal.*

**496.** Lema. *El cuadrado ó el cubo de un quebrado, es igual al cuadrado ó cubo respectivamente del numerador, dividido por el cuadrado ó cubo del denominador.*

Porque $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = \frac{3^2}{4^2}$ y $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3^3}{4^3}$.

Recíproco. *La raiz cuadrada ó cúbica de un quebrado es igual á la raiz cuadrada ó cúbica del numerador, dividida por la raiz cuadrada ó cúbica respectivamente del denominador.*

Porque si $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$, $\sqrt{\frac{3^2}{4^2}} = \frac{3}{4}$ y $3 = \sqrt{3^2}$ y $4 = \sqrt{4^2}$.

**497.** *Corolario.* La raíz de un quebrado que no la tenga exacta en cualquiera de sus dos términos, no puede ser igual á un quebrado (siempre se entiende ordinario sino se expresa decimal); porque elevado á la potencia de que se trate, deberia producir aquél de quien fuera raíz, y los términos de éste serian potencias exactas de aquel (405), y por lo tanto tendrian raíz exacta, lo que es contra lo supuesto. Esto es, que $\sqrt{\frac{9}{15}}$ no puede ser, por ejemplo, $\frac{3}{4}$, porque entonces $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ deberia dar $\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{15}$, y 15 sería cuadrado de 4, lo que es contra la hipótesis.

**498.** Lema. *El cuadrado ó cubo de un número mixto es igual al cuadrado ó cubo respectivamente del numerador del quebrado impropio á que pueda reducirse el mixto, dividido por el cuadrado ó cubo del denominador.*

Porque $\left(3\,\frac{2}{5}\right)^2 = 3\,\frac{2}{5} \times 3\,\frac{2}{5} = \frac{3\times5+2}{5} \times \frac{3\times5+2}{5} = \frac{17}{5} \times \frac{17}{5} = \frac{17\times17}{5\times5} = \frac{17^2}{5^2}$.

Recíproco. *La raiz de un número mixto es igual á la raiz del mismo grado del numerador del quebrado impropio á que puede reducirse, dividida por la raiz del denominador.*

Porque $\sqrt{3\,\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3\times5+1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}$ (496).

**499.** Lema. *El cuadrado ó cubo de un número compuesto de factores, es igual al producto de los cuadrados ó cubos respectivamente de los mismos.*

Porque $(3\times4)^2 = (3\times4)\times(3\times4) = 3\times4\times3\times4 = 3\times3\times4\times4 = 3^2\times4^2$; pues ni los paréntesis hacen falta cuando lo que contiene son factores, y no cabe confusion, ni despues el alterar el órden de los factores puede influir en el valor del producto (349).

Recíproco. *La raiz de un número, compuesto de factores, es igual al producto de las raices de los mismos.*

Porque si $(3\times4)^2 = 3^2\times4^2$; $\sqrt{3^2\times4^2} = 3\times4$ y $3=\sqrt{3^2}$ y $4=\sqrt{4^2}$.

**500.** *Observacion.* No se confunda la verdad del lema anterior sobre un número compuesto de factores, con el teorema que despues sabremos sobre un compuesto de sumandos.

## ARTÍCULO III.

### TEOREMAS SOBRE LAS POTENCIAS Y RAÍCES.

**501.** Teorema. *El cuadrado de un número compuesto de dos sumandos* (que por cualquier motivo no se puedan ó quieran reunir), *es igual al cuadrado del primer sumando, más el duplo del primero multiplicado por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

*Demostracion.* Si tenemos $(7+8)^2$, que es ciertamente igual á $15^2 = 15\times15 = 225$, y sin reunir los sumandos queremos elevarlos al cuadrado, será $(7+8)^2 = (7+8)\times(7+8)$.

Y evidentemente podremos realizar esta multiplicacion multiplicando primeramente todo el primer factor por una parte del segundo, y nos dará un producto parcial; y multiplicado despues todo el mismo primer factor por la otra parte del otro, nos dará otro producto parcial, que sumado con el anterior formará el producto total, ó sea el cuadrado deseado.

Pero $(7+8)\times 7 = (7\times 7)+(8\times 7)$
y $(7+8)\times 8 = (7\times 8)+(8\times 8)$
luego $(7+8)\times(7+8) = (7\times 7)+(8\times 7)+(7\times 8)+(8\times 8)$
y como $7\times 7 = 7^2$ y $(8\times 7)+(7\times 8) = 2\times(7\times 8)$ y $(8\times 8)\ 8^2$
será $(7+8)^2 = 7^2+(2\times 7\times 8)+8^2$.

Luego el teorema queda demostrado.

**502**. *Corolario.* Como todo número de dos ó más cifras, por grande que sea, puede considerarse compuesto de dos sumandos, uno de decenas y otro de unidades simples, pues $34 = 30+4$, y $345 = 340+5$, ó sean 34 decenas y 4 unidades, se podrá decir que *el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades es igual al cuadrado de las decenas, más el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, más el cuadrado de las unidades.*

**503**. Recíproco. *Todo número, pudiendo considerarse compuesto del cuadrado de su raiz, si ésta tiene dos sumandos, se compondrá aquél del cuadrado del primero, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo, más el residuo, si el número propuesto no fuese un cuadrado perfecto.*

Porque en efecto $\sqrt{51} = 7$ y 2 de residuo, porque $7\times 7 = 49$ y $51 - 49 = 2$; pero si 7 se descompone en dos sumandos $3+4$, como $(3+4)^2$, por lo demostrado antes es igual á $3^2+2\times 3\times 4+4^2 = 49$, será $51 = 3^2+2\times(3\times 4)+4^2+2$.

**504**. *Corolario.* Como toda raiz de mas de una cifra puede considerarse compuesta de dos sumandos, uno de decenas y otro de unidades, *todo número podrá considerarse compuesto del cuadrado de las decenas de su raiz, más el duplo de las decenas por las unidades de su misma raiz, más el cuadrado de las unidades de ella y el residuo si lo hubiere.*

**505**. *Escolio.* El duplo de las decenas, multiplicado por las unidades, es un número exacto de decenas, ó sea un número en el que no hay unidades simples, aunque por ser muchas las decenas compongan algunas centenas ó unidades superiores; porque el menor número de decenas, que es $1 = 10$, duplicado dá 20, y 20, multiplicado por cualquier número de unidades, dará un número terminado en 0, ó sea sin unidades. En cuanto al cuadrado de decenas, ya sabemos (106) que ha de ser un número exacto de centenas; porque $10^2 = 100$ y $90^2 \times 8100$. Y sabemos tambien (489) que el cuadrado de unidades es un número justo de unidades que compondrán algunas unidades superiores, pero que no puede terminar en 0.

**506**. Teorema. *El cubo de un número compuesto de dos sumandos* (que por cualquier motivo no se pueden ó no se quieren reunir), *se compone del cubo del primer sumando, más el triplo del cuadrado del primero, multiplicado por el segundo, más el triplo del primero, multiplicado por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

*Demostracion.* Si tenemos $(7+8)^3$ que es ciertamente igual á $15^3 = 15 \times 15 \times 15 = 3375$, y sin reunir los sumandos queremos elevarlos al cubo, será

$(7+8)^3 = (7+8) \times (7+8) \times (7 \times 8) = (7+8)^2 \times (7+8)$. Pero por el teorema anterior $(7+8)^2 = 7^2 + 2 \times (7 \times 8) + 8^2$; luego multiplicando todo el miembro segundo de esta igualdad, primeramente por 7 y despues por 8, tendremos dos productos parciales, cuya suma será el producto total, ó sea el cubo deseado.

Pero $(7^2 + 2 \times (7 \times 8) + 8^2) \times 7 = (7^2 \times 7) + (2 \times 7 \times 8 \times 7) + (8^2 \times 7)$,

y $(7^2 + 2 \times 7 \times 8 + 8^2) \times 8 = (7^2 \times 8) + (2 \times 7 \times 8 \times 8) + (8^2 \times 8)$; luego

$(7+8)^3 = (7^2 \times 7) + (2 \times 7 \times 8 \times 7) + (8^2 \times 7) + (7^2 \times 8) + (2 \times 7 \times 8 \times 8) + (8^2 \times 8)$.

Y simplificando esta igualdad, pues $7^2 \times 7 = 7^3$ y $2 \times 7 \times 8 \times 7 = 2 \times 7^2 \times 8$, que con otro término que hay de $7^2 \times 8$ forma evidentemente $3 \times 7^2 \times 8$, y análogamente $(8^2 \times 7) + (2 \times 7 \times 8 \times 8) = (8^2 \times 7) + 2 \times 7 \times 8^2 = 3 \times 7 \times 8^2$ y $8^2 \times 8 = 8^3$; luego $(7+8)^3 = 7^3 + (3 \times 7^2 \times 8) + (3 \times 7 \times 8^2) + 8^3$, que es lo que el teorema dice.

**507**. *Corolario*. Como todo número de dos ó más cifras, por grande que sea, puede considerarse compuesto de dos sumandos, uno de decenas y otro de unidades, su cubo se compondrá, por lo demostrado, *del cubo de las decenas del número propuesto para elevar, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.*

**508**. *Recíproco*. Todo número, pudiéndose considerar compuesto del cubo de su raíz, si ésta tiene dos sumandos, se compondrá aquél *del cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo, más un residuo si el número no fuera un cubo perfecto.*

**509**. *Corolario*. Como toda raíz de más de una cifra puede considerarse compuesta de dos sumandos de decenas y unidades, *todo número podrá considerarse compuesto del cubo de las decenas de su raíz, más el triplo del cuadrado de las decenas, multiplicado por las unidades, más el triplo de las decenas, multiplicado por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades.*

**510**. *Escolio*. El triplo del cuadrado de las decenas, multiplicado por las unidades, debe ser un número exacto de centenas; pues el menor número de decenas que es $1 = 10$, cuadrado da 100, y triplicado ó multiplicado por cualquier número, siempre dará un número terminado en dos ceros; y lo mismo 9 decenas $= 90$, y 99 decenas $= 990$.

Y el triplo de las decenas, multiplicado por el cuadrado de las unidades, dará siempre un número exacto de decenas, pues $3 \times 10 = 30$, que multiplicado por $1^2$ dará 30, y 99 decenas dará $990 \times 3 = 2970$, que multiplicado por cualquier número de unidades, dará siempre un número terminado en un cero.

En cuanto al cubo de las decenas, sabemos (106) que debe ser un número exacto de millares, porque el número de decenas acabará en un cero, y cubicado resultarán tres ceros.

Y tambien sabemos que el cubo de unidades es un número exacto de unidades, ó sea que no concluirá en 0 (489).

**511**. Teorema. *Los cuadrados de dos números que difieren entre sí en una unidad, diferirán en el duplo del menor número, más 1.*

Esto es, que 6 que difiere de 5 en una unidad, $6^2$ será mayor que $5^2$ en $2 \times 5 + 1$.

*Demostracion*. Si descomponemos el 6 en dos sumandos 5 y 1, tendremos, por lo demostrado (501), $(5+1)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 1 + 1^2$, á cuyos dos miembros, si le restamos $5^2$ dará evidentemente $(5+1)^2 - 5^2 = 2 \times 5 + 1$, que es lo que dice el enunciado del teorema.

**512**. Recíproco. *La raiz cuadrada de un número es menor que la de otro en una unidad, si el primero difiere del segundo en el duplo de éste, más 1.*

Porque 6, raiz cuadrada de 36, difiere de 5, raiz cuadrada de

25, en 1, pues $36 - 25 = 11 = 2 \times 5 + 1$, segun lo demostrado.

**513.** Corolario. *El residuo de la raiz cuadrada entera de un número que no la tenga exacta, debe siempre ser menor que el duplo de la raiz entera más uno.* Pues el residuo de la raiz de un número es igual á éste ménos el cuadrado de su raiz entera, y por lo tanto si $\sqrt{35} = 5 +$ residuo 10, será $10 = 35 - 5^2$; y como por el teorema anterior $2 \times 5 + 1 = 6^2 - 5^2$, tendremos dos igualdades, en cuyos segundos miembros hay un sustraendo igual $5^2$, por lo que si el minuendo 35 del uno fuese igual al $6^2$ del otro, evidentemente los segundos miembros serian iguales entre sí, y consiguientemente los primeros miembros. Pero $6^2$ tiene que ser mayor que 35, pues si fuera igual ó menor, en lugar de la raiz entera 5 se hubiese puesto 6; luego el segundo miembro de la segunda igualdad será mayor que el segundo de la primera, y consiguientemente $10 < 2 \times 5 + 1$.

**514.** Teorema. *Los cubos de dos números que difieren en una unidad, diferirán en el triplo del cuadrado del menor, más su mismo triplo, más 1.*

Esto es, que 6, que difiere de 5 en 1, será $6^3$ mayor que $5^3$ en $(3 \times 5^2) + (3 \times 5) + 1$.

*Demostracion.* Si descomponemos el 6 en dos sumandos 5 y 1, tendremos, por lo demostrado (506), $(5 + 1)^3 = 5^3 + (3 \times 5^2 \times 1) + (3 \times 5 \times 1^2) + 1^3$, á cuyos dos miembros, si le restamos $5^3$, dará evidentemente $(5 + 1)^3 - 53 = (3 \times 5^2) + (3 \times 5) + 1$, que es lo que dice el enunciado del teorema.

**515.** Recíprocamente. *La raiz cúbica de un número es mayor que la de otro en una unidad, si el primero difiere del segundo en el triplo del cuadrado de éste, más su mismo triplo, más 1.*

Porque 6, raiz cúbica de 316, difiere de 5, raiz cúbica de 125, en 1, pues $216 - 125 = 91 = (3 \times 5^2) + (3 \times 5) + 1$, por lo demostrado.

**516.** Corolario. *El residuo de la raiz cúbica de un número que no la tenga exacta, debe siempre ser menor que el triplo del cuadrado de su raiz, más el triplo de la misma, más 1.* Pues el residuo de la raiz cúbica de un número es igual al mismo número ménos el cubo de su raiz (474); y por lo tanto, si tenemos $\sqrt[3]{214} = 5$ y 89 de residuo, será $89 = 214 - 5^3$; y como por el teorema anterior $(3 \times 5^2) + (3 \times 5) + 1 = 6^3 - 5^3$, tendremos dos igualdades, cuyos segundos miembros tienen un sustraendo igual $5^3$, por lo que si los minuendos 214 y $6^3$ fueran iguales, los tales miembros tambien lo serian, y consiguientemente iguales entre sí los primeros; pero 214 tiene que ser menor que $6^3$, pues si fuera igual ó mayor, la raiz entera no hubiera sido 5 sino 6; y siendo 214 menor que $6^3$, todo el segundo miembro de la primera igualdad será menor que el de la segunda, y consiguientemente el primer miembro de la primera menor que el de la segunda; luego el residuo $89 < (3 \times 5^2) + (3 \times 5) + 1$.

**517.** Teorema. *Un decimal, con ó sin enteros, y lo mismo un quebrado ordinario* (porque puede reducirse á decimal), *elevado al cuadrado ó al cubo, no puede producir un número entero.*

*Demostracion.* Como ni el cuadrado ni el cubo de ningun número dígito puede terminar en 0 (489), debiéndose cuadrar ó cubicar la cifra de unidades inferiores del decimal para cuadrar ó cubicar todo el número, y no pudiendo tal cifra ser 0, porque á la derecha del decimal no tendrá valor ninguno, siempre resultará alguna cifra significativa decimal en el cuadrado ó cubo, y éste, por lo tanto, no podrá ser entero. Y en efecto,

$(3,5)^2 = 3,5 \times 3,5 = 12,25$ y $(0,1)^2 = 0,1 \times 0,1 = 0,02$. Luego el teorema es general y queda demostrado.

**518.** Recíproco. *La raiz cuadrada ó cúbica de un número entero, no puede ser un quebrado ordinario, ni decimal, pues cuadrado ó cubicado deberia producir el entero propuesto contra el teorema directo.*

**519.** Corolario. *El residuo de la raiz cuadrada ó cúbica de un número entero ó quebrado ordinario, decimal ó mixto, no puede expresarse exactamente por un quebrado ordinario, ni decimal, y es, por lo tanto, inconmensurable.*

*Demostracion.* Aunque esta verdad se deduce del teorema anterior, por su grande importancia exige una completa y detallada demostracion como si se tratase de un teorema.

Diremos, pues, que si suponemos que un decimal exprese exactamente el residuo de una raíz, tendriamos que uniendo tal decimal con la raíz entera y elevando la suma al cuadrado ó cubo, deberia dar el número á quien se extrajo la raíz, si el tal número lo suponemos entero; lo que, por el teorema anterior, veremos que es absurdo. Si suponemos que el número de quien se extrae la raíz sea decimal (y lo mismo un quebrado ordinario que puede reducirse á decimal), como la raíz de un decimal es la misma que la del mismo considerado como entero, aunque dividida por la unidad seguida de ceros (483), tropezariamos con el mismo absurdo; ó más exactamente, tendriamos un quebrado de raíz, cuyos dos términos no serian ambos raíces exactas del propuesto, y todo el quebrado no podria, por lo tanto, representar la raíz exacta ó completada con el residuo del número propuesto.

Esto es, que si suponemos $\sqrt{34} = 5$ y 9 de residuo, y que éste pueda valer ó ser representado por 0,3, seria 5,3 la raiz completa de 34 y $(5,3)^2$ deberia ser igual á 34, lo que por el teorema anterior es absurdo. Si suponemos que el 34 sea un decimal $0,34\ \frac{34}{100}$, su raiz seria $\frac{5}{10}$ (496), y un residuo de 9, que suponiendo valiese á $0,3 = \frac{3}{10}$, tendriamos por raiz completa $\frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}$, cuyo quebrado, para que sea la raiz completa de 0,34, necesitaria tener sus dos términos raíces exactas de los del $\frac{34}{100}$, pero aunque el denominador lo es, el numerador 8 no puede serlo, pues si 8 fuera raiz exacta de 34, en lugar de poner 5 por raiz entera, hubiéramos puesto 8 y no habria residuo; luego habiéndolo, no se puede expresar por un decimal, ni, por lo tanto, por un quebrado, ni ménos por un entero.

**520.** *Escolio.* Como complemento al importante corolario anterior, y como conclusion de lo dicho sobre las propiedades de las potencias y raíces, diremos que el residuo de una raiz se puede aproximar por decimales, como se verá en seguida; pero el decimal que produzca, no sólo no será exacto como va demostrado, pero ni tampoco periódico; pues la periodicidad de los decimales nace de la igualdad del divisor que es el denominador del quebrado generador (443), y en la extraccion de las raíces, como veremos, el divisor que sirve para hallar cada cifra de la raiz es distinto.

**521.** *Observacion.* Todas las propiedades de las potencias y raíces que hemos visto invariables ó semejantes (trátese del cuadrado ó del cubo y las raíces respectivas), convienen tambien á otras potencias y otras raíces, no habiéndonos referido á ellas, porque sólo se usa la operacion de extraer la raíz cuadrada y algo la cúbica, extrayéndose las demas muy fácilmente por logaritmos.

---

# CAPÍTULO VIII.

## EXTRACCION DE LA RAÍZ CUADRADA.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**522.** Extraer la raíz cuadrada de un número sabemos (471) es *determinar el valor de otro que multiplicado por sí mismo produzca el dado, ó un poco ménos, si no fuese éste un cuadrado perfecto. O lo que es lo mismo, determinar el número cuyo cuadrado es el mayor de los contenidos en el propuesto.*

**523.** El problema general de la extraccion de raíces se divide en dos tambien generales: extraer la raíz de un número entero y extraerla de un quebrado; pero como cada uno de ellos se subdivide en tres por las diferentes clases de enteros que exijen procedimiento distinto, y las diferentes clases de quebrados que pueden considerarse incluyendo los decimales, y la aproximacion de un residuo, que valiendo ménos de la unidad, puede considerarse como un quebrado, pues es un decimal, aunque inconmensurable, consideraremos seis divisiones del problema general, porque cada una tiene su correspondiente regla, y serán las siguientes: 1.ª Extraer la raíz cuadrada de un entero compuesto de una ó dos cifras. 2.ª Extraer la de un entero compuesto de tres ó cuatro cifras. 3.ª Extraerla de un entero compuesto de cinco ó más cifras. 4.ª Extraerla de un decimal con ó sin enteros. 5.ª Extraerla de un quebrado ordinario propio ó impropio (ó sea mixto). Y 6.ª Aproximar por decimales cualquier residuo de la extraccion de la raiz de un entero ó de un quebrado de cualquiera clase.

### ARTÍCULO II.

#### EXTRACCION DE LA RAÍZ CUADRADA DE UN ENTERO COMPUESTO DE UNA Ó DOS CIFRAS.

**524.** Regla. *Para extraer la raiz cuadrada de un entero compuesto de una ó dos cifras, no hay más que determinar de memoria qué número* *multiplicado por sí mismo produce el propuesto, ó un poco ménos si no hubiese ninguno que lo produjese igual, en cuyo caso la diferencia entre el cuadrado del número hallado como raiz y el propuesto será el residuo; que se podrá aproximar por decimales* (segun veremos en el último artículo de este capítulo), *pero cuyo valor siempre será menor de la unidad; residuo que se conocerá que es legítimo si es menor que el duplo de la raiz más 1, pues si es mayor, es señal de que la raiz hallada es menor de lo que debe ser, y deberá aumentarse.*

*Ejemplos.* 1.° $\sqrt{9}=3$ 2.° $\sqrt{81}=9$ 3.° $\sqrt{80}=8$ y 16 de residuo.

*Demostracion.* No es susceptible de ella esta regla, porque se funda claramente en las definiciones de la raiz y de la potencia.

**525.** *Escolio.* La prueba de la extraccion de raíz es elevar al cuadrado la raiz hallada y ver si da un número igual al propuesto, ó difiriendo de él por defecto una cantidad igual al residuo, en el caso que lo hubiere por no ser el número dado un cuadrado perfecto.

## ARTÍCULO III.

### EXTRACCION DE LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO ENTERO, COMPUESTO DE TRES Ó CUATRO CIFRAS.

**526.** Regla. *Para extraer la raiz cuadrada de un número entero, compuesto de tres ó cuatro cifras* (la que deberá tener precisamente dos, ó sean decenas y unidades), *se procederá primeramente á determinar la cifra de las decenas. Para ello se separarán con un punto las decenas y las unidades del número propuesto, y con las restantes* (ó con la otra si fuesen tres), *consideradas como si estuviesen solas, se verá qué número forman, y se extraerá la raiz cuadrada de él por la regla anterior, y el resultado será la cifra de las decenas que se desea ó busca. En seguida se restará su cuadrado del número que sirvió para producirla, y al resto se le pondrán á la derecha las dos cifras del número propuesto de las decenas y las unidades; y separando esta última con un punto, con las restantes, como si estuviesen solas, se verá qué número forman, y se dividirá por el duplo de las decenas halladas, y el cociente será probablemente la cifra de las unidades de la raiz que se busca. Para comprobarla, se pondrá á la derecha del duplo de las decenas halladas, y el número que compongan se multiplicará por la misma cifra que se comprueba, y se verá si el producto cabe en todo el número formado por el primer resto y las cifras de las decenas y unidades del número propuesto. Si no cabe, será señal de que la cifra que se ensaya es mayor de lo que debe ser y se corregirá, y si cabe, pero el resto ó diferencia es igual ó mayor que el duplo de toda la raiz hallada, más 1, incluso la cifra de unidades que se comprueba, será señal de que ésta es menor de lo que debe ser, y se enmendará correspondientemente. Una vez comprobada la cifra hallada para las unidades de la raiz, se tendrá ésta completa y exacta, ó entera con el correspondiente residuo.*

Si al determinar las unidades, el número que debe servir de dividendo es menor que el duplo de las decenas, es señal de que es 0 la cifra de las unidades de la raiz.

*Ejemplos.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.° $\sqrt{7.84} =$ | 28 | 2.° $\sqrt{71.45} =$ | 84 |
| 384 | $49 \times 9$ | 745 | $163 \times 3$ |
| 00 | $48 \times 8$ | 89 | $164 \times 4$ |

prueba $(48^2 = 48 \times 48 = 784$ prueba $(84 \times 84) + 89 = 7145$

***Explicacion.*** En el primer ejemplo, separamos desde luego con un punto 84, y buscamos la raíz cuadrada de 7 y hallamos 2, porque $3 \times 3 = 9$, y pusimos 2 para decenas de la raíz. Cuadramos el 2, y su cuadrado 4 lo restamos del 7, y nos dió de resto 3 que, con las decenas y unidades del número propuesto, nos formó el de 384. Separamos sus unidades, y dividimos 38 por el duplo de 2, que es 4, y el cociente 9 ensayamos á ver si era la cifra de las unidades de la raiz. Para ello lo escribimos á la derecha del duplo de las decenas 4, y nos formó 49, que multiplicamos por el mismo 9 y tratamos de restar de 384; pero viendo que éste era menor que el producto que le íbamos restando, conocimos que las unidades de la raiz eran en menor número que 9, por lo que tachamos las cifras que escribimos para su ensayo, y lo hicimos con 8 que, comprobada y hallada ser la que se deseaba, nos dió la raiz exacta 28, que, en efecto, cuadrada, dió en la prueba 784.

En el segundo ejemplo, obramos de una manera análoga, sacando primero la raíz de 71, que nos dió 8 para decenas de la que buscábamos, ensayando despues el 3 para cifra de las unidades, y viendo que el resto 256 era mayor que el duplo de $84 + 1$, conocimos que las unidades de la raiz debian ser más de 3 y pusimos 4, que, ensayado y hallado ser el número conveniente, nos dió la raiz entera 84, con 89 de residuo.

**527.** *Demostracion.* Como todo número puede considerarse compuesto, exacta ó próximamente, del cuadrado de su raíz (501) y la del número dado (contrayéndonos al ejemplo 1.° anterior para fijar las ideas), debia tener decenas y unidades (487), podiamos considerarlo compuesto del cuadrado de las decenas de su raíz, más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades y acaso un residuo; y para hallar tal raíz debiamos proceder por buscar primero las decenas, por razones análogas á las que obran para empezar la division por las unidades superiores. Y dijimos que como el cuadrado de decenas debe ser un número exacto de centenas (505), en las centenas y unidades superiores del número propuesto debia estar incluido (ó considerarse así) el cuadrado de las decenas de la raíz que buscábamos, aunque tambien hubiese algunas centenas y unidades superiores provinientes del duplo de las decenas por las unidades, y por lo que separamos con un punto las decenas y las unidades. Extrajimos, pues, la raíz cuadrada de 7 por la regla correspondiente (524), y nos dió 2. Esta cifra, no sólo era la raíz cuadrada de 7, sino las decenas de la raíz cuadrada de todo el número propuesto, pues si estas fueran 3, como 3 decenas (= 30) cuadradas dan 9 centenas (= 900), no podian estar contenidas en 7 centenas del número dado. Tampoco podia ser 1 la cifra de las decenas de la raíz, pues aunque luego las unidades simples que se hallasen fueren en el mayor número posible, por ejemplo 9, tendríamos que 19 sería la raíz de todo el número propuesto, lo que es absurdo, porque acabábamos de ver que la raíz de sólo 7 centenas (= 700), es 2 decenas (= 20), y una parte del número dado no podia tener mayor raíz que el todo. Luego 2 no sólo es la raíz de 7, sino las decenas de la raíz de todo el número propuesto. Hallamos su cuadrado y lo restamos de las centenas del número dado, porque lo mismo es restar $2^2 = 4$ de 7, que $(20)^2 = 200$ de 700. Y nos dió 3 de resto, que indudablemente eran centenas. Añadímosles á ellas las decenas y las unidades del número dado, y como á éste lo habiamos restado el cuadrado de las decenas de su raíz, en 384 debia quedar el duplo de las decenas por las unidades, el cuadrado de éstas y acaso un residuo. Para hallar, pues, las decenas, dijimos (ó pudimos decir prescindiendo de la regla), como el duplo de las decenas por unidades es un número exacto de decenas; en 38 decenas debia estar dicho duplo de decenas por unidades, aunque hubiese algunas proviniendo del cuadrado de las unidades; luego si dividiamos ese producto 38 por uno de los factores que lo componen, 4, duplo de decenas, nos debia dar por cociente la cifra de las unidades de la raíz que buscábamos, probablemente y no seguramente, porque 38 decenas lo consideramos producto de las decenas por las unidades de la raíz, y ya hemos dicho que podria haber algunas provinientes del cuadrado de las unidades. Se paramos, pues, con un punto las 4 unidades, y dividimos las 38 decenas por las 4, duplo de las halladas, y como $38 : 4 = 9$; porque $380 : 40 = 9$, dijimos que 9 serian probablemente las unidades de la raíz. Para ver si realmente lo eran teniamos que ver si en todo el número 384 cabia el producto del duplo de las decenas halladas por las unidades que acabábamos de encontrar, más su cuadrado; pero en vez de decir 40 (duplo de las decenas halladas) multiplicado por 9 (unidades que ensayábamos), más $9^2$ (cuadrado de ellas), dijimos $49 \times 9$ (pues $(40 \times 9) + 9^2 = (40 \times 9) + (9 \times 9) = (40 + 9) \times 9 = 49 \times 9$), y como vimos que resultaba un número mayor que 384, conocimos que las unidades de la raíz debian ser ménos de 9. Pusimos 8, y repetido el ensayo, nos dió 0 de resto, señal que 38 era la raíz exacta del número propuesto.

Contrayéndonos al segundo ejemplo para demostrar la parte de la regla referente á la legitimidad del residuo ó de los restos, vemos que al ensayar la cifra 4 de las unidades de la raíz, nos dió un producto cuya diferencia con 745 era de 256, que por ser mayor que $2 \times 84 + 1$ (513), nos hizo comprender que las unidades de la raíz eran más de 3, y hallamos, efectivamente, que eran 4, y la total 84 con 89 de residuo, legítimo por ser menor que $2 \times 84 + 1$. Y como todo cuanto hemos practicado en ambos ejemplos y hemos demostrado, pudimos ejecutar sin raciocinar de esa manera, y sólo sujetándonos á la regla, esta queda demostrada.

