APUNTES

DE ARITMÉTICA,

[illegible] Y PRINCIPIOS DE GEOMETRÍA,

[illegible]

[illegible]

PARA FACILITAR EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

[illegible]

D. [illegible]

[illegible]

VALENCIA

IMPRENTA DE JOSÉ DE ORGA.

[illegible]

APUNTES

DE ARITMÉTICA,

ALGEBRA Y PRINCIPIOS DE GEOMETRIA,

[illegible]

DE LOS NUMEROS,

PARA FACILITAR EL ESTUDIO DE LAS MATEMATICAS

[illegible]

POR

D. [illegible]

PROPIEDAD DEL AUTOR.

VALENCIA

IMPRENTA DE JOSÉ DE ORGA.

[illegible]

APUNTES

DE ARITMETICA,

ALGEBRA Y PRINCIPIOS DE GEOMETRIA,

CON TABLAS DE SEGUNDAS Y TERCERAS POTENCIAS Y RAICES

DE LOS NUMEROS,

PARA FACILITAR EL ESTUDIO DE LAS MATEMATICAS

en el primer año del segundo período de la 2ª enseñanza.

POR

D. Joaquin Agostí,

Catedrático de la espresada asignatura en este Instituto Provincial.

VALENCIA,

IMPRENTA DE JOSÉ DE ORGA,

CALLE DEL MILAGRO.

1868.

APUNTES

DE ARITMETICA,

ALGEBRA Y PRINCIPIOS DE GEOMETRIA,

CON TABLAS DE SEGUNDAS Y TERCERAS POTENCIAS Y RAICES DE LOS NUMEROS,

PARA FACILITAR EL ESTUDIO DE LAS MATEMATICAS

en el primer año del segundo período de la 2ª enseñanza.

POR

D. Joaquin Agostí,

Catedrático de la espresada asignatura en este Instituto Provincial.

VALENCIA,

IMPRENTA DE JOSÉ DE ORGA,

CALLE DEL MILAGRO.

1868.

PROLOGO.

Un libro para estudiar las Matemáticas bajo la direccion de maestro, puede ser muy diferente de otro libro que sirva para estudiarlas el lector por sí solo: aquel puede consistir en un texto de pocas páginas, este nunca será bastante estenso.

El primero tiene un poderoso ausiliar en la cooperacion del maestro, y podrá un discípulo de mediano talento, con puntual asistencia al aula y constante aplicacion, instruirse bien durante el corto tiempo de un año escolar. Mas para instruirse un lector por sí solo con el estudio del segundo libro, necesita privilegiado talento, meditacion profunda, atencion sostenida, constancia incansable y un tiempo indefinido: cuento mas de treinta y ocho años de profesor en la enseñanza de las Matemáticas, y solo he conocido dos personas que, estudiando sin ausilio ageno, hayan conseguido instruirse bien en dicha ciencia.

Un libro como el primero de los dos que comparo, lo escribe cualquier maestro instruido y práctico, que tenga talento é ingenio; mas para escribir el segundo libro no bastan estas dotes, porque sábios muy eminentes han confesado que intentaron formarlo y no lo consiguieron.

Yo bien sé que todas las obras elementales que se publican de Matemáticas, se suponen accesibles á la comun capacidad de los lectores, y tales que las puedan estos aprender por sí solos; pero tampoco ignoro que los mas de esos lectores, despues de emplear largas vigilias en estudiar sus lecciones, asisten á la clase sin saberlas ó sabiéndolas mal.

No, no está todo el defecto en los libros; el defecto principal está en sus lectores: dádmelos con las cualidades indicadas, y yo aseguro que tendrán libros á escoger.

PROLOGO.

Un libro para estudiar las Matemáticas bajo la direccion de maestro, puede ser muy diferente de otro libro que sirva para estudiarlas el lector por sí solo: aquel puede consistir en un texto de pocas páginas, este nunca será bastante estenso.

El primero tiene un poderoso ausiliar en la cooperacion del maestro, y podrá un discípulo de mediano talento, con puntual asistencia al aula y constante aplicacion, instruirse bien durante el corto tiempo de un año escolar. Mas para instruirse un lector por sí solo con el estudio del segundo libro, necesita privilegiado talento, meditacion profunda, atencion sostenida, constancia incansable y un tiempo indefinido: cuento mas de treinta y ocho años de profesor en la enseñanza de las Matemáticas, y solo he conocido dos personas que, estudiando sin ausilio ageno, hayan conseguido instruirse bien en dicha ciencia.

Un libro como el primero de los dos que comparo, lo escribe cualquier maestro instruido y práctico, que tenga talento é ingenio; mas para escribir el segundo libro no bastan estas dotes, porque sábios muy eminentes han confesado que intentaron formarlo y no lo consiguieron.

Yo bien sé que todas las obras elementales que se publican de Matemáticas, se suponen accesibles á la comun capacidad de los lectores, y tales que las puedan estos aprender por sí solos; pero tampoco ignoro que los mas de esos lectores, despues de emplear largas vigilias en estudiar sus lecciones, asisten á la clase sin saberlas ó sabiéndolas mal.

No, no está todo el defecto en los libros; el defecto principal está en sus lectores: dádmelos con las cualidades indicadas, y yo aseguro que tendrán libros á escoger.

Ahora, pues, debiendo enseñarse en un año escolar, que apenas ofrece ciento y cincuenta dias lectivos, la Aritmética, el Algebra con su análisis de primero y segundo grado, y ademas principios de Geometría, al gran número de alumnos que concurre á nuestras aulas, de mediana inteligencia por lo general; ¿podríamos elegir para texto alguna de aquellas mismas obras, que antes nos servian para enseñar en cuatro años casi las mismas materias? Yo entiendo que no; porque deberíamos recurrir á sus estractos y compilaciones, trabajo de mal efecto por su incoherencia, y mas difícil todavía que el de escribir de caudal propio, y con deliberado plan, un libro.

Por eso desde que se publicó el nuevo régimen de estudios para la 2.ª Enseñanza, me dediqué sériamente á redactar un sistema de Lecciones que llenasen el espresado objeto, dictándolas despues en la clase para que las escribiesen puntualmente mis discípulos, y esplicando en seguida la Leccion dictada desde el dia anterior.

Con este ímprobo trabajo, sostenido sin interrupcion en todo el curso de 1866 á 67, curso mas breve aun que el ordinario, ya por lo que tardó á principiar, ya por las muchas vacaciones que ocasionaron las fiestas seculares de esta capital; logré sin mas texto que los espresados manuscritos, enseñar todas sus materias, con notable aprovechamiento de mis discípulos.

En vista de este buen éxito resolví imprimir cuanto antes aquellos manuscritos, para evitarme la penosa tarea del dictado y correccion, economizando así el tiempo que en esto perdia. Impreso ya el libro lo he ensayado en el presente curso (1867 á 68) obteniendo, en consecuencia de dichas mejoras, resultados mas satisfactorios todavía que los del curso anterior. Y como tambien otros profesores de Matemáticas de varios Establecimientos literarios, han ensayado el texto impreso y obtenido buenos resultados, no dudo en asegurar que el libro titulado Apuntes, que acabo de imprimir, llena el objeto que lo motivó, á saber: *facilitar á los discípulos el estudio de las Ma-*

temáticas en el primer año del segundo período de la 2.ª Enseñanza.

Al formar los presentes Apuntes se ha procurado, cuanto ha sido posible, conciliar la claridad con la brevedad, sin defraudar el caudal de la buena doctrina, ni faltar á la exactitud del lenguaje. Para convencerse de que en tan reducido volúmen se comprenden todas las ideas espuestas en el Programa que precede á la parte textual, basta comparar este Programa con las Lecciones del texto en él indicadas, y se verá su exacta correspondencia.

Uno de los medios que han contribuido mucho á esta brevedad es el de las tablas que, como ausiliares, acompañan al texto; porque la de potencias y raíces de números que va al fin; el apéndice de esta tabla inserto en la Leccion 35; la tabla de factores primos de los números múltiplos puesta al fin de la Leccion 13, y otras tablas esparcidas en la obra, han facilitado con su uso reducir á cortas líneas muchos cálculos difíciles, que por sus métodos particulares hubieran sido prolijos.

Tambien ha contribuido á esto el ventajoso método de enseñar en Algebra, y no en la Aritmética, todo lo relativo á potencias y raíces de números, logaritmos, razones y proporciones, y las aplicaciones de estas teorías á las cuestiones llamadas *reglas de tres*, *reglas de interés*, *reglas de compañía*, etc.; porque ese método, que debe preferirse cuando el estudio del Algebra sigue inmediatamente al de la Aritmética en un mismo curso, facilita enseñar mas doctrina en menos tiempo, y dilatar el campo de las aplicaciones prácticas.

Pero donde la brevedad, claridad, caudal de buena doctrina, y exactitud de lenguaje, se manifiestan de un modo admirable, es en la Geometría. En treinta y cuatro páginas, que al parecer no llegan á formar un folleto de simples nociones, se tiene en realidad un compendio de la ciencia; se tiene mucho mas de lo que pueda pedirse en la indeterminada denominacion de *Principios de Geometría*. Porque siguiendo en la esposicion de las ideas su mejor órden y conexion, se han agrupado las congéneres, y clasificando estos grupos se ha conseguido decir mucho en pocas palabras.

No se ven demostraciones en esas páginas, no las acompaña siquiera una lámina de figuras; pero los discípulos que, preparados con la meditada lectura de ese fácil texto, asisten luego á su clase, reciben allí con aumento lo que de propósito aquí se ha omitido.

En la clase es donde el método, hermanado con el celo, trabajan de consuno para dar á la letra muerta del texto esa vida y accion de tanto fruto y provecho. Allí los discípulos aplicados aprenden bien y sin fatiga demostraciones claras; trazados fieles de las formas, así planas como del espacio; métodos fáciles é ingeniosos tanto para resolver los problemas gráficos como los numéricos; en una palabra, en la clase es donde aprenden la ciencia y tambien el arte.

Y hasta aprenden algunos, á pesar de sus malas dotes intelectuales; porque *de combinar el celo con el método, resulta cierta fuerza didáctica de un poder irresistible.* ¡Cuántos prodigios de instruccion he visto en mi larga práctica obrados por esa fuerza! Si no temiera exagerar me atreveria á decir que *hasta el mismo idiota es susceptible de instruccion, en uso de tan portentosa fuerza.*

Mucho arredra en general á los maestros un cámbio de régimen en la Enseñanza: el inmediato efecto es el trastorno y desconcierto, hasta que se vuelve de nuevo al órden; pero los profesores que saben por larga esperiencia servirse de la espresada fuerza no se turban, meditan y deliberan con serenidad lo que debe hacerse para asegurar la instruccion, y con su pericia é ingenio saben determinar con acierto el *cómo*, el *cuándo* y el *cuánto* de cada cosa en el difícil cargo de la Enseñanza.

PROGRAMA

DE LAS

MATERIAS CONTENIDAS EN LOS APUNTES.

esta condicion. Paso de la resta por los tres estados positivo, nulo y negativo; signos de estas cantidades. *El valor de una resta no se altera* . . . etc. Cómo se aplica este principio á la sustraccion. Comprobacion inmediata de las restas. Complemento aritmético de un número, su aplicacion á la sustraccion, unidad complementaria.

LECCION 5, pág. 7. Multiplicar, nombre de la operacion, sus datos, signos y resultado. Proposiciones:
1.ª El órden de los factores.
2.ª Un producto contiene á un factor . . .
3.ª Por cada unidad que aumente ó disminuya un factor . .
4.ª Si un factor es la unidad . . .
5.ª Cero multiplicado por cualquier número . . .
Casos de la multiplicacion, y tabla. En qué se funda la regla del segundo caso. Factor 1 seguido de ceros, factor digito seguido de ceros. Caso tercero: ejemplos y su demostracion; eleccion de multiplicador; cuándo deberán coincidir dos productos parciales en un mismo renglon; número de cifras en e producto de dos factores: demuéstrase.

LECCION 6, pág. 11. Abreviaciones de la multiplicacion. Por ceros terminales, por ceros entre cifras del multiplicador, por cifras repetidas en este, por ser nueves dichas cifras, por factor constante. Por qué regla se asegura la escritura de los productos parciales, cuando conviene variar el órden en la formacion de estos.

LECCION 7, pág. 13. Dividir ó partir, nombres de uso en esta ope racion. Proposiciones consiguientes á la definicion
1.ª Todo cuociente debe ser tal . . .
2.ª Todo número dividido por la unidad . . .
3.ª Todo número dividido por su igual . . .
4.ª Cero dividido por cantidad no cero . . .

Cuestion fundamental de la division. Cuociente exacto, idem con residuo, ley de las restas. Dos casos de division: Regla para el primero. Los mas fáciles ejemplos del segundo caso.

LECCION 8, pág. 15. Ejemplos de division para cuociente dígito, regla y su aplicacion, utilidad del *resíduo* = *cuociente*. Cómo el cuociente dígito podria hallarse por sustraccion. Regla para los ejemplos del segundo caso en general.

Uso de la tabla de los nueve productos de F para el caso de divisor constante. Cuántas cifras en el cuociente. Utilidad de otras tablas semejantes á la dicha, cuando sin repetirse el divisor sean muchas las cifras del cuociente.

LECCION 9, pág. 19. Proposiciones de esta Leccion:

1.ª Un producto de dos factores partido por uno de ambos . . .

2.ª Si uno de los *n* factores se multiplica ó parte . . .

3.ª Suprimir de un número uno ó mas factores equivale á . . .

4.ª El valor de un producto no varía cuando un factor se multiplica ó parte por . . .

5.ª Si el dividendo se multiplica ó parte . . . pero si es el divisor quien se multiplica ó parte . . .

6.ª Un cuociente no se altera . . .

Probar una operacion; qué prueba para cada una de las cuatro. Cómo se ausilian mútuamente las cuatro operaciones. Ejemplos.

LECCION 10, pág. 20. Divisor, factor, submúltiplo, parte alícuota; cuándo es simple un factor y cuándo compuesto, factores apareados, cuáles para 10, 100, 1000. Número par é impar; múltiplo de 2 y 5; de 4 y 25; de 8 y 125. Múltiplo de 3 y de 9. Múltiplo de 11: tres modos. Consejo para los múltiplos de 7. Conocimiento de los 25 primos comprendidos entre 1 y 100.

esta condicion. Paso de la resta por los tres estados positivo, nulo y negativo; signos de estas cantidades. *El valor de una resta no se altera . . .* etc. Cómo se aplica este principio á la sustraccion. Comprobacion inmediata de las restas. Complemento aritmético de un número, su aplicacion á la sustraccion, unidad complementaria.

LECCION 5, pág. 7. Multiplicar, nombre de la operacion, sus datos, signos y resultado. Proposiciones:

1.ª El órden de los factores.
2.ª Un producto contiene á un factor. . .
3.ª Por cada unidad que aumente ó disminuya un factor . .
4.ª Si un factor es la unidad . . .
5.ª Cero multiplicado por cualquier número . . .

Casos de la multiplicacion, y tabla. En qué se funda la regla del segundo caso. Factor 1 seguido de ceros, factor digito seguido de ceros. Caso tercero: ejemplos y su demostracion; eleccion de multiplicador; cuándo deberán coincidir dos productos parciales en un mismo renglon; número de cifras en e producto de dos factores: demuéstrase.

LECCION 6, pág. 11. Abreviaciones de la multiplicacion. Por ceros terminales, por ceros entre cifras del multiplicador, por cifras repetidas en este, por ser nueves dichas cifras, por factor constante. Por qué regla se asegura la escritura de los productos parciales, cuando conviene variar el órden en la formacion de estos.

LECCION 7, pág. 13. Dividir ó partir, nombres de uso en esta ope racion. Proposiciones consiguientes á la definicion

1.ª Todo cuociente debe ser tal . . .
2.ª Todo número dividido por la unidad . . .
3.ª Todo número dividido por su igual . . .
4.ª Cero dividido por cantidad no cero . . .

Cuestion fundamental de la division. Cuociente exacto, idem con resíduo, ley de las restas. Dos casos de division: Regla para el primero. Los mas fáciles ejemplos del segundo caso.

LECCION 8, pág. 15. Ejemplos de division para cuociente dígito, regla y su aplicacion, utilidad del *resíduo = cuociente*. Cómo el cuociente dígito podria hallarse por sustraccion. Regla para los ejemplos del segundo caso en general.

Uso de la tabla de los nueve productos de F para el caso de divisor constante. Cuántas cifras en el cuociente. Utilidad de otras tablas semejantes á la dicha, cuando sin repetirse el divisor sean muchas las cifras del cuociente.

LECCION 9, pág. 19. Proposiciones de esta Leccion:

1.ª Un producto de dos factores partido por uno de ambos . . .

2.ª Si uno de los *n* factores se multiplica ó parte . . .

3.ª Suprimir de un número uno ó mas factores equivale á . . .

4.ª El valor de un producto no varía cuando un factor se multiplica ó parte por . . .

5.ª Si el dividendo se multiplica ó parte . . . pero si es el divisor quien se multiplica ó parte . . .

6.ª Un cuociente no se altera . . .

Probar una operacion; qué prueba para cada una de las cuatro. Cómo se ausilian mútuamente las cuatro operaciones. Ejemplos.

LECCION 10, pág. 20. Divisor, factor, submúltiplo, parte alícuota; cuándo es simple un factor y cuándo compuesto, factores apareados, cuáles para 10, 100, 1000. Número par é impar; múltiplo de 2 y 5; de 4 y 25; de 8 y 125. Múltiplo de 3 y de 9. Múltiplo de 11: tres modos. Consejo para los múltiplos de 7. Conocimiento de los 25 primos comprendidos entre 1 y 100.

2.ª Todo número entero puede mirarse como quebrado.
3.ª Cuando el numerador es cero y el denominador no . . .
4.ª Si el numerador se multiplica ó parte . . . pero si es el denominador . . .
5.ª El valor de un quebrado no se altera cuando sus dos términos . . .

Simplificar quebrados. Cuándo se llama irreducible un quebrado. Cómo por los factores comunes suprimidos se determina el m. d. c. de sus dos términos. Utilidad de la tabla de factores primos para la simplificacion de quebrados.

LECCION 15, pág. 37. Proposicion que compara los quebrados por sus numeradores ó por sus denominadores. Relaciones *á priori.* Regla para el denominador comun. Casos próspero y adverso. Casos de comun numerador.

Adicion, sustraccion, datos mixtos en ambas operaciones. Restar quebrado de entero. Trasformar el número mixto en quebrado equivalente.

LECCION 16, pág. 43. Reglas. Multiplicar quebrado por entero. Dividir quebrado por entero. Multiplicar un quebrado por otro quebrado. Regla general para los productos de tres ó mas factores. Quebrados recíprocos y su propiedad notable.

Regla para dividir quebrado por quebrado. Quebrados de quebrados; su reduccion á quebrado único. Qué otros casos pueden ocurrir despues de los cuatro dichos. Cómo todos se pueden reducir á un solo caso. Qué ventaja resulta del denominador comun en dividendo y divisor.

LECCION 17, pág. 47. El decimal considerado como quebrado comun y como consecuencia de la numeracion. De qué órden de los enteros es recíproco cada órden decimal. Regla para la denominacion del decimal. Leer decimales escritos; escribir decimales dictados; dar forma propia al decimal que la tiene comun; traducir á quebrado comun el quebrado decimal exacto. Proposiciones:

1.ª Poner ó quitar ceros . . .
2.ª Multiplicar por 10^n .
3.ª Dividir por 10^n .

Adicion, sustraccion, sus tres casos, uso de la letra *d* como cifra = 10.

LECCION 18, pág. 50. Ejemplos de multiplicador 10^n; multiplicador dígito, solo ó seguido de ceros. Cámbio de la multiplicacion en sustraccion cuando el multiplicador es uno ó mas nueves.

Regla general para multiplicar un decimal por otro, su aplicacion y demostracion sobre el ejemplo.

Cámbio de la fraccion comun en decimal, sus casos y notas de cada uno. Propiedades del quebrado periódico completo $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{23}$. Ley de los quebrados $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$ . . . etc. Ejemplo del periódico mixto. La fraccion $\frac{n}{28}$, por ejemplo, qué decimal dará.

LECCION 19, pág. 55. Dividir el decimal por 1 seguido de ceros; se generaliza la regla á dividendos enteros. Divisor dígito, solo ó con ceros á su derecha. Regla para todos los demas casos distintos de los tres que anteceden. Regla para cada uno de los tres casos de retroceso del decimal á su fraccion generatriz. Cautela con los decimales periódicos puros ó mixtos, suministrados como datos para alguna de las cuatro operaciones.

LECCION 20, pág. 58. Definiciones de complexo, incomplexo, coeficiente denominal, cuándo hay sistema. Se suponen sabidas las tablas de pesas y medidas castellanas. Division de los complexos en cuatro clases, y subdivision en géneros. Ejemplos de sistemas de base 12 y de base 4. Nota distintiva del escudito viejo.

Regla para la adicion : ¿por cada cuántas se lleva una? Regla para la sustraccion : ¿por cada una en sustraendo cuántas en minuendo? Qué entendemos por análisis y síntesis del quebrado concreto, y cómo se ejecutan estas operaciones.

LECCION 29, pág. 89. Regla para los productos de un polinómio por otro. Tres leyes generales:

1.ª Cuántos monómios en el resultado.

2.ª Para factores ordenados.

3.ª Para factores homogéneos; factor — 1.

Productos *á priori*: los de las formas $(a+b)(a-b)$, y $(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Potencias segunda y tercera del binómio, reglas y su aplicacion.

LECCION 30, pág. 92. Regla general para dividir un monómio por otro; casos del cuociente. Se modifica para los casos de cuociente entero. Adoptando la modificacion como regla general, aparecen los esponentes *nulo* y *negativo*, cuyos significados se demuestran.

Dividir polinómio por monómio, caso del divisor — 1. Tres orígenes para la espresion algébrica de signos invertidos. Problema: Descomponer el polinómio en dos factores, uno que sea su m. f. monómio y el otro . . . etc.

LECCION 31, pág. 94. Regla para la division de polinómio por polinómio, cuatro partes: Cuociente entero, cuociente mixto, cuocientes *á priori*, casos:

1.° $\dfrac{(a\pm b)^2}{(a\pm b)} = \dfrac{(a\pm b)^3}{(a\pm b)^2}$.

2.° $\dfrac{(a\pm b)^3}{a\pm b} = (a\pm b)^2$.

3.° $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

4.° $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Se agrega el recurso del m. f. monómio de un polinómio producto.

que 2000 ; cuadrado del número de cuatro cifras terminado en 5. Cubo del número menor que 1000, multiplicado ó partido por 10.ⁿ Cubo del número par < 2000. Cuadrado y cubo del número entero de cuatro cifras cualesquiera. Sumas y productos que se satisfacen por potencias ; sus fórmulas son :

1.ª $1+2+3+\ldots n = S_1 = \frac{1}{2}(n+n^2)$.

2.ª $n\times(n+d) = n^2 + nd$.

3.ª $(m+n)\times(m-n) = m^2 - n^2$.

4.ª $(m-n)\times(m^2+mn+n^2) = m^3 - n^3$.

Potencias de grado superior al tercero.

LECCION 37, Tablas. Del número que, considerado como potencia, no esceda los límites de las potencias contenidas en las tablas, hallar inmediatamente el entero de sus raíces segunda y tercera. Reglas para determinar la fraccion que debe acompañar á dicho entero cuando el dato sea irracional. Raíces segunda y tercera de la fraccion comun y del número mixto. Raíces segunda y tercera de las cantidades decimales ; condicion para que puedan los datos considerarse como racionales. Raíces segunda y tercera de los números primos menores que 1021, ya esplícitos, ya implícitos, en productos de primo y factor racional. Usos de la tabla *Apéndice* puesta al fin de la Leccion 35. Raíces cuarta y sexta de números dados.

LECCION 38, pág. 114. Definicion de radicales, cosas que deben distinguirse en cada radical. Distincion de estas cantidades en reales é imaginarias ; fórmula de estas $\sqrt[2n]{-a^m}$. Tres proposiciones :

1.ª formulada en $(\sqrt[n]{\pm a^c})^n = \pm a^c$.

2.ª formulada en $\sqrt[n]{b^c} = b^{\frac{c}{n}}$, y recíprocamente $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3.ª $\sqrt{ca^n b^r} = \sqrt[2n]{c^n a^{m+n} b^{r+n}}$; y viceversa

$\sqrt[6]{8a^3b^6c^9} = \sqrt{2ab^2c^3}$.

Definicion general de radicales semejantes. Adicion, sustraccion. Reduccion de radicales á índice comun.

Multiplicacion de radicales; cómo la misma regla puede servir para dos factores imaginarios de segundo grado; alerta con sus factores racionales en la subradical. Division de radicales de grado comun, así reales como imaginarios.

Elevacion á potencias, casos *á priori* formulados en $(\sqrt[n]{\pm a^m})^n = \pm a^m$. Regla para los demas casos; otra para $(\sqrt{-a^m})^n$. Potencia de $\sqrt{-1}$. Estraccion de raíces: regla única para datos reales é imaginarios. En qué casos el cálculo de radicales imaginarios da resultados reales.

LECCION 39, pág. 121. Igualdad, identidad, ecuacion. Cuándo es determinada y cuándo no; cuándo de primero ó mayor grado. Datos, incógnitas, miembros, términos. Resolver una ecuacion determinada ó despejar la incógnita. Raíz de la ecuacion. Cómo se comprueba. Axioma que sirve de base para las operaciones de la análisis. Cuántas operaciones y cuáles bastan para despejar la incógnita en la ecuacion determinada de primer grado.

LECCION 40, pág. 125. Discusion de la raiz formular $x = \frac{C - D}{A - B}$ = cinco valores diferentes. Demuéstrase que $\frac{a}{o}$ es símbolo del infinito, y que $\frac{o}{o}$ es símbolo de la cantidad en general.

Sistema de ecuaciones; cuándo es determinado y cuándo no; cuándo es absurdo y por qué.

Eliminacion de incógnitas; idea exacta de esta operacion. Método de sustitucion, de igualacion y de coeficientes opuestos; aplícanse los tres á unos mismos ejemplos para ver la identidad de resultados, primero en sistemas de dos ecuaciones, y luego en los de tres ó mas. Consecuencia de la comparacion de los tres métodos.

LECCION 41, pág. 131. A falta de regla segura, qué procedimiento se aconseja para el planteo de problemas. Aplícase este procedimiento al planteo de cinco problemas, que evidencian las cinco formas de la raíz única de la ecuacion determinada de primer grado.

LECCION 42, pág. 134. Determinacion del valor particular que pueda haber oculto en la espresion algébrica, cuando esta se reduce á $\frac{0}{0}$ por algun supuesto hecho en las letras. Problemas para probar el ingenio del principiante en su planteo. Problema de suma, y diferencia para determinar las dos cantidades componentes; resolucion; traduccion de la fórmula á regla práctica.

LECCION 43, pág. 136 Análisis determinada de segundo grado, ecuaciones puras, su fórmula y la de su preparada. Se resuelve esta en general, se discuten sus dos raíces, y se comprueban simultáneamente en la ecuacion propuesta.

Ecuaciones completas de segundo grado determinadas, su fórmula y la de su preparada. Cámbio de la ecuacion mixta en pura por la completacion. Resolucion de esta, aparicion de las dos raíces, y discusion; caso de raíces idénticas.

LECCION 44, pág. 139. Regla para llegar á las raíces de la ecuacion desde la preparada; otra para la comprobacion de raíces en la preparada; comprobacion de las mismas en la ecuacion primitiva.

puesto los ejemplos ya resueltos por interés simple, para apreciar las ventajas.

Regla de descuento, dos métodos, *letra* ó *pagaré*, *valor nominal*, *valor actual*, *descuento* propiamente dicho. Cómo se prueba la legitimidad del método *rebatido*. Fórmula de este para su adopcion en la práctica (100 + rt) : 100 : : V. nominal : V. actual. Por qué entre nosotros se llama rebatido.

LECCION 50, pág. 162. Repartimientos proporcionales, *regla de compañía*, es de dos modos. Proporcion formular para las cuestiones del primer modo; cómo las cuestiones del segundo se reducen ó cámbian en otras de primero. Cuándo conviene ausiliar el cálculo con el tanto por ciento; cuándo con la tabla del factor constante. Cómo debe procederse cuando á muchos individuos corresponda una misma cuota. Regla conjunta, su definicion, método para resolverla, reduccion del método á regla práctica. Demostracion de esta regla.

LECCION 51, pág. 166. Aligacion, cuándo se llama *media* y cuándo *alternada*. Fórmula para los problemas de aligacion media, regla que de ella surge. En qùé sentido tomamos la palabra *valor*. Qué se entiende por *quilates* en el oro, y qué por *dineros* en la plata; subdivisiones en *granos*. Regla para los problemas de aligacion alternada, ejemplos comprobantes de los antes resueltos en aligacion media. Casos de tres ó mas ingredientes. De las cuestiones llamadas *promedios*, ejemplos.

LECCION 52, pág. 171. Geometría, dimensiones de los cuerpos, sinónimos de la *profundidad*. Definiciones de cuerpo, superficie y línea por las dimensiones; nombres de sus respectivas medidas (valor numérico); punto matemático. Division de la Geometría para su mas fácil estudio. Clases de líneas, distincion entre la curva plana y la no plana. Clases de superficies como las de las líneas. Línea recta, circunferencia: bases de la Geometría elemental. Proposiciones consecuencias de las definiciones que anteceden:

1.ª La línea recta es la mas corta que se puede tirar de un punto á otro punto.

2.ª La medida de la distancia entre dos puntos, se aprecia por la recta tirada del uno al otro.

3.ª Por un punto pueden pasar cuantas rectas se quieran sin confundirse.

4.ª Si dos rectas tienen dos puntos comunes, deberán confundirse en una sola recta.

Rádio, cuerda, y diámetro de una circunferencia.

5.ª Todos los rádios de una circunferencia son iguales, y tambien todos los diámetros.

Igualdad y equivalencia de figuras geométricas, cautela con los recíprocos.

LECCION 53, pág. 173. Angulo, su vértice, sus lados, cómo se lee. Angulos contiguos y opuestos por el vértice; ángulos rectos y oblícuos. Cuándo es una recta perpendicular á otra, y cuándo le es oblícua. Angulo agudo y ángulo obtuso; ángulos complementarios, signo del complemento. En qué consiste el valor de un ángulo, cuál es el arco correspondiente del ángulo recto. Demuéstranse los teoremas siguientes:

1.º Si dos rectas que se cortan coinciden con otras dos, las cuatro se cortarán en un mismo punto.

2.º Por un punto de una recta no puede tirarse á esta mas de una perpendicular.

3.º Todos los ángulos rectos son iguales.

4.º La suma de dos ángulos contiguos vale dos ángulos rectos.

5.º Si tres rectas forman dos ángulos suplementarios, dispuestos como los contiguos respecto de su lado comun, los otros dos lados serán una sola recta.

**

Corolarios.

1.° Si uno de dos ángulos contiguos es recto lo será el otro.

2.° En las rectas la perpendicularidad es mútua.

3.° La suma de ángulos á un lado de una recta con vértice comun en ella, vale dos ángulos rectos.

4.° La suma de ángulos consecutivos al rededor de un vértice comun, vale cuatro ángulos rectos.

5.° Dos ángulos que tengan un mismo suplemento son iguales, y tambien los que tienen un mismo complemento; pero los de complemento opuesto son suplementarios.

6.° Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

7.° Desde un punto esterior no se puede tirar á una recta mas de una perpendicular.

Nombres de los ocho ángulos que pueden formar dos rectas cortadas por una tercera. Rectas concurrentes y rectas paralelas. Proposiciones relativas á las rectas paralelas:

1.ª Dos rectas perpendiculares á una tercera recta son paralelas.

2.ª Por un punto dado fuera de una recta, no se puede tirar á esta mas de una paralela. (Nombre de esta proposicion.)

3.ª Si dos rectas cortadas por otra forman ángulos alternos iguales, serán paralelas.

4.ª Si dos paralelas se cortan por una tercera recta, resultarán iguales los ángulos alternos; luego. . . etc.

5.ª La perpendicular á una de dos paralelas debe ser tambien perpendicular á la otra paralela.

6.ª La recta paralela á una de varias rectas que son paralelas entre sí, deberá ser paralela á cada una de las demas.

7.ª Dos ángulos de lados respectivamente paralelos, ó respectivamente perpendiculares, serán iguales ó suplementarios, segun fueren ó no de una misma especie

LECCION 54, pág. 176. Polígono, sus lados, vértices y contorno; qué es perímetro, qué son polígonos isoperímetros. Cuándo es ó no convexo un polígono. Nombres del polígono segun el número de sus ángulos. Cuadrilátero ó tetrágono. Angulos propios del polígono y ángulos accesorios, ángulo entrante y su efecto, ángulos adyacentes á cada lado, en qué se diferencian de dos contiguos, ángulo esterno. Superficie del polígono, diagonales y sus efectos.

LECCION 55, pág. 177. Triángulo, sus lados y ángulos opuestos, ángulos adyacentes á cada lado. Denominaciones por sus lados y por sus ángulos. Elementos del triángulo rectángulo y sus nombres. Todo lado puede ser base, qué será la altura.

Teoremas.

1.° Un lado de triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
2.° La suma de los tres ángulos del triángulo equivale á la suma de dos ángulos rectos.

Corolarios.

1.° En todo triángulo hay necesariamente dos ángulos agudos.
2.° Un ángulo esterno de un triángulo equivale á la suma de los dos ángulos internos no contiguos del esterno.
3.° Conocido un ángulo y la diferencia de los otros dos, se conocen distintamente los tres ángulos del triángulo.
4.° En todo triángulo á iguales ángulos se oponen iguales lados, y á mayor ángulo se opone mayor lado. Las recíprocas son verdaderas.

Casos de igualdad de triángulos:
1.° Dos lados y ángulo comprendido.
2.° Dos ángulos y lado comprendido.
3.° Los tres lados respectivamente iguales.

4.° Dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo opuesto al mayor de los dos lados.

Idea de las *partes homólogas*. Otras proposiciones:

1.ª La perpendicular bisectriz de una recta . . .

2.ª Dos perpendiculares una á cada lado de un ángulo dado, deben encontrarse.

3.ª Para la perpendicular y oblícuas tiradas á una recta desde un punto esterior: Corolarios. 1.° Distancia de un punto á una recta. 2.° Nunca tres rectas iguales desde el punto á la recta.

4.ª La bisectriz de un ángulo tiene todos sus puntos equidistantes de los lados del ángulo.

LECCION 56, pág. 179. Cuadrilátero, su diagonal, suma de los ángulos, formas del convexo, carácter del trapezoide, del trapecio, del paralelógramo; rectángulo, rombo, cuadrado, romboide; bases del trapecio y del paralelógramo, altura en ambos, cuándo un trapecio será paralelógramo, los ángulos de este qué relaciones tienen entre sí. Proposiciones:

1.ª La diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos iguales.

2.ª Cada lado de un paralelógramo es igual á su opuesto; y recíprocamente, si cada lado de un cuadrilátero es igual á su opuesto, será paralelógramo.

3.ª Dos paralelas equidistan en todos los puntos de su estension indefinida.

4.ª Dos paralelógramos deben ser iguales cuando tengan un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales: luego dos rectángulos de igual base é igual altura, deberán ser iguales.

5.ª Para la suma de los ángulos propios en el polígono convexo de *n* lados, fórmula.

6.ª Para la suma de los ángulos esternos.

7.ª Para la igualdad de dos polígonos por la igualdad respectiva de los triángulos componentes. Teorema recíproco.

Homología de partes en las figuras iguales no triángulos. Idea de los polígonos regulares. Una de las dos condiciones precisa la otra en el triángulo; pero ya no en los demas polígonos. Qué triángulo es regular; qué cuadrilátero.

LECCION 57, pág. 181. Jamas la recta tendrá tres puntos en la circunferencia. Cuándo le será *distante*, *tangente*, *secante*. Cómo se aprecia la distancia de la circunferencia á la recta. Un teorema y su recíproco para la tangente á la circunferencia. El diámetro comparado con las demas cuerdas, y estas entre sí. Semicircunferencias y semicírculos; condicion convencional para determinar el arco por la cuerda. Comparacion de los arcos por sus cuerdas y viceversa. Qué basta para la igualdad de dos circunferencias, y por consiguiente de dos círculos. *Tres puntos que no estén en línea recta, determinan la posicion y magnitud de una circunferencia.*

Graduacion de la circunferencia, grados de un cuadrante, division de los grados y subdivision de los minutos, espresion leida y escrita de los arcos, y de los ángulos medidos por los arcos, valor gradual de un arco, esplícase. Graduacion del ángulo del triángulo equilátero; del ángulo del cuadrado; del ángulo del pentágono regular, y del ángulo del exágono regular. Angulo central y su medida, ángulo inscrito y su medida, relacion entre el ángulo central y el ángulo inscrito cuando los dos interceptan el mismo arco de circunferencia.

LECCION 58, pág. 183. Polígono inscrito en la circunferencia, ó circunferencia circunscrita al polígono; polígono circunscrito á una circunferencia, ó circunferencia inscrita en un polígono. A todo polígono regular se le refieren dos circunferencias concéntricas. Qué es la *corona* ó el *anillo*. Centro, rádios y apotemas del polígono, propiedades de estas rectas. Fórmula del ángulo al centro del polígono regular, fórmula de su ángulo al contorno, suma de estos dos ángulos. Qué polígonos irregulares son inscriptibles, ó circunscriptibles, ó ambas cosas. Cómo se circunscribe una circunferencia á un triángulo dado, y cómo se le inscribe otra. Caso mas fácil del primer problema, caso mas fácil del segundo, caso mas fácil para resolver ambos á la vez.

LECCION 59, pág. 185. Líneas proporcionales, teorema que les sirve de base, otro que demuestra su existencia, otro para la bisectriz de un ángulo de triángulo. Triángulos semejantes, dos condiciones. Teorema que demuestra su existencia. Cómo una de las dos condiciones precisa la otra. Semejanza de triángulos deducida de solo los ángulos, ó de solo los lados, ó de ángulos y lados, y hasta de la posicion de los lados del uno respectivamente á los lados del otro. Un teorema y su recíproco para la semejanza de dos polígonos en general. Qué basta para la semejanza de dos paralelógramos, y qué para la de dos rectángulos. Por qué son semejantes los polígonos regulares de un mismo nombre. La proporcion *perímetro es á perímetro como apotema es á apotema*, cómo da orígen á la razon $\pi =$ etc.

LECCION 60, pág. 187. Problemas gráficos.

Tirar perpendiculares á rectas dadas.

Formar ángulos iguales á otros dados ó de condicion determinada.

Trazar rectas paralelas á otras dadas.

Construir triángulos iguales ó semejantes á triángulos dados.

Construir polígonos iguales ó semejantes á polígonos dados.

Trasformar un trapecio en triángulo equivalente.

Inscribir ó circunscribir á un polígono regular una circunferencia, y recíprocamente.

Hallar el centro de un arco de circunferencia, y el ángulo correspondiente al arco.

Bisecar un ángulo ó un arco de circunferencia.

Dividir en partes 2.ª este arco ó aquel ángulo.

Tirar rectas tangentes á circunferencias, y viceversa.

Hallar el m. d. c. de dos rectas, arcos ó ángulos.

Dividir una recta en partes iguales ó proporcionales.

Hallar una cuarta proporcional á tres rectas, ó una tercera á dos rectas, ó una media entre las dos.

Rectificar la circunferencia; y recíprocamente, hallar el rádio de otra circunferencia equivalente á una recta dada.

LECCION 61, pág. 188. Fórmulas y reglas para determinar las áreas de las figuras planas. El área del paralelógramo. La del trapecio. La del triángulo en general. La del triángulo regular es $=\sqrt{3}\times(\frac{1}{2}L)^2$. La del cuadrado. La del pentágono regular es $=L^2\times1{,}720$. La del exágono regular es $=6$ triángulo equilátero componente. La del polígono regular en general. La del círculo es $=\pi R^2$. La del anillo ó corona es $=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi r'^2$. La del sector de círculo es $=\pi R^2\times\frac{g}{360}$. La del trapezoide. La del polígono irregular que no tenga fórmula propia. Problemas numéricos relativos á las áreas de superficies planas.

LECCION 62, pág. 191. Demuéstranse las seis proposiciones que resultan de la perpendicular á la hipotenusa, tirada desde el vértice del ángulo recto. Aplícanse tambien al diámetro y cuerdas suplementarias. Cuál de dichas proposiciones se llama *Teorema de Pitágoras* y para qué sirve. Se esplican los dos sentidos de esta proposicion. Se generaliza á figuras planas de cualquier forma, con tal que sean semejantes. Fundado en el de Pitágoras, qué otro teorema se demuestra relativo á los cuadrados de los lados de un triángulo cualquiera. Dado el valor numérico de cada lado, cómo se determina la naturaleza del triángulo. Qué fórmula tenemos para determinar el área de un triángulo en funcion de sus tres lados. Qué proporcion sirve para las áreas de las figuras semejantes.

LECCION 63, pág. 194. Clasificacion de los cuerpos geométricos, division de cada clase en sus géneros, relacion ordinal de estos géneros. Qué cosas diferentes ofrece la superficie de un poliedro; carácter de la superficie en el cuerpo redondo. Práctica de la espresada clasificacion sobre cuerpos materiales. Cómo algunos de estos cuerpos se pueden representar en su forma verdadera por medio de agujas hincadas sobre un plano de corcho. Dibujo lineal de estos cuerpos sobre un plano, cautela con los accidentes del escorzo y de la perspectiva.

LECCION 64, pág. 195. Pirámide, sus cosas y nombre de cada cosa. Nombres de la pirámide, especialidad del *tetráedro*. Pirámide regular, su altura, sus apotemas, área de la superficie lateral, área de la superficie total espresada en dos factores. Area de la superficie lateral de una pirámide irregular, área de la superficie total. Volúmen de una pirámide cualquiera. Cómo de la pirámide se puede deducir el cono de base círculo. Generacion de este cono por revolucion cuando es recto. Qué es la superficie cónica propiamente dicha, y cuál su base. Vértice ó cúspide; eje ó altura; arista, lado, generatriz. Area de la superficie cónica en el recto de base círculo. Idem de la superficie total; reduccion de esta á dos factores. Volúmen del cono base círculo, así recto como oblícuo.

LECCION 65, pág. 197. Prisma, sus cosas, nombre de cada cosa. Nombres del prisma segun su base; especialidad del paralelepípedo. Cuándo es regular un prisma, altura de este y de otro cualquiera. Area de la superficie lateral del prisma recto, idem del prisma oblícuo, seccion recta; cómo esta podria ser factor comun para el área de todo prisma; área de la superficie total, reduccion de esta á dos factores en el prisma regular. Volúmen del prisma, sea recto ú oblícuo. Cómo del prisma se puede deducir el cilindro de bases círculos. Otra generacion mas exacta de este cilindro cuando es recto. Qué es la superficie cilíndrica propiamente dicha, y qué sus bases. Altura, eje, arista, lado, generatriz. Area de la superficie cilíndrica en el recto bases círculos, idem de la superficie total, reduccion de esta á dos factores. Volúmen del cilindro bases círculos, así recto como oblícuo.

LECCION 66, pág. 199. Poliedros regulares, cuántos y cuáles. Qué basta saber para determinar el área de la superficie total en cada uno de estos cuerpos. Centro, rádios y apotemas de estos poliedros, conexion de cada uno con dos esferas. Qué recta es factor del volúmen, cómo se suple en los principios de Geometría, tabla de los cinco volúmenes en funcion de L^3. Volúmen del dodecáedro comparado con la doble suma de los demas poliedros regulares, cuando todos tienen la misma arista L.

Esfera, su generacion, la superficie, el sólido, los rádios, los diámetros, las secciones por planos, círculos máximos y círculos menores, hemisferios, segmentos mayor y menor que el hemisferio, base de cada segmento, otros segmentos de dos bases. De quién se considera límite la esfera cuando se deducen fórmulas para determinar la superficie y la solidez de ella. Area de la superficie esférica. Volúmen de la esfera.

LECCION 67, pág. 202. Semejanza de cuerpos geométricos. Idea exacta de la homología de partes, razon de similitud y sus pasos. Cuerpos inmediatamente semejantes por la definicion. Qué basta para la semejanza de dos conos ó de dos cilindros. Razon de líneas, áreas ó volúmenes entre partes homólogas de dos cuerpos semejantes. Cómo se demuestra la existencia de poliedros semejantes. Demostracion de los tetráedros, de las pirámides, etc. Casos en que la razon de dos áreas ó de dos volúmenes es mas simple que la de cuadrados y cubos usada en las formas semejantes.

ERRATAS Y CORRECCIONES.

Pág.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
IV	17	de los números	de dos números
XII	1	$\sqrt{ca^n b^r} =$ $\sqrt[2n]{c a^{nm+n} b^{r+n}}$	$\sqrt{a^m b^r c} =$ $\sqrt[2n]{a^{mn} b^{nr} c^n}$
»	11	Potencia de $\sqrt{-1}$.	Potencias de $\sqrt{-1}$.
7	17	$\overline{1}8122$	$\overline{1}6122$
9	14	3102008×8	3102009×8
14	6	mayor valor	menor valor
24 —	2	75 | 75 | 225 |	25 | 75 | 225 |
27	16	$550 = 2.3^2.5^2$	$450 = 2.3^2.5^2$
» —	1	$\frac{540}{18} = \frac{2.3^2.5^2}{2.3^2}$	$\frac{450}{18} = \frac{2.3^2.5^2}{2.3^2}$
29	16	suprimido el 4 del 12 y del 8,	suprimido el 4 del 12 ó del 8,
»	19	el m. de c. 3,	el m. d. c. 3,
35 —	5	*denominndor*	*denominador*
36 —	1	estas dos divisiones	estos dos divisores
41	5	denominadores	los denominadores
51	9	factores justos.	factores juntos.
52	5	obtendrá	se obtendrá
54 —	2	cuantos factores del 10 haya	cuantos factores 10 haya
56 —	10	El resíduo 2415, Ejemplo 1.°, está corrido un órden á la izquierda.	
67 —	2	contentarse en	contentarse con
71 —	12	espresa *miriámetros*	espresa 7 *miriámetros*

Pág.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
74	— 1	29 maravedises	28,186 maravedises
84	— 10	$=5ab^2c+7bc^3+4abc^3$	$=5ab^2c+7bc^3+4abc^3+a^3bc^2$.
95	— 1	Resíduo 7.	Resíduo — 7.
»	— 7	$+64+\frac{7}{a-8}$.	$+64-\frac{7}{a-8}$.
»	— 11	$+\frac{7}{a-8}$.	$-\frac{7}{a-8}$.
103	3	raizes	raices
		Esta errata se repite varias veces; pero desde el pliego 17 en adelante ya no se ve mas.	
123	— 1	$=2c$ Para comprobar.	$=2c$. Para comprobar
132	— 3	si al dupto	si al duplo
139	7	coeficiente de segundo término	coeficiente del segundo término
141	15	es $=5=$ coeficiente	es $-5=$ coeficiente
161	— 3	de esta proposicion	de esta proporcion
174	15	5.° Si dos rectas	5.° Si tres rectas
190	— 9	4.° Siendo 11761	4.° Siendo 11781

En la tabla de raíces, pág. XIX, línea — 6, mitad de la derecha, dice N. 883; debe decir N. 983.

reduccion de esta á dos factores en el prisma regular. Volúmen del prisma, sea recto ú oblícuo. Cómo del prisma se puede deducir el cilindro de bases círculos. Otra generacion mas exacta de este cilindro cuando es recto. Qué es la superficie cilíndrica propiamente dicha, y qué sus bases. Altura, eje, arista, lado, generatriz. Area de la superficie cilíndrica en el recto bases círculos, idem de la superficie total, reduccion de esta á dos factores. Volúmen del cilindro bases círculos, así recto como oblícuo.

LECCION 66, pág. 199. Poliedros regulares, cuántos y cuáles. Qué basta saber para determinar el área de la superficie total en cada uno de estos cuerpos. Centro, rádios y apotemas de estos poliedros, conexion de cada uno con dos esferas. Qué recta es factor del volúmen, cómo se suple en los principios de Geometría, tabla de los cinco volúmenes en funcion de L^3. Volúmen del dodecáedro comparado con la doble suma de los demas poliedros regulares, cuando todos tienen la misma arista L.

Esfera, su generacion, la superficie, el sólido, los rádios, los diámetros, las secciones por planos, círculos máximos y círculos menores, hemisferios, segmentos mayor y menor que el hemisferio, base de cada segmento, otros segmentos de dos bases. De quién se considera límite la esfera cuando se deducen fórmulas para determinar la superficie y la solidez de ella. Area de la superficie esférica. Volúmen de la esfera.