## ARTÍCULO IV.

### EXTRACCION DE LA RAÍZ CUADRADA DE UN ENTERO DE MÁS DE CUATRO CIFRAS.

**528.** Regla. *Para extraer la raíz cuadrada de un número de más de cuatro cifras, divídase desde luego en porciones de á dos, empezando por la derecha, y sin reparar en que la última de la izquierda sea de una cifra sola. Considérense las dos porciones de la izquierda como si estuviesen solas, y ex-*

*tráigase su raiz cuadrada por la regla del artículo anterior, y se tendrán dos cifras para la raiz. Considérese en seguida el número propuesto como si se compusiera de tres porciones, y las dos cifras halladas para la raiz, como decenas de la misma, cuyas unidades se determinarán con la tercera porcion unida al resto si lo hubiere en la anterior operacion. Obrese análogamente con otras porciones del número propuesto si tuviese más de tres, hasta haber sacado por cada una una cifra para la raiz, y se tendrá la total del número dado.*

**529**. *Observacion.* Análogamente á lo que se previno en la regla del artículo anterior (526), si algun número que debe servir de dividendo para hallar una cifra de la raíz fuese menor que el dúplo de las unidades superiores antes halladas, que debe servir de divisor, es señal de que la cifra correspondiente de la raíz es 0, y todo el resto que no ha podido servir de dividendo unido á otra porcion si la hubiere, servirá para hallar otra cifra de las varias que puede tener la raíz.

*Ejemplos.* 1.º
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7.8\,4.4\,5} & 280 \\ \hline 3\,8\,4 & 48 \times 8 \\ 0\,0\,4.5 & 560 \times 0 \end{array}$$

2.º
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7\,1.4\,5.6\,2} & 845 \\ \hline 7\,4.5 & 164 \times 4 \\ 8\,9\,6.2 & 1685 \times 5 \\ 5\,3\,7 & \end{array}$$

prueba $280^2 + 45 = 78445$ prueba $845^2 + 537 = 714562$

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, en el primer ejemplo dividimos el número dado en tres porciones, y considerando solamente las dos de la izquierda, hallamos su raíz cuadrada 28 por la regla del artículo anterior, y nos quedó 0 de residuo. En seguida consideramos todo el número dado, y bajamos su tercera porcion, que quisimos nos sirviera para determinar la cifra de las verdaderas unidades de la raíz por ser las 28 decenas; y como 4 es menor que $2 \times 28$, pusimos 0 al cociente, y tuvimos por raíz total 280, y un residuo 45.

En el segundo ejemplo obramos de una manera análoga, extrayendo la raíz cuadrada de 7145, y hallando 84, que, considerándolas como las decenas de la raíz de todo el número propuesto, nos permitió, considerando la porcion 62 á la derecha de 89, hallar las verdaderas unidades de la raíz 5, y la total, por lo tanto, 845 con un residuo de 537 legítimo, por ser menor que 845, y con más razon que el duplo de este número, más 1.

**530**. *Demostracion.* Refiriéndonos al ejemplo primero de los anteriores, hemos hallado la raíz cuadrada de 784 por la regla correspondiente (526) ya demostrada. Despues, como el número dado debia tener por raíz uno de tres cifras (487), 28, raíz cuadrada de 784, debia evidentemente ser considerada como las decenas de la raíz del número propuesto, cuyas unidades únicamente tuvimos que buscar por la regla que demostramos. Para hallarlas dijimos que como el cuadrado de 28 se habia restado en dos veces de 784, el resto del total, que en este caso era sólo 45, debia contener el duplo de las decenas de la raíz 28, multiplicado por las unidades de la misma raíz, más el cuadrado de estas, y más el residuo si lo hubiere. Y como el duplo de decenas por unidades debe ser un número completo de decenas, separamos las 5 unidades, y en las 4 decenas debian estar los dos factores duplo de decenas y unidades. Luego dividiendo 4 decenas por 56 decenas duplo de las 28 halladas, nos debia dar las unidades que buscábamos, ó una cifra poco diferente á ellas, porque en 4 decenas podia haber alguna proviniente del cuadrado de unidades. Dividimos, pues, 4 por 56; pero como el dividendo era menor que el divisor, correspondia 0 al cociente, de lo que dedujimos que la cifra de las unidades de la raiz que buscábamos era 0, pues no podia ser mayor, porque 1 daria al comprobarla como producto del duplo de decenas por unidades más el cuadrado de estos $561 \times 1 = 561$, que no cabe en 45. Siendo, pues, 0 las unidades de la raíz, todas las 45 debian ser el residuo, legítimo efectivamente, porque es menor que 280, y por consiguiente mucho menor que su duplo, más 1.

De una manera análoga procedimos en el segundo ejemplo, y si en cualquiera de ellos el número de porciones hubiera sido mayor, despues de halladas las tres cifras de la raíz, el número que compusiesen lo consideraríamos como decenas de la raíz total, y buscaríamos las unidades, como va dicho, por la regla que queda demostrada.

## ARTÍCULO V.

### EXTRACCION DE LA RAÍZ CUADRADA DE UN DECIMAL.

**531.** Regla. *Para extraer la raiz cuadrada de un decimal propio ó impropio* (con enteros), *se hace primeramente que el número de sus cifras decimales sea par, añadiendo un cero á la derecha si fuera impar. Se desatiende en seguida el signo decimal, y del número que resulte como entero se extrae la raiz cuadrada por la regla de los artículos anteriores que le corresponda, segun su número de cifras; y á la raiz que resulte se le separan con el signo decimal una cifra por cada dos que tuviera el decimal propuesto, y se tendrá su raiz exacta ó con residuo que será de las unidades inferiores del número dado; y tambien se podrá poner el signo decimal tan luego como se considere del número propuesto alguna cifra decimal.*

*Ejemplos.* 1.º $\sqrt{0{,}784} = 0{,}88$ 2.º $\sqrt{7.84} = 2{,}8$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 8.4 0 | 88 | 7 8 4 | 28 |
| 1 4 4 0 | 168 × 8 | 3 8 4 | 48 × 8 |
| 9 6 | | ′ 0 0 | |

prueba $(0{,}88)^2 + 0{,}0096 = 0{,}784$ prueba $(2{,}8) = 7{,}84$

*Explicacion.* Con sujecion á la regla, como el decimal propuesto tenia sus cifras decimales en número impar, le añadimos un cero; y desatendiendo despues el signo decimal, nos resultó 7840, cuya raíz cuadrada fué 88; pero como debia tener dos cifras decimales, pusimos 0,88, segun la regla, y por lo mismo el residuo 96 debia ser milésimos y diezmilésimos, pues que las unidades inferiores del número propuesto eran diezmilésimos, pues es en realidad 0,7840.

En el ejemplo segundo, teniendo el número propuesto sus cifras decimales en número par, desatendimos el signo decimal, y hallamos la raíz cuadrada de 784, que fué 28, y como debia tener una cifra decimal, pusimos 2,8 raíz exacta, porque no hubo residuo; probando no haber error en ambas operaciones, cuadrando los resultados que dieron los números propuestos.

**532.** *Demostracion.* Se hace que el número de cifras decimales sea número par, porque ningun cuadrado de un decimal puede tenerlas en número impar (260); y como la raíz de todo decimal, propio ó impropio, debe ser decimal y no entero (518), cualquier número decimal que tenga impares sus cifras decimales no será un cuadrado perfecto, y el exceso que sobre él tenga le hará aparecer con cifras decimales impares por la supresion del cero á la derecha, que es inútil en los decimales. Así en el ejemplo primero anterior, los 0,0096 milésimos que resultan de residuo, es el exceso que 0,784 tiene sobre el mayor cuadrado que contiene, que es 0,7744. Y en efecto, $0{,}784 - 0{,}0096 = 0{,}7744$, cuya raíz cuadrada exacta es 0,88; y el aparecer con tres cifras decimales es evidentemente á causa de ese exceso dicho, pues $0{,}7744 + 0{,}0096 = 0{,}7840$, cuyo último cero por inútil se suprime en los decimales y se necesita para la extraccion de la raíz cuadrada, 0 que, por otra parte, no hace variar el valor del decimal.

Despues al suprimir el signo decimal, se hace en dicho ejemplo el número dado 10,000 veces mayor (250), y la raíz que resulte debe ser 100 veces mayor de lo conveniente, porque $\sqrt{10000} = 100$, y se hará 100 veces menor separando dos cifras con el signo decimal (250).

Y análogamente, en el segundo ejemplo, la supresion del signo decimal hace 100 veces mayor el número propuesto; luego la raíz resultará 10 veces mayor de lo que debe, y se le hará 10 veces menor con poner el signo decimal antes de la última cifra de la derecha.

Y como lo mismo se demostraria en otro cualquier ejemplo en el que se operase segun la regla, esta es general y queda demostrada.

*Escolio.* Si el decimal es periódico, por ahora sólo diremos que se sacan de raíz tantos decimales como convenga segun el problema, y duplo número por lo tanto se toman en cuenta del decimal periódico propuesto.

## ARTÍCULO VI.

### EXTRACCION DE LA RAÍZ CUADRADA DE LOS QUEBRADOS ORDINARIOS.

**533.** Regla. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado propio ó impropio* (ó un mixto que equivale á un impropio), *se ve si numerador y denominador la tienen exacta, simplificándolo si es preciso, y se les extrae en ese caso, y el quebrado resultante será la raíz deseada. Pero si alguno de los dos términos no tiene raíz exacta, áun despues de simplificado, se convierte el quebrado en decimal, y se obra segun la regla del artículo anterior.*

*Ejemplos.*

1.° $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

prueba $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

2.° $\sqrt{\frac{32}{72}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

prueba $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = \frac{32}{72}$

3.° $\sqrt{5\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

prueba $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$

4.° $\sqrt{4,\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{19}{4}} = \sqrt{4{,}75} =$

| | |
|---|---|
| 21 | |
| 75 | 41 × 1 |

raíz 2,1 y residuo 34

prueba $(2{,}1)^2 = 4{,}41$ y $4{,}41 + 0{,}34 = 4{,}75$

*Explicacion.* En el primer ejemplo, á primera vista se halla que los dos términos del quebrado son cuadrados perfectos, por lo que se les extrajo la raíz cuadrada, hallando $\frac{2}{3}$ por resultado.

En el segundo ejemplo, el quebrado $\frac{32}{72}$ no tenia sus dos términos cuadrados perfectos, pero simplificado, dió $\frac{4}{9}$, cuya raíz cuadrada es $\frac{2}{3}$.

En el tercer ejemplo, reducido el mixto á quebrado impropio, se vió que sus términos eran cuadrados perfectos, por lo que se halló $2\frac{1}{3}$.

Y en el ejemplo cuarto, como los dos términos del quebrado $\frac{19}{4}$ no eran cuadrados perfectos, se redujo á decimal, y se halló por raíz 2,1, con residuo de 0,34.

**534.** *Demostracion.* Que la raiz cuadrada de un quebrado es igual á la raiz del numerador dividida por la del denominador, está demostrado (496). Que un quebrado cuyos dos términos no son cuadrados perfectos, no es tampoco cuadrado perfecto, tambien está demostrado (497). Que un quebrado puede reducirse á decimal, demostrado está tambien, y la regla para extraer la raíz cuadrada de un decimal se acaba de demostrar en el artículo anterior; luego la regla para extraer la raíz cuadrada de los quebrados ordinarios que se acaba de ver y aplicar á diferentes ejemplos, es general y queda demostrada.

## ARTÍCULO VII.

### APROXIMACION POR DECIMALES DEL RESIDUO DE UNA RAÍZ.

**535.** Regla. *Para aproximar por decimales el residuo proviniente de la extraccion de la raiz cuadrada de un entero ó un decimal, se le añaden á tal residuo dos ceros á la derecha, y separando con un punto uno, el número formado por el otro y el residuo se divide por el duplo de la raiz entera, cuyo cociente será otra nueva cifra para la raiz, si despues de ensayada como se ensaya toda cifra de unidades de una raiz, se ve que es la correspondiente. Y su especie ó clase será la de unidades inmediatas inferiores á las de la última cifra de la raiz entera antes hallada, ó correspondiente al residuo que se quiere aproximar. En seguida, al residuo que resulte de esta operacion se le añadirán otros dos ceros; y como con los dos añadidos antes, se buscará otra cifra para la raiz, y asi se continuará hasta tener una raiz cuyas unidades decimales inferiores sean todo lo pequeñas que se quieran; pero nunca se hallará raiz exacta ni aun con un decimal periódico.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Ejemplos.* 1.° | $\sqrt{71.45}$ | 84,52 | 2.° $\sqrt{4,75}$ | 2,179 |
| | 7 4.5 | 164 × 4 | 75 | 41 × 1 |
| | 8 9 0.0 | 1685 × 5 | 3400 | 427 × 7 |
| | 4 7 5.0 0 | 16902 × 2 | 41100 | 4349 × 9 |
| | 1 3 6 9 6 | | 1959 | |

prueba $(84,52)^2 = 7143,6304$     prueba $(2,179)^2 = 4,748041$

y $7143,63040 + 1,3696 = 7145$     y $4,748041 + 0,001959 = 4,75$.

*Explicacion.* En el ejemplo primero, al número entero 7145 se le extrajo la raíz cuadrada por la regla correspondiente, y se halló 84 con un residuo de 89, al que, segun la regla anterior, se le añadieron dos ceros; y separando con un punto el de la derecha, con el otro y el residuo se formó el número 890, que se dividió por el duplo de la raíz hallada 168, y dió por cociente 5 que, ensayado correspondientemente, se vió que era la tercera cifra de la raíz, y de décimos, porque la segunda era de enteros y unidades simples; y restado su producto por 1685 de 8900, dió de resta 475, al que se le añadieron otros dos ceros, y con uno de èllos se formó el número 4750, que, dividido por el duplo de toda la raíz hallada 1690, dió de cociente 2 para la cuarta cifra de la raíz, ó sea la de los céntimos, por haberla hallado buena al ensayarla, y no queriendo milésimos en la raíz, se dió por terminada la operacion, siendo el residuo 1,3696.

En el segundo ejemplo, se extrajo la raíz cuadrada al decimal dado, como si fuera entero, por la correspondiente regla (532), y se halló de raiz 2,1 con un residuo de 0,34, al que para aproximarlo por decimales se le añadieron dos ceros, y de una manera análoga á lo ejecutado en el ejemplo primero, se halló por tercera cifra de la raíz 7 centésimos, porque la segunda era de décimos; y semejantemente se halló despues otra cifra para la raíz de milésimos; dando la operacion por terminada, diciendo la prueba en ambos ejemplos que no habia error en las operaciones practicadas.

**536.** *Regla complemental.* Cuando el número propuesto sea un decimal periódico, en lugar de añadir dos ceros á cada resto para buscar otra cifra decimal de la raíz, se le añadirán dos cifras más del período, que es ilimitado, hasta obtener todas las cifras de la raíz que se quieran.

*Ejemplo.* $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0,66\ldots} = \left(\begin{array}{r|l} 6\,6 & 0,816 \\ \cline{2-2} 2\,6.6 & 161 \times 1 \\ 1\,0\,5\,6\,6 & 1626 \times 6 \\ 0\,0\,8\,1\,0 & \end{array}\right) = 0,816$ y $0,000810$ de residuo.

prueba $(0,816)^2 = 0,665856$ y $0,665856 + 0,000810 = 0,666666$

*Explicacion.* Con sujecion á la regla complemental, al extraer la raíz cuadrada del decimal periódico 0,66, para lo que hay que considerar un número par de cifras decimales, se halló 8 y 2 de residuo centésimos, al que se le añadieron dos seises, y se halló 1 para segunda cifra de la raíz, de centésimos; y análogamente despues 6 milésimos, y como se ve en la prueba, la raíz hallada cuadrada, más el residuo, da el número propuesto.

*Demostracion.* Tanto la regla general anterior cuanto la complemental, se fundan en que todo entero se puede considerar como un decimal mixto, cuyas cifras decimales sean los ceros que se quieran (249); y en que á todo decimal se le pueden considerar á la derecha los ceros que se quieran, si el decimal es exacto, y si es periódico todas las cifras del período que se necesiten, pues que es ilimitado. Y en efecto, en la aproximacion del residuo del primer ejemplo se han añadido dos ceros dos veces, ó sea cuatro, y lo que se ha hecho equivale, por lo dicho, á que el número propuesto fuera 7145,0000, que es evidentemente igual á 7145, y ya convertido en decimal se operó por la regla demostrada (532). Y en el segundo ejemplo, lo que se ha practicado es lo mismo que se practicaria por la regla correspondiente ya demostrada, si el número propuesto fuera $4,750000 = 4,75$. Y finalmente, en el ejemplo de la regla complemental, lo ejecutado es lo mismo que si se hubiera extraido la raíz cuadrada de 0,666666... por la regla correspondiente. Y en cuanto á que nunca se podria llegar á obtener un decimal exacto ni periódico ni ménos entero, está demostrado por la inconmensurabilidad de todo residuo (535); luego cuanto previene esta regla queda tambien demostrado.

537. *Observacion.* Como la raíz de un residuo es inconmensurable, en las aproximaciones de él es donde más conviene saber hasta qué punto debe llevarse la aproximacion, para tener el resultado dentro de un error máximo relativo, pues el absoluto es indeterminable exactamente por la dicha ilimitacion del resultado.

Para ello, como no conocemos la teoría del error relativo, diremos simplemente que el error relativo de una raíz será la mitad, tercera parte, etc., del número afectado del radical 2 ó 3 etc., respectivamente, y por lo tanto, que si el problema, por la magnitud de los datos, hace insignificante el error de un milésimo, el error de la raíz de tres centésimos lo será igualmente, y hasta milésimos, por lo tanto, deberia aproximarse el residuo.

# CAPÍTULO IX.

## EXTRACCION DE LA RAÍZ CÚBICA. Δ

## ARTÍCULO PRIMERO.

### PRELIMINARES.

538. El problema general de extraer la raíz cúbica de un número, no es verdaderamente práctico sin los logaritmos, pues aunque es de posible solucion por el método que vamos á exponer, lo difícil y pesado que es casi siempre el ensayo ó comprobacion de cada cifra de la raíz, hace la operacion casi impracticable, ó al ménos muy susceptible de errores. La regla para ejecutarla es tan semejante á la de la raíz cuadrada, y tan semejante tambien su demostracion, que todos los tratados de Aritmética superior ó complemental, aunque formen parte de un curso elemental de Matemáticas, incluyen una y otra, sin más objeto, indudablemente, que ejercitar la inteligencia de los jóvenes; pues para el caso práctico de extraer la raíz cúbica de un número de muchas cifras, se recurre siempre á los logaritmos, con cuya ayuda, como indicamos (479), se extrae muy fácilmente la raiz de cualquier grado.

Diremos, por lo tanto, que *extraer la raiz cúbica de un número*, segun sabemos (471), es *buscar otro que, multiplicado dos veces por sí mismo, dé el propuesto ó poco ménos;* ó lo que es lo mismo, determinar cuál es el número cuyo cubo es el mayor de los contenidos en el número propuesto.

539. El problema general de la extraccion de la raíz cúbica, se divide en seis, á semejanza del de la raíz cuadrada: 1.° *Extraer la raíz cúbica de un número entero de tres ó ménos cifras.* 2.° *Extraerla de un entero de cuatro, cinco, ó seis cifras.* 3.° *Extraerla de un entero de más de seis cifras.* 4.° *Extraerla de un decimal propio ó impropio.* 5.° *Extraerla de un quebrado ordinario propio ó impropio, ó sea número mixto. Y* 6.° *Aproximar por decimales el residuo de cualquier raíz entera correspondiente á un número entero ó decimal que no es un cubo perfecto.* Cada uno de los cuales problemas tiene diferente solucion ó correspondiente regla.

## ARTÍCULO II.

### EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA DE UN ENTERO DE TRES Ó MÉNOS CIFRAS.

540. Regla. *Para extraer la raíz cúbica de un número entero de tres ó ménos cifras, no hay más que determinar de memoria ó por la Tabla de los cuadrados y cubos de los números dígitos* (Tabla VII), *qué número multiplicado por sí mismo dos veces produce el propuesto ó poco ménos, si no hubiese ninguno que lo produjese igual. La diferencia en este caso es el residuo, que podrá aproximarse por decimales, como veremos, pero que en último caso habrá que despreciar; cuyo valor siempre será menor que el de una unidad de la clase de las inferiores del número propuesto. Residuo, finalmente, que se conocerá que es legítimo si es menor que tres veces el cuadrado de la raíz aproximada, más tres veces la misma, más uno.*

La prueba será cubicar la raíz, y ver si el cubo es igual al número propuesto, ó con sólo la diferencia del residuo legítimo.

*Ejemplos.* 1.° $\sqrt[3]{343}=7$  2.° $\sqrt[3]{728}=8$ y 216 de residuo, pues
$216<3\times8^2+(3\times8)+1=217$

prueba $7^3=7\times7\times7=343$  prueba $8^3=728$ y $728+216=728$

*Demostracion.* No es susceptible de ella esta regla, porque se desprende clara y evidentemente de las definiciones del cubo y de la raíz correspondiente; y porque lo referente á la legitimidad del residuo está demostrado (516); ni los ejemplos anteriores necesitan explicacion, pues los resultados se hallan por la Tabla VII de las auxiliares.

## ARTÍCULO III.

### EXTRACCION DE LA RAÍZ CÚBICA DE UN ENTERO DE SEIS, CINCO Ó CUATRO CIFRAS.

**541.** Regla. *Para extraer la raíz cúbica de un entero de seis, cinco ó cuatro cifras, raíz que deberá tener precisamente dos, se separan con un punto las tres cifras de la derecha del número propuesto, y al número que formen las restantes, como si estuviesen solas, se le extrae la raíz cúbica por la regla anterior, y se tendrá la cifra de las decenas de la raíz que se busca. Cubicada ésta y restado su cubo del número que sirvió para producirla, se obtendrá un resto ó á veces* 0, *á la derecha del que se bajarán las tres cifras de la derecha separadas al número propuesto; y separando con un punto dos de ellas de la derecha, con las restantes y el resto anterior hallado se formará un número que se dividirá por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, ó sea de la cifra de las decenas de ella, y el cociente será probablemente la cifra de las unidades de la raíz que se busca. Para ver si lo es realmente, se elevará al cubo el número que formen la cifra hallada para las decenas de la raíz y la de las unidades que se ensaya; y si da un cubo mayor que todo el número propuesto, será señal de que la cifra de las unidades de la raíz que se ensaya es mayor de lo que debe ser, por lo que se disminuirá y repetirá el ensayo. Si en el primero ó en otro ensayo el cubo de la raíz total, cuyas unidades se ensayan, aunque se pueda restar del número propuesto, da una diferencia igual ó mayor que el triplo del cuadrado de la raíz, más el triplo de la misma, más uno, será señal de que la cifra que se ensaya es menor de lo que debe ser, por lo que se le aumentará en una unidad, y se repetirá el ensayo. Una vez hallada buena la cifra ensayada, con la de las decenas de la raíz formará la raíz total del número propuesto, exacta ó aproximada si hubiese residuo, que se podrá aproximar por decimales, como veremos despues; pero que no pudiendo nunca dar un resultado exacto, habrá al fin que despreciarlo con un valor menor que la unidad de las inferiores halladas para la raíz.*

*Ejemplos.*

1.° $\sqrt[3]{438.976}$ | 76
    959.76 | $7^2\times3=49\times3=147$
        | $959:147=6$

$$\begin{array}{r} 76 \\ \times\ 76 \\ \hline 456 \\ 532\phantom{0} \\ \hline 5776 \\ \times\ 76 \\ \hline 34656 \\ 40432\phantom{0} \\ \hline 438976 \end{array}$$

prueba $76^3=438976$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.° $\sqrt[3]{438.975}$ | 75 | número propuesto. | 438975 |
| 95975 | $7^2 \times 3 = 49 \times 3 = 147$ | $75^3 =$ | 421875 |
| 438975 | $959 : 147 = 6$ | residuo | 17100 |
| $75^3 = 421875$ | | | |
| residuo 17100 | | | |

prueba del residuo

$$(75^2 \times 3) + (75 \times 3) + 1 = 5625 \times 3 + 75 \times 3 + 1 = 17101 > 17100.$$

*Explicacion.* En el primer ejemplo se separaron al número propuesto las tres cifras de la dere-
cha, y se extrajo la raiz cúbica de 438, que dió 7, para decenas de la raiz; se cubicaron, y el cubo
se restó del número que produjo de raiz 7, y al resto se le añadió toda la parte del número propues-
to de la derecha antes separada, y de ella sólo se consideró una cifra que con el resto formó el nú-
mero 959, que dividido por 147, triple cuadrado de 7, dió 6 para unidades de la raíz, que ensayadas
cubicando 76 y obteniendo un resultado igual al número propuesto, conocimos que la cifra ensayada
era buena, y por lo tanto la raiz total exacta 76.
En el ejemplo segundo procedimos de igual manera, pero al ensayar la cifra 6, cociente de 959, por
147, vimos que el cubo de 76 era mayor que el número propuesto, por lo que pusimos por unidades
á la raiz 5, que con ellas nos dió el cubo 421875, que, restado del número propuesto, dió para residuo
17100 legítimo, por ser menor, aunque poco, que el triplo del cuadrado de la raiz 75, más el triplo de
la misma, más 1.

**542.** *Regla complemental.* Para ensayar la cifra de las unidades se puede
seguir otro método que algunos encontrarán preferible, y es el de determinar
con la cifra que se ensaya, si dentro del número formado por el resto de la sus-
traccion del cubo de las decenas de la raíz y las tres cifras de la derecha del
número propuesto, cabe el triplo del cuadrado de las decenas halladas para la
raíz, multiplicado por las unidades que se ensayan, más el triplo de las mismas
decenas por el cuadrado de las unidades que se ensayan, más el cubo de éstas, y
si caben todas esas partes y el exceso es un residuo legítimo por su magnitud, la
cifra ensayada será buena.

**543.** *Observacion 1.ª* Este método lo creemos más susceptible de errores que el que antes
hemos propuesto. Por pesada que sea la cubicacion de un número de dos cifras, más lo será casi
siempre la suma de todas las partes dichas, cada una de las que se forma por multiplicaciones nada
sencillas. En efecto, en el ensayo de las unidades del primer ejemplo se tendria que ver si cabia en
95976 $(3 \times 70^2 \times 6) + (3 \times 70^2 \times 6^2) + 6^3$.

**544.** *Observacion 2.ª* No se propuso un método semejante al de nuestra preferencia en la re-
gla de la extraccion de la raiz cuadrada, aunque allí fuera mucho más fácil el hacer el ensayo de la
cifra de las unidades, viendo si el cuadrado de la total raiz cabia debidamente en el número pro-
puesto, porque siendo la extraccion de la raiz cuadrada operacion, aunque difícil, practicable, la
adopcion de ese método aplicado al ensayo de otras cifras de la raíz, se haria ya muy pesado, cosa
que no importa tratándose de la raiz cúbica, porque es más bien teórico que práctico cuanto se diga
sobre ella, aunque otra cosa haya podido parecer por los ejemplos anteriores, pues se han buscado
fáciles y sólo á propósito para comprender el giro de la operacion.

**545.** *Demostracion.* Como todo número puede considerarse compuesto del
cubo de su raíz exacta ó próximamente, el número propuesto, contrayéndonos
al ejemplo primero de los anteriores, lo pudimos considerar compuesto del cu-
bo de las decenas de su raíz, más el triplo del cuadrado de las decenas multi-
plicado por las unidades de la misma raíz, más el triplo de las decenas multipli-
cado por el cuadrado de las unidades, más el cubo de éstas y más el residuo si el
tal número no fuese un cubo perfecto (506). Para determinar las decenas de su
raíz (empezando por ellas por razones análogas á las de la division) (152), diji-
mos que como el cubo de decenas es un número exacto de millares (489), en los
millares y unidades superiores del número propuesto debia estar el dicho cubo
de las decenas de su raíz, aunque algunos millares y otras unidades superiores
provinieran de las demas partes del cubo de la raíz, y por eso separamos las
tres cifras de la derecha, porque en ellas no podia encontrarse el cubo de las de-
cenas; y al número formado por las restantes le extrajimos la raíz cúbica por la
regla correspondiente, y dió 7. Esta cifra debia ser la de decenas de la raíz que
buscábamos, porque 8 decenas elevadas al cubo dan un número de millares ma-

vor que los que tiene el número propuesto, que no podian contener dicho cubo; y 6 decenas, aunque despues las unidades fuesen en el mayor número posible, por ejemplo, 9, tendríamos que 69 sería la raíz cúbica de todo el número propuesto; lo que es absurdo porque acabábamos de ver que sólo los millares y unidades superiores del número dado tienen por raíz 7 decenas, ó sea 70, y todo el número no puede tener menor raíz que una de sus partes. Luego 7 decenas, no sólo eran la raíz de 438 millares, sino las decenas de la raíz de todo el número propuesto. Cubicadas las 7 decenas, restamos el cubo de los millares del número dado, y al resto le añadimos las tres cifras de la derecha separadas antes, formando un número que debia contener todas las partes del cubo de la raíz ménos el cubo de sus decenas que le acabábamos de restar. Para hallar las unidades dijimos que como el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades debia ser un número exacto de centenas, en las centenas y unidades superiores de 95976 debia estar dicho producto, aunque algunas centenas y otras unidades superiores proviniesen de las demas partes del cubo de la raíz; por lo que separamos las dos cifras de la derecha, y el número formado por los restantes 959 lo dividimos por el triplo del cuadrado de las decenas halladas por la raíz, y el cociente debia ser probablemente la cifra de las unidades, y fué 6. Para comprobarla cubicamos 76, y vimos que efectivamente el cubo era igual al número propuesto, por lo que dedujimos que la raíz buscada era 76. Y como el ensayo de esa cifra de las unidades pudimos hacerlo tambien viendo si en 95976 cabian el triplo del cuadrado de las decenas halladas por las unidades que ensayábamos, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de éstas; y lo mismo podriamos demostrar en cualquier ejemplo en que obrásemos segun lo que acabamos de exponer, y esto es justamente lo que se hace por la regla principal y por la complemental, estas son generales y quedan demostradas.

## ARTÍCULO IV.

### EXTRAER LA RAÍZ CÚBICA DE UN ENTERO DE MÁS DE SEIS CIFRAS.

**546.** Regla. *Para extraer la raíz cúbica de un número entero, compuesto de más de seis cifras, se divide primeramente en porciones de á tres, empezando por la derecha, sin reparar en que la última porcion de la izquierda sea de dos cifras ó de una cifra sola. En seguida se consideran las dos porciones de la izquierda como si estuviesen solas, y se las extrae la raíz cúbica por la regla anterior, raíz que tendrá dos cifras; y una vez halladas, se considera el número que los dos formen como las decenas de la raíz del número formado por tres porciones, bajando la tercera y colocándola á la derecha del residuo de la raíz de dos. Despues se busca una tercera cifra para la raíz por el mismo método que se buscó la segunda cifra; y esa tercera será la de unidades de la raíz si despues del ensayo correspondiente resultase buena. Si el número dado tuviese más de tres porciones, se obrará con las demas como con la tercera, poniendo consiguientemente* 0 *en la raíz, siempre que alguna cifra de ella tuviese que ser menor de* 1, *en virtud del ensayo correspondiente.*

**547.** *Observacion.* El ensayo de las unidades de la raíz podrá hacerse aunque sea para tercera ó cuarta cifra por cualquiera de los dos métodos enseñados en el artículo anterior, aunque segun vayan siendo en mayor número las cifras, más difícil y pesado se hará el tal ensayo, y por esto es por lo que repetimos que la extraccion de la raíz cúbica sin el auxilio de los logaritmos es casi impracticable, pues los ejemplos que presentamos ya hemos dicho son buscados de intento de fácil ejecucion.

*Ejemplos.*

| | | |
|---|---|---|
| 1.° | $\sqrt[3]{4\,4\,0.7\,1\,1.0\,8\,1}$ | 761 |
| | 3 4 3 | $7^2 \times 3 = 147$ |
| | 9 7 7.1 1 | $977 : 147 = 6$ |
| $(76)^3 =$ | 4 3 8 9 7 6 | $76^2 \times 3 = 5776 \times 3 = 17328$ |
| restado del n.° prop. | 1 7 3 5 0.8 1 | $17350 : 17328 = 1$ |
| $(761)^3 =$ | 4 4 0 7 1 1 0 8 1 | |

| | | |
|---|---|---|
| 2.° | 4 4 0.7 1 1.0 7 9 | 760 |
| | 3 4 3 | $7^2 \times 3 = 147$ |
| | 9 7 7 1 1 | $977 : 147 = 6$ |
| $76^3 =$ | 4 3 8 9 7 6 | $76^2 \times 3 = 5776 \times 3 = 17328$ |
| restado del n.° prop. | 1 7 3 5 0.7 9 | $17350 : 17328 = 1$ |
| $760^3 =$ | 4 3 8 9 7 6 0 0 0 | |

residuo $1735079 < 3 \times 760^2 + 3 \times 760 + 1 = 1735081$

*Explicacion.* En el ejemplo primero dividimos en tres porciones de sus cifras el número propuesto, y considerando las dos de la izquierda como si estuviesen solas, les extrajimos la raíz cúbica por la regla del artículo anterior, y nos dió 76 de raíz. Al residuo 1735 le añadimos la tercera porcion del número propuesto, y separando dos cifras de la derecha, quedó el número 17350 que lo dividimos por el triplo del cuadrado de la raíz, antes hallada 76, que es 17328, y nos dió de cociente 1 para tercera cifra de la raiz, que, cubicada efectivamente, dió un cubo exactamente igual al número propuesto.

En el segundo ejemplo, en que el número propuesto es menor que el anterior sólo en las unidades y las decenas, obramos como en el primer ejemplo, hasta dividir 17350 por 17328 para hallar la tercera cifra de la raiz, y dió tambien 1; pero ensayada (y sin necesidad de ensayo, pues que la raiz de este ejemplo debia ser algo menor que la del anterior), vimos que la tal tercer cifra debia ser menor de 1, y, por lo tanto, 0, y la raiz total consiguientemente 760, con un residuo de 1735079 legítimo, porque vimos que era menor que el triplo del cuadrado de la raiz, más el triplo de la misma, más 1.

548. *Demostracion.* Demostrada la regla para la extraccion de la raíz cúbica de un número de seis cifras ó ménos (527), diremos que una vez hallada la raíz de dos porciones de un número, serán las decenas evidentemente de la raíz de tres cifras correspondiente á tres porciones del número dado, y, por lo tanto, para hallar la tercera cifra, se debe proceder de una manera análoga á la que se practica para hallar la segunda, supuesto que, v. gr., en el caso del ejemplo primero, si 76 es la raíz cúbica de 440711 con un residuo legítimo de 1735, considerando todo el número propuesto con sus tres porciones, su raíz deberia tener tres cifras (487), y las dos halladas formarian las decenas de la raíz total. Y como su cuadrado ya en dos veces se habia restado del número propuesto, el resto, unido á la tercera porcion, debia contener el triplo del cuadrado de las 76 decenas por las unidades, más el triplo de las 76 decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de éstas, más un posible residuo. Luego se estaba en caso semejante que al determinar la cifra segunda 6.

Y como análogamente se demostraria lo practicado en el segundo ejemplo, y en cualquier otro que se propusiera, fuera cual fuere el número de sus cifras, y se ha obrado con sujecion á la regla, ésta es general y queda demostrada.

## ARTÍCULO V.

### EXTRACCION DE LA RAÍZ CÚBICA DE UN DECIMAL.

**549.** Regla. *Para extraer la raíz cúbica de un decimal propio ó impropio, se hace primeramente que el número de sus cifras decimales sea tres, ó un múltiplo de tres. En seguida se desatiende el signo decimal, y extrayendo la raíz al número como si fuese entero por la regla correspondiente, segun su magnitud, se tendrá un número, al que, separándole con el signo decimal una cifra por cada tres decimales que tuviera el propuesto, dará la raíz deseada.*

*Observacion.* Como desde luego se puede determinar de cuántas cifras de enteros y decimales constará la raíz, el signo podrá ponerse antes de terminar la operacion, y en cuanto llegue á considerarse alguna porcion en la que entre algun decimal del número dado.

*Ejemplos.*

1.° $\sqrt[3]{440716{,}081} = 76{,}1$

2.° $\sqrt[3]{440{,}71108} = \sqrt[3]{440{,}711090} = 7{,}61$ y $0{,}000009$ de residuo.

3.° $\sqrt[3]{0{,}8} = \sqrt[3]{0{,}800} = 0{,}9$ y $0{,}071$ de residuo.

prueba $(0{,}9)^3 = 0{,}729$ y $0{,}729 + 0{,}071 = 0{,}800 = 0{,}8$

*Explicacion.* En el ejemplo primero extrajimos la raiz cúbica de todo el número dado como entero, y á la raiz le separamos con el signo decimal una cifra.

En el ejemplo segundo, como el número de cifras decimales era de cinco, añadimos un cero para que fuese un número múltiplo de 3, y desatendiendo el signo decimal, nos dió 761, que convertimos en 7,61 por la regla, y fué la raiz deseada con un residuo de 9 millonésimos.

Y en el tercer ejemplo, como el número propuesto no tenia más que una cifra decimal, le añadimos dos ceros, y extrayendo, segun la regla, la raiz cúbica de 800, nos dió 9 que debian ser décimos, y un residuo legítimo de 0,071.

**550.** *Demostracion.* El hacer que el número de cifras decimales sean tres, ó un número múltiplo de tres, no sólo no altera el valor del que se propone, sino que es indispensable por razones análogas á las expresadas en la extraccion de la raíz cuadrada de un decimal (532); pues todo cubo de un decimal constará siempre de triplo número de cifras decimales que tenga el número que se eleva (260). Despues, al desatender el signo decimal en el ejemplo primero, v. gr., hacemos al número propuesto 1000 veces mayor, y su raíz debe salir 10 veces mayor de lo que debe (porque $\sqrt[3]{1000} = 10$), pero quedará como debe, separándole con el signo decimal una cifra (482).

Y como de una manera análoga demostrariamos cualquier otro ejemplo en el que se operase segun la regla, esta es general y queda demostrada.

## ARTÍCULO VI.

### EXTRACCION DE LA RAÍZ CÚBICA DE LOS QUEBRADOS.

**551.** Regla. *Para extraer la raíz cúbica de un quebrado propio ó impropio, y por lo tanto de un mixto, si sus dos términos fuesen evidentemente cubos perfectos, ya al proponerlos, ó ya al simplificarlos, se extraerá la raíz de ellos, y el quebrado resultante será la raíz deseada. Y si alguno de los términos del quebrado propuesto ni aun simplificado tiene raíz exacta, se convertirá en decimal y se le extraerá como tal la raíz por la regla del artículo anterior.*

*Ejemplos.*

1.° $\sqrt[2]{\frac{16}{54}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ prueba $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} = \frac{16}{54}$

2.° $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{0,8} = \sqrt[3]{0,800} = 0,9$ y $0,071$ residuo.

prueba $(0,9)^3 + 0,071 = 0,8 = \frac{4}{5}$

*Explicacion.* En el ejemplo primero, el quebrado propuesto no tiene sus dos términos cubo perfectos; pero simplificado y convertido en el igual $\frac{8}{27}$ los tiene, por lo que se extrajo la raiz cúbica de 8 y la de 27, y la raiz deseada fué $\frac{2}{3}$.

En el segundo ejemplo, el quebrado dado era irreducible, y sus términos no tenian raiz cúbica exacta, por lo que lo convertimos en decimal, y como tal le extrajimos la raiz cúbica, que fué 0,9 con 0,071 de residuo.

552. *Demostracion.* Si el quebrado tiene sus dos términos cubos perfectos, está demostrado que la raíz de un quebrado es igual á la raíz del numerador, dividida por la raiz del denominador (496). Si alguno de ellos no la tiene exacta, está tambien demostrado (497) que no la puede tener exacta el quebrado, y para hallar la aproximada, el convertirlo en decimal no puede alterar su valor, y la raíz del equivalente decimal debe ser la raíz del quebrado que se propone. Luego la regla queda demostrada.

## ARTÍCULO VII.

### APROXIMACION POR DECIMALES DE UN RESIDUO DE LA RAÍZ DE UN ENTERO Ó DECIMAL.

553. Regla. *Para aproximar por decimales un residuo de la raíz cúbica de un entero ó de un decimal, se le añaden al tal residuo tres ceros á la derecha, que se consideran como una nueva porcion del número propuesto primitivamente, y con ellos se determina una nueva cifra para la raíz, que será de la clase de unidades inmediatas inferiores á la última de la raíz correspondiente al residuo que se quiere aproximar. Al residuo que resulte se le añaden otros tres ceros, y se procede lo mismo que con los tres primeros añadidos, y asi se continúa hasta tener la raíz con las cifras decimales que convenga, pues nunca se hallará una raíz exacta, ni áun de un decimal periódico.*

*Ejemplos.*

| | | |
|---|---|---|
| 1.° | $\sqrt[3]{3.745}$ | 15,5 |
| | 27.45 | $1^3 \times 3 = 3$ |
| | | $15^3 \times 3 = 675$ |
| $15^3 =$ | 3375 | |
| restado del prop. | 3700.00 | |
| | 3745000 | |
| $155^3 =$ | 3723875 | |
| residuo | 21,125 | |

prueba $(15,5)^3 = 3723,875$
$+ \ 21,125$
número propuesto $3745,000$

2.° $\sqrt[3]{0,38} = \sqrt{0,380} =$ | 0,72
$(0,7)^3 = 0,343$ | $7^2 \times 3 = 147$
370,00

| | |
|---|---|
| número propuesto | 0,380000 |
| $(0,72)^3 =$ | 0,373248 |
| residuo | 0,006752 |

| | |
|---|---|
| $(0,72)^3 =$ | 0,373248 |
| residuo | 0,006752 |
| número propuesto | 0,380000 |

*Explicacion.* En el ejemplo primero no la necesita. En el segundo, extragimos por la Tabla la raíz cúbica de 38 que fué 7, que debia ser décimos, y un residuo de 97 milésimos, al que le añadimos tres ceros, y con 970 buscamos una cifra más para la raíz, que fué 2, que debia ser centésimos por ser la anterior décimos, y nos dió un residuo de 0,006752 legítimo.

554. *Regla complemental.* Cuando el decimal propuesto sea periódico, en lugar de añadir tres ceros á cada residuo para aproximarlo más, se le añadirán tres cifras del decimal que, como ilimitado, tendrá todas las que se quieran.

555. *Demostracion.* Cuanto previene la regla principal y se ha practicado en los anteriores ejemplos, se funda en que á todo decimal se le pueden considerar á la derecha todos los ceros que se quieran, y todo entero se puede tambien considerar como decimal impropio, cuyas cifras decimales sean ceros, pues el agregado de tres á cada residuo que se quiere aproximar más, equivale á considerar al número propuesto con tres ceros decimales á la derecha. Y en cuanto á la regla complemental, evidentemente por el espíritu de lo que se acaba de decir, se comprende que en lugar de ceros se deben agregar á los residuos las cifras significativas que tenga, pues que son en número ilimitado; y quedan, por lo tanto, ambas reglas demostradas.

556. *Observacion.* Por cuanto va dicho, sobre la casi impracticabilidad de la extraccion de la raíz cúbica y la facilidad de su ejecucion con el auxilio de los logaritmos, es inútil y casi irrealizable el ejercicio sobre el contenido de este capítulo; sin embargo, debe el discípulo adiestrarse como ejercicio intelectual en la extraccion de la raíz cúbica de decimales y quebrados con pocas cifras.

---

# CAPÍTULO X.

## RAZONES Y PROPORCIONES.

## ARTÍCULO PRIMERO.

### PRELIMINARES.

557. Razon *se llama en general la comparacion de dos números, atendiendo á la diferencia que hay entre ellos, ó al cociente que corresponde á la division del uno por el otro.* En el primer caso la razon se llama *aritmética ó por diferencia,* y en el segundo *geométrica ó por cociente;* si bien por ser las razones geométricas las que más se usan en las matemáticas, siempre que se dice simplemente *razon*, se entiende que se trata de la geométrica.

558. Tambien se llama *razon* al resultado de la comparacion de dos números, sea diferencia ó cociente, aunque más propiamente podria llamarse *relacion* *.

---

* No se puede, ni aunque se pueda se debe, escribiendo sobre ciencias, sobre todo, tan viejas como las matemáticas, salirse de una manera demasiado original de lo que está más admitido, aunque no sea muy exacto. Todo lo más que creemos debe hacerse (y es lo que procuramos, y se verá en esta y en otras partes de nuestra obra), es, al aceptar alguna cosa algo inexacta, señalar razonadamente su grado limitado de exactitud, y proponer otra que la tenga mayor. Relativamente á sazon, con tal prudencia creemos haber obrado. Añadiremos que los franceses llaman *relacion (rapport)* á lo que nosotros llamamos *razon*, y dejan el nombre de *razon (raison)* para las progresiones como equivalente á *razon constante*. Ese nombre de *relacion (rapport)* hace que su definicion sea algo propia, aunque no distinguen cómo creemos conviene la razon resultado, con la razon que constituye la expresion de dos números que se comparan.

En efecto; aunque es indudable que la razon que hay entre 8 y 4 es el cociente 2, es menester para que ese 2 sea razon y no cociente como otro cualquiera, que se tenga en cuenta explícitamente que proviene de la comparacion de 8 con 4, que constituye la verdadera razon, pues de otro modo todos los cocientes serian razones; y como ademas todo quebrado es una division indicada del numerador por el denominador (179), y su verdadero valor es el resultado ó cociente de tal division, podrian definirse el quebrado, la razon, y la misma division de una misma manera, y no sería una exacta definicion (7), porque no llenaria su objeto de marcar la diferencia entre las cosas definidas.

**559**. Los números que se comparan se llaman *términos de la razon*, distinguiéndose el primero con el nombre de *antecedente*, y el segundo con el de *consecuente*.

**560**. El signo para indicar la razon ó la comparacion de dos cantidades, es en la aritmética . ó — que se lee *es aritméticamente á...*, y en la geométrica el signo de la division : ó una rayita entre el antecedente y el consecuente, puesto éste debajo de aquél y que se lee *es geométricamente á...* ó simplemente *es á...* Este signo y el — para la arimética son los que hoy están más en uso, pero los puntos presentan las razones en forma más á propósito para ver fácilmente las trasformaciones de que son susceptibles, y en esta obra les daremos siempre preferencia.

En efecto; es más conveniente que las razones aparezcan siempre como lo que son, que no en forma de quebrados, así como los decimales se expresan con su signo particular, y no como se puede en forma de quebrados ordinarios.

**561**. La razon ó relacion aritmética entre dos números enteros tiene que ser precisamente un entero; pero como pueden compararse los quebrados, su diferencia puede ser un quebrado ó un mixto. Y la razon geométrica con más motivo puede ser un quebrado ó un mixto, pues la division del antecedente por el consecuente puede dar por cociente un entero y un entero con un residuo, ó sea un mixto.

**562**. Los números que se comparan y constituyen una razon aritmética ó geométrica, deben ser abstractos ó de una misma especie para que formen verdadera razon. Sin embargo, pueden compararse dos números de unidades de diferente clase ó magnitud, pero de una misma naturaleza, y á veces de distinta, cuando se prescinde de ella y sólo se atiende á los números, que por lo tanto se consideran como abstractos.

Así, 12 : 4 es una razon, y 20 hombres : 15 hombres y 2 arrobas : 15 libras, y áun $7^{h} : 5^{v}$; pero esta última razon no lo es verdaderamente, pues la relacion que hay entre 7 y 5 no es la del hombre á la vara, sino, por ejemplo, la cantidad de varas que trabaja el hombre con 5 varas.

**563**. PROPORCION *se llama la igualdad de dos razones*, siendo *proporcion aritmética* la igualdad de dos razones aritméticas, que tambien se llama *equidiferencia*; y *proporcion geométrica*, ó simplemente *proporcion*, la igualdad de dos razones geométricas, ó tambien *equicociente*.

**564**. El signo para expresar la proporcion es = ó : en la aritmética, y : : en la geométrica, colocado entre las razones iguales, y se lee *como*.

**565**. Los cuatro términos que forman una proporcion tienen los nombres de 1.°, 2.°, 3.° y 4.° términos de ella, y de antecedentes el 1.° y 3.°, y consecuentes el 2.° y 4.°, de medios el 2,° y 3.°, y extremos el 1.° y 4.°.

Así, 4 . 2 : 8 . 6 ó $4 - 2 = 8 - 6$, se lee: cuatro es aritméticamente á dos, como ocho es á seis, ó cuatro ménos dos, igual á ocho ménos seis; y 6 : 3 : : 8 : 4 ó $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$, se lee: seis es á tres como ocho es á cuatro, ó seis sobre tres igual á ocho sobre cuatro. No siendo indispensable que los antecedentes sean mayores que los consecuentes, como aparecen en los anteriores ejemplos, si bien en la aritmética no consideraremos proporciones con antecedentes menores que los consecuentes, porque no podemos realmente restar un número mayor de uno menor aritméticamente (80).

566. La proporcion se llama *continua* cuando el consecuente de la primera razon es igual al antecedente de la segunda, y *discreta* cuando son desiguales.

Así 6 . 4 : 4 . 2 y 12 : 24 : : 24 : 48 son contínuas.

567. Las proporciones contínuas pueden expresarse en esta forma:

$$\div\ 6 . 4 . 2 \text{ y } \div\div\ 12 : 24 : 48.$$

568. *Série de razones iguales* se llama la igualdad de varias razones en una misma expresion.

Así, 12 . 10 : 15 . 13 : 27 . 25 y 6 : 12 : : 15 . 30 : : 19 : 38.

569. Las propiedades de las razones aritméticas son las mismas que las de los números que hacen de minuendo y sustraendo en una sustraccion, por lo que no merecen artículo especial y sólo recordar como principales y más importantes las siguientes:

1.ª Sumando ó restando igual cantidad al antecedente y al consecuente de una razon aritmética, su diferencia, ni por lo tanto su relacion no variará (75).

2.ª Multiplicando ó dividiendo el antecedente y el consecuente de una razon por un mismo número, su diferencia quedará multiplicada ó dividida respectivamente por el mismo.

570. Y como la razon geométrica equivale á un quebrado, y consiguientemente á una division, todas las propiedades de los quebrados son aplicables á las razones; y todo lo que sabemos sucede al cociente por las alteraciones que sufran dividendo ó divisor, sucederá á la relacion de dos términos de una razon geométrica.

## ARTÍCULO II.

### PRINCIPALES PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES ARITMÉTICAS Ó EQUIDIFERENCIAS.

571. Teorema. *Propiedad fundamental de las proporciones aritméticas ó equidiferencias es que la suma de extremos debe siempre ser igual á la de medios, ó al duplo del término medio si la proporcion es contínua.*

*Demostracion.* Muy sencillamente se demuestra por el álgebra, pero aritméticamente tambien puede demostrarse. Si tenemos la proporcion 8 . 6 : 4 . 2 y la convertimos en una igualdad, con lo que no se altera, pues que es otra forma que admite para expresarse, será $8-6=4-2$. Considerando ya esa expresion como una igualdad cualquiera, inalterable si el aumento que se dé á un miembro se dá al otro, lo que es axiomático (64), y añadimos á los dos miembros la cantidad $6+2$, que aunque valga 8, no conviene para el objeto que desaparezcan los dos sumandos, tendremos

$$8-6+6+2=4-2+6+2$$

Simplificando esa igualdad, en virtud de que en su primer miembro si á 8 se le restan 6 y se le suman 6, quedará el mismo 8; y en el segundo, si á 4 se le restan 2 y luego se le suman otra vez, será lo mismo que no haber restado ni sumado nada, se convertirá en $8+2=4+6$. Pero 8 y 2 son los extremos de la proporcion primitiva y 4 y 6 los medios; luego queda demostrado el enunciado del teorema, pues si la proporcion fuera continua, v. gr., $8:6:6.4$, daria, por lo demostrado, $8+4=6+6$ y $6+6=2\times 6$.

**572.** Lema. *Un extremo de cualquier progresion aritmética es igual á la suma de los medios ménos el otro extremo; y un medio es igual á la suma de los extremos ménos el otro medio; y si la proporcion es continua, un extremo es igual al duplo del término medio ménos el otro extremo; y finalmente, el término medio de una proporcion continua será igual á la mitad de la suma de los extremos.*

*Demostracion.* Sea la proporcion $8.6:4.2$ en la que la suma de extremos debe ser igual á la de medios por el teorema anterior demostrado, y será $8+2=6+4$, y si á los dos miembros de esa igualdad le restamos 8, será $8+2-8=6+2-8$; y simplificando el primer miembro, porque $+8$ y $-8$ se destruyen, será $2=6+2-8$; luego el extremo de una proporcion es igual á la suma de los medios ménos el otro extremo.

Si á la misma igualdad $8+2=6+4$ restamos á sus dos miembros 4, será $8+2-4=6+4-4$, y simplificando el segundo miembro, será $8+2-4=6$; luego el medio de una proporcion aritmética es igual á la suma de los extremos ménos el otro medio.

Si la proporcion fuese continua, por ejemplo, $8.6:6.4$, por lo demostrado sería $8+4=6\times 2$ $(=6+6)$, y si á los dos miembros de esa igualdad les restamos 4, será $8+4-4=(6\times 2)-4$, y simplificando el primer miembro será $8=(2\times 6)-4$; luego un extremo de una proporcion contínua es igual al duplo del término medio ménos el otro extremo. Y si los dos miembros de la igualdad $8+4=6\times 2$ los dividimos por 2, será $\frac{8+4}{2}=\frac{6\times 2}{2}$, en cuyo segundo miembro 6 multiplicado por 2 y dividido por 2 es evidentemente igual á 6, término medio de la proporcion contínua, y $\frac{8+4}{2}$ es la mitad de la suma de los extremos; luego queda tambien demostrada la última parte del teorema.

**573.** *Corolario* 1.° Por lo demostrado en el teorema anterior, conociendo tres de los cuatro términos de una progresion aritmética discreta y sólo dos de una contínua, se determina el valor del cuarto.

En efecto, si $8 . 6 : 4 . 2$ y $8 . 6 : 6 . 4$
en $8 . 6 : 4 . \alpha$ $\alpha = 6 + 4 - 8 = 2$
y en $8 . 6 : \alpha . 2$ $\alpha = 8 + 2 - 6 = 4$
y en $8 . 6 : 6 . \alpha$ $\alpha = 2 \times 6 - 8 = 4$
y en $8 . \alpha : \alpha . 4$ $\alpha = \frac{8+4}{2} = 6$

574. *Corolario* 2.° De la última parte del teorema anterior se deduce la verdad importante de que el medio aritmético entre dos cantidades es igual á la mitad de su suma, como se ha visto en el último ejemplo del corolario anterior, pues 6 es el medio aritmético entre 8 y 4, y $6 = \frac{8+4}{2}$.

## ARTÍCULO III.

### PROPIEDADES PRINCIPALES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS.

575. Teorema. *Propiedad fundamental de toda proporcion geométrica es que el producto de extremos es igual al de medios, y al cuadrado del término medio en la proporcion continua.*

*Demostracion.* Si tenemos, por ejemplo, la proporcion $24 : 6 : : 28 : 7$, poniéndola en forma de igualdad, será $\frac{24}{6} = \frac{28}{7}$, y como los dos miembros de esta igualdad son verdaderos quebrados, reducidos á un comun denominador y dejando las operaciones indicadas, darán $\frac{24 \times 7}{6 \times 7} = \frac{28 \times 6}{6 \times 7}$, evidentemente iguales (189); y siéndolo, y teniendo idénticos sus denominadores, sus numeradores deben ser iguales; y será, por lo tanto, $24 \times 7 = 28 \times 6$, pero $24 \times 7$ es el producto de extremos, y $28 \times 6$ el de medios, y lo mismo podriamos ver en cualquier otro ejemplo y en la continua, por ejemplo, $24 : 12 : : 12 : 6$, será $24 \times 6 = 12 \times 12$ y $12 \times 12 = 12^2$; luego el teorema es general, y queda demostrado.

576. Recíprocamente. *Si cuatro números son tales que el producto de dos de ellos sea igual al producto de los otros dos, con ellos se podrá formar proporcion con tal que los factores que forman un mismo producto queden de medios ó de extremos.*

*Demostracion.* Si tenemos que $20 \times 3 = 4 \times 15$, y de esta igualdad dividimos sus dos miembros por $3 \times 4$, será $\frac{20 \times 3}{3 \times 4} = \frac{4 \times 15}{3 \times 4}$, y simplificando esos quebrados por la supresion de factores comunes en sus términos (189), será $\frac{20}{4} = \frac{15}{3}$, igualdad que puesta en forma de proporcion dará $20 : 4 : : 15 : 3$. Y si en lugar de haber tomado por divisor $3 \times 4$ hubiéramos tomado $20 \times 15$, daria $\frac{20 \times 3}{20 \times 15} = \frac{4 \times 15}{20 \times 15}$, que simplificando da $\frac{3}{15} = \frac{4}{20}$ ó $3 : 15 : : 4 : 20$. Y como lo mismo podríamos demostrar sobre cualquier otro ejemplo, el teorema recíproco es general y queda demostrado.

577. *Corolario* 1.° Se desprende del teorema anterior y su recíproco, que está justificado el decir, como se dice, que *dos números son directamente proporcionales con otros dos*, cuando el cociente de dividir entre sí

los unos es igual al cociente de dividir entre sí los otros; y el decir que dos números son *recíprocamente proporcionales* con otros dos cuando sus productos son iguales.

Pues 24 y 6 son directamente proporcionales con 28 y 7 si el cociente de dividir 24 por 6 es igual al de dividir 28 por 7, porque se podrá decir que $\frac{24}{6} = \frac{28}{7}$ que es una proporcion, y 24 y 7 son recíprocamente proporcionales á 28 y 6, si $24 \times 7 = 28 \times 6$, porque se podrá decir: 24 : 28 : : 6 : 7, ó 28 : 24 : : 7 : 6, ó 6 : 7 : : 24 : 28, etc.

**578.** *Corolario* 2.º Toda proporcion sin alterarse, ó sea sin dejar de ser verdadera proporcion de los mismos números, puede sufrir las trasformaciones que se quieran, con tal que el producto de medios permanezca igual al de extremos; trasformaciones que se llaman: *alternar* cuando se mudan de lugar los medios, *invertir* cuando se ponen por medio los extremos y por extremos los medios, y *permutar* cuando se pone la primera razon por segunda y la segunda por primera.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Así | 8 : 4 : : 6 : 3 | será alternada | 8 : 6 : : 4 : 3, |
| y | 8 : 4 : : 6 : 3 | será invertida | 4 : 8 : : 3 : 6, |
| y | 8 : 4 : : 6 : 3 | será permutada | 6 : 3 : : 8 : 4, |

proporciones todas verdaderas de los mismos números, porque siempre el producto $8 \times 3 = 4 \times 6$ aunque los factores estén en diferente órden ó los miembros de la igualdad cambiados.

**579.** Teorema. *Una proporcion no varía, ó, mejor dicho, la igualdad que representa no desaparece, aunque se multipliquen ó dividan por un mismo número un extremo y un medio.*

*Demostracion.* Si tenemos 8 : 4 : : 6 : 3, puesta la proporcion en forma de igualdad, dará $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$; y como de multiplicar por un mismo número los dos términos de cualquiera de esos dos verdaderos quebrados, su valor no puede variar, la igualdad no puede desaparecer, ni por lo tanto la proporcion correspondiente; luego multiplicando por un mismo número 8 y 4, que son el primer extremo y el primer medio, ó 6 y 3, que son el segundo medio y el segundo extremo, la proporcion no desaparecerá y el cociente de una y otra razon no variará. Y como alternando la proporcion primitiva dará 8 : 6 : : 4 : 3, será $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, por cuya igualdad se deduce que tampoco desaparece la proporcion multiplicando ó dividiendo el primer extremo y el segundo medio, ó el primer medio y el segundo extremo por un mismo número; y como lo mismo se demostraria sobre otro cualquier ejemplo, el teorema es general y queda demostrado.

**580.** Lema. *Multiplicando ó dividiendo ordenadamente dos proporciones, ó sea antecedente por antecedente y consecuente por consecuente, los productos ó cocientes forman proporcion.*

Porque si 8 : 4 : : 6 : 3 y 10 : 5 : : 30 : 15 puestas en forma de igualdad, serán $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ y $\frac{10}{5} = \frac{30}{15}$, quebrados iguales los de una igualdad que, multiplicados ó divididos por cantidades iguales, como son los de la otra igualdad, darán evidentemente quebrados iguales, y será $\frac{8}{4} \times \frac{10}{5} =$

$\frac{6}{3} \times \frac{30}{15}$ y $\frac{8 \times 10}{4 \times 5} = \frac{6 \times 30}{3 \times 15}$, que da $8 \times 10 : 4 \times 5 :: 6 \times 30 : 3 \times 15$.