LECCION 67, pág. 202. Semejanza de cuerpos geométricos. Idea exacta de la homología de partes, razon de similitud y sus pasos. Cuerpos inmediatamente semejantes por la definicion. Qué basta para la semejanza de dos conos ó de dos cilindros. Razon de líneas, áreas ó volúmenes entre partes homólogas de dos cuerpos semejantes. Cómo se demuestra la existencia de poliedros semejantes. Demostracion de los tetráedros, de las pirámides, etc. Casos en que la razon de dos áreas ó de dos volúmenes es mas simple que la de cuadrados y cubos usada en las formas semejantes.

ERRATAS Y CORRECCIONES.

Pág.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
IV	17	de los números	de dos números
XII	1	$\sqrt{c a^n b^r} =$	$\sqrt{a^m b^r c} =$
		$\sqrt[2n]{c a^{nm+n} b^{r+n}}$	$\sqrt[2n]{a^{mn} b^{nr} c^n}$
»	11	Potencia de $\sqrt{-1}$.	Potencias de $\sqrt{-1}$.
7	17	$\overline{1}8122$	$\overline{1}6122$
9	14	3102008×8	3102009×8
14	6	mayor valor	menor valor
24 —	2	75 | 75 | 225 |	25 | 75 | 225 |
27	16	$550 = 2 . 3^2 . 5^2$	$450 = 2 . 3^2 . 5^2$
» —	1	$\frac{540}{18} = \frac{2 . 3^2 . 5^2}{2 . 3^2}$	$\frac{450}{18} = \frac{2 . 3^2 . 5^2}{2 . 3^2}$
29	16	suprimido el 4 del 12 y del 8,	suprimido el 4 del 12 ó del 8,
»	19	el m. de c. 3,	el m. d. c. 3,
35 —	5	*denominndor*	*denominador*
36 —	1	estas dos divisiones	estos dos divisores,
41	5	denominadores	los denominadores
51	9	factores justos.	factores juntos.
52	5	obtendrá	se obtendrá
54 —	2	cuantos factores del 10 haya	cuantos factores 10 haya
56 —	10	El resíduo 2415, Ejemplo 1.°, está corrido un órden á la izquierda.	
67 —	2	contentarse en	contentarse con
71 —	12	espresa *miriámetros*	espresa 7 *miriámetros*

Pág.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
74 —	1	29 maravedises	28,186 maravedises
84 —	10	$=5ab^2c+7bc^3+4abc^3$	$=5ab^2c+7bc^3+4abc^3+a^3bc^2$.
95 —	1	Resíduo 7.	Resíduo — 7.
» —	7	$+64+\frac{7}{a-8}$.	$+64-\frac{7}{a-8}$.
» —	11	$+\frac{7}{a-8}$.	$-\frac{7}{a-8}$.
103	3	raizes	raíces
		Esta errata se repite varias veces; pero desde el pliego 17 en adelante ya no se ve mas.	
123 —	1	$=2c$ Para comprobar.	$=2c$. Para comprobar
132 —	3	si al dupto	si al duplo
139	7	coeficiente de segundo término	coeficiente del segundo término
141	15	es $=5=$ coeficiente	es $-5=$ coeficiente
161 —	3	de esta proposicion	de esta proporcion
174	15	5.º Si dos rectas	5.º Si tres rectas
190 —	9	4.º Siendo 11761	4.º Siendo 11781

En la tabla de raíces, pág. XIX, línea — 6, mitad de la derecha, dice N. 883; debe decir N. 983.

APUNTES DE ARITMÉTICA

RELATIVOS A LAS LECCIONES DEL PROGRAMA.

LECCION 1.

Se llama *Aritmética* la parte de las Matemáticas que enseña á conocer y calcular la cantidad espresada por números.

Calcular es espresar, componer ó descomponer la cantidad.

Cantidad matemática es el cuánto de las cosas, espresado exacta ó aproximadamente por números.

Número es toda espresion que nos dice cuánto es una cantidad respecto de su unidad.

Se llama *unidad* cualquier cantidad conocida que se elige, para determinar por ella otra desconocida del mismo género que la elegida.

La espresion de los números se llama *numeracion*, y es hablada ó escrita: una y otra se regularizan segun el sistema á que se refieran los números.

Sistema de numeracion es el método que se adopta para formar las unidades superiores, con grupos constantes de las inferiores inmediatas: el número regulador de esta composicion se llama *base del sistema*. En el sistema de uso comun la base es el número 10, y por eso se llama *sistema decimal* ó *décuplo*.

Para la numeracion *verbal* ó hablada, segun este sistema, bastan trece palabras, ya pronunciadas como son en sí, ya modificadas convenientemente; y para la escrita ó *gráfica* bastan diez cifras diferentes, que se llaman guarismos de los números.

El número se llama *simple* ó *compuesto*, segun consta de una ó de mas cifras; los guarismos de un número son por sí números simples, y se llaman tambien *números dígitos*.

En el número compuesto cada guarismo tiene, ademas de su valor propio que se llama *absoluto*, otro *valor relativo* al lugar que ocupa en el número: la cifra cero no tiene valor alguno; pero sirve para ocupar los lugares vacíos, é impedir así que disminuya el valor relativo de las cifras situadas á la izquierda del cero. Escepto el cero todas las demas se llaman *cifras significativas*, ya de *valor impar* como 1, 3, 5, 7, 9, ya de *valor par* como 2, 4, 6, 8.

El lugar de cada cifra en el número compuesto, se llama *órden numérico*; y aunque estos órdenes pueden ser cuantos se quieran, basta conocer bien los seis primeros para leer y escribir perfectamente todos los números. Esta admirable propiedad del sistema decimal, se funda en la siguiente proposicion: *La unidad de un órden cualquiera, es décupla de la unidad del órden inferior inmediato.*

En todo sistema se requieren para la numeracion escrita tantas cifras cuantas unidades vale la base, contada entre ellas la de valor nulo: la cifra ó guarismo de mayor valor, en un sistema dado, es igual á la base menos uno.

Aunque en el sistema decimal es muy fácil la lectura de números ya escritos, no lo es tanto la escritura de los hablados. Para esto debe el calculador determinar antes *cuántas cifras se requieren*, *cuáles sean ellas*, y *á qué órden pertenece cada una*: el acierto en este triple juicio, será una buena prueba de la comprension del principiante.

Lectura de números escritos: 4300102; 100350785; 9806030507; 70105703; 408005067; 10112003040507, etc.

Escritura de números hablados: *Ciento nueve mil setenta y dos; un millon cuarenta mil cincuenta; ciento un mil trece millones setenta mil diezisiete; diez mil siete millones doscientos mil ciento seis; siete trillones dos mil seis billones; mil once millones cien mil sesenta y tres*, etc.

LECCION 2.

Proposicion es uno ó mas juicios enunciados con palabras. Las proposiciones de mas frecuente uso en Matemáticas, son :

El *axioma*, que es toda proposicion evidente por sí misma.

La *definicion*, que espone clara, breve y exactamente la naturaleza de una cosa, ó el significado de una palabra : en la definicion no debe entrar el definido.

El *teorema*, que enuncia verdades no evidentes, y que por lo mismo necesita *demostracion*; esto es, un razonamiento que pruebe la verdad enunciada. El teorema, una vez demostrado, tiene ya fuerza de axioma; pero no es, como este, proposicion evidente por sí misma.

El *problema*, que pide hallar una ó mas cantidades desconocidas (llamadas *incógnitas*) por medio de otra ú otras conocidas (llamadas *datos*). Consta de *resolucion* y *demostracion* : en la primera se dan las reglas para hallar lo que se busca, y en la segunda se prueba la verdad de dichas reglas.

Y el *corolario* : proposicion que se infiere, como consecuencia de proposicion evidente, ó de otra ya demostrada.

La operacion que hemos llamado *componer la cantidad*, comprende tres operaciones, que son : Adicion, multiplicacion, y elevacion á potencias.

Y la que hemos llamado *descomponer la cantidad* comprende tambien tres, que son : Sustraccion, division y estraccion de raices.

Todas estas operaciones se practican con datos numéricos de diferentes clases; pero ahora nos limitamos á números enteros abstractos.

Número entero es el que se compone exactamente de unidades iguales.

Número abstracto es el que solo espresa su *cuánto*; pero será *concreto* si ademas espresa el *qué*.

Dos ó mas números concretos á una misma especie, se llaman *ho-*

mogéneos ; pero si espresan especies de distinto género, serán *heterogéneos.*

Para indicar por escrito las operaciones, y espresar con uniformidad y sencillez los cálculos, se usan generalmente los signos que aquí se ven :

$+$ que se lee :	mas ;
—	menos ;
$\times$ ó .	multiplicado por ;
: ó —	dividido por, ó partido por ;
$=$	igual á ;
$<$	menor que ;
$>$	mayor que ;

y otros que en su caso daremos á conocer.

LECCION 3.

Sumar es reunir en un solo número el valor de otros números dados: la operacion se llama *adicion*, y se indica con el signo $+$; sus datos se llaman *sumandos*, y el resultado *suma.*

La espresion $7+3=3+7=10$, es una adicion indicada que nos advierte una verdad importante, á saber: que *el órden de los sumandos no altera la suma.* Si esta verdad la corroboramos con esta otra : *Una suma no se altera cuando uno ó mas sumandos crecen tanto cuanto disminuye otro ú otros*, tendremos una base sólida para apoyar con seguridad las modificaciones que la operacion requiere en ciertos casos.

Bien estudiadas las reglas que se nos dan en la Aritmética para sumar números enteros, es fácil distinguir en ellas lo que es de rigoroso precepto, de lo que solo es un consejo. La escritura de los sumandos, *uno bajo de otro de modo que se correspondan los órdenes homogéneos*, es consejo muy útil por la comodidad y claridad que proporciona al calculador ; pero el *sumar primero las unidades de todos los sumandos, luego las decenas, despues las centenas*, etc., *y* *llevar una unidad para la siguiente suma por cada* 10 *obtenidas en la suma anterior*, es de precepto rigoroso.

Tambien se ve en dichas reglas que por muchos que sean los sumandos, y estos consten de muchas cifras, su adicion se reduce á sucesivas adiciones parciales de números dígitos.

Ejemplos de adicion:

1.º

$$\begin{array}{r} 75386 \\ 8535 \\ 56384 \\ 724836 \\ 97537 \\ 35791 \\ \hline 998469 \end{array}$$

2.º

$$74932 + 69204 + 70803$$
$$+ 45638 + 7946 + 1200032$$
$$= 1468555.$$

Una de las modificaciones convenientes que suele darse á la adicion, es repetirla empezando por la izquierda. Aplicada al primer ejemplo, tendremos

96 decenas de millar .	960000
+ 35 millares	35000
+ 31 centenas. . . .	3100
+ 34 decenas	340
+ 29 unidades. . . .	29
la misma suma anterior.	998469.

Fácil es la adicion; pero muy espuesta á errores: nunca será demasiada la cautela del calculador para evitarlos. Entre los muchos modos de asegurarse está el que llaman *método de cooperacion*: consiste en que dos ó mas personas ejecuten por separado, y cada uno del modo que mas le plazca, la misma operacion hasta llegar á un mismo resultado.

Otro ejemplo: ¿ *Cuánto suman* 103 *centenas* + 401 *decenas* + 739 *centenas de millar* + 15 *decenas* + 542 *millares*?

LECCION 4.

Restar es resolver este problema: *Dados dos números, que se llaman* minuendo *y* sustraendo, *hallar un tercer número que se llama* resta, resto *ó* diferencia, *el cual sumado con el sustraendo recomponga el minuendo*. La operacion se llama *sustraccion*, y se indica con el signo —; de modo que, por ejemplo, $9 - 4 = 5$ es una sustraccion cuyo minuendo es 9, el sustraendo es 4, y el resultado es 5. Segun la definicion de *restar*, no podrá ser verdadera resta un número que sumado con el sustraendo no dé por suma el minuendo: de aquí el tomar esta suma como prueba de la sustraccion.

Por lo regular el minuendo es mayor que el sustraendo, y las cantidades que espresan estas restas se llaman *cantidades positivas*. Cuando el minuendo y sustraendo son iguales, la resta es cero y se llama *cantidad nula*; pero si el sustraendo fuere mayor que el minuendo, entonces la resta se llamará *cantidad negativa*, y se le antepondrá el signo —: de modo que $3 - 8 = -5$, es un ejemplo de este caso, que se lee: 3 *menos* 8 *igual menos* 5. Nunca, pues, deberá confundirse la cantidad negativa con la positiva.

Es muy importante la siguiente proposicion, que fijamos como base: *El valor de una resta, no varía cuando al minuendo y al sustraendo se les añade ó se les quita una misma cantidad.*

Ejemplos de sustraccion:

	1.°	2.°
Minuendo.	908659	385748
Sustraendo.	400613	124000
Resta. . .	508046	261748

3.°	4.°
828696	7850000
379147	3878
449549	7846122

La comprobacion de las restas se hace sumándolas mentalmente con el respectivo sustraendo, y viendo si reaparece el minuendo.

Se llama *complemento aritmético* de un número entero, lo que le falta para valer la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tenga el entero. Esta unidad seguida de ceros se llama *unidad complementaria del número*, la cual es 10 para los números dígitos, 100 para los compuestos de dos cifras, 1000 para los de tres, etc.

La sustraccion se puede cambiar en adicion sumando con el minuendo el complemento del sustraendo, y quitando de la suma la unidad complementaria.

Aplicando este método al ejemplo 4.° tendremos:

Minuendo. . . 7850000

+ Complemento del sustraendo — 10000. . $\overline{1}8122$

Suma = resta anterior = 7846122

Así de cuantos ejemplos se quieran.

LECCION 5.

Multiplicar un número cualquiera por otro que sea entero, es tomar al primer número por sumando tantas veces cuantas unidades tenga el entero. La operacion consiste en una adicion abreviada que se llama *multiplicacion*, y se indica con uno de los signos × ó . ; de modo que v. gr. 7 × 3 significa lo mismo que 7 . 3 : ambas espresiones se leen 7 *multiplicado por* 3. El resultado se llama *producto*; los números que se dan para obtenerlo se llaman *multiplicando* y *multiplicador*, y tambien *factores del producto*.

Limitando por ahora la doctrina á factores ambos enteros, se fijan desde luego las proposiciones siguientes:

1.ª El órden de los factores no altera el producto.

2.ª Un producto contiene á un factor, tantas veces cuantas unidades tiene el otro factor.

3.ª Por cada unidad que aumente ó disminuya un factor, crece ó mengua el producto, tanto cuanto es el otro factor.

4.ª Si uno de dos factores es la unidad, el producto será el otro factor.

5.ª Cero multiplicado por cualquier número y al contrario, da por producto cero.

La multiplicacion de un número por otro, ambos enteros, ofrece los casos siguientes:

1.º Multiplicar un número dígito por otro dígito.

2.º Multiplicar un número compuesto por un número dígito.

3.º Multiplicar un número compuesto por un número compuesto.

Para resolver las cuestiones del primer caso, basta saber de memoria la

Tabla *que contiene los productos de los números dígitos dos á dos.*

2	por	2	4		por	7	21		por	8	40
	por	3	6		por	8	24		por	9	45
	por	4	8		por	9	27	6	por	6	36
	por	5	10	4	por	4	16		por	7	42
	por	6	12		por	5	20		por	8	48
	por	7	14		por	6	24		por	9	54
	por	8	16		por	7	28	7	por	7	49
	por	9	18		por	8	32		por	8	56
3	por	3	9		por	9	36		por	9	63
	por	4	12	5	por	5	25	8	por	8	64
	por	5	15		por	6	30		por	9	72
	por	6	18		por	7	35	9	por	9	81

El 2.º caso de multiplicacion se funda en el 1.º, y en el axioma que compara *un todo con el conjunto de sus partes.*

Ejemplos :	Operacion.
1.º 437028 × 3 = 1311084.	437028 3 ——— 1311084
2.º 785463 × 5 = 3927315.	785463 5 ——— 3927315
3.º 3102008 × 8 = 24816072.	3102009 8 ——— 24816072
4.º 3876542 × 9 = 34888878.	3876542 9 ——— 34888878

Caso 3.º de la multiplicacion : Los ejemplos mas fáciles , se ofrecen cuando uno de los dos factores es la unidad seguida de ceros: *basta para obtener el producto añadir á la derecha del otro factor, los ceros que siguen á la unidad.* Y cuasi tan fáciles como estos, serán los ejemplos en que uno de los dos factores sea un número dígito seguido de ceros : *basta entonces para obtener el producto, multiplicar por el dígito el otro factor , y á la derecha del producto añadir los ceros que seguian al dígito.* En efecto, 129 × 100 = 129 + dos ceros á la derecha = 12900 ; y 342 × 3000 = 1026 + tres ceros á la derecha = 1026000.

Con estas dos reglas y la propia del 2.º caso, se pueden ya resolver cuantos ejemplos se quieran del caso 3.º

Operacion.

1.° $2758 \times 1203 = 3317874$.	8274 5516 2758 ——— 3317874
2.° $2708 \times 243 = 658044$.	8124 10832 5416 ——— 658044

Dése la razon de estas prácticas.

En los ejemplos de este caso puede observarse, que los productos parciales son tantos cuantas cifras significativas haya en el multiplicador; y como ademas sabemos que el órden de los factores no altera el producto, *convendrá tomar por multiplicador el factor que tenga menos cifras significativas.*

Ejemplos:	Operacion.
1.° $321 \times 7849 = 7849 \times 321 = 2519529$.	7849 321 ——— 7849 15698 23547 ——— 2519529
2.° $2009 \times 342 = 342 \times 2009 = 687078$.	342 2009 ——— 3078 684 ——— 687078

3.° $389 \times 7001 = 2723389$.

Obsérvese en este ejemplo que los dos productos parciales, han coincidido en un mismo renglon, cosa bien frecuente en esta operacion.

Las cifras de un producto de números enteros, guardan cierta ley con las de los factores: *cuando los factores sean dos, tendrá el producto tantas cifras cuantas hay en los dos factores ó una menos.*

LECCION 6.

Aunque la multiplicacion es ya una adicion abreviada, se abrevia todavía mas en ciertos casos. Enumeremos los principales, y sus ejemplos los harán comprender.

Caso 1.° *Abreviacion por ceros terminales en uno ó en ambos factores.*

Ejemplo: $2300 \times 5647 = 5647 \times 23 +$ dos ceros á la derecha del producto $= 12988100$.

$$\begin{array}{r} 16941 \\ 11294 \\ \hline 129881 \end{array}$$

Otro ejemplo: $7500 \times 1200 = 75 \times 12 +$ cuatro ceros á la derecha del producto 900; y el producto total será 9000000.

Caso 2.° *Abreviacion por ceros comprendidos entre las cifras del multiplicador.* Véanse los ejemplos 2.° y 3.° al fin de la Leccion 5.

Caso 3.° *Abreviacion por cifras repetidas en el multiplicador.*

Ejemplo: $777 \times 389 = 389 \times 777 = 302253$.

Operacion.

$$\begin{array}{r} 2723 \\ 2723 \\ 2723 \\ \hline \text{Producto} = 302253 \end{array}$$

Caso 4.° *Abreviacion cuando son nueves las cifras del multiplicador.*

Ejemplo: $2983 \times 999 = (2983 \times 1000) - 2983 = 2980017$.

Operacion.
2983000
— 2983

Producto = resta = 2980017

Otro : $2341 \times 1999 = (2341 \times 2000) - 2341 = 4679659.$
4682000
— 2341

Producto = resta = 4679659

Caso 5.° *Abreviacion por factor constante.*

Cuando se prevé que un número compuesto, entrará por factor en muchas multiplicaciones, conviene tener preparada una tabla que contenga los nueve productos de dicho factor por cada uno de los números dígitos; así podrán tomarse de ella cuantos productos parciales se necesiten, y reducir las multiplicaciones á sumas de productos parciales de segura exactitud. El número 31416 está en este caso; entra por factor en muchas de las multiplicaciones que ofrece el estudio de las Matemáticas, y por eso lo preferimos ya ahora, espresándolo por F en la tabla que se ve preparada al márgen.

Aplicacion :
Quiérese el producto de los números
$30207 \times 31416 = 31416 \times 30207.$

Operacion :

219912. . .	7 F
62832	200 F
94248	30000 F

948983112 = producto pedido.

$F \times 1 =$	$F =$	31416
$F \times 2 =$	$2F =$	62832
$F \times 3 =$	$3F =$	94248
$F \times 4 =$	$4F =$	125664
$F \times 5 =$	$5F =$	157080
$F \times 6 =$	$6F =$	188496
$F \times 7 =$	$7F =$	219912
$F \times 8 =$	$8F =$	251328
$F \times 9 =$	$9F =$	282744

Así cuantos ejemplos se quieran; pero aunque en este y los demas pertenecientes á productos de compuesto por compuesto, se ha empezado la multiplicacion por la cifra del menor órden del multiplicador (que es la regla comun) podremos, cuando se necesite, operar en sentido contrario. Lo único indispensable será referir cada producto parcial, al órden mismo de la cifra multiplicadora. Apliquemos este método al último ejemplo, y tendremos

94248	30000 F
62832	200 F
219912 . . .	7 F

Producto = 948983112 como antes.

LECCION 7.

Dividir ó *partir*, en Aritmética es resolver este problema: Dados dos números, que se llaman *dividendo* y *divisor*, hallar un tercer número llamado *cuociente*, el cual multiplicado por el divisor dé por producto el dividendo. La operacion se llama *division*, y se indica con uno de los signos : ó —; de modo que v. gr. 24 : 3, indica lo mismo que $\frac{24}{3}$; pero prevenimos desde ahora que en las espresiones de la forma 24 : 3, leeremos *dividido por*, y en las de la forma $\frac{24}{3}$ leeremos *partido por*: distincion que mas adelante será indispensable. El dividendo y el divisor, colectivamente considerados, se llaman *términos de la division*, ó *términos del cuociente*.

De solo esto se infieren ya las proposiciones siguientes:

1.ª *Todo cuociente debe ser tal que multiplicado por el divisor, reproduzca el dividendo.*

2.ª *Todo número dividido por la unidad, da por cuociente el dividendo.*

3.ª *Todo número dividido por su igual, da por cuociente la unidad.*

4.ª *Cero dividido por cualquier número, diferente de cero, da por cuociente cero.*

La division de los números enteros ofrece muchos casos; pero todos suponen perfectamente entendida la siguiente cuestion: *Dividir por un número dígito otro número dígito, ó un número compuesto de dos cifras tales, que la de segundo órden tenga mayor valor absoluto que el divisor dígito.* Esta operacion, que consiste en descomponer la tabla de los productos de los números dígitos, es la base de la division; y como en la composicion de dicha tabla se fundó la multiplicacion, fácil es inferir la importancia de su conocimiento. Ademas esta division fundamental, descubre *qué cuocientes son exactos, cuáles dejan resíduo* y qué ley sigue este. *El resíduo de la division con números enteros, varía desde cero hasta el divisor menos uno.*

Prévia esta simple cuestion, se puede emprender ya la division de los números enteros en sus diversos casos. Para el efecto los reducimos á solo dos:

Caso 1.° *Dividir un número entero de cuantas cifras se quieran, por un número dígito.*

Caso 2.° *Dividir un número entero de cuantas cifras se quieran, por otro entero que no esceda al dividendo.*

Lo esencial de las reglas que se dan para resolver los problemas del caso 1.°, se puede compendiar en la siguiente: *Tómese de cada órden del dividendo, empezando por la izquierda, la parte que diga el dígito, y escríbase cada cifra del cuociente en el órden numérico que le corresponda.*

He aquí un solo ejemplo para todos los divisores dígitos:

	Divisores.	Cuocientes.
Dividendo 27720 :	2 =	13860
	3 =	9240
	4 =	6930
	5 =	5544
	6 =	4620
	7 =	3960
	8 =	3465
	9 =	3080

Los ejemplos mas fáciles del caso 2.°, son todos aquellos que tienen por divisor á la unidad seguida de ceros, pues se resuelven inmediatamente por la siguiente regla: *Sepárense del dividendo á su derecha tantas cifras cuantos ceros tenga el divisor; las cifras separadas espresarán el resíduo, y las demas que hubiere en el dividendo espresarán el cuociente entero.*

Ejemplos: 523 : 10 = 52 de cuociente y 3 de resíduo.
2.° 3661 : 100 = 36 de cuociente, y 61 de resíduo.
3.° 430000 : 1000 = 430 de cuociente exacto.
4.° 129 : 1000 = 0 de cuociente y 129 de resíduo.

LECCION 8.

Despues de los ejemplos que tienen por divisor la unidad seguida de ceros, vienen los de cuociente dígito: estos se conocen en que el dividendo es mayor que el divisor, y menor que el décuplo del divisor. Para determinar con seguridad la cifra única del cuociente, *inclúyase cada órden del divisor en su homogéneo del dividendo un mismo número de veces, el mayor posible, y este número será el cuociente.*

Ejemplos:

Dividendo.	Divisor 2459
9839	
Resíduo 3	Cuociente 4 que × 2459 es 9836
	+ 3
	Comprobacion. . . 9839
2.° 1026	499
Resíduo 28	
	2
	998
	+ 28
	Comprobacion. . · 1026

3.° 19662 | 4918
Resíduo 4908   3

$$\begin{array}{r} 14754 \\ +\ 4908 \\ \hline \end{array}$$

Comprobacion. . 19662

Aunque para la seguridad del cuociente exige nuestra regla que cada órden del divisor se incluya en su homogéneo del dividendo, como se ha hecho en el primer ejemplo, puede suspenderse este tanteo en aquel órden que deje un resíduo igual ó mayor que el cuociente tanteado; porque entonces este cuociente será verdadero. Así lo hemos hecho en el 2.° ejemplo; pero si en el 3.° omitiéramos, por sobrada confianza, el tanteo de la última cifra, hallaríamos por cuociente 4, en vez de 3 que es el verdadero. Esta observacion basta para recomendar la observancia de la regla.

Un cociente entero, dice con sus unidades cuántas veces (QUOTIES) está el divisor contenido en el dividendo; luego de este podrá restarse aquel las veces que dice el cuociente. De aquí viene el decir que la division *es una sustraccion abreviada*; en muy pocos casos podrá esto ser dudoso: he aquí el 2.° ejemplo resuelto por sustraccion, y júzguese . . . . .
$$\left\{\begin{array}{l} 1026 - 499 = 527 \\ 527 - 499 = 28 \end{array}\right.$$

Para los demas ejemplos del caso 2.°, usaremos de la siguiente regla: *Tómense á la izquierda del dividendo tantas cifras como hay en el divisor, ó una mas si es necesario, para formar un dividendo parcial de cuociente dígito; y este cuociente será la primera cifra del total que se busca. A la derecha del resíduo que deje esta primera division, escríbase la primera cifra que sigue en el dividendo á las ya tomadas; y se tendrá un segundo dividendo parcial, que dará la segunda cifra del cuociente y su resíduo, por el mismo método que la cifra anterior. Continúese de este modo hasta haber tomado la cifra de las unidades del dividendo total, y haber obtenido la cifra de las unidades del cuociente. Si aun queda algo, esto será el resíduo final; pero si nada queda, se tendrá cuociente exacto.*

Prévia esta regla, vamos á su práctica.

Ejemplos:

1.°

Dividendo.		Divisor.
. . .		| 523 = D
388066		
2196		742 Cuociente.
1046		
	Productos sustraendos.	3661 = D × 700
0		2092 = D × 40
		1046 = D × 2
		388066 Comprobacion.

2.°

. . . . .		
11742346		| 295 = D'
2892		
2373		39804
1346		
	Productos sustraendos.	885 = D × 30000
166		2655 = D × 9000
		2360 = D × 800
		1180 = D × 4
		+ 166 = Residuo.
		11742346 Comprobacion.

Cuando se prevé que algun número compuesto, ha de ser divisor constante para muchos cuocientes, conviene tener preparada de antemano una tabla que contenga los productos de dicho divisor por cada uno de los nueve números dígitos. Ella evitará el enojoso tanteo de los cuocientes parciales; dará ya hechos y asegurados los productos sustraendos; facilitará mucho la division, reduciéndola á sustracciones sencillas, y dará por fin al resultado la exactitud deseada.

El número 31416, que en la Leccion 6 espresamos por F, no solo es frecuentísimo como factor, si que tambien como divisor. Veamos el uso de su tabla en el siguiente ejemplo:

23342399	31416
135119	743
94559	
311	219912 = F × 700
	125664 = F × 40
	94248 = F × 3
	+ 311 = Residuo.
	23342399 Comprobacion.

Al dividir un número compuesto por otro compuesto, se puede saber desde luego cuántas cifras tendrá el cuociente entero; porque *deben ser tantas mas una, cuantas hay á la derecha del primer dividendo parcial.* Luego cuando un cuociente deba tener nueve ó mas cifras, será muy útil el uso de una tabla con las condiciones dichas, aunque el divisor no se repita. He aquí un ejemplo, de que mas adelante haremos uso, resuelto ahora por el método que aconsejamos:

Dividendo.		Tabla.
470000000000		23 × 1 = 23
100		23 × 2 = 46
80		23 × 3 = 69
110	23 Divisor.	23 × 4 = 92
180		23 × 5 = 115
190	20434782608 Cuociente.	23 × 6 = 138
60		23 × 7 = 161
140		23 × 8 = 184
200		23 × 9 = 207
16		

Hágase prever la admirable propiedad que encierra este cuociente.

LECCION 9.

Estudiadas las cuatro operaciones con números enteros, es fácil descubrir relaciones entre ellas, que no pudieron inferirse del estudio particular de cada operacion. He aquí las principales consignadas en las proposiciones siguientes:

1.ª Si un producto de dos factores se parte por uno de ambos, se tendrá por cuociente el otro factor.

2.ª Si uno de los factores de un producto se multiplica ó parte por un *número*, todo el producto resultará multiplicado ó partido por dicho *número*.

3.ª El valor de un producto, no se altera cuando uno de sus factores se multiplica por el mismo número por quien otro factor se parte.

4.ª Si el dividendo se multiplica ó parte por un *número*, resultará el cuociente multiplicado ó partido por dicho *número*; pero si es el divisor quien se multiplica ó parte, resultará el cuociente partido ó multiplicado.

5.ª El valor de un cuociente no se altera cuando sus dos términos se multiplican ó parten por un mismo número.

Pruebas de las cuatro operaciones: *Probar una operacion es hacer otra, ó repetir la misma con alguna modificacion que no altere el resultado que se busca*, para conocer si el resultado que se examina es ó no verdadero.

Aunque la adicion se comprueba por sí misma, como indicamos en la Leccion 3, puede á veces recibir muy eficaces ausilios de la multiplicacion. Supongamos que la adicion de veinte números ha dado una suma S, que vamos á comprobar. Pero examinados los datos descubrimos, á pesar de su desórden, que el número 3429 está repetido 9 veces; que el 12053 está repetido 7 veces, y que el 103904 lo está 4 veces: luego practicando la operacion que aquí se ve, tendremos el verdadero valor de S con brevedad y seguridad.

Operacion.

$$\begin{array}{r} 3429 \times 9 = 30861 \\ 12053 \times 7 = 84371 \\ 103904 \times 4 = 415616 \\ \hline S = .\ .\ .\ .\ 530848 \end{array}$$

Definida la sustraccion, surje como corolario su comprobacion por adicion: este es el modo mas breve y fácil. Pero como la sustraccion ofrece al principiante ocasion muy oportuna para adiestrarse en el cálculo por complemento aritmético, que necesitará mas adelante, le aconsejamos su uso como medio comprobante.

En la 1.ª proposicion de la Leccion presente, está indicado el método comun de comprobar los productos de dos factores; pero si hay oportunidad, se pueden preferir otros medios. Supongamos que hallado el producto $936 \times 25 = P$, se quiera comprobar aplicándole la proposicion 3.ª, y digamos, $936 : 4 = 234$; $25 \times 4 = 100$; luego $P = 234 \times 100 = 23400$. Este método tiene sobre el primero la ventaja de la pluralidad de factores.

La division tiene como la sustraccion, su operacion comprobante en la definicion propia; sin embargo, cuando la ocasion se presta puede preferirse otro método. Si por ejemplo, tenemos $7234 : 125 = Q$, podremos decir, en uso de la proposicion 5.ª, que el valor de Q debe ser igual á $57872 : 1000 = 57$ de cuociente, y 872 de residuo: sin mas artificio que haber multiplicado por 8 los dos términos de Q.

LECCION 10.

El número entero que partiendo á un entero da cuociente exacto, se llama *divisor*, *factor*, *submúltiplo*, ó *parte alícuota del dividendo*. Todo número tiene precisamente dos factores, que son *la unidad* y *el mismo número*: el que no tiene otros factores se llama *número primo*; pero el que ademas tiene otros factores se llama *múltiplo de ellos*. Así, el 7 por ejemplo, es un número primo, porque solo tiene por factores al 1 y al mismo 7; pero el 12 es un múltiplo de 2, 3, 4, 6, porque tiene estos factores ademas del 1 y 12.

Los divisores de un múltiplo, se llaman *factores simples* cuando son primos; y se llaman *factores compuestos* cuando no son primos: v. gr. entre los factores del 12, son factores simples el 2 y el 3; pero son factores compuestos el 4 y el 6.

Para cada factor de un múltiplo, hay necesariamente otro factor que multiplicado por el primero da el múltiplo; estos dos, sean los que fueren, se llaman *factores apareados del múltiplo*: entre los factores del número 24, que son 2, 3, 4, 6, 8, 12, son apareados los números 2 y 12; 3 y 8; 4 y 6.

Conviene mucho retener en la memoria los factores 2 y 5, que son apareados del 10; los 4 y 25, que son apareados del 100; los 8 y 125, que lo son del 1000, etc., pues son de frecuentísimo uso.

He aquí otras notas ó caracteres de los números que tambien deben retenerse en la memoria.

Es *número par*, el que tiene mitad exacta, y se conoce por su terminacion en cero ó en cifra de valor par.

Es *número impar*, el que no tiene mitad exacta, y se conoce por su terminacion en cifra de valor impar.

Es *múltiplo de* 2, el número que termina en cero, ó en cifra de valor par; y lo es de 5, si termina en cero ó en 5.

Es *múltiplo de* 4 un número, cuando lo es en sus dos primeras cifras de la derecha; y lo es de 25, cuando multiplicado por 4 da dos ceros terminales.

Es *múltiplo de* 8 un número, cuando lo es en sus tres primeras cifras de la derecha; y lo será de 125, si multiplicado por 8 dá tres ceros terminales.

Es *múltiplo de* 3 un número, cuando lo es la suma de los valores absolutos de todas sus cifras: si esta suma fuere un múltiplo de 9, el número lo será tambien. El múltiplo de 9, es necesariamente múltiplo de 3; pero el múltiplo de 3 no es preciso que lo sea del 9.

Son *múltiplos de* 11 los números de dos cifras, siempre que estas sean iguales, como 22; 55; 88; 99. Mas para conocer esta propiedad en los demas números, sirve la siguiente regla: *Súmense los valores absolutos de las cifras de órden impar, contando de derecha á izquierda; súmense aparte los valores absolutos de las cifras de órden par; réstese esta suma de la primera; y si la diferencia es un múltiplo de 11, el número propuesto lo será tambien.*

Otra regla: *Divídase el número en secciones de á dos cifras, contando de derecha á izquierda; si la suma de valores absolutos de estas secciones es un múltiplo de 11, tambien lo será el número propuesto.*

Este segundo método, ademas de su analogía con el dado para los múltiplos de 9, tiene la ventaja de evitar los resultados negativos, y hasta de esplicarlos cuando urje su interpretacion.

El número que no es múltiplo de 2 ni de 3, lo será de ambos si se le añade ó quita una unidad.

Aunque hay regla para conocer los *múltiplos de* 7, es mas fácil en números de pocas cifras averiguarlo por tanteo.

Es de indispensable necesidad para el estudio de los números múltiplos, un conocimiento prévio de los números primos. Pronto ampliaremos los medios de conocer estos; mas por ahora sépanse de memoria los comprendidos entre 1 y 100: cosa fácil, pues no hay mas de 25, y de estos solo hay uno en la última decena.

LECCION 11.

La teoría de los factores de los números, requiere una suficiente idea de las potencias de los números enteros, para llenar la condicion de espresar los múltiplos en productos de potencias de sus factores primos.

El producto de factores iguales, ó de un número que se repita por factor dos ó mas veces, se llama *potencia* del factor repetido, y este se llama *raíz* de aquella potencia. El número 9, por ejemplo, es la 2.ª potencia ó el *cuadrado* del 3; y el 3 es la raiz 2.ª, ó la raiz *cuadrada* del 9: el número 8 es la 3.ª potencia ó el *cubo* de 2; y el 2 es la raiz 3.ª ó la raiz *cúbica* del 8 : el número 16 es la 4.ª potencia del 2 ; y el 2 es la raiz 4.ª del 16. Así de otros números.

Estos mismos conceptos, espresados en debida forma, se escriben y se leen como aquí se ve.

Se escriben :		Se leen :
$9 = 3.^2$	9	= 3 elevado á 2, ó = 2.ª potencia de 3, ó = cuadrado de 3.
$8 = 2.^3$	8	= 2 elevado á 3, ó = 3.ª potencia de 2, ó = cubo de 2.
$16 = 2.^4$	16	= 2 elevado á 4, ó = 4.ª potencia de 2.

Cada uno de los números que, en menor tamaño, se escribe encima á la derecha del número raíz, se llama *esponente* de la potencia. Cuando un número no lleva esponente, se le sobreentiende el 1, que solo se escribe siendo necesario.

El esponente se llama tambien *índice*, porque indica las veces que la raiz entra por factor; de modo que, por ejemplo, 3^4 diremos que es igual á 81, porque este es el producto de $3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Descomponer un número en sus factores simples, es propiamente la *análisis* del número; y recomponer el número con sus elementos ó factores primos, es la *síntesis*: operaciones que se comprueban mútuamente, é instruyen mucho acerca de la naturaleza de los números. Ved aquí una muestra de este doble ejercicio, tan necesario para los principiantes :

Análisis.	Síntesis.
$18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2.$	$3^2 . 5 = 9 . 5 = 45 .$
$24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$	$2^3 . 7 = 8 . 7 = 56 .$
$36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$	$2^5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32$
$72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$	$2^4 . 3 = 16 . 3 = 48$
$63 = 9 \times 7 = 3^2 \times 7$	$2^3 . 3^2 . 5^2 = 8 . 9 . 25 = 1800$
etc.	etc.

Mas para *descomponer en sus factores primos un número compuesto cualquiera*, divídase el número por 2 todas las veces que se pueda; luego el último cuociente de las divisiones por 2, divídase por 3 todas las veces que se pueda; y continuando así las divisiones ordenadamente por los primos 5, 7, 11 . . . que las permitan, se llegará á un cuociente que deberá ser número primo, el cual, dividido por sí mismo, dará de cuociente el 1 por fin de la operacion.

Ejemplos:

1.º		2.º		3.º	
1260	2	1452	2	2310	2
630	2	726	2	1155	3
315	3	363	3	385	5
105	3	121	11	77	7
35	5	11	11	11	11
7	7	1		1	
1					

Sus resultados son:

1.º $1260 = 2^2 . 3^2 . 5 . 7$

2.º $1452 = 2^2 . 3 . 11^2$

3.º $2310 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11$

Aplíquese á estos resultados la proposicion siguiente, para conocer cuanto antes su importancia: *Suprimir en un producto uno ó mas factores, equivale á dividir el producto por el producto de los factores suprimidos.*

Obtenidos los factores simples, que son los elementos del múltiplo, es ya fácil hallar los compuestos, en uso de los diversos métodos que para esto dan los autores. Ved aquí el método de Vallejo, aplicado al número 675, para determinar por un cálculo seguido, tanto sus factores simples como sus compuestos.

Operacion.

675	3				
225	3	9			
75	3	. .	27		
25	5	15	45	135	
5	5	75	75	225	675)
1					

Este ingenioso método da todos los factores del número propuesto, ordenados en secciones segun su grado de composicion. En el primer espacio interlineal aparecen los factores simples; en el 2.° los factores compuestos de á dos simples; en el 3.° los compuestos de á tres; y así hasta llegar á obtener por último resultado el número propuesto, formado por el producto de todos los factores simples.

El número total de factores diversos de un múltiplo cualquiera, es igual al producto de los esponentes de sus factores primos, aumentado en 1 *cada esponente*. Si este número total resultáre impar, será indicio cierto de que el número propuesto es cuadrado.

Aplicada esta regla al número de nuestro último ejemplo, escrito así: $675 = 3^3 \times 5^2$, revela en él 12 factores, y en efecto son los que tiene.

Si todos estos factores los escribimos en una línea, ordenados de menor á mayor como aquí se ven,

$$1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675,$$

observaremos fácilmente que los equidistantes de los estremos de la línea son apareados: en efecto, $1 \times 675 = 675$; $3 \times 225 = 675$; $5 \times 135 = 675$; . . . . $25 \times 27 = 675$.

Luego si para el número 675 no hubiéramos hallado factores menores que el 26, como son todos los seis contados de 1 á 25, tampoco los habríamos hallado mayores que el 26, como son todos los seis contados de 27 á 675; y por consiguiente, el número propuesto seria primo.

En tan admirable propiedad se funda la mejor regla que tenemos para conocer si un número dado, es ó no primo. He aquí la proposicion en que esta regla se enuncia: *Si un número, no cuadrado, no tiene factores menores que su raíz, tampoco los tendrá mayores, y por consiguiente será número primo.*

LECCION 12.

Máximo divisor comun de varios números, es el mayor número que puede dividir exactamente á todos ellos: se indica así m. d. c. de. . .

Cuando los números dados, no son de muchas cifras, suele determinarse á la simple vista; por ejemplo, el m. d. c. de 20, 30 y 50, es = 10. El m. d. c. de 16, 40 y 56, es = 8, etc.

Si hallado el m. d. c. se dividen por él todos los datos, los cuocientes que se obtengan serán *números primos entre sí*; esto es, números que solo tienen al 1 por factor comun, como puede verse en los dos ejemplos que preceden.

Dos números consecutivos, son primos entre sí. Esta propiedad, y la regla que vamos á dar para el m. d. c. de *dos números*, se funda en la proposicion siguiente: *Si dos números tienen un factor comun, la suma de ambos, la diferencia de los mismos, y el resíduo de su mútua division, tendrán tambien aquel factor comun.*

Regla *para hallar el m. d. c. de dos números enteros cualesquiera.* Divídase el mayor por el menor; luego divídase este por el resíduo; luego este primer resíduo divídase por el segundo resíduo, y contiúese de este modo hasta llegar á un cuociente exacto: el divisor que haya dado este cuociente, será el máximo buscado.

He aquí esta regla aplicada á ejemplos. Quiérase el m. d. c. de los número 527 y 289; y operando como aquí se ve

527	289	238	51	34	17
	1	1	4	1	2

, hallamos por resultado el número 17.

Si los datos fueran 319 y 186, por el mismo método

319	186	133	53	27	26	1
	1	1	2	1	1	26

, hallaríamos m. d. c. de 319 y 186 = 1.

El 1.º de estos ejemplos nada ofrece de particular, da el máximo divisor pedido; pero el 2.º reclama nuestra atencion con su resultado = 1. Siempre que se llegue á este resultado, debe inferirse que los datos son primos entre sí. Y no es menester esperar al fin de la operacion, puede conocerse esto mucho antes; tan luego como se llegue á un divisor que, siendo número primo, no dé cuociente exacto, se tiene evidencia del suceso: el divisor 53 de nuestro ejemplo nos lo advierte con su residuo.

Cuando se quiera el m. d. c. de tres ó mas números puede servir la misma regla, buscándolo desde luego para los dos menores, y en seguida buscarlo para este resultado, y uno de los datos que no entraron en el cálculo; continuando de este modo hasta el último dato.

Pero si los datos estuvieren espresos en potencias de sus factores primos, la operacion es mas breve y fácil: *Tómese de cada factor primo comun la menor potencia, ó una de ellas si fueren iguales; y el producto de las potencias tomadas, será el m. d. c. de todos los números dados.* He aquí ejemplos:

Datos.	1.°
$216 = 2^3 . 3^3$	Producto de las potencias tomadas
$324 = 2^2 . 3^4$	$= 2 \times 3^2 = 18 =$ m. d. c. de 216; 324; 450.
$550 = 2 . 3^2 . 5^2$	
	2.°
$504 = 2^3 . 3^2 . 7$	
$180 = 2^2 . 3^2 . 5$	Luego $2^2 \times 3^2$
$540 = 2^2 . 3^3 . 5$	$= 36$, es el m. d. c. de 72; 180; 504; 540.
$72 = 2^3 . 3^2$	

Para mas conocer las ventajas de este método, llenemos el objeto del m. d. c., que es dividir por él los datos.

El ejemplo 1.° da $\dfrac{216}{18} = \dfrac{2^3 . 3^3}{2 . 3^2} = 2^2 \times 3 = 12;$

$$\frac{324}{18} = \frac{2^2 . 3^4}{2 . 3^2} = 2 \times 3^2 = 18;$$

$$\frac{540}{18} = \frac{2 . 3^2 . 5^2}{2 . 3^2} = 5^2 = 25.$$

El ejemplo 2.° da $\dfrac{504}{36} = \dfrac{2^3 . 3^2 . 7}{2^2 . 3^2} = 2 \times 7 = 14;$

$$\frac{180}{36} = \frac{2^2 . 3^2 . 5}{2^2 . 3^2} = 5;$$

$$\frac{540}{36} = \frac{2^2 . 3^3 . 5}{2^2 . 3^2} = 3 \times 5 = 15;$$

$$\frac{72}{36} = \frac{2^3 . 3^2}{2^2 . 3^2} = 2.$$

Fijando la atencion en los cuocientes se observa, que si bien 12, 18, 25, son en totalidad primos entre sí, y lo mismo los cuocientes 14, 5, 15, 2; no son estos números de los que llaman primos entre sí *dos á dos*: porque 12 y 18 tienen el factor 6; 14 y 2 tienen al 2; 5 y 15 tienen al 5. Compréndase bien esta distincion para no confundir las ideas en adelante.

LECCION 13.

Mínimo comun múltiplo de varios números dados, es el menor número que puede dividirse exactamente por cada uno de los números dados: se indica así m. c. m. de. . .

Para hallarlo suprímanse desde luego aquellos datos que fueren factores de otros, y cada uno de los restantes descompóngase en potencias de sus factores primos. Despues tómese de cada factor primo la mayor potencia, ó una de ellas si son iguales, y el producto de las potencias tomadas será el m. c. m. *de todos los números dados.* La supresion de datos aquí prescrita, no altera el valor del resultado, y ademas facilita la operacion.

Ejemplos :

1.° m. c. m. de $(2, 3, 4, 6, 8, 12) = N =$ m. c. m. de $(8$ y $12)$

Operacion.

$8 = 2^3$	Producto de potencias
$12 = 2^2 . 3$	tomadas $2^3 \times 3 = 24 = N$.

2.° m. c. m. de $(4, 8, 16, 30, 27) = N' =$ m. c. de $(16, 30, 27)$

Operacion.

$16 = 2^4$	Producto de potencias
$30 = 2 . 3 . 5$	tomadas $2^4 \times 3^3 \times 5 = 16 \times 27 \times 5 = 2160 = N'$.
$27 = 3^3$	

Para determinar el m. c. m. hay tambien otro método, que se funda en la siguiente proposicion: *Si el producto de dos números, se parte por el máximo divisor comun de ellos, el cuociente será mínimo comun múltiplo de los dos números.*

Resolvamos por este método los ejemplos que anteceden. El 1.° reducido á m. c. m. de (8 y 12) da 4 para m. d. c. de (12 y 8); luego suprimido el 4 del 12 y del 8, y multiplicando el cuociente por el número que quedó intacto, se hallará $3 \times 8 = 2 \times 12 = 24$.

El 2.° reducido á m. c. m. de (16, 30, 27), nos da para el 30 y 27 el m. de c. 3, y el producto $10 \times 27 = 9 \times 30 = 270$. Pero 270 y 16, dan por m. d. c. al 2, y el producto $270 \times 8 = 16 \times 135 = 2160$. Resultados ambos idénticos á los obtenidos por el primer método. La ventaja de este 2.° método, solo será evidente cuando se aplique á cuestiones de dos datos; para los casos de muchos datos es mejor el primer método.

Todo número es de sí mismo el máximo divisor y el mínimo múltiplo; luego ni el m. d. c. de varios números podrá ser mayor que el menor dato, ni el m. c. m. de ellos podrá ser menor que el dato mayor.

Por consiguiente, cuando uno de los datos para el m. d. c. sea factor de los otros, él deberá ser el m. d. c. de todos; y cuando uno de los datos para el m. c. m. sea múltiplo de los demas, él deberá ser el m. c. m. de todos los datos. Estas condiciones son las mas favorables que puede ofrecer el cálculo del m. d. y del m. m., y por ello las llamaremos *caso próspero*; por el contrario, llamaremos *caso adverso* al que ofrezca para datos de una de estas operaciones números primos entre sí.

Para ampliar el importante conocimiento de los factores de los números, ponemos á continuacion una tabla, por cuyo medio se determina inmediatamente la naturaleza de cualquier número entero desde 1 hasta 2840. Esta tabla escluye desde luego los números primos y los que sean múltiplos de 2, 3 ó 5: de modo que si un número, que privado de los factores 2, 3, 5, es < 2840, no está en la tabla, dígase con toda seguridad que es número primo. Para los demas números están las columnas de la tabla apareadas por las letras N y F: la columna N contiene los números, y los factores de estos van espresos en la columna F contigua á la derecha.

Quiérase, por ejemplo, saber por dicha tabla la naturaleza del número 2127; y aunque no sale del límite, no lo busco en ella hasta quitarle el factor 3, que deja el cuociente 709: busco en la tabla este cuociente, y no estando lo califico de primo, diciendo con toda seguridad que el número 2127 es un compuesto de los factores primos 3×709. Si el número propuesto fuera 2121, operando del mismo modo veria que el dato es un compuesto de los tres factores primos $3\times7\times101$.

Quiérase, por fin, los factores del número 1147; y como carece de los factores 2, 3, 5, lo busco en la tabla y hallo $1147=31\times37$: este ejemplo, sin la tabla hubiera apurado la paciencia del calculador mas sufrido.

TABLA

PARA DETERMINAR LOS FACTORES DE LOS NUMEROS ENTEROS

COMPRENDIDOS ENTRE 1 Y 2840.

N.	F.	N.	F.	N.	F.	N.	F.	N.	F.
49	7. 7	451	11.41	749	7.107	1027	13.79	313	13.101
77	7.11	69	7.67	63	7.109	37	17.61	31	11.11.11
91	7.13	73	11.43	67	13.59	43	7.149	33	31.43
119	7.17	81	13.37	79	19.41	57	7.151	37	7.191
21	11.11	93	17.29	81	11.71	67	11.97	39	13.103
33	7.19	97	7.71	91	7.113	73	29.37	43	17.79
43	11.13	511	7.73	93	13.61	79	13.83	49	19.71
61	7.23	17	11.47	99	17.47	81	23.47	51	7.193
69	13.13	27	17.31	803	11.73	99	7.157	57	23.59
87	11.17	29	23.23	17	19.43	111	11.101	63	29.47
203	7.29	33	13.41	33	7.7.17	21	19.59	69	37.37
9	11.19	39	7.7.11			27	7.7.23	79	7.197
17	7.31			41	29.29	33	11.103	87	19.73
21	13.17	51	19.29	47	7.11.11	39	17.67	91	13.107
47	13.19	53	7.79	51	23.37	41	7.163	93	7.199
53	11.23	59	13.43	69	11.79	47	31.37	97	11.127
59	7.37	81	7.83	71	13.67	57	13.89	403	23.61
87	7.41	83	11.53	89	7.127	59	19.61	11	17.83
89	17.17	89	19.31	93	19.47	69	7.167	17	13.109
99	13.23	611	13.47	99	29.31	77	11.107	21	7.7.29
301	7.43	23	7.89	901	17.53	83	7.13.13	41	11.131
19	11.29	29	17.37	13	11.83	89	29.41	57	31.47
23	17.19	37	7.7.13	17	7.131	99	11.109	63	7.11.19
29	7.47	49	11.59	23	13.71	207	17.71	69	13.113
41	11.31	67	23.29	31	7.7.19	11	7.173	77	7.211
43	7.7.7	71	11.61	43	23.41	19	23.53	501	19.79
61	19.19	79	7.97	49	13.73	41	17.73	7	11.137
71	7.53	89	13.53	59	7.137	43	11.113	13	17.89
77	13.29	97	17.41	61	31.31	47	29.43	17	37.41
91	17.23	703	19.37	73	7.139	53	7.179	19	7.7.31
403	13.31	7	7.101	79	11.89	61	13.97	29	11.139
7	11.37	13	23.31	89	23.43	67	7.181	37	29.53
13	7.59	21	7.103	1001	7.11.13	71	31.41	41	23.67
27	7.61	31	17.43	3	17.59	73	19.67	47	7.13.17
37	19.23	37	11.67	7	19.53	309	7.11.17	61	7.223

N.	F.	N.	F.	N.	F.	N.	F.	N.	F.
1573	11.11.13	1829	31.59	2077	31.67	2327	13.179	2573	31.83
77	19.83	37	11.167	93	7.13.23	29	17.137	81	29.89
89	7.227	41	7.263	101	11.191	53	13.181	87	13.199
91	37.43	43	19.97	7	7.7.43	59	7.337	97	7.7.53
603	7.229	49	43.43	17	29.73	63	17.139	99	23.113
31	7.233	53	17.109	19	13.163	69	23.103	2603	19.137
33	23.71	59	11.13.13	23	11.193	87	7.11.31	11	7.373
39	11.149	83	7.269	47	19.113	401	7.7.7.7	23	43.61
43	31.53	91	31.61	49	7.307	7	29.83	27	37.71
49	17.97	97	7.271	59	17.127	13	19.127	29	11.239
51	13.127	903	11.173	67	11.197	19	41.59	39	7.13.29
61	11.151	9	23.83	71	13.167	29	7.347	41	19.139
73	7.239	19	19.101	73	41.53	31	11.13.17	51	11.241
79	23.73	21	17.113	77	7.311	43	7.349	53	7.379
81	41.41	27	41.47	83	37.59	49	31.79	69	17.157
87	7.241	37	13.149	89	11.199	53	11.223	81	7.383
91	19.89	39	7.277	91	7.313	61	23.107	701	37.73
703	13.131	43	29.67	97	13.13.13	71	7.353	17	11.13.19
11	29.59	57	19.103	201	31.71	79	37.67	23	7.389
17	17.101	61	37.53	9	47.47	83	13.191	37	7.17.23
27	11.157	63	13.151	19	7.317	89	19.131	43	13.211
29	7.13.19	67	7.281	27	17.131	91	47.53	47	41.67
39	37.47	69	11.179	31	23.97	97	11.227	59	31.89
51	17.103	81	7.283	33	7.11.29	2501	41.61	61	11.251
57	7.251	91	11.181	49	13.173	7	23.109	71	17.163
63	41.43	2009	27.41	57	37.61	9	13.193	73	47.59
69	29.61	21	43.47	61	7.17.19	13	7.359	79	7.397
71	7.11.23	23	7.17.17	63	31.73	19	11.229	83	11.11.23
81	13.137	33	19.107	79	43.53	27	7.19.19	807	7.401
93	11.163	41	13.157	91	29.79	33	17.149	9	53.53
99	7.257	47	23.89	99	11.11.19	37	43.59	13	29.97
807	13.139	51	7.293	303	7.7.47	61	13.197	21	7.13.31
13	7.7.37	57	11.11.17	17	7.331	63	11.233	27	11.257
17	23.79	59	29.71	21	11.211	67	17.151	31	19.149
19	17.107	71	19.109	23	23.101	69	7.367	39	17.167

LECCION 14.

Se llama *quebrado* el número que espresa una ó mas, de las partes iguales en que se considera dividida la unidad. En la espresion del quebrado entran dos números; el *numerador*, que dice *cuántas partes*, y el *denominador*, que dice *cuáles sean*: estos dos números se llaman colectivamente *términos del quebrado*. La espresion $\frac{5}{8}$ es un quebrado que se lee *cinco octavos*, y la espresion $\frac{13}{21}$ es otro quebrado que se lee *trece veintiun avos*: los numeradores son el 5 y el 13, estos siempre se leen cardinalmente; los denominadores son el 8 y el 21, que se leen ordinalmente hasta 10, y cardinalmente con el aditivo *avos* desde el 10 en adelante. Un quebrado se llama *propio* cuando el denominador es mayor que el numerador, y se llama *impropio* en el caso contrario. Los quebrados de términos iguales, como $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ . . . $\frac{13}{13}$, $\frac{19}{19}$ . . . etc., no son otra cosa que la unidad en forma de quebrado. Esta propiedad se enuncia así: *el quebrado de términos iguales, es igual á la unidad.*

Proposicion fundamental para la teoría de los quebrados: *Todo quebrado es un cuociente cuyo dividendo es el numerador, y cuyo divisor es el denominndor*. En efecto, el quebrado se origina de la division cuando en ella hay resíduo; y no es otra cosa que el cuociente que resulta de partir el resíduo por el divisor. Así, $4 + \frac{3}{5}$, por ejemplo, es el cuociente completo de 23 : 5; y $3 + \frac{4}{12}$ es el cuociente completo de 40 : 12.

Aplicando á los quebrados las proposiciones de los cuocientes, tendremos:

1.ª Si un quebrado se multiplica por su denominador, dará por producto el numerador.

2.ª El número entero, puede considerarse como quebrado poniéndole por denominador la unidad.

3.ª Cuando es cero el numerador de un quebrado y su denominador no, el quebrado es igual cero.

4.ª Si el numerador de un quebrado se multiplica ó parte por un *número entero*, resultará el quebrado multiplicado ó partido por el *número entero*; pero si es el denominador quien se multiplica ó parte, resultará el quebrado partido ó multiplicado.

5.ª El valor de un quebrado no se altera aunque sus dos términos se multipliquen ó partan por un mismo número.

Simplificar un quebrado es trasformarlo en otro equivalente, y cuyos términos sean primos entre sí. Cuando la simplificacion llega á este grado, se dice que el quebrado es *irreducible*.

Un quebrado quedará irreducible cuando en sus dos términos se hayan suprimido todos los factores comunes, pues el producto de ellos equivale al m. d. c. de sus dos términos. Ved aquí ejemplos:

1.º Si los dos términos del quebrado $\frac{2970}{5610}$ se dividen por 30, resultará el quebrado equivalente $\frac{99}{187}$; y si los dos términos de este se dividen por 11, resulta $\frac{9}{17}$, quebrado no solo equivalente al primitivo si que irreducible: luego la simplificacion ha consistido en trasformar $\frac{2970}{5610}$ en su equivalente irreducible $\frac{9}{17}$.

Como para la simplificacion perfecta, es preciso que los dos términos del quebrado se partan por su m. d. c., y en el presente ejemplo se han hecho dos divisiones sucesivas, una por 30 y luego otra por 11; conviene advertir que el producto de estas dos divisiones

$11 \times 30 = 330$, es lo mismo que el m. d. c. de los dos términos del quebrado $\dfrac{2970}{5610}$.

2.° Aplicando el mismo método al quebrado $\dfrac{1561}{2453}$ nada lograríamos; tantearíamos en vano mas y mas simplificadores, sin acertar con uno. Pero tan luego como veamos este inconveniente, acudamos á la tabla de factores de la Leccion 13, y ella nos dirá que, por ejemplo, el quebrado $\dfrac{1561}{2453}$, es lo mismo que $\dfrac{7 \times 223}{11 \times 223}$; luego suprimido el factor comun, tendremos inmediatamente

$$\frac{1561}{2453} = \frac{7}{11}.$$

Sin el ausilio de la tabla se hubiera tenido que buscar el m. d. c. de 2453 y 1561; hallado (que seria el 223) dividir por él los números 1561 y 2453; y obtenidos los cuocientes 7 y 11, partir el primero por el segundo para llegar al sultado $\dfrac{7}{11}$.

La simplificacion de quebrados es otra de las operaciones á propósito para aguzar el ingenio del principiante.

LECCION 15.

Proposicion: *De quebrados que tengan igual denominador, será mayor el que tenga mayor numerador; pero si tienen igual numerador, será mayor el que tenga menor denominador*. Segun esto el quebrado $\dfrac{7}{9}$ será mayor que $\dfrac{5}{9}$ y menor que $\dfrac{7}{8}$, ó espreso en debida forma: $\dfrac{7}{9}\begin{cases} > \dfrac{5}{9} \\ < \dfrac{7}{8} \end{cases}$.

Aun sin la igualdad de los numeradores ó de los denominadores, se puede fallar muchas veces por el juicio que llaman *á fortiori*, ó *con mas razon*; como si afirmamos que es $\frac{3}{4} > \frac{5}{9}$, pues mirando á $\frac{3}{4}$ como $\frac{6}{8}$, la relacion es evidente. Pero cuando no podemos fijar una relacion de quebrados por juicio *á fortiori*, es preciso trasformarlos en otros respectivamente equivalentes, y tales que todos tengan el mismo denominador ó numerador. En efecto, no podríamos evidenciar que es $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, sin cambiar nuestro enunciado en $\frac{10}{15} > \frac{9}{15}$; ó $\frac{6}{9} > \frac{6}{10}$, que dicen lo mismo en otros términos.

Hay operaciones que requieren denominador comun en los datos quebrados, y para ello fijamos la siguiente regla: *El denominador comun, puede ser siempre el m. c. m. de los denominadores, con tal que cada numerador se multiplique por el apareado de su denominador respecto al m. c. m.* Así, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$ se trasforman en sus equivalentes respectvos $\frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{18}{30}, \frac{25}{30}$; porque es 30 el m. c. m. de los denominadores, y los numeradores se han determinado segun la regla.

Los quebrados $\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{9}{11}, \frac{1}{2}$ se trasforman en $\frac{462}{770}, \frac{440}{770}, \frac{630}{770}, \frac{385}{770}$; porque el m. c. m. es el producto de todos los denominadores, y cada numerador se ha multiplicado por el producto de los denominadores de los demas (Caso adverso).

Por oposicion á este ejemplo, he aquí estotro: $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{24}$ dan por equivalentes respectivos á $\frac{21}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{22}{24}$, $\frac{17}{24}$; porque todos los denominadores son factores del mayor 24, y se constituye la cuestion en el caso próspero.

Para ejemplo de comun numerador, sirva la siguiente cuestion: *Escribir en órden de menor á mayor los quebrados* $\frac{5}{23}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{15}{19}$: como para esto basta que tengan numerador comun, y aquí es muy preferible, les pondremos el m. c. m. de los numeradores que es 30; luego multiplicando por 6 el 23, por 5 el 13, por 3 el 11, y por 2 el 19, se tendrán los equivalentes respectivos $\frac{30}{138}$, $\frac{30}{65}$, $\frac{30}{33}$, $\frac{30}{38}$.

Luego los datos, escritos segun el órden pedido, son: $\frac{5}{23}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{15}{19}$, $\frac{10}{11}$.

ADICION.

Para sumar quebrados que tengan ya denominador comun, *súmense los numeradores, pártase la suma por el denominador comun; y si de ella queda quebrado, simplifíquese.*

Aplicando esta regla á los tres ejemplos de comun denominador que anteceden, nos darán:

1.°

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}=\frac{15+20+18+25}{30}=\frac{78}{30}$$

$$=2+\left(\frac{18}{30}=\frac{3}{5}\right).$$

2.°

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{9}{11}+\frac{1}{2}=\frac{462+440+630+385}{770}=\frac{1917}{770}$$

$$=2+(\frac{377}{770}<\frac{1}{2}).$$

3.°

$$\frac{7}{8}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{11}{12}+\frac{17}{24}=\frac{21+20+18+22+17}{24}$$

$$=\frac{98}{24}=4+(\frac{2}{24}=\frac{1}{12}).$$

Las espresiones que se componen de un entero y un quebrado, se llaman *números mixtos*: su adicion se ejecuta *sumando primero los quebrados y en seguida los enteros, añadiendo á la suma de estos las unidades que resultaron de la adicion de los quebrados.*

SUSTRACCION.

Para restar quebrados que tengan ya denominador comun, *réstese del numerador del quebrado minuendo, el numerador del quebrado sustraendo; póngase á la resta el denominador comun, y simplifíquese el quebrado resultante.*

Ejemplos:

1.°

$$\frac{10}{11}-\frac{3}{13}=\frac{130-33}{143}=\frac{97}{143}.$$

2.°

$$\frac{24}{45}-\frac{1}{5}=\frac{24-9}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$$

3.°

$$\frac{72}{88}-\frac{5}{11}=\frac{9-5}{11}=\frac{4}{11}.$$

Advertencia. Aunque el m. c. m. de los denominadores es el menor denominador comun que pueden tener los quebrados trasformados, cuando son irreducibles; no ya si fueren simplificables, pues entonces podrá el denominador comun ser menor que el m. c. m. de denominadores primitivos, como ha sucedido en el ejemplo 3.° Ademas la facilidad del denominador comun en la sustraccion, consiste en ser *dos* los datos : hasta el caso adverso se reduce aquí á multiplicar en cruz numeradores por denominadores.

Ejemplos con datos mixtos :

1.°

$$\left(11+\frac{35}{39}\right)-\left(8+\frac{9}{39}\right)=3+\left(\frac{26}{39}-\frac{2}{3}\right).$$

2.°

$$\left(24+\frac{2}{3}\right)-\left(17+\frac{7}{9}\right)=\left|\begin{array}{r} 23+\dfrac{15}{9} \\ 17+\dfrac{7}{9} \\ \hline 6+\dfrac{8}{9} \end{array}\right.$$

3.°

$$6-\left(3+\frac{4}{5}\right)=\left|\begin{array}{r} 5+\dfrac{5}{5} \\ 3+\dfrac{4}{5} \\ \hline 2+\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

4.°

$$\left(17+\frac{3}{11}\right)-\frac{19}{33}=\quad \begin{array}{|l} 16+\frac{42}{33} \\ \frac{19}{33} \\ \hline 16+\frac{23}{33} \end{array}$$

Para ausiliar el quebrado minuendo, cuando es menor que el respectivo sustraendo, nunca se necesita mas de una unidad: esto se ha hecho en los ejemplos que siguen al 1.° En el mismo principio se funda la siguiente regla para restar de un número entero, un quebrado propio: *á la derecha del entero disminuido en una unidad; añádase el quebrado complemento del sustraendo.* Así, $11-\frac{5}{9}$, es $=10+\frac{4}{9}$; $21-\frac{31}{39}=20+\frac{8}{39}$; etc. Llamaremos *quebrados complementarios dos cuya suma valga una unidad.*

Es de frecuente necesidad el trasformar un número mixto en quebrado equivalente, *para lo cual se multiplica el entero del mixto por el denominador de su quebrado, al producto se añade ó quita el numerador de dicho quebrado segun este lleve el signo + ó el —, y al resultado se le pone por denominador el del quebrado.*

Ejemplos:

1.°

$$11+\frac{5}{8}=\frac{88+5}{8}=\frac{93}{8}.$$

2.°

$$13-\frac{2}{3}=\frac{39-2}{3}=\frac{37}{3}.$$

LECCION 16.

De la proposicion 4.ª, Leccion 14, se deducen las reglas siguientes:

1.ª Para multiplicar un quebrado por un entero, *divídase el denominador del quebrado por el entero, si se puede, y si no, multiplíquese por el entero el numerador del quebrado.*

2.ª Para dividir un quebrado por un entero, *divídase el numerador del quebrado por el entero, si se puede, y si no, multiplíquese por el entero el denominador del quebrado.*

3.ª Para multiplicar un quebrado por otro quebrado, *fórmese el producto de los numeradores; fórmese el producto de los denominadores; pártase el primer producto por el segundo, y simplifíquese el quebrado resultante.*

Ejemplos de la regla 1.ª

1.º $$\frac{7}{90} \times 45 = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}.$$

2.º $$\frac{11}{37} \times 9 = \frac{99}{37} = 2 + \frac{25}{37}.$$

3.º $$39 \times \frac{5}{13} = \frac{5}{13} \times 39 = \frac{5 \times 39}{13} = 5 \times 3 = 15.$$

Ejemplos de la regla 2.ª

1.º $$\frac{18}{39} : 6 = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}.$$

2.º $$\frac{63}{91} : 11 = \frac{63}{91 \times 11} = \frac{7 . 9}{7 . 13 . 11} = \frac{9}{143}.$$

3.° $\frac{57}{60} : 38 = \frac{57}{60 \times 38} = \frac{3 . 19}{2 . 19 . 60} = \frac{1}{40}$.

Ejemplos de la regla 3.ª

1.° $\frac{36}{51} \times \frac{34}{54} = \frac{36 \times 34}{51 \times 54} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$.

2.° $\frac{19}{25} \times \frac{50}{57} = \frac{19 \times 50}{25 \times 57} = \frac{2}{3}$.

3.° $\frac{17}{53} \times \frac{71}{87} = \frac{1207}{4611}$: sin detenernos en buscar factores donde no los hay ; pero habiéndolos, no se fije el resultado hasta la completa supresion de los comunes.

Los productos de dos factores se llaman *productos binarios* ; los de tres se llaman *productos ternarios*, etc. Luego para formar un producto de muchos quebrados, fórmese uno binario y multiplíquese por el tercer factor, si son tres los factores ; ó fórmense dos binarios y multiplíquese un producto por otro, si los factores fueran cuatro, etc. Sin embargo, de estos métodos razonados surge la siguiente práctica : *fórmese un quebrado cuyo numerador sea el producto indicado de todos los numeradores, y el denominador sea el producto indicado de todos los denominadores; simplifíquese este quebrado, y se tendrá el resultado exacto.*

Ejemplo 4.° $\frac{5}{7} \times \frac{3}{8} \times \frac{8}{15} \times \frac{7}{5} = \frac{3}{8} \times \frac{8}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

El producto de dos quebrados recíprocos, es igual á la unidad ; y son recíprocos dos quebrados tales que tienen los mismos términos, pero en posicion inversa los del uno á los del otro, como $\frac{5}{7}$ *y* $\frac{7}{5}$. Omitidos estos quebrados en el ejemplo 4.°, ha quedado la operacion reducida á $\frac{3}{8} \times \frac{8}{15}$, ó á $\frac{3}{15}$ suprimido el factor comun 8.

Para dividir un quebrado por otro quebrado, surge de la proposicion 5.ª, Leccion 14, la siguiente regla: *multiplíquese el numerador del dividendo por el denominador del divisor; multiplíquese tambien el numerador del divisor por el denominador del dividendo; pártase el primer producto por el segundo, y se tendrá el quebrado cuociente.*

Ejemplos:

1.°

$$\frac{18}{66} : \frac{9}{44} = \frac{18 \times 44}{9 \times 66} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

2.°

$$\frac{36}{45} : \frac{48}{60} = \frac{36 \times 60}{48 \times 45} = \frac{3 \times 4}{4 \times 3} = 1.$$

3.°

$$\frac{7}{9} : \frac{5}{11} = \frac{77}{45} = 1 + \frac{32}{45}.$$

El ejemplo 2.° es notable por su cuociente = 1 : ¿qué se infiere de los datos?

Al modo como la division de los números enteros dió orígen al quebrado, así la division de los quebrados da origen á ciertas espresiones que se llaman *quebrados de quebrados*, tales como

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4}\,;\ \frac{5}{8} \text{ de } \frac{7}{5} = \ldots \frac{7}{8}\,;\ \text{etc.}$$

Con la denominacion comun de *números fraccionarios* comprendemos desde ahora el quebrado, el número mixto, y el quebrado de quebrado.

Para reducir á quebrado único las espresiones quebrado de quebrado, *fórmese un producto de todos los quebrados de la espresion, y* *simplifíquese*. En uso de esta regla, diremos que es la espresion

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{5} \text{ de } \frac{5}{8} = \frac{2.3.5}{3.5.8} = \frac{1}{4}.$$

Advertencias sobre las operaciones con datos fraccionarios.

Si se imaginan combinados solamente de dos en dos los nombres, *número entero*, *quebrado*, *mixto*, y *quebrado de quebrado*, se verá que la multiplicacion con datos fraccionarios, ofrece muchos mas casos de los que hemos considerado, y aun muchos mas la division. Pero como al número entero se le puede poner la unidad por denominador, y tanto el número mixto como el quebrado de quebrado se pueden trasformar en un solo quebrado equivalente, resulta que *todos los casos de multiplicacion y division con datos fraccionarios, se pueden reducir al caso único de multiplicar ó dividir un quebrado por otro quebrado*. Y tanto será único, cuanto *los casos de division podrán cambiarse en multiplicacion, tomando por multiplicador del dividendo el quebrado recíproco del divisor*.

Como consecuencia necesaria de los principios establecidos, sucede que *si uno de los dos factores de un producto es quebrado propio, resultará el producto menor que el otro factor*; *y cuando sea quebrado propio el divisor, será el cuociente mayor que el dividendo*.

Muchos ejemplos podríamos aducir para mas ilustrar esta doctrina; pero nos limitamos á uno importante por su trascendencia. Quiérase el cuociente de los números mixtos

$$\left(5+\frac{1}{5}\right):\left(3\frac{2}{5}\right)=\frac{26}{5}:\frac{13}{5}=\frac{26}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{26}{13}=2\text{; y ob-}$$

sérvese que reducidos ambos datos á quebrado equivalente, han aparecido con denominador comun, *el cual no funciona en la operacion*: luego en general puede establecerse, sin peligro de error, que *para dividir quebrados que tengan denominador comun, basta partir el numerador del dividendo por el numerador del divisor*.

La comprobacion de los resultados es útil en todas las operaciones, cualquiera que haya sido la naturaleza de los datos; pero es utilísima cuando se ha operado con datos fraccionarios, porque si bien dan la equivalencia, siendo verdadero el resultado, no siempre dan la identidad: y el empeño del calculador en descubrirla, es un estímulo de mucho provecho.

LECCION 17.

El quebrado cuyo denominador es 10, 100, 1000, ó en general la unidad seguida de ceros, se llama *quebrado decimal* ó *fraccion decimal*: se escribe en forma de entero, supliendo el denominador con una coma.

La fraccion decimal en su forma propia, es una consecuencia del sistema décuplo de numeracion. Si á la derecha de las unidades de un número se escribe una cifra, esta, en virtud del sistema, espresará *décimas* de la unidad. Si á la derecha de esta cifra se escribe otra, esta segunda espresará décimas de la décima, ó *centésimas* de la unidad. Escribiendo una tercera, espresará décimas de la centésima, ó *milésimas* de la unidad; y agregando una cuarta, quinta, sexta, etc., cifras, se espresarian *diez-milésimas*, *cien-milésimas*, *millonésimas*, etc., de la unidad.

Todo el secreto, pues, de la forma propia del quebrado decimal, consiste en distinguir la cifra *unidades* de la cifra ó cifras propias de la fraccion decimal; y esto se advierte con una *coma*, escrita entre las unidades y las décimas.

Ejemplos: 17,6 espresa 17 *unidades* y 6 *décimas*; 8,56 espresa 8 *unidades* y 56 *centésimas*; 0,342 espresa 342 *milésimas*, sin ninguna unidad, lo cual se advierte con la cifra *cero* siempre que la espresion carece de *entero*.

Si en un número mixto de entero y decimal, se comparan las cifras equidistantes de la de unidades, se verá que son *decenas* y *décimas*; *centenas* y *centésimas*; *millares* y *milésimas*, etc. Esta importante propiedad se enuncia así: *Dos cifras equidistantes de la cifra unidades, tienen recíproca su unidad ordinal.*

Sabido, pues, cuántas cifras decimales tiene un número, *la denominacion del decimal será recíproca de la del mayor órden de un número entero, formado con las cifras del decimal más una.* En efecto, un decimal de cinco cifras, se denominará *cien-milésimas*; porque la unidad del mayor órden de un número entero de seis cifras, es *centena de millar*: un decimal de siete cifras, se denominará *diez-millonésimas*; porque la unidad del mayor órden de un número entero de ocho cifras es *decena de millon*, etc.

He aquí ejercicios en que conviene adiestrarse antes de entrar en la práctica de las cuatro operaciones con decimales:

1.º Leer decimales escritos. Ejemplos: 7,028; 10,006; 0,07009; 0,4371908.

¿Qué denominacion tendrá un decimal de nueve cifras?

2.º Escribir decimales dictados. Ejemplos: *Tres mil once diez-milésimas; cuarenta y dos mil cincuenta y tres millonésimas.*

¿Cuántas cifras se requieren para la denominacion *billonésimas*?

3.º Dar forma propia al quebrado decimal que la tiene comun. Ejemplos: $12+\frac{17}{100}=12,17$. $\frac{1013}{1000}=1,013$. $\frac{349}{10000}=0,0349$.

4.º Espresar en forma de quebrado comun, la fraccion decimal que está escrita en forma propia. Ejemplos: $5,728=5+\frac{728}{1000}$. $0,027=\frac{27}{1000}$. $11,09=11+\frac{9}{100}$. $127,9=127+\frac{9}{10}$.

De la definicion del quebrado decimal se deducen, entre otras, las proposiciones siguientes:

1.ª *El valor de un decimal no se altera aunque se pongan ó quiten ceros á la derecha de las cifras decimales.*

2.ª *Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma hácia la derecha tantas cifras cuantos ceros siguen á la unidad.*

3.ª *Para dividir un decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma tantas cifras hácia la izquierda cuantos ceros siguen á la unidad.*

La adicion y sustraccion de espresiones decimales, se ejecutan del mismo modo que si fueran números enteros; teniendo cuidado de escribir los datos uno bajo de otro de manera que sus comas formen columna, y poniendo tambien la coma en el resultado al pasar de las décimas á las unidades.

Ejemplo de adicion:

$$\begin{array}{r} 26{,}12 \\ 9{,}035 \\ 7{,}6 \\ 10{,}045 \\ \hline 52{,}800 \end{array} = 52{,}8$$

Ejemplo de sustraccion:

$$\begin{array}{r} 372{,}4589 \\ 139{,}2938 \\ \hline 233{,}1651 \end{array}$$

Si el sustraendo tiene menos cifras decimales, se ponen desde luego en la resta las cifras escedentes del minuendo, y se empieza la sustraccion desde la primera cifra correspondiente en el sustraendo.

Ejemplo :

$$\begin{array}{r} 3{,}25748 \\ 1{,}36 \\ \hline 1{,}89748 \end{array}$$

Cuando las cifras escedan en el sustraendo, complétense con ceros las del minuendo, y procédase como en el primer ejemplo

$$\text{Así}: 52{,}3 - 17{,}2487 = \begin{array}{r} 52{,}3000 \\ 17{,}2487 \\ \hline 35{,}0513 \end{array}.$$

Cuando en algun órden decimal necesitemos escribir 10, usaremos de la letra d: así en el ejemplo anterior podremos decir $52{,}3 - 17{,}2487 = (52{,}299\,d - 17{,}2487) = 35{,}0513$ como antes. Esta ingeniosa forma no es otra cosa que la aplicacion evidente del complemento aritmético á las cifras escedentes del sustraendo.

LECCION 18.

El caso mas fácil de multiplicar decimales se ofrece cuando siendo dos los datos, es uno de ellos decimal, y el otro la unidad seguida de ceros. La regla está dada en la proposicion 2.ª, Leccion 17; he aquí su aplicacion.

Ejemplos:

1.° $34{,}278 \times 100 = 3427{,}8.$
2.° $23{,}7 \times 10 = 237.$
3.° $364{,}5 \times 1000 = 364{,}500 \times 1000 = 364500.$

A este caso sigue en facilidad el de *multiplicador dígito*: basta multiplicar por él, como si el decimal fuera entero; cuidando de escribir la coma en el producto cuando se pase de las décimas á las unidades.

Ejemplos:

$$1.^{\circ}\quad 183{,}075 \times 4 = \frac{\begin{array}{r}183{,}075\\ 4\end{array}}{732{,}300} = 732{,}3.$$

$$2.^{\circ}\quad 129{,}471 \times 9 = \frac{\begin{array}{r}129{,}471\\ 9\end{array}}{1165{,}239.}$$

Este ejemplo, y todos los que lleven por multiplicador *uno ó mas nueves*, se pueden resolver por sustraccion, como vimos en la Leccion 6.

En efecto, el producto $129{,}471 \times 9$ hallado en el ejemplo 2.°, se puede obtener por sustraccion, así:

$$\begin{array}{r}1294{,}710\\ 129{,}471\\ \hline 1165{,}239\end{array}$$

Y tambien 36,75×99 es lo mismo que

$$\begin{array}{r} 3675,00 \\ 36,75 \\ \hline 3638,25 \end{array}$$

Los demas casos de multiplicacion, ya sean decimales ambos factores ó bien uno solo, se resuelven por la siguiente regla: *Prescíndase de las comas, multiplicando los datos como si fueran números enteros, y luego del producto sepárense á la derecha, con una coma, tantas cifras para decimales cuantas cifras decimales habia en los dos factores justos.*

Ejemplos:

1.° $3,7 \times 4,12 = 15,244.$

Operacion.

$$\begin{array}{r} 412 \\ 37 \\ \hline 2884 \\ 1236 \\ \hline 15244 \end{array}$$

Tomando en este resultado tres cifras para decimales, se tiene el verdadero producto 15,244.

2.° $101,016 \times 0,0025 = 0,25254.$

Operacion.

$$\begin{array}{r} 101016 \\ 25 \\ \hline 505080 \\ 202032 \\ \hline 2525400 \end{array}$$

Cuando en el producto entero no resulten tantas cifras como se necesitan para decimales, pónganse á su izquierda los ceros que fueren menester, antes de colocar la coma.

3.° $2,0328 \times 0,0125 = 0,02541.$

Operacion.

$$\begin{array}{r} 20328 \\ 125 \\ \hline 101640 \\ 40656 \\ 20328 \\ \hline 2541000 \end{array}$$

De este producto entero, con dos ceros á su izquierda, tómense ocho cifras para decimales; y borrados despues los ceros de la derecha, se llegará al resultado perfecto 0,02541.

Las demostraciones de la regla serán mas claras para los principiantes si se contraen á los mismos ejemplos resueltos.

Proposicion : *Todo quebrado comun, se puede trasformar exacta ó aproximadamente en fraccion decimal.* Para conocer desde luego, á la simple vista del quebrado comun, en cuál de estos dos casos caerá la trasformacion ; debe hallarse ya el quebrado en estado irreducible, y entonces, si su denominador solo contiene factores del 10, obtendrá decimal exacto ; pero si no contiene ningun factor del 10, el decimal que resulte será *periódico puro*. En efecto, el quebrado que pertenezca al primer caso, se podrá cambiar en otro equivalente, cuyo denominador sea la unidad seguida de ceros, con solo multiplicar sus dos términos por los factores apareados del denominador.

Ejemplos:

1.° $$\frac{3}{5}=\frac{3\times 2}{5\times 2}=\frac{6}{10}=0{,}6.$$

2.° $$\frac{19}{25}=\frac{4\times 19}{25\times 4}=\frac{76}{100}=0{,}76.$$

3.° $$\frac{3}{8}=\frac{3\times 125}{125\times 8}=\frac{375}{1000}=0{,}375.$$

4.° $$\frac{109}{200}=\frac{109\times 5}{200\times 5}=\frac{545}{1000}=0{,}545.$$

Cuando el denominador del quebrado irreducible no contenga factores del 10, procédase á su trasformacion del modo siguiente : ***Divídase el numerador por el denominador, y á la derecha del cuociente entero escríbase una coma : decuplíquese el resíduo, y partiéndolo por el denominador, dará las décimas : decuplíquese el segundo resíduo, y partiéndolo por el denominador, dará las centésimas. Así se continúa hasta encontrar un resíduo igual al primero, y entonces las cifras decimales halladas compondrán el período decimal.***

Ejemplos:

1.° $\dfrac{24}{11} = 2{,}1818\ldots = 2,(18)$.

Operacion.

$$\begin{array}{l|l} 24 & 11 \\ \cline{2-2} \;20 & 2{,}18\ldots \\ \;\;90 & \\ \;\;\;2 & \end{array}$$

2.° $\dfrac{9}{37} = 0{,}243243\ldots = 0,(243)$.

Operacion.

$$\begin{array}{l|l} 9 & 37 \\ \cline{2-2} \;90 & \\ \;160 & 0{,}243 \\ \;\;120 & \\ \;\;\;\;9 & \end{array}$$

3.° $\dfrac{1}{7} = \ldots\ldots 0,(142857)$.

Operacion.

$$\begin{array}{l|l} 1 & 7 \\ \cline{2-2} \;10 & \\ \;\;30 & 0{,}142857 \\ \;\;\;20 & \\ \;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;\;1 & \end{array}$$

Obsérvese que en los resultados de estos ejemplos va el período encerrado en paréntesis, para distinguir el decimal periódico del decimal exacto. *El número de cifras de un período varía desde una hasta tantas cuantas unidades, menos una, valga el denominador del quebrado comun irreducible que se trasforma en decimal.*

Cuando el número de cifras de un período es el mayor posible, se dice que el período es *completo*. Hemos visto en el ejemplo 3.° que el período correspondiente á $\dfrac{1}{7}$, consta de seis cifras: podríamos ver que para $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{23}$, los períodos respectivos constan de diez y seis, diez y ocho, veintidos cifras; todos estos son períodos completos, los cuales gozan de propiedades muy útiles para el estudio y sus aplicaciones. Mucho puede contribuir al conocimiento de estas propiedades el estudio de la relacion $\frac{1}{7} = 0,(142857)$, y el de la $\frac{1}{23} = 0,(043\,.\,.\,.\,.\,.\,913)$ que surge del último ejemplo, Leccion 8, donde ya llamamos la atencion.

Son de precisa retencion en la memoria, por su mucha importancia, las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{9} = 0,(1)$$

$$\frac{1}{99} = 0,(01)$$

$$\frac{1}{999} = 0,(001)$$

$$\frac{1}{9999} = 0,(0001)$$

etc.

Cuando el denominador del quebrado comun irreducible que se quiere trasformar en decimal, tiene algun factor del 10, y ademas otros factores, se obtendrá decimal *periódico mixto*, en el cual la primera ó primeras cifras no se repiten, y constituyen lo que se llama *parte no periódica de la fraccion*; y las siguientes á estas, constituyen el período, que se puede imaginar repetido indefinidamente. Las cifras no periódicas en estas fracciones, deben ser precisamente tantas cuantos factores del 10 haya en el denominador del quebrado que se trasforma.

La trasformacion se ejecuta en este caso del mismo modo que en el del periódico puro. He aquí relaciones que pueden servir de otros tantos ejemplos:

$$1.^a \quad \frac{17}{22} = 0,77272\ldots = 0,7(72).$$

$$2.^a \quad \frac{9}{74} = 0,1216216\ldots = 0,1(216).$$

$$3.^a \quad \frac{7}{12} = 0,58333\ldots = 0,58(3).$$

Obsérvese constantemente la inclusion del período en paréntesis.

Bien estudiado el decimal periódico mixto, no es otra cosa que el cuociente que resulta de partir por la unidad, seguida de uno ó mas ceros, un decimal periódico puro.

LECCION 19.

El caso mas fácil de dividir decimales, se ofrece cuando el divisor es la unidad seguida de ceros; basta adoptar como regla la proposicion 3.ª de la Leccion 17. He aquí su aplicacion á ejemplos:

1.º 743,52 : 10 = 74,352.

2.º 217,48 : 100 = 2,1748.

3.º 9,49 : 1000 = 0009,49 : 1000 = 0,00949.

Se han puesto tres ceros á la izquierda del dividendo, antes de correr la coma, para que esta se fije sin alteracion de valor en los datos.

Este ingenioso medio de poner los ceros que se necesitan, sin alterar el valor de los datos, hace estensible la regla hasta dividendos enteros. En efecto, quiero partir por 1000 el número entero 3856, y digo 3856 : 1000 = 3856,0 : 1000 = 3,856.

2.º 123 : 10000 = 00123,0 : 10000 = 0,0123.

Al caso de divisor 1 seguido de ceros, sigue en facilidad el caso de partir por un número dígito: *basta ejecutar la division como si el dividendo fuera entero; cuidando de escribir la coma en el cuociente cuando se pasa de las unidades á las décimas.*

Ejemplos: 1.º $35,728 : 7 = 5,104$.
2.º $3,241 : 4 = 0,81025$.
3.º $43,7 : 5 = 8,74$.

En estos dos ejemplos previendo el decimal exacto que revelan los divisores 4 y 5, se han agregado mentalmente á la derecha del dividendo el cero ó ceros que se necesitaban.

4.º $123,148 : 9 = 13,683\ (1)$; resultado periódico mixto, que conviene meditar.

Los demas casos de division, ya sean decimales ambos datos, ya uno solo, se pueden resolver por la siguiente regla: *A la derecha del dato que tenga menos cifras decimales, pónganse tantos ceros cuantas sean las cifras decimales escedentes en el otro dato; suprímanse despues las comas, y pártase el dividendo por el divisor como si fueran números enteros.*

Ejemplos:

1.º $99,015 : 8,05 = 99,015 : 8,050 = 99015 : 8050 = 12,3$.

Operacion.		
	99015	8050
	18515	12,3
	24150	
	0	

2.º $45,6 : 0,37 = 45,60 : 0,37 = 4560 : 37 = 123,(243)$.

Operacion.		
	4560	37
	86	123,(243)
	120	
	90	
	160	
	120	
	9	

3.º 305,9 : 0,24 = 305,90 : 0,24 = 30590 : 24 = 1274,58 (3).

```
Operacion. 30590   | 24
             65    |---------
             179   1274,58(3)
              110
           ------
              140
               200
                 8
```

Cuando la fraccion decimal está bien escrita, se conoce á la simple vista si es exacta, ó periódica, ó mixta: conocimiento indispensable *para retroceder de la fraccion decimal al quebrado comun de quien ella proviene*, pues segun el caso así la regla.

Si el decimal lleva número entero, sepárese este desde luego, y diríjase el cálculo á determinar el quebrado propio que se le ha de añadir. Para esto, *si el dato es decimal exacto, quítesele la coma, y á lo que resulte póngasele por denominador la unidad, seguida de tantos ceros cuantas eran las cifras decimales, y simplifíquese el resultado*. Esto es lo que ya se hizo en el *ejercicio* 4.º de la Leccion 17. Sin embargo, he aquí otro ejemplo:

$$2{,}625 = 2 + \left(\frac{625}{1000} = \ldots\ldots \frac{5}{8}\right).$$

Si el decimal dado es periódico puro, *tómese por numerador el período, y pónganseles por denominador tantos nueves cuantas cifras tenga el período, simplificando este quebrado.*

Ejemplos:

1.º $17,(54) = 17 + \left(\frac{54}{99} = \frac{6}{11}\right).$

2.º $9,(162) = 9 + \left(\frac{162}{999} = \ldots\ldots \frac{6}{37}\right).$

$$3.^{\circ}\quad 0,(0297) = \left(\frac{297}{9999} = \frac{33}{1111} = \frac{3}{101}\right).$$

Y en fin, si el decimal dado es periódico mixto, *réstese del dato íntegro* (no se olvide que suponemos separado el entero, si lo hay) *la parte no periódica; y á la resta póngansele por denominador tantos nueves cuantas cifras tenga el período, más tantos ceros á la derecha de los nueves cuantas sean las cifras no periódicas.*

Ejemplos:

$$1.^{\circ}\quad 13,8(3) = 13 + \left(\frac{83 - 8 = 75}{90} = \frac{5}{6}\right).$$

$$2.^{\circ}\quad 0,2(7) = \frac{27 - 2 = 25}{90} = \frac{5}{18}.$$

$$3.^{\circ}\quad 9,58(3) = 9 + \left(\frac{583 - 58 = 525}{900} = \ldots\ldots \frac{7}{12}\right).$$

LECCION 20.

Son *números complexos los que se componen de dos ó mas números, cada uno concreto á diferente especie, y todas estas relativas á un mismo género*. Tales son: 7 varas, 2 pies. 5 arrobas, 7 libras, 9 onzas, etc.

Cada número concreto que entra en la composicion del complexo, se llama *número incomplexo*: como 9 libras; 13 varas; 10 azumbres; y en general todo número que esprese una sola especie. En el número complexo, se llama *coeficiente denominal el número por quien se debe multiplicar la unidad de una especie, para obtener la unidad de la especie superior inmediata.* Cuando este número es constante en todas las especies del complexo, se tiene un verdadero sistema de medidas. Las especies *punto*, *línea*, *pulgada*, *pie* y *estadal*, forman sistema duodecimal; esto es, de base = 12.

Para la buena inteligencia en el cálculo de los complexos, es indispensable saber antes de memoria las tablas de *pesas*, *medidas* y *monedas*. (Véanse en cualquier tratado de Aritmética.)

En estos Apuntes solo haremos observar, que las pesas, medidas y monedas castellanas las consideramos divididas en cuatro clases, que son

1.ª Clase : Medidas de estension. Comprende tres géneros, que son: *estension en longitud*, *estension en superficie*, *estension en volúmen*.

2.ª Clase : Medidas de capacidad. Comprende dos géneros, que son : *medidas para áridos*, *medidas para líquidos*.

3.ª Clase : Medidas ponderales. Comprende un solo género, que es el formado por las pesas ó medidas del peso, cuyas especies varían desde el *grano* hasta la *tonelada de peso* = 20 quintales.

No se confunda esta tonelada con la llamada de *arqueo*, que es una capacidad cúbica de $4 \frac{1}{8}$ pies de arista : 100 de estas toneladas equivalen á 7019 pies cúbicos.

4.ª Clase : Medidas del precio. Comprende dos géneros, que son: *monedas efectivas*, *monedas imaginarias*. Entre las efectivas conviene distinguir la llamada *escudito viejo ó de aumento*, que acuñado antes del año 1786, tiene sobre el valor comun de 20 reales un premio ó aumento de $42 \frac{1}{2}$ maravedises.

ADICION.

Para sumar números complexos *se escriben los sumandos uno bajo de otro en líneas horizontales, y de modo que formen columna las especies de una misma denominacion. Se empieza á sumar por la columna de especie inferior, llevando una unidad á la especie superior inmediata por cada tantas cuantas hay en el coeficiente denominal de la especie que se suma.* He aquí ejemplos :

1.º			2.º		
Varas.	*Pies.*	*Pulgad.*	*Cahices.*	*Faneg.*	*Celem.*
17	1.	9	13	9.	10
28	2.	11.	11	7	8.
53	0	8.	9	6.	11.
46	2.	10.	6	0	4
9	1	4	15	2	5.
52	0	6.	8	3	0
208	1	0	64	6	2

3.º			4.º			
Duros.	*Reales.*	*Mrs.*	*Libras.*	*Onzas.*	*Adarm.*	*Tom.*
13	5	28	7	3	11	1
71	18.	16.	9	12.	15.	2.
43	9	24.	11	14.	9.	0
19	11.	32	14	9	10	2
10	17.	12.	17	0	7.	1.
159	3	10	60	9	6	0

SUSTRACCION.

Operacion muy fácil cuando las especies del sustraendo están espresadas en números de menor valor que los de la misma denominacion en el minuendo : ni siquiera se necesita entonces conocer el coeficiente denominal. He aquí un ejemplo :

Varas cúbicas.	*Pies cúbicos.*	*Pulgad. cúbicas.*
133	8	108
102	5	92
31	3	16

Pero cuando los datos no ofrecen esta condicion tan favorable, se necesita conocer el coeficiente denominal de cada especie, para saber *cuántas unidades se han de añadir á una especie del minuendo, por una sola que se añada á la especie superior inmediata del sustraendo*: así es como podrá estar seguro el calculador, de que al minuendo y sustraendo añade cantidades iguales que no alteran la resta.

Otros ejemplos:

1.º

Cántaras.	*Azumbres.*	*Cuartillos.*
38	3	3
17	5	2
20	6	1

2.º

Toneladas.	*Quintales.*	*Arrobas.*
346	9	0
109	18	3
236	10	1

Recomendamos la comprobacion de las restas de complexos por adicion, sin escribir para ella un solo número, pues bastan los datos y el resultado de cada ejemplo.

LECCION 21.

Cuando los factores de un producto son números concretos, deberá ser multiplicando aquel factor que esprese unidades del mismo género que las buscadas en el producto; y el otro factor se considerará como un número abstracto. Si, por ejemplo, queremos averiguar *cuánto pesan* 16 *varas de alambre á* $2\frac{1}{2}$ *onzas por vara*, diremos, el resultado debe ser concreto al género peso; luego el multiplicando en esta cuestion es el número $2\frac{1}{2}$ *onzas*, y el factor 16 *varas* deja aquí su especie, y se limita á decir que se tome 16 veces por sumando el número concreto $2\frac{1}{2}$ onzas, lo cual dará por producto 40 *onzas de peso*. Hasta en los casos de ser congéneres ambos factores, se discierne por el sentido de la cuestion cuál de los dos debe tomarse abstracto. Pregúntese, por ejemplo, *cuánto debe descontarse en un pago de* 1000 *reales á razon de* 3 *céntimos por real*; y al momento decimos: Debe rebajarse 1000 veces 3 céntimos; esto es, 0,03 reales × 1000 = 30 reales. Así de cuantos casos se ofrezcan.

La multiplicacion de los números complexos, se puede reducir á tres casos: 1.° Cuando solo es complexo el multiplicando. 2.° Cuando solo es complexo el multiplicador. 3.° Cuando ambos factores son complexos.