**581.** *Corolario.* Si en dos proporciones que se multiplican ordenadamente hay un término igual, se le puede hacer desaparecer, haciendo, antes de la multiplicacion, que dicho término sea, sino lo es, en la una antecedente y en la otra consecuente, y de semejante razon primera ó segunda de las proporciones, para lo que se alterna, invierte ó permuta una de ellas si es necesario.

Así en las proporciones $12 : 6 :: 4 : 2$ y $4 : 3 :: 8 : 6$, si se quiere que formen una sola proporcion desapareciendo el término 6, que existe en ambas, se alterna la primera, y será $12 : 4 :: 6 : 2$, y multiplicándola ordenadamente con la segunda, dará $12 \times 4 : 4 \times 3 :: 6 \times 8 : 2 \times 6$, cuya segunda razon no variará dividiendo por 6 sus dos términos, y, por lo tanto, haciendo desaparecer el 6.

**582.** Lema. *Una proporcion no desaparece elevando todos sus términos á una misma potencia, ó extrayéndoles á todos la raiz de igual grado.*

Porque si $8 : 4 :: 6 : 3$, será $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$, y multiplicando los dos miembros de esta igualdad por los iguales de una idéntica, será $\frac{8}{4} \times \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \times \frac{6}{3}$ ó $\frac{8^2}{4^2} = \frac{6^2}{3^2}$, y consiguientemente, si $\frac{8^2}{4^2} = \frac{6^2}{3^2}$ es tan igualdad como $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$, como 8 es la raiz de $8^2$ y 4 la de $4^2$, la proporcion permanecerá extrayendo la raiz cuadrada de todos sus términos, y lo mismo se demostraria sobre otra potencia ó raiz cualquiera.

**583.** Lema. *Si dos proporciones tienen una razon comun ó igual, con las otras se podrá formar proporcion.*

Porque $8 : 4 :: 6 : 3$ y $24 : 12 :: 6 : 3$, poniendo las dos proporciones en forma de igualdad, serán $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ y $\frac{24}{12} = \frac{6}{3}$, y como es un axioma que dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, siendo $\frac{8}{4}$ y $\frac{24}{12}$ iguales á $\frac{6}{3}$ serán iguales entre sí, y dará $\frac{8}{4} = \frac{24}{12}$, ó sea $8 : 4 :: 24 : 12$.

**584.** Corolario. *Si dos proporciones tienen iguales antecedentes, con los consecuentes se podrá formar proporcion, y tambien con los antecedentes, si los consecuentes son iguales;* pero de modo que los antecedentes ó consecuentes de cada una formen un medio y un extremo; pues si $8 : 6 :: 4 : 3$ y $8 : 10 :: 4 : 5$, alternadas darán $8 : 4 :: 6 : 3$ y $8 : 4 :: 10 : 5$, las cuales, teniendo una razon igual con las otras, se podrá formar proporcion, y será $6 : 3 :: 10 : 5$.

**585.** Teorema. *En toda proporcion la suma ó diferencia de antecedente y consecuente de la primera razon, es al consecuente ó antecedente de la misma, como la suma ó diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razon es al consecuente ó antecedente de la misma.*

| | |
|---|---|
| Esto es, que en la proporcion | $4 : 2 :: 6 : 3 : 3$ |
| será tambien | $4 + 2 : 2 :: 6 + 3 : 3$ |
| y | $4 + 2 : 4 :: 6 + 3 : 6$ |
| y tambien | $4 - 2 : 2 :: 6 - 3 : 3$ |
| y | $4 - 2 : 4 :: 6 - 3 : 6$ |

*Demostracion.* Si la proporcion propuesta se pone en forma de igualdad, será $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$. Considerándola como tal igualdad y cada uno de sus miembros como una division indicada, si al dividendo del primero 4 se le añaden tantas unidades como tiene el divisor 2, aumentará el cociente, y por lo tanto el primer miembro en una unidad (190). Y si al dividendo del segundo miembro 6 se le añaden tantas unidades como tiene el divisor 3, el cociente, y por lo tanto el segundo miembro, aumentará en una unidad. Y como aumentando los dos miembros en una unidad, la igualdad subsistirá, será $\frac{4+2}{2} = \frac{6+3}{3}$ ó $4+2:2::6+3:3$. Si en lugar de sumar al 4 y al 6 respectivamente 2 y 3, se le restan, el valor de los dos miembros disminuirá en una unidad (190), y la igualdad subsistirá; y será $\frac{4-2}{2} = \frac{6-3}{3}$ ó $4-2:2::6-3:3$. Y como estas proporciones tienen con la primitiva los consecuentes iguales, con los antecedentes se podrá formar proporcion (584), y será, con la penúltima, $4+2:4::6+3:6$, y con la otra $4-2:4::6+3:6$; luego queda demostrado en todas sus partes el teorema.

**586.** Corolario 1.° *En toda proporcion la suma ó diferencia de antecedente y consecuente de la primera razon, es á la suma ó diferencia de antecedente y consecuente de la segunda, como el antecedente de la primera es al de la segunda, ó como el consecuente de aquella es al de ésta.*

Porque alternadas las cuatro proporciones resultantes por el anterior teorema, serán

$$4+2:6+3::2:3 \quad \text{y} \quad 4-2:6-3::2:3$$
$$\text{y} \quad 4+2:6+3::4:6 \quad \text{y} \quad 4-2:6-3::4:6$$

**587.** Corolario 2.° *En toda proporcion la suma de antecedente y consecuente de la primera razon es á su diferencia, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razon es á su diferencia.*

Porque por el corolario anterior $4+2:6+3::4:6$
y $4-2:6-3::4:6$
luego (por tener una razon igual) $4+2:4-2::6+3:6-3$

**588.** Corolario 3.° *En toda proporcion la suma ó diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Porque si la proporcion $4:2::6:3$ se alterna, dará (586) $4:6::2:3$; y por el corolario primero será $4+6:2+3::6:3$, ó como $4:2$, y $4-6:2-3::6:3$, ó como $4:2$. Pero 4 y 6 son los antecedentes de la proporcion sin alternar, y 2 y 3 los consecuentes; luego el corolario es exacto.

**589.** Corolario 4.° *En toda proporcion la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á su diferencia*, porque las dos proporciones resultantes en el anterior corolario, teniendo igual la segunda razon, con las primeras se podrá formar proporcion, y alternada, dará $4+6:4-6::2+3:2-3$, que son antecedentes y consecuentes de la proporcion $4:6::2:3$, antes de ser alternada, que es $4:2::6:3$.

**590.** Teorema. *En toda série de razones iguales, la suma de un número cualquiera de antecedentes, es á la de sus consecuentes como un antecedente cualquiera es á su consecuente.*

*Demostracion.* Si tenemos la série $2 : 4 : : 3 : 6 : : 8 : 16 : : 5 : 10$, etc. (588), considerando sólo las dos primeras razones será

$$2 + 3 : 4 + 6 : : 3 : 6$$

y poniendo en lugar de la segunda razon su igual $8 : 16$, tendremos

$$2 + 3 : 4 + 6 : : 8 : 16$$

en cuya proporcion será

$$2 + 3 + 8 : 4 + 6 + 16 : : 8 : 16.$$

Y como lo mismo se podria demostrar considerando otras razones de la série, por larga que fuera, el teorema queda demostrado.

**591.** Corolario. *En una série de razones iguales, si un antecedente ó consecuente es igual á la suma de todos los demas ó de cierto número de ellos, el consecuente ó antecedente correspondiente será igual á la suma de los demas ó de igual número de ellos.*

Pues si $8 = 5 + 3$ antecedentes, 16 consecuente de 8, deberá ser igual á $6 + 10$, consecuentes de 5 y 3, pues por el teorema anterior, $3 + 5 : 6 + 10 : : 8 : 16$ y $\frac{3+5}{6+10} = \frac{8}{16}$, cuyos quebrados siendo iguales, si 8 numerador del uno, es igual á $3 + 5$, numerador del otro, 16, denominador del uno, tendrá que ser igual á $6 + 10$, denominador del otro.

## ARTÍCULO IV.

### CONSECUENCIAS PRINCIPALES DE LAS PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS.

**592.** 1.ª *En toda proporcion geométrica discreta, conociendo los medios y un extremo, se podrá determinar el valor del otro extremo multiplicando los medios y partiendo el producto por el extremo conocido. Y conociendo los extremos y un medio, se determinará el valor del otro medio multiplicando los extremos y dividiendo el producto por el medio conocido.*

Porque si tenemos $8 : 6 : : 4 : x$, como el producto de extremos debe ser igual al de medios, será $4 \times 6 = 8 \times x$; y dividiendo por 8 los dos miembros de esa igualdad, dará $\frac{4 \times 6}{8} = \frac{8 \times x}{8}$ ó $\frac{4 \times 6}{8} = x = 3$.

Y análogamente en $8 : 4 : : x : 3$ $\quad x = \frac{3 \times 8}{4} = 6$.

**593.** 2.ª *En toda proporcion continua, conociendo el medio y uno de los extremos, se podrá determinar el valor del otro, cuadrando el término medio, y dividiendo el cuadrado por el extremo conocido; y si se conocen los dos extremos y se desconoce el medio, se podrá hallar éste multiplicando los extremos y extrayendo la raiz cuadrada del producto.*

Porque si tenemos, por ejemplo, $8 : 4 : : 4 : x$, como el cuadrado del término medio es igual al producto de los extremos (575), tendremos $4^2 = 8 \times x$, y dividiendo por 8 los dos miembros de esa igualdad, resultará $\frac{4^2}{8} = x = 2$.

Y por razones análogas, si tenemos $8 : x : : x : 2$, será $x^2 = 8 \times 2$, y extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros, dará $x = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$.

**594.** 3.ª *Cuando hay dos proporciones que tienen un término desconocido comun y otro desconocido tambien en una de ellas solamente, se podrá determinar el valor de éste multiplicando las dos proporciones ordenadamente* (581) *(despues de trasformar si es preciso una de ellas) y haciendo desaparecer el término desconocido comun y procediendo despues con la proporcion resultante, como en el correspondiente caso de los anteriores.*

Porque si tenemos $8 : 4 : : 12 : z$
y $9 : 3 : : z : x$

multiplicándolas ordenadamente será $8 \times 9 : 4 \times 3 : : 12 \times z : x \times z$
y $8 \times 9 : 4 \times 3 : : 12 : x$ y $x = \frac{4 \times 3 \times 12}{8 \times 9} = \frac{144}{72} = 2$.

**595.** 4.ª *En tres ó más proporciones que tengan un término desconocido comun cada dos, y uno que sólo exista en una de ellas, se podrá determinar el valor de éste multiplicándolas todas ordenadamente, y haciendo desaparecer los términos desconocidos que sean comunes á dos, se tendrá una proporcion con una sola incógnita, cuyo valor se determinará por las reglas anteriores.*

Porque si tenemos $8 : 4 : : 12 : z$
y $9 : 3 : : z : y$
y $6 : 3 : : y : x$

multiplicándolas ordenadamente serán $8 \times 9 \times 6 : 4 \times 3 \times 3 : : 12 \times z \times y : z \times y \times x$, y simplificando $432 : 36 : : 12 : x = x \frac{12 \times 36}{432} = \frac{432}{432} = 1$.

**596.** *Observacion.* Si se quisiera conocer el valor de $z$ conociendo ya el de $x = 1$, se multiplicarian ordenadamente $9 : 3 : : z : y$, y $6 : 3 : : y : 1$, y daria $9 \times 6 : 3 \times 3 : : z \times y : y \times 1$, que, simplificada, daria $54 : 9 : : z : 1$ y $z = \frac{54 \times 1}{9} = 6$.

Y con este valor de $z$ se podrá determinar el de $y$, multiplicando ordenadamente las dos primeras proporciones, pues daria $8 \times 9 : 4 \times 3 : : 12 \times 6 : 6$ ó $72 : 12 : : 72 : 6 \times y$, y $72 \times 6 \times y = 12 \times 72$; luego $y = \frac{12 \times 72}{6 \times 72} = 2$.

Pero generalmente en ningun problema interesa el conocer otro valor de incógnita que el de la no repetida.

**597.** 5.ª *En toda série de razones iguales en la que se conocen tres de las cuatro cosas siguientes: suma de algunos antecedentes ó de todos; suma de sus correspondientes consecuentes: un antecedente cualquiera, y un consecuente correspondiente, se puede determinar el valor de una de ellas que se desconozca, formando una proporcion con las cuatro cosas expresadas, segun el órden* *en que se han expresado, y poniendo* x *en lugar de la desconocida, cuyo valor se determinará por la regla de las anteriores que le corresponda.*

Porque si tenemos $2 : 4 :: 3 : 6 :: x : 16$, etc., podremos decir (626) que $2 + 3 : 4 + 6 :: x : 16$, ó $5 : 10 :: x : 16$, y $10 \times x = 16 \times 5$, y $x = \frac{16 \times 5}{10} = \frac{80}{10} = 8$.

---

# CAPÍTULO XI.

## REGLA PROPORCIONAL Ó DE TRES.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

**598.** Regla de tres ó de proporcion *se llama la que sirve para resolver ciertos problemas, cuyos datos tienen relacion proporcional entre sí, y con un término desconocido, cuyo valor se determina por una ó varias proporciones de tres términos conocidos.* De esta última circunstancia toma su nombre la regla y los problemas que por ella se resuelven.

**599.** Los problemas de la regla de tres pueden resolverse sin necesidad de proporciones, y sólo con el conocimiento de las cuatro operaciones principales de los enteros y los quebrados por un método, hoy muy usado, llamado de *reduccion á la unidad.*

Este método se tiene por más sencillo, con lo que no estamos conformes, pues necesita más reflexion; pero daremos á conocer uno y otro en este capítulo, y despues del proporcional, porque es el propio de este sitio, y porque á él le damos la preferencia.

**600.** La regla de tres se llama *simple* cuando puede hallarse el resultado por medio de una sola proporcion, y *compuesta* cuando se necesitan dos ó más proporciones para hallar el resultado que se desea.

**601.** Los datos ó términos conocidos de los problemas de la regla de tres deben ser en número impar, tres en la simple, y cinco, siete, nueve, etc., en la compuesta; y ademas deben ser homogéneos (pues por supuesto han de ser concretos) de dos en dos, y el impar de igual especie que el resultado que se busca.

**602.** Los términos homogéneos de diferente especie ó naturaleza que el desconocido, se llaman generalmente *cantidades* ó *términos principales;* y el desconocido y su correspondiente conocido *términos relativos.* Y como en la regla de tres compuesta, ó sea en sus problemas, hay más de dos datos diferentes al desconocido, se suelen distinguir con los nombres de *principales primeros, segundos,* etc., segun la importancia relativa que les da el enunciado del problema.

**603**. La mitad de los términos principales y los relativos, ó sea uno de cada dos homogéneos, que constituyen la hipótesis ó parte condicional del problema, se suelen llamar *términos de la hipótesis*, y los restantes, entre los que debe figurar el desconocido, se suelen llamar *correspondientes á la incógnita.*

**604**. Se dice que la regla de tres es *directa*, ó que los términos relativos del problema están en razon ó relacion directa con los principales, cuando aumentando estos ó disminuyendo por multiplicacion ó division (y no por suma ó resta), aumentan aquellos ó disminuyen respectivamente en igual proporcion. Y la regla de tres se llama *inversa* cuando al aumento ó disminucion de los principales términos se sigue necesariamente una disminucion ó aumento proporcional á los términos relativos. Pudiendo haber naturalmente en los problemas de la regla de tres compuesta unos términos en razon directa y otros en razon inversa.

*Ejemplos.* 1.° Si 9 varas de paño costaron 162 rs., ¿15 varas cuánto costarán? $x$ rs.

2.° Si 15 obreros hacen una obra en 24 dias, ¿20 obreros en cuántos la harán? $x$ dias.

3.° Si 15 hombres hacen 100 metros de obra en 24 dias, ¿20 hombres para 80 metros cuántos dias necesitarán?

El primer ejemplo es de regla de tres directa, porque evidentemente cuantas *más* varas de paño se compren *más* costarán. El segundo es de regla de tres inversa, pues cuantos *más* hombres trabajen en la obra, *ménos* dias se necesitarán para hacerla. Y el tercer ejemplo es de regla de tres compuesta, porque los datos son más de tres, y los hombres están en razon inversa con los dias, porque cuantos *más* hombres sean, *ménos* dias tardarán en la obra. Y los metros están en razon directa con los dias, porque cuantos *ménos* metros tenga la obra, *ménos* dias se necesitarán para hacerla.

Ademas, son cantidades principales en el primer ejemplo 9 y 15 varas; y en el segundo, 15 y 20 obreros; y en el tercero, 15 y 20 hombres, y 100 y 80 metros, pudiéndose llamar éstos principales segundos. Y son relativas en el primer ejemplo 162 reales y $x$ rs.; en el segundo, 24 dias y $x$ dias; y en el tercero, 24 dias y $x$ dias. Términos de la hipótesis son, en el primer ejemplo, 9 varas y 162 reales; en el segundo, 15 obreros y 24 dias; y en el tercero, 15 hombres, 100 metros y 24 dias: y correspondientes á la incógnita, en el primero, 15 varas; en el segundo, 20 obreros; y en el tercero, 20 hombres y 80 metros.

## ARTÍCULO II.

### SOLUCION DE PROBLEMAS DE REGLA DE TRES SIMPLE.

**605**. Problema general. *Dadas tres cantidades, dos de ellas homogéneas entre sí y la otra de diferente especie, determinar una desconocida homogénea á ésta, y que con ella guarde igual proporcion que entre sí aquellas.*

Solucion general ó regla. *Con las cantidades dadas escríbase una proporcion* (que es lo que se llama plantear el problema), *cuyo primer término sea la cantidad principal correspondiente á la relativa conocida, y cuyo segundo término sea la otra cantidad principal. Por tercer término póngase la cantidad relativa conocida y por cuarto la incógnita, si las relativas guardan relacion directa con las principales; y, en caso contrario, póngase por tercer* *término la incógnita, y por cuarto la relativa conocida. Planteado así el problema, resuélvase ó determínese el valor de la incógnita, multiplicando los medios y dividiendo el producto por el extremo conocido, si el desconocido es extremo, y si es medio multiplíquense los extremos y divídase el producto por el medio conocido.*

*Ejemplos.* Los expuestos antes se plantean y resuelven de la manera siguiente: *Primer enunciado.* Si 9 varas de paño costaron 162 rs., se desea saber 15 varas cuánto costarian.

planteo 9 varas : 15 varas : : 162 rs. : $x$ rs.

resolucion $x = \frac{162 \times 15}{9} = 270$ rs.

*Segundo enunciado.* Si 15 obreros emplean en una obra 24 dias, 20 obreros cuántos dias emplearán.

planteo 15 ob. : 20 ob. : : $x$ dias : 24 dias.

resolucion $x$ dias $= \frac{24 \times 15}{20} = 18$ dias.

**606.** *Demostracion.* Se forma la primera razon con las cantidades principales en el órden que prescribe la regla, por ser costumbre general que debe hacer ley para evitar equivocaciones; pero podian tener otro órden, si á los términos de la segunda razon tambien se les diera (578). Se pone por tercer término la cantidad conocida, y por cuarto la incógnita, si la proporcion es directa, porque debiendo la incógnita ser mayor ó menor que la relativa conocida, segun que sea mayor ó menor la segunda principal que la primera; si ésta es antecedente, la incógnita debe ser consecuente para que haya proporcion (575). Y por semejante razon, si la proporcion es inversa, como la incógnita ha de ser menor que la relativa conocida, si la segunda principal es mayor que la primera, la incógnita debe ser medio y extremo la relativa conocida, para que haya proporcion. Luego lo que previene la regla para el planteo está justificado, y en cuanto á la resolucion, se funda en lo ya demostrado (522); luego queda demostrada esta regla.

Observando el órden y magnitud de las cantidades de los ejemplos anteriores, se verá mejor lo demostrado, y tambien que los términos de una razon podrian tener otro órden si á los de la otra razon se les diera, pues lo mismo es $15 : 20 : : x : 24$, que $20 : 15 : : 24 : x$, que $24 : x : : 20 : 15$, que $x : 24 : : 15 : 20$.

**607.** Regla práctica por el método de reduccion á la unidad. *Si las cantidades relativas están en relacion directa con las principales, divídase la relativa conocida por la principal correspondiente, y el cociente multiplíquese por la principal correspondiente á la incógnita. Y si las relativas están en relacion inversa con las principales, multiplíquese la relativa conocida por la principal correspondiente, y el producto divídase por la principal correspondiente á la incógnita, y en uno y en otro caso se tendrá el valor de ésta.*

*Ejemplos.* 1.° Si 8 hombres consumen en un mes 6 barriles de vino, 5 hombres ¿cuántos consumirán?

*Resolucion.* Como las relativas están en relacion directa con las principales, pues ménos hombres consumirán ménos vino, será $\frac{6}{8} \times 5 = \frac{6 \times 5}{8} = 3\frac{3}{4}$ barriles.

2.° Si 8 hombres hacen en 6 dias una obra, 5 hombres ¿cuántos dias necesitarán?

*Resolucion.* Como ménos hombres necesitarán más dias para hacer la obra, la relacion entre hombres y dias es inversa, y será $\frac{8 \times 6}{5} = \frac{48}{5} = 9$ dias y $\frac{3}{5}$ de dia (= 9 dias, 14,4 horas).

**608.** *Demostracion y regla analítica.* En el primer ejemplo tenemos que si

8 hombres consumen en un mes 6 barriles de vino, 1 hombre solo (y de aquí toma el nombre la regla de reduccion á la unidad), consumirá en el mismo tiempo la octava parte de 6, ó sea $\frac{6}{8}$; y 5 hombres consumirán 5 veces lo que uno solo, ó sea $\frac{5}{8} \times 5 = \frac{30}{8} = 3$ y $\frac{3}{4}$. Y en el segundo ejemplo, si 8 hombres hacen una obra en 6 dias, 1 hombre sólo empleará un número de dias 8 veces mayor que 6, ó sea $8 \times 6$, y 5 hombres tardarán, un número de dias cinco veces menor que 1 solo, ó sea $\frac{8 \times 6}{6}$. Luego la regla práctica queda demostrada.

*Observacion*. Como puede conocerse, la regla práctica lo mismo puede convenir al método de reduccion á la unidad que al proporcional, pues por medio de proporciones pudimos haberla demostrado, y la verdadera regla del método de reduccion á la unidad es la que envuelve la demostracion anterior; pues enunciado el problema y haciendo las consideraciones semejantes á las hechas en tal demostracion, se resolveria, sin necesidad de conocer lo que son cantidades principales ni relativas, sin necesidad de la prévia investigacion de si los datos están ó no en relacion directa; pero se necesita mucha reflexion en ciertos problemas, por lo que no la creemos tan conveniente para todos como la proporcional.

## ARTÍCULO III.

### REGLA DE TRES COMPUESTA.

**609**. Problema general. *Dadas cinco ó más cantidades en número impar, homogéneas de dos en dos, y siéndolo la impar á una desconocida que con ella está en igual relacion que las cifras entre sí, determinar el valor de dicha cantidad desconocida.*

Solucion ó regla. *Colóquense en línea todos los términos hipotéticos, y debajo los correspondientes á la incógnita, cada cual bajo su homogéneo. Considérense los dos primeros principales, y el relativo, como si los cuatro estuvieran solos en el problema, y fórmese una proporcion por la regla de tres simple; pero poniendo en lugar de* x *para incógnita otra letra, por ejemplo,* z *para indicar que el resultado de esa proporcion no será el valor de la incógnita del problema, sino de otra que puede llamarse* provisional, *y sin determinar su valor, déjese planteada la proporcion. En seguida fórmese otra con los segundos términos principales, y la incógnita provisional* z, *considerada como relativa conocida, y otra incógnita provisional, por ejemplo,* v, *y déjese planteada tambien esa proporcion. Y análogamente, fórmense todas las proporciones que se necesiten para tomar en consideracion todos los términos del problema, debiendo en la última proporcion la incógnita ser* x, *para indicar que es la que se busca, segun el problema.*

*Planteadas las proporciones, multiplíquense todas entre sí, trasformando algunas que sea necesario para que cada dos incógnitas provisionales iguales queden una como antecedente y otra como consecuente, con lo que, simplificando, desaparecerán. Y últimamente, hállese el valor de* x *por el método de la regla de tres simple.*

*Ejemplo. Enunciado.* 15 hombres hacen 100 metros de muro en 20 dias; 10 hombres para hacer 80 metros, ¿cuántos dias necesitarán?

*Planteo.* 15 hombres : 10 hombres : : $z$ dias : 20 dias.

100 metros : 80 metros $z$ dias : $x$ dias = 80 m. : 100 : : $x$ dias : $z$ dias.

*Resolucion.* $15 \times 80 : 10 \times 100 : : z \times x : 20 \times z$.

y $1200 : 1000 : : x : 20$ y $x = \frac{1200 \times 20}{1000} = 24$ dias.

**610.** *Demostracion.* Refiriéndonos al ejemplo anterior, diremos que si 15 hombres en 20 dias hicieran la misma cantidad de muro que deben hacer 10, seria una regla de tres simple, y seria inversa, porque ménos hombres deberian tardar más dias, y se plantearia 15 : 10 : : $x$ : 20. Pero como la obra que los 10 hombres deben hacer no es la misma que los 15, el valor que se hallase á la incógnita por esa proporcion, no seria el de la incógnita del problema, sino de otra cuyo valor no necesitamos saber, pues no se trata de igual cantidad de obra. Por esa razon se le llama $z$ é incógnita provisional. Y como aun sin necesidad de conocer su valor, representa los dias que tardarian los 10 hombres si tuviesen que hacer la misma obra que los 15, podemos con ella, y con los dos términos que expresan la diferente cantidad de obra, formar otra regla de tres simple, que podria enunciarse, diciendo, si un número de hombres (10 hombres) hacen 100 metros de obra en $x$ dias, 80 metros, el mismo número de hombres, cuántos dias tardarán; y como ménos metros ménos dias emplearán, se planteará de este modo: 100 m. : 80 m. : : $z$ d. : $x$ d. Y como comparando esta proporcion con la anterior, vemos que entre ambas no hay más que una verdadera incógnita, que es $x$, pues la $z$, aun considerándola incógnita, estando en ambas se le puede hacer desaparecer (581), por esta razon se convierten las dos proporciones en una, con una sola incógnita, y queda la operacion reducida á la de una regla de tres simple. Y como lo mismo podria demostrarse si el problema tuviese más términos que obligasen á plantear mayor número de proporciones, la regla es general y queda demostrada.

**611.** *Observacion.* El llamar incógnitas provisionales á cantidades que áun sin determinar su valor se hacen figurar como relativas conocidas, es con objeto de simplificar la operacion, pues el mismo ejemplo podriamos resolverlo más acordemente con el espíritu de la demostracion, de la manera siguiente:

$$15 \text{ h.} : 10 \text{ h.} : : z \text{ dias} : 20 \text{ dias y } z = \frac{20 \times 15}{10} = \frac{300}{10} = 30 \text{ dias.}$$

Y siendo 30 los dias que 10 hombres emplearian en la obra, si fuese igual á la de los 15 hombres, podemos decir que si esos hombres, cuyo número no importa expresarlo, hacen en 30 dias 100 metros, cuántos dias tardarán tambien en hacer 80, y daria 100 : 80 : : 30 . $x$ y $x = \frac{30 \times 80}{100} = 24$ dias.

Lo que aunque parezca más sencillo, y lo es efectivamente en este ejemplo, no lo es en todos, y por eso la regla previene que no se halle el valor de las incógnitas provisionales para hacerlas desaparecer y hacer más cortas las multiplicaciones, que en problemas de muchos términos se harian pesadas.

**612.** *Regla práctica del método de reduccion á la unidad.* Colóquense en línea todas las cantidades de la hipótesis del problema, y debajo de ellas todas las correspondientes á la incógnita, incluso ella, quedando cada una de éstas debajo de su homogénea de la hipótesis. Pónganse más bajo una raya como para formar un gran quebrado, y sobre ella desde luego, como factor primero del numerador, el término relativo conocido, ó sea el homogéneo á la incógnita. En seguida considérense todos los términos del problema dos á dos, cada uno con su homogéneo, y véase si están en relacion directa ó inversa con los relativos. Los que estén en el primer caso, póngase el hipotético por factor del denominador, y el correspondiente por factor del numerador; y los que estén en relacion inversa, póngase el hipotético por factor del numerador y el correspondiente por factor del denominador. El quebrado resultante será igual á la incógnita del problema, cuyo valor se determinará realizando las operaciones indicadas en el quebrado que á ella es igual.

El mismo ejemplo anterior será

planteo 15 h. 100 m. 20 dias.
10 h. 80 m. $x$ dias.

resolucion $\frac{20 \times 15 \times 80}{10 \times 100} = x = 24$ dias.

**613.** *Demostracion y regla analítica.* Si consideramos primeramente los hombres y prescindimos de los metros de muro, como si los 10 hombres hubieran de hacer la misma obra que los 15, diríamos que si 15 hombres hacen la obra en veinte dias, un solo hombre tardará un número de dias 15 veces mayor que 20, ó sea $20 \times 15$, y 10 hombres tardarán un número de dias 10 veces menor que un solo hombre, ó sea $\frac{20 \times 15}{10}$. Este quebrado representa, pues, los dias que emplearán 10 hombres en hacer la misma obra que 15, ó sean 100 metros. Pero como no son 100 metros lo que los 10 hombres deben hacer, sino 80, claro es que un solo metro necesitará que los 10 hombres trabajen un número de dias 100 veces menor que para trabajar los 100, ó sea $\frac{20 \times 15}{10 \times 100}$ dias; y para hacer los 80 metros necesitarán trabajar un número de dias 80 veces mayor que para un solo metro, ó sea $\frac{20 \times 15 \times 80}{10 \times 100}$, quebrado que representará el valor de la incógnita; y como este es precisamente el que se consigue por la regla práctica anterior, ésta es general y queda demostrada.

**614.** *Observacion.* Como se puede observar, la regla práctica tanto puede convenir al método proporcional por el que se podrá demostrar, como al de reduccion á la unidad, y por lo tanto la verdadera regla de este método es la que envuelve la anterior demostracion, cuyas consideraciones áun tratándose de un ejemplo tan sencillo como el propuesto, dejarán ver fácilmente la razon por qué preferimos el método proporcional, pues la regla práctica, sencillísima ciertamente, lo mismo, repetimos, puede convenir á un método que al otro.

**615.** La prueba de la regla de tres se consigue suponiendo desconocida cualquiera de las cantidades conocidas del problema, despues de averiguado el valor de su verdadera incógnita, y viendo si el resultado corresponde al término cuyo valor se ha supuesto desconocido. Así, para probar si 24 dias son realmente los que corresponden al anterior problema, se plantea en estos términos:

15 h. 20 dias 100 m.
10 24 $x$

la prueba será $\frac{100 \times 10 \times 24}{15 \times 20} = 80$ metros.

Y análogamente y con mucha más facilidad la prueba de la regla de tres simple, sea una y otra por el método proporcional, sea por el de reduccion á la unidad.

Nota. En este segundo libro de Aritmética superior ó complemental no se ponen ejercicios, porque habiéndose ya manifestado por los del libro primero el método que conviene seguir, fácilmente los profesores pondrán los correspondientes ejemplos, que deberán ser muchos, relativamente á las reglas proporcionales.

# CAPÍTULO XII.

## OTRAS REGLAS PROPORCIONALES.

## ARTÍCULO PRIMERO.

### PRELIMINARES.

**616.** Ademas de la *regla de tres* hay otras, que aunque no se resuelven tan evidentemente como aquellas, por medio de proporciones, en las propiedades de éstas se fundan, por ellas pueden demostrarse, y por lo tanto se pueden llamar tambien proporcionales. Son, pues, las siguientes: *regla de interés simple; regla de interés compuesto; regla de descuento; regla de medios ó de término medio; regla de partes proporcionales; regla de compañía simple; regla de compañía compuesta; regla de aligacion y regla conjunta.*

## ARTÍCULO II.

### REGLA DE INTERÉS SIMPLE.

**617.** *Interés* se llama lo que produce un capital ó cantidad de dinero prestado; y es *simple* si se recibe realmente por el prestamista, y *compuesto* si no se recibe y se deja acumulado al capital.

Ese interés, lo paga naturalmente el que toma prestado el dinero, que puede ser un particular para salir de apuros más ó ménos pasajeros; ya un comerciante, ó compañía de comercio, ó industrial para acometer grandes empresas; ya el Estado para cubrir los déficits de sus presupuestos.

**618.** *Tanto por ciento* se llama el interés que producen en una unidad de tiempo, como un año, un mes, etc. (pero generalmente un año), cien reales ó cien pesetas, segun la unidad monetaria que se toma como principal por la ley ó por la costumbre, ó por el contrato que se hace. Llamándose *tanto por ciento legal* el cinco por ciento, que se expresa $^5|_{00}$ ó 5 $p^o/_o$, y *comercial* el seis por 100, que se expresa 6 $p^o/_o$ ó $^6/_{00}$.

**619.** Regla de interés simple. *Para determinar el interés que produce un capital en un año, sabiendo cuál es el tanto por ciento, se multiplica éste por el capital, y el producto se divide por* 100; y si se quiere saber el interés por más de un año, se multiplica el de un año por el número entero ó fraccionario de años de que se trata.

*Ejemplos.*

1.° 6745 pesetas á 5 por 100, ¿cuánto dan al año?

*Resolucion.* $\frac{6745 \times 5}{100} = 337{,}25$ pesetas.

2.° 6745 pesetas al 5 por 100, ¿cuánto produce en tres años y tres meses?

*Resolucion.* $\frac{6745 \times 5}{100} = 337{,}25$ pesetas al año.

y 3 años y 3 meses = 3,25 años.

Interés de los tres y $\frac{1}{4}$ años 1096,0625

Operacion auxiliar

$$\begin{array}{r} 337{,}25 \\ 3{,}25 \\ \hline 168625 \\ 67450 \\ 101175 \\ \hline 1096{,}0625 \end{array}$$

*Demostracion.* Porque como sabemos por el enunciado del problema, que 100 pesetas en el año producen 5, podemos formar la proporcion $100 : 5 :: 6745^p : x$, y como $x \times 100 = 5 \times 6745$, será $x = \frac{5 \times 6745}{100}$ (592). Y si este es el interés de un año, naturalmente el de 3 y $\frac{1}{4}$ será ese interés del año, multiplicado por 3,25 años. Y como lo mismo podriamos demostrar sobre cualquier otro ejemplo, la regla es general y queda demostrada.

**620**. *Escolio.* Es evidente que la anterior regla puede expresarse por medio de la fórmula $y = \frac{c \times i \times t}{100}$, llamando $y$ al interés, $c$ al capital, $i$ al tanto por ciento, y $t$ al tiempo de que se trate.

**621**. Regla complemental de interés simple. *Para determinar el capital que se necesita para producir un interés dado, en un tiempo determinado tambien, y con tanto por ciento marcado, se multiplica por* 100 *el interés, y el producto se divide por el producto del tanto por ciento, por el tiempo señalado, segun esta fórmula:* $c = \frac{100 \times y}{i \times t}$.

*Y para determinar el tanto por ciento que debe ganar un capital dado, para que en cierto tiempo produzca un interés marcado, se multiplica el interés por* 100, *y el producto se divide por el producto del capital, por el tiempo. esto es,* $i = \frac{100 \times y}{c \times t}$.

*Y finalmente, para determinar qué tiempo se necesitará para producir un interés dado, con un capital determinado y un tanto por ciento señalado, se multiplica el interés por* 100, *y el producto se divide por el del tanto por ciento por el capital, así* $t = \frac{100 \times y}{i \times c}$.

*Ejemplo.* Sobre el mismo anterior será

1.° Capital: $c = \frac{100 \times 1096{,}0625}{5 \times 3{,}25} = \frac{109606{,}25}{16{,}25} = 6745$ pts.

2.° Tanto por ciento: $i = \frac{100 \times 1096{,}0625}{6745 \times 3{,}25} = \frac{109606{,}25}{21921{,}25} = 5$ por 100.

3.° Tiempo: $t = \frac{100 \times 1096{,}0625}{5 \times 6745} = \frac{109606{,}25}{33725} = 3{,}25$ años.

*Demostracion.* Las tres partes de la regla complemental se deducen de la fórmula establecida (620) sobre la regla principal (619). Pues, en efecto, si la dicha fórmula, considerando todas sus letras como cantidades numéricas, pero manteniendo su expresion literal para evitar multiplicaciones inútiles en la demostracion, tendremos que $y = \frac{c \times i \times t}{100}$, y si suponemos que $y$ sea, como es, igual á $\frac{y}{1}$, tendremos $\frac{y}{1} = \frac{c \times i \times t}{100}$. Reduciendo estos quebrados iguales á un comun denominador, darán $\frac{y \times 100}{1 \times 100} = \frac{c \times i \times t \times 1}{1 \times 100}$, siendo esos quebrados iguales y sus denominadores idénticos, sus numeradores serán iguales y será $c \times i \times t = y \times 100$, y dividiendo los dos miembros de esta igualdad por $i \times t$, será $c = \frac{y \times 100}{i \times t}$, y como de esa misma igualdad se puede deducir $i = \frac{y \times 100}{c \times t}$, y tambien $t = \frac{y \times 100}{i \times c}$, resulta que para determinar el capital, el tanto por ciento ó el tiempo correspondiente á un interés dado, se puede obrar con sujecion á las fórmulas que establece la regla complemental que queda demostrada.

## ARTÍCULO III.

### REGLA DE INTERÉS COMPUESTO.

**622.** Regla práctica. *Para determinar el interés compuesto, correspondiente á un capital dado con tanto por ciento determinado, y en un tiempo marcado tambien, se determina primeramente el interés correspondiente á un año, el cual se suma al capital, y forma el capital correspondiente al interés del segundo año. Se determina éste, y se le suma análogamente al capital de este año, y se forma así el capital del tercer año; y así sucesivamente mientras no haya más años ni fraccion de año que considerar; y el capital resultante será el que se ha reunido en el tiempo dado, y el interés compuesto será la suma de los intereses anuales que se han añadido uno por uno al capital de cada año, ó mejor, la diferencia entre el capital primitivo y el obtenido.*

*Ejemplo.* Se desea saber el interés compuesto de 7560 pesetas al 6 por 100 en tres años y cuatro meses.

*Resolucion.* Interés del primer año: $y = \frac{7560 \times 6}{100} = 453,6.$

Capital al finar el primer año: 7560 pesetas $+$ 453,6 $=$ 8013,6.

Interés del segundo año: $y = \frac{8013,6 \times 6}{100} = \frac{48081,6}{100} = 480,82.$

Capital al finar el segundo año: 8013,6 $+$ 480,82 $=$ 8494,42.

Interés del tercer año: $y = \frac{8494,42\ 6 \times}{100} = \frac{50966,52}{100} = 509,665.$

Capital al finar el tercer año: 8494,42 $+$ 509,665 $=$ 9004,085.

Interés de los cuatro meses:

$$y = \frac{9004,085 \times 6 \times \frac{1}{3}}{100} = \frac{54024,51 \times \frac{1}{3}}{100} = \frac{18008,17}{100} = 180,0817.$$

| | |
|---|---|
| Capital al concluir el tiempo: 9004,085 $+$ 180,0817 $=$ | 9184,1667 |
| Capital primitivo........................................ | 7560 |
| Interés compuesto en los tres años y cuatro meses.. | 1624,1667 |

*Demostracion.* Demostrada (620) la regla para determinar el interés de un año, es evidente que tal interés, no recibiéndolo y añadiéndose al capital, debe formar otro de su suma para el interés del segundo año, y análogamente para los sucesivos; no siéndolo ménos que la diferencia entre el capital resultante y el que se tenia primitivamente, debe ser el interés compuesto de los intereses del tiempo trascurrido. Luego la regla práctica está demostrada.

**623**. *Observacion.* Esta regla práctica es, como se ha visto, bien sencilla, tratándose de pocos años; pero tratándose de muchos, las multiplicaciones son tantas y tan grandes, que la operacion resulta pesadísima, y susceptible por lo tanto, de equivocaciones, por lo que mejor es recurrir á los logaritmos, mientras por el álgebra no aprendemos otro método más conveniente.

## ARTÍCULO IV.

### REGLA DE DESCUENTO.

**624**. Descuento *se llama la cantidad que se da de ménos en un pago, que, debiendo hacerse en época determinada, se efectúa antes de cumplir el plazo.*

Por ejemplo, una letra que se toma en Madrid sobre París á seis meses vista, ó á seis meses fecha (que de ambos modos suelen comprarse las letras), si se quiere cobrar al mes, y en ello está conforme el que debe pagarla en París (pues no se le puede obligar á ello), da una cantidad de ménos por el favor que hace, y equivalente á lo que el dinero le produciria en su poder en los cinco meses más que podria tenerlo.

**625**. Regla usual. *Se determina el interés comercial convenido, correspondiente al capital ó cantidad que debe recibirse y al tiempo que se adelanta su pago, y ese será el descuento que debe hacerse á la cantidad que debe abonarse.*

*Ejemplo.* Una letra de 1500 pesetas, á seis meses vista, se desea cobrar en el acto de presentarla.

*Resolucion.*

Interés en seis meses $y = \frac{1500 \times 6 \times \frac{1}{2}}{100} = \frac{9000 \times \frac{1}{2}}{100} = \frac{4500}{100} = 45.$

Descuento 45 pesetas, cantidad que debe cobrarse $1500 - 45 = 1455$ pesetas.

*Demostracion.* Demostrada (620) la regla para determinar el interés, es evidente que el interés que se determine corresponder de descuento al capital, es el que arroje la operacion de esta regla, aunque no es completamente justo, como se dirá en seguida.

**626**. *Observacion.* No es efectivamente exacto que 45 pesetas sea el interés que produciria al 6 por 100 la cantidad que se entrega, pues ésta no es 1500, sino 1455, y á ésta debia arreglarse el cálculo; pero como el comercio no considera esa diferencia, damos como regla principal la anterior, y sólo como complemental la siguiente, aunque por lo dicho no sea de aplicacion.

Δ **627**. *Regla complemental.* Para determinar el descuento que justamente debe hacerse al adelantar un pago, se multiplica el capital por el tanto por ciento y por el tiempo que se adelanta el pago; y el producto se divide por 100, más el producto del tanto por ciento por el tiempo adelantado, ó sea segun la fórmula $d = \frac{c \times i \times t}{100 + i \times t}$.

*Ejemplo.*

El anterior será $d = \dfrac{1500 \times 6 \times \frac{1}{2}}{100 + 6 \times \frac{1}{2}} = \dfrac{9000 \times \frac{1}{2}}{100 \times 3} = \dfrac{4500}{103} = 43,68.$

*Demostracion.* Si 100 pesetas al año producen $i$, en un tiempo dado $t$ producirán $i \times t$, por lo que $100 + i \times t$ representará en lo que se habrán convertido 100 pesetas en $t$ tiempo; luego por una cantidad de $100 \times i \times t$, se deberá descontar $i \times t$, y se podrá formar una proporcion que diga: si á $100 + i \times t$ se debe descontar $i \times t$, á un capital cualquiera $C$ se le deberá descontar $x$, y será $100 + i \times t : i \times t :: c : x$ y $x = \dfrac{c \times i \times t}{100 + i \times t}$.

Luego la regla complemental queda demostrada.

## ARTÍCULO V.

### REGLA DE PARTES PROPORCIONALES.

**628.** Regla de partes proporcionales *es la que enseña ó dividir una cantidad dada en partes proporcionales á otras cantidades dadas tambien.*

Regla general. *Para dividir una cantidad en partes proporcionales á otras, se divide aquella por la suma de éstas, y el cociente se multiplica por cada una de estas mismas, con lo que se obtienen como productos las cantidades proporcionales deseadas.*

*Ejemplo.* 60000 duros de contribucion impone un general á una plaza que toma por asalto, con la condicion de que la han de pagar exclusivamente los seis mayores propietarios, segun la contribucion ordinaria que paguen.

El primero paga 5000 pesetas. El segundo 3500. El tercero 3400. El cuarto 3200. El quinto 3000. Y el sexto 2500.

*Resolucion.* $60,000 : (5000 + 3500 + 3400 + 3200 + 3000 + 2500) = 20600$

Al 1.º $\dfrac{60,000}{20600} \times 5000 = \dfrac{300.000000}{206000} = 14563,11$

Al 2.º $\dfrac{60000}{20600} \times 3500 = \dfrac{210000000}{20600} = 10194,17$

Al 3.º $\dfrac{60000}{20600} \times 3400 = \dfrac{204000,000}{20600} = 9902,91$

Al 4.º $\dfrac{60000}{20600} \times 3200 = \dfrac{192000000}{20600} = 9320,39$

Al 5.º $\dfrac{60000}{20600} \times 3000 = \dfrac{180000,000}{20600} = 8737,86$

Al 6.º $\dfrac{60000}{20600} \times 2500 = \dfrac{150000000}{20600} = 7281,56$

prueba 60000,00

**629.** *Observacion.* La cantidad repartible son duros, y las contribuciones pesetas, no habiendo necesidad de reducir los duros á pesetas, pues el resultado sería el mismo, pero las operaciones más pesadas.

*Demostracion.* Si llamamos $A$ la cantidad de 60000 duros que se debe repartir, y $b$, $c$, $d$, $m$, $n$, $p$ las cantidades de contribucion ordinaria que han de servir de guia para el reparto proporcional, y á las que se buscan $x$, $z$, $y$, $v$, $s$, $r$, indudablemente que podremos formar la série de razones iguales $b : x :: c : z :: d : y :: m : v :: n : s :: p : r$, ó bien $\frac{b}{x} = \frac{c}{z} = \frac{d}{y} = \frac{m}{v} = \frac{n}{s} = \frac{p}{r}$. Y como en toda série de razones iguales la suma de antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente es á su consecuente (590), será $\frac{b+c+d+m+n+p}{x+z+y+v+s+r} = \frac{b}{x}$ ó $= \frac{c}{z}$, ó $= \frac{d}{y}$ ó $= \frac{m}{v}$ ó $= \frac{n}{s}$ ó $= \frac{p}{r}$. Pero el consecuente de la primera razon $x + z + y + v + s + r$, es igual á la cantidad repartible, pues que todas las resultantes la deben componer; luego será $\frac{b+c+d+m+n+p}{A} = \frac{b}{x}$ ó $= \frac{c}{z}$, etc., y considerando las dos razones como quebrados, y siendo como son iguales, los productos de multiplicar sus términos en cruz tambien lo serán (194), y dará $(b + c + d + m + n + p) \times x = A \times b$ y $x = \frac{A \times b}{b+c+d+m+n+p}$ y análogamente $\frac{b+c+d+m+n+p}{A} = \frac{c}{z}$ dará $z = \frac{A \times c}{b+c+d+m+n+p}$ é $y = \frac{A \times y}{b+c+d+m+n+z}$.

Luego tendremos los valores de $x$, de $z$, de $y$ y de las demas incógnitas, haciendo lo que prescribe la regla que queda, por lo tanto, demostrada.

**630**. *Observacion.* Se simplifica mucho la operacion hallando primeramente el cociente de dividir $A$ por $b + c + d$, etc., y multiplicándolo despues por cada una de las cantidades $b$, $c$, etc.

## ARTÍCULO VI.

### REGLA SIMPLE DE COMPAÑÍA.

**631**. REGLA DE COMPAÑÍA *se llama la que enseña á determinar la ganancia ó pérdida que corresponde á cada uno de varios sócios que forman compañía de comercio ó empresa, proporcionalmente al capital diferente que aportaron ó al diferente tiempo que lo tuvieron empleado.*

**632**. La regla de compañía se divide en *simple* y *compuesta*. Simple, cuando la ganancia ó pérdida se ha de repartir proporcionalmente á capitales desiguales impuestos, pero todos durante el mismo tiempo, ó por tiempo desigual, pero con igual capital todos. Y es compuesta cuando los capitales impuestos son desiguales y desigual tambien el tiempo que lo tuvieron en poder de la compañía.

**633**. La regla de compañía es un caso particular de la regla de partes proporcionales del artículo anterior, tanto que el mismo ejemplo puede servir para ésta, sin más que cambiar los nombres que concretan las cantidades, diciendo, 60000 duros ó pesetas de ganancia ó pérdida, y 5000, 3500 duros ó pesetas, etc., de capitales impuestos que pueden ser duros para mayor verosimilitud; y los resultados serán las cantidades á repartir, que en esos negocios se llaman *dividendos*.

La demostracion es consiguiente la misma que la de su regla, y solo insistiremos en hacer observar que si el capital de todos los socios fuera igual, y el uno lo hubiera tenido dos años, el otro tres, el otro cinco, el otro cuatro, el otro nueve y el otro seis, á estos números deberian ser proporcionales las ganancias, como en el ejemplo lo son á los capitales.

*Ejemplo.* 20000 pesetas de ganancia se han de repartir entre cuatro socios que imponen igual capital, pero que el uno lo tuvo 2 años, el otro $1\frac{1}{2}$, el otro 9 meses y el otro 6 meses.

*Resolucion.* $\dfrac{20000}{2+1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = \dfrac{20000}{4\frac{3}{4}} = 4210\frac{10}{19}.$

Al 1.° $4210\frac{10}{19} \times 2 = 8421\frac{1}{19}$ pts. $\qquad \frac{1}{19}+\frac{15}{19}=\frac{16}{19}$

Al 2.° $4210\frac{10}{19} \times 1\frac{1}{2} = 6315\frac{15}{19}$ $\qquad \frac{34}{38}+\frac{10}{38}=\frac{44}{38}$

Al 3.° $4210\frac{10}{19} \times \frac{3}{4} = 3157\frac{34}{38}$

Al 4.° $4210\frac{10}{19} \times \frac{1}{2} = 2105\frac{10}{38}$ $\qquad \frac{16}{19}+\frac{44}{38}=\frac{32}{38}+\frac{44}{38}=\frac{76}{38}=2$

2

Prueba 20000 00

**634.** El comercio usa muchos métodos prácticos que enseña la aritmética llamada *mercantil*, que se comprenderán muy fácilmente conociendo las reglas y demostraciones que hemos dado. Haremos sobre ellos algunas indicaciones. Si en el ejemplo anterior, en vez de operar como lo hemos hecho, hubiéramos determinado la ganancia correspondiente al segundo, tomando las tres cuartas partes de la del primero, y la del tercero por la mitad de la del segundo, y la del cuarto por la cuarta parte de la del primero, tendriamos igual resultado, y en muchos casos más fácilmente. En este ejemplo no lo seria tanto. Veámoslo.

Al 1.° $8421\frac{1}{19}$ sus $\frac{3}{4} = 6315\frac{15}{19}$ al 2.°

Al 2.° $6315\frac{15}{19}$ su mitad $3157\frac{34}{38}$ al 3.°

Al 3.° $3157\frac{34}{38}$

Al 4.° $2105\frac{10}{38}$ que es la cuarta parte de $8421\frac{1}{19}$ del 1.°

## ARTÍCULO VII.

### REGLA COMPUESTA DE COMPAÑÍA.

**635.** Regla general. *Para determinar la ganancia ó pérdida que corresponde á varios socios que tienen en compañia capitales desiguales por tiempo desigual impuesto, se divide la cantidad total á repartir por la suma de los productos de los capitales de los socios, multiplicados por el tiempo que cada capital lleva de estar impuesto, y ese cociente, multiplicado por el producto de cada capital por el tiempo que está impuesto, dará lo que le corresponde á cada uno.*

*Ejemplo.* Tres socios; el primero, impuso 6000 pesetas por 2 años. El segundo, 5000 por 3 años. Y el tercero, 4000 por 5 años, y la ganancia total es de 50000

*Resolucion.* $6000 \times 2 + 5000 \times 3 + 4000 \times 5 = 47000$

Al 1.° $\frac{50000}{47000} \times 6000 \times 2$. . . . . . . . . . 12765,95

Al 2.° $\frac{50000}{47000} \times 5000 \times 3$. . . . . . . . . . 15957,44

Al 3.° $\frac{50000}{47000} \times 4000 \times 5$. . . . . . . . . . 21276,59

49999,98

Por los decimales despreciados 0,02

Prueba. . . . . . . . . . . . . . 40000,00

*Demostracion.* Como la regla de compañía simple se funda en la proporcional demostrada (628), y la única diferencia que hay entre la simple y la compuesta, es que en ésta, en lugar de cada capital, se pone el producto del mismo por el tiempo que ha estado impuesto, quedará ésta como aquella demostrada, si demostramos que las ganancias ó pérdidas no sólo son proporcionales, como vimos, á los capitales impuestos, ó á los tiempos porque se tuvieron, sino que son proporcionales tambien tales ganancias ó pérdidas á los productos de los capitales por el tiempo que estuviesen impuestos.

Para demostrarlo, llamaremos $C$ á un capital, $T$ al tiempo por que está impuesto, é $I$ á la ganancia ó pérdida correspondiente, y $c$ á otro capital, $t$ al tiempo porque esté impuesto, é $y$ á la ganancia ó pérdida correspondiente, y por un raciocinio análogo al de la regla de tres compuesta (609), diremos; si $C$ capital produce $I$, $c$ capital diferente, producirá $z$, ó sea lo que produciria el capital $c$ si el tiempo por el que estuviere impuesto uno y otro fuera el mismo. Y como á mayor capital corresponde mayor ganancia ó pérdida, será la regla de tres directa y la proporcion $C : c :: Y : z$. Despues diremos: si en $T$ tiempo, un capital (no importa cual) produce $z$, en $t$ tiempo cuánto producirá. Y como tambien la razon es directa, será $T : t :: z : y$. Multiplicando ordenadamente ambas proporciones (579), y haciendo desaparecer de la resultante el término $z$ comun, será $C \times T : c \times t :: Y : y$; luego las ganancias ó pérdidas son proporcionales á los productos de los capitales por el tiempo que estén impuestos, y la regla de compañía compuesta completamente acorde con la simple demostrada, lo estará tambien.

**636.** *Observacion.* El comercio suele usar un método práctico exacto que no deja de fundarse en la proporcionalidad de los datos con los resultados. Consiste en multiplicar los capitales por el tiempo que llevan impuestos, y á los productos considerarlos como verdaderos capitales, resolviendo el problema por la regla de compañía simple; pero que, como se verá fácilmente, no se hace otra cosa que multiplicar antes cantidades, que por el método ordinario se deben multiplicar despues, sin que haya economía de trabajo en la mayor parte de los casos.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Así, | 3000 | pesetas por 2 años. | Capital supuesto | 5000 |
| | 2000 | por 3 | Id. | 6000 |
| y | 5000 | por 4 | Id. | 20000 |
| Ganancia | 10000 | | Suma de capital | 32000 |

$$\text{Al } 1.^{\circ}\ \frac{10000}{32000} \times 5000 \ldots\ldots\ldots\ldots = 1875$$

$$\text{Al } 2.^{\circ}\ \frac{10000}{32000} \times 6000 \ldots\ldots\ldots\ldots = 1875$$

$$\text{Al } 3.^{\circ}\ \frac{10000}{32000} \times 20000 \ldots\ldots\ldots\ldots = 6250$$

$$\text{Prueba} \ldots\ldots\ldots\ 10000$$

# ARTÍCULO VIII.

## REGLA CONJUNTA.

**637.** Regla conjunta *se llama la que enseña á determinar el valor de una cosa por el conocimiento que se tiene de la relacion de su valor con el de otra.*

Esta operacion, que sirve para resolver problemas muy difíciles de la banca y del comercio, como cambios, pesos extranjeros, etc., se puede resolver por medio de proporciones, pues hasta su nombre indica que varias reglas de tres se reunen; pero aprenderemos otro medio más sencillo, y que no deja de ser proporcional; y lo razonaremos ó demostraremos suficientemente sin necesidad del auxilio del álgebra, supuesto que sabemos lo que es igualdad (64), y sus axiomáticas propiedades.

**638.** Regla general. *Fórmense tantas igualdades como permitan los términos conocidos del problema, que deben ser lo ménos cinco* (pues con tres sería una regla de tres simple), *poniendo por primer término de la primera igualdad la incógnita; haciendo que el segundo de ella sea de igual especie que el primero de la segunda, y que el segundo de ésta sea igual al primero de la tercera, etc.; y, en fin, que el segundo miembro de la última igualdad sea de la misma especie que la incógnita. En seguida se multiplican entre sí todos los primeros miembros, y entre sí tambien todos los segundos, y se tendrá otra igualdad, en cuyo primer miembro estará la incógnita multiplicada por todos los primeros miembros de las anteriores igualdades, y cuyo valor será el producto del segundo miembro, dividido por todos los primeros conocidos que se multiplicaron.*

*Ejemplo.* Si 4 arrobas de aceite se sabe valen 60 pesetas, ¿cuánto costarán 100 kilógramos, sabiéndose que 150 kilógramos componen 13 arrobas?

*Resolucion.*

$$
\begin{aligned}
x \text{ pts.} &= 100 \text{ kilóg.}\\
150 \text{ kilóg.} &= 13 \text{ arrob.}\\
4 \text{ arrob.} &= 60 \text{ pts.}
\end{aligned}
$$

$$x \times 150 \times 4 = 100 \times 13 \times 60 \text{ y } x = \frac{100 \times 13 \times 60}{150 \times 4} = 130 \text{ pts.}$$

*Demostracion.* Si multiplicamos los dos miembros de la primera igualdad por 150 kilógramos y por 100 los de la segunda, dejando indicadas las multiplicaciones, será $x$ pts. $\times$ 150 kilóg. $=$ 100 kilóg. $\times$ 150 kilóg.
y 150 kilóg. $\times$ 100 kilóg. $=$ 13 arrob. $\times$ 100 kilóg.
Y como estas dos igualdades tienen un miembro igual; los otros dos serán iguales entre sí, y darán $x \times$ 150 kilóg. $=$ 13 arrob. $\times$ 100 kilóg., que llamaremos cuarta igualdad, con relacion á las tres primitivas.

Comparándola en seguida con la tercera, si multiplicamos los dos miembros de ella por 13 arrob. $\times$ 100 kilóg., y los dos de la que llamamos cuarta por 4 arrob., tendremos

$x \times$ 150 kilóg. $\times$ 4 arrob. $=$ 100 kilóg. $\times$ 13 arrob. $\times$ 4 arrob.,
y 100 kilóg. $\times$ 13 arrob. $\times$ 4 arrob. $=$ 100 kilóg. $\times$ 13 arrob. $\times$ 60 pts.
Y como estas dos igualdades tienen tambien un miembro igual, los otros serán iguales, y darán, como quinta igualdad, $x \times$ 150 kilóg. $\times$ 4 arro-

bas $= 100$ kilóg. $\times$ 13 arrob. $\times$ 60 pts., y $x = \frac{100 \text{ kilóg.} \times 13 \text{ arrob.} \times 60 \text{ pts.}}{150 \text{ kilóg.} \times 4 \text{ arrob.}}$ $= 130$ reales y no kilógramos ni arrobas, porque en lo que llamamos cuarta igualdad consideramos ó pudimos considerar los kilógramos como multiplicador y los reales y arrobas como multiplicando, y por lo tanto $x \times 150$ debia ser reales y $13 \times 100$ debian ser arrobas. Y análogamente en la quinta igualdad podemos considerar las arrobas como multiplicador y los reales como multiplicando, y ser los productos reales. Y como lo mismo podríamos demostrar sobre cualquier otro ejemplo en que se obre segun la regla, ésta queda demostrada.

## ARTÍCULO IX.

### REGLA DE MEDIOS Ó DE PROMEDIO.

**639.** PROMEDIO *de varias cantidades desiguales entre sí todas ó algunas de ellas, se llama á la que expresa el valor que deberian tener, siendo iguales y produciendo igual suma que con su desigualdad componen.*

**640.** Para formarnos una idea exacta de lo que es promedio, recurriremos á ejemplos vulgares que se oyen todos los dias.

Cuando preguntamos á un tendero cuánto gana todos los dias, nos suele responder, *un dia con otro tres pesetas:* con lo que quiere decir que aunque algunos dias gana cuatro ó más, como otros gana tres ó ménos, al fin del mes su ganancia es igual á que todos los dias hubiera ganado tres pesetas.