Para resolver los problemas del primer caso, *considérese como abstracto el multiplicador, y por él multiplíquense todos los números del multiplicando, empezando por el de la menor especie*. Ejemplo: *¿Cuánto pesan* 32 *cántaras de un líquido, á razon de* 26 *libras* 7 *onzas* 5 *adarmes la cántara?*

Este problema es un caso de adicion en que el sumando complexo se repite 32 veces; luego multiplicando dicho complexo por el número abstracto 32, se tendrá fácil y prontamente el verdadero resultado, como aparece en la siguiente

Operacion.

5 adarmes × 32 = 160 adarmes = ... 10 onzas.
7 onzas × 32 = 224 onzas = . . 14 libras.
26 libras × 32 = ... 832 »

Suma = producto = . . . 846 libras 10 onzas.

Hallamos, pues, que el peso de las 32 cántaras del supuesto líquido, es = 33 arrobas 21 libras 10 onzas.

De los diversos ejemplos que puede ofrecer el primer caso, seria facilísimo aquel cuyo complexo formase sistema, y se hubiera de multiplicar por la base; esto es, por su coeficiente denominal constante: bastaria ascender un grado á cada especie del multiplicando, como se ve en la siguiente cuestion.

De un granero se han sacado 12 *medidas trigo de á* 3 *fanegas* 7 *celemines la medida, ¿cuánto trigo se ha extraído?*

Respuesta: 3 *cahíces* 7 *fanegas.*

Otro ejemplo: Quiérase multiplicar por el número abstracto 12, el complexo 3 varas 2 pies 8 pulgadas 7 líneas; y reduciendo, ante todo, las varas á pies para que haya sistema en todas las especies, diremos: (3 varas 2 pies 8 pulgadas 7 líneas) $\times$ 12 = (11 pies 8 pulgadas 7 líneas) $\times$ 12 = 11 estadales 8 pies 7 pulgadas: inmediatamente segun la regla.

Esta sorprendente facilidad se apoya en el mismo principio que nos sirvió para multiplicar por la unidad seguida de ceros, corriendo la coma hácia la derecha; si bien aquí referimos al *sistema duodecimal* lo que allí se refiere al *decimal.*

Para los problemas pertenecientes á los casos 2.º y 3.º, sirva la siguiente regla: *Multiplíquese el dato que deba ser multiplicando, por el número que esprese las unidades de la mayor especie en el multiplicador; y luego para cada uno de los números que espresan las demas especies del multiplicador*, en órden de superior á inferior, *tómese del multiplicando la parte ó partes alícuotas que le correspondan: la suma de estos resultados parciales dará el producto pedido.*

Ejemplo:

¿Cuánto valen 8 *libras,* 5 *onzas,* 5 *adarmes y* 1 *tomin de cierto género, á razon de* 24 *reales libra?*

Este ejemplo pertenece al 2.º caso; he aquí su

Cálculo.

8 libras á 24 reales . . . . 192 reales.

por 4 onzas tomo $\frac{1}{4}$ de 24 reales . . . . . 6 »

por 1 onza tomo $\frac{1}{4}$ de 6 reales . . . . . . 1 » 17 mrs.

por 4 adarmes tomo $\frac{1}{4}$ de (1 real 17 mrs.). . . . . 12 » $\frac{3}{4}$ $\frac{12}{16}$

por 1 adarme tomo $\frac{1}{4}$ de (12 mrs. $\frac{3}{4}$) . . . . . . 3 » . . . $\frac{3}{16}$

por 1 tomin tomo $\frac{1}{3}$ de (3 mrs. $\frac{3}{16}$). . . . . 1 » . . . $\frac{1}{16}$

Suma = producto = 200 reales.

Ejemplo 2.º

¿Cuánto valen 3 arrobas y 5 libras de un género, á 2 duros 5 reales y 20 mrs. la arroba?

Este ejemplo pertenece al caso 3.º; he aquí su

Cálculo.

$$\text{3 arrobas.}\left\{\begin{array}{l}\text{á 2 duros} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 120 \text{ reales.}\\ \text{á 5 reales} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15 \text{ »}\\ \text{á 20 mrs.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 \text{ » } 26 \text{ mrs.}\end{array}\right.$$

por 5 libras tomo $\frac{1}{5}$ de (45 reales 20 mrs.) 9 » 4 »

Suma = producto = 145 reales 30 mrs.

El método prescrito en la regla que acabamos de aplicar, se llama *método de las partes alícuotas*; es el mas á propósito para aguzar el ingenio del calculador, y entre otras ventajas tiene la de dar resueltas al mismo tiempo que la principal, varias cuestiones parciales.

Otros métodos hay para resolver esta clase de problemas; pero nos limitamos al que llaman *de reduccion á quebrado*. He aquí los mismos ejemplos resueltos por este segundo método:

1.º (8 libras 5 onzas 5 adarmes 1 tomin) × 24 reales, es lo mismo que $(8 \text{ libras} + \frac{1}{3}) \times 24 \text{ reales} = \text{reales } (\frac{25}{3} \times 24) = \text{reales } 25 \times 8 = 200 \text{ reales}$.

2.º $(3 \text{ arrobas } 5 \text{ libras}) \times (45 \text{ reales } 20 \text{ mrs.}) = \frac{16}{5} \text{ arrobas} \times (45 + \frac{10}{17}) \text{ reales} = \text{reales } (16 \times 9 + 16 \times \frac{2}{17})$

	144 reales.		
+	1	»	30 mrs.
=	145 reales		30 mrs.

Los dos resultados idénticos á los obtenidos por el primer método.

Hay casos en que se pueden aplicar con ventaja á la multiplicacion de los números complexos, uno ó mas de los principios establecidos en la Leccion 9.

En efecto, su proposicion 3.ª aplicada al último ejemplo, lo cámbia en estotro de igual resultado: 16 arrobas × (9 reales 4 mrs.)

=	144 reales.		
	1	»	30 mrs.
	145 reales		30 mrs.

idéntico á los obtenidos por los otros dos métodos.

LECCION 22.

Para la division de los números complexos, tomaremos por guia esta proposicion general: *Un dividendo concreto, se puede conside-*

rar como el producto de un número de unidades concretas, multiplicado por el valor de una de ellas. Luego partido este producto por uno de sus factores, dará por cuociente el otro factor. Cuando el divisor sea el número de las unidades concretas, el cuociente deberá ser el valor de la unidad; pero cuando el divisor sea el valor de la unidad, saldrá el cuociente determinado en su cuánto, mas no en su qué. La completa determinacion del cuociente, solo puede buscarse en las condiciones especiales del problema.

Prevista esta contingencia, reducimos á dos casos la division con datos complexos:

1.° Cuando el divisor es de distinto género que el dividendo.

2.° Cuando el dividendo y el divisor son congéneres.

Regla para el primer caso: *Redúzcase el divisor á quebrado de su mayor especie, y por el recíproco de este quebrado considerado como abstracto, multiplíquese el dividendo tal cual sea.*

Ejemplo:

Sabiendo que 11 *arrobas* 8 *libras* $5\frac{1}{3}$ *onzas de un género, han importado* 348 *duros* 18 *reales, se pregunta cuál debió ser el precio de la arroba.*

Resolucion.

El divisor 11 arrobas 8 libras $5\frac{1}{3}$ onzas referido á la especie arrobas, se convierte en $(11+\frac{1}{3}$, ó $\frac{34}{3})$ arrobas, cuyo recíproco abstracto es $\frac{3}{34}$. En este estado la operacion se reduce á (348 duros 18 reales) $\times\frac{3}{34}$, que consiste en multiplicar por 3 el dividendo, *tal cual es* (sin reducir especies), y partir el producto por 34, como se ve practicado á continuacion:

Dividendo.	Divisor.
1044 duros 54 reales.	34
24 »	
ó ×20 + 54	30 duros $15 + \frac{24}{34}$ reales.
= 534 reales.	
194 »	
24 »	

Luego el precio de la arroba del supuesto género, fue 30 duros 15 reales 24 mrs.

Ejemplo 2.°

Se sabe que 32 *cántaras de un líquido pesan* 33 *arrobas* 21 *libras* 10 *onzas; ¿qué peso corresponde á la cántara?*

Aquí el divisor es tambien de distinto género que el dividendo; pero como es incomplexo y se ha de considerar como abstracto, queda la operacion reducida á partir por 32 todas las especies del dividendo, como aquí se ve:

Division.

33 arrobas 21 libras 10 onzas.	32
46 libras.	
14 » + 10 onz. = 234 onz.	1 arroba 1 lib. 7 onz. 5 adarm.
10 »	

Luego la cántara del supuesto líquido pesaba 26 libras 7 onzas 5 adarmes.

Este problema puede considerarse tambien como una comprobacion del primer producto de números complexos, obtenido en la resolucion del primer ejemplo, Leccion 21.

Advertencia. Cada producto de complexos puede dar dos ejemplos de division, y en cada uno la comprobacion exacta de aquel producto. El empeño del calculador en llegar á la rigorosa exactitud, sin contentarse en aproximaciones, podrá ser alguna vez penoso, pero nunca estéril.

Entre las divisiones por número incomplexo, y aun por número abstracto, la mas fácil se ofrecerá *cuando las especies del complexo dividendo formen sistema, y el divisor sea su base; basta entonces rebajar un grado á cada especie del dividendo y se tendrá el cuociente exacto.* En efecto, (7 pies 5 pulgadas) : 12 = 7 pulgadas 5 líneas. (9 cahices 7 fanegas) : 12 = 9 fanegas 7 celemines.

Esta admirable facilidad se funda en el mismo principio que la division del decimal por la unidad seguida de ceros; si bien, como ya dijimos, el sistema aquí es de base = 12.

Regla para el 2.º caso: *Cuando el dividendo y el divisor sean congéneres, redúzcanse ambos datos á la menor especie de aquel que la tenga menor; y referido el dividendo á la mayor especie del género buscado en el cuociente, divídase por el divisor considerado como abstracto.*

Ejemplo:

¿Qué longitud tendrá un alambre que pesa 20 onzas $8 + \frac{2}{3}$ *adarmes, siendo el peso de la vara 3 onzas 10 adarmes?*

Reducido el dividendo á tercios de adarme, y tambien el divisor, tendremos $\frac{986}{3}$ adarmes : $\frac{174}{3}$ adarmes; y aplicando ahora la segunda parte de la regla, se obtendrá el resultado como se ve en el siguiente

Cálculo.

986 varas.	174
116 »	ó
ó = 348 pies.	5 varas 2 pies.
0	

Luego la longitud del alambre es de 5 varas y 2 pies.

Ejemplo 2.º

De un líquido, cuya cántara pesa 28 libras, se tienen 11 arrobas 24 libras 4 onzas; ¿cuánto líquido habrá medido por cántaras?

Resolucion.

Reducidos á onzas ambos datos, ó mejor, á *cuartos de libra*, se convierte la cuestion en esta : $\frac{1197}{4}$ libras : $\frac{112}{4}$ libras ; y aplicando ahora la segunda parte de la regla, se obtendrá el resultado como se ve en el siguiente.

Cálculo.

1197 cántaras.	112
77 »	
ó . . . 616 azumbres.	10 cántaras 5 azumb. 2 cuart.
56 »	
ó . . . . . 224 cuartillos.	
0	

Luego debe haber 10 cántaras 5 azumbres y 2 cuartillos de líquido.

LECCION 23.

Con la denominacion comun de *métrico-decimales*, se comprenden cinco clases de medidas, á saber :

MEDIDAS DE
Longitud.
Superficie.
Volúmen.
Capacidad.
Peso ó ponderales.

Su conjunto constituye lo que se llama *sistema métrico decimal*, y todas se originan de una primitiva, llamada *metro*.

El *metro lineal*, prescindiendo de su parte histórica y científica, no es otra cosa que una medida poco mayor que la vara castellana ; es como unos $\frac{6}{5}$ de vara. He aquí su correspondencia recíproca, determinada por la Comision de pesas y medidas :

$$\left(\begin{array}{l}1 \text{ metro} = 1{,}196308 \text{ varas.}\\ 1 \text{ vara} = 0{,}835905 \text{ metros.}\end{array}\right)$$

El que tiene nociones de Geometría infiere fácilmente del metro lineal, el *metro cuadrado* y el *metro cúbico* ; para los demas diremos que: metro cuadrado es la superficie plana que se cubriria con un *tablero cuadrado* de un metro ancho; y metro cúbico es el volúmen representado por un *sillar* de caras cuadradas, que tuviera un metro de alto.

Si imaginamos construido un *dado*, que tenga de alto la décima parte de un metro, tendremos lo que se llama *decímetro cúbico*. Imaginemos tambien una caja en que ajuste perfectamente el *dado*, y la cavidad de esta caja representará el *litro*. Supongamos ahora que la cavidad *litro* se llena de agua destilada, y prescindiendo de otras condiciones para esta agua, tendremos en el peso de ella la medida ponderal llama *kilógramo*. Y por fin, el peso del pequeño volúmen de agua, espresado en la *milésima* parte del agua que constituye el kilógramo, dará la medida ponderal llamada *gramo*. Tenemos, pues, en las palabras *metro lineal*, *metro cuadrado*, *metro cúbico*, *litro* y *gramo*, el nombre respectivo de cada una de las medidas llamada *principal*, en cada una de las cinco clases que constituyen el sistema métrico.

Para cada una de estas medidas principales, hay una tabla que contiene todos sus múltiplos y submúltiplos usuales. Omitimos esas tablas en los presentes Apuntes para evitar complicacion, y porque deben ya saberse de memoria desde la Instruccion primaria, como está mandado; pero no omitiremos ciertas observaciones que pasan desapercibidas si no se advierten.

1.ª Las medidas métrico-decimales no constituyen rigoroso sistema, pues el coeficiente denominal es 10 en el metro lineal, en el litro y en el gramo; pero es 100 en el metro cuadrado, y es 1000 en el metro cúbico. Ademas, aun dentro de una misma clase se pueden notar aberraciones: del kilógramo, por ejemplo, se pasa al quintal métrico por el coeficiente 100, dejando un órden vacío.

2.ª Muchas unidades métricas tienen mas de un nombre: en las cuadradas, el *hectómetro*, *decamémetro* y *metro*, se llaman respectivamente *hectárea*, *área* y *centiárea*. Para medir la estension de una capacidad no pequeña, tanto puede servir el *kilólitro* como el *metro cúbico*; y por eso se denominan ambas medidas *tonelada de arqueo*, en la medicion de los buques. En las medidas ponderales las llamadas *quintal métrico* y *tonelada de peso*, se denominan con mas propiedad por algunos autores *hecto-kilógramo* y *kilo-kilógramo*.

3.ª El *franco* (moneda francesa de plata) pesa 5 gramos, y el diámetro de la moneda de 5 francos es de 37 milímetros. Solamente de estas dos condiciones se pueden sacar muchas consecuencias, y muy útiles.

Para escribir los nombres de las medidas métricas, y los de los múltiplos y submúltiplos de ellas, se han adoptado las abreviaturas siguientes:

m = metro lineal.	H = hecto.
m^2 = metro cuadrado.	K = kilo.
a = área.	M = miria.
m^3 = metro cúbico.	Q = quintal.
l = litro.	d = deci.
g = gramo.	c = centi.
D = deca.	m = mili.

Con dos de estas letras, cuya segunda sea siempre la inicial de la medida que se quiere espresar, se escriben breve y claramente todos los números métricos. He aquí ejemplos:

7 M m, espresa *miriámetros*.
13 K m^2 espresa 13 *kilómetros cuadrados*.
17 D m^2 = 17 a, espresa 17 *decámetros cuadrados* = 17 *áreas*.
5 H m^2 = 5 H a, espresa 5 *hectómetros cuadrados* = 5 *hectáreas*.
300 K g = 3 Q, espresa 300 *kilógramos* = 3 *quintales métricos*.
187 d m^3, espresa 187 *decímetros cúbicos*.
96 c m^2, espresa 96 *centímetros cuadrados*.
72 c a = 72 m^2, espresa 72 *centiáreas* = 72 *metros cuadrados*.
1372 m m^3 = 1 c m^3 + 372 m m^3, espresa 1372 *milímetros cúbicos* = 1 *centímetro cúbico* + 372 *milímetros cúbicos*, etc.

En vez de las correspondencias recíprocas entre medidas métricas y castellanas, que pueden verse bien detalladas en las diversas tablas que las contienen, pondremos aquí las relaciones que llaman *equivalencias y aproximaciones en números enteros*, fáciles de retener en la memoria, como se necesita para su frecuente uso. He aquí su

TABLA.

51 metros	=	61 varas.
39 kilómetros	=	7 leguas de á 20000 pies.
25 metros cuadrados	=	322 pies cuadrados.
9 metros cúbicos	=	416 pies cúbicos.
5 hectólitros	=	9 fanegas.
60 litros de líquido	=	119 cuartillos de azumbre.
100 litros de aceite	=	199 libras.
46 kilógramos	=	100 libras, ó
	=	1 quintal de Castilla.
46 toneladas métricas	=	50 toneladas de Castilla, etc.

Y no se limita á lo dicho la ventaja de las espresadas equivalencias, si que tambien se puede encontrar por ellas la relacion recíproca, cuyas tablas hemos omitido. En efecto, la que hay entre el metro y la vara castellana, la hallariamos facilísimamente como aquí se ve:

$$1 \text{ metro} = \text{varas} \left(\frac{61}{51} = 1{,}1962 \ldots\right.$$

$$1 \text{ vara castellana} = \text{metros} \left(\frac{51}{61} = 0{,}8363 \ldots\right.$$

resultados ambos exactos hasta milésimas, que es suficiente aproximacion para los usos ordinarios: así de cuantos ejemplos se quieran.

LECCION 24.

Proposicion: *El valor de un decimal no se altera cuando por cámbio de nombre, se multiplica ó parte por el mismo número por quien, el movimiento de la coma, lo ha partido ó multiplicado.* En esta proposicion evidente, se funda la operacion ausiliar de los números métrico-decimales llamada *cámbio de nombre con permanencia de valor*. He aquí ejemplos:

748,16 m = 74,816 Dm = 7481,6 dm.
3522,43 l. = 35,2243 Hl. = 352,243 Dl.
1879,3 g. = 1,8793 kg. = 1 kg + 879,3 g.
etc.

Trasformacion del número complexo métrico en incomplexo y viceversa.

Ejemplos:

3 kg + 16 Dg + 96 dg = 3169,6 g.
3020,07 l. = 3 kl + 2 Dl + 7 cl.
2 Ha + 7 a + 18 ca. = 20718 m^2.
4729,32 m^3 = 4 Dm^3 + 729 m^3 + 320 dm^3.
etc.

Las Cuatro Operaciones
con números métricos-decimales.

ADICION.

Ejemplo 1.° *Hallar en decámetros la suma de*
17,36 m + 125,26 km + 25,84 Dm.

Operacion.

25,84 Dm.
1,736
12526,000

12553,576 Decámetros.

2.° *Hallar en litros la suma de*
29 Hl + 7 Dl + 12,7 kl + 500 dl.

Operacion.

70	l.
2900	
12700	
50	

Suma = 15720 litros.
= 1572 Dl.

SUSTRACCION.

Ejemplo 1.° *Dados los números 2,979 kl. y 127,79 Hl., hallar en decálitros el esceso del mayor sobre el menor.*

Operacion.

1277,9	Dl.
297,9	

Resta = 980,0 Decálitros.
= 98 Hl.

2.° *Hallar en metros cuadrados la diferencia entre* 2,752 a *y* 5432 dm^2.

Operacion.

275,20	m^2.
54,32	

Resta = 220,88 Metros cuadrados.

Ejemplo de multiplicacion:

¿Cuánto importan 89 kilógramos 14 gramos de un género á 2 escudos 3,50 reales el kilógramo?
Reducidos los datos á forma incomplexa, se tendrá

89,014 kg. × 2,350 escudos = 2,350 escudos × 89,014 = 209,1829 escudos = 2091 reales 29 mrs.

Operacion.

```
 89014
   235
--------
 445070
267042
178028
--------
20918290
```

Producto verdadero = 209,1829 escudos.

Ejemplo de division:

¿ Cuál debe ser el precio de 1 *kilógramo de cierto género, siendo* 66 *duros* 4 *reales* 17 *mrs. el importe de* 17 *kg.* 4 *Hg.* 66 *g.*?

Reduciendo desde luego los datos á incomplexos, la cuestion se espresa así:

132,450 escudos : 17,466 kg. = 132450 escudos : 17466 = 7,583 escudos.

DIVISION.

	132450	escudos;	17466
	10188	»	
ó	101880	décimos de escudo;	7,583 Escudos.
	14550	»	
ó	145500	centésimos de escudo;	
	5772	»	
ó	57720	milésimos de escudo;	
	5322	»	

Luego el cuociente aproximado hasta milésimos de escudo, es 7,583 escudos = 75 reales 28 mrs.

Observacion. Los dos últimos ejemplos, apoyados en la doctrina que les precede, nos advierten que *la multiplicacion y la division de los números complexo-métricos, se pueden reducir, por cámbios sucesivos de forma, á multiplicacion y division de números enteros.*

APUNTES DE ALGEBRA

RELATIVOS A LAS LECCIONES DEL PROGRAMA.

LECCION 25.

ALGEBRA es una Aritmética universal, que representando por letras las cantidades que entran en los cálculos, obtiene para los resultados unas espresiones generales llamadas *fórmulas*, por cuyo medio se resuelven las cuestiones con facilidad y seguridad.

Cada fórmula sirve para resolver el problema de que ha provenido, y ademas cuantos otros se ofrezcan análogos á él.

El Algebra se divide en dos partes esencialmente distintas: una llamada por algunos *Algoritmo*, y otra llamada por todos *Análisis*. La primera enseña á practicar con las letras las mismas operaciones que la Aritmética con los números, y la segunda enseña á resolver los problemas despues de planteados; esto es, cuando están ya cifrados en una ó mas ecuaciones.

Los signos de cantidad en el Algebra son las letras del alfabeto; y aunque estas no pasan de veinticuatro, bastan sin embargo para todas las urgencias, pues se sirve el Algebra de los dos alfabetos mayúsculo y minúsculo, y tambien del griego. Ademas una sola letra puede tomarse en diferentes significados por medio de los acentos que pueden agregársele. He aquí una muestra de los

Signos de cantidad.

$$a \quad b \quad c \quad d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p$$
$$\mathbf{A} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{C} \quad \mathbf{D} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{P}$$
$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pi$$

$$a' \quad b' \quad c' \quad d' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p'$$
$$A' \quad B' \quad C' \quad D' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P'$$
$$\alpha' \quad \beta' \quad \gamma' \quad \delta' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pi'$$

$$a'' \ b_{,} \ c_{,,} \ d''' ; \ A_{,} \ B'' \ C_{,,,} ; \ \alpha^{\text{IV}} \ \beta_{,,} \ \gamma'' \ \delta_{\text{V}} ;$$
etc.

En cuanto á signos de operacion, usa el Algebra de los mismos que la Aritmética, y de otros que se darán á conocer.

Anotacion de operaciones.

$$a + b \,;\; a - b \,;\; a \pm b \,;\; a \mp b.$$
$$a \times b = a \,.\, b = a\,b = b\,a.$$
$$a \times (b + c) = a\,(b + c) = (b + c) \times a.$$
$$(a + b) \times (c - d) = (a + b)\,(c - d) = (c - d)\,(a + b).$$
$$a : b = \frac{a}{b} \,;\; (b + c) : a = \frac{b + c}{a}.$$

Supuestos y sus consecuencias.

$$a = b \;\text{da}\; \left| \begin{array}{l} a + b = 2\,a = 2\,b \,;\; a - b = b - a = o \,; \\[4pt] \dfrac{c}{a} < \dfrac{2c}{b} \,;\; \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{2c} \end{array} \right.$$

$$a > b \text{ da } \left| \begin{array}{l} a \pm c) > (b \pm c)\ ;\ (c - a) < (c - b)\,. \\ C \times \dfrac{b}{a}) < C\ ;\ (C : \dfrac{b}{a}) > C. \end{array} \right.$$

Desde ahora sentamos como principio el siguiente aserto : *Toda proposicion aritmética cuyo enunciado sea independiente del valor numérico de la cantidad á que se refiere, será tambien proposicion algébrica* ; por fundarse en la generalidad de valores, que es el carácter esencial del Algebra.

Como las fórmulas son frases simbólicas en el idioma algébrico, conviene comprenderlas cuanto antes. Si, pues, apoyándonos en el principio que acabamos de sentar, espresamos algébricamente algunas proposiciones de la Aritmética, obtendremos resultados formulares de fácil comprension. He aquí ejemplos :

1.° $M - S = R$, da $M = R + S$ (a),

y tambien $R = (M \pm c) - (S \pm c)$ (b) :

fórmulas que en pocas letras nos dicen lo que se lee en su

Traduccion.

(a) *Toda resta debe ser tal que sumada con el sustraendo dé el minuendo.*

(b) *Una resta no se altera cuando á minuendo y sustraendo se les añade ó quita una misma cantidad.*

2.° $A \times B = P$, da $P : A = B$ y $P : B = A$ (c) ;

y tambien $P = (A\,.\,n) \times (B : n) = (A : m) \times (B\,.\,m)$ (d).

Traduccion.

(c) *Un producto de dos factores partido por uno de ellos, debe dar por cuociente el otro factor.*

(d) *Un producto no se altera cuando un factor se multiplica por lo mismo que otro se parte.*

3.° $N : D = Q$, da $N = Q\,D$ (e);

y tambien $Q = \dfrac{c\,N}{c\,D} = \dfrac{N : m}{D : m}$ (f).

Traduccion.

(e) *Todo cuociente debe ser tal que multiplicado por el divisor, dé el dividendo.*

(f) *Un cuociente no se altera cuando dividendo y divisor se multiplican ó parten por una misma cantidad.*

LECCION 26.

Se llama *monómio* toda espresion de cantidad que esté sola ó separada de otra por el signo + ó el —. En un monómio hay siempre cuatro cosas, espresas todas ó sobre entendida alguna de ellas, y son : Signo, coeficiente, letras y los esponentes de estas. El signo siempre va anexo al coeficiente, y cuando es — nunca se omite ; el coeficiente y el esponente 1, no se espresan si no hay verdadera necesidad. He aquí monómios : a ; $2bc$; $3a^2b$; $-2c^3$; etc.

El monómio se llama tambien *término* ; pero estos nombres no son siempre sinónimos, porque si bien el monómio siempre es término, no así el término será siempre monómio : á su tiempo veremos términos que constan de dos, tres y mas monómios.

Orígen de los coeficientes.

$$a + a + a + a = 4a.$$
$$ab - bc + ba - cb - bc = 2ab - 3bc.$$
$$abc - bd + abc - db + acb = 3abc - 2bd.$$

Orígen de los esponentes.

$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, a = aaaa = a^4.$$
$$aa \times bbb = a^2 b^3.$$
$$ab \,.\, bca \,.\, abc = aaa \times bbb \times cc = a^3 b^3 c^2.$$

En los dos ejemplos que preceden está la síntesis del monómio. Véase su análisis en los siguientes.

1.º

$$5a^3bc^2 = a^3bc^2 + a^3bc^2 + a^3bc^2 + a^3bc^2 + a^3bc^2 =$$
$$aaabcc + aaabcc + aaabcc + aaabcc + aaabcc.$$

2.º

$$-3a^2b^3c = -a^2b^3c - a^2b^3c - a^2b^3c = -aabbbc$$
$$-aabbbc - aabbbc.$$

Lectura de monómios.

Siempre el signo y el coeficiente deben leerse juntos; pero respecto á los esponentes cállese la palabra *elevado á* en el de cada letra, cuando este esponente sea un solo número entero positivo sin signo espreso.

Ejemplos: $7^2ab^3c = 49ab^3c$; $-2a^4f^{2n}$; $2^3b^4c^{3-1} = 8b^4c^2$;

$$11\,a^n b^{\frac{2t}{t}} c^{\frac{6}{3}} = 11\,a^n b^2 c^2, \text{ etc.}$$

El grado ó dimensiones de un monómio entero, se aprecia por la suma de los esponentes de sus letras; pero si el monómio es quebrado, sus dimensiones serán las del numerador menos las del denominador. Por esta regla puede ya preverse que las dimensiones de un monómio serán positivas, nulas ó negativas. He aquí ejemplos:

1.º $2abc^2$, monómio de cuarto grado, ó de cuatro dimensiones.

2.º $\dfrac{5a^2b^2}{3c^3}$, monómio de primer grado, ó de una dimension.

3.º $\dfrac{2b^2c}{3a^3}$, monómio de cero grado, ó de dimension nula.

4.° $\dfrac{3\,b^2}{c^4}$, monómio de menos dos dimensiones.

Valuacion del monómio por los supuestos numéricos que se hayan hecho en sus letras.

Ejemplos :

Supuestos.
$a = 2$
$b = 1$
$c = 3$
$d = 5$
$e = c$

1.° $3a^2b^3cde = 3a^2b^3c^2d$
$= 3\,.\,2^2.\,1^3.\,3^2.\,5 = 3^3.\,2^2.\,5$
$27 \times 20 = 540.$

2.° $$\frac{2\,a^3b^2c^3}{9\,e\,d} = \frac{2^4.\,1^2.\,3^3}{9\,.\,3\,.\,5}$$

$$= \frac{2^4}{5} = \frac{2^5}{10} = \frac{32}{10} = 3,2.$$

3.° $$\frac{5\,a^2\,d\,c^4}{3\,b^3d^2c^3} = \frac{a^2d^2c^4}{b^3d^2c^4} = \frac{a^2}{b^3} = \frac{4}{1} = 4.$$

LECCION 27.

Cuando una espresion algébrica comprende mas de un monómio, se llama en general *polinómio*; pero en particular se llama *binómio* cuando consta de dos monómios, y *trinómio* cuando consta de tres. He aquí ejemplos de

Binómios : $3a^2b^3 + 5b^2d^6$; $8a^3b^3 - 5c^2df$.

Trinómios : $a^2c^3 - 5b^4d + 7d^2$; $5b^6f + 7m^3 - 2b^2$.

Polinómios de cuatro ó mas términos : $5a^2 - 3b + 9 - 7f^3$;
$12ab^3cd^2 + 5d - 3b^4c + 1 - 11d^2$.

En el estudio de los polinómios conviene conocer pronto los términos semejantes. *Se llaman semejantes los monómios idénticos en todo, y tambien los que solo se diferencian en el signo, en el coeficiente, ó en ambas cosas.*

Dos monómios que solo se diferencian en el signo, se llaman *opuestos*: la suma de ambos siempre es cero; pero su diferencia será el duplo del monómio, que se tome por minuendo.

La existencia de términos semejantes en un polinómio, ofrece desde luego la ventaja de su reduccion sin alteracion de valor; porque todos los monómios de un mismo tipo, se reducen á un solo monómio. He aquí ejemplos :

1.º

$$3a^2b - 5c^3 + a^2b + 7c^3 - 2a^2 = 4a^2b + 2c^3 - 2a^2.$$

2.º

$$5b^2c^2 - 4abc + 7d^2 - 5c^2b^2 = 7d^2 - 4abc.$$

3.º

$$6a^2b - 6a^3c + 4d^2 - 5a^2b + 6a^3c - 4d^2 = a^2b.$$

Un polinómio se llama *homogéneo* cuando todos sus términos son de un mismo grado, y ese mismo grado será el del polinómio; pero si los términos son de diferente grado, el polinómio se llama *heterogéneo*. He aquí ejemplos :

$3a^3 + abc - 5ac^2$, es un trinómio homogéneo de tercer grado.

$5ac - \dfrac{7c^3}{a} + b^2$, es un trinómio homogéneo de segundo grado.

$9a - \dfrac{5a^3}{c^2}$, es un binómio homogéneo de primer grado.

$9a^2 - 5b + c^4 - 3$, es un polinómio heterogéneo.

ADICION.

Sumar en Algebra no es ótra cosa que formar un solo polinómio con los datos, tales cuales sean, y simplificar la suma cuanto se pueda. Ejemplos:

Los sumandos $5a$; $3b^2$; $-7c^3$; $8b^5$; darán por suma el polinómio $5a + 3b^2 - 7c^3 + 8b^5$.

Los sumandos $(3a^2 - 5b)$; $6a^2$; $(5b - 8a^2)$; darán por suma el polinómio $3a^2 - 5b + 6a^2 + 5b - 8a^2$: el cual por reduccion de términos semejantes, da por último resultado el monómio a^2.

Pero sin repetir detalles tan minuciosos, he aquí otros ejemplos resueltos con la destreza y agilidad que se requiere en la práctica:

1.°

$$(4a + 9b - 2c) + (4d - 3c + 2a) + (c - 4d + 7b)$$
$$= 6a + 16b - 4c.$$

2.°

$$(3ab^2c - bc^3 + 4a^2d^2 + 2abc^3) + (2ab^2c + 8c^3b - 6abc^3$$
$$- 3a^2d^2) + (a^3bc^2 - a^2d^2 + 8abc^3)$$
$$= 5ab^2c + 7bc^3 + 4abc^3.$$

SUSTRACCION.

Para restar en Algebra basta invertir los signos del sustraendo; esto es, al + hacerlo — y al — hacerlo +, y luego sumar ambos datos. He aquí ejemplos:

1.°

$$(5a^3c - 9a^2b^3 + 2a^4b - 8b^6) - (7b^6 - 9a^2b^3 + 2a^3c + 11a^4b)$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} 5a^3c - 9a^2b^3 + 2a^4b - 8b^6 \\ -2a^3c + 9a^2b^3 - 11a^4b - 7b^6 \\ \hline 3a^3c - 9a^4b - 15b^6 \end{array} \right.$$

2.º

$$(8a^4 - 9a^3b + 6a^2b^2 - 7ab + 11b^3) - (6a^2b^2 + 6b^3 + 3a^4 - 8ab + 5a^2c^4)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 8a^4 - 9a^3b + 6a^2b^2 - 7ab + 11b^3 \\ -3a^4 - 5a^2c^4 - 6a^2b^2 + 8ab - 6b^3 \\ \hline 5a^4 - 9a^3b - 5a^2c^4 + ab + 5b^3 \end{array} \right.$$

La adicion y sustraccion simultáneas.

Ejemplos :

1.º $(4a^2b^3 - 3c^2 + b^2c^3) \pm (3b^3a^2 - 4c^2 + 2c^3b^2)$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 7a^2b^3 - 7c^2 + 3b^2c^3 \\ a^2b^3 + c^2 - b^2c^3 \end{array} \right.$$

2.º

$$(8a^2b^3c - 3^3ab^2c^3 + 32a^3b^2c^5) \pm (2^5a^3b^2c^5 + 27ab^2c^3 - 2^3b^3a^2c)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 64a^3b^2c^5 \\ 16a^2b^3c - 54ab^2c^3 \end{array} \right.$$

Con las nociones dadas hasta aquí se puede ya demostrar la proposicion indicada en esta misma Leccion sobre las *cantidades opuestas*, y tambien estas otras :

Toda cantidad negativa es menor que cero.

De dos cantidades negativas es mayor la de menor valor numérico.

LECCION 28.

La multiplicacion en Algebra ofrece tres casos : 1.º Multiplicar monómio por monómio. 2.º Multiplicar polinómio por monómio. 3.º Multiplicar polinómio por polinómio. Como los casos segundo y tercero se apoyan en el primero, damos desde luego para multiplicar un monómio por otro monómio las siguientes reglas :

1.ª El producto de dos monómios será positivo si los datos son de un mismo signo; pero será negativo si son de signo contrario.

2.ª El coeficiente del producto es igual al producto de los coeficientes de los factores.

3.ª Las letras del producto serán todas las de los factores con sus propios esponentes, si todas son distintas; pero de las idénticas solo se pondrá una de cada identidad, y esta con un esponente igual á la suma de los esponentes de todas sus idénticas.

4.ª Si los factores monómios fueren mas de dos, el producto deberá ser positivo ó negativo, segun fuere par ó impar el número de factores negativos: el producto de monómios siempre es un monómio.

Productos de factores monómios.

Ejemplos:

1.º $3a^2b \times 11c^2d = 33a^2bc^2d.$

2.º $9a^2b^3df \times -10ab^2c^2d = -90a^3b^5c^2d^2f.$

3.º $-2^3a^2bc^2d^3 \times -2^2ab^{n-1} = 2^5a^3b^nc^2d^3 = 32a^3b^nc^2d^3.$

4.º $2ab^3 \times -7bc^2 \times -5ac = 70a^2b^4c^3.$

5.º $2cd^3 \times -5a^2d \times -5b^2c^3 \times -2abc = -100a^3b^3c^5d^4.$

Cuadrado y cubo del monómio.

Cuando los factores monómios sean iguales, su producto será potencia de uno de ellos: dos factores iguales, darán la segunda potencia ó el cuadrado: tres factores iguales, darán el cubo ó tercera potencia, etc.

El cuadrado de un monómio es igual al cuadrado de su coeficiente, seguido de las letras del monómio, con duplo esponente en cada letra. Estos cuadrados siempre son positivos.

Ejemplos:

1.º $(7ab^2c^3)^2 = 49a^2b^4c^6.$

2.° $(-20ab^2c^n)^2 = 400a^2b^4c^{2n}$.

3.° $(\pm 11a^c b^3 c)^2 = 121a^{2c}b^6c^2$.

El cubo de un monómio es igual al cubo de su coeficiente seguido de las letras del monómio, con triplo esponente en cada letra. La tercera potencia conserva el signo de la raíz.

Ejemplos :

1.° $(2a^2b^3c)^3 = 8a^6b^9c^3$.

2.° $(\mp 3ab^nc^2)^3 = \mp 27a^3b^{3n}c^6$.

3.° $(2^t a^2bc^3d^c)^3 = 2^{3t}a^6b^3c^9d^{3c} = 8^t a^6b^3c^9d^{3c}$.

Raíz segunda y raíz tercera del monómio.

Raíz cuadrada ó segunda de una cantidad dada, es otra cantidad que elevada á la segunda potencia, reproduzca la cantidad dada. El signo $\sqrt{a}$ pide la raiz segunda de la cantidad *a*, y se lee : *raíz cuadrada de a*, ó *raíz segunda de a*, ó solamente *raíz de a.*

Raíz cúbica ó tercera de una cantidad dada, es otra cantidad que elevada á la tercera potencia, reproduzca la cantidad dada. El signo $\sqrt[3]{b}$ pide la raíz tercera de la cantidad *b*, y se lee : *raíz cúbica de b*, ó *raíz tercera de b*.

La raiz cuadrada de un monómio es igual á la raíz de su coeficiente, seguida de las letras del monómio, con la mitad del esponente en cada letra : el resultado lleva antepuesto el signo $\pm$.

Ejemplos :

1.° $\sqrt{49a^6b^2c^4} = \pm 7a^3bc^2$.

2.° $\sqrt{1600a^4b^6c^{2n}} = \pm 40a^2b^3c^n$.

La raíz cúbica ó tercera de un monómio es igual á la raíz tercera de su coeficiente, seguida de las letras del monómio, con un tercio de esponente en cada una.

Ejemplos :

1.° $\sqrt[3]{216\,b^6 c^3 d^9} = 6\,b^2 c\,d^3$.

2.° $\sqrt[3]{-8000\,a^9 b^{12} c^{3t}} = -20\,a^3 b^4 c^t$.

Productos de polinómio por monómio.

Se obtienen *multiplicando cada término del polinómio por el monómio, y la suma algébrica de los monómios resultantes será el polinómio producto.*

Ejemplos :

1.° $(4a - 3b^2c + 2a^4b^4c^2) \times 2a^3b^2 = 8a^4b^2 - 6a^3b^4c +$
$4a^7b^6c^2$.

2.° $(2b^3c^4 - 3abd^3 + d - 4a^2b) \times -4a^2b^3 = 12a^3b^4d^3 +$
$16a^4b^4 - 4a^2b^3d - 8a^2b^6c^4$.

3.° $(2a^3 - 3b^2 + c^4) \times \pm 5a^3b^2c$

$$= \begin{cases} 10a^6b^2c - 15a^3b^4c + 5a^3b^2c^5; \\ 15a^3b^4c - 10a^6b^2c - 5a^3b^2c^5. \end{cases}$$

Se han escrito los resultados en el órden que aparece, porque *el valor de un polinómio no se altera aunque se permuten sus términos.* En esta propiedad se funda la operacion que llaman *ordenar un polinómio*, y consiste en escribir sus términos con relacion á la letra mas repetida, llamada *letra principal*, y segun el órden de magnitud marcado por los esponentes de dicha letra. He aquí ejemplos :

1.°

$$a^3d^5 - 5a^4c^4 + 9ac^7 - 6d^8 + 3a^5b^3 - a^2b^6$$
$$= 3a^5b^3 - 5a^4c^4 + a^3d^5 - a^2b^6 + 9ac^7 - 6d^8.$$

2.°

$$5b^2d^2 + 3b^3c^2 - 7a^2b - 5b^3c^2 = -2b^3c^2 + 5b^2d^2 - 7a^2b.$$

En el primer ejemplo es letra principal la a, y en el segundo es la b. Ademas, el resultado de este comienza por término negativo, lo cual debe evitarse cuando no sea de absoluta necesidad, como lo es en dicho resultado.

LECCION 29.

Para formar el producto de un polinómio por otro, *tómese por multiplicador el factor de menos términos, y por cada uno de estos multiplíquese el otro factor: se obtendrán tantos productos parciales cuantos términos haya en el multiplicador, y la suma algébrica de dichos productos dará en un solo polinómio el producto total.*

Ejemplos:

1.° $(a^4b + a^3b^2 - a^2c^3)(a^2c - ab^2)$

$$= \left\{ \begin{array}{l} a^6bc + a^5b^2c - a^4c^4 \\ \qquad\qquad - a^5b^3 - a^4b^4 + a^3b^2c^3 \\ \hline a^6bc + a^5b^2c - a^5b^3 - a^4c^4 - a^4b^4 + a^3b^2c^3 \end{array} \right.$$

2.° $(a^4 + a^3c + a^2c^2 + ac^3 + c^4)(a - c)$

$$= \left\{ \begin{array}{l} a^5 + a^4c + a^3c^2 + a^2c^3 + ac^4 \\ \qquad - a^4c - a^3c^2 - a^2c^3 - ac^4 - c^5 \\ \hline \qquad\qquad a^5 - c^5 \end{array} \right.$$

3.° $(2a^3 - 3b^2 + c)(2a^3 - 1 + 3b^2)$

$$= \begin{cases} 4a^6 - 6a^3b^2 + 2a^3c \\ \qquad\qquad - 2a^3 + 3b^2 - c \\ \quad + 6a^3b^2 \qquad + 3b^2c - 9b^4 \\ \hline 4a^6 - 2a^3 + 2a^3c - 9b^4 + 3b^2 + 3b^2c - c \end{cases}$$

En el producto de un polinómio por otro polinómio se observan exactamente las siguientes leyes :

1.ª El número de monómios del producto total es igual al número de monómios que tiene un factor, multiplicado por el número de monómios que tiene el otro factor.

2.ª El producto de polinómios ordenados de un mismo modo, saldrá ordenado como ellos, y sus términos primero y último no tendrán semejante.

3.ª El producto de polinómios homogéneos será homogéneo, y su grado será igual á la suma de los grados de los factores.

Revísense ahora los ejemplos que preceden, y se verán cumplidas rigorosamente todas estas leyes. Ademas, el tercer ejemplo nos dice que *para multiplicar por — 1 una espresion algébrica, basta invertirle los signos.*

Productos determinables por fórmula propia.

Regla para el 1.° *La suma de dos cantidades multiplicada por la diferencia de las mismas, da por producto el cuadrado del minuendo, menos el cuadrado del sustraendo.*

Fórmula de esta regla : $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Ejemplos :

1.° $(abc + dgf)(abc - dgf) = a^2b^2c^2 - d^2g^2f^2$.

2.° $(2ab^3 + 3bc^2)(3bc^2 - 2ab^3) = 9b^2c^4 - 4a^2b^6$.

Regla para el 2.° *La diferencia de dos cantidades multiplicada por el producto de las mismas y la suma de sus cuadrados, da por producto el cubo del minuendo, menos el cubo del sustraendo.*

Fórmula de esta regla : $(A - B)(AB + A^2 + B^2) = A^3 - B^3$.

Ejemplos :

1.° $(3a - 2b)(6ab + 9a^2 + 4b^2) = 27a^3 - 8b^3$.

2.° $(a^4b^2 + 5a^2bc + 25c^2)(a^2b - 5c) = a^6b^3 - 125c^3$.

Potencias segunda y tercera del binómio.

El producto de dos binómios iguales da el cuadrado ó segunda potencia de uno de ellos ; pero si los binómios iguales son tres, su producto será cubo ó tercera potencia de uno de ellos.

Regla para el cuadrado del binómio. *Esta potencia consta de tres términos, que son : cuadrado del primer término del binómio raíz; duplo del primero por el segundo, y cuadrado del segundo.*

Fórmula de esta regla : $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$.

Ejemplos :

1.° $(a^2b^3 + 5c^3)^2 = a^4b^6 + 10a^2b^3c^3 + 25c^6$.

2.° $(3a^2 - 5bc^3)^2 = 9a^4 - 30a^2bc^3 + 25b^2c^6$.

Regla para el cubo del binómio. *Esta potencia consta de cuatro términos, que son: cubo del primer término del binómio raíz; triplo del cuadrado del primero por el segundo; triplo del cuadrado del segundo por el primero, y cubo del segundo.*

Fórmula de esta regla : $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$.

Ejemplos :

1.° $(a^2b + 2cd)^3 = a^6b^3 + 6a^4b^2cd + 12a^2bc^2d^2 + 8c^3d^3$.

2.° $(2a^3 - 3b^2)^3 = 8a^9 - 36a^6b^2 + 54a^3b^4 - 27b^6$.

LECCION 30.

Dividir un monómio por otro monómio.

Todas las reglas que ordinariamente se dan para esta operacion, se pueden reducir á la siguiente : *Escríbase un quebrado cuyo numerador sea el monómio dividendo, y el denominador el monómio divisor ; en seguida, á su derecha, escríbase el signo =, y á la derecha de este signo escríbase el quebrado que resulte de suprimir en los dos términos del primero todos los factores comunes que haya, poniendo á este resultado el signo + si ambos datos son de un mismo signo, ó el signo — si tienen signo contrario.*

Segun esta regla siempre consideramos como quebrado el cuociente de un monómio por otro monómio ; pero como este quebrado debe tener la unidad por denominador ó por numerador, ó ambos términos distintos de la unidad, resultan, como por las otras reglas, solo dos formas de cuociente, el entero cuando es la unidad el denominador, y el quebrado irreducible en los otros dos casos.

He aquí ejemplos de todo :

1.°

$$18a^3b^4c^2 : 9a^2b^3c = \frac{18a^3b^4c^2}{9a^2b^3c} = \frac{2abc}{1} = 2abc.$$

2.°

$$39a^5b^6c^4 : -13a^3b^2c^3 = \frac{39a^5b^6c^4}{-13a^3b^2c^3} = -\frac{3a^2b^4c}{1} = -3a^2b^4c.$$

3.°

$$-17ab^2c^3d^2 : -51a^2b^2c^4d^3 = \frac{-17ab^2c^3d^2}{-51a^2b^2c^4d^3} = \frac{1}{3acd}.$$

4.°

$$-16a^4b^3c^n : 24a^5b^2c^n = \frac{-16a^4b^3c^n}{24a^5b^2c^n} = -\frac{2b}{3a}.$$

Cuando ya se tiene destreza en esta operacion, se evita el dar forma de quebrado á los ejemplos de cuociente entero; basta para obtenerlos dividir el coeficiente del dividendo por el coeficiente del divisor, y en cada letra del mismo nombre restar el esponente que tiene la del divisor del que tiene la del dividendo.

Ejemplos:

1.° $56a^4b^3c^2d^t : 28a^2bcd^t = 2a^2b^2c.$

2.° $-48ab^4c^3 : -16bc^2 = 3ab^3c.$

3.° $42a^3c^2b^{t+2} : -14a^2b^3c^2 = -3ab^{t-1}.$

Adoptando para todos los cuocientes de un monómio por otro la sustraccion de esponentes, aparecerian los resultados con letras de esponente cero, y otras de esponente negativo; y aunque la division por nuestra regla no dará tales esponentes, debemos entender su significado, y probar esta inteligencia con la demostracion de las proposiciones siguientes:

1.ª *Toda cantidad elevada á cero, es igual á 1.*

2.ª *Toda cantidad con esponente negativo, es igual á 1 partido por dicha cantidad con esponente positivo.*

Probada la legitimidad de estos esponentes, usemos de ellos con la parsimonia que la prudencia reclama.

Dividir un polinómio por un monómio.

Esta operacion se ejecuta partiendo cada término del polinómio por el monómio; el cuociente será un polinómio de tantos términos cuantos haya en el dividendo; y podrán ser todos enteros, todos quebrados, ó unos enteros y otros quebrados.