Cuando un viajero nos pondera lo mucho que ha viajado durante un verano, suele decir que ha andado á razon de 50 leguas por dia, con lo que quiere decir, y así todo el mundo lo entiende, que aunque algunos dias haya estado parado y otros andando ménos de 50 leguas, otros dias habrá andado más, y el resultado del espacio ó distancia que ha recorrido es igual á que todos los dias hubiera andado 50 leguas.

Y en una esfera ménos vulgar, ó más científica, cuando decimos que los relojes marcan el tiempo medio y no el verdadero, queremos decir que, como los dias (astronómicos, ó sea el tiempo que medie entre un paso de sol por el meridiano y otro aparentemente, se entiende, pues, que es la tierra y no el sol el que se mueve), no son iguales, pues tienen unos minutos más ó ménos que otros, y los relojes deberán marcar las 12 ó 24 horas siempre iguales, marcan evidentemente la duracion de los dias si fueran iguales, ó sea su promedio.

**641.** La regla para hallar el promedio no es verdaderamente proporcional, y se trata de ella en este capítulo para completarlo con la siguiente de aligacion que en la *del promedio se funda, y que todos los autores enseñan junto á las de compañía y demas explicadas.*

**642.** Regla. *Para hallar el promedio de varias cantidades desiguales, todas ó algunas se suman todas sin omitir las repetidas ni las que sean* 0, *y la suma se divide por el número de las que se han sumado.*

*Ejemplo.* Un artesano, en los 30 dias de un mes, ha ganado 5 dias á razon de 4,5 pesetas; 6 dias á 3,4 pesetas; 1 dia á 7 pesetas; y otro 9 pesetas; 10 dias á $1\frac{1}{2}$ pesetas; 2 á 1 peseta, y 5 dias nada 0: ¿cuánto ganó un dia con otro, de los 30 que tiene el mes?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Resolucion.* | 5 dias | á 4,5 | $= 4,5 \times 5 =$ | 22,5 |
| | 6 id. | 3,4 | $= 3,4 \times 5 =$ | 17 |
| | 1 id. | 7 | | 7 |
| | 1 id. | 9 | | 9 |
| | 10 id. | $1\frac{1}{2}$ | $= 1,5 \times 10 =$ | 15 |
| | 2 id. | 1 | | 2 |
| | 5 id. | 0 | | 0 |
| | | | Suma de ganancias | 72,5 |

Gánanse un dia con otro $72,5 : 30 = 2,41$ pesetas.

**643**. *Demostracion*. Como la definicion del promedio y lo ejecutado en el anterior ejemplo segun la regla, y llevado al caso más complicado (relativamente á la calidad de los datos, aunque por su pequeñez la operacion sea sencilla), evidencian que sólo el cociente de la division de la suma de todos los datos por el número de ellos puede ser el número que multiplicado por el de datos dé una suma igual á la de las cantidades cuyo promedio se desea, la regla es general y queda demostrada.

## ARTÍCULO X.

### REGLA DE ALIGACION.

**644**. REGLA DE ALIGACION *se llama la que enseña á determinar el precio medio de una mezcla formada de varias partes de diferente valor, y tambien á determinar las partes de diferentes precios que pueden mezclarse para que la mezcla resulte con un valor medio deseado.*

Nos ocuparemos ahora sólo de la primera parte, pues que la segunda es más bien del dominio del álgebra.

**645**. Regla. *Multiplíquese el precio ó valor de cada parte por el número de unidades de magnitud que la representan; y sumando despues todos los productos y dividiendo la suma por el número de unidades de magnitud que componen todas las partes de la mezcla, se tendrá por cociente el valor que corresponde como término medio á cada una de dichas unidades.*

*Ejemplo*. En un tonel se ponen 100 litros de vino que costaron á 0,45 de peseta cada uno; 50 que costaron á 0,55 de peseta; 70 á 0,60 y 30 á 0,65, y se desea saber á cómo sale el litro para poder venderlo con una ganancia deseada.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Resolucion* | 100 lits. | á | 0,45 = | 45 pts. | | |
| | 50 | á | 0,55 = | 27,5 | | |
| | 70 | á | 0,60 = | 42 | | |
| | 30 | á | 0,65 = | 19,5 | | |
| Total de litros | 250 | Suma del costo | | 134 | 250 | |
| | | | | 90 | 0,536 | |
| | | | | 150 | | |
| | | | | 000 | | |

El costo medio del litro es, pues, 54 centésimos de peseta escasos, pues le falta 4 milésimos para completar.

*Ejemplo*. Un joyero ha fundido 3 kilógramos de oro de ley de 800 milésimos, con 5 kilógramos de 0,750 y 4 de 700, y desea saber cuál es la ley del oro resultante (por su mezcla de plata, que es á lo que se refieren las milésimas).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Resolucion.* | 3 kilóg. | á $\frac{800}{1000} = 3 \times 0,8 = 2,4$ | | |
| | 5 | á $\frac{750}{1000} = 5 \times 0,75 = 3,75$ | | |
| | 4 | á $\frac{700}{1000} = 4 \times 0,7 = 2,8$ | | |
| Suma de kilógramos | 12 | Suma de valores | 8,95 | 12 |
| | | | | 0,745833... |

La ley, pues, del oro resultado de la mezcla, es de 746 milésimos escasos, pues le faltan dos diezmilésimos y 0,00003333...

*Demostracion*. Fundada esta regla en la anterior del promedio, no podria darse otra demostracion que la dada á aquella, ofreciendo ademas los anteriores ejemplos la evidencia de que llena el objeto á que se destina.

---

# CAPÍTULO XIII.

## PROGRESIONES Y LOGARITMOS.

## ARTÍCULO PRIMERO.

### PRELIMINARES.

**646.** PROGRESION ARITMÉTICA *se llama una série de números tales, que cada uno es igual al que le precede más ó ménos una cantidad constante, llamada razon de la progresion; y progresion geométrica aquella en la que cada número es igual al que le precede, multiplicado por la razon;* llamándose *ascendentes* las progresiones cuyos términos van aumentando, y *descendentes* aquellas en las que van disminuyendo.

Viene, pues, á ser una progresion lo mismo que una série de proporciones continuas, en la que la segunda razon de una sirve de primera á la siguiente, suprimiendo por inútil la repeticion del término medio de cada proporcion.

**647.** SISTEMA DE LOGARITMOS *se llaman dos progresiones, una aritmética, que empieza por* 0, *y otra geométrica que empieza por* 1, *y que se corresponden término á término, llamándose en particular los de la progresion aritmética* LOGARITMOS (palabra que quiere decir *indicador*), *de sus correspondientes de la geométrica, á los cuales se les da el nombre de* NÚMEROS; *siendo, por lo tanto,* 0 *logaritmo de* 1, *y* 1 *número del logaritmo* 0. El escocés Neper fué el inventor de los logaritmos á principios del siglo XVII.

**648.** Las importantes propiedades de las progresiones y de los logaritmos, no pudiendo demostrarse de una manera completa ó general por la Aritmética, quedan bajo el dominio del álgebra, por más que sus aplicaciones sean más bien aritméticas que algebráicas, por lo que sólo daremos una idea de ellas y sus principales aplicaciones, sin lo que no consideraríamos completa esta Aritmética.

## ARTÍCULO II.

### PROGRESIONES ARITMÉTICAS.

**649.** Las progresiones aritméticas hemos dicho que pueden ser *ascendentes* ó *descendentes*, y añadiremos que ascendentes son aquellas en que cada término es igual al que le precede más la razon, y descendentes las en que cada uno de sus términos es igual al que le precede, ménos la razon.

**650.** El signo para expresar las progresiones aritméticas es ÷, colocado á su izquierda, y entre cada dos términos un punto. En esta forma:

$$\div\ 7\ .\ 9\ .\ 11\ .\ 13\ .\ 15\ .\ 17\ldots$$
$$\text{y} \div\ 7\ .\ 17\ .\ 27\ .\ 37\ .\ 47\ .\ 57\ldots$$
$$\text{y} \div 15\ .\ 12\ .\ 9\ .\ 6\ .\ 3\ .\ 0\ldots$$

leyéndose 7, es aritméticamente á 9, es á 13, es á 15, etc. Las dos primeras son ascendentes y la tercera descendente.

**651.** Por lo expuesto parece que las progresiones ascendentes son ilimitadas, y limitadas las descendentes; pero ni lo uno ni lo otro es rigorosamente exacto, pues aunque las ascendentes pueden prolongarse indefinidamente, como no son realmente en conjunto cantidades, ni aun indeterminadas, como, por ejemplo, los decimales periódicos, sino simplemente la expresion de la igual relacion que tienen entre sí varios números, solo los que se necesita considerar componen la progresion que puede considerarse completa. Y en cuanto á las descendentes, aunque la Aritmética no trata de cantidades negativas, podremos desde luego comprender, por lo que de ellas dijimos (80), que la tercer progresion podria prolongarse de este modo:

$$\div 15\ .\ 12\ .\ 9\ .\ 6\ .\ 3\ .\ 0\ .\ -3\ .\ -6\ .\ -8 \text{ etc.}$$

Esta progresion, para que se vea que viene á ser una série de proporciones continuas no hay más que considerar que es igual á $15 . 12 : : 12 . 9 : : 9 : 6 : : 6 : 3 : : 3 : 0 : : 0 : -3 : : -3 : -6$, etc.

**652.** Los principales problemas que se resuelven por las progresiones son dos: 1.°, hallar un término cualquiera, conociendo el primero, la razon y el número de términos que deben preceder al que se busca; 2.°, hallar la suma de todos los términos de una progresion de límites determinados.

Atendiendo al objeto de este capítulo, sólo nos ocuparemos del primero y de sus principales consecuencias.

**653.** Problema. *Hallar un término cualquiera de una progresion aritmética, conociendo el primero, la razon y el número de términos de la progresion, considerada completa con el término que se busca.*

*Solucion ó regla.* Llamando $a$ el primer término, $d$ la razon y $m$ el número de términos que deberán preceder al que se busca, que puede llamarse $l$, ejecútanse las operaciones que indica la siguiente fórmula: $l = a + (m \times d)$, y si la razon es negativa, la fórmula será $l = a - (m \times d)$.

*Ejemplo* 1.° Se desea saber cuál será el sexto término de una progresion, cuyo primero es 7 y la razon 2.

*Resolucion.* $x = 7 + (5 \times 2) = 17$.

Y en efecto, $\div 7 : 9 : 11 : 13 : 15 : 17$.

*Ejemplo* 2.° Se desea el término octavo de una progresion, cuyo primer término es 15 y la razon $-3$.

*Resolucion.* $x = 15 - (7 \times 3) = 15 - 21 = -6$.

Y en efecto, $15 . 12 . 9 . 6 . 3 . 0 . -3 . -6$.

**654.** *Demostracion.* La misma definicion de la progresion evidencia que si cada término ha de ser mayor ó menor que el que le precede en tantas unidades como tiene la razon, el producto de ésta por el número de términos que preceden al que se busca, debe ser lo que valdrá este más ó ménos que el primero, segun sea positiva ó negativa la razon de la progresion.

**655**. Corolario. *Conocidas de una progresion aritmética tres de estas cuatro cosas: primer término, razon de la progresion, un término cualquiera de ella*, que puede considerarse el último, *y el número de términos que deben precederle* (que, será de tantos, ménos uno, como deba tener la progresion), *se podrá determinar el valor de la otra, porque la fórmula* $l = a + (m \times d)$ *produce las siguientes:* $a = l - (m \times d)$ *y* $d = \frac{l-a}{m}$ *y* $m = \frac{l-a}{d}$ por las propiedades casi axiomáticas de las igualdades (64), y por un procedimiento ya demostrado (620). Y fórmulas semejantes para la progresion descendente.

En efecto; si en la igualdad $l = a + (m \times d)$ restamos á sus dos miembros $(m \times d)$, resultaria $l - (m \times d) = a + (m \times d) - (m \times d)$, y simplificado el segundo miembro, dará $l - (m \times d) = a$, que evidentemente es lo mismo que $a = l - (m \times d)$.

Y si á los dos miembros de esta igualdad sumamos $m \times d$, dará $a + (m \times d) = l - (m \times d) + (m \times d)$, y simplificado el segundo miembro, dará $a + (m \times d) = l$. Restando ahora á los dos miembros $a$, resultará $a + (m \times d) - a = l - a$; y simplificando el primer miembro, será $m \times d = l - a$; y si ahora dividimos por $m$ los dos miembros de esta igualdad y simplificamos el primero, dará $d = \frac{l-a}{m}$, y si lo dividimos por $d$, dará $m = \frac{l-a}{d}$.

Y análogamente, demostraríamos las fórmulas semejantes para las progresiones descendentes que se deducen de $l = a - (m \times d)$.

**656**. *Escolio*. Por la fórmula $d = \frac{l-a}{m}$ se pueden interpolar todos los términos que se quieran entre dos ó cada dos de una progresion; pues tales dos términos serán $l$ y $a$, y $m$ será el número de términos que se han de interponer, más 1 y $d$ la razon.

Así, para interpolar tres términos entre los 7 y 17 de la progresion ÷ 7 . 17 . 27, etc., diremos $d = \frac{17-7}{4} = 2{,}5$, y tambien $d = \frac{27-17}{4} = 2{,}5$. Y la nueva progresion será ÷ 7 . 9,5 . 12 . 14,5 . 17 . 19,5 . 22 . 24,5 . 27, etcétera.

## ARTÍCULO III.

### PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.

**657**. Las progresiones geométricas hemos dicho que pueden ser ascendentes y descendentes, y añadiremos que ascendentes son aquellas en las que cada término es igual al que le precede multiplicado por la razon, que debe ser mayor que la unidad; y descendentes las que cada uno de sus términos, es igual al que le precede multiplicado por la razon de la progresion, que debe ser menor que la unidad, pues multiplicada por cualquier número, dará un producto menor que él (658).

**658**. El signo para expresar las progresiones geométricas es ∺, antepuesto á ellas, y sus términos separados entre sí por el signo de la division, en esta forma:

$\div\div$ 8 : 16 : 32 : 64 : 128, etc., cuya razon es 2.

$\div\div$ 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : $\frac{1}{2}$ : $\frac{1}{4}$ : $\frac{1}{8}$ : $\frac{1}{16}$, cuya razon es $\frac{1}{2}$.

$\div\div$ 16 : 10 $\frac{2}{3}$ : 7 $\frac{1}{9}$ : 4 $\frac{20}{27}$ : etc., cuya razon es $\frac{2}{3}$.

leyéndose 8, es geométricamente á 16, es á 32, es á 64, etc., siendo la primera progresion ascendente y las otras descendentes.

**659**. Las progresiones geométricas, lo mismo que dijimos de las aritméticas, son ilimitadas, áun las descendentes, pues se pueden continuar con términos quebrados; pero como no representan cantidad en conjunto, se consideran limitadas y completas las que se componen de los números cuya comparacion se necesita.

**660**. Las progresiones geométricas vienen á ser una série de proporciones continuas, como se dijo (648); y en efecto, la primera de las anteriores equivale á la série 8 : 16 : : 16 : 32 : : 32 : 64 : : 64 : 128, etc.

**661**. Los principales problemas que se resuelven en las progresiones geométricas, son dos como en las aritméticas (652); y por las razones que en aquellas dimos, no nos ocuparemos más que del primero y de sus principales consecuencias.

**662**. Problema. *Hallar un término cualquiera de una progresion geométrica, conociendo el primero la razon, y el número de términos de la progresion, considerada completa con el término que se busca.*

Solucion ó regla. *Llamando* a *el primer término,* q *la razon de la progresion, y* m *el número de términos que deben preceder al que se busca y* l *á éste, ejecútense las operaciones que indica la siguiente fórmula* $l = a \times q^m$.

*Ejemplo* 1.° Se desea saber cuál será el término quinto de una progresion geométrica, cuyo primero es 8, y cuya razon es 2.

*Resolucion.* $l = 8 \times 2^4 = 8 \times 16 = 128.$

Y en efecto; $\div\div$ 8 : 16 : 32 : 64 : 128.

*Ejemplo* 2.° Se desea saber cuál es el cuarto término de una progresion descendente, cuyo primero es 16 y la razon $\frac{2}{3}$.

*Resolucion.* $l = 16 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 16 \times \frac{8}{27} = \times 4\frac{20}{27}.$

**663**. *Demostracion.* La misma definicion de la progresion geométrica evidencia, que si cada término ha de ser el producto del que le precede por la razon de la progresion, el que se busque deberá ser producto del primero por tantas veces la razon por factor como términos le preceden, ó sea *m* de exponente de la razon; pues en la primera progresion 8 : 16 : 32, etc., $16 = 8 \times 2$ y $32 = 16 \times 2$, ó sea $32 = 8 \times 2 \times 2 = 8 \times 2^2$, etc.

**664**. Corolario. *Conocidas de una progresion geométrica tres de estas cuatro cosas, primer término, razon de la progresion, un término cualquiera de ella* (que puede considerarse último), *y el número de términos que deben precederlo, que será de tantos ménos uno, como deba tener la progresion, se podrá determinar el valor del cuarto, porque la fórmula* $l = a \times q^m$ *produce las siguientes:* $a = \frac{l}{q^m}$ *y* $q = \sqrt[m]{\frac{l}{a}}$.

El valor de $m$ no se puede hallar aritméticamente.

En efecto; $l = a \times q^m$, y si dividimos los dos miembros de esa igualdad por $q^m$, y simplificamos el segundo, nos dará $\frac{l}{q^m} = a$, que es lo mismo que $a = \frac{l}{q^m}$. Y si los dos miembros de la fórmula $l = a \times q^m$ los dividimos por $a$ y simplificamos el segundo, nos dará $\frac{l}{a} = q^m$, y si ahora extraemos la raíz del grado $m$ de ambos miembros y simplificamos el segundo, será $\sqrt[m]{\frac{l}{a}} = q$ ó $q = \sqrt[m]{\frac{l}{a}}$.

**665**. *Escolio*. Por la fórmula $q = \sqrt[m]{\frac{l}{a}}$ se pueden interponer todos los términos que se quieran, entre dos ó cada dos de una progresion geométrica, pues tales dos términos serán $a$ y $l$, y por el número de los que se quieran interpolar se sabrá el valor de $m$, y por lo tanto el de $q$.

*Ejemplo*. Se desea interpolar dos términos entre los dos 8 y 16 de la progresion 8 : 16 : 32, etc., ó entre 16 y 32, será $q = \sqrt[3]{\frac{32}{16}} = \sqrt[3]{2} = 1,2$ y residuo de 0,272, que producirá un decimal ilimitado, por lo que el valor de los términos que resulten con esa razon no serán exactos, y solo proponemos este ejemplo para hacer observar que aun siendo $m = 3$ no se halla el valor de $q$ exactamente, por lo que más difícil será hallarlo, siendo $m$ igual á otro número: inexactitud del resultado de esa fórmula, que debemos considerar despues.

## ARTÍCULO IV.

### PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS.

**666**. Primera y fundamental. Teorema. *El logaritmo correspondiente á cualquier número, es igual á tantas veces por sumando la razon de la progresion aritmética á que pertenece, como veces contiene por factor el tal número á la razon de la progresion geométrica á que corresponde.*

**667**. Esta propiedad fundamental de los logaritmos es lo que llamó la atencion á su inventor Neper y le hizo comprender las grandes ventajas que para el cálculo tendria el empleo de ellos.

**668**. *Demostracion*. Sean los sistemas de logaritmos que se quieran, por ejemplo, los siguientes:

1.° ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 etc.
÷ 0 · 1 · 2 · 3 · 4 etc.

2.° ∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 etc.
÷ 0 · 2 · 4 · 6 · 8 etc.

sistemas que no sólo pueden prolongarse hácia la derecha, sino hácia la izquierda, en esta forma:

1.° ∺ 0,0001 : 0,001 : 0,01 : 0,1 : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000
÷ — 4 · — 3 · — 2 · — 1 · 0 · 1 · 2 · 3 · 4

2.° ∺ $\frac{1}{81}$ : $\frac{1}{27}$ : $\frac{1}{9}$ : $\frac{1}{3}$ : 1 : 3 : 9 : 27 : 81 etc.
÷ — 8 · — 6 · — 4 · — 2 · 0 · 2 · 4 · 6 · 8

sistemas cuyos términos descompuestos en los sumandos y factores de que respectivamente se componen, con relacion á la razon de sus progresiones, dará:

1.° $\div\ \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} : \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 10 \times 10 : 10 \times 10 \times 10.$

$\div -1 -1 -1 \cdot -1 -1 \cdot -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 + 1.$

2.° $\div\ \frac{1}{3 \times 3 \times 3} : \frac{1}{3 \times 3} : \frac{1}{3} : 1 : 3 : 3 \times 3 : 3 \times 3 \times 3.$

$\div -2 -2 -2 \cdot -2 -2 \cdot -2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 + 2.$

cuya simple inspeccion demuestra la verdad del enunciado del teorema.

**669**. Teorema. *El logaritmo correspondiente á un número producto de dos ó más, es igual á la suma de los logarítmos de sus factores.*

*Demostracion.* Descompuestos los términos de un sistema cualquiera de logaritmos, v. gr., el primero de los anteriores en los sumandos y factores iguales á la razon de las progresiones de que se componen, como los hemos descompuesto para el teorema anterior, se ve que cada logaritmo tiene tantas unidades como factores iguales á la razon de la progresion geométrica tiene el número correspondiente, y por lo tanto que cada logaritmo puede considerarse, segun indica su nombre (647), como simple indicador de los factores iguales que tiene su *número* correspondiente. Y como el producto de dos números compuestos de factores iguales se compondrá necesariamente de tantos como tienen ambos juntos (pues 10 multiplicado por $10 \times 10 = 10 \times 10 \times 10$), y ese número de factores lo indican sumados los correspondientes logaritmos de los números que componen el producto, queda demostrado el teorema con relacion á este sistema; pues en efecto, $10000 = 100 \times 100$ será logaritmo de $10000 = 4$, que es logaritmo $100 = 2 +$ logaritmo $100 = 2$.

Y refiriéndonos á otro sistema de logaritmos cualquiera, por ejemplo, el segundo de los expuestos en el anterior teorema; descomponiendo sus términos en los sumandos y factores de que se componen, se verá que si cada logaritmo no dice con sus unidades los factores que tiene el número correspondiente, lo indica análogamente con los sumandos de que se compone, y por lo tanto la suma de dos logaritmos tendrá tantos sumandos iguales á la razon aritmética como factores iguales á la razon geométrica tendrá el producto de los números. Y en efecto, $81 = 27 \times 3$ dará log. de $81 = 8 =$ log. de $27 = 6 +$ log. de $3 = 2$, ó sea log. de $3 \times 3 \times 3 \times 3$, que es $2 + 2 + 2 + 2$ igual á log. de $3 \times 3 \times 3$, que es $2 + 2 + 2$ más log. de 3, que es 2. Y como lo mismo se demuestra por cualquier otro sistema, y lo mismo tratándose de muchos factores, pues cada dos se pueden convertir en uno, el teorema es general y queda demostrado.

**670**. Corolario 1.° *El logaritmo correspondiente á un cociente de una division es igual al logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor.* Porque como todo dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, y acabamos de demostrar que el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores, el logaritmo del dividendo que represente su producto será igual al logaritmo del divisor, más el logaritmo del cociente, y consiguientemente el logaritmo del cociente igual al del dividendo ménos el del divisor. Y en efecto, si log. de 81 = 8 es igual á la suma de los logaritmos de 27 y 9, que con 6 y 2, tendremos que $8 = 6 + 2$, y restando 6 á los dos miembros de la igualdad y simplificando el segundo, será $8 - 6 = 6 + 2 - 6$ y $8 - 6 = 2$.

**671.** Corolario 2.° *El logaritmo correspondiente á la potencia de un número es igual al logaritmo de tal número, multiplicado por el exponente de la potencia.*

Porque como toda potencia se compone de tantos factores iguales al número de que es producto, como tiene unidades su exponente, y el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores, y lo mismo es sumar factores iguales que multiplicar uno por las veces que esté repetido, resulta evidente la consecuencia del anterior teorema.

Y en efecto, el logaritmo de $9^2 = 81$, que es 8, es igual al logaritmo de 9, que 4, multiplicado por 2, que es el exponente de la potencia, pues lo mismo es sumar log. de 9 con log. de 9, que duplicar uno de ellos.

**672.** Corolario 3.° *El logaritmo de la raiz de un número es igual al logaritmo de tal número, dividido por el índice de la raiz.*

Porque si el log. de $9^2 = 81$, que es 8, es igual al logaritmo de 9 que es 4, multiplicado por 2; el logaritmo de $\sqrt{81}$ debe ser el de 81 que es 8, dividido por 2, que da 4 cuyo número es 9.

## ARTÍCULO V.

### DIFERENTES SISTEMAS DE LOGARITMOS.

**673.** Los sistemas de logaritmos que pueden considerarse son en número infinito, porque aun atendiendo á la circunstancia indispensable de que la progresion aritmética empiece por 0 y la geométrica por 1, son en número infinito las progresiones que pueden formarse, segun la diferente razon que se tome en cada una; y por este motivo se llama *base* de un sistema al número que tiene por logaritmo la unidad, porque ese determina la razon de su progresion y fija la de la correspondiente.

**674.** Dos sistemas de logaritmos solamente han sido hasta ahora empleados de todos los que pueden y han podido imaginarse y emplearse, el *neperiano*, llamado así por el nombre de su autor *Neper*, y tambien hiperbólico (por una propiedad de una línea curva llamada hipérbole, que tiene relacion con él), y el vulgar ó de *Brigg*, que es el que se emplea en los cálculos.

**675.** El sistema neperiano es el siguiente:

$$\div\div 1 : 1 + x : (1 + x)^2 : (1 + x)^3, \text{ etc.}$$
$$\div 0 \,.\, x \,.\, 2x : : 3x, \text{ etc.}$$

Su base, como se demuestra en el álgebra, es $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

**676.** El sistema de Brigg es el siguiente, que ya hemos expuesto:

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000$$
$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$$

cuya base es evidentemente 10, razon ademas de la progresion geométrica, siendo 1 la de la aritmética.

677. Para que este sistema pudiera prestar alguna utilidad en los cálculos, hubo que interpolar medios entre cada dos términos de él, á fin de que los *números* fuesen todos los enteros comprendidos entre los expresados, pues las operaciones de los números compuestos de la unidad con ceros son fáciles sin necesidad de la ayuda de los logaritmos.

678. Para esa interpolacion, fundándose en las fórmulas que conocemos (656 y 665), se interpolaron entre 1 y 10 en gran número de medios geométricos, é igual número entre sus correspondientes de la progresion aritmética 0 y 1, y análogamente entre 10 y 100 y entre 1 y 2, y se obtuvo otra progresion de términos ménos diferentes. En seguida se interpolaron otros entre los términos hallados, y así se consiguió que algunos de la progresion geométrica fueran *casi iguales* á 1, 2, 3, 4, etc., aunque no exactamente (pues ya observamos (665) que la razon tiene que ser un decimal ilimitado) con lo que se obtuvo el sistema conveniente con todos los números naturales hasta el límite que se creyó conveniente alcanzar, desatendiendo para formar las Tablas, como despues veremos, todos los términos de la progresion geométrica que no fueron casi iguales á los números naturales, y consiguientemente sus correspondientes logaritmos.

## ARTÍCULO VI.

### PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS VULGARES.

Antes de exponer las propiedades de los logaritmos vulgares ó de Brigg, daremos algunas definiciones.

679. NÚMEROS RECÍPROCOS *se llaman los que resultan de operaciones contrarias y regresivas de una misma cantidad y* 0 *ó la unidad, pues que la multiplicacion y division por* 0 *da siempre* 0.

Así, 10 es recíproco de 0,1, porque $1 \times 10 = 10$ y $1 : 10 = \frac{1}{10} = 0{,}1$; y 5 es recíproco de 0,2, porque $1 : 5 = \frac{1}{5} = 0{,}2$, y $1 \times 5 = 5$; y $\frac{4}{5}$ es recíproco de $\frac{5}{4}$, porque $1 : \frac{4}{5} = \frac{5}{4}$, y $1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$, y aun $+4$ es recíproco de $-4$, porque $0 + 4 = 4$ y $0 - 4 = -4$. Pero en logaritmos solo se llaman recíprocos los productos y cocientes de cualquier número por la unidad, pues los resultados de la suma y resta de una cantidad sobre 0 se llaman complementales, porque se destruyen mútuamente, pues $-4 + 4 = 0$, lo que no sucede con los otros recíprocos por multiplicacion ó division.

680. *Complemento logarítmico* á 0 es, pues, otro logaritmo exactamente igual, pero de signo contrario, y que lo destruye, ú otro equivalente que lo destruya igualmente, y se escribe de este modo: $c_0$ log.

Así, $c_0$ log. de $24{,}56 = -24{,}56$ ú otro equivalente á este, que despues veremos cómo encontrarlo más á propósito para el cálculo.

681. Tambien se llama complemento logarítmico á 10, que se escribe $C_{10}$ log. á otro logaritmo que, sumado con él, produce 10.

682. Finalmente, se llama *característica* de un logaritmo á su parte entera, y *mantisa* á su parte decimal.

683. Lema. *El logaritmo de un número expresado por la unidad con ceros á la derecha ó á la izquierda* (es decir, entero ó decimal, como 10, 100, 1000 y 0,1, 0,01, 0,001), *tiene cero de mantisa y una característica con tantas unidades ménos una, como ceros acompañan á la unidad á la derecha, ó una más si los tiene á la izquierda por ser decimal, en cuyo caso dicha característica será negativa, y recíprocamente, etc.*, porque lo evidencia la simple inspeccion del sistema fundamental de Brigg

$$\because\!\!\because\ 0{,}01 : \ 0{,}1 : 1 : 10 : 100$$
$$\div -2 \ . -1 \ \ 0 . 1 . 2$$

**684**. Lema. *El logaritmo de todo número mayor de 1 y que no sea la unidad con ceros, tiene mantisa significativa y característica con tantas unidades ménos una como cifras el número; y, por lo tanto, cero de característica todos los números dígitos.*

Porque la inspeccion del sistema evidencia que todos los números mayores de 1 y menores de 10, ó sean todos los dígitos, deben tener un logaritmo mayor que 0 y menor que 1, y será, por lo tanto, un decimal propio ó con 0 enteros; que todos los números mayores que 10 y menores que 100, ó sean los compuestos de dos cifras, deben tener un logaritmo mayor que 1 y menor que 2, y será, por lo tanto, un decimal mixto cuyo entero será 1, y análogamente todos los números superiores.