Ejemplos:

1.° $(8b^4c^2d^6 - 4a^5b^4d^6c) : 4b^3cd^2 = 2bcd^4 - a^5bd^4.$

2.ª $(6b^4c^3f^4 - 12a^2b^4d + 3b^2c^3d) : 6b^3c^3d$

$$= \frac{bf^4}{d} - \frac{2a^2b}{c^3} + \frac{1}{2b}.$$

3.º $(18a^3b^5c^2 - 27a^2b^4c + 6a^4b^3 - 36ab^6) : 9a^2b^4c$

$$= 2abc - 3 + \frac{2a^2}{3bc} - \frac{4b^2}{ac}.$$

Cuando el divisor sea — 1, *bastará invertir los signos del dividendo para tener el cuociente.*

Como consecuencia de la division del polinómio por el monómio, se propone y resuelve el siguiente problema : *Descomponer un polinómio en dos factores, tales que el uno sea el monómio máximo divisor de todos sus términos.*

He aquí ejemplos que lo resuelven :

1.º $(24a^3b^2c^3 - 36a^2b^3c^2) = 12a^2b^2c^2 \times (2ac - 3b)$.

2.º $(27a^3b^5c^4 - 45a^4b^3c^3 + 36a^2b^4c^5) = 9a^2b^3c^3 \times (3ab^2c - 5a^2 + 4bc^2)$.

LECCION 31.

Dividir un polinómio por otro polinómio.

Para resolver este problema obsérvense por su órden las siguientes reglas :

1.ª *Ordénense ambos datos por una misma letra y en un mismo sentido.*

2.ª *Pártase el primer término del dividendo ordenado, por el primer término del divisor ordenado, y se obtendrá el primer término del cuociente que se busca.*

3.ª *Multiplíquese este cuociente por todo el divisor, y el producto réstese del dividendo ordenado, cuidando de que la resta salga ordenada como él.*

4.ª *Esta resta será un segundo dividendo que, sometido á las tres reglas que preceden, dará un término para el cuociente, un producto y un resíduo como el dividendo anterior.*

Así se continúa hasta hallar *resta cero, ó una resta cuya letra principal tenga menor esponente que el de esta misma letra en el divisor*. Si la resta es cero, el cuociente será exacto; y si no, póngase el resíduo partido por el divisor, como quebrado aditivo, á la derecha del cuociente entero.

Ejemplos:

1.º $(12a^4bdc - 8a^2b^2cd + 15a^5b^2 - 10a^3b^3) : (3a^3b - 2ab^2) = 5a^2b + 4adc.$

Cálculo.

$$\begin{array}{l|l} 15a^5b^2 + 12a^4bcd - 10a^3b^3 - 8a^2b^2cd & 3a^3b - 2ab^2 \\ \hline -15a^5b^2 \qquad\qquad\quad + 10a^3b^3 & 5a^2b + 4acd \\ \hline 12a^4bcd - 8a^2b^2cd & \\ -12a^4bcd + 8a^2b^2cd & \text{Exacto.} \\ \hline \text{Cero.} & \end{array}$$

2.º $(192a - 519 + a^3 - 24a^2) : (a - 8) = a^2 - 16a + 64 + \dfrac{7}{a-8}.$

Cálculo.

$$\begin{array}{l|l} a^3 - 24a^2 + 192a - 519 & a - 8 \\ \hline -a^3 + 8a^2 & a^2 - 16a + 64 + \dfrac{7}{a-8}. \\ \hline -16a^2 + 192a - 519 & \\ +16a^2 - 128a & \text{Cuociente con resíduo.} \\ \hline 64a - 519 & \\ -64a + 512 & \\ \hline \text{Resíduo } 7. & \end{array}$$

Con dos polinómios cualesquiera tomados para dividendo y divisor, rarísima vez se obtendrá cuociente entero exacto; este requiere por dividendo un polinómio que sea producto del divisor y otro polinómio, ó monómio. Cada ejemplo de multiplicacion puede dar dos de division exacta, por el principio ya sabido de que *El producto de dos factores partido por uno de ambos, da por cuociente el otro factor.* Ademas, es muy útil para esto saber de memoria las siguientes reglas:

1.ª El cuadrado de un binómio partido por su raíz, da por cuociente la raíz; y tambien da este cuociente el cubo del binómio partido por el cuadrado de la raíz.

2.ª El cubo de un binómio partido por su raíz, da por cuociente el cuadrado del binómio raíz.

3.ª Toda diferencia de cuadrados es producto de dos binómios; uno que es la raíz del minuendo menos la raíz del sustraendo, y otro que es la suma de estas mismas raízes.

4.ª Toda diferencia de cubos es producto de dos polinómios; uno binómio que es la raíz tercera del minuendo, menos la raíz tercera del sustraendo, y otro trinómio que es el producto de dichas raízes, más la suma de sus cuadrados.

Cuando se prevé que un cuociente pedido no debe ser entero exacto, se recurre á la simplificacion del quebrado que lo indica. Para esta operacion sirven eficazmente las proposiciones que preceden, y tambien la del máximo factor monómio, Leccion 30. He aquí ejemplos:

1.º $(a^3b^3+a^3b^2c):(b^3cd^2+b^2c^2d^2)=\dfrac{a^3b^3+a^3b^2c}{b^3cd^2+b^2c^2d^2}$

$$=\frac{a^3b^2(b+c)}{b^2d^2c(b+c)}=\ldots.\frac{a^3}{cd^2}.$$

2.º $9ac^2-6bc^2):(9a^2-4b^2)=\dfrac{9ac^2-6bc^2}{9a^2-4b^2}$

$$= \frac{3c^2(3a-2b)}{(3a-2b)(3a+2b)} = \ldots . \frac{3c^2}{3a+2b}.$$

$$3.^{\circ} \quad (2ab - a^2 - b^2) : (a^2 - b^2) = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{b^2 - a^2}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{(b-a)(b+a)} = \ldots . \frac{b-a}{b+a}.$$

$$4.^{\circ} \quad (a^2c + abc + b^2c) : (a^3 - b^3) = \frac{c(a^2 + ab + b^2)}{a^3 - b^3}$$

$$= \frac{c(a^2 + ab + b^2)}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} = \ldots . \frac{c}{a-b}.$$

LECCION 32.

Cuando una espresion de la forma $\frac{A}{B}$ no puede dar cuociente entero exacto, constituye lo que se llama *quebrado literal* ó *fraccion algébrica*; y si en ella se suprimen todos los factores comunes al numerador y denominador queda simplificada, y resulta una fraccion irreducible, como se ve en los resultados de los cuatro ejemplos en que termina la Leccion 31.

Adicion con fracciones algébricas.

Regla: la misma de las fracciones numéricas.

Ejemplos:

$$1.^{\circ} \quad \frac{a}{b+c} + \frac{4b}{2c+2b} + \frac{3b-a}{b+c} + \frac{10c}{2c+2b}.$$

Adoptando para denominador comun el binómio $(b+c)$ la adicion se hará como aquí aparece:

$$\text{Suma} = \frac{a+2b+3b-a+5c}{b+c} = \frac{5b+5c}{b+c} = \frac{5(b+c)}{b+c}$$

$= 5$: valor numérico, independiente de todo supuesto para las letras *a b c*.

$$2.^{\circ} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{b-a}{b} + \frac{b-c}{a}.$$

Aquí el denominador comun deberia ser *a b* ; pero como es preferible hacer dos sumas parciales en vez de la total pedida, diremos :

$$\text{Suma} = \left(\frac{a+b-a}{b}\right) + \left(\frac{c+b-c}{a}\right) = \frac{b}{b} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

$$= \frac{a+b}{a}.$$

En los ejemplos que siguen omitimos razonamientos.

$$3.^{\circ} \quad \frac{b-d}{m-n} + \frac{c^3-ac}{2c^2-c} + \frac{b-d}{n-m} + \frac{a}{2c-1}$$

$$= \left(\frac{b-d+d-b}{m-n}\right) + \left(\frac{a+c^2-a}{2c-1}\right) = \frac{0}{m-n}$$

$$+ \frac{c^2}{2c-1} = \frac{c^2}{2c-1}.$$

$$4.^{\circ} \quad \frac{a}{b+a} + \frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{c}{a-b} + \frac{3b-3c}{3a-3b}$$

$$= \frac{a}{a+b} + \frac{2ab}{a^2-b^2} + \left(\frac{c+b-c}{a-b} = \frac{b}{a-b}\right)$$

$$= \frac{a^2-ab+2ab+ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

SUSTRACCION.

Ya se sabe que esta operacion se cámbia en adicion invirtiendo los signos al sustraendo.

Ejemplos :

$$1.^{\circ}\quad \frac{2abc^2}{3df}-\frac{abc^2f}{6df^2}=\frac{4abc^2+(-abc^2)}{6df}$$

$$=\frac{3abc^2}{6df}=\frac{abc^2}{2df}.$$

$$2.^{\circ}\quad \frac{3ad^2}{a^2-b^2}-\frac{3d^2}{b+a}=\frac{3ad^2+(3bd^2-3ad^2)}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{3bd^2}{a^2-b^2}.$$

$$3.^{\circ}\quad 2bd+3d+\frac{3a^2d^2}{a^2-b^2}-(2d+bd+\frac{3ad^2}{a+b})$$

$$=(2bd+3d-2d-bd)+(\frac{3a^2d^2+3abd^2-3a^2d^2}{a^2-b^2})$$

$$=bd+d+\frac{3abd^2}{a^2-b^2}.$$

El principiante debe empeñarse en comprobar los resultados , sin que le arredre la diversidad de formas.

Adicion y sustraccion simultáneas.

Ejemplos :

$$1.^\circ \quad 4a^2 + \frac{6b^2c}{m^3d^2} \pm \left(5a^2 - \frac{30b^3c}{5bd^2m^3}\right) = \begin{cases} 9a^2 \\ \dfrac{12b^2c}{d^2m^3} - a^2. \end{cases}$$

$$2.^\circ \quad \frac{2b^3c}{df} + 4 \mp \left(\frac{a+b}{b+a} - \frac{6b^5c^2}{3b^2cdf}\right) = \begin{cases} \dfrac{4b^3c}{df} + 3 \\ 5. \end{cases}$$

Trasformacion de la espresion mixta en quebrado equivalente.

Esta operacion se hace en Algebra por la misma regla que su análoga en Aritmética. He aquí ejemplos :

$$1.^\circ \quad a + b + \frac{b^2 - a^2 + c}{a - b} = \frac{a^2 - b^2 + b^2 - a^2 + c}{a - b} = \frac{c}{a - b}.$$

$$2.^\circ \quad \frac{a + b}{b - a} - 1 = \frac{a + b + a - b}{b - a} = \frac{2a}{b - a}.$$

$$3.^\circ \quad \frac{a^2 - b^2}{b - a} \pm (a + b) = \begin{cases} \dfrac{a^2 - b^2 - a^2 + b^2}{b - a} = \text{cero}\,; \\ \dfrac{a^2 - b^2 + a^2 - b^2}{b - a} = \dfrac{2a^2 - 2b^2}{b - a} : \text{este} \end{cases}$$

resultado es todavía susceptible de simplificacion ; discúrrala el lector.

LECCION 33.

Multiplicacion con fracciones algébricas.

Los casos de esta operacion se resuelven en Algebra por las mismas reglas que sus análogos en Aritmética. He aquí ejemplos relativos á los diversos casos:

Productos de quebrado por entero.

1.º $$\frac{11a^2b^3}{9a^2-4b^2}\times(3a-2b)=\frac{11a^2b^3}{3a+2b}.$$

2.º $$(b-a)\times\frac{a^2+ab+b^2}{2b+c}=\frac{b^3-a^3}{2b+c}.$$

Productos de quebrado por quebrado.

1.º $$\frac{a+b}{c-d}\times\frac{c^2-d^2}{a^2-b^2}=\frac{c+d}{a-b}.$$

2.º $$\frac{3a^5b+3a^5c}{b-c}\times\frac{2bc-2b^2}{ab+ac}=\frac{3a^5(b+c)}{b-c}\times\frac{2b(c-b)}{a(b+c)}$$

$$=\frac{6a^5b(c^2-b^2)}{a(b^2-c^2)}=-6a^4b.$$

Otros productos.

1.º $$\left(2a^3-\frac{9b^3}{15bc}\right)\left(\frac{3b^2}{5c}+2a^3\right)$$

$$=\left(2a^3+\frac{3b^2}{5c}\right)\left(2a^3-\frac{3b^2}{5c}\right)=4a^6-\frac{9b^4}{25c^2}.$$

2.° $5a^2b^3\left(ab+\dfrac{3d}{5a^2b^3}\right)\times\dfrac{7c}{5a^3b^4}$

$$=(5a^3b^4+3d)\times\frac{7c}{5a^3b^4}=7c+\frac{21cd}{5a^3b^4}.$$

Division con fracciones algébricas.

Los diversos casos de esta operacion se resuelven por las mismas reglas que sus análogos en Aritmética. He aquí ejemplos para cada caso.

Dividir quebrado por entero.

1.° $\dfrac{7a^2b^3}{2b+3a}:(3a-2b)=\dfrac{7a^2b^3}{9a^2-4b^2}.$

2.° $\dfrac{4a^2c^4-9b^6}{7abc-5d}:(3b^3+2ac^2)=\dfrac{2ac^2-3b^3}{7abc-5d}.$

Dividir quebrado por quebrado.

1.° $\dfrac{a^3-b^3}{m}:\dfrac{a^2-b^2}{m}=\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\dfrac{ab+a^2+b^2}{a+b}$

$$=a+\frac{b^2}{a+b}.$$

2.° $\dfrac{c^3-d^3}{a^2+ab+b^2}:\dfrac{c^2+cd+d^2}{a^3-b^3}=\ldots.(a-b)(c-d).$

Otros cuocientes.

1.° $(a-b):\dfrac{b^3-a^3}{b^2+a^2+ab}=\dfrac{a^3-b^3}{b^3-a^3}=-1.$

$$2.^{\circ}\quad \left(\frac{a+b}{b-a}-1\right):\left(a+b+\frac{c^2-b^2+a^2}{b-a}\right)$$

$$=\frac{2a}{b-a}:\frac{c^2}{b-a}=\frac{2a}{c^2}.$$

Potencias y raízes de las fracciones cuyos términos son monómios.

La segunda potencia de un quebrado es igual al cuadrado del numerador, partido por el cuadrado de su denominador: estos cuadrados son positivos.

Ejemplos:

$$1.^{\circ}\quad \left(\frac{2a^2bc^3}{-3d^2f}\right)^2=\frac{4a^4b^2c^6}{9d^4f^2}.$$

$$2.^{\circ}\quad \left(\frac{\pm 3fh^2}{\mp 6ab^2}\right)^2=\left(-\frac{fh^2}{2ab^2}\right)^2=\frac{f^2h^4}{4a^2b^4}.$$

La tercera potencia de un quebrado es igual al cubo del numerador, partido por el cubo de su denominador: los cubos conservan el signo de la raíz.

Ejemplos:

$$1.^{\circ}\quad \left(\frac{-2ab^2}{-cd}\right)^3=\left(\frac{2ab^2}{cd}\right)^3=\frac{8a^3b^6}{c^3d^3}.$$

$$2.^{\circ}\quad \left(\frac{-3ad^2}{\mp c^2b}\right)^3=\left(\pm\frac{3ad^2}{c^2b}\right)^3=\pm\frac{27a^3d^6}{c^6b^3}.$$

La raíz segunda de un quebrado es igual á la raíz del numerador, partida por la raíz del denominador: el dato debe ser positivo, y el resultado llevará el signo $\pm$.

Ejemplos :

$$1.^{\circ}\quad \sqrt{\frac{25a^4b^2}{36c^2d^4}} = \pm\frac{5a^2b}{6cd^2}.$$

$$2.^{\circ}\quad \sqrt{\frac{2a^5b^3c^5}{18a^3bcf^4}} = \sqrt{\frac{a^2b^2c^4}{9f^4}} = \pm\frac{abc^2}{3f^2}.$$

La raiz tercera de un quebrado es igual á la raiz tercera del numerador, partida por la raiz tercera del denominador : el signo del resultado debe ser el mismo del dato.

Ejemplos :

$$1.^{\circ}\quad \sqrt[3]{\frac{a^3b^6c^3}{8d^3f^6}} = \frac{ab^2c}{2df^2}.$$

$$2.^{\circ}\quad \sqrt[3]{\frac{3a^4b^2c^5}{-24ab^5c^2d^6}} = \sqrt[3]{-\frac{a^3c^3}{8b^3d^6}} = -\frac{ac}{2bd^2}.$$

LECCION 34.

Cuando el dato cuya raiz se pide es polinómio, la raiz (si la hay) debe ser tambien polinómio; porque ningun monómio elevado á potencia, podrá reproducir el polinómio dado. Mas para obtener de un polinómio la raiz que de él se pida, se requieren condiciones en el dato sin las cuales no hay raiz exacta. La cantidad polinómia, monómia, y aun numérica, que no da exactamente la raiz que de ella se pide, se llama *cantidad irracional*. Es, pues, irracional la raiz tercera de un binómio y aun de un trinómio, y lo es tambien la raiz cuadrada de un binómio. Por lo menos debe ser trinómio el polinómio cuya raiz cuadrada se pida, y para estraerla usaremos de la siguiente regla : *Ordénese el trinómio dado, y de su primer término es-*

tráigase la raíz; por el duplo de esta raíz pártase el segundo término, y de ambas operaciones resultará un binómio que será la raíz pedida, si el cuadrado de dicho binómio es igual al trinómio ordenado; pero este será irracional si hubiere diferencia.

Ejemplos:

1.° $\sqrt{12abd + 9d^2 + 4a^2b^2)} = \pm(2ab + 3d)$.

Cálculo.

$$
\begin{array}{l|l}
4a^2b^2 + 12abd + 9d^2 & 2ab + 3d) = \text{raíz.} \\
-4a^2b^2 & \\
\hline
 12abd + 9d^2 & \text{Divisor } 4ab \\
 -12abd - 9d^2 & \text{Cuociente } + 3d \\
\hline
 0 &
\end{array}
$$

2.° $\sqrt{9b^6c^2 - 16ab^3cd^6 + 4a^2d^{12} + 7b^6c^2)}$

$$= \pm(2ad^6 - 4b^3c) = \begin{cases} 2ad^6 - 4b^3c \\ 4b^3c - 2ad^6. \end{cases}$$

Cálculo.

$$
\begin{array}{l|l}
4a^2d^{12} - 16ab^3cd^6 + 16b^6c^2 & 2ad^6 - 4b^3c) = \text{raíz.} \\
-4a^2d^{12} & \\
\hline
\phantom{4a^2d^{12}} -16ab^3cd^6 + 16b^6c^2 & \text{Divisor } 4ad^6 \\
\phantom{4a^2d^{12}} +16ab^3cd^6 - 16b^6c^2 & \text{Cuociente } - 4b^3c \\
\hline
\phantom{4a^2d^{12} - 16ab^3} 0 &
\end{array}
$$

Para estraer la raíz tercera de un polinómio, ha de constar este por lo menos de cuatro términos, y entonces se estraerá por la siguiente regla: *Ordénese el polinómio dado, y de su primer término estráigase la raíz tercera; por el triplo del cuadrado de esta raíz* *pártase el segundo término, y de ambas operaciones resultará un binómio que será la raíz pedida, si el cubo de dicho binómio es igual al polinómio ordenado; pero este será irracional si hubiere diferencia.*

Ejemplos :

1.º $\sqrt[3]{100a^2c^2 - 64c^3 + 8a^6 - 48a^4c - 4a^2c^2)} = 2a^2 - 4c.$

Cálculo.

$$\begin{array}{l|l} 8a^6 - 48a^4c + 96a^2c^2 - 64c^3 & (2a^2 - 4c) = \text{raíz.} \\ -8a^6 & \text{Divisor } 12a^4 \\ \hline \quad -48a^4c + 96a^2c^2 - 64c^3 & \text{Cuociente } -4c \\ \quad +48a^4c - 96a^2c^2 + 64c^3 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

2.º $\sqrt[3]{150a^3b^3 - 125a^6 + \frac{8b^9}{a^3} - 60b^6)} = \frac{2b^3}{a} - 5a^2.$

Cálculo.

$$\begin{array}{l|l} -125a^6 + 150a^3b^3 - 60b^6 + \frac{8b^9}{a^3} & \left(-5a^2 + \frac{2b^3}{a}\right) = \text{raíz.} \\ +125a^6 & \text{Divisor} = 75a^4 \\ \hline \quad +150a^3b^3 - 60b^6 + \frac{8b^9}{a^3} & \text{Cuociente} = \frac{2b^3}{a} \\ \quad -150a^3b^3 + 60b^6 - \frac{8b^9}{a^3} & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

LECCION 35.

Raíz cuadrada del número compuesto.

Si espresamos por u las unidades de un número entero, y por d sus decenas, tendremos la fórmula $(d+u)^2 = d^2 + 2du + u^2$ que nos dice: *El cuadrado de un número compuesto de unidades y decenas consta de tres partes, que son: cuadrado de decenas; duplo de decenas por unidades, y cuadrado de unidades.* Si estas tres partes estuvieran distintas en el número, como lo están los términos en el trinómio, la regla que nos ha servido para estraer la raíz de este, serviria tambien para la raíz del número compuesto; pero como aqui están juntas formando un solo número, ha sido preciso modificar aquella regla en la siguiente: *Divídase el número dado en secciones de á dos cifras, empezando por la derecha, aunque solo quede una cifra para la última seccion. Del mayor cuadrado contenido en esta seccion estráigase la raíz, y esta será la primera cifra de la raíz total que se busca. El cuadrado de la cifra hallada réstese de la espresada seccion, y á la derecha de la resta escríbase la seccion inmediata. Esto dará un número que llamaremos* dividendo íntegro, *del cual separada su primera cifra á la derecha, y dividiendo lo demas por el duplo de la raíz hallada, se obtendrá por cuociente la segunda cifra de la raíz total. Escríbase este cuociente á la derecha del divisor; el número que resulte multiplíquese por el cuociente; réstese el producto del dividendo íntegro, y á la derecha de la resta escríbase la seccion inmediata. Esto formará un segundo dividendo íntegro, el cual sometido al mismo cálculo que su anterior, dará por cuociente la tercera cifra de la raíz pedida. Cada seccion del dato dará una cifra para la raíz total, y obtenida la correspondiente á la seccion de las unidades quedará terminada la operacion. La raíz total será exacta si la última resta es cero; pero será irracional el dato si la resta no es cero.*

Ejemplos:

1.° $\sqrt{582169} = \pm 763$: exacta.

Cálculo.

58.21.69	763
92.1	14 ; 146 × 6
876	152 ; 1523 × 3
456.9	
4569	
0	

2.° $\sqrt{274138} = \pm 523$ y 609 de resíduo.

Cálculo.

27.41.38	523
24.1	10 ; 102 × 2
204	104 ; 1043 × 3
373.8	
3129	
609	

Este resíduo nos dice que la $\sqrt{274138}$ es irracional: su valor está entre 523 y 524; pero no hay ningun medio en la ciencia para determinar exactamente la fraccion que deberia añadirse al 523, ó quitarse al 524, para tener la verdadara raíz.

La resta que deja cada cifra de la raíz en la estraccion de la cuadrada, varia desde 1 *hasta el duplo de toda la raíz hallada; pero no puede llegar al doble de la raíz más* 1, *porque entonces deberia tener una unidad mas la cifra de quien provino la resta.*

Aproximacion de la raíz incomensurable de segundo grado.

La cantidad irracional se llama tambien *incomensurable*, y su raíz se puede aproximar por decimales hasta el órden que se quiera; *basta para esto añadir dos ceros á la derecha del último resíduo que dejaron las unidades, y considerar el número que resulte como otro* *dividendo íntegro, cuyo cálculo, idéntico al de los anteriores, dará las décimas. Estas dejarán otro resíduo, que aumentado de dos ceros á su derecha, y tratado como segundo dividendo íntegro, dará la cifra de las centésimas: y así se continúa hasta dejar la aproximacion en el órden decimal que se quiera.*

He aquí el método aplicado á nuestro 2.° ejemplo:

Cálculo.

$$\begin{array}{r|l}
6090.0 & 523\,,58\ldots \\ \hline
52325 & 1046\ ;\ 10465\times 5 \\ \cline{1-1}
85750.0 & 10470\ ;\ 104708\times 8 \\
83766\,4 & \\ \cline{1-1}
19836 &
\end{array}$$

Sin pasar de las centésimas hallamos que la

$$\sqrt{274138}\ \text{es}\ \left\{\begin{array}{l} > 523\,,58 \\ < 523\,,59 \end{array}\right\}$$: de modo que la raíz aproximada por defecto á menos de una centésima, es $= 523\,,58$.

Esta aproximacion por decimales puede abreviarse por division: *basta partir el último resíduo por el duplo de toda la raíz hallada; pero limitando las cifras del cuociente á tantas menos una cuantas fueren las de la raíz ya hallada*: en nuestro ejemplo sacaremos dos, por ser tres las ya halladas. He aquí el cálculo:

$$\frac{609}{2\times 523}=\frac{609}{1046}=0\,,58\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
6090 & 1046 \\ \cline{2-2}
5230 & 0,58 \\ \cline{1-1}
8600 & \\
8368 & \\ \cline{1-1}
232 &
\end{array}$$

Luego añadiendo este cuociente á la derecha del entero raíz, tendremos como antes $\sqrt{274138} = 523,\,58\ldots$

Raíz tercera del número compuesto.

Conservando para las letras *d*, *u* el significado que les hemos dado al tratar de la raíz cuadrada, tendremos para la cúbica la siguiente fórmula : $(d+u)^3 = d^3 + 3ud^2 + 3u^2d + u^3$, que nos dice : *El cubo de un número compuesto de unidades y decenas consta de cuatro partes, que son : cubo de las decenas, triplo del cuadrado de decenas por unidades, triplo del cuadrado de unidades por decenas, y cubo de las unidades.* Fundada, pues, en esta fórmula, he aquí para la estraccion de la raíz tercera de los números compuestos, la siguiente regla :

Divídase el número cuya raíz se pide en secciones de á tres cifras, contando de derecha á izquierda, y no importa que la última seccion solo conste de dos cifras y aun de una. Del mayor cubo contenido en esta seccion estráigase la raíz tercera, y esta será la primera cifra de la raíz total que se busca. El cubo de esta cifra réstese de la espresada seccion, y á la derecha de la resta escríbase la seccion inmediata. Esto constituirá el primer dividendo íntegro, del cual separadas las dos cifras de la derecha, y partiendo lo demas por el triplo del cuadrado de la cifra hallada, se obtendrá por cuociente la segunda cifra de la raíz total, ú otra de mayor valor absoluto, que la prueba dará á conocer. Esta prueba se reduce á espresar por d *la primera de las dos cifras halladas, y por* u *la segunda; sumar los tres productos* $3ud^2 + 3u^2d + u^3$, *y la suma restarla del dividendo íntegro : si la resta no es posible, deberá rebajarse una unidad á la cifra* u, *y someter la cifra corregida á nueva prueba hasta que la suma* $3ud^2 + 3u^2d + u^3$ *pueda restarse del dividendo íntegro. A la derecha de la resta verdadera escríbase la seccion inmediata del dato, y se tendrá un segundo dividendo íntegro, el cual sometido al mismo cálculo que su anterior dará por cuociente la tercera cifra de la raíz pedida, si la prueba no la desecha. Mas en esta segunda prueba téngase cuidado de espresar por* d *el número formado por la primera y segunda cifras halladas, y por* u *la tercera cifra. Cada seccion del número propues-*

to dará una cifra para la raíz total, y obtenida la correspondiente á la seccion de las unidades, quedará terminada la operacion. La raíz total será exacta si la última resta es cero; pero será irracional el dato si dicha resta no es cero.

Ejemplos :

1.° $\sqrt[3]{12812904} = 234$: exacta.

Cálculo.

12.812.904 48.12 4 167	$d = 2$ $u = 3$, no 4	$d = 23$ $u = 4$	Raíz 234.
6459.04 645904	$3ud^2 = 3600$ $3u^2d = 540$ $u^3 = 27$	$3ud^2 = 634800$ $3u^2d = 11040$ $u^3 = 64$	
0	Suma = 4167	Suma = 645904	

2.° $\sqrt[3]{187627} = 57$ y 2434 de resíduo.

Cálculo.

187.627 626.27 60193	$d = 5$ $u = 7$, no 8	Raíz 57, con resíduo.
2434	$3ud^2 = 52500$ $3u^2d = 7350$ $u^3 = 343$	
	Suma = 60193	

Luego la $\sqrt[3]{187627}$ es irracional : *el resíduo en las raízes de tercer grado varía desde 1 hasta el triplo de la raíz hallada, más el triplo de su cuadrado.*

Aproximacion de la raíz tercera incomensurable.

Regla : *A la derecha del resíduo que dejó el cálculo de la cifra de las unidades para la raíz escríbanse tres ceros, y se tendrá el dividendo íntegro que ha de dar las décimas para la aproximacion, por el mismo método que el dividendo anterior dió las unidades. A la derecha del resíduo que deje el cálculo de las décimas, escríbanse otros tres ceros, y se tendrá el dividendo íntegro que ha de dar las centésimas para la aproximacion. Así se continúa hasta la aproximacion que se desee.*

He aquí el método aplicado al último ejemplo :

Cálculo.

24340.00 1956248	$d = 57$ $u = 2$	$d = 572$ $u = 4$, no 5
4777520.00 3928954 24	$3ud^2 = 1949400$ $3u^2d = 6840$ $u^3 = 8$	$3ud^2 = 392620800$ $3u^2d = 274560$ $u^3 = 64$
84856576	Suma = 1956248	Suma = 392895424

Luego la $\sqrt[3]{187627}$ aproximada hasta centésimas es = 57,24 . . .

Esta aproximacion por cálculo directo se hace mas molesta en cada cifra decimal que sucesivamente se quiere estraer, y para evitar tan ímprobo trabajo se usa de la siguiente abreviacion : *El resíduo que se halló al calcular las unidades de la raíz, divídase por el triplo del cuadrado de toda la raíz hallada, y el cuociente espresado en decimales será la parte aditiva para la raíz ya hallada ; pero limitando este cuociente á tantas cifras, menos una, cuantas fueren las de dicha raíz.*

He aquí el cálculo aplicado al mismo ejemplo :

$$\frac{2434}{3249 \times 3} = \frac{2434}{9747} = 0,24\ldots$$

Division :

24340	9747
48460	
9472	0,24

Raízes de otros números.

Del número entero cuyas cifras no bastan para formar dos secciones; del de una sola cifra; del quebrado comun puro, mixto, y en general número fraccionario; del quebrado decimal en todas sus formas, y hasta del número irracional; se nos puede pedir la raíz cuadrada ó cúbica, y estamos obligados á darla.

Para cada caso de estos hay su regla particular; pero es preferible comprender todos los casos en las dos únicas reglas que acabamos de verificar con los números compuestos de dos ó mas secciones de cifras. La cuestion se reduce á cambiar el dato en otro equivalente, y de forma adecuada al objeto de hacer que la raíz pedida dependa de la de un número entero, multiplicada ó partida por un número entero.

Los cálculos que para esto se requieren, se encuentran esplicados y resueltos de una manera abreviada, fácil y segura en las Tablas de potencias y raízes que acompañan á nuestros Apuntes como un poderoso ausiliar.

Mucho fruto puede sacarse del estudio de dichas Tablas; mas la brevedad de estos Apuntes solo nos permite dedicar á su esplicacion y usos las Lecciones 36 y 37. Es grande el poder de las espresadas Tablas; pero con el *Apéndice* que á continuacion les añadimos, se acrece mucho mas. Puede evidenciarse que á pesar del reducido cuadro que este Apéndice presenta, duplica el poder de las Tablas respecto á raízes cuadradas, y lo triplica respecto de las raízes cúbicas.

He aquí el

APENDICE

á las Tablas de raízes segunda y tercera de los números, para ampliar su uso en los casos de $C\sqrt{10}$; $C\sqrt[3]{10}$; $C\sqrt[3]{100}$.

La letra C designa un coeficiente numérico racional cualquiera.

C	$C\sqrt{10}$	$C\sqrt[3]{10}$	$C\sqrt[3]{100}$
1	3,1622776	2,1544347	4,6415888
2	6,3245553	4,3088695	9,2831777
3	9,4868329	6,4633041	13,9247665
4	12,6491106	8,6177388	18,5663553
5	15,8113883	10,7721735	23,2079442
6	18,9736659	12,9266081	27,8495330
7	22,1359436	15,0810428	32,4911218
8	25,2982212	17,2354775	37,1327107
9	28,4604989	19,3899123	41,7742995

LECCION 38.

Así como de la division se originaron los quebrados, así de la estraccion se originan las *cantidades radicales*; esto es, cantidades sometidas á los signos que indican raízes de ellas, las cuales no pueden obtenerse exactamente, como $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[n]{a}$ . . . etc.

En todo radical se deben considerar tres cosas muy distintas: el coeficiente esterno; el signo con el índice que marca el grado, y la cantidad cuya raíz se indica, llamada por su situacion *cantidad subradical.* En la espresion $4a\sqrt[3]{b^2}$, es $4a$ el coeficiente esterno; b^2 es la cantidad subradical, y $\sqrt[3]{\ }$ es el signo radical con el esponente 3 espreso, índice del tercer grado, que se lee *raíz tercera de*. En la espresion $-5b\sqrt{7c}$, es $-5b$ el coeficiente esterno; $7c$ es la cantidad subradical, y $\sqrt{\ }$ es el signo radical con el esponente 2 sobreentendido, índice del segundo grado, que se lee *raíz segunda* ó *cuadrada*, ó solo *raíz de*, como ya advertimos.

Con las cantidades radicales se ejecutan las mismas operaciones que con las racionales; pero se requiere mucho cuidado para no confundir el radical *real* con el *imaginario*. *Es* imaginario *todo radical de grado par con cantidad subradical negativa*. He aquí su fórmula: $\sqrt[2n]{-b^m}$.

De las cantidades radicales se enuncian y demuestran proposiciones muy importantes. Las que por ahora necesitamos saber, son:

1.ª La cantidad subradical sale del signo que la contiene, cuando la espresion se eleva á la potencia del grado marcado por el índice del radical: entonces toda la espresion se convierte en cantidad racional, aun cuando el radical fuere imaginario, así: $(\sqrt[3]{3b^2})^3 = 3b^2$; $(\sqrt{-5c})^2 = -5c$.

2.ª En los radicales reales la cantidad subradical puede recibir forma racional, partiendo por el índice del radical el esponente de cada factor de la subradical, así: $\sqrt[3]{b^2c} = b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}$. Y viceversa, todo esponente quebrado, revela con su denominador el radical de donde salió la cantidad que lleva tal esponente, así: $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{n}{2}}$, es $= \sqrt{ab^n}$.

3.ª El valor de un radical real no se altera, aunque su esponente y el de cada factor de la cantidad subradical se multipliquen ó partan por un mismo número, así: $\sqrt{2ab^2} = \sqrt[4]{4a^2b^4}$; $\sqrt[6]{16a^4b^2} = \sqrt[3]{4a^2b}$.

Adicion y sustraccion de radicales.

Estas operaciones se ejecutan del mismo modo que las de las cantidades racionales, atendiendo como allí á la semejanza de términos: *dos radicales son semejantes cuando siendo de un mismo grado tienen cantidad subradical equivalente, y ademas tienen semejante el coeficiente esterno.* He aquí ejemplos de ambas operaciones:

1.° $(2b\sqrt{3ac} - 8bd\sqrt{3a}) + (15bd\sqrt{3a} - 5b\sqrt{3ac})$

$= 7bd\sqrt{3a} - 3b\sqrt{3ac}.$

2.° $(2a\sqrt{-2b} - b\sqrt[3]{2c}) - (a\sqrt{-2b} - 6b\sqrt[3]{2c})$

$= 2a\sqrt{-2b} - b\sqrt[3]{2c} - a\sqrt{-2b} + 6b\sqrt[3]{2c}$

$= a\sqrt{-2b} + 5b\sqrt[3]{2c}.$

Reduccion de radicales á grado comun.

Esta operacion, ausiliar indispensable de la multiplicacion y division con datos radicales, se identifica con la reduccion de quebrados á denominador comun. Solo un cámbio de nombre basta para aplicar aquí aquella misma regla: *lo que allí eran denominadores, son aquí los índices radicales; y lo que allí eran numeradores, son aquí los esponentes de las cantidades subradicales.*

Ejemplos:

1.° $\sqrt[3]{3a^2b}$ y $\sqrt{2b^2} = \sqrt[6]{9a^4b^2}$ y $\sqrt[6]{8b^6}.$

2.° $\sqrt{2bc^3}$ y $\sqrt[4]{3ab^2} = \sqrt[4]{4b^2c^6}$ y $\sqrt[4]{3ab^2}.$

El lector que reflexione sobre los cálculos de los radicales, hallará admirables armonías entre ellos y los de los quebrados.

MULTIPLICACION.

Para multiplicar uno por otro dos radicales reales, ya reducidos á grado comun, se multiplican primero los coeficientes esternos, y á la derecha de este producto se escribe un radical del grado comun, dentro del cual se pone el producto de las dos cantidades subradicales.

Ejemplos:

1.° $3a\sqrt{cd} \times 2b\sqrt[4]{a^2b^2} = 3a\sqrt{cd} \times 2b\sqrt{ab}$

$$= 6ab\sqrt{abcd}.$$

2.° $5c\sqrt[4]{a^3b^3} \times 3c^2\sqrt{2cd} = 5c\sqrt[4]{a^3b^3} \times 3c^2\sqrt[4]{4c^2d^2}$

$$= 15c^3\sqrt[4]{4a^3b^3c^2d^2}.$$

Si el radical producto contiene algun factor racional, estráigase su raíz y por ella multiplíquese el coeficiente esterno del radical producto, así:

3.° $2a^2b\sqrt{3ac} \times b\sqrt{12abc} = 2a^2b^2\sqrt{36a^2bc^2}$

$$= 6ac \times 2a^2b^2\sqrt{b} = 12a^3b^2c\sqrt{b}.$$

4.° $\frac{c}{3a}\sqrt[3]{3a^2b} \times b\sqrt[3]{9ab^2} = \frac{bc}{3a}\sqrt[3]{27a^3b^3} = 3ab \times \frac{bc}{3a}$

$= b^2c$: resultado completamente racional, y ademas entero.

Para determinar el producto de radicales imaginarios en sus diversos casos hay regla general; pero limitándonos aquí á factores de segundo grado (únicos necesarios por ahora), y á productos de solo dos factores, podrá servirnos la misma regla de los radicales reales, con tal que se multiplique por — 1 el coeficiente del radical producto.

Ejemplos:

1.° $3a\sqrt{-c} \times 2b\sqrt{-a} = -1 \times 6ab\sqrt{ac}$

$= -6ab\sqrt{ac}$.

2.° $3b\sqrt{-2a} \times -5b\sqrt{-8ac} = -1 \times -15b^2\sqrt{16a^2c}$

$= +15b^2\sqrt{16a^2c} = 15b^2 \times 4a\sqrt{c} = 60ab^2\sqrt{c}$.

DIVISION.

Para dividir uno por otro dos radicales reducidos ya á un mismo grado, *pártase la cantidad subradical del dividendo por la subradical del divisor, y este cuociente sométase á un radical del grado comun; pártase tambien el coeficiente esterno del dividendo por el coeficiente esterno del divisor, y este cuociente será el coeficiente esterno del radical resultante*. La presente regla se aplica indistintamente á radicales ambos reales, ó ambos imaginarios.

Ejemplos:

1.° $12a^2\sqrt[6]{8a^3c^6} : 4a\sqrt[4]{\dfrac{4a^2}{c^4}} = 12a^2\sqrt{2ac^2} :$

$4a\sqrt{\dfrac{2a}{c^2}} = 3a\sqrt{2ac^2 \times \dfrac{c^2}{2a}} = 3a\sqrt{c^4} = \pm 3ac^2$.

2.° $51c^3d^2\sqrt[4]{\dfrac{-8a^3b^3}{c+d}} : 17c^2d^2\sqrt[4]{\dfrac{-2ab}{d+c}} =$

$$3c\sqrt[4]{\left(\frac{-8a^3b^3}{-2ab} = +4a^2b^2\right)} = 3c\sqrt{2ab}$$: cantidad real, como todo cuociente de radicales imaginarios de grado comun.

ELEVACION.

Para elevar á potencias los radicales reales *elévese el coeficiente esterno, y en seguida la cantidad subradical; de la potencia de esta sáquense los factores racionales que resulten, y agréguense al coeficiente esterno del resultado.* La elevacion de la cantidad subradical se suple partiendo, si se puede, el esponente radical del dato por el índice de la potencia.

Ejemplos:

1.° $(2a\sqrt[4]{9a^2b})^2 = 4a^2\sqrt{9a^2b} = 12a^3\sqrt{b}$.

2.° $\left(\frac{c}{2a}\sqrt[3]{4a^2b}\right)^2 = \frac{c^2}{4a^2}\sqrt[3]{(16a^4b^2 = 8a^3 \times 2ab^2)}$

$$= 2a \times \frac{c^2}{4a^2}\sqrt[3]{2ab^2} = \frac{c^2}{2a}\sqrt[3]{2ab^2}.$$

Regla para las potencias del radical imaginario de segundo grado.

Descompóngase el dato en dos factores que serán, uno el mismo dato con signo positivo en la cantidad subradical, y otro la $\sqrt{-1}$. *Fórmese del primer factor la potencia que se pide, y esta multiplíquese por la potencia del mismo grado del otro factor.* Las potencias de $\sqrt{-1}$ consisten todas en las cuatro primeras, que son :

$(\sqrt{-1})^1 = \ldots . \sqrt{-1}$;

$(\sqrt{-1})^2 = \ldots \ldots -1$;

$(\sqrt{-1})^3 = \ldots -\sqrt{-1}$;

$(\sqrt{-1})^4 = \ldots \ldots +1$.

Estas cuatro se reproducen periódicamente, de modo que potencia quinta es igual primera; potencia sexta es igual segunda, y así en adelante.

Ejemplos:

1.º $(2a\sqrt{-bc})^3 = (2a\sqrt{bc})^3 \times (\sqrt{-1})^3$

$= 8a^3\sqrt{b^3c^3} \times (-\sqrt{-1}) = 8a^3bc\sqrt{bc} \times -\sqrt{-1}$

$= -8a^3bc\sqrt{-bc}$.

2.º $(3c\sqrt{-ab})^4 = (3c\sqrt{ab})^4 \times (\sqrt{-1})^4$

$= +1 \times 81c^4a^2b^2 = 81a^2b^2c^4$: *cantidad real, racional y positiva, como todas las potencias cuartas de los radicales imaginarios de segundo grado.*

En el problema de elevar á potencias los radicales, asi reales como imaginarios, téngase muy presente la proposicion general enunciada con el título de 1.ª al principio de esta Leccion.

ESTRACCION.

Al pedir raizes de cantidades radicales, aparece la espresion del pedido figurada por un radical doble de la forma $\sqrt[m]{a\sqrt[p]{\pm b^n}}$, ó de esta otra $\sqrt[m]{\sqrt[p]{\pm a^p b^n}}$, si el coeficiente *a* se somete á su radical. Aquí el radical esterno $\sqrt[m]{\ }$ indica el grado de la raíz que se pide, y el radical interno con su coeficiente fuera ó sometido, es lo que constituye la verdadera cantidad subradical de toda la espresion.

Prefiriendo, pues, para el dato la forma $\sqrt[m]{\sqrt[p]{\pm a^p b^n}}$, reducimos la estraccion á la siguiente regla: *Multiplíquese el índice del radical esterno por el índice del radical interno; y dentro de un radical cuyo esponente sea el producto de dichos índices, escríbase la cantidad contenida en el radical interior.* Preferimos esta regla á otras que pudieran darse, porque en esta van comprendidas, tanto las raízes de los radicales reales como las de los radicales imaginarios.

Ejemplos:

1.° $\sqrt[3]{2a\sqrt{c}} = \sqrt[3]{\sqrt{4a^2c}} = \sqrt[6]{4a^2c}$.

2.° $\sqrt{3c\sqrt{-2b}} = \sqrt{\sqrt{-18bc^2}} = \sqrt[4]{-18bc^2}$.

LECCION 39.

Análisis algébrica.

Cuando una cantidad se compara por medio del signo = con otra que le es equivalente, toma la espresion el nombre de *igualdad.* Si las cantidades comparadas, ademas de ser iguales en valor, lo son tambien en su forma, la igualdad se llama *identidad.* Y si las cantidades que forman una igualdad se componen de datos é incógnitas, se llamará *ecuacion*: de modo que *ecuacion es una igualdad con una ó mas incógnitas.* La cantidad escrita á la izquierda del signo = se llama primer miembro, y la que se escribe á la derecha segundo miembro. Las incógnitas se espresan con las letras x, y, u, z, y los datos con las demas letras ó con números.

La ecuacion que solo tiene una incógnita se llama *determinada*, y la que tiene mas de una se llama *indeterminada*. Una y otra pueden ser de primer grado ó de grado superior al primero: es ecuacion determinada de primer grado aquella cuya incógnita no tiene otro esponente que la unidad, y no está en el denominador de ningun término; porque entonces podria ser de segundo grado la ecuacion.

He aquí ejemplos de todo lo dicho:

1.º $a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$, es una igualdad.

2.º $abc : bf = acb : fb$, es una identidad.

3.º $ax + b - 2a = x + c$, es una ecuacion determinada de primer grado, *literal*.

4.º $3x - 5 = 2y + 9$, es una ecuacion indeterminada de primer grado, *numérica*.

5.º $bx - ax^2 = c - x$, es una ecuacion determinada de segundo grado.

Tambien lo es la ecuacion $\frac{a}{x} + b = cx + d$; pero ya no, la $\frac{a}{x} + b = \frac{c}{x} + d$: esta no pasa del primer grado.

Resolver una ecuacion determinada, ó despejar su incógnita, es dejar esta letra sola y positiva en un miembro de la ecuacion, sin coeficiente, esponente ni divisor; y trasladar al otro miembro las cantidades conocidas ó datos, reduciéndolas por su algoritmo á la espresion mas simple. El valor hallado de este modo para la incógnita se llama *raíz de la ecuacion propuesta*, y debe ser tal que sustituido en dicha ecuacion en vez de su incógnita la convierta en una identidad, que es como una espresion del axioma: *Toda cosa es igual á* *si misma*. Cuando se ejecuta esta operacion se dice que *se comprueba la raíz hallada.*

Todas las operaciones de que se vale la análisis para despejar las incógnitas, se fundan sólidamente en este axioma: *Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados serán iguales.*

Para resolver las ecuaciones determinadas de primer grado, por complicadas que sean, bastan, á lo mas, las cuatro operaciones siguientes:

1.ª Quitar los denominadores á toda la ecuacion, multiplicándola por el m. c. m. de todos ellos.

2.ª Trasladar á un solo miembro los términos que tienen la incógnita, y al otro miembro los que no la tienen: para lo cual basta invertir el signo á cada monómio que se traslada.

3.ª Descomponer en dos factores el miembro en que haya quedado la incógnita, de los cuales uno sea la incógnita, y el otro la suma algébrica de las cantidades conocidas que la multiplicaban en cada monómio: este factor se llama *coeficiente de la incógnita*, y podrá ser polinómio, monómio, y aun un solo número.

4.ª Y llevada ya á esta forma la ecuacion, partir sus dos miembros por el coeficiente de la incógnita, y simplificar el resultado cuanto se pueda. He aquí ejemplos:

1.º $\frac{2ax}{3} - \frac{3b}{6} = \frac{5ac}{3} - \frac{ax}{6} - \frac{b}{2}$; que suprimiendo en ambos miembros el $-\frac{b}{2}$, se reduce á $\frac{2ax}{3} = \frac{5ac}{3} - \frac{ax}{6}$.

Quitados en esta los denominadores se cámbia en $4ax = 10ac - ax$; y trasladando términos, será $4ax + ax = 10ac$, ó $5ax = 10ac$. En este estado, partiendo toda la ecuacion por $5a$, obtenemos su raíz en la espresion $x = \frac{10ac}{5a} = 2c$ Para comprobar.

esta raíz, pongo 2 c en vez de x en la ecuacion primitiva, y me da:

$$\frac{4ac}{3}-\frac{3b}{6}=\frac{5ac}{3}-\frac{2ac}{6}-\frac{b}{2};\ \text{ó}\ \frac{8ac-3b}{6}$$

$$=\frac{10ac-2ac-3b}{6},\ \text{igualdad; ó en fin,}\ \frac{8ac-3b}{6}$$

$$=\frac{8ac-3b}{6}:\ \text{identidad comprobante.}$$

Sin repetir esplicaciones, véase el método aplicado al ejemplo siguiente:

$$2.^{\circ}\quad \frac{6}{x}+\frac{a}{b}=\frac{c}{b}+\frac{5}{x};\ 6b+ax=cx+5b;\ 6b-5b$$

$$=cx-ax;\ x(c-a)=b;\ \text{luego la raíz será}\ x=\frac{b}{c-a}.$$

Comprobacion.

$$6:\frac{b}{c-a}+\frac{a}{b}=\frac{c}{b}+5:\frac{b}{c-a};\ \text{ó}\ \frac{6(c-a)}{b}+\frac{a}{b}$$

$$=\frac{c}{b}+\frac{5(c-a)}{b};\ \text{ó}\ \frac{6c-6a+a}{b}=\frac{c+5c-5a}{b};\ \text{ó en}$$

$$\text{fin,}\ \frac{6c-5a}{b}=\frac{6c-5a}{b}:\ \text{identidad comprobante.}$$

$$3.^{\circ}\quad 7ax-9a^2+\frac{6}{23}=4ax-\frac{17}{23}+x.$$

Este ejemplo para estímulo de los principiantes.

LECCION 40.

Todas las ecuaciones determinadas de primer grado están comprendidas en la ecuacion general $Ax + D = Bx + C$, que se llama *ecuacion formular de las determinadas de primer grado*. Despejando en ella la incógnita, se obtiene $x = \frac{C - D}{A - B}$ (I), y esto espresa el valor formular de la raíz *única* en esta clase de ecuaciones. Por las letras A, B, C, D, se indican cuantas cantidades racionales quieran espresarse como datos, desde el simple número hasta el complicado polinómio. La discusion de la fórmula (I) descubre para esta raíz cinco valores diferentes, que son: *cantidad positiva, cantidad negativa, cantidad nula, cantidad infinita* y *cantidad indeterminada*. La cantidad infinita se formula por $\frac{a}{o}$; y quiere decir, cantidad mayor que otra de su misma especie, por grande que esta sea: tambien se simboliza por este signo ∞. La cantidad indeterminada ó general se formula por $\frac{o}{o}$. Demuéstrense ambas formas. Cuando la raíz de una ecuacion sale con el valor infinito, nos advierte *que el problema planteado en aquella ecuacion es imposible*. Y cuando aparece con el valor general ó indeterminado, $\frac{o}{o}$ nos descubre, *que la proposicion cifrada como problema en la ecuacion resuelta, es un teorema.*

Siempre que un problema resulta planteado con dos ó mas ecuaciones, el conjunto de estas constituye lo que se llama *sistema de ecuaciones*. Se llama *sistema determinado* cuando hay en él tantas incógnitas como ecuaciones, y estas son distintas; pero cuando falta alguna de estas condiciones se llama *sistema indeterminado*. Por fin, es *sistema absurdo* aquel que, reuniendo las condiciones del sistema determinado, contiene ecuaciones *contradictorias* ó ecuaciones *incompatibles*. He aquí ejemplos de todo:

1.° $\left.\begin{cases} ax + by = c \\ dx + fy = g \end{cases}\right\}$ es un sistema determinado.

2.° $\left.\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3y + 6x = 9 \end{cases}\right\}$ es un sistema indeterminado; porque sus ecuaciones no son distintas.

3.° $\left.\begin{cases} ax + y = b \\ cy - z = c \end{cases}\right\}$ es tambien sistema indeterminado, pues contiene mas incógnitas que ecuaciones.

4.° $\left.\begin{cases} ax - y = b \\ 3ax - 4b = 3y \end{cases}\right\}$ es un sistema absurdo, porque sus ecuaciones son *incompatibles*.

5.° $\left.\begin{cases} ax - 2y = b \\ 6y - 3b = 3ax \end{cases}\right\}$ es tambien un sistema absurdo, por ser *contradictorias* sus ecuaciones.

Eliminacion de incógnitas.

Si esta operacion no precede, es imposible despejar las incógnitas en un sistema de ecuaciones: de modo que *eliminar una incógnita* de un sistema, *es deducir de este otro sistema legítimo que no tenga aquella incógnita*. Este sistema deducido tendrá una ecuacion menos, y repitiendo en él la operacion se obtendrá otro sistema con otra ecuacion menos, llegando por fin á una sola ecuacion determinada. Entonces, despejando la incógnita de esta ecuacion resultante, y por retroceso, sustituyendo su valor en las ecuaciones anteriores, se consigue despejar todas las incógnitas.

Los métodos de eliminacion mas usuales son tres, llamados: *de sustitucion*, *de igualacion* y *de coeficientes opuestos*. Vedlos á continuacion aplicados á unos mismos ejemplos, para que puedan compararse bien.

Primer ejemplo: $\left.\begin{array}{l} 5x - 8 = u + 2x \\ 3u + 2x = 31 \end{array}\right\}$ (A).

Método de sustitucion. Determinando la u en la primera ecuacion del sistema (A), tendremos $u = 3x - 8$ (B). Sustituyendo este valor de u en la segunda ecuacion del sistema (A), dará $3(3x - 8) + 2x = 31$; ó $11x - 24 = 31$; ó $11x = 31 + 24$; y en fin, $x = \dfrac{55}{11} = 5$.

Despejada (*) la x, se puede ya despejar la u, sustituyendo el valor de x en una de las ecuaciones anteriores; v. gr., en la (B), que dará $u = 3 \times 5 - 8 = 7$. Luego las raíces del sistema (A) deben ser $\begin{pmatrix} x = 5 \\ u = 7 \end{pmatrix}$.

Resolucion del mismo ejemplo por el *método de igualacion.* Determinando la u en cada una de las ecuaciones del sistema (A), hallamos $\left\{\begin{array}{l} u = 3x - 8 \\ u = \dfrac{31 - 2x}{3} \end{array}\right\}$ (C); luego por *cosas iguales á una tercera*, tendremos $3x - 8 = \dfrac{31 - 2x}{3}$; ó $9x - 24 = 31 - 2x$; ó $11x = 31 + 24$; ó en fin, $x = \dfrac{55}{11} = 5$. Poniendo este valor en

(*) Entre despejar y determinar hay esta diferencia: la incógnita despejada lo es en cantidades conocidas; pero la incógnita determinada lo es en conocidas é incógnitas.

vez de x, en la primera ecuacion (C) nos da, $u = 3 \times 5 - 8 = 15 - 8$; $u = 7$. Luego las dos raíces del sistema (A) deben ser, como antes, $\left(\begin{matrix} x = 5 \\ u = 7 \end{matrix}\right)$: exacto.

Veamos todavía esta exactitud confirmada por el método de *coeficientes opuestos.*

La primera de (A) multiplicada por 3, y sumada con la segunda,

dan $\left\{\begin{matrix} 9x - 3u = 24 \\ 2x + 3u = 31 \\ \hline 11x = 55 \end{matrix}\right.$: de donde sale $x = 5$. Puesto este valor en la primera de (A), resulta $15 - 8 = u$; $u = 7$. Luego las raíces del sistema (A) son necesariamente $\left(\begin{matrix} x = 5 \\ u = 7 \end{matrix}\right)$ por cualquier método que se haga la eliminacion.

$$\text{Segundo ejemplo:} \left\{\begin{matrix} x + u + z = a \\ x + u - z = b \\ x - u - z = c \end{matrix}\right\} \text{(D)}.$$

Por el método de sustitucion diremos: determinando la x en tercera de (D), será $x = c + u + z$; valor que sustituido en primera y segunda de (D), da $\left(\begin{matrix} c + u + z + u + z = a \\ c + u + z + u - z = b \end{matrix}\right)$, ó

$\left\{\begin{matrix} 2u + 2z = a - c \\ 2u = b - c \end{matrix}\right\}$ (E). Por la segunda de (E) es,

$u = \dfrac{b - c}{2}$ (1); que sustituido en la primera de (E) la cámbia en, $b - c + 2z = a - c$; ó $2z = a - b$, que da $z = \dfrac{a - b}{2}$ (2).

Ahora sustituyendo estos valores (1) y (2) en cualquiera de las ecuaciones (D), y aun mejor en su deducida $x = c + u + z$; tendremos por fin $x = c + \frac{b-c}{2} + \frac{a-b}{2}$, ó $x = \frac{a+c}{2}$ (3).

Luego segun el método de sustitucion, hallamos para raíces del sistema (D) los resultados (1), (2), (3); esto es, $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a+c}{2} \\ u = \frac{b-c}{2} \\ z = \frac{a-b}{2} \end{array} \right\}$.

Por el método de igualacion diremos: determinando la x en cada una de las ecuaciones (D), resultarán estas tres: $\left\{ \begin{array}{l} x = a - u - z \\ x = b - u + z \\ x = c + u + z \end{array} \right\}$ (F). La primera y segunda de (F), dan $a - u - z = b - u + z$; la segunda y tercera dan $b - u + z = c + u + z$; que reunidas forman el sistema $\left\{ \begin{array}{l} a - z = b + z \\ b - u = c + u \end{array} \right\}$ (G). Las dos ecuaciones del sistema (G) son determinadas, y nos permiten desde luego el despejo cuyos resultados son, $z = \frac{a-b}{2}$ (4); $u = \frac{b-c}{2}$ (5).

Ahora poniendo los valores (4) y (5) en cualquiera de las ecuaciones (F), v. gr. en la tercera, nos darán, $x = c + \frac{b-c}{2} + \frac{a-b}{2}$; ó $x = \frac{a+c}{2}$ (6). Luego segun el método de igualacion hallamos para raíces del sistema (D) los resultados (4), (5),

$$(6) ;\ \text{esto es},\ \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a + c}{2} \\ u = \dfrac{b - c}{2} \\ z = \dfrac{a - b}{2} \end{array}\right\}.$$

Por el método de coeficientes opuestos diremos: sumando primera con tercera de (D) se eliminan dos incógnitas á la vez, y queda $2x = a + c$, ó $x = \dfrac{a + c}{2}$ (7).

Restando la segunda de la primera (D), tambien se eliminan dos incógnitas, y queda $2z = a - b$, ó $z = \dfrac{a - b}{2}$ (8).

Poniendo ahora en cualquiera de las (D) los valores (7), (8), v. gr. en la segunda, tendremos $u = b + z - x = b + \dfrac{a - b}{2} - \dfrac{a + c}{2}$; ó $u = \dfrac{2b + a - b - a - c}{2} = \dfrac{b - c}{2}$ (9).

Luego por el método de coeficientes opuestos hallamos tambien

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a + c}{2} \\ u = \dfrac{b - c}{2} \\ z = \dfrac{a - b}{2} \end{array}\right\}.$$

Esta identidad de resultados comprueba la exactitud de los tres métodos, y autoriza á preferir el método que mas convenga á la cuestion que se resuelva: el de coeficientes opuestos tiene sobre los otros dos la ventaja de evitar las formas fraccionarias en los cálculos que se practican, para la eliminacion de las incógnitas. Así podrian resolverse otros sistemas determinados de primer grado, aun cuando las incógnitas fuesen cuatro ó mas.

LECCION 41.

Aunque el planteo de los problemas no ofrece siempre la facilidad y seguridad que la eliminacion y despejo de las incógnitas, se prescriben sin embargo ciertos procedimientos que suplen, en cuanto pueden, el defecto de una regla exacta. He aquí los dos mas seguidos en la práctica, y que por solo eso son ya recomendables:

1.° *Enterarse bien del enunciado del problema estudiándolo con detenimiento, hasta discernir qué cantidades son datos, qué otras son incógnitas, y qué relaciones de igualdad ó equivalencia ligan entre sí á estos diversos elementos de la cuestion.*

2.° *Traducir luego al idioma algébrico de las ecuaciones el enunciado vulgar del problema, analizado en su parte sustancial, espresando por* x, y, z . . . *las incógnitas, y anotando con ellas y con los datos, aquellas mismas operaciones que se harian para comprobar los valores de dichas incógnitas, si ya nos fueran conocidos.*

Nós limitamos por ahora á problemas fáciles, que evidencien con claridad las cinco especies de valores, deducidos en la Leccion 40, por la discusion del valor formular $x = \frac{C - D}{A - B}$ (1).

Ejemplos:

1.° *Un padre tiene 40 años y su hijo tiene 12; ¿cuándo será la edad del padre triple de la del hijo?*

Planteo. Representando por x el tiempo que ha de trascurrir para que esto suceda, será entonces la edad del padre $(40 + x)$ años, y será la edad del hijo $(12 + x)$ años.

Para llenar ahora la condicion de igualdad, tripliquemos la edad del hijo, y quedará planteado el problema en esta ecuacion:

$$40 + x = (12 + x) \times 3.$$

Por fin, procediendo al despejo de la x diremos:

$$40 + x = 36 + 3x\,;\ 40 - 36 = 3x - x\,;\ 2x = 4\,;\ x = 2.$$

Resultado positivo que satisface exactamente á la ecuacion y al problema, como debe suceder siempre que la cuestion esté bien planteada.

Luego la edad del padre será triple de la del hijo, cuando este tenga 14 años.

Para que resulte raíz negativa no necesitamos de otro ejemplo; suponiendo en el mismo problema que el hijo tiene 16 años, quedará planteado en esta ecuacion: $40 + x = (16 + x) \times 3 = 48 + 3x$. De ella saldrá, $48 - 40 = x - 3x = -2x$; ó

$$x = \frac{8}{-2} = -4 : \text{raíz negativa.}$$

Estas raíces son tan exactas como las positivas, satisfacen á la ecuacion y al problema cuando está bien planteado; pero nos advierten que hay en el problema alguna frase en sentido trocado. La presente $x = -4$, nos dice que en vez de preguntar *cuándo será la edad del padre triple que la del hijo*, debiera decir *cuándo fué*. . . De modo que *las raíces negativas nos descubren en la análisis, la eminente propiedad de responder con exactitud, á las cuestiones de enunciado incorrecto.*

2.° *Hallar un número tal, que añadido al quebrado* $\frac{209}{247}$, *dé la misma suma, que si al dupto del tal número se añaden* $\frac{11}{13}$.

Planteo. Espresando por x el número que se busca, se tendrá planteado el problema en esta ecuacion, $\frac{209}{247} + x = 2x + \frac{11}{13}$. De ella saldrá $2x - x = \frac{209}{247} - \frac{11}{13}$; $x = \frac{11 \times 19}{13 \times 19} - \frac{11}{13} = \frac{11 - 11}{13}$; ó en fin, $x = 0$: raíz nula.

Esta raíz cero es tan legítima como la positiva y la negativa halladas antes; porque si en la ecuacion del planteo suprimimos los quebrados $\frac{209}{247}$ y $\frac{11}{13}$, por ser equivalentes, quedará reducida á $x = 2x$: la cual traducida al lenguaje vulgar, revela este otro problema: *Hallar un número que sea igual á su duplo.* Y es evidente que solo el cero puede satisfacer á este pedido.

3.° *Hallar un número tal que aumentado de su tercio y de su mitad, dé* 11 *veces su sexto más* 5 *unidades.*

Planteo. Espresando por x el número pedido tendremos para ecuacion del planteo, $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 11 \times \frac{x}{6} + 5$.

Procediendo al despejo de su incógnita hallamos,

$6x + 2x + 3x = 11x + 30$; $11x - 11x = 30$; $x(11 - 11) = 30$; $x = \frac{30}{11 - 11} = \frac{30}{0} = \infty$: raíz infinita. Luego el problema propuesto es imposible : esto nos dirá la raíz infinita en todas sus apariciones.

Y en efecto, quitados los denominadores á la ecuacion del planteo, se cámbia en $11x = 11x + 30$, que traducida al lenguaje vulgar revela este otro problema : *Hallar un número que sea igual al mismo número, aumentado* (ó disminuido) *de una cantidad distinta del cero.* Esto es un imposible que solo puede satisfacerse algébricamente por el infinito; pues de este valor se demuestra en los tratados superiores de la ciencia, la proposicion que aquí formulamos. . . $\infty = \infty \pm c$: espresando por c una cantidad finita.

4.° *Hallar una cantidad que aumentada en sus tres quintos, dé doble resultado que disminuida de su quinto.*

Planteo. Espresando por x la cantidad que se pide, tendremos planteado el problema en la ecuacion, $x + \frac{3x}{5} = 2\left(x - \frac{x}{5}\right)$. Procediendo al despejo de su incógnita será, $5x + 3x = 2(5x - x)$; $8x = 2 \times 4x$; $8x - 8x = 0$; $x(8 - 8) = 0$; $x = \frac{0}{8-8} = \frac{0}{0}$: raiz indeterminada, como debia suceder para una proposicion que enunciada como problema es un axioma; pues se pide una cantidad que sea igual á sí misma. Así lo dice la ecuacion del planteo cuando se la trasforma en $8x = 8x$.

LECCION 42.

Cautela con las espresiones $\frac{0}{0}$.

Cuando un resultado formular se convierte en $\frac{0}{0}$ por algun valor atribuido á sus letras, no se califique de indeterminada la cantidad espresa en la fórmula, sin haber antes simplificado la fraccion, dejándola en estado irreducible.

Ejemplos:

1.° La fraccion $\frac{a^3 + 2ab^2}{ab} = x$, hace la $x = \frac{0}{0}$ por el supuesto de $a = 0$; pero simplificada la fraccion, y aplicado despues el supuesto, resulta $x = \frac{a^2 + 2b^2}{b} = 2b$.

2.° La fraccion $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = y$, hace la $y = \frac{0}{0}$ por el supuesto de $a = b$; pero simplificada se cámbia en $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$, y por el mismo supuesto se reduce á $y = \frac{3a}{2}$, ó $= \frac{3b}{2}$.

3.° La fraccion $\frac{3b^2 - 12a^2}{6a - 3b} = z$, da $z = \frac{0}{0}$ por el supuesto de $2a = b$; pero su simplificada irreducible $z = -(2a + b)$, se convierte en $z = -4a$, ó $= -2b$. Y así de otros ejemplos.

Problemas para ejercicio de los principiantes.

1.° Encontró un gavilan á una bandada de palomas y las saludó diciendo: «Bien venida sea la bandada de las cien palomas;» pero contestó una de ellas: «Aunque no somos ciento, sin embargo, con estas, otras tantas como estas, la mitad de estas, la cuarta parte de estas y tú, gavilan, componemos un ciento cabal.» ¿Cuántas eran las palomas?

2.° Hallar un número de tres cifras tales, que la suma de valores absolutos sea 11; que la cifra de las unidades valga doble que la de las centenas en su valor absoluto; y que si el número pedido se suma con el 297, resulte el mismo número que se pide, pero leido al revés. ¿Cuál es el único número que satisface las tres condiciones del problema?

3.º Cada uno de tres sugetos A, B, C, tiene diferente número de escudos; pero despues de duplicar A, á espensas de los suyos, los que tienen B y C; duplicar B del mismo modo los de A y C, y hacer lo mismo C con los de A y B; resulta cada uno con 16 escudos. ¿Cuántos tendrian antes de la operacion?

4.º Conocida la suma S de dos cantidades y su diferencia D; ¿por qué fórmula se determina el minuendo y el sustraendo?

Este problema es de muy frecuente uso en la ciencia; he aquí su resolucion:

Representando por x la cantidad mayor ó minuendo, y por z la cantidad menor ó sustraendo; tendremos planteado el problema en este sistema de ecuaciones: $\left(\begin{array}{l} x + z = S \\ x - z = D \end{array}\right)$. La suma de ambas elimina la z y da, $2x = S + D$; de donde sale $x = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D$ (1). Restando ahora la segunda ecuacion de la primera, se elimina la x y resulta, $2z = S - D$; de donde sale $z = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}D$ (2).

Los resultados (1) y (2) constituyen la fórmula pedida, que traducida al lenguaje vulgar, dice: *El minuendo es igual á la mitad de la suma, más la mitad de la diferencia. Y el sustraendo es igual á la mitad de la suma, menos la mitad de la diferencia.* Por esta regla se pueden ya resolver todos los problemas análogos tan pronto como se enuncian. Pídanse, por ejemplo, dos números que se diferencien en 8 unidades, y cuya suma sea 24. Y diremos: *el mayor es* $= 12 + 4 = 16$; *el menor es* $= 12 - 4 = 8$. Solucion exacta.

LECCION 43.

Ecuaciones determinadas de segundo grado.

Las ecuaciones mas sencillas que puede ofrecer esta segunda parte de la análisis algébrica, son todas las comprendidas en la fórmula $Ax^2 = B$, ó $x^2 = B : A = Q$ (2). Por A, B, Q, se indican cuantas cantidades racionales se quieran espresar como datos. Estas ecuaciones se llaman *puras de segundo grado*; y cuando, por trasformaciones sucesivas, se reducen á la fórmula del tipo $x^2 = Q$, decimos que están *preparadas*. Entonces el despejo de la incógnita es muy fácil: *basta estraer la raíz cuadrada de los dos miembros, y anteponer al segundo miembro el signo* $\pm$. Verificado esto en la fórmula (2) nos da $x = \pm\sqrt{Q} = \left\{\begin{matrix} +R \\ \text{y} \\ -R \end{matrix}\right\}$, si $\sqrt{Q}$ es racional: y nos dice que *la ecuacion pura de segundo da siempre dos raíces para su incógnita, ambas racionales ó irracionales, ambas reales ó imaginarias; pero siempre iguales y de signo contrario.* Sin mas teórica pasemos á la práctica.

Ejemplos:

1.º $2x^2 - 5 + 7ab^2c^3 = 22 - x^2 + 7c^3b^2a$;

$3x^2 = 22 + 5 = 27$;

$$x^2 = \frac{27}{3} = 9;\ x = \pm\sqrt{9} = \left\{\begin{matrix} +3 \\ \\ -3 \end{matrix}\right\}.$$

Ambas raíces racionales, numéricas.

2.º $a^2x^2 + 9b^2 = a^4 + 3bx^2$;

$a^2x^2 - 3bx^2 = a^4 - 9b^2$;

$x^2(a^2 - 3b) = a^4 - 9b^2$;

$x^2 = (a^4 - 9b^2) : (a^2 - 3b)$;

$x^2 = a^2 + 3b$; y por fin

$$x = \pm\sqrt{a^2 + 3b} = \left\{\begin{matrix} +\sqrt{a^2 + 3b} \\ -\sqrt{a^2 + 3b} \end{matrix}\right\}.$$

Ambas raíces irracionales, algébricas.

3.º $x^2 - 2ab + 2a^2 = 2ab - x^2 - 2b^2$;

$2x^2 = 4ab - 2a^2 - 2b^2$;

$$x^2 = 2ab - a^2 - b^2 = -(a-b)^2;$$

$$x = \pm\sqrt{-(a-b)^2} = \left\{\begin{matrix}(a-b)\sqrt{-1}\\(b-a)\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}.$$

Ambas raíces imaginarias; pero con factor racional.

Este ejemplo pertenece al caso ventajoso de raíces imaginarias: todo es en estas real racional; escepto el factor $\sqrt{-1}$, que les va anexo como un sello indeleble de pertenencia á las imaginarias. Compruébense ambas raíces.

Ecuaciones mixtas ó completas de segundo grado.

Así se llaman todas las comprendidas en la espresion general $Ax^2 + Bx = C$, que *es su ecuacion formular*. Ponemos por condicion que ninguna de las letras A, B, C, esprese cantidad nula, irracional ó imaginaria.

Partiendo por A los dos miembros de la ecuacion formular, se cámbia en $x^2 + \frac{Bx}{A} = \frac{C}{A}$; que espresando por p, q, los quebrados $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, será $x^2 + px = q$ (3): fórmula de las ecuaciones mixtas que están ya *preparadas*.

Si á los dos miembros de la fórmula (3) añadimos $(\frac{1}{2}p)^2$, se cambiará en $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$, ó en $(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} + q$.

Ahora si de los dos miembros de esta última ecuacion se estrae la raiz cuadrada, obtendremos $x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$;

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\text{ ; ó en fin}$$

$$x = \left\{\begin{array}{l} -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \end{array}\right\}\text{: que espresan la fórmula}$$

general de las dos raíces de la ecuacion completa de segundo grado.

Al mismo resultado puede llegarse desde la preparada, en uso de la siguiente regla: *La incógnita es igual á menos la mitad del coeficiente de segundo término de la preparada, ± raíz cuadrada del binómio formado con el cuadrado de dicha mitad y el tercer término de la preparada, con el signo que deba tener en el segundo miembro* (4).

Discutida la ecuacion (3) se evidencia, que las dos raíces pueden ser de un mismo signo ó de signo contrario; ambas racionales ó irracionales; ambas reales ó imaginarias, y hasta ambas iguales en valor y signo: este caso es el que llaman de *raíz repetida.*

Ademas, las espresadas raíces, independientemente de la diversidad de casos que hemos enumerado, tienen otra propiedad muy notable, utilísima en la práctica, y es que *la menos suma de ellas es igual al coeficiente del segundo término de la preparada; y el producto de las mismas es igual al tercer término, considerado en el primer miembro* (5).

LECCION 44.

Veamos ahora toda la doctrina que precede, confirmada en los siguientes

Ejemplos:

1.° $3x^2 + 30 - 20x = 5x - 2x^2$;

$5x^2 - 25x + 30 = 0$;

$x^2 - 5x + 6 = 0$: ecuacion preparada, que en uso de la regla (4) nos da inmediatamente, $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}$;

$$ó\ x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25-24}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{2} + \frac{1}{2}; \\ \frac{5}{2} - \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Luego $x = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right\}$. Ambas raíces racionales positivas.

$$2.^o \quad x - 6 + \frac{38a}{19x} = \frac{10+2a}{x};$$

$$x^2 - 6x + 2a = 10 + 2a;$$

$x^2 - 6x = 10$: ecuacion preparada que nos da,

$$x = 3 \pm \sqrt{9 + 10 = 19};\ ó$$

$x = \left\{ \begin{array}{l} 3 + \sqrt{19}; \\ 3 - \sqrt{19}. \end{array} \right\}$. Raíces ambas irracionales y de signo contrario.

$$3.^o \quad 3x^2 - 4 + 2x = x^2 - 12 - 2x;$$

$$2x^2 + 4x = 4 - 12 = -8;$$

$x^2 + 2x = -4$: ecuacion preparada que nos da,

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4 = -3};\ ó$$

$x = \left\{ \begin{array}{l} -1 + \sqrt{-3}; \\ -1 - \sqrt{-3}. \end{array} \right\}$. Raíces imaginarias.

4.° $x^2 - 4a + 7a^2 + 5x + 1 = 2ax - 2a + 3x + 6a^2$;

$x^2 + 2x - 2ax + a^2 - 2a + 1 = 0$;

$x^2 + x(2 - 2a) + (a - 1)^2 = 0$: ecuacion preparada, que en uso de la regla (4) da,

$$x = (a - 1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - (a-1)^2} = (a - 1) \pm 0;$$

ó $x = \left\{ \begin{array}{l} a - 1; \\ a - 1. \end{array} \right\}$. Raíces ambas iguales en valor y signo, y es lo que llaman *raíz repetida* : esto sucede siempre que el segundo miembro de la preparada es cero, y el primero es cuadrado de $(x + c)$, siendo c una cantidad racional distinta de cero.

La proposicion (5) en que está enunciada la notable propiedad de la *menos suma* y *producto* de las raíces de la ecuacion determinada de segundo grado, facilita mucho la comprobacion de las ecuaciones resueltas, que están ya preparadas : ved comprobados á continuacion los cuatro ejemplos resueltos.

En el 1.° la menos suma de raíces es $= 5 =$ coeficiente del segundo término de la preparada; y el producto de dichas raíces es $+ 6 =$ tercer término de la misma preparada.

En el 2.° ejemplo la menos suma de raíces es $- 6 =$ coeficiente del segundo término de la preparada; y el producto de dichas raíces es $- 10 =$ tercer término de la misma, considerado en el primer miembro.

En el 3.er ejemplo la menos suma de raíces es $+ 2 =$ coeficiente del segundo término; y el producto es $+ 4 =$ tercer término, considerado en primer miembro.

Y en el 4.° ejemplo la menos suma de raíces es $(2 - 2a) =$ coeficiente del segundo término; y el producto es $+ (a - 1)^2 =$ tercer término.

Sin embargo, esta comprobacion no garantiza la ecuacion primitiva; para asegurar la resolucion de ella, es menester sustituir sucesivamente en vez de la incógnita cada una de las dos raíces, hasta llegar á su respectiva identidad comprobante : operacion que insistimos en recomendar á los principiantes por su importancia.

Problemas.

1.° *Dividir un número entero* E *en dos partes tales , que su producto* P *sea el mayor posible.*

Planteo. Espresando por *m* la mitad de E , tendremos la parte mayor $= m + x$, y la parte menor será $= m - x$: pues la suma de estas dos partes es $= 2m = E$. Luego la ecuacion del planteo deberá ser $(m + x)(m - x) = P$; ó $m^2 - x^2 = P$; luego será P el mayor producto posible cuando el sustraendo x^2 sea nulo, esto es , cuando sea $x = 0$. Desde ahora , pues , enunciaremos este resultado , como otro de los principios de la ciencia , en estos términos : *El mayor producto que puede formarse con dos partes de un número , es el cuadrado de su mitad.*

Comprendido el problema en su forma general , lo es en la diversidad de formas particulares que pueda ofrecer. Pídase , por ejemplo , dividir el número 12 en dos partes , tales que su producto sea 32 ; y diremos : $(6 + x)(6 - x) = 32$; $36 - x^2 = 32$; $x^2 = 4$; $x = 2$. Luego los factores ó partes buscadas , son : $6 + 2 = 8$, y $6 - 2 = 4$; y el producto 32 que se pide es exactamente el de los factores $8 \times 4 = 32$.

Pero si para el dato 12 se nos hubiera pedido un producto $= 40$, rechazaríamos desde luego la cuestion como imposible, pues el máximo producto de dos partes del 12 es $36 < 40$.

2.° *Se suponen conocidas tres cantidades , á saber : el producto de dos números* $=$ P ; *la suma de sus cuadrados* $=$ S , *y la diferencia de estos mismos cuadrados* $=$ D. *Y se pide hallar la fórmula para cada uno de los dos números , con solo dos de las tres cantidades* P , S , D.

Planteo. Este problema ofrece tres formas, que en el órden de la mas fácil á la mas difícil, son:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= S \\ x^2 - z^2 &= D \end{aligned}\right\}(A);\quad \left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= S \\ xz &= P \end{aligned}\right\}(B);\quad \left.\begin{aligned} x^2 - z^2 &= D \\ xz &= P \end{aligned}\right\}(C).$$

Suponiendo $x > z$, segun lo indica la diferencia positiva D, sacamos inmediatamente del sistema (A), $\left\{\begin{aligned} x^2 &= \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}D \\ z^2 &= \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}D \end{aligned}\right\}$; y de aquí

$$x = \sqrt{\frac{S+D}{2}};\ z = \sqrt{\frac{S-D}{2}}.$$

Para resolver el sistema (B) diremos:

$1^a + 2^a \times 2$ dan, $x^2 + 2xz + z^2 = S + 2P$; ó $(x+z)^2 = S + 2P$;

de donde sale, $x + z = \sqrt{S + 2P}$ (a).

Diremos tambien: $1^a - 2^a \times 2$ dan, $x^2 - 2xz + z^2 = S - 2P$;

ó $(x-z)^2 = S - 2P$; de donde sale $x - z = \sqrt{S - 2P}$ (b).

Luego los resultados (a), (b) darán por fin,

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{S + 2P} + \sqrt{S - 2P});\ z = \tfrac{1}{2}(\sqrt{S + 2P} - \sqrt{S - 2P});$$

Para resolver el sistema (C) diremos,

$D^2 = (x^2 - z^2)^2 = x^4 - 2x^2z^2 + z^4$; y $4P^2 = 4x^2z^2$.

Ahora la suma de estas dos ecuaciones da,

$$x^4 + 2x^2z^2 + z^4 = D^2 + 4P^2;\ x^2 + z^2 = \sqrt{D^2 + 4P^2};$$

pero la 1^a de (C) es . . . . $x^2 - z^2 = D$; luego de estas dos ecuaciones tendremos inmediatamente,

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(D + \sqrt{D^2 + 4P^2});\ z^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{D^2 + 4P^2} - D).$$

Por fin, se obtienen de estos resultados las fórmulas

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{D^2 + 4P^2} + D)};\ z = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{D^2 + 4P^2} - D)}.$$

3.º Con diez y seis escudos
Dí limosnas iguales
Entre ciegos, tullidos, sordos, mudos,
Para remedio de sus tristes males.
El número de pobres no sé fijo;
Mas uno de ellos dijo:
«Si dos menos hubieran concurrido,
Peseta mas hubiéramos tenido.»
Dí tú el número que era,
Y cuánto cada pobre recibiera.

Este problema para estímulo de los principiantes (*).

LECCION 45.

Si espresamos por y un número variable, y queremos que y sea igual á una potencia de una cantidad constante b; será preciso que el esponente de la potencia pedida sea un número x, llamado *logaritmo* de y, en el sistema cuya base es b. Todas estas condiciones están simbolizadas en la sencilla ecuacion $b^x = y$, que se llama *fórmula general de los sistemas logarítmicos.*

De esta ecuacion se deducen inmediatamente las proposiciones que siguen:

1.ª *Logaritmo de un número es el esponente de la potencia á que se ha de elevar la base del sistema para que resulte dicho número.*

2.ª *El logaritmo de la base es 1, y el logaritmo de 1 es cero.*

3.ª Representando por N un número cualquiera, y por B la base del sistema en que se tome el *logaritmo de* N (que abreviadamente se escribe L. N.) se tendrá la igualdad, $N = B^{L.N.}$ que nos dice: *Todo número es igual á la potencia representada por la base elevada al logaritmo del número.*

(*) Para problemas en verso véase el Algebra de Vallejo, en su *Tratado elemental de Matemáticas.*

Y de estas proposiciones, que son legítimos corolarios de la ecuacion formular $b^x = y$, se deducen y demuestran estas otras:

4.ª *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

5.ª *El logaritmo de un cuociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el logaritmo del divisor.*

6.ª *El logaritmo de una potencia es igual al esponente de la potencia, multiplicado por el logaritmo de la raíz.*

7.ª *El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la potencia, partido por el esponente de la raíz.*

Resulta, pues, por consecuencia necesaria de las proposiciones que anteceden, que *por medio de los logaritmos se puede cambiar la multiplicacion en adicion; la division en sustraccion; la elevacion á potencias en fácil multiplicacion, y la estraccion de raíces en fácil division.*

Ved aplicados á continuacion los principios que anteceden:

Primer ejemplo.

$$L.\,ab = L.\,a + L.\,b.$$

$$L.\,a^2\sqrt[3]{b} = L.\,a^2 + L.\,\sqrt[3]{b} = 2\,L.\,a + \frac{L.\,b}{3}.$$

$$L.\,\frac{2a^3}{bc} = L.\,2a^3 - L.\,bc = L.\,2 + 3\,L.\,a - L.\,b - L.\,c.$$

$$L.\,\frac{a^2 - b^2}{ab + bc} = L.\,\frac{(a+b)\,(a-b)}{b\,(a+c)} = L.\,(a+b) + L.\,(a-b)$$

$$- L.\,b - L.\,(a+c).$$

Segundo ejemplo.

$$L.\,a + 2\,L.\,b - L.\,c = L.\,\frac{ab^2}{c}.$$

$$n\,L.\,a + \tfrac{1}{2}\,L.\,b - \tfrac{2}{3}\,L.\,c = L.\,\frac{a^n \times \sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2}}.$$

$$\tfrac{1}{2}\,L.\,(a-b) - 2\,L.\,(a+c) + \tfrac{1}{2}\,L.\,(a^2+ab+b^2) =$$

$$L.\,\frac{\sqrt{a-b}}{(a+c)^2} + L.\,\sqrt{a^2+ab+b^2} = L.\,\frac{\sqrt{a^3-b^3}}{(a+c)^2}.$$

Logaritmos de Brigs.

Así se llaman con relacion á su inventor, los logaritmos que resultan de hacer la base igual 10 en la fórmula general, cambiándola en $10^x = y$. Tambien se llaman *logaritmos tabulares* ó *vulgares*, por ser los que se prefieren para la construccion de las tablas mas usuales en los cálculos numéricos.

La inspeccion de $10^x = y$, basta para comprender que cuando x sea un número racional, deberá precisamente ser y una potencia de 10: por eso en el sistema de Brigs solo estos números tienen logaritmo exacto; siendo una cantidad irracional el logaritmo de todo otro número. Sin embargo, estos otros logaritmos se aproximan por lo regular hasta el 7.º y aun hasta el 8.º órden decimal para los usos ordinarios; pero los hay tambien calculados con muchas mas cifras decimales para los casos que lo requieran.

La parte del logaritmo que está á la izquierda de la coma se llama *característica*, y la que á su derecha *mantisa*.

La característica *consta siempre de tantas unidades cuantas cifras, menos una, tenga el número en enteros*: por eso se omite su espresion cuando no es necesaria.

Como el logaritmo es cantidad variable segun el número, pasa por los tres estados de *positivo*, *nulo* y *negativo*; y aun este suele cambiarse en otro equivalente, de mantisa positiva y característica negativa.

En la aplicacion de los logaritmos á los cálculos numéricos, es muy poderoso ausiliar el *complemento logarítmico* ; esto es, el complemento aritmético del logaritmo.

Ejemplos de lo dicho hasta aquí sobre logaritmos de Brigs :

$$L.\ 1000 = L.\ 10^3 = 3\ L.\ 10 = 3 \times 1 = 3.$$

$$L.\ \frac{1}{100} = L.\ \frac{1}{10^2} = L.\ 10^{-2} = -2 \times L.\ 10 = -2.$$

$$L.\ \sqrt[3]{100} = L.\ \sqrt[3]{10^2} = L.\ 10^{\frac{2}{3}} = \tfrac{2}{3} \times L.\ 10 = \tfrac{2}{3},$$

etc.

Característica constante.

L. 348 = 2,5415792.

L. 824,7 = 2,9162960.

L. 982,28 = 2,9922353 ,

etc.

Mantisa constante.

L. 98228 = 4,9922353.

L. 9822,8 = 3,9922353.

L. 9,8228 = 0,9922353 ,

etc.

Complemento logarítmico del número 348 = complemento aritmético de su logaritmo , = complemento aritmético de 2,5415792 = 7,4584208. Complemento logarítmico del número 982,28 = complemento de su logaritmo , = complemento aritmético de 2,9922353 = 7,0077647 , etc.

Cada complemento logarítmico , segun la regla aquí observada, adeuda 10 unidades por su unidad complementaria. Cuando teniendo el complemento de un logaritmo se quiera deducir el logaritmo, bastará complementar su complemento.

Mucho mas hay que decir sobre logaritmos de Brigs; pero será con buenas tablas á la vista, y atendiendo á la esplicacion del profesor.

LECCION 46.

La espresion A : B representa lo que se llama *una razon*, y se lee A *es á* B. Toda razon es un cuociente indicado del *antecedente* por el *consecuente*, así se llaman sus dos términos A y B: puede escribirse la razon en forma de quebrado, siempre que esta forma sea preferible para determinado fin.

Las propiedades de una razon son las mismas que las de un quebrado: se llama *razon de igualdad*, *razon de mayor á menor*, y *razon de menor á mayor*, en los mismos casos que el quebrado se llama unidad, quebrado impropio y quebrado propio; hasta la denominacion de *inversas* ó *recíprocas* la tienen las razones en el mismo caso que los quebrados. La razon A : B es recíproca ó inversa de la razon B : A; jamas dos razones inversas pueden ser iguales, pues si la una es > 1, la otra será < 1.

Dos razones equivalentes escritas una á cada lado del signo : : (que se lee *como*) forman lo que se llama una *proporcion*: así, A : B : : C : D espresa una proporcion. Los términos 1.º y 3.º (A y C) se llaman *antecedentes*; los 2.º y 4.º (B y D) se llaman *consecuentes*; los 1.º y 4.º (A y D) se llaman *estremos*, y los 2.º y 3.º (B y C) se llaman *medios*. Cuando son iguales los términos medios de una proporcion, esta se llama *continua*; y cuando ni estos ni los estremos sean iguales, la proporcion se llamará *discreta*.

Aunque varíen las razones puede subsistir proporcion, siempre que la alteracion de una razon sea igual á la de la otra razon. Toda proporcion puede, por su definicion, cambiarse en igualdad de cuocientes, dando á sus razones la forma de quebrados, y mudando el signo : : en el =; de modo que la proporcion A : B : : C : D es lo mismo que la igualdad $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

La proporcion continua se escribe abreviadamente así, $\div$ A : B : C, y se lee A *es á* B *es á* C ; pero cuando el cálculo lo exige se escribe en la forma discreta A : B : : B : C ; ó en la de cuocientes iguales

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}.$$

De la igualdad de cuocientes es muy fácil demostrar el teorema fundamental de las proporciones, que se enuncia así : *En toda proporcion el producto de los términos estremos es igual al producto de los términos medios, si es discreta; ó al cuadrado del término medio, si es continua.* Luego toda proporcion se puede cambiar en igualdad de productos, cuando se necesite preferir esta forma á la de proporcion.

Así como la proporcion da equiproducto de estremos y medios, así recíprocamente *de un equiproducto binario cualquiera, se deduce proporcion, tomando por estremos los dos factores de un miembro, y por medios los dos factores del otro miembro.* Sea, por ejemplo, el equiproducto binario $mq = np$, y nos dará la proporcion $m : n : : p : q$.

Si entre los términos de una proporcion hay alguno desconocido en totalidad ó en parte, se determinará su valor *cambiando la proporcion en igualdad de productos, y despejando la incógnita que en la ecuacion aparezca.* He aquí ejemplos de los diversos casos que puede ofrecer este problema :

1.° $x : df : : d : f$; da $fx = d^2f$; ó $x = d^2$. Luego sustituyendo d^2 en vez de x, la proporcion primitiva será $d^2 : df : : d : f$; ó $\frac{d^2}{df} = \frac{d}{f}$; ó en fin, $\frac{d}{f} = \frac{d}{f}$: identidad comprobante.

2.° $a : bd : : x : b^2cd$; da $bdx = ab^2cd$; $x = \frac{ab^2cd}{bd}$; $x = abc$.

Comprobacion. $a : bd :: abc : b^2cd$; $\frac{a}{bd} = \frac{abc}{b^2cd}$; ó en fin, $\frac{a}{bd} = \frac{a}{bd}$: identidad comprobante.

3.º $ad : f :: gf : gx$; da $adgx = f^2g$; $x = \frac{f^2g}{adg} = \frac{f^2}{ad}$.

Luego $\frac{ad}{f} = (fg : \frac{gf^2}{ad})$; ó $\frac{ad}{f} = \frac{adfg}{gf^2}$; ó en fin, $\frac{ad}{f} = \frac{ad}{f}$: identidad comprobante.

4.º $\frac{a}{bc^2} : x :: x : \frac{ad^2}{b}$; da $x^2 = \frac{a^2d^2}{b^2c^2}$;

$x = \sqrt{\frac{a^2d^2}{b^2c^2}} = \pm\frac{ad}{bc}$.

Luego $\frac{a}{bc^2} : \pm\frac{ad}{bc} :: \frac{\pm ad}{bc} : \frac{ad^2}{b}$; $\pm\frac{abc}{abc^2d}$

$= \pm\frac{abd}{abcd^2}$; ó en fin, $\frac{\pm 1}{cd} = \frac{\pm 1}{cd}$: identidad comprobante.

5.º $a^2b^3 : bx :: ax : ac^2$.
6.º $3 : (x - 2) :: x : 8$.
} Estos ejemplos para ejercicio de los aplicados.

LECCION 47.

Cámbios de forma con permanencia de proporcion.

Lo primero que sobre este punto se estudia es el cámbio de posicion de los términos: si el término 3.º de una proporcion se hace

2.° y este se hace 3.°, decimos que *se han alternado los medios*; si el 1.° se hace 4.° y este se hace 1.°, decimos que *se han alternado los estremos*; si en cada razon se pone el consecuente en lugar del antecedente y viceversa, decimos que *se han invertido las razones*; y si la razon primera se hace segunda, y esta se pasa al lugar de la primera, decimos que *se han permutado las razones*.

Practicadas estas operaciones, como se ve al márgen, resulta que la proporcion 2 tiene alternados los medios de la 1, que es la elegida por primera; la 3 da alternados los estremos; la 4 da invertidas las razones; y las 5, 6, 7, 8, son las cuatro precedentes permutadas. Si en cada una de estas ocho proporciones se compara el producto de los términos medios con el de los estremos, se hallará una constante igualdad de productos, lo cual evidencia que *toda proporcion se puede alternar, invertir y permutar, sin dejar de ser proporcion*.

A : B : : C : D . . . 1
A : C : : B : D . . . 2
D : B : : C : A . . . 3
B : A : : D : C . . . 4
C : D : : A : B . . . 5
B : D : : A : C . . . 6
C : A : : D : B . . . 7
D : C : : B : A . . . 8

Tomadas, como base, esta proposicion y el teorema fundamental, se enuncian y demuestran por su órden las proposiciones siguientes:

3.ª *De dos proporciones que tengan una razon comun, siempre podrá deducirse una tercera proporcion*: porque, v. gr. a : b : : c : d; y f : g : : a : b; dan *por iguales á una tercera*, las razones c : d : : f : g. Y no es preciso que la razon comun esté patente; basta que las dos proporciones puedan ostentarla por cámbio legítimo de forma. Así es como de las proporciones $ac^2 : fg :: abc : g^2$; m : n : : f : g; sale la proporcion c : b : : m : n.

4.ª *Si cuatro cantidades forman proporcion, los cuadrados de ellas, los cubos y las raíces de un mismo grado formarán tambien proporcion.*

De modo que, por ejemplo, la proporcion a : b : : c : d, dará las que se indican en el cuadrado del márgen.

$a^2 : b^2 : : c^2 : d^2$

$a^3 : b^3 : : c^3 : d^3$

$\sqrt{a} : \sqrt{b} : : \sqrt{c} : \sqrt{d}$

etc.

5.ª *La suma de términos de la primera razon, es á la suma de términos de la segunda razon, como un término de la razon primera es al término homólogo de la razon segunda.*

6.ª *La diferencia de los dos términos de la primera razon, es á la diferencia de los dos términos de la segunda razon* (suponiendo ambas diferencias de un mismo signo), *como un término de la razon primera es al término homólogo de la razon segunda.*

7.ª *La suma de los dos términos de la primera razon, es á la suma de los dos términos de la segunda razon, como la diferencia de los dos términos de la razon primera es á la diferencia de los dos términos de la razon segunda.*

Esta proposicion es un corolario de las proposiciones 5.ª y 6.ª

Demostradas las proposiciones 5.ª, 6.ª y 7.ª, se demuestran fácilmente otras tres análogas, cuyos enunciados son:

8.ª *En toda proporcion la suma de los antecedentes, es á la suma de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

9.ª *En toda proporcion la diferencia de los antecedentes, es á la diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

10.ª *En toda proporcion la suma de los antecedentes, es á la suma de los consecuentes, como la diferencia de los antecedentes es á la diferencia de los consecuentes.*

Esta proposicion es corolario de las 8.ª y 9.ª

Observacion importante.

Aplicando sucesivamente á una proporcion cualquiera, tomada por primitiva, las proposiciones 5.ª, 6.ª, 8.ª, 9.ª, se deducirán ocho proporciones; y agregando á estas la proporcion primitiva, más las dos que resultan de las proposiciones 7.ª y 10.ª, se tendrán *once proporciones*. Si ahora, pues, cada una de estas once se alterna, invierte y permuta, sabido es que dará ocho. Luego *con solo alternar, invertir, permutar, componer y dividir, se pueden obtener de una proporcion cualquiera ochenta y ocho proporciones distintas* (*).

De esto solo puede ya inferirse cuán poderoso ausiliar de las Matemáticas deberá ser la teoría de las proporciones.

Série de razones iguales.

Así se llama la espresion en que se comparan tres ó mas razones equivalentes, como por ejemplo, $a : b : : c : d : : f : g : : h : l : :$ etc.

Tambien se escribe en forma de *equicuocientes* asi, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g} = \frac{h}{l} =$ etc.; y tambien de este otro modo, $a : c : f : h : : b : d : g : l$; de cualquiera de estas tres formas se sacan dos ó mas de las razones componentes, entendida la espresion.

Las mismas formas, aplicadas á razones continuas, serian:

1.ª $a : b : : b : c : : c : d : : d : f : : f : g : : g : h.$

2.ª $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{f} = \frac{f}{g} = \frac{g}{h}.$

3.ª $a : b : c : d : f : g : : b : c : d : f : g : h.$

(*) Con la voz técnica *componer*, espresan algunos autores las operaciones que enunciamos en las proposiciones 5.ª y 8.ª; y con la voz *dividir*, espresan las que enunciamos en las proposiciones 6.ª y 9.ª

Pero á todas estas se prefiere, como mas sencilla y adecuada al cálculo, la siguiente:

4.ª ∺ a : b : c : d : f : g : h. El signo ∺ se llama de *continuidad*, y suple el : : que dimidia la forma 3.ª

Para toda série de razones iguales se enuncian y demuestran las proposiciones siguientes:

1.ª *La suma de los antecedentes, es á la suma de los consecuentes, como un antecedente cualquiera es á su consecuente.*

2.ª *La diferencia de antecedentes, es á la diferencia de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

3.ª *La suma de antecedentes, es á la suma de consecuentes, como la diferencia de antecedentes es á la diferencia de consecuentes.*

La proposicion 3.ª se deduce por corolario de las 1.ª y 2.ª

4.ª Cuando seis ó mas términos formen série de razones iguales, la formarán tambien sus cuadrados, sus cubos y sus raíces, como se ve en el cuadro del márgen.

$$a : b : : c : d : : f : g$$
$$a^2 : b^2 : : c^2 : d^2 : : f^2 : g^2$$
$$a^3 : b^3 : : c^3 : d^3 : : f^3 : g^3$$
$$\sqrt{a} : \sqrt{b} : : \sqrt{c} : \sqrt{d} : : \sqrt{f} : \sqrt{g}$$

etc.