**685**. Recíprocamente el número correspondiente á un logaritmo con mantisa, será un número diferente á la unidad con ceros, y tendrá tantas cifras en su parte entera, ménos una, como unidades tenga su característica positiva, y será un dígito si la característica es 0.

**686**. Lema. *El logaritmo de todo número menor que la unidad es igual, aunque de signo contrario, ó sea negativo, al logaritmo del número recíproco, y tendrá mantisa significativa, si no se compone de sólo una unidad decimal, como*

0,1 ó 0,01, *etc.*

Porque, no sólo lo evidencia la inspeccion del sistema, pues se ve que logaritmo de 10 es 1 y —1 el de 0,1 sino que cualquier otro número, por ejemplo, 0,2 tendrá el mismo logaritmo que su recíproco 5; pues siendo medios proporcionales respectivamente entre 1 y 10 y entre 1 y 0,1, deben tener logaritmos medios proporcionales que sean tambien recíprocos ó complementales.

**687**. *Observacion.* La anterior verdad no tiene importancia más que en el sentido teórico para formarse idea más cabal de los logaritmos, pero no tiene aplicacion, porque los logaritmos negativos no se emplean en los cálculos, al ménos con mantisa negativa, ni los traen las Tablas; y la razon es, no sólo por lo embarazoso de su empleo, sino porque son completamente inútiles, como se deduce del mismo anterior lema, y se comprenderá mejor por los siguientes:

**688**. Lema. *Todo logaritmo negativo es igual ó equivalente á otro de característica negativa, aumentado de una unidad, y característica positiva igual á la diferencia entre la negativa y un entero.*

*Demostracion.* Porque si tenemos log. —0,698970, y le sumamos, —1 + 1 su valor no variará y será —1 + 1 —0,698970, y verificando la operacion que indica el signo que separa los dos últimos términos + 1 — 0,698970, dará — 1 + 0,301030, expresion que es evidentemente igual á $\overline{1}$,301030 con el signo sobre la característica para indicar que sólo afecta á ella. Luego el teorema queda demostrado.

**689**. *Corolario* 1.° Luego para convertir un logaritmo negativo en otro que puede llamarse mixto, ó sea de característica negativa y mantisa positiva, se le añadirá á aquella una unidad, y todas las cifras de la mantisa se restarán de 9 ménos la última significativa de la derecha, que se restará de 10. Así en el ejemplo anterior dijimos ó pudimos decir 0 de característica, aumentada de una unidad da — 1 y de 0 á 0 va 0, de 7 á 10 van 3, de 9 á 9 va 0, de 8 á 9 va 1, de 9 á 9 va 0, y de 6 á 9 van 3. Y por lo tanto, dará $\overline{1}$,301030 = — 0,698970.

**690**. *Corolario* 2.° Como los logaritmos con mantisa negativa no se emplean en los cálculos, para hallar el complemento logarítmico con mantisa positiva, sea el logaritmo positivo, sea mixto, como le hemos llamado, ó de característica negativa (y no á uno sin mantisa, porque su complemento es el mismo con signo contrario) (680), se le muda el signo á la característica, agregándole —1, y todas las cifras de la mantisa se restarán de 9 ménos la última significativa de la derecha, que se restará de 10; pues esta operacion equivaldrá á las de cambiar el signo á todo el logaritmo para que sea complemento, y á convertirlo despues en mixto ó de mantisa positiva por el anterior corolario.

*Ejemplos.* 1.º

$$\begin{array}{rr} \text{log.} & 2,54976 \\ c_0\,\text{log.} & \overline{3},45024 \\ \hline \text{prueba} & 0,00000 \end{array}$$

2.º

$$\begin{array}{rr} & 0,5764.5 \\ c_0\,\text{log.} & \overline{1},4235.5 \\ \hline \text{prueba} & 0,00000 \end{array}$$

3.º

$$\begin{array}{rr} \text{log.} & \overline{3},45675 \\ c_0\,\text{log.} & 2,54325 \\ \hline \text{prueba} & 0,00000 \end{array}$$

4.º

$$\begin{array}{rr} & \overline{1},30758 \\ c_0\,\text{log.} & 0,69242 \\ \hline \text{prueba} & 0,00000 \end{array}$$

**691.** Teorema. *La diferencia entre dos logaritmos es igual á la suma del minuendo y el complemento aritmético logarítmico del sustraendo.*

*Demostracion.* Aun por lo poco que sabemos sobre cantidades positivas y negativas (80), podemos decir que el sustraendo por ser tal, aunque sea positivo, adquiere el carácter negativo ó contrario al del minuendo, al que ha de destruir total ó parcialmente; y como el complemento logarítmico de un logaritmo es uno igual, pero de signo contrario, claro es que á la resta del sustraendo debe equivaler la suma de su complemento logarítmico.

Y en efecto, $\begin{array}{r} 5,43274 \\ -\,3,52472 \\ \hline =1,90802 \end{array}$ es lo mismo que $\begin{array}{r} 5,43274 \\ +\,\overline{4},47528 \\ \hline =1,90802 \end{array}$

**692.** La demostracion del anterior teorema es muy fácil darla algebráicamente; mas siendo el objeto de este capítulo el hacer comprender la esencia de las verdades por medios aritméticos ménos abstractos que los algebráicos, hemos dado la demostracion en términos poco científicos y que á muchos no parecerán convincentes.

**693.** Teorema. *El logaritmo de un número tiene igual mantisa que el logaritmo del mismo, multiplicado ó dividido por la unidad seguida de ceros, y la característica aumentará ó disminuirá respectivamente en una unidad por cada cero que acompañe á la unidad que sirve de multiplicador ó divisor, convirtiéndose en negativa cuando el número por la division se convierte en quebrado.*

*Demostracion.* Vamos á demostrar que los logaritmos de 5, de 50, de 500, etc., y los de 0,5, de 0,05 y de 0,005, etc., tienen igual mantisa que suponemos (pues no conocemos las Tablas todavía) que es 0,698970, y que la característica que de 5 es 0, de 50 será 1, de 500 será 2, y de 0,5 será — 1, de 0,05 será — 2 y de 0,005 será — 3.

Para ello diremos que como $50 = 5 \times 10$, logaritmo de 50 será igual á logaritmo de 5, más logaritmo de 10 (669), pero el logaritmo de 10 es 1 de característica y 0 de mantisa; luego al logaritmo de 5 sólo habrá que sumar 1 á su característica y 0 á su mantisa, que la dejará sin variacion. Y análogamente como $500 = 5 \times 100$, logaritmo de 500 = logaritmo de 5 + logaritmo 100, y como éste no tiene mantisa, sólo su característica 2, habrá que sumar á la de 5.

Finalmente, como 0,5 es el cociente de dividir 5 por 10, pues $\frac{5}{10} =$ 0,5, el logaritmo de 0,5 deberá ser igual al logaritmo de 5 ménos el logaritmo de 10 (670); pero el de 10 no tiene mantisa, luego sólo á la característica del logaritmo de 5 habrá que restarle la del logaritmo de 10 que es 1, y la mantisa no variará.

Para ver esto más claro, supuesto que restar 1 de 0 enteros y un decimal, áun por lo poco que sabemos de cantidades negativas (80), debe ser restar el verdadero minuendo del sustraendo, que dará una resta decimal negativa, diremos que como todo logaritmo negativo se puede convertir en otro de mantisa positiva, y característica negativa aumentada de una unidad (688), y los logaritmos con mantisa negativa no se emplean en los cálculos (690), y la diferencia entre dos logaritmos es igual á la suma del logaritmo del minuendo, y el complemento logarítmico del sustraendo será, pues, log. de 0,5 = log. de 5 + $\text{comp}_0\, l$ de 10, que es $-1$ sin mantisa (680); luego la del 5 no puede variar, y sólo á la característica de 5, que es 0, habrá que sumar $-1$, que evidentemente dará $-1$. Y como análogamente demostraríamos que el log. de 0,05 tiene igual mantisa que el de 5 y de característica $-2$, ó sea con tantas unidades como ceros acompañan á la unidad, que debe considerarse al divisor que puede suponérsele á 5 para producir 0,05, el teorema es general y queda demostrado.

**694**. *Corolario.* Del anterior teorema se deduce la verdad del siguiente cuadro:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Número | 5000 | Logaritmo | 3,698970 |
| Núm. | 500 | Log. | 2,698970 |
| Núm. | 50 | Log. | 1,698970 |
| Núm. | 5 | Log. | 0,698970 |
| Núm. | 0,5 | Log. | $\bar{1}$,698970 |
| Núm. | 0,05 | Log. | $\bar{2}$,698970 |
| Núm. | 0,005 | Log. | $\bar{3}$,698970 |

Y por lo tanto, que así como la característica positiva dice con sus unidades más una, de cuántas cifras consta el número á que corresponde el logaritmo de que forma ella parte, así la característica negativa dice por serlo que el número correspondiente es menor que la unidad, y con sus unidades ménos una cuántos ceros hay entre el signo decimal del número y la primera cifra significativa de su decimal.

**695**. *Corolario* 2.° El logaritmo de un decimal es igual en mantisa al del entero que resulte de suprimirle el signo decimal, y su característica será negativa y con tantas unidades más una como ceros haya entre el signo decimal y la primera cifra significativa del decimal propuesto. Y el logaritmo de un quebrado comun será el mismo que el del decimal correspondiente á que puede reducirse, ó al logaritmo de la suma del logaritmo del numerador y el complemento logarítmico del denominador.

---

# CAPÍTULO XIV.

## APLICACIONES PRINCIPALES DE LOS LOGARITMOS.

### ARTÍCULO PRIMERO.

#### PRELIMINARES.

696. La naturaleza y principales propiedades de los logaritmos nos son ya conocidas, y fáltanos aprender sus más importantes aplicaciones y consiguientemente la manera de obtenerlos por las Tablas que los contienen.

697. *Tablas de logaritmos* son una coleccion de cuadros que contienen todos los números naturales desde 1 hásta cierto límite que se estima suficiente, con todos los logaritmos correspondientes, dispuestos de manera que sea posible hallar tambien los logaritmos de todos los números imaginables por grandes que sean, y aun los de los números menores que la unidad; aprovechando para ello, no sólo las ventajas que puede ofrecer el mecanismo de la construccion de las Tablas, sino tambien las propiedades de los logaritmos que hemos considerado.

698. Las Tablas de logaritmos más conocidas son las españolas de *Vazquez-Queipo* y las de *Calvet* y las francesas de *Callet* y las de *Lalande*. A las primeras debe darse justa preferencia por su ingeniosa y sencilla composicion y su reducido volúmen, á pesar de contener los logaritmos de todos los números enteros hasta 20,000 exclusive, con seis cifras decimales en la mantisa.

Las de *Calvet* contienen los logaritmos de los números hasta 100000; las de *Lalande* hasta 10000, y hasta 108000 las de *Callet*, teniendo todas tres las mantisas con siete cifras decimales.

699. El mecanismo de la construccion de las Tablas y su manejo, se explica en todas ellas en su introduccion, recomendándose las de *Vazquez-Queipo* por lo comprensible, á pesar de emplear el método analítico tan inconveniente para los jóvenes que no tienen su inteligencia completamente desarrollada; y porque comprendida la explicacion de esas Tablas, fácilmente se comprende la explicacion de cualesquiera otras. Inútil es, por lo tanto, el que enseñemos detalladamente su manejo en este capítulo, por lo que expondremos solamente las reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir los logaritmos, y despues trataremos de la resolucion del problema general dado un número, buscar su logaritmo y el recíproco; y finalmente, aprenderemos las operaciones principales por medio de los logaritmos.

## ARTÍCULO II.

### SUMA, RESTA, MULTIPLICACION Y DIVISION DE LOGARITMOS.

**700.** Los logaritmos se suman, se restan, se multiplican y dividen como los decimales, y la sola diferencia á que hay que atender es á la del caso en que todos los datos ó algunos tengan la característica negativa; pues si la mantisa lo fuere, ya sabemos (688) que se debe convertir en positiva.

**701.** Regla 1.ª *Para sumar logaritmos positivos, se suman como los decimales; y cuando todos ó algunos tienen característica negativa, se prescinde de ella ó se suman aparte si son varias, y luego se deduce de la característica de la suma de toda la parte positiva de los sumandos, qué característica positiva ó negativa corresponde á la suma, por la diferencia que haya entre la característica positiva de la suma efectuada y la negativa de las características que no se sumaron ó se sumaron aparte.*

$$\begin{array}{rr} \textit{Ejemplo.}\ \text{Logaritmo} & 1{,}345789 \\ \text{Log.}\ + & \bar{2}{,}732504 \\ \text{Log.}\ + & \bar{3}{,}576458 \\ \text{Log.}\ + & 2{,}007543 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Log.} = -5 + 4{,}662294 = \bar{1}{,}662294$$

El resultado es fácil de comprender, pues $-2$ y $-3$, es $-5$ y $-5+4$ es $-1$.

**702.** Regla 2.ª *Para restar un logaritmo de otro, si ambos son positivos, se restan como decimales; pero si alguno tiene la característica negativa, ó aunque la tengan positiva los dos, si el sustraendo es mayor que el minuendo, lo más sencillo en la mayor parte de los casos, y, por lo tanto, lo único que en general debe prescribirse, es sumar el logaritmo del minuendo con el complemento logarítmico del sustraendo por la regla anterior, segun ya vimos* (693).

$$\textit{Ejemplo.}\quad \begin{array}{rr} & 2{,}567645 \\ - & \bar{3}{,}303453 \\ \hline = & 5{,}264192 \\ \hline \text{prueba} & 2{,}567645 \\ \hline \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{rr} & 2{,}567645 \\ \text{com}_0 + & 2{,}696547 \\ \hline + & 5{,}264192 \\ \hline \end{array}$$

**703.** Regla 3.ª *Para multiplicar un logaritmo por un número entero, si el logaritmo es positivo, se obra como con un decimal cualquiera; pero si tiene la característica negativa, se multiplica separadamente la mantisa y la característica, y se suman los productos, que uno será negativo y otro positivo.*

| | |
|---|---|
| *Ejemplo.* | $\overline{3},750764$ |
| | $\times\ 2$ |
| Producto de la mantisa. . . . | $+\ 1,501528$ |
| Idem de la característica. . . | $\overline{6},000000$ |
| Suma de productos. . . . . . | $\overline{5},501528$ |

**704.** Regla 4.ª *Para dividir un logaritmo por un entero, si tiene la característica positiva, se divide como un decimal cualquiera; pero si la tiene negativa, se le añaden á ella las unidades que se necesiten para que sea divisible exactamente por el divisor, y para compensar ese aumento, á la mantisa se le pone una característica positiva con tantas unidades como se añadieran á la negativa. En seguida se dividen separadamente la parte negativa del dividendo y la positiva entera y decimal, y se suman por la regla primera los dos cocientes parciales, con los que se tendrá el total.*

*Ejemplo.* $\overline{5},501528 : 2 =$

$$\begin{array}{r|l}
-6+1,501528 & 2 \\
\hline
10 & -3+0,750764=\overline{3},750764 \\
0015 & \text{prueba} \quad \times\ 2 \\
12 & \\
08 & -6+1,501528 \\
0 & ó=\overline{5},501528
\end{array}$$

*Observacion.* La anterior division sirve de prueba del ejemplo de multiplicacion de la regla tercera.

**705.** *Demostracion.* La de las cuatro reglas anteriores se funda evidentemente en lo demostrado en las cuatro reglas correspondientes de enteros y decimales, en lo que tambien se ha indicado sobre cantidades positivas y negativas que se destruyen mútuamente (80), y en la equivalencia de sustraer un logaritmo á sumar su complemento (691).

## ARTÍCULO III.

### MANEJO DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS.

**706.** El problema general de dado un número buscar su logaritmo y su recíproco, dado un logaritmo hallar su número correspondiente, puede dividirse en varios generales tambien, segun la magnitud y carácter positivo ó negativo del número que se propone; ó, segun que el logaritmo, cuyo número se desea, tenga mayor ó menor característica y sea positiva ó negativa, pues cada caso de ellos reclama su correspondiente regla, porque una general sería demasiado confusa. Daremos, pues, varias comprensivas del enunciado del problema á que se refieren.

**707.** *Regla* 1.ª Para hallar el logaritmo correspondiente á un número entero menor de 2000, tal como se propone, ó desatendidos los ceros con que puede terminar, se pone desde luego una característica con tantas unidades, ménos una, como cifras tenga el número, contando para ello con los ceros de su terminacion, si con ceros terminase. En seguida si el número es, ó resulta sin los ceros de terminacion, menor de 400, por la primera Tabla de Vazquez-Queipo (pues á éstas nos referimos siempre) se verá facilísimamente el logaritmo correspondiente con su correspondiente característica, que será la misma puesta si no se desatendieran ceros y en otro caso para nada servirá. Si el número, despues de ponerle su característica y de la posible disminucion de ceros, resulta mayor de 400 y menor de 2,000, se buscan en la primera columna vertical de las Tablas, y á su derecha se hallará inmediatamente la mantisa, cuyas dos primeras cifras se tomarán de la parte superior de la columna, si no estuviera en línea con las cuatro últimas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Ejemplos.* | 1.° | Núm. 345 | Log. 2,537819 |
| | 2.° | Núm. 3450 | Log. 3,389166 |
| | 3.° | Núm. 1845 | Log. 3,265996 |
| | 4.° | Núm. 193900 | Log. 5,287690 |

708. *Demostracion.* La de estos problemas se funda evidente y casi totalmente en la teoría de la construccion de las Tablas y en su material composicion. Nos limitaremos á hacer sobre los ejemplos algunas indicaciones.

En el primero de los anteriores, diremos que no hemos tenido que hacer otra cosa que buscar en la primera Tabla, al lado del número dado, su logaritmo correspondiente.

En el segundo ejemplo, hemos puesto la característica correspondiente por lo demostrado (694), y despues, como la mantisa de 245 tiene que ser igual á la de 2450 (693), aunque tambien la de este número está en las Tablas, es más fácil tomar la igual de la primera Tabla.

En el ejemplo tercero no tuvimos, como en el primero, otra cosa que hacer, despues de ponerle la característica correspondiente, sino buscar en la primera columna de las Tablas el número y poner la mantisa, cuyas cuatro últimas cifras se hallaban en la misma línea inmediata, y cuyas dos primeras (suprimidas por ser inútil la repeticion,) se hallaban encima del claro ó blanco correspondiente.

En el cuarto ejemplo, buscamos del mismo modo la mantisa de 1939, que es igual á la de 193900 que no alcanzan las Tablas, despues de haber puesto la característica correspondiente.

709. *Observacion.* Para adiestrarse en el manejo de las Tablas, conviene observar, primero, que las mantisas van aumentando hasta el número 1000 de la primera columna, ó sea hasta 10000, contando con la columna horizontal superior, siendo la de 9999 3,999957. Que desde 1000 ó 10000, cuya mantisa es 0, vuelven á aumentar hasta ser 301008 la mantisa correspondiente á 19999, límite de las Tablas.

710. *Regla* 2.ª Para hallar el logaritmo correspondiente á un número mayor de 2,000 y menor de 20,000, límite de las Tablas (siempre sin contar los ceros con que pueda terminar), se pone desde luego la característica correspondiente; despues se busca en las Tablas, en la primera columna, el número dado sin su última cifra, y ésta se busca en la columna horizontal superior, y la mantisa se compondrá de las dos cifras que tenga el número (acortado como se ha dicho) á su derecha ó un poco más arriba, y las cuatro últimas cifras serán las que marque la intercepcion de la columna horizontal correspondiente al número, y la vertical correspondiente á su última cifra, que se hallarán en la segunda página si es

mayor de 4. Debiendo las dos primeras cifras ser las que el número acortado tiene un poco más abajo de su derecha, si á la izquierda de las cuatro últimas de la mantisa hay un asterisco *.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Ejemplos.* | 1.° | Núm. 19234 | Log. 4,284070 |
| | 2.° | Núm. 183570 | Log. 5,263802 |
| | 3.° | Núm. 17773 | Log. 4,250005 |
| | 4.° | Núm. 1819900 | Log. 6,260048 |

**711.** *Demostracion.* En el ejemplo primero, despues de poner la característica 4, buscamos en la primera columna de las páginas ó semi-Tablas el número 1923, y su última cifra 4 en la columna superior horizontal de la página de la izquierda, donde encontramos aquél; y hallamos en la intercepcion de la columna vertical de 4 y la horizontal de 1923, para últimas cifras de la mantisa 4070 y para primera y segunda 28, que están á la derecha, y un poco más arriba del número 1923.

En el segundo, despues de poner la característica correspondiente 5, desatendimos el 0 con que termina el número dado y buscamos la mantisa de 18357 de una manera análoga al caso anterior.

En el ejemplo tercero, buscamos la mantisa del mismo modo; pero como las cuatro cifras últimas de ella tenian á su izquierda un asterisco en lugar de poner por dos primeras 24, que está á la derecha, y un poco más alto que 1777, pusimos 25 que está un poco más bajo.

Y en el ejemplo cuarto, despues de poner la característica correspondiente, y desatendiendo los dos ceros de la terminacion (inútil es repetir que por la razon de que la mantisa de un número es lo mismo que la del mismo multiplicado por la unidad con ceros), buscamos la mantisa del mismo modo que la del ejemplo anterior, y con la misma particularidad del asterisco.

**712.** *Regla* 3.ª Para hallar el logaritmo correspondiente á un número mayor de 20,000, límite de las Tablas (deduciendo siempre los ceros de su terminacion) despues de poner la característica correspondiente, se tomarán de su izquierda las cifras necesarias para componer un número menor de 20,000 ( cinco cifras si las dos primeras forman un número mayor de 19 y las cuatro si dichas dos primeras forman un número mayor de 20). En seguida, por la regla anterior, se buscará la mantisa que corresponde al número asi acortado, y á ella se le sumará la parte proporcional correspondiente por las cifras que primeramente se desatendieron del número dado al acortado, en vista de la diferencia que indican las Tablas entre las últimas cifras de una mantisa, y las de la siguiente correspondiente á un número con una unidad más que el anterior.

Esta correccion complemental á la mantisa hallada, se hace con la práctica á ojo con suficiente exactitud; sin embargo, la regla es multiplicar la *diferencia tabular* (que asi se llama) por el número que forman las cifras que del propuesto se desatendieron, considerado como décimos y otras unidades inferiores, y el producto será lo que debe añadirse á las últimas cifras de la mantisa hallada para tener la que se busca correspondiente al número dado completo.

Todavía se puede hacer esta correccion con mayor exactitud, sólo necesaria cuando el número de cifras desatendidas es muy grande y el problema les da grande importancia. Para ello se busca en las Tablas proporcionales, cuya explicacion se da en las mismas Tablas.

*Ejemplos.*

| | | |
|---|---|---|
| 1.º | Núm. 384455........................ Log. | 5, |
| | Mantisa de 3844........................ | 0,584783 |
| | Idem por 55 de la diferencia tabular 113....... | 57 |
| | Logaritmo deseado........................ | 5,584840 |
| 2.º | Núm. 1857845700.................. Log. | 9, |
| | Mantisa de 18578........................ | 0,268999 |
| | Idem por 457 de la diferencia tabular de 23.... | 11 |
| | Logaritmo deseado........................ | 9,269010 |

Determinacion de la correccion por el método ordinario.

1 : 23 : : 0,4 5 7 : $x$ = 10,511

$\times$ 2 3

1 3 7 1

9 1 4

1 0,5 1 1

son 10 millonésimos y media, porque 23 son millonésimos.

Determinacion por el de las tablas proporcionales.

| | | |
|---|---|---|
| Diferencia tabular 23 | por 4 | 9,2 |
| | por 5 | 1 1,5 |
| | por 7 | 1 6,7 |
| Correcion total.......... | | 1 0,5 1 1 |

**713.** *Demostracion.* Refiriéndonos al segundo ejemplo (pues demostrado éste lo estará el primero), despues de poner la característica correspondiente, buscamos en las Tablas por la regla segunda la mantisa correspondiente al número 18578; pero como desatendíamos (ademas de los ceros que en nada pueden cambiar la mantisa) 457, y éstos componen un número que es un poco menor de la mitad de una unidad de la especie de 8, última cifra considerada, á ojo pusimos por correcion de la mantisa aproximada poco ménos de la mitad de la diferencia tabular 23; y como éstas son millonésimos, ó sea lo que varían las últimas cifras ó inferiores de la mantisa, sumamos poco ménos de la mitad de 23, ó sea 11 á los millonésimos, y obtuvimos la mantisa del número propuesto, cuya característica es 9.

Y este método de hacer á la mantisa la correccion á ojo, que se hace con la práctica muy fácilmente, considerando los números desatendidos como una parte decimal de la unidad de la última cifra considerada, es suficiente exacto como lo prueban los dos ejemplos anteriores, de determinar esa correccion por métodos más exactos, sólo, por lo tanto, necesarios, tratándose de grandes números y de problemas muy importantes y delicados.

El primer método está evidentemente justificado, porque es una regla de tres simple, cuyo primer término es 1; pues si por una unidad que aumenta el número de las Tablas, aumenta su mantisa en 23 millonésimos, por 0,457 de esa unidad ¿cuántos millonésimos aumentará la mantisa?

El método de las partes proporcionales tiene fundamento semejante.

**714.** *Regla 4.ª* Para hallar el logaritmo correspondiente á un decimal propio ó impropio (es decir, sin ó con enteros), se pone la característica positiva de tantas unidades, ménos una, como cifras enteras tiene el número propuesto; ó una característica negativa con tantas unidades, más una, como ceros haya entre el signo decimal y la primera cifra significativa decimal si el número propuesto no tiene enteros; y en seguida, desatendiendo el signo decimal y todos los ceros que haya á la izquierda de las cifras significativas del número dado ó á su derecha, búsquese por la regla correspondiente de las anteriores la mantisa correspondiente.

*Ejemplos.*

| | | |
|---|---|---|
| 1.° | Núm. 19,8456........................ Log. | 1, |
| | Mantisa de 19845.................................. | 0,297651 |
| | Por 6 y la diferencia tabular de 22............ | 11 |
| | Logaritmo deseado.................................. | 1,297662 |
| 2.° | Núm. 18,00459........................ Log. | 1, |
| | Mantisa de 180045.................................. | 0,256357 |
| | Correccion por 9 con la diferencia tabular 24... | 21 |
| | Logaritmo deseado.................................. | 1,256378 |
| 3.° | Núm. 0,45789........................ Log. | $\bar{1}$, |
| | Mantisa de 4578.................................. | 0,660676 |
| | Correccion por 9 y diferencia tabular 95....... | 85 |
| | Logaritmo deseado.................................. | $\bar{1}$,660761 |
| 4.° | Núm. 0,0045789........................ Log. | $\bar{3}$,660761 |

**715**. *Demostracion.* La característica positiva de los dos primeros ejemplos, está justificada (694), y análogamente la negativa de los últimos, y como igual mantisa corresponde á un número que al mismo multiplicado por la unidad con ceros (693); y el desatender el signo decimal en todos los anteriores ejemplos, no se ha hecho más que multiplicar el número por 10,000 en el primero, por 100,000 en el segundo y tercero y por 10.000.000 en el cuarto, y despues se ha obrado segun las reglas anteriores; y con estos ejemplos se han considerado todos los casos que puedan presentarse, esta regla es general y queda demostrada.

**716**. *Regla* 5.ª Para hallar el logaritmo correspondiente á un quebrado ordinario ó mixto, lo más sencillo es reducirlo á decimal y obrar segun la regla anterior; pero si por cualquier motivo, por ejemplo, por ser el quebrado inconmensurable (520) se quisiere su logaritmo sin reducirlo á decimal, se hallará el logaritmo del numerador y se sumará con el complemento logarítmico del denominador.

*Ejemplos.*

| | | |
|---|---|---|
| 1.° | Núm. $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5} = 3{,}4$.................. Log. | 0,531479 |
| | Ó bien log. de 17.................................. | 1,230449 |
| | Log. de 5 = 0,698970 com.º log.................. | $\bar{1}$,301030 |
| | Log. deseado igual al del otro método.......... | 0,531479 |
| 2.° | Núm. $\frac{5}{7} = 0{,}7142857$.................. Log. | $\bar{1}$, |
| | Mantisa de 7142.................................. | 0,853820 |
| | Correccion por 857 de diferencia tabular 62..... | 53 |
| | Log. deseado.................................. | $\bar{1}$,853873 |
| | ó bien log. de 5.................................. | 0,698970 |
| | Log. de 7 1,845098 com.º log.................. | $\bar{1}$,154902 |
| | Log. deseado casi igual al del otro método...... | $\bar{1}$,853872 |

717. *Demostracion.* El primer método está demostrado (695), y el segundo se funda en que un quebrado representa la division del numerador por el denominador, y en que para dividir un número por otro se resta del logaritmo del dividendo el del divisor (620), ó se suma á aquel el complemento logarítmico de éste (702).

718. *Observacion importante.* La pequeña diferencia hallada entre los resultados de los dos métodos empleados en el segundo ejemplo, servirá para solventar la duda que esta regla pudo haber hecho nacer sobre la anterior para el caso de que un decimal sea ilimitado, ya periódico, ya inconmensurable; pues se habrá comprendido que considerando del decimal sólo las cifras que con los enteros, si los tiene, compongan el número límite de la Tabla y tres ó cuatro más, se tendrá siempre un logaritmo suficientemente aproximado, pues en la correccion la mantisa, áun haciéndola por el método de las partes proporcionales, por una quinta ó sexta cifra, no varían los millonésimos de la mantisa.

719. *Regla* 6.ª Para hallar el número correspondiente á un logaritmo dado, sea positiva ó negativa su característica, se desatiende ésta y se busca la mantisa en las Tablas, separándole las cifras que tenga más de las seis que se hallan en ellas. Si no se halla niguna exactamente, escríbase la menor próxima y póngase á su izquierda el número que le corresponde; y ademas hállese la diferencia entre ella y la dada, y comparándola con la tabular, véase qué parte decimal habrá que agregarle al número hallado, por la diferencia entre la mantisa dada y la hallada, y se tendrá un número, al que se le separan como enteros los correspondientes á la característica positiva, ó se le pondrán los ceros decimales que reclame la característica negativa.