LECCION 48.

Llamamos *problemas de proporcion* á los que consisten, ó pueden consistir, en tres datos y una incógnita, la cual tenga con uno de los datos la misma razon que los otros dos tienen entre sí. Estos problemas se resuelven comunmente por los procedimientos que llaman *regla de tres, simple, compuesta, directa é inversa*; pero como el método que vamos á seguir difiere de aquellos procedimientos, escusa tambien sus denominaciones.

En el problema de proporcion se distinguen dos partes: una llamada *supuesto*, formada con dos ó mas datos; y otra llamada *pregunta*, formada con un dato menos y la incógnita.

Para plantear estos problemas *escríbanse en una línea las cantidades del supuesto, y en otra bajo de aquella las de la pregunta, de modo que se correspondan verticalmente cada dos homogéneas, y quede señalada por* x *la que se busca. Fíjese en seguida la relacion de magnitud que debe haber, entre la* x *y su dato homogéneo; y escríbase una proporcion cuyo 4.º término sea la* x, *su dato homogéneo sea el 3.er término, y los otros dos datos formen la primera razon, directa con la segunda: despéjese la* x, *y se tendrá resuelto el problema.*

Ejemplo:

Una máquina eleva en 8 minutos 100 pies cúbicos de agua; ¿cuánta elevará en 14 minutos?

Cálculo.

$$\left.\begin{array}{lcl} 8' & 100 & \text{pies} \\ & \wedge & \\ 14' & x & » \end{array}\right\} \text{da} \left\{\begin{array}{l} 4:7::100:x=25\times 7; \\ \\ x=175 \text{ pies cúbicos.} \end{array}\right.$$

Ejemplo segundo:

En 5 dias hacen 8 hombres una obra; ¿cuántos hombres se necesitan para hacerla en 2 dias?

Cálculo.

$$\left.\begin{array}{lcl} 5 \text{ dias} & 8 & \text{hombres} \\ & \wedge & \\ 2 \ » & x & » \end{array}\right\} \text{da} \left\{\begin{array}{l} 2:5::8:x=5\times 4; \\ \\ x=20 \text{ hombres.} \end{array}\right.$$

Antes de pasar á otros ejemplos conviene que el principiante se ejercite en la *permutacion de la incógnita*. Esto le proporcionará tres ventajas: 1.ª Dar al resultado del problema tantas comprobaciones cuantos datos tenga. 2.ª Formar de cada problema tantos otros cuantos datos tenga el propuesto. 3.ª Discurrir qué enunciado debe darse á cada uno de los problemas deducidos.

Cuando el problema de proporcion contenga mas de tres datos, podrá reducirse á tres, y resolverse por el método ya espuesto, si antes se le aplica la siguiente regla: *Multiplíquese el dato que se quiera conservar en cada línea por el que se quiera eliminar de la misma línea, si tales datos están en razon inversa; pero si están en razon directa deberá multiplicarse el dato que se quiera conservar en la primera linea, por el que se quiera eliminar de la segunda; y el dato que se quiera conservar en la segunda línea, deberá multiplicarse por el dato que se quiera eliminar de la primera.* Sirvan de ejemplo los siguientes

Problemas.

1.° *Una máquina con 5 grados de velocidad y 12 minutos de tiempo ha producido 30 unidades de efecto; ¿qué efecto daria la misma máquina en 2 minutos de tiempo y 10 grados de velocidad?*

Cálculo.

$$\left.\begin{array}{lll} 5 \text{ vel.} & 12' & 30 \text{ ef.} \\ 10 \text{ »} & 2' & x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 60 \text{ vel.} & 30 \text{ ef.} \\ & \vee \\ 20 \text{ »} & x \end{array}\right\} ; \text{ de aquí}$$

sale $6 : 2 :: 30 : x = \dfrac{2\times 30}{6} = 10$. Luego el efecto buscado es 10 unidades.

2.° *En 15 dias 20 hombres han hecho 160 varas de obra; ¿cuántos hombres se necesitan para hacer en 12 dias 192 varas de la misma obra?*

Cálculo.

$$\left.\begin{array}{lll} 15 \text{ dias} & 20 \text{ homb.} & 160 \text{ var.} \\ 12 \text{ »} & x & 192 \text{ »} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 1920 \text{ var.} & 20 \text{ homb.} \\ & \wedge \\ 2880 \text{ »} & x \end{array}\right\} ; \text{ de aquí}$$

sale $192 : 288 :: 20 : x = \dfrac{288\times 20}{192} = \dfrac{72\times 20}{48} = \dfrac{3\times 20}{2} = 30$. Luego se necesitan 30 hombres.

Si en estos dos problemas se permuta la incógnita, como aconsejamos para los de tres datos, se pueden deducir de unos y otros diez y seis problemas; que añadidos á los cuatro primitivos forman el total de veinte problemas diferentes, los cuales se comprueban mútuamente, y ofrecen al principiante un vasto campo para su ejercicio.

Advertencia.

Los problemas de proporcion llevan siempre implícita una condicion de absoluta necesidad, y es la del *cœteris paribus*: sin ella, serian tan indeterminados que no podrian sujetarse á regla fija. Luego si alguna vez discuerda el resultado del cálculo (estando este bien hecho) con el de la esperiencia, atribúyase el error á falta de la espresada condicion.

Tambien está basada en la condicion del *cœteris* la eliminacion de datos, para reducir á solo tres los de las cuestiones que contengan cinco ó mas. Basta escogitar una modificacion en ellos que, sin alterar el valor del resultado, proporcione una identidad entre dos condiciones: entonces prescindiendo de los datos idénticos, como comprendidos en la condicion general, quedará la cuestion reducida á otra con tres datos, y del mismo resultado que la propuesta. No desprecie el lector esta indicacion, y vea cómo ensayarla en los dos últimos ejemplos.

LECCION 49.

Reglas de interés.

Así se llaman las que enseñan á determinar qué ganancia ó pérdida corresponde á un capital cualquiera, en proporcion á la ganancia ó pérdida correspondiente á otro capital de comparacion, que constantemente es 100; esta se denomina *el tanto por* 100, y aquella *rédito ó interés del capital*. El interés se llama *simple* cuando solo proviene del capital, y *compuesto* cuando proviene del capital é interés. Las cuestiones de interés simple se plantean y resuelven por la proporcion $100 : t :: C : R$, que se lee *ciento es á su tanto, como el capital es á su rédito.* Será la incógnita una de las cantidades R, C, t, y formando equiproducto de la proporcion, se despejará como ya sabemos.

Ejemplos:

1.º *¿Qué rédito dará en un año un capital de* 3700 *escudos al* 7 *por* 100?

Resolucion. $100 : 7 :: 3700 : x = 37 \times 7 = 259$ escudos.

2.º *¿Qué capital se requiere para ganar* 259 *escudos en un año, al* 7 *por* 100?

Resolucion. $100 : 7 :: x : 259 ; x = \frac{25900}{7} = 3700$ escudos.

3.º *¿A qué rédito deben imponerse* 3700 *escudos, para que den* 259 *escudos al fin del año?*

Resolucion. $100 : x :: 3700 : 259 ; x = \frac{25900}{3700} = \frac{259}{37}$ $= 7$. Luego debe imponerse al 7 por 100.

Estos tres ejemplos, cuyos resultados se comprueban mútuamente, provienen de haber permutado la x, como ya aconsejamos para los de la Leccion 48.

Cuando el tanto por 100 es 5, se halla el rédito del capital refiriendo este á duros, y contando un real por duro. Si en el primer ejemplo hacemos este supuesto, hallaremos para rédito de los 3700 escudos, $x = 1850$ reales.

Mas fácil es todavía cuando el tanto por 100 es 10; basta entonces tomar el décimo del capital. Este supuesto dará en el primer ejemplo $x = 370$ escudos, para rédito de los 3700 escudos: y es precisamente el duplo de los 1850 reales que nos ha dado al 5 por 100.

Cuando las cuestiones de rédito se refieren á un plazo múltiplo ó submúltiplo de un año, se resuelven como para el año íntegro, y del resultado se toma el múltiplo ó submúltiplo correspondiente. Quiérase saber, por ejemplo, *qué rédito importarán* 2000 *escudos al* 5 *por* 100, *en un plazo de* 39 *meses*, y diremos: En 12 meses importan 1000 reales; en 36 meses importan 3000 reales, y en 3 meses solo importarán $\frac{1}{4}$ de 1000 reales = 250 reales. Luego el rédito total debe ser 3250 reales.

Los plazos que no coinciden con el múltiplo ó submúltiplo de un año, suelen estimarse en dias, computando el año de 360 dias, especialmente en el comercio. Esto facilita el cálculo reduciéndolo á la siguiente fórmula: $R = \frac{t\,d\,c}{36000}$; las letras *t*, *d*, *c*, espresan respectivamente *el tanto por* 100, *el número de dias* y *el capital impuesto*. Si por esta fórmula quiere determinarse, por ejemplo, *¿cuánto redituarán* 4000 *escudos al* 9 *por* 100, *desde el* 3 *de Marzo al* 20 *de Junio*? Diremos: De 3 de Marzo á 3 de Junio van 3 meses ó 90 dias; de 3 á 20 de Junio van 17 dias; luego d = 107 dias; y como es t = 9, y c = 4000, será $R = \frac{9 \times 107 \times 4000}{36000}$; ó R = 107 escudos.

Interés compuesto.

Para resolver sus problemas nos valdremos de la siguiente fórmula: $S = C \left\{ \frac{100 + r}{100} \right\}^t$. Por S espresamos la suma del capital primitivo C más los réditos devengados, desde su imposicion hasta el fin de *t* años; la letra *r* espresa el tanto por 100 á que se ha estipulado, y se refiere á la palabra *rata*, sinónima del tanto por 100. Cuando la incógnita es S, sirve inmediatamente la fórmula tal cual es; pero cuando fuere incógnita una de las otras letras C, t, r, deberá despejarse desde luego, valiéndose hasta de los logaritmos cuando sean necesarios; y despues aplicar á las letras conocidas los valores que se les atribuyan como datos.

Sirva de prueba el siguiente ejemplo:

¿Cuánto tiempo se requiere para duplicar un capital al rédito de 8 *por* 100?

Resuélvase por el método de interés simple, y por el de interés compuesto, evidenciando la ventaja del uno sobre el otro.

Regla de descuento.

Así se llama la que enseña á determinar cuánto debe deducirse de una cantidad que se paga antes de la fecha señalada para su cobro, en razon al tiempo del anticipo, y á un tanto por 100 convenido. El documento escrito en que el deudor se obliga al pago en determinada fecha se llama *letra* ó *pagaré*; la cantidad que consta en dicho documento se llama *valor nominal*; la que se satisface al acreedor antes del vencimiento se llama *valor actual*; y la diferencia entre el valor nominal y el actual se llama *descuento.*

Hay dos métodos de descontar, y vamos á verlos en un mismo ejemplo, para apreciar bien su diferencia. *Quiérase el valor actual, correspondiente á un pagaré de* 15900 *reales pagado con un año de anticipacion, al descuento de* 6 *por* 100.

Para resolver la cuestion por el método que llaman *rebatido*, diremos: Si 106 de valor nominal se reducen á 100 descontado el 6, ¿á qué se reducirán 15900 reales? Respuesta: á 15000 reales, segun la proporcion

$$106 : 100 :: 15900 : x = 1590000 \quad \begin{array}{l|l} 1590000 & 106 \\ \hline 530 & 15000 \\ 0 & \end{array}$$

Comprobacion.

$$100 : 6 :: 15000 : x = \frac{90000}{100} = 900: \text{exacto.}$$

Por el segundo método diríamos: *Si* 100 *unidades del valor nominal se reducen á* 100 — 6 *del valor actual, ¿á qué valor actual se reducirán los* 15900 *reales?*

Respuesta: á 14946 reales, segun la proporcion $100 : 94 :: 15900 : x = 159 \times 94 = \left\{ \begin{array}{r} 636 \\ 1431 \\ \hline 14946 \end{array} \right.$

Este descuento es 54 reales mayor que el calculado por el método rebatido; y todos los resultados obtenidos por este segundo método perjudicarán al acreedor. Sin embargo, tiene sus partidarios este método.

El plazo de un año no es el mas frecuente en los descuentos; los dias que trascurren desde el en que se paga el valor actual, hasta que venceria el nominal constituyen una fraccion de año, que en la fórmula espresamos por t.

Quiérase determinar *cuánto debe descontarse de* 7140 *escudos, que no vencen hasta el* 12 *de Junio y se pagan en* 1.° *de Abril, deducido el* 10 *por* 100 *anual.*

La fórmula para estos casos será $(100 + rt) : 100 ::$ valor nominal : ($x =$ valor actual). La fraccion t de un año, es aquí 73 dias $= \dfrac{73}{365}$ de año $= \frac{1}{5}$ de año; y como es $r = 10$, será el producto $rt = 10 \times \frac{1}{5} = 2$; luego para el planteo y solucion diremos,

$102 : 100 :: 7140 : x = \dfrac{714000}{102} = 7000 =$ valor actual. Deben, pues, descontarse 140 escudos de los 7140.

Se llama rebatido este método porque *retorna* al acreedor la cantidad descontada, si impone el valor actual durante el plazo del anticipo, y al mismo rédito del descuento. En efecto, 7000 escudos en 73 dias al 10 por 100 anual, darian $\frac{1}{5}$ del resultado de esta proposicion $(100 : 10 :: 7000 : x = 700)$, cuyo quinto es $= \dfrac{700}{5} = 140 =$ la misma cantidad que se descontó.

LECCION 50.

Se llama *regla de compañía* la que enseña á repartir una cantidad entre varios sugetos, de modo que la cuota de cada uno guarde razon constante, con el número que representa la condicion del sugeto, segun su haber, renta, capital, etc. Sus problemas se plantean y resuelven por la siguiente proporcion: *Suma de haberes*: *cantidad que se reparte* : : *el haber de cada sugeto* : *su correspondiente cuota.*

Ejemplos:

1.° *Se han de repartir* 6000 *escudos entre los sugetos* A, B, C, *á proporcion de sus respectivos capitales, que son*. . . . . *¿cuánto corresponde á cada sugeto?*

$$\left\{\begin{array}{lcrl} A & = & 12000 & \text{escudos} \\ B & = & 8000 & » \\ C & = & 4000 & » \end{array}\right\} :$$

Resolucion. La suma de haberes, ó sean capitales de A, B, C, es aquí 24000 escudos; luego la proporcion del planteo y los resultados serán

$$24000 : 6000 : : \left\{\begin{array}{l} 12000 : 3000 = \text{cuota de A}; \\ 8000 : 2000 = \text{cuota de B}; \\ 4000 : 1000 = \text{cuota de C}. \end{array}\right.$$

Suma de cuotas = 6000 = cantidad repartida. Comprobacion.

Este ejemplo ofrece la ventaja de ser la fraccion $\dfrac{6000}{24000} = \frac{1}{4}$; y como esto dice que cada cuota es $\frac{1}{4}$ del haber ó capital respectivo, se han determinado inmediatamente. Pero cuando dicha fraccion sea irreducible, con grandes términos, y los sugetos sean muchos; podrá averiguarse antes el *cuánto* por ciento, y si resulta un número cómodo, preferir la aplicacion de este *cuánto*, al cálculo directo.

Como la suma de haberes en un reparto es una cantidad constante, que divide á cada uno de los productos, formados por la cantidad que se reparte y el haber de cada sugeto ; será de gran recurso una tabla de los nueve productos del divisor constante, segun ya aconsejamos en la Leccion 8.

La regla de compañía se llama *compuesta* cuando para hacer el reparto se ha de atender al tiempo, segun su influencia en las cuotas. La práctica mas comun para eliminar el tiempo, es multiplicar el haber de cada sugeto por el tiempo que á él se refiera, y dejar reducida á unidad comun la diversidad de tiempos. Véase todo esto verificado en el ejemplo siguiente :

2.° *Una cantidad de* 1100 *duros se ha de repartir entre los sócios* A, B, C, *en proporcion al capital de cada sócio y á su tiempo en fondo, segun los adjuntos datos. ¿Cuánto corresponde á cada sócio?*

	CAPITAL DE	TIEMPO.
A =	1200 duros.	6 meses.
B =	800 duros.	8 meses.
C =	400 duros.	10 meses.

Resolucion. Eliminado el tiempo se tienen para los sócios los capitales respectivos 7200 duros ; 6400 duros ; 4000 duros ; que cambiando en simple el problema compuesto que se propone, darán las cuotas por el método del ejemplo 1.° En efecto, la suma de haberes es aquí = 17600 duros, que con la cantidad 1100 duros da la fraccion $\frac{1100}{17600}$ reducible á $\frac{1}{16}$. Luego la cuota de cada asociado se hallará en uso del sencillo cálculo que se ve á continuacion :

Cuota de A = 7200 : 16 = 450 duros.
Cuota de B = 6400 : 16 = 400 duros.
Cuota de C = 4000 : 16 = 250 duros.

Suma de cuotas = 1100 duros = cantidad repartida. Comprobacion.

He aquí otro ejemplo:

3.° A una corporacion de 40 individuos le ocurre un gasto de 29260 reales por la parte que ha tomado en cierta solemnidad, y se ha de satisfacer por todos á proporcion de sus respectivos sueldos, que son:

2 de á 15000	reales	(a), que suman	30000	reales.
4 de á 12000	»	(b).	48000	»
6 de á 10000	»	(c).	60000	»
8 de á 6000	»	(d).	48000	»
20 de á 4000	»	(f).	80000	»
		Suma de haberes :	266000	reales.

Este ejemplo es muy á propósito para la aplicacion del tanto por 100, pues espresa los sueldos por números terminados en ceros; y para hallar las cuotas, bastará quitar dos ceros á cada sueldo y multiplicar lo demas por el tanto que hallemos para el 100.

Buscado en la proporcion 266000 : 29260 : : 100 : t, resulta

$$t = \frac{2926000}{266000} = \frac{1463}{133} = 11\text{; luego las cuotas de los sueldos}$$

(a) (b) . . . etc. serán:

$$11 \times \left\{\begin{array}{r} 150 \\ 120 \\ 100 \\ 60 \\ 40 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{lll} 1650 = \text{cuota de (a) que} & \times\ 2 \text{ da} \ldots & 3300 \text{ rs.} \\ 1320 = \ldots\ \text{(b)} \ » & \times\ 4 \text{ da} \ldots & 5280 \\ 1100 = \ldots\ \text{(c)} \ » & \times\ 6 \text{ da} \ldots & 6600 \\ 660 = \ldots\ \text{(d)} \ » & \times\ 8 \text{ da} \ldots & 5280 \\ 440 = \ldots\ \text{(f)} \ » & \times\ 20 \text{ da} \ldots & 8800 \end{array}\right.$$

Suma de cuotas : 29260 rs.
= cantidad repartida. Comprobacion.

Regla conjunta.

Así se llama *la que enseña á determinar la equivalencia que debe haber entre dos cantidades concretas, por medio de las equivalencias exactas ó aproximadas, que hay entre otras cantidades que se les comparan.* Sus problemas pueden resolverse por sucesivas reglas de tres; pero aquí preferimos el método de las *equivalencias continuas.* Veámoslo aplicado á ejemplos, y de ellos deduciremos regla general para la práctica.

1.° *¿A cuántos metros equivalen* 51 *pies de Búrgos, sabiendo que* 13 *metros equivalen á* 40 *pies de Rey, y que* 6 *pies de Rey equivalen á* 7 *pies de Búrgos?*

Planteo y solucion. 51 pies de Búrgos = x metros;
13 metros = 40 pies de Rey;
6 pies de Rey = 7 pies de Búrgos.

Igualando ahora el producto de los primeros miembros con el de los segundos, se tendrá $51\times13\times6 = x\times40\times7$; de donde sale, $x = \frac{51\times13\times6}{40\times7} = \frac{1989}{140}$; ó $x = 14,2$. Luego 51 pies de Búrgos equivalen á 14,2 metros.

2.° *¿A cuántos pesos equivalen* 1280 *francos, sabiendo que* 17 *pesos valen* 256 *reales, y que* 19 *reales valen* 5 *francos?*

Planteo y solucion. 1280 francos = x pesos;
17 pesos = 256 reales;
19 reales = 5 francos.

$1280\times17\times19 = x\times256\times5$, da $x = \frac{1280\times17\times19}{256\times5}$

$$= \frac{1280 \times 17 \times 19}{1280} = 17 \times 19 = 323.$$ Luego los 1280 francos valen 323 pesos.

La inspeccion de estos dos ejemplos basta para comprender que la regla de su planteo, se reduce á *escribir las igualdades de modo que el segundo miembro de cada una, sea de la misma especie que el primero de la igualdad siguiente, hasta llegar á un segundo miembro de la misma especie que el miembro inicial. Entonces iguálese el producto de los coeficientes de los primeros miembros, con el producto de la incógnita y coeficientes de los segundos miembros, y se tendrá una ecuacion determinada de primer grado, cuya incógnita despejada dará la equivalencia pedida.*

LECCION 51.

Se llaman *problemas de aligacion* aquellos en que por la mezcla de varios simples, se quiere determinar el valor de la unidad del compuesto; ó por el valor que se da para esta unidad, se ha de determinar la razon constante en que deben tomarse las cantidades de los simples para formar el compuesto. En el primer caso los problemas se llaman de *aligacion media*, y en el segundo de *aligacion alternada*.

En estos problemas debe atenderse á tres cosas, y son: á la cantidad de cada simple; á su cualidad ó estima, que llamamos valor de la unidad del simple, conservando en la palabra *valor* el significado que le dimos al tratar de las cantidades concretas en la Leccion 22; y por fin, á la condicion indispensable de que los simples que van á mezclarse, no ejerzan entre sí ninguna accion química.

Esto supuesto, si espresamos por C, C', las cantidades de dos simples; por V, V', sus respectivos valores; y por V'' el valor de la unidad de la mezcla, tendremos en la fórmula $\frac{CV + C'V'}{C + C'} = V''$, la regla exacta para resolver los problemas de aligacion media. Porque esta fórmula, traducida al lenguaje vulgar, nos dice: *Multiplíquese la cantidad de cada simple por el valor de su unidad, y la suma de los productos pártase por la suma de las cantidades de los simples; el cuociente deberá ser el valor de la unidad del compuesto.*

Ejemplos:

1.° *Se han mezclado 5 fanegas de trigo de á 60 reales fanega, con 7 fanegas de trigo de á 48 reales fanega; ¿cuál será el justo precio de la fanega mezcla?*

Resolucion.	Divisor.
60 rs. × 5 = . . 300 rs.	12 = suma de fanegas.
48 rs. × 7 = . . 336 rs.	
Suma de productos . . 636 rs.	53 rs. = cuociente = precio medio.

Luego el justo precio de la fanega del trigo mezcla debe ser 53 reales.

2.° *Para componer 5 azumbres de alcohol, se han mezclado 3 de á 20 grados, con 2 de á 30 grados. ¿Qué graduacion tendrá el alcohol compuesto?*

Resolucion.	20 grados × 3 = 60 gs.	5
	30 » × 2 = 60 »	24 grados.
	Suma de productos . . . 120 gs.	

Luego el alcohol mezcla es de á 24 grados.

3.° *Con 5 partes oro de á 18 quilates, y 3 partes oro de á 22, se ha preparado un riel para la elaboracion de joyas. ¿De qué ley es el oro del riel?*

		Quilat.	
Resolucion.	18 quilates × 5 =	90	8
	22 » × 3 =	66	19 quilates, 16 granos.
Suma de productos . . .		156	
		4	

Luego el oro del riel es de á 19 quilates y 16 granos (*).

Aligacion alternada.

Para resolver sus problemas adoptamos la siguiente regla : *Del simple que tenga mayor valor, tómense tantas partes cuantas unidades esceda el valor medio al menor; y del simple que tenga menor valor, tómense tantas partes cuantas unidades esceda el valor mayor al medio.*

Ejemplos :

1.° *Con café de á* 16 *reales libra, y café de* 10 *reales libra, se quiere formar una mezcla que pueda venderse á* 12 *reales libra. ¿Cuánto se ha de poner de cada uno en la mezcla para el efecto que se desea?*

Resolucion.	Comprobacion.		
12 { De á 16 reales tomo 2 partes.	16 reales × 2 =	32 rs.	
De á 10 reales tomo 4 partes.	10 reales × 4 =	40 »	6
		72 »	12 rs.

Luego deben mezclarse estos simples en la razon de 1 : 2.

(*) Llaman *ley* del oro al cuánto de su pureza ; oro de á 24 *quilates*, es el oro puro ; un quilate es la *veinticuatroava parte* de la masa total del oro que se examina ; y cada quilate se subdivide en 32 *granos* para apreciar la ley del oro con *liga*. Decir, por ejemplo, oro de á 20 quilates y 16 granos, es distinguir en la masa 3 *partes y media* de liga ó metal estraño, con 20 *partes y media* de oro puro. La plata pura es lo mismo que plata de á 12 *dineros de ley*; un dinero es la *doceava parte* de la masa total de la plata que se examina ; y cada dinero se subdivide en 24 *granos* para apreciar la ley de la plata con liga. Decir, por ejemplo, plata de á 8 dineros y 8 granos, es distinguir en la masa 3 *partes y dos tercios* de liga, con 8 *y un tercio partes* de plata pura.

2.° *Con legía de á 20 grados y legía de á 12 grados, se ha de preparar legía de á 14 grados para cierto tinte. ¿En qué razon deben mezclarse estas dos legías para que resulte lo que se quiere?*

Resolucion.

$$14\begin{cases}\text{De á 20 grados tomo 2 part.}\\ \text{De á 12 grados tomo 6 part.}\end{cases}$$

Comprobacion.

$$\begin{array}{rr|l}
20\text{ gr.} \times 2 = & 40\text{ gr.} & \\
12\text{ gr.} \times 6 = & 72\text{ gr.} & 8 \\
\hline
 & 112 & 14\text{ gr.} \\
 & 32 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Luego los simples deben mezclarse en la razon de 1 : 3.

3.° *Para fabricar cierta alhaja se necesita plata, cuya ley sea de á 9 dineros y 12 granos; el artífice la ha de formar con plata de á 11 dineros y plata de á 8 dineros. ¿Cuánto debe fundir de cada una para que la fusion sea de la ley pedida?*

Resolucion.

$$9\tfrac{1}{2}\begin{cases}\text{De á 11 din. tomo 1 y } \tfrac{1}{2} \text{ part.}\\ \text{De á 8 din. tomo 1 y } \tfrac{1}{2} \text{ part.}\end{cases}$$

Comprobacion.

$$\begin{array}{rr|l}
11\text{ din.} \times 1 = & 11\text{ din.} & \\
8\text{ din.} \times 1 = & 8\ \text{»} & 2 \\
\hline
 & 19\text{ din.} & 9\tfrac{1}{2}\text{ din.}
\end{array}$$

Luego la fusion debe hacerse por partes iguales.

En cada ejemplo de los seis resueltos hemos considerado solamente dos simples, porque para un compuesto de valor medio no se necesitan mas; pero las reglas que hemos dado sirven para casos de tres y mas simples. He aquí ejemplos de esta condicion relativos á aligacion media.

1.° *Habiendo medido por cuatro veces una distancia, no se han obtenido siquiera dos resultados idénticos; se requiere pues un promedio, que se pueda aceptar como resultado exacto. ¿Cómo se hallará?*

Resolucion.

MEDICIONES.	PIES.	PULG.
1.ª	1423 . .	8
2.ª	1425 . .	0
3.ª	1422 . .	9
4.ª	1424 . .	7
Suma de productos	5696 . .	0

El divisor debe ser aquí = 4 = suma de las mediciones, como se ve | 4

1424 pies.

Luego la distancia que puede adoptarse como tipo es la de 1424 pies.

2.º *En una obra trabajan* 50 *obreros, de los cuales* 10 *ganan* 14 *reales de jornal;* 20 *ganan* 8 *reales, y otros* 20 *ganan de jornal* 6,75 *cént. reales. Se pide un jornal medio que por sí solo dé en el presupuesto el mismo resultado que los diversos jornales verdaderos.*

Resolucion.

14 reales	× 10 =	140 reales.
8 reales	× 20 =	160 »
6,75 cént. rs.	× 20 =	135 »
Suma de productos . .		435 reales.

Divisor.

| 50

8,7 rs. = cuoc.

Luego el jornal medio es de 8,7 reales.

Estos y otros problemas de su misma índole, que en el fondo pertenecen á los de aligacion media, se llaman *promedios*; y basta lo dicho para conocerlos y saberlos resolver.

APUNTES
DE
PRINCIPIOS DE GEOMETRIA
RELATIVOS A LAS LECCIONES DEL PROGRAMA.

LECCION 52.

GEOMETRIA es parte de las Matemáticas, que enseña á conocer las propiedades de la estension limitada y por consiguiente figurada.

Todo cuerpo se considera estenso en tres sentidos diferentes, que se llaman *dimensiones*, las cuales se distinguen entre sí con los nombres de *longitud*, *latitud* y *profundidad*: esta suele llamarse tambien *altura*, *grueso* ó *espesor*.

A la estension en sus tres dimensiones se la llama *cuerpo geométrico*, y tambien *sólido geométrico*; y á la medida de esta estension se la da el nombre de *volúmen*.

Superficie es la estension en dos dimensiones, y su medida se llama *área*.

Línea es la estension en una sola dimension, y su medida se llama *longitud*.

Punto es el estremo ó término de la línea; y aunque su estension es cero, su importancia es grande, pues se considera el punto como el elemento generador de la estension en todas sus formas.

La Geometría estudia las líneas, las superficies y los cuerpos; pero todo se comprende en solo dos *tratados* que se llaman *Geometría plana* y *Geometría del espacio*.

La línea se distingue en *recta* y *curva*: se llama recta, toda línea que imita la forma de un hilo tirante; y por el contrario se llama curva la línea que no es recta ni se compone de rectas. La línea compuesta de rectas se llama *línea quebrada*, y la que en parte es recta y en parte curva se llama *línea mixta*.

Las superficies se distinguen entre sí como las líneas: se llama *superficie plana* ó solamente *plano*, aquella con quien coincide una línea recta que pase por dos puntos cualesquiera de la superficie; y se llama *superficie curva* la que ni es plana ni se compone de planos. La superficie compuesta de planos se llama *superficie quebrada*, y la que en parte es plana y en parte es curva se llama *superficie mixta*.

La línea curva se subdivide en *curva plana* y *curva no plana*: la curva plana se puede considerar yacente por todos sus puntos en un plano; pero no así la curva no plana.

De las infinitas curvas que pueden imaginarse, solo se estudia una en los principios de la Geometría, y es la *circunferencia* de círculo.

Así se llama una línea curva plana, cerrada, cuyos puntos equidistan de otro situado en el plano de la curva, y llamado centro de ella. No debe confundirse la circunferencia con el *círculo*, pues este es superficie y aquella es línea.

La línea recta y la circunferencia constituyen las dos ideas cardinales de la Geometría elemental.

De las definiciones que hemos dado relativas á estas líneas, surgen las proposiciones siguientes:

1.ª *La línea recta es la mas corta que puede imaginarse tirada de un punto á otro.*

2.ª *La medida de la distancia entre dos puntos se aprecia por la línea recta, tirada del uno al otro punto.*

3.ª *Por un punto pueden pasar cuantas rectas se quieran sin confundirse.*

4.ª *Si dos rectas tienen dos puntos comunes, deberán confundirse en una sola recta.*

Se llama *rádio* de la circunferencia toda recta que desde el centro de la curva se tira á uno de sus puntos. *Cuerda* de la circunferencia es toda recta tirada de un punto de esta curva á otro de la misma.

Diámetro de la circunferencia es toda cuerda que pasa por el centro de la curva.

5.ª *Todos los rádios de una circunferencia son iguales, y tambien todos los diámetros.*

Se llama *figura* la espresion gráfica ó dibujo de la línea, de la superficie, ó del cuerpo geométrico.

Diremos que son iguales dos figuras cuando, imaginándolas superpuestas convenientemente, deben confundirse en una sola; pero se llamarán equivalentes cuando, siendo de igual naturaleza, tengan la misma estension: v. gr., dos líneas de igual longitud; dos superficies de igual área; dos cuerpos de igual volúmen. De la igualdad de dos figuras siempre se infiere la equivalencia; pero de la equivalencia solo se infiere la igualdad en ciertos casos.

LECCION 53.

Se llama *ángulo* la figura que resulta formada por dos rectas que terminan en un mismo punto. Este punto se llama *vértice* del ángulo, y las rectas *lados*.

Para leer los ángulos espresados por letras, nómbrese por segunda la letra del vértice.

Dos ángulos se llaman *contiguos* cuando el uno resulta de prolongar un lado del otro al través del vértice; y se llaman *opuestos por el vértice* cuando el uno resulta de prolongar los lados del otro á través del vértice. Los ángulos contiguos iguales se llaman *rectos*, los desiguales *oblícuos*. Una recta es *perpendicular* á otra cuando sean iguales los ángulos contiguos que con ella forme; pero si son desiguales estos ángulos contiguos, serán *oblícuas* dichas rectas. El ángulo oblícuo se subdivide en *agudo* y *obtuso*, segun sea menor ó mayor que el ángulo recto. Un ángulo es *complemento* de otro cuando la suma algébrica de ambos equivale á un ángulo recto; estos dos ángulos se llaman *complementarios*. Pero se denominan *suplementarios* dos ángulos, cuando la suma de ambos equivale á dos ángulos rectos.

El valor de un ángulo consiste en el desvío ó separacion de sus lados; y se indica por un arco de circunferencia trazado desde el vértice del ángulo como centro, y con un rádio cualquiera : la parte de este arco comprendida entre los lados del ángulo, es la medida del ángulo y se llama *arco correspondiente al ángulo.* La medida del ángulo recto es *un cuadrante*; es decir, la cuarta parte de la circunferencia.

Teoremas de esta Leccion.

1.° *Si dos rectas que se cortan coinciden con otras dos, las cuatro se cortarán en un mismo punto.*

2.° *Por un punto de una recta no puede tirarse á esta mas de una perpendicular.*

3.° *Todos los ángulos rectos son iguales.*

4.° *La suma de dos ángulos contiguos vale dos ángulos rectos.*

5.° *Si dos rectas forman dos ángulos suplementarios, dispuestos como los contiguos respecto de su lado comun, los otros dos lados serán una sola recta.*

Corolarios.

1.° *Si uno de dos ángulos contiguos es recto lo será el otro.*

2.° *En las rectas la perpendicularidad es mútua.*

3.° *La suma de ángulos á un lado de una recta con vértice comun en ella, vale dos ángulos rectos.*

4.° *La suma de ángulos consecutivos al rededor de un vértice comun, vale cuatro rectos.*

5.° *Dos ángulos que tengan el mismo suplemento son iguales, y tambien lo son cuando tienen el mismo complemento; los de complemento opuesto son suplementarios.*

6.° *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

7.° *Desde un punto esterior no se puede tirar á una recta mas de una perpendicular.*

Dos rectas cortadas por otra que se llama *secante* de aquellas dos, pueden formar ocho ángulos, cuatro esternos y cuatro internos.

Estos ángulos, comparados de dos en dos y referidos á la secante, toman los nombres de alternos esternos; alternos internos; correspondientes; esternos á un mismo lado de la secante, é internos á á un mismo lado de la secante.

Esta nomenclatura es de absoluta necesidad para la teoría de las rectas paralelas.

Angulos alternos, son dos esternos ó internos ambos, situados á diferente lado de la secante y uno en cada recta.

Angulos correspondientes, son dos ángulos, esterno el uno é interno el otro, situados á un mismo lado de la secante y uno en cada recta.

Dos rectas trazadas en un plano ofrecen uno de dos casos: ó se encuentran formando uno ó mas ángulos como hemos visto, y se llaman *concurrentes*, ó no se encuentran por mas que se prolonguen y entonces se llaman *paralelas*.

Para establecer la teoría de las paralelas, sirven de *base* las proposiciones siguientes:

1.ª *Dos rectas perpendiculares á una tercera recta son paralelas.*

2.ª *Por un punto dado fuera de una recta, no se puede tirar á esta mas de una paralela.*

La 1.ª proposicion se demuestra, y es el *Teorema fundamental de las paralelas*; la 2.ª se admite como evidente, y se llama *El postulado de Euclides.*

Teoremas que pueden demostrarse como corolarios de las dos proposiciones que hemos establecido como base.

3.º *Si dos rectas cortadas por otra dan ángulos alternos iguales, serán paralelas.*

4.º *Si dos paralelas se cortan por una tercera recta, resultarán iguales los ángulos alternos.* Luego tambien serán iguales los correspondientes, y serán suplementarios los internos ó esternos á un mismo lado de la secante.

5.° *La perpendicular á una de dos paralelas, debe ser precisamente perpendicular á la otra.*

6.° *La recta paralela á una de varias rectas, que son paralelas entre sí, deberá ser paralela á cada una de las demas.*

7.° *Dos ángulos de lados respectivamente paralelos, serán iguales ó suplementarios, segun fueren ó no de una misma especie.* Lo mismo se demuestra de los ángulos que tengan sus lados respectivamente perpendiculares.

LECCION 54.

Se llama *polígono* la parte de plano terminada por rectas. Estas se llaman *lados* del polígono. La línea quebrada que resulta de todos los lados del polígono se llama *contorno*; y el valor numérico, ó medida de dicho contorno, se llama *perímetro*. Dos polígonos de equivalente contorno se llaman *isoperímetros*.

Un polígono se llama *convexo* cuando su contorno solo puede ser cortado en dos puntos por una recta; pero si puede ser cortado por ella en mas de dos puntos se llama *no convexo*.

El polígono convexo consta de tantos ángulos como lados; estos polígonos reciben su nombre por el número de sus ángulos, y se llaman *triángulo*, *pentágono*, *exágono*, *eptágono*, etc., segun consten de tres, cinco, seis, siete, etc., ángulos. El polígono de cuatro lados se llama *cuadrilátero*; pero tambien se puede llamar *tetrágono* cuando es convexo, porque el cuadrilátero convexo no puede tener mas de cuatro ángulos.

Son *ángulos propios* del polígono los formados por los lados en su concurso de dos en dos; y son *ángulos accesorios* los demas que pueden ocurrir por la prolongacion de lados, inflexion de contorno, trazado de rectas distintas de los lados, etc. El ángulo cuyo vértice penetra en la superficie del polígono se llama *ángulo entrante*, y quita al polígono la cualidad de convexo. En cada lado del polígono convexo se cuentan dos ángulos propios, cuyos vértices son los estremos del lado: estos ángulos se llaman *adyacentes* al lado, y no deben confundirse con los que comunmente llaman adyacentes, y que nosotros hemos llamado *contiguos* en la Leccion 53.

Para justificar nuestra distincion, nos limitamos á señalar entre unos y otros tres diferencias muy notables: 1.ª Los ángulos contiguos tienen vértice comun; los adyacentes lo tienen distinto. 2.ª Para formar dos ángulos contiguos bastan dos rectas; para dos adyacentes se necesitan tres rectas. 3.ª La suma de dos ángulos contiguos vale siempre dos ángulos rectos; la suma de dos ángulos adyacentes varía desde cero hasta cuatro rectos. Cada ángulo propio del polígono tiene por suplemento á su contiguo *ángulo esterno*, que se forma prolongando á través del vértice un lado del polígono.

La parte de plano comprendida dentro del contorno se llama *superficie* del polígono. *Diagonal* de un polígono es toda recta tirada desde un vértice á otro no inmediato.

LECCION 55.

Se llama *triángulo* á la parte de plano limitada por tres rectas: estas son los *lados* del triángulo; están dispuestos de modo que á cada lado se opone un ángulo, y se le adhieren otros dos. Aunque el triángulo es el mas simple de los polígonos, es sin embargo el polígono principal en razon á su trascendencia, pues todo polígono se puede espresar por dos ó mas triángulos, y hasta por un solo triángulo que le sea equivalente.

El triángulo, con relacion á sus lados, se llama *equilátero*, *isósceles* y *escaleno*, segun sean iguales sus tres lados, ó dos, ó todos desiguales. Y con relacion á sus ángulos se denomina *triángulo rectángulo* si tiene un ángulo recto, ó *triángulo oblicuángulo* si ninguno de sus ángulos es recto: si el triángulo oblicuángulo tiene ángulo obtuso se llama *triángulo obtusángulo*; pero si los tres ángulos son agudos se llama *triángulo acutángulo*. El triángulo rectángulo nunca es equilátero; su lado mayor se llama *hipotenusa*, y los otros dos lados *catetos*.

Altura de un triángulo es la perpendicular á uno de sus lados tirada desde el vértice opuesto : el lado á que se tira la perpendicular se llama entonces *base* del triángulo, sin contar la prolongacion que á veces se requiere para que lo encuentre la altura.

Los principales teoremas relativos al triángulo, son :

1.° *Un lado del triángulo es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.*

2.° *La suma de los tres ángulos de un triángulo equivale á la de dos ángulos rectos.*

De estos dos teoremas surgen los siguientes corolarios :

1.° *En todo triángulo hay necesariamente dos ángulos agudos; luego tomando por base el lado adyacente á estos ángulos, caerá la altura dentro del triángulo.*

2.° *Un ángulo esterno de un triángulo es igual á la suma de los dos ángulos internos, no contiguos del esterno.*

3.° *Conocido un solo ángulo en un triángulo, y la diferencia de los otros dos ángulos, se pueden conocer cada uno de los tres.*

4.° *En todo triángulo á iguales ángulos se oponen iguales lados, y á mayor ángulo se opone mayor lado, y recíprocamente.* Luego el triángulo equilátero es tambien equiángulo.

Igualdad de triángulos.

Dos triángulos son iguales en los casos siguientes :

1.° Cuando tienen dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo comprendido.

2.° Cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales, é igual el lado comprendido.

3.° Cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.

Ademas hay para el triángulo rectángulo otro caso que se enuncia así : *Dos triángulos rectángulos son iguales cuando la hipotenusa es igual en ambos, y tambien es igual uno de los catetos.* Sin embargo, este no es un caso propio y esclusivo de los triángulos rectángulos, sino general á todos los demas triángulos. Ved aquí su verdadero enunciado:

4.° Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo opuesto al mayor de ambos lados.

Otras proposiciones.

1.ª Si una recta es perpendicular y *bisectriz* (*) de otra, todos los puntos de la bisectriz equidistarán de los estremos de la bisecada.

2.ª La bisectriz de un ángulo tiene sus puntos equidistantes de los dos lados del ángulo. Y las perpendiculares bisectrices de rectas que formen ángulo, deben encontrarse.

3.ª Si desde un punto esterior se tiran á una recta una perpendicular y varias oblícuas, la perpendicular será la mas corta de las rectas tiradas, las oblícuas equidistantes del pie de la perpendicular serán iguales, y la oblícua que mas diste será la recta mayor.

Las proposiciones recíprocas de estas, son tambien verdaderas.

Corolarios.

1.° La distancia desde un punto á una recta, se debe medir por la perpendicular tirada á la recta desde el punto.

2.° Desde un punto esterior no se pueden tirar á una recta tres rectas iguales.

LECCION 56.

El polígono mas sencillo despues del triángulo es el cuadrilátero; desde uno de sus vértices no puede tirarse mas de una diagonal: esta lo divide en dos triángulos, y evidencia ser la suma de sus ángulos propios igual á cuatro ángulos rectos.

El cuadrilátero convexo ofrece una de estas tres formas: ó ningun lado es paralelo á otro, y se llama *trapezoyde*; ó es un lado paralelo á otro, y se llama *trapecio*; ó los lados son paralelos dos á dos, y

(*) Recta bisectriz, quiere decir: recta que corta ó divide en dos mitades.

se llama *paralelógramo*. Si los ángulos de este son iguales se llamará *rectángulo*; si son iguales sus lados se llamará *rombo*; si los lados del paralelógramo son iguales, y tambien los ángulos, resultará el *cuadrado*.

Todo paralelógramo es trapecio; pero no todo trapecio será paralelógramo. Todo cuadrado es rombo; pero no todo rombo será cuadrado. Todo rectángulo es paralelógramo; pero no todo paralelógramo será rectángulo. El paralelógramo cuyos ángulos son oblicuos, y sus lados no son iguales, se llama *romboyde*. Los lados paralelos del trapecio se llaman *bases*, y tambien los lados opuestos del paralelógramo. En ambos se llama *altura* la perpendicular tirada desde una base á la otra: el trapecio de bases iguales es paralelógramo.

Considerado el paralelógramo como dos paralelas cortadas por dos secantes, se infiere inmediatamente que *los dos ángulos adyacentes á un lado son suplementarios, y que los ángulos diagonalmente opuestos son iguales*. Demuéstranse ademas las proposiciones siguientes:

1.ª *La diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos iguales.*

2.ª *En todo paralelógramo deben ser iguales los lados opuestos; y recíprocamente, si son iguales los lados opuestos de un cuadrilátero, deberá ser paralelógramo.*

3.ª *Dos paralelas equidistan en todos sus puntos.*

4.ª *Dos paralelógramos serán iguales cuando tengan un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales.* Luego tambien serán iguales dos rectángulos que tengan respectivamente iguales sus bases y alturas.

Otras proposiciones de significado mas estenso.

5.ª La suma de ángulos propios del polígono convexo, es igual á tantas veces dos rectos como lados, menos dos, tenga el polígono: esta proposicion se formula así, $S = 2R(n-2)$.

6.ª Si los lados del polígono convexo se prolongan á través del vértice todos en un mismo sentido, la suma de los ángulos esternos que resulten, valdrá siempre cuatro ángulos rectos.

7.ª Dos polígonos cualesquiera serán iguales, si ambos se componen de un mismo número de triángulos, respectivamente iguales, y de un mismo modo colocados en los dos polígonos. Este teorema y su *recíproco*, reasúmen toda la teoría de igualdad de polígonos.

En dos figuras iguales se llaman *partes homólogas* aquellas que, dos á dos, se coadunan, cuando las figuras se confunden por la conveniente superposicion.

Los polígonos convexos se distinguen principalmente en *regulares* ó *irregulares*: es polígono *regular*, el que tiene todos sus ángulos iguales, y tambien todos sus lados. Una de estas condiciones precisa la otra en el triángulo; pero ya no en los demas polígonos. En efecto, la igualdad de ángulos en el rectángulo no precisa igualdad de lados; y la igualdad de lados en el rombo no precisa igualdad de ángulos. De los triángulos solo es regular el equilátero, y de los cuadriláteros solo es regular el cuadrado.

LECCION 57.

Relaciones de posicion entre la recta, la circunferencia y el ángulo.

La línea recta *no puede tener jamas tres puntos comunes con la circunferencia*: ó no tiene ninguno y se llama *distante*; ó tiene un solo punto en la curva y se llama *tangente*; ó tiene dos y se llama *secante*. La distancia entre una recta y una circunferencia, *se aprecia por la perpendicular á la recta desde el centro de la curva, menos el rádio de esta.* Para que una recta sea tangente de la circunferencia, *basta que sea perpendicular al estremo de un rádio de la curva*: la proposicion recíproca de esta es tambien verdadera.