La correccion al número por la diferencia de la mantisa hallada y la dada, se hace por la práctica muy fácil y exactamente á ojo; pero si se quiere más exactitud, se puede dividir la diferencia entre las mantisas dada y hallada por la tabular y dará cero entero, y los décimos ó centésimos, etc., que habrá que agregar al número hallado para obtener el correspondiente al logaritmo propuesto. Tambien debe hacerse esta division cuando por razon del tamaño de la característica el número debe tener muchas más cifras que las que dan las Tablas, pues sólo por medio de la prolongacion de esa division se pueden determinar las últimas cifras del número.

Tambien se puede para esta correccion hacer uso de las Tablas de partes proporcionales.

720. *Observacion importante.* La mantisa del logaritmo propuesto debe buscarse siempre en lo último de las Tablas, donde se hallará si no pasa de 0,301008, aunque tambien puede hallarse al principio (pues las hay casi iguales hasta 301008 correspondiente á números próximos á 20000 y á 2000). La razon es que aunque parezca que como regla recíproca de las anteriores, debia buscarse el número correspondiente á un logaritmo con 1 ó 0 de característica en la Tabla primera, con 2 ó 3 de característica en la mitad de ella y con mayor característica al fin, como no se puede preveer si el número que se halle será entero ó mixto de decimal, y éste podrá necesitarse más aproximado cuanto mayor sea el número de cifras que las Tablas ofrezcan del número, mayor será la exactitud del resultado, aunque la correccion de la parte decimal se haga por las Tablas proporcionales.

*Ejemplo* 1.° Log. 5,280077. Núm. 190580

*Ejemplo* 2.° Log. 6,255882
Mantisa próxima 255875 su núm. correspondiente 18027

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diferencia de mantisa...... 7 | | Diferencia tabular 24 | |
| 7,0 | 24 | Adicion al número de la tabla | 0,2 9 1 6 6... |
| 2 2 0 | | | |
| 0 0 4 0 | 0,29166... | Número completo.......... | 1 8 0 2 7,2 9 1 6 6... |
| 1 6 0 | | Núm. deseado segun la característica 6............... | 1 8 0 2 7 2 9,1 6 6 |
| 1 6 0 | | | |

*Ejemplo* 3.° Log. $\overline{3}$,452882
Mantisa próxima 452859 Su número correspondiente 2837

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diferencia....... 23 | | Diferencia tabular 153. | |
| 23 | 153 | Correccion al mismo número......... | 0,1 5 |
| 0770 | | | |
| 068 | 015 | Número completo................... | 2 8 3 7,1 5 |
| | | Núm. deseado, segun la característica $\overline{3}$. | 0,0 0 2 8 3 7,1 5 |

**721.** *Demostracion.* El primer ejemplo no tiene otra que la composicion de las Tablas, pues hallada exactamente la mantisa, y estando en la intercepcion de la columna horizontal que empieza con 1905 y la vertical de 8, el número es 19058 con un cero, porque la mantisa es 5.

En el segundo ejemplo, como la mantisa dada no se halla exactamente en las Tablas, se toma la inferior próxima que se halla, que es 255882, correspondiente al número 18027; y como la mantisa dada es mayor que la encontrada, el número correspondiente á aquella debe ser algo mayor de 18027, pero sin llegar á 18028, pues éste tiene en la Tabla una mantisa mayor que la del logaritmo dado. La comparacion de la diferencia entre la mantisa dada y la tomada, y la tabular que dice la diferencia de dos mantisas, cuyos números difieren en una unidad, nos debe decir, por medio de una regla de tres, la parte decimal que hay que agregar al número. Diciendo, pues, si 24 millonésimos aumenta la mantisa por una unidad que tiene más el número siguiente, por los millonésimos que haya de diferencia entre las mantisas tomada y la propuesta, cuánto deberá ser mayor el correspondiente número á ésta, y será $24 : 1 :: 7 : x$, ó sea $x = \frac{7}{24}$, que dará un decimal que hemos aproximado todo lo posible, porque siendo la característica propuesta 6, el número buscado debia ser 7 cifras, y 5 solamente dan las Tablas; pues en otro caso ó se hubiera hecho la correccion á ojo, ó no se sacaria en el cociente de 7 por 24 más que una ó dos cifras.

En el tercer ejemplo obramos análogamente al segundo; pero no necesitamos al buscar la correccion del número de las Tablas, sacar en la correspondiente division más que dos cifras en el cociente, pues siendo la característica propuesta negativa, y debiendo por ella ser 0 los décimos y centésimos que buscábamos, con las cifras del número de las Tablas, habia lo suficiente para obtener el resultado con suficiente aproximacion. Y como en estos tres ejemplos se hallan considerados los casos diferentes que pueden encontrarse, la regla que en ellos se ha seguido es general y queda demostrada.

**722.** *Observacion importantísima.* Como los logaritmos son decimales inconmensurables (678), y las Tablas de que nos ocupamos tienen seis cifras, el error que en su caso se puede cometer (absoluto en más ó en ménos) es menor de medio millonésimo ($= 0,0000005$) circunstancia que debe conocerse para apreciar el resultado de los cálculos. Ademas se ha supuesto en todas las reglas anteriores que los logaritmos varían en igual proporcion que los números correspondientes, lo que no es exacto, y produce otro error en el resultado, tanto mayor, cuanto menor es el número de que se trata. Finalmente, cuando se busca un número correspondiente á un logaritmo de grande característica que reclame muchas cifras de enteros, muchas veces hay que suplirlas con ceros á la derecha, y el error que tenga el número hallado por las Tablas será muy grande. Sin embargo de estos errores, de los que se debe tener conocimiento, el empleo de los logaritmos es de suma utilidad, no sólo para los casos ordinarios en los que se obtiene con ellos una aproximacion suficiente, sino en los problemas de números muy grandes, pues generalmente en ellos no tienen importancia relativa más que las unidades superiores.

## ARTÍCULO IV.

### OPERACIONES PRINCIPALES POR LOGARITMOS.

**723**. Problema 1.° *Dados dos ó más números hallar su producto con el auxilio de los logaritmos.*

*Solucion.* Búsquense en las Tablas los logaritmos de todos los factores; súmense en seguida y al logaritmo suma véase en las Tablas qué número corresponde, y ese será el producto de los números dados.

*Ejemplo.* $5845 \times 73{,}43 \times 0{,}089 \times 15{,}002$

*Resolucion.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log. 5 8 4 5 | $= 3{,}766785$ | | |
| Log. 7 3,4 3 | $= 1{,}865874$ | | |
| Log. 0,0 8 9 | $= \bar{2}{,}949390$ | | |
| Log. 1 5,0 0 2 | $= \bar{3}{,}176149$ | | |
| Log. suma. | $1{,}758198$ | | |
| Mantisa próxima á la tabular. . | 758155 | Su número 5730 | |
| Diferencia. . . . . . . . . . . . | 43 | Dif. tab. 75. | |
| 43 : 75 = 0,5. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | | | 0,5 |
| | | | 5 7 3 0,5 |
| Producto deseado por la característica 1. . . . . . . . . . . | | | 5 7,3 0 5 |

**724**. *Demostracion.* Fúndase la anterior regla en que el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores (669) y en que la suma de los logaritmos con características de carácter diferente, se efectúa sumando toda la parte positiva (mantisas y características) de los logaritmos, y deduciendo la característica del número de la diferencia entre la característica positiva resultante de la suma dicha y la de las características negativas (701). Luego la regla está demostrada.

**725**. Problema 2.° *Dados dos números, determinar el cociente de su division por medio de logaritmos.*

*Solucion ó regla.* Réstese del logaritmo del dividendo el del divisor, si aquel es mayor que éste, ó súmese con el logaritmo de aquel el complemento logarítmico del divisor, y se tendrá en uno y otro caso el logaritmo cuyo número será el cociente deseado.

*Ejemplos.*

1.° 34757,54 : 745,56

| | |
|---|---|
| *Resolucion.* Log. de 34757,54........ | = 4, |
| Mantisa de 3475........................ | 0,540955 |
| Mantisa por 754, diferencia tabular 125.. | 94 |
| Log. del dividendo..................... | 4,551049 |
| Log. de 745,56......................... | = 2, |
| Mantisa de 7455........................ | 0,872448 |
| Idem por 6, diferencia tabular 58....... | 34 |
| Log. del divisor....................... | 2,872482 |
| Cociente. Núm 47,704.............. Log. | 1,678567 |

2.° 0,04578 : 37,45

| | |
|---|---|
| Log. de 0,04578........................ | = $\bar{2}$,660771 |
| Log. de 37,45 = 1,573452 com$_0$ log...... | $\bar{2}$,426548 |
| Cociente. Núm. 0,00122209.......... Log. | $\bar{3}$,087319 |

**726**. *Demostracion.* Fúndase esta regla en que el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo ménos el del divisor (670), y en que la diferencia de dos logaritmos es igual á la suma de uno de ellos, con el complemento logarítmico del otro (702); siguiendo este método en el segundo ejemplo porque siendo el divisor mayor que el dividendo, la resta seria negativa y las mantisas negativas no convienen para los cálculos, y su conversion en positivas se consigue sin alterar el valor del logaritmo (689). Luego la regla está demostrada.

**727**. Problema 3.° *Elevar á cualquier potencia un número dado.*

*Solucion.* Multiplíquese el logaritmo del número por el exponente de la potencia, y se tendrá el logaritmo del número que se desea.

*Ejemplos.*

1.° $(3457,84)^4$

| | | |
|---|---|---|
| *Resolucion.* Log. de 3457,84........ | = 3, | |
| Mantisa de 3457...................... | 538699 | |
| Idem por 84, diferencia tabular 126... | 105 | |
| Log. del número dado................. | 3,538804 | |
| Exponente de la potencia............. | × 4 | |
| Producto............................. | 14,155216 | |
| Número por la mantisa de............. | 155215 | 14296, |
| Idem por 1 millonésimo. Dif. tab. 30... | 1 | 0,033333... |
| Potencia deseada 14296033333333,33... | | |

2.° $(0{,}453)^3$

*Resolucion.* Log. de 0,453............ = $\bar{1}$,
Mantisa de 453......................... 656098

Log. del número dado.................. $\bar{1}$,656098
Exponente de la potencia................ $\times$ 3

Log. de la potencia.................... $\bar{2}$,968294
Número por mantisa de.................. 968249 9295

Por................................ 45,0 | 47
270
350 | 0,957

Número ó potencia deseada....... 0,09295957.

**728.** *Demostracion.* Cuanto previene la regla se funda en que el logaritmo de una potencia es igual al logaritmo del número elevado á ella multiplicado por el exponente (671); y sólo hay que advertir que en el ejemplo 1.°, como la característica resultó tan grande, hubo necesidad de prolongar la correccion del logaritmo correspondiente al número deseado todo lo posible para hallar las cifras necesarias; así como en el ejemplo segundo, como el número que resulta debia carecer, no sólo de enteros sino de décimos, bastaba con cinco ó seis cifras decimales. Los ejemplos de la regla siguiente servirán de prueba á los de esta.

**729.** Regla 4.ª *Extraer la raiz de cualquier grado de un número dado.*

*Solucion.* Búsquese el logaritmo del número dado, y divídase por el índice de la raiz, y se tendrá el logaritmo del número que se desea como raiz del dado.

*Ejemplo* 1.° $\sqrt[4]{142960333333333{,}33\ldots}$

Logaritmo del número dado. 14,
Mantisa de 14296........... 0,155215
Idem por 0,033333333333.... 999...

Logaritmo del número dado. 14,155215999... | 4
2 1 | 3,538804
15
35
32 por 3,53880375
0019

Núm. del logaritmo. 3,5 3 8 8 0 4
Por mantisa........ 5 3 8 6 9 9 3457,
Correc. 0,833... = 3457,8333...

1 0 5,0 | 126
0 0 4 2 0 | 0,8333...
0 4 2 0

*Ejemplo* 2.° $\sqrt{0,0929597}$

Logaritmo del número dado. $\bar{2},$
Mantisa por 9295.......... 0,968249
Idem por 97. Dif. tab. 47.... 45

Logaritmo del número dado. $\bar{2},968294$
Que es igual á............ $-3+1,968294$ | 3
16 — $-1+0,656098$
18
0029
24
00

Núm. del logaritmo 0,656098.. = 453
Idem del $\bar{1},656098$.......... = 0,453

**730.** *Demostracion.* Estos dos ejemplos que sirven de prueba á los de la regla anterior, se fundan en que el logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de aquel á que se extrajo, dividido por el índice de la raíz (672), y los anteriores ejemplos sirven de prueba de los del problema anterior.

*Observacion.* La comparacion de unos con otros evidencia que bien manejadas las tablas, y con el conocimiento teórico de los logaritmos, los resultados que se hallen por el empleo de ellos, á pesar del posible grande error en algunos casos, en general será pequeño y siempre fácil de apreciarlo. En el álgebra expondremos lo necesario para el completo conocimiento de esas combinaciones numéricas tan útiles llamadas logaritmos.

# TABLAS AUXILIARES DE LA ARITMÉTICA.

---

## ÍNDICE.

# TABLA I.

## NUMERACION ROMANA.

**Números romanos.**

| I | V | X | L | C | D | M |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | 1 | XXXI | 31 |
| II | 2 | XXXIX | 39 |
| III | 3 | XL | 40 |
| IV | 4 | XLIV | 44 |
| V | 5 | L | 50 |
| VI | 6 | LV | 55 |
| VII | 7 | LX | 60 |
| VIII | 8 | LXIX | 69 |
| IX | 9 | LXX | 70 |
| X | 10 | LXXX | 80 |
| XI | 11 | XC | 90 |
| XII | 12 | XCIX ó IC | 99 |
| XIII | 13 | C | 100 |
| XIV | 14 | CLXX | 170 |
| XV | 15 | CIC | 199 |
| XVI | 16 | CC | 200 |
| XVII | 17 | CD ó CCCC | 400 |
| XVIII | 18 | DC | 600 |
| XIX | 19 | CM | 900 |
| XX | 20 | M | 1.000 |
| XXI | 21 | MD | 1.500 |
| XXII | 22 | $\overline{X}$ | 10.000 |
| XXIII | 23 | $\overline{LXIV}$ | 64.000 |
| XXIV | 24 | $\overline{\overline{VI}}$ | 6.000.000 |
| XXV | 25 | $\overline{\overline{D}}$ | 500.000.000 |
| XXVI | 26 | $\overline{\overline{\overline{M}}}$ | 1.000.000.000 |
| XXVII | 27 | MDCLXIX | 1669 |
| XXVIII | 28 | MDCCLXXXIV | 1784 |
| XXIX | 29 | MDCCCLXXV | 1875 |
| XXX | 30 | | |

# TABLA II.

## PARA LAS CUATRO REGLAS DE ENTEROS.

### PRIMERA PARTE.—Para la adicion y la sustraccion.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

### SEGUNDA PARTE.—Para la multiplicacion y la division.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

# TABLA III.

## SISTEMA ANTIGUO DE MEDIDAS Y PESOS Y SU CORRESPONDENCIA.

### Medidas itinerarias.

| Grado. | | Leguas. | | Millas. | | Estadios. | | Pasos geométricos. | | Pies geométricos. | | Metros. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = | 20 | = | 80 | = | 640 | = | 80.000 | = | 800.000 | = | 111111,111111 |
| | | 1 | = | 4 | = | 32 | = | 4.000 | = | 20.000 | = | 5555,555555 |
| | | | | 1 | = | 8 | = | 1.000 | = | 5.000 | = | 1388,888888 |
| | | | | | | 1 | = | 125 | = | 625 | = | 173,611111 |
| | | | | | | | | 1 | = | 5 | = | 1,388888 |
| | | | | | | | | | | 1 | = | 0,277777 |

Millas marinas tiene 3 la legua, y se dividen en 10 cables de 111 brazas de á 6 pies

### Medidas lineales.

| Vara. | | Pies. | | Pulgadas. | | Líneas. | | Puntos. | | Metros. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = | 3 | = | 36 | = | 432 | = | 5184 | = | 0,835906 |
| | | 1 | = | 12 | = | 144 | = | 1728 | = | 0,278635 |
| | | | | 1 | = | 12 | = | 144 | = | 0,023219 |
| | | | | | | 1 | = | 12 | = | 0,001935 |
| | | | | | | | | 1 | = | 0,000161 |

### Medidas superficiales ó agrarias.

| Fanega. | | Celemines. | | Cuartillos. | | Estadales. | | Varas. | | Pies. | | Metros cuadrados. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = | 12 | = | 48 | = | 576 | = | 9216 | = | 82944 | = | 6439,574075 |
| | | 1 | = | 4 | = | 48 | = | 768 | = | 6912 | = | 536,631173 |
| | | | | 1 | = | 12 | = | 192 | = | 1728 | = | 134,157793 |
| | | | | | | 1 | = | 16 | = | 144 | = | 11,179816 |
| | | | | | | | | 1 | = | 9 | = | 0,698738 |
| | | | | | | | | | | 1 | = | 0,077636 |

### Medidas de capacidad ó de volúmen para áridos.

| Cahiz. | | Fanegas. | | Celemines. | | Cuartillos. | | Litros. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = | 12 | = | 144 | = | 576 | = | 666,000666 |
| | | 1 | = | 12 | = | 48 | = | 55,500055 |
| | | | | 1 | = | 4 | = | 4,625004 |
| | | | | | | 1 | = | 1,156251 |

### Medidas de capacidad para líquidos.

| Moyo. | | Cántaras. | | Cuartillas. | | Azumbres. | | Cuartillos. | | Copas. | | Litros. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = | 16 | = | 64 | = | 128 | = | 512 | = | 2048 | = | 258,126964 |
| | | 1 | = | 4 | = | 8 | = | 32 | = | 128 | = | 16,132935 |
| | | | | 1 | = | 2 | = | 8 | = | 32 | = | 4,033243 |
| | | | | | | 1 | = | 4 | = | 16 | = | 2,016618 |
| | | | | | | | | 1 | = | 4 | = | 0,504155 |
| | | | | | | | | | | 1 | = | 0,126039 |

### Medidas ponderales.

| Arrobas. | | Libras. | | Onzas. | | Dracmas. | | Adarmes. | | Granos. | | Kilógramos. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | = | 100 | = | 1600 | = | 12800 | = | 25600 | = | 921600 | = | 46,00929 |
| 1 | = | 25 | = | 400 | = | 3200 | = | 6400 | = | 230400 | = | 11,50232 |
| | | 1 | = | 16 | = | 128 | = | 256 | = | 9216 | = | 0,46009 |
| | | | | 1 | = | 8 | = | 16 | = | 576 | = | 0,02875 |
| | | | | | | 1 | = | 2 | = | 72 | = | 0,00359 |
| | | | | | | | | 1 | = | 36 | = | 0,00179 |
| | | | | | | | | | | 12 | = | 0,00059 |
| | | | | | | | | | | 1 | = | 0,00005 |

4 arrobas componen un quintal.

La libra medicinal tiene 12 onzas; la onza 8 dracmas; el dracma 3 escrúpulos, y el escrúpulo 24 granos, siendo la libra equivalente á 0,345069 kilógramos.

Para el peso de la pasta de monedas, el marco tiene 0,230046 kilógramos, y se divide en 8 onzas; la onza en 8 dracmas; el dracma en 3 escrúpulos, y el escrúpulo en 24 granos.

# TABLA IV.

## SISTEMA MÉTRICO DECIMAL.

| MÚLTIPLOS. | | | | UNIDADES PRINCIPALES. | SUBMÚLTIPLOS. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1MM | 1KM | 1HM | 1DM | LONGITUDINALES. | 1dM | 1cM | 1mM |
| 10.000$^{m}$ | 1000$^{m}$ | 100$^{m}$ | 10$^{m}$ | *Metro.* | 0,1$^{m}$ | 0,01$^{m}$ | 0,001$^{m}$ |
| 1HA. | | | | SUPERFICIALES. | 1c. A. | | |
| 100 áreas | | | | *Área.* | 0,01 de área | | |
| 1D. E. | | | | DE VOLÚMEN. | 1d. E. | | |
| 10$^{est.}$ | | | | *Esterio.* | 0,1 de esterio | | |
| 1ML | 1KL | 1HL | 1DL | DE CAPACIDAD. | 1dL | 1cL | 1mL |
| 10000$^{l}$ | 1000$^{l}$ | 100$^{l}$ | 10$^{l}$ | *Litro.* | 0,1$^{l}$ | 0,01$^{l}$ | 0,001$^{l}$ |
| 1MG | 1KG | 1HG | 1DG | PONDERALES. | 1dG | 1cG | 1mG |
| 10000$^{g}$ | 1000$^{g}$ | 100$^{g}$ | 10$^{g}$ | *Gramo.* | 0,1$^{g}$ | 0,01$^{g}$ | 0,001$^{g}$ |

La tonelada de peso tiene 1000 kilógramos y el quintal métrico 100.

NOTA. Para leer esta tabla se dice: un metro se divide en diez decímetros (*dM*); el decímetro en diez centímetros (*cM*), y este en 10 milímetros (*mM*). Y 10 metros componen un decámetro (*DM*); 100 un hectómetro (*HM*); 1000 un kilómetro, etc. (*KM*); y ya se ha dicho cuáles unidades están en desuso, y cuáles múltiplos se toman como principales (323).

### MONEDAS.

La unidad monetaria de España, ha sido generalmente el real vellon, dividido en 34 maravedises y con múltiplos variables de duros de á veinte reales, pesos sencillos de á 15, etc.

Despues se estableció para unidad el escudo de 10 reales y mil milésimos de escudo, y luego la peseta con cien centésimos; cuya unidad acaso prevalezca, por ser casi equivalente á la francesa, que es el franco, que es poco menor que una peseta.

# TABLA V.

## MEDIDAS CUADRADAS Y CÚBICAS

### Ó SUPERFICIALES Y DE VOLÚMEN DEL SISTEMA MÉTRICO.

MEDIDAS CUADRADAS Ó SUPERFICIALES.

| | | |
|---|---|---|
| Miriámetro cuadrado.......... | m 10000² = | 100.000.000 metros cuadrados. |
| Kilómetro cuadrado........... | 1000² = | 1.000.000 idem. |
| Hectómetro cuadrado ó hectárea. | 100² = | 10.000 idem. |
| Decámetro cuadrado ó área.... | 10² = | 100 idem. |
| Unidad metro-cúbica ó centiárea. | 1² = | 1 met. ó 100 decímetros. |
| Decímetro cuadrado........... | 0,1² = | 0,01 de id. ó 100 centím. c. |
| Centímetro cuadrado.......... | 0,01² = | 0,0001 de id. ó 100 milím. c. |
| Milímetro cuadrado............ | 0,001² = | 0,000001 de idem. |

MEDIDAS CÚBICAS Ó DE VOLÚMEN.

| | | |
|---|---|---|
| Miriámetro cúbico........ | 10.000³ = | 1.000.000.000.000 metros cúbicos. |
| Kilómetro cúbico......... | 1.000³ = | 1.000.000.000 idem. |
| Hectómetro cúbico........ | 100³ = | 1.000.000 idem. |
| Decámetro cúbico........ | 10³ = | 1.000 idem. |
| Unidad usual, metro cúbico. | 1³ = | 1 id. ó 1000 decím. |
| Decímetro cúbico......... | 0,1³ = | 0,001 de id. ó 1000 cent. |
| Centímetro cúbico........ | 0,01³ = | 0,000.001 de id. ó 1000 milím. |
| Milímetro cúbico......... | 0,001 | 0,000.000.001 de idem. |

NOTA. La ley de pesos y medidas vigente no contiene las anteriores; pero como alguna nueva ley puede contenerlas y ademas forman parte del sistema, las exponemos.

# TABLA VI.

## NÚMEROS PRIMOS MENORES DE 1000.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 |
| 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 |
| 71 | 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | 101 | 103 | 107 | 109 |
| 113 | 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 |
| 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 |
| 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 |
| 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | 347 |
| 349 | 353 | 359 | 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 |
| 409 | 419 | 421 | 431 | 433 | 439 | 443 | 449 | 457 | 461 |
| 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 | 509 | 521 | 523 |
| 541 | 547 | 557 | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 | 599 |
| 601 | 607 | 613 | 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 |
| 659 | 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 | 727 |
| 733 | 739 | 743 | 751 | 757 | 761 | 769 | 773 | 787 | 797 |
| 809 | 811 | 821 | 823 | 827 | 829 | 839 | 853 | 857 | 859 |
| 863 | 877 | 881 | 883 | 887 | 907 | 911 | 919 | 929 | 937 |
| 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 967 | |

# TABLA VII.

## CUADRADOS Y CUBOS DE LOS NÚMEROS DÍGITOS Y DE OTROS, CUYAS POTENCIAS SIRVEN PARA DESCUBRIR LA LEY DE ESTAS Y DE LAS RAÍCES.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Números | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Cuadrados | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| Cubos | 0 | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Números | 10 | 20 | 30 | 40 | 70 | 90 |
| Cuadrados | 100 | 400 | 900 | 1600 | 4900 | 8100 |
| Cubos | 1000 | 800 | 27000 | 64000 | 343000 | 729000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Números | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,7 | 0,9 |
| Cuadrados | 0,01 | 0,04 | 0,03 | 0,49 | 0,81 |
| Cubos | 0,001 | 0,008 | 0,027 | 0,343 | 0,729 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Números | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{8}{9}$ |
| Cuadrados | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{16}{25}$ | $\frac{25}{49}$ | $\frac{64}{81}$ |
| Cubos | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{64}{125}$ | $\frac{125}{343}$ | $\frac{512}{729}$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Números | 1,1 | 2,2 | 5,5 | 6,4 | 9,8 | 9,9 |
| Cuadrados | 1,21 | 4,84 | 30,25 | 41,16 | 96,04 | 98,01 |
| Cubos | 1,331 | 10,648 | 166,375 | 263,424 | 941,192 | 970,299 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Números | $1\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{2}$ | $3\frac{2}{3}$ | $5\frac{1}{5}$ | $9\frac{8}{9}$ |
| Cuadrados | $2\frac{1}{4}$ | $6\frac{1}{4}$ | $13\frac{4}{9}$ | $27\frac{1}{25}$ | $97\frac{64}{81}$ |
| Cubos | $3\frac{3}{8}$ | $15\frac{5}{8}$ | $49\frac{8}{27}$ | $134\frac{22}{131}$ | $967\frac{26}{729}$ |

Números.. $3 \times 4$.

Cuadrados. $(3 \times 4) \times (3 \times 4) = 3 \times 3 \times 4 \times 4 = 3^2 \times 4^2 = 9 \times 16 = 144$.

Cubos..... $(3 \times 4) \times (3 \times 4) \times (3 \times 4) = 3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 3^3 \times 4^3 = 27 \times 64 = 1728$.

Números.. $3 + 4$.

Cuadrados. $(3 + 4) \times (3 + 4) = (3 + 4) \times 3 + (3 + 4) \times 4 = (3 \times 3) + (3 \times 4) + (3 \times 4) + (4 \times 4) = 3^2 + 2 \times 3 \times 4 + 4^2$.

Cubos..... $(3 + 4) \times (3 + 4) \times (3 + 4) = (3^2 + 2 \times 3 \times 4 + 4^2) \times (3 + 4) = 3^3 + (2 \times 3 \times 4 \times 3) + (4^2 \times 3) + (4 \times 3^2) + (2 \times 3 \times 4 \times 4) + 4^3 = 3^3 + (2 \times 3^2 \times 4) + (4^2 \times 3) + (4 \times 3^2) + (2 \times 3 \times 4^2) + 4^3 = 3^3 + (3 \times 3^2 \times 4) + (3 \times 3 \times 4^2) + 4^3 = 259$.

# FÉ DE ERRATAS.

| Página. | Párrafo. | Línea. | Dice. | Debe decir. |
|---|---|---|---|---|
| 38 | 142 | 12 | tomado | formado |
| 47 | 166 | 1 | punto | junto |
| 118 | 393 | 10 | divide al | es divisible por el |
| 133 | 438 | 8 | $10000 = 100$ | $10000 - 100$ |
| 143 | 465 | 7 | producto por 3 | producto por 4 |
| 149 | 490 | 21 | $\left(\frac{3}{100}\right)^2$ | $\left(\frac{3}{10}\right)^2$ |
| 149 | 490 | 22 | $\left(\frac{3}{1000}\right)^3$ | $\left(\frac{3}{10}\right)^3$ |
| 159 | 527 | 5 | decenas | unidades |
| 181 | 595 | 11 | $: x = x$ | $: x$ y $x =$ |
| 205 | 670 | 12 | con 6 y 2 | son 6 y 2 |

Las erratas que no se han advertido, serán de poca monta, ó fáciles de corregir por los mismos lectores, áun las de las operaciones numéricas.

---

## ADVERTENCIA FINAL.

Precio de esta Aritmética, en rústica, **15 reales** en Madrid, **16** en provincias, doble en Ultramar y **2 reales** más encartonada.

Se vende en Madrid en las librerías de *Hernando*, calle del Arenal; *Lopez*, calle del Cármen; *Cuesta*, calle de Carretas; *Bailly-Bailliére*, plaza de Santa Ana; *San Martin*, Puerta del Sol; *Durán*, Carrera de San Jerónimo; *Murillo*, calle de Alcalá, é *Hijos de Fe*, calle de Jacometrezo.—Barcelona, *Rosell*, y en las demas provincias, en las principales librerías. Se sirven pedidos de ejemplares sueltos, francos de porte, por **16 reales** en sellos de franqueo con carta certificada al autor, *plaza del Cordon*, 1, *bajo derecha*. En pedidos de más de diez ejemplares, se debe enviar el importe en letras del Giro Mútuo, con la rebaja del 15 por 100.

Precio de esta Aritmética, en rústica, **15 reales** en Madrid, **16** en provincias, doble en Ultramar y **2 reales** más encartonada.

Se vende en Madrid en las librerías de *Hernando*, calle del Arenal, *Lopez*, calle del Cármen; *Cuesta*, calle de Carretas; *Bailly-Bailliére*, plaza de Santa Ana; *San Martin*, Puerta del Sol; *Durán*, Carrera de San Jerónimo; *Murillo*, calle de Alcalá, é *Hijos de Fe*, calle de Jacometrezo.—Barcelona, *Rosell*, y en las demas provincias, en las principales librerías. Se sirven pedidos de ejemplares sueltos, francos de porte, por **16 reales** en sellos de franqueo con carta certificada al autor, *plaza del Cordon*, 1, *bajo derecha*. En pedidos de más de diez ejemplares, se debe enviar el importe con la rebaja del 15 por 100, en letras del Giro Mútuo ú otras de fácil cobro.