Un diámetro es mayor que todas las demas cuerdas de la misma circunferencia; de estas es mayor la cuerda que mas se acerca al centro, é iguales las equidistantes del centro. En la circunferencia íntegra, cada cuerda pertenece á dos arcos desiguales, escepto el diámetro que es cuerda de los dos arcos iguales llamados *semicircunferencias*. Al comparar los arcos de una circunferencia con sus cuerdas, se supone cada cuerda referida al arco menor de los dos que la subtenden: con este supuesto hay entre los arcos y sus cuerdas, la misma reciprocidad que entre ángulos y lados de un mismo triángulo. Las circunferencias de igual rádio son iguales, y por consiguiente los círculos limitados por ellas. *Tres puntos que no estén en línea recta, fijan la posicion y magnitud de una circunferencia.*

Uno de los principales usos que presta la circunferencia á la Geometría es la medicion de los ángulos. No basta saber que la medida de un ángulo es su arco correspondiente, pues este arco trazado con cualquier rádio daria en su longitud una medida tan variable como el rádio; lo que debe saberse desde ahora, para no olvidarlo jamas, es que *la medida de un ángulo es el valor gradual de su arco correspondiente.*

Para entender bien esta proposicion, considérese un cuadrante de circunferencia dividido en 90 partes iguales que se llaman *grados*; si el arco correspondiente á un ángulo, y del mismo rádio que el supuesto cuadrante, es igual, por ejemplo, á 36 partes del cuadrante, diremos que el ángulo medido es de 36°, que se lee *treinta y seis grados*. Como no siempre la longitud del arco correspondiente á un ángulo, equivaldrá á un número justo de grados, se considera cada grado del cuadrante dividido en 60 partes iguales que se llaman *minutos*, y se escriben así $60'$. Tambien ocurre que ni en grados y minutos pueda apreciarse exactamente la longitud del arco medidor de un ángulo, y se necesita entonces espresar en número entero la fraccion del minuto, como hemos espresado la fraccion del grado, para lo cual se considera subdividido cada minuto del grado en 60 partes iguales que se llaman *segundos*, y se escriben así $60''$. De modo que al decirnos, v. gr., que un ángulo vale 30°, $40'$, $20''$, debemos entender que la longitud de su arco correspondiente, comparada con la de un cuadrante del mismo rádio, equivale á $\frac{1}{3}$ de dicho cuadrante $+$ $\frac{2}{3}$ de uno de sus grados $+$ $\frac{1}{3}$ de uno de sus minutos. No de otro modo sabemos que el ángulo del triángulo equilátero vale 60°; que el ángulo del cuadrado vale 90°; que el ángulo del pentágono regular vale 108°; que el ángulo del exágono regular vale 120°; etc. Consérvense en la memoria estas relaciones.

Trazado un ángulo en el plano de una circunferencia, ofrece cuatro relaciones de posicion, á saber: Tener su vértice en el centro de la curva; tener su vértice en la circunferencia; tenerlo entre centro y circunferencia, y tenerlo fuera del círculo. Limitándonos al primero y segundo casos, por su frecuente uso, diremos que *se llama ángulo central el formado por dos rectas que salen del centro como dos rádios, é interceptan un arco de la curva; el valor gradual de este arco es la medida del ángulo central. Y se llama ángulo inscrito el que tiene su vértice en la circunferencia, y sus lados son cuerdas de la misma: este ángulo tiene por medida la mitad del arco que abrazan sus lados.* Luego si sobre un mismo arco insisten un ángulo central y otro inscrito, este será mitad del ángulo central.

LECCION 58.

Relaciones de posicion entre el polígono y la circunferencia.

Cuando un polígono está dentro del círculo, de modo que todos sus vértices coinciden en la circunferencia, los lados son precisamente cuerdas de la curva, y se dice entonces que *el polígono está inscrito en la circunferencia*, ó que *la circunferencia está circunscrita al polígono*: ambas frases significan la misma idea. Pero si por el contrario, el círculo está dentro del polígono, de modo que todos los lados de este sean tangentes de la circunferencia, entonces se dice que *el polígono está circunscrito á la circunferencia*, ó que *la circunferencia está inscrita en el polígono.*

A todo polígono regular se le puede inscribir una circunferencia y circunscribir otra: como las dos tendrán un mismo centro, que lo será tambien del polígono, se llamarán *circunferencias concéntricas*;

y al espacio que encierra entre las dos circunferencias al contorno del polígono regular, se le da el nombre de *corona* ó *anillo*. Las rectas que desde el centro del polígono regular se tiran á los vértices, se llaman *rádios del polígono*; y las que del mismo punto se tiran perpendiculares á los lados, se llaman *apotemas del polígono*. Cada rádio biseca un ángulo del contorno, y cada apotema biseca un lado; dos rádios consecutivos forman un ángulo al centro, que es suplemento del ángulo al contorno, y lo mismo hacen dos apotemas consecutivos. Espresando por A un ángulo propio del polígono, por C un ángulo al centro, por R un ángulo recto, y por n el número de lados del polígono, se tienen las fórmulas,

$A = 2R\left(\frac{n-2}{n}\right)$; $C = \frac{4R}{n}$: la primera evidencia que el ángulo del polígono regular crece indefinidamente con el número de lados, y sin embargo jamas podrá valer dos rectos; y la suma de ambas fórmulas prueba la cualidad de suplementarios en A y C.

De los polígonos irregulares solo es inscriptible y circunscriptible el triángulo. De los cuadriláteros será inscriptible el que tenga suplementarios los ángulos diagonalmente opuestos; y será circunscriptible el que tenga la suma de dos lados opuestos igual á la suma de los otros dos: todo rombo es circunscriptible, todo rectángulo es inscriptible.

Para circunscribir una circunferencia á un triángulo, basta tirar las perpendiculares bisectrices de dos lados, y haciendo centro en la interseccion de estas rectas, trazar la curva con un rádio igual á la distancia que haya desde dicho punto á un vértice: si el triángulo fuere rectángulo tómese por diámetro la hipotenusa. Para inscribir una circunferencia en un triángulo, biséquense dos ángulos; y desde el punto en que se corten las bisectrices, que será el centro de la circunferencia que se quiere trazar, tírese una perpendicular á un lado del triángulo, y ella será el rádio de la circunferencia tangente á los tres lados.

LECCION 59.

Líneas proporcionales.

Son aquellas que comparadas por su longitud, ofrecen de dos en dos una razon constante.

Teoremas.

1.° *Si en una recta se señalan partes iguales, y por los puntos de division se tiran rectas paralelas que corten á otra recta, esta quedará dividida en tantas partes iguales, cuantas fueron las señaladas en la primera recta.*

2.° *La recta que paralela á un lado de triángulo, corta á los otros dos lados, los deja divididos en partes proporcionales.*

3.° *La bisectriz de un ángulo de triángulo, divide el lado opuesto en partes proporcionales á los lados del ángulo dividido.* Las proposiciones recíprocas de los teoremas 2.° y 3.° son tambien verdaderas.

Semejanza de triángulos.

Dos triángulos semejantes tienen necesariamente los ángulos respectivamente iguales, y los lados proporcionales. Para un triángulo cualquiera hay una infinidad de otros que le son semejantes. En efecto, cortando un triángulo por una recta paralela á uno de sus lados, resultará un triángulo parcial semejante al total; y como la seccion puede trazarse por cualquier punto del contorno, y hay infinitos puntos, resulta probado el enunciado.

Como *en los triángulos la igualdad respectiva de ángulos, precisa proporcionalidad de lados, y recíprocamente*; sucede que la semejanza de estos polígonos puede inferirse de solo ángulos, ó de solo lados, ó de dos lados y un ángulo. Y en efecto, *si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales serán semejantes*, pues tendrán tambien igual el tercer ángulo.

Si dos triángulos tienen los lados proporcionales serán semejantes, pues deberán tener respectivamente iguales los ángulos. *Tambien* *serán semejantes cuando tengan dos lados proporcionales, é igual el ángulo comprendido, ó igual el ángulo opuesto al mayor de los dos lados.* Estos dos teoremas son análogos del 1.° y 4.° casos de igualdad de triángulos. Por último, puede inferirse la semejanza de dos triángulos, por la posicion de los lados del uno respecto á los lados del otro: *lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, dan triángulos semejantes.*

Polígonos.

La semejanza de estos es una consecuencia inmediata de la semejanza de triángulos: *basta que dos polígonos estén formados por un mismo número de triángulos respectivamente semejantes, y colocados del mismo modo en ambos polígonos, para que estos sean semejantes.* El teorema recíproco de este tambien es verdadero.

Dos paralelógramos serán semejantes si tienen igual un ángulo formado por lados proporcionales; y para ser semejantes dos rectángulos, basta que la razon de sus bases sea igual á la razon de sus alturas.

Todos los polígonos regulares de un mismo nombre son semejantes: todos los triángulos equiláteros; todos los cuadrados; todos los pentágonos; todos los exágonos; etc. Y sobre todos ellos, como límites verdaderos de los polígonos regulares, *son semejantes los círculos.* Estos tienen la admirable propiedad de guardar una razon constante entre la circunferencia y su diámetro, de modo que el cuociente que resulta de partir la circunferencia de un círculo por su diámetro, ese mismo cuociente resultará de partir la circunferencia de otro círculo cualquiera por su diámetro.

Este cuociente se formula así, $\pi = 3,141592653589\ldots$ cantidad irracional, que puede aproximarse hasta el órden decimal que se quiera; pero que para nuestros usos triviales la reducimos á $\pi = 3,1416$: espresion fácil de retener en la memoria, y dada á conocer desde la Leccion 6 de estos Apuntes. Allí insertamos una tabla de los *nueve* productos de π (salvo la coma que se omitió de intento), y esa tabla puede ser ahora de grande utilidad. Quiérase, por ejemplo, determinar la longitud de una circunferencia de 15 metros rádio; y acudiendo á la fórmula $C = 2\,r\,\pi$, que espresa esta longitud, multiplicaremos por 30 el valor $\pi = 3{,}1416$; ó por 3 el 31,416; y aquella tabla nos dará calculado el producto en el número 94,248 metros lineales. En efecto, el valor π nos dice que la longitud de una circunferencia, pasa de 3 diámetros y no llega á $3 + \frac{1}{5}$ diámetros: aquí los 3 diámetros serian 90 metros; los 3 diámetros $+ \frac{1}{5}$ serian 96 metros, y el valor 94,248 hallado confirma esta verdad. Del mismo modo se hallará por medio de aquella tabla, la longitud de otra circunferencia cualquiera.

LECCION 60.

Resolucion gráfica de problemas.

La doctrina espuesta en las ocho Lecciones que preceden, apoya y demuestra la resolucion de los siguientes problemas:

Tirar perpendiculares á rectas dadas.

Formar ángulos iguales á otros dados, ó de condicion determinada.

Trazar rectas paralelas á otras rectas.

Construir triángulos iguales ó semejantes á triángulos dados.

Idem polígonos.

Inscribir en una circunferencia dada el polígono regular que se quiera.

Inscribir ó circunscribir á un polígono regular una circunferencia.

Hallar el centro de un arco de circunferencia.

Bisecar un ángulo ó un arco de circunferencia.

Dividir en partes 2^n este arco, ó aquel ángulo.

Tirar tangentes á circunferencias dadas, ó trazar circunferencias que sean tangentes á rectas dadas.

Considerando comensurables dos rectas, dos arcos ó dos ángulos, hallar su máxima comun medida.

Dividir una recta en partes iguales, ó en partes proporcionales á otras rectas ó números dados.

Hallar una 4.ª proporcional á tres rectas dadas; ó una 3.ª á dos rectas; ó una media proporcional entre otras dos.

Rectificar una circunferencia y viceversa; dada una recta hallar el rádio de la circunferencia, equivalente á la recta dada.

LECCION 61.

Para determinar el área de una superficie se requieren dos factores lineales, cuyas longitudes se aprecien antes con una misma unidad lineal; por consecuencia resultan en el producto unidades cuadradas para el área: no se olvide, pues, jamas que *dos factores lineales, referidos á una misma unidad, deben dar por producto unidades cuadradas*. Prévia esta advertencia, ved á continuacion las reglas y fórmulas que sirven para la determinacion de las áreas:

El área del

Paralelógramo es = producto de su base por su altura.

Trapecio es = producto de su altura por la semisuma de las bases, ó por la recta bisectriz de los lados no paralelos.

Triángulo es = semiproducto de base por altura.

Triángulo equilátero es = raiz de tres multiplicada por el cuadrado de medio lado: su fórmula es, $\sqrt{3} \times (\frac{1}{2} L)^2$.

Cuadrado es = segunda potencia de su lado.

Polígono regular es = semiproducto de perímetro por apotema.

Círculo es = semiproducto de circunferencia por el rádio: su fórmula es, Círculo $= \pi R^2$.

Anillo ó corona es = círculo total menos círculo parcial: su fórmula es, Area del anillo $= \pi R^2 - \pi r^2$.

Trapezoyde es = semiproducto de una diagonal por la suma de las distancias á ella desde los otros dos vértices.

El área del

Polígono irregular que no tenga fórmula propia, se hallará imaginando al polígono compuesto de partes que tengan fórmula conocida, y apreciando la suma algébrica de las áreas parciales.

Aunque en la regla para el área del polígono regular, va implícito el pentágono, damos aquí su fórmula $5\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}\times\left(\frac{L}{2}\right)^2}$, para su frecuente uso. Escrita en forma racional aproximada, puede reducirse á la sencilla espresion,

$$\text{Area del pentágono regular} = L^2 \times 1{,}720.$$

Se llama *sector de círculo* una parte del círculo limitada por un arco de su circunferencia y los rádios de los estremos del arco. Un sector puede ser menor, igual ó mayor que el semicírculo; y por consiguiente, el ángulo formado por sus dos rádios estremos será un ángulo central, menor, igual ó mayor que dos ángulos rectos. Para determinar el área del sector sirve de regla la siguiente fórmula,

$\text{Area} = \pi R^2 \times \frac{g}{360}$: la letra g significa el valor gradual del arco del sector.

Problemas numéricos.

1.º *¿Qué área tendrá un triángulo cuya base es de* 123 *pies, y su altura es de* 246 *pies?*

Resolucion. $\text{Area} = 123 \times \frac{246}{2} = 123 \times 123 = 123^2 =$ 15129 pies cuadrados.

Cuando el área de un polígono cualquiera se aprecia por la de un cuadrado equivalente, se dice que se ha cuadrado dicha área. Esta cuestion, considerada en general, se llama *cuadratura de áreas*.

2.° *Hallar el área de un trapecio, cuya altura es de 748 metros, y la suma de sus bases es de 1476 metros.*

Solucion. $\text{Area} = 748 \times \frac{1476}{2} = 748 \times 738 = 738 \times (738 + 10) = 738^2 + 738 \times 10 = 544644 + 7380 = 552024$ metros cuadrados = 55 hectáreas + 20 áreas + 24 centiáreas.

3.° *¿Qué área tendrá un círculo de 110 varas de rádio?*

Solucion. Su área debe ser $= \pi \times 110^2 = 3{,}1416 \times 12100$;

ó

Area = 38013,36 varas cuadradas, segun

$$\left\{\begin{array}{r} 31416 \\ 62832 \\ 31416 \\ \hline 38013{,}3600 \end{array}\right.$$

Este resultado en unidades agrarias es = 4 fanegas + 72 estadales, con un pequeño esceso de 2,64 varas cuadradas.

4.° *Siendo 11761 pies cuadrados el área de un sextante* (sector de 60°), *¿cuál será su rádio?*

Solucion. Por el dato se infiere la del círculo = 70686 pies cuadrados $= \pi R^2$; luego $R^2 = \frac{70686}{3{,}1416} = \frac{706860000}{31416} = 22500$ pies cuadrados; y por consiguiente, $R = \sqrt{22500} = 150$ pies lineales.

5.° *Hallar el área de un rombo, cuyo lado es de 22 metros, y el menor de sus ángulos vale 60°.*

Resuélvase.

LECCION 62.

Si á la hipotenusa del triángulo rectángulo se le tira una perpendicular desde el vértice opuesto, quedará el triángulo dividido en dos triángulos semejantes al total, y por consiguiente semejantes entre sí; y por la comparacion mútua de estos triángulos, se podrán demostrar las proposiciones siguientes:

1.ª La perpendicular es media proporcional entre los *segmentos* (*) de la hipotenusa.

2.ª Esa misma perpendicular es cuarta proporcional á la hipotenusa y catetos.

3.ª Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento próximo del cateto.

4.ª Los cuadrados de los catetos son entre sí como los segmentos de la hipotenusa.

5.ª *El cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.*

6.ª Si en una circunferencia se inscribe un triángulo rectángulo, podrá aplicarse al diámetro y *cuerdas suplementarias* todo lo dicho de la hipotenusa y catetos.

La proposicion 5.ª constituye por sí sola lo que se llama *Teorema de Pitágoras*, cuyo enunciado es verdadero, tanto en el sentido numérico como en el sentido gráfico; porque si apreciada en números la longitud de cada lado, se compara luego la segunda potencia del número que representa la hipotenusa, con la suma de las segundas potencias de los números que representan los catetos, se hallará una perfecta igualdad: por ejemplo, hipotenusa 5, cateto 3 y cateto 4, dan $25 = 9 + 16 = 25$. En el sentido gráfico no es menos verdadero el teorema: si tomando por lado la hipotenusa, se construye sobre ella un cuadrado y luego sobre cada cateto se hace lo mismo, se puede evidenciar que el área del cuadrado mayor es

(*) Segmentos, son dos ó mas partes en que se haya dividido una línea, superficie ó cuerpo.

exactamente igual á la suma de las áreas de los otros dos cuadrados.

Y no solamente sucederá esto en figuras cuadradas, si que en cualesquiera otras, con tal que las construidas sobre los catetos sean semejantes á la construida sobre la hipotenusa: así es como el círculo, cuyo diámetro es la hipotenusa, equivale á la suma de los círculos cuyos diámetros respectivos son los catetos.

Conocidos dos lados del triángulo rectángulo, se puede fácilmente determinar el tercer lado; porque la ecuacion $h^2 = c^2 + c'^2$, es pura de segundo grado para cualquiera de las tres letras h, c, c', que represente á la incógnita. He aquí una aplicacion muy oportuna de esta verdad: Sabemos que el área del anillo es $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$; pero á la hipotenusa R y al cateto r, corresponde otro cateto r', luego el área del anillo será $= \pi r'^2$: este cateto r' es la semicuerda de la circunferencia mayor, tangente á la circunferencia menor.

Del teorema de Pitágoras se deduce como corolario la proposicion siguiente: *Si el cuadrado del lado mayor de un triángulo oblicuángulo, se compara con la suma de los cuadrados de los otros dos lados, resultará mayor que dicha suma siendo obtusángulo, y menor que ella siendo acutángulo.* Luego dados los números que espresan, en comun unidad de medida, las longitudes de los lados, se podrá determinar por ellos la naturaleza del triángulo. Y en efecto, un triángulo T, cuyos lados

sean $\left\{\begin{array}{l} a = 9 \\ b = 7 \\ c = 5 \end{array}\right\}$; dará para los cuadrados $\left\{\begin{array}{l} a^2 = 81 \\ b^2 = 49 \\ c^2 = 25 \end{array}\right\}$; y se tendrá, $81 > (49 + 25 = 74)$: que nos dice ser obtusángulo el triángulo T.

Si para otro triángulo T′ se dan $\left\{\begin{array}{l} a = 7 \\ b = 6 \\ c = 4 \end{array}\right\}$, y por consiguiente $\left\{\begin{array}{l} a^2 = 49 \\ b^2 = 36 \\ c^2 = 16 \end{array}\right\}$, resultará $49 < (36 + 16 = 52)$, é inferiremos que el triángulo T′ es acutángulo.

Para el área de un triángulo no siempre se tiene la base y la altura; hay que determinarla, á veces, con datos muy diferentes: cuando para ello se den los tres lados, servirá esta fórmula, *el área del triángulo es* $= \sqrt{m(m-a)(m-b)(m-c)}$ siendo $m = \frac{1}{2}(a+b+c)$; pero si examinados los cuadrados, se halla $a^2 = b^2 + c^2$, entonces nos eximimos del penoso cálculo que la fórmula exige, y damos inmediatamente el área en *el semiproducto de los catetos*. Quiérase, por ejemplo, el área de un triángulo T'' cuyos lados son $\left\{\begin{matrix} a = 10 \\ b = 8 \\ c = 6 \end{matrix}\right\}$, y diremos, $a^2 = b^2 + c^2 = 64 + 36 = 100$; luego el triángulo T'' es rectángulo, y su área es $= 24$ unidades cuadradas $= \dfrac{6 \times 8}{2}$.

Por último, si teniendo el área de una superficie cualquiera, se quiere el área de otra ú otras superficies que tengan con la primera semejanza de figura, bastará buscarla por cuarto término de una proporcion, fundada en el siguiente principio: *Las áreas de figuras semejantes son como los cuadrados de sus líneas homólogas.*

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

LECCION 63.

Esta parte de la ciencia comprende el estudio de la estension en sus tres dimensiones, ó sea el de los cuerpos geométricos. Para facilitar este estudio, lo posible en unos *Principios de Geometría*, reducimos todos los cuerpos geométricos á solo dos clases: 1.ª La de los *cuerpos poliedros*. 2.ª La de los *cuerpos redondos*, llamados tambien *cuerpos de revolucion*. La superficie del cuerpo basta para esta clasificacion: si dicha superficie se compone de cuatro ó mas planos, será el cuerpo un poliedro; pero será cuerpo redondo si está terminado por una ó mas superficies curvas, ya sola, ya combinada cada una con una ó mas superficies planas.

La clase de los poliedros se subdivide en tres géneros, que son: La *pirámide*, el *prisma* y el *poliedro regular*. Y del mismo modo la de los cuerpos redondos se subdivide en otros tres, que son: El *cono*, el *cilindro* y la *esfera*. Entre los géneros de la primera clase y sus correspondientes de la segunda, existen relaciones muy notables: *el cono es límite de la pirámide; el cilindro es límite del prisma*; y aunque la esfera no es límite del poliedro regular, existe sin embargo entre ambos cuerpos una *conexion muy íntima*.

En la superficie de un poliedro se distinguen varias cosas, y cada una tiene su particular denominacion. Desde luego cada uno de los planos que concurren á formar la superficie total, se limita en un polígono que se llama *cara*; la inclinacion de una cara respecto de otra inmediata, se llama *ángulo diedro*; y la recta en que se cortan cada dos de estas caras se llama *arista* del espresado ángulo diedro, y tambien *arista* del poliedro. Ademas, los puntos salientes que indican el concurso de cada tres ó mas planos, se llaman *vértices del poliedro*, y tambien *vértices de los ángulos* que en cada uno de dichos puntos se forman por los planos concurrentes. Estos ángulos se llaman en general *ángulos sólidos*, y en particular *ángulos triedros, tetráedros*, etc., segun sean tres, cuatro, etc., los planos concurrentes en el vértice.

Ninguna de estas cosas se descubre en la superficie del cuerpo redondo cuando está íntegro; pero cortado por uno ó mas planos dará lugar á una ó mas de ellas.

LECCION 64.

Primer género de la primera clase.

Se llama *pirámide* un poliedro de $(n+1)$ caras; las n (nunca <3) son triángulos, que forman la superficie lateral del cuerpo y terminan en un punto llamado *cúspide*; y la otra cara es un polígono de n lados, que completa la superficie y constituye lo que llaman *base de la pirámide*: la perpendicular tirada desde la cúspide al plano de la base, se llama *altura*. El número de lados de la base da nombre á la pirámide, la cual se llama *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun la base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.: la pirámide triangular se llama tambien *tetráedro*; cada una de sus caras puede ser base, y este cuerpo es de tanta importancia respecto de los demas poliedros, como lo es el triángulo respecto de los demas polígonos.

Una pirámide se llama *regular* cuando su base es un polígono regular, y el centro de esta es pie de la altura, la cual se llama entonces eje de la pirámide. Las caras laterales de la pirámide regular son siempre triángulos isósceles iguales, cuya altura constituye lo que se llama *apotema de la pirámide regular*.

Si este apotema se multiplica por el perímetro de la base, se tendrá un producto cuya mitad espresará el área de la superficie lateral de la pirámide regular; y añadiendo al semiproducto el área de la base, se tendrá el área de la superficie total del cuerpo. El área de la superficie de una pirámide irregular, se determina por la suma de las áreas de todas sus caras.

Para determinar el volúmen de una pirámide cualquiera, multiplíquese el área de la base por el tercio de la altura, y se obtendrá en unidades cúbicas el verdadero volúmen.

Primer género de la segunda clase.

De la pirámide regular es muy fácil inferir la forma y naturaleza del cuerpo llamado *cono recto de base círculo.* Basta imaginar que el polígono base duplica sucesivamente el número de sus lados, y por consecuencia se duplicará del mismo modo el número de las caras laterales; la superficie quebrada que estas formen, se acercará mas y mas á una superficie curva, que es la superficie cónica, y el polígono de la base se acercará del mismo modo á un círculo, que es la base del cono. Todo esto significa la proposicion ya sentada, que dice: *El cono es límite de la pirámide.*

Esta es la generacion del cono, derivado de la pirámide; pero siendo recto el cono, se puede considerar engendrado de otro modo mas fácil y exacto.

Si un triángulo rectángulo gira al rededor de un cateto, resultará engendrado por la revolucion del triángulo el *cono recto de base círculo.* El cateto sobre que gira el triángulo se constituye *eje del cono*, y es tambien su altura; el otro cateto traza un círculo, que es la *base del cono*, y la hipotenusa describe una superficie curva, que es la verdadera *superficie cónica.* Esta superficie, cerrada por la base círculo, termina en la parte opuesta por un punto que se llama el *vértice* ó la *cúspide* del cono: toda recta que, partiendo de la cúspide, toque en un punto cualquiera la superficie cónica, se confundirá con esta superficie, y entonces se llama *lado* ó *arista del cono*, y tambien *generatriz de la superficie cónica*, si termina en la circunferencia base.

El área de la superficie cónica del recto base círculo, es igual al semiproducto de la circunferencia base por la generatriz de la superficie: añadiendo á esto el área del círculo base, se tendrá *el área de la superficie total del cono recto de base círculo*.

El volúmen de este cono, y aun del *cono oblícuo*, se obtiene multiplicando el área del círculo base por el tercio de la altura del cono.

LECCION 65.

Segundo género de la primera clase.

Se llama *prisma* un poliedro de $(n+2)$ caras; las n (nunca $\overline{<}3$) son paralelógramos que forman la superficie lateral del cuerpo, y las otras dos son polígonos iguales y paralelos, que completan la superficie y se constituyen *bases del prisma*. El polígono de las bases da nombre al prisma, el cual se llama *triangular*; *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun dicho polígono sea triángulo, cuadrilátero, pentágono, etc.: cuando las bases son tambien paralelógramos, toma el prisma el nombre de *paralelepípedo*, y ofrece como el tetráedro la ventajosa propiedad de *ser base cualquiera de sus caras*. Altura de un prisma es la perpendicular tirada desde cualquier punto de una base al plano de la otra base. Si las caras laterales son rectángulos, se tendrá el *prisma recto*, y entonces cada arista lateral es altura; y cuando ademas los polígonos bases sean regulares, se tendrá el *prisma regular*. En este la recta que termina por ambos estremos en los centros de las bases, se llama *eje del prisma regular*; siempre esta recta es igual y paralela á las aristas laterales, y por consiguiente es tambien altura del prisma.

El área de la superficie lateral de un prisma recto, se obtiene multiplicando una arista lateral por el perímetro de una base; pero si el prisma fuere oblícuo, el segundo factor deberá ser el perímetro de la seccion causada en la superficie del prisma, por un plano perpendicular á las aristas laterales: esta se llama *seccion recta del prisma oblícuo.* Si al área de la superficie lateral de un prisma, se añade la doble área de una base, resultará el área de la superficie total del prisma, cualquiera que este sea.

Para obtener el volúmen de un prisma, sea recto ú oblícuo, basta multiplicar el área de una base por la altura del prisma.

Segundo género de la segunda clase.

Del prisma regular es fácil inferir la forma y naturaleza del cuerpo llamado *cilindro recto de bases círculos.* Basta imaginar que las bases del prisma duplican sucesivamente el número de sus lados, y por consecuencia se duplicará del mismo modo el número de las caras laterales; la superficie quebrada que estas formen se acercará mas y mas á una superficie curva, que es la superficie cilíndrica; y las bases del prisma se acercarán del mismo modo á dos círculos iguales y paralelos, que son las bases del cilindro. Todo esto significa la proposicion ya sentada, que dice *el cilindro es límite del prisma.*

Tal es la generacion del cilindro, derivado del prisma; pero siendo recto y de base círculo, puede el cilindro considerarse engendrado de otro modo mas fácil y exacto.

Si un rectángulo gira al rededor de uno de sus lados, este lado se constituirá *eje del cilindro*, y el lado opuesto describirá, por la revolucion del rectángulo, una superficie curva que es la *propiamente cilíndrica*; los otros dos lados trazarán dos círculos iguales y paralelos, que son *las bases del cilindro.* Toda recta que paralela al eje, toque en un punto la superficie cilíndrica, coincidirá con esta exactamente; será igual al eje, si termina por ambos estremos en las circunferencias *bases de la superficie cilíndrica*, y se llamará *lado ó arista del cilindro*, y mas propiamente *generatriz de la superficie cilíndrica.*

El área de la superficie lateral del cilindro recto, bases círculos, es igual al producto de la generatriz por la circunferencia de una base; añadiendo la doble área de uno de los circulos bases, se tendrá el área de la superficie total de dicho cilindro.

El volúmen del cilindro recto, y tambien del oblícuo, se obtiene multiplicando el área de uno de los círculos bases por la altura del cilindro.

LECCION 66.

Tercer género de la primera clase.

Se llaman poliedros regulares aquellos cuyas caras son todas polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos sólidos son todos salientes é iguales. Este género ofrece cinco especies distintas, á saber: El *tetráedro*, el *octáedro* y el *icosáedro*, cuyas caras en todos son triángulos equiláteros; el *exáedro ó cubo*, cuyas caras son cuadrados; y el *dodecáedro*, cuyas caras son pentágonos.

El área de la superficie de un poliedro regular, se hallará, pues, multiplicando el área de una cara por el número de las que formen la superficie total. A este fin hemos fijado en la Leccion 61, fórmulas para las áreas de los polígonos regulares, triángulo, cuadrilátero y pentágono, en funcion de solo el lado. En lo interior del poliedro regular existe un punto, que equidista de todos los vértices del poliedro y tambien equidista de todas sus caras: este punto se llama *centro del poliedro regular*. Las rectas que desde el centro se tiran á los vértices son todas iguales, y se llaman *rádios del poliedro regular*; y las que desde él se tiran perpendiculares, una á cada cara, son tambien iguales, y se llaman *apotemas del poliedro regular*.

Para obtener el volúmen de un poliedro regular cualquiera, *basta multiplicar el apotema del poliedro, por el tercio del área de la superficie del cuerpo*. No es fácil calcular el apotema con los escasos conocimientos de Geometría dados en estos Apuntes; pero ved al dorso de esta página una tabla que da los cinco volúmenes en funcion de solo el lado L.

Exáedro. . = L^3.

Tetráedro . = $L^3 \times \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Octáedro. . = $L^3 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Dodecáedro = $L^3 \times 7{,}6631$.

Icosáedro . = $L^3 \times 2{,}1817$.

Hágase la aplicacion de un valor constante en la arista ó lado L para los cinco poliedros, y se observará que *el volúmen del dodecaedro por sí solo, es mayor que la doble suma de los volúmenes de los otros cuatro cuerpos.*

Tercer género de la segunda clase.

La *esfera*: así se llama el cuerpo que resulta formado por la revolucion de un semicírculo al rededor de su diámetro. El centro del semicírculo se constituye *centro de la esfera*; su arco describe una superficie curva perfectamente redonda, que es la *superficie de la esfera*; y el semicírculo engendra la solidez del cuerpo ó la *esfera* propiamente dicha. Las rectas que partiendo del centro de la esfera terminan en la superficie, se llaman *rádios de la esfera*, y son todas iguales; porque han sido rádios del semicírculo generador. Si se concibe un rádio prolongado á través del centro, hasta que termine la recta en la superficie esférica, esta recta será un *diámetro*: todos los diámetros de una esfera son iguales, por ser cada uno duplo de un rádio.

Si una esfera se corta por un plano, la seccion es un círculo; son *círculos máximos* los causados por secciones que pasan por el centro de la esfera, y se llaman *círculos menores* los causados por secciones distantes del centro: estos círculos crecen ó menguan, segun se acercan ó apartan del centro de la esfera. Toda seccion por el centro divide la esfera en dos segmentos iguales que se llaman *hemisferios*; pero si la seccion no pasa por el centro, serán un segmento mayor y otro menor que el hemisferio. Cada segmento tiene por base un círculo, máximo si es hemisferio, menor si no lo es. Si uno de estos segmentos de una base se corta por un plano paralelo á ella, resultará un tercer segmento con dos bases.

Dijimos en la Leccion 61 que entre la esfera y los poliedros regulares hay relaciones importantes; y en efecto, á un poliedro regular cualquiera, se le puede inscribir una esfera y circunscribir otra, ambas concéntricas. El rádio de la esfera inscrita es uno de los factores necesarios para determinar el volúmen del poliedro regular; pero ni la superficie ni el volúmen de este, pueden servir de medio para determinar el área de la superficie esférica, ni el volúmen de la esfera.

Para esto se recurre á otro medio mas directo. En el arco de un cuadrante inscríbanse dos cuerdas iguales, y duplicando sucesivamente el número de estas cuerdas, se llegará á un número espresado por 2^n. Imagínese ahora que el sector poligonal inscrito en dicho cuadrante, gira al rededor de uno de sus dos rádios estremos, y se concebirá claramente la idea de un cuerpo de revolucion, tan próximamente igual en superficie y en volúmen al hemisferio engendrado por la revolucion del cuadrante, como puede estarlo una variable respecto de su límite.

Así se ha conseguido establecer para los cálculos de este cuerpo tan importante las siguientes fórmulas:

$$\text{Area de la superficie esférica} = 4\pi R^2;$$

$$\text{Volúmen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

LECCION 67.

Semejanza de cuerpos.

Dos cuerpos geométricos serán semejantes cuando tengan la misma forma, las mismas propiedades geométricas y, ó en nada se diferencien, ó solo en su magnitud. Ponemos como primeros en semejanza los cuerpos iguales, ó mas bien *idénticos*; porque entendemos que el grado mas perfecto de semejanza es la *identidad*. La diferencia de magnitud, única que pueden ofrecer dos cuerpos semejantes, está sujeta á la precisa condicion de *guardar una razon constante las magnitudes de dos partes homólogas*; esto es, de dos líneas, de dos partes de la superficie, ó de dos partes del sólido. Para comprender bien esta idea envuelta en la palabra *homólogas*, y que encierra todo el significado de la semejanza entre cuerpos, imagínense idénticos los cuerpos que se comparan; imagínese la conveniente superposicion para que se reduzcan á un solo cuerpo; y las partes que dos á dos deban coadunarse, esas serán las *partes homólogas*. La razon constante de magnitud entre ángulos *homólogos*, siempre es razon de igualdad, bien sean ángulos planos, bien sean ángulos diedros, ó bien ángulos poliedros; pero entre las partes homólogas de otra denominacion, solo será razon de igualdad en los cuerpos idénticos, porque en los meramente semejantes, esa razon será una fraccion para las líneas homólogas (razon de similitud), ó el cuadrado de esa fraccion para las superficies homólogas, ó el cubo de ella para los sólidos homólogos. Cuando en los cálculos se quiere hacer llegar dos cuerpos semejantes al grado de idénticos, basta suponer igual á 1 *la razon de similitud*.

De la definicion de *semejanza* se infiere inmediatamente la semejanza de las esferas, y la de los poliedros regulares de un mismo nombre. Para la semejanza de dos cilindros rectos, base círculo, basta que sean semejantes sus rectángulos generadores, y que la revolucion de estos se verifique al rededor de un lado homólogo. Con estas condiciones serán tambien semejantes los conos rectos, base círculo.

Evidenciada la semejanza de los espresados cuerpos, puede aplicárseles la siguiente proposicion: *Las áreas de las superficies de dos esferas, de dos cilindros semejantes, de dos conos semejantes, y de dos poliedros regulares de un mismo nombre; son entre sí como los cuadrados de dos líneas homólogas, tomadas de los cuerpos que se comparan*: v. gr., *como los cuadrados de dos diámetros, de dos rádios, de dos ejes, de dos aristas, de dos apotemas*, etc.

Para la semejanza de los poliedros en general se acude á sus tetráedros integrantes. Para un tetráedro cualquiera hay una infinidad de tetráedros que le deben ser semejantes: *basta considerar cortado un tetráedro por un plano paralelo á una de sus caras, para obtener un tetráedro parcial semejante al total. Esto mismo se demuestra de una pirámide cualquiera.* Luego *si dos poliedros pueden considerarse compuestos de un mismo número de pirámides, respectivamente semejantes, y colocadas de un mismo modo en ambos poliedros; estos deberán ser semejantes.* Esta proposicion y su recíproca se demuestran en la Geometría elemental, y dejan sentada como infalible la siguiente consecuencia: *Para un poliedro cualquiera siempre hay otro que le sea semejante y hasta idéntico.*

Razon de áreas y razon de volúmenes.

Aunque la semejanza de los cuerpos regulariza estas razones, no las lleva al grado de sencillez que suelen ofrecer las de algunos cuerpos no semejantes. Si en las fórmulas de dos volúmenes hay un factor lineal comun, suprimido en ambas fórmulas quedarán estos volúmenes en razon de dos rectángulos: razon mas simple que la de dos cubos. Si en dichas fórmulas hay dos factores lineales comunes, suprimidos en ambas fórmulas quedarán los volúmenes en razon de dos líneas: mas simple todavía que la razon de rectángulos. Si en las fórmulas de dos áreas hay comun un factor lineal, suprimido en ambas quedarán las áreas en razon de dos líneas: razon mas simple que la de cuadrados, dada á los cuerpos semejantes. Y si hubiera en dichas fórmulas dos factores lineales comunes, suprimidos en ambas quedarian las áreas en razon de dos números abstractos.

Ved á continuacion ejemplos de todo esto:

Los volúmenes de dos cilindros de base círculo, que tengan la misma altura, son entre sí como sus bases, y por consiguiente como los cuadrados de los rádios de dichas bases. La misma proporcion existe para los volúmenes de dos conos de igual altura.

Si dichos cilindros ó conos fueran de igual base, tendrian sus volúmenes la razon de las alturas.

Si la base círculo es igual en el cilindro y en el cono, y tambien es igual la altura, el volúmen del cono y el del cilindro tendrán la razon de los números abstractos 1 : 3. Para que esta misma razon se tenga entre el volúmen de una pirámide y el volúmen de un prisma de igual altura, no es precisa la igualdad de bases; basta que estas sean equivalentes.

Una de las relaciones mas notables es la que existe entre áreas, y entre volúmenes de la esfera y cilindro circunscrito; porque *el área de la esfera es á la del cilindro circunscrito, como el volúmen de la esfera es al volúmen del cilindro circunscrito*: esto es, como los números abstractos 2 : 3.

Despues de este ejemplo, nada sorprenderian los otros muchos que pudiéramos aducir.

FIN.

TABLAS

DE CUADRADOS Y CUBOS

PARA LOS NUMEROS NATURALES 1 A 1000,

Y DE RAICES SEGUNDA Y TERCERA

PARA

cada uno de los números primos comprendidos entre dichos estremos.

POR

D. Joaquin Agostí,

Catedrático de Matemáticas en el Instituto de 2ª Enseñanza de esta capital.

VALENCIA,

IMPRENTA DE JOSÉ DE ORGA,

CALLE DEL MILAGRO.

1867.

La operacion mas prolija y embarazosa de la Aritmética, aun socorrida con las fórmulas del Álgebra, es sin duda la estraccion de raíces numéricas, especialmente las cúbicas ó de tercer grado: basta probar á estraer una, con siete ó mas cifras exactas en el resultado, para quedar convencidos de nuestro aserto. Los discípulos mas aplicados se desalientan al verse en la triste y frecuente necesidad de suspender y desechar como inútiles sus cálculos ya hechos, por encontrarse con cifras de valor escedente, que sometidas á nuevo cálculo piden, no pocas veces, una segunda correccion. Sabemos que este grave inconveniente se puede obviar, si bien hasta el presente no hemos visto indicado el modo en ningun autor. Sabemos tambien que la penosa operacion de formar cada divisor, elevando á la segunda potencia toda la raíz hallada, y triplicando despues esta potencia, se suple ingeniosamente por una fácil adicion; pero estos métodos, por ingeniosos que sean, no prestan aun el alivio que es de desear, y para la medianía de capacidades tienen el inconveniente de la difícil comprension y el facilísimo olvido.

Natural es, pues, en un maestro el deseo de evitar á sus discípulos tan enojoso trabajo, y el consiguiente hastío que *rase*. Reasumiendo, pues, todo lo dicho se ve, que para encontrar en las presentes tablas el cuadrado ó cubo de un número dado, basta *buscar la columna de detencion y la línea de enrase, y ver qué número hay en su interseccion*; el número que allí se halle será la potencia pedida. Tan ingenioso método y á la vez sencillo, tiene entre los matemáticos el nombre de *á doble entrada*. Y en efecto, doble es aquí: la una está en las centenas de la raiz, y nos introduce en la columna de detencion; y la otra está en las unidades de la raíz, y por la línea de enrase nos conduce hasta la potencia buscada. Es muy digna de atencion esta idea de considerar á la raiz, compuesta siempre de centenas y unidades, representando por 0 la carencia de las unas ó las otras; porque esta idea es el principio que ha servido para la construccion de estas tablas, y del que surgen todas las reglas para su acertado manejo.

Sin mas esplicacion puede el lector predecir ya, á tablas cerradas, no solo el pique y la página, sí que tambien la columna y la línea en que debe encontrarse el cuadrado ó cubo de un número entero dado menor que 1000.

USOS DE LAS PRESENTES TABLAS.

El mas general é inmediato consiste en buscar el cuadrado ó el cubo de un número entero, que no esceda de tres cifras.

Quiero, por ejemplo, el cuadrado del número 237: la inspeccion del dato me basta para saber, antes de abrir las tablas, que este cuadrado debe encontrarse en el segundo pique; por cuanto las 37 unidades de la raíz, es número comprendido entre los estremos 25 y 49; que estará en la página izquierda, por no llegar á 5 las centenas de la raíz; que su columna será la 200, por ser 2 las centenas de la raíz, y que su línea de enrase debe ser la que sale del número 37 en la columna U. Con toda esta prevision abro las tablas por la página III, que es la designada por los datos previstos, y en la interseccion de la columna 200 con la línea 13 de esta página hallo el número 56169; y concluyo que es $56169 = 237^2$.

Por razones análogas puedo asegurar tambien, que el cubo del número 641 debe estar en el segundo pique, tabla de cubos; en la página derecha de dicho pique; en la columna 600, y en la línea de enrase del número 41, columna U: porque el número 41, que espresa las unidades de la raíz, está comprendido entre los estremos 25 y 49; las centenas de la raíz son mas de 4; la columna 600 tiene por índice las centenas de la raíz, y la línea de enrase sale del número que espresa las unidades en la columna U. Abro, pues, las tablas por la página XII, designada por los datos deducidos, y en la interseccion de su columna 600, con su línea 17, hallo el número $263374721 = 641^3$, que es lo que buscaba.

Así podrán hallarse inmediatamente los cuadrados y cubos de todos los números enteros que no pasen de 1000; pero las mismas tablas dan tambien cuasi inmediatamente, los cuadrados y cubos de otros números. Todos los que constan de tres cifras significativas, con ceros á su derecha, tendrán su cuadrado igual al de las tres cifras, con doble ceros á su derecha que los de la raíz; y tendrán su cubo igual al cubo de las tres cifras, con triple ceros á su derecha que los de la raíz.

Si el número de tres cifras espresa una fraccion decimal, su cuadrado ó cubo lo darán las tablas, con tal que el que lo toma sepa colocar la coma en el resultado. De modo que, por ejemplo,:

$$(37,4)^2 \text{ será } = 1398,76; \text{ y } (0,53)^3 \text{ será } = 0,148877.$$

Los cuadrados y cubos de números cuya mitad no pase de tres cifras, se hallarán multiplicando por 4 ó por 8 el cuadrado ó cubo de dicha mitad, dado inmediatamente por las tablas: tambien el cuadrado de un número cuyo tercio no esceda de tres cifras, se hallará multiplicando por 9 el cuadrado de su tercio. Ejemplos:

$$(1132)^2 = 4 \times (566)^2 = 320356 \times 4 = 1281424;$$
$$(1098)^3 = 8 \times (549)^3 = 165469149 \times 8 = 1323753192;$$
$$(2259)^2 = 9 \times (753)^2 = 567009 \times 9 = 5103081.$$

Tambien dan estas tablas el cuadrado y cubo para el número de cuatro cifras. En efecto, representando por u la cuarta cifra, y por d el valor relativo del número formado por las otras tres, sabemos que se tendrá $(d + u)^2 = d^2 + 2du + u^2$: los cuadrados $d^2 + u^2$ están en las tablas; luego añadiendo á la suma el producto $2du$, se tendrá el cuadrado perfecto. Quiérase, por ejemplo, el cuadrado del número 2345, y diremos:

$$(2345)^2 = 2340^2 + 5^2 + 10 \times 2340 = 5475600 + 25 + 23400,$$

cuyo resultado se obtiene con la fácil adicion que se ve al márgen, y nos da para la práctica esta sencilla regla: *Si un número de tres cifras (v. gr.* CDU) *se suma con su cuadrado, y á la derecha de la suma se le añade el* 25, *resultará exactamente el cuadrado del número de cuatro cifras* CDU5.

$$\left.\begin{array}{r} 5475625 \\ 23400 \\ \hline 5499025 \end{array}\right\}$$

$$\text{Aplicacion}: 3475^2 = \left\{\begin{array}{r} 12049 \\ 347 \\ \hline 12075625 \end{array}\right\} = 12075625 : \text{exacto}.$$

En ambos ejemplos hemos supuesto la cifra $u = 5$, no solo para deducir la notable regla que acabamos de enunciar, sí que tambien para advertir que los valores de $u > 5$, se pueden cambiar en $u < 5$, tomando negativo su complemento á 10. Quiérase, por ejemplo, el cuadrado del número 8457, y diremos:

$$8457^2 = (8460 - 3)^2 = 8460^2 + 9 - 6 \times 8460 = 71520849,$$

como se ve en la operacion al márgen, que da $8457^2 = 71520849$: exacto.

$$\left.\begin{array}{r} 71571609 \\ -\ 50760 \\ \hline 71520849 \end{array}\right\}$$

Con los mismos significados en las letras d, u, busquemos ahora fórmula para el cubo del número de cuatro cifras, y tendremos:

$$(d+u)^3 = d^3 + 3\,u\,d^2 + 3\,u^2\,d + u^3 = (d^3 + u^3) + d^2 \times 3\,u + u^2 \times 3\,d.$$

Esta fórmula evidencia que la parte $(d^3 + u^3)$ se hallará inmediatamente en la tabla de los cubos; que los factores d^2, u^2 se hallarán en la de los cuadrados, y que los únicos factores introducidos son $3\,u$, $3\,d$.

Quiérase, por ejemplo, la tercera potencia del número 1115, y diremos: $1115^3 = (1110 + 5)^3 = (1110^3 + 5^3) + 1110^2 \times 15 + 5^2 \times 3330 = 1386195875$ como se ve en la operacion al márgen, que da $1115^3 = 1386195875$: exacto.

$$\left.\begin{array}{r} 1367631125 \\ 18481500 \\ 83250 \\ \hline 1386195875 \end{array}\right\}$$

Tambien aquí hemos supuesto $u=5$, por ser el mayor valor para la cifra u : pues los casos de $u>5$ se cámbian fácilmente en $u<5$, tomando negativo el complemento á 10, como ya vimos. Si se quiere v. gr. el cubo del número 1119, diremos :

$$1119^3=(1120-1)^3=(1120^3-1^3)+1120\times3-1120^2\times3$$
$$=(1120^3+1120\times3)-(1+1120^2\times3);$$

que satisfechas las operaciones parciales indicadas en los paréntisis, se llega al resultado final por la sustraccion que se ve al márgen,

$$\left.\begin{array}{r}1404931360\\ -\ 3763201\\ \hline 1401168159\end{array}\right\}\ \text{y da } 1119^3=1401168159 : \text{exacto.}$$

Aunque las presentes tablas no llevan espresas las potencias de grado superior al 3°, puede decirse que las llevan sobre entendidas. La 4ª potencia de un número, es un producto de 3ª por 1ª; la 5ª es otro producto de 3ª por 2ª; la 6ª no es otra cosa que el cuadrado de la 3ª ó el cubo de la 2ª; luego cuando estos productos no se encuentren ya hechos en las tablas, se obtendrán por la multiplicacion de dos factores, que ellas darán preparados.

Pero no siempre será preciso este trabajo, pues si las potencias 4ª y 6ª se piden para números menores que el 32, sus cuadrados no llegarán á 1000, y claro es que el cuadrado de uno de esos cuadrados será la 4ª potencia, y el cubo será la 6ª; y tanto una como otra deben hallarse inmediatamente en las presentes tablas. En efecto, la 4ª potencia de 29, será $=841^2=707281$; y la 6ª potencia de 18, será $=324^3=34012224$.

Si para buscar un cuadrado, un cubo, una 4ª ó 6ª potencia son útiles y ventajosas las presentes tablas, mas útiles y ventájosas serán todavia para buscar las dos, tres y mas potencias que piden con frecuencia los resultados formulares de muchas cuestiones.

Los productos de números enteros consecutivos, tienen ó pueden tener por fórmula general la siguiente :

$$n(n+1)(n+2)\ldots\text{etc.}=\left\{\begin{array}{c}n+n^2\\ 2n+3n^2+n^3\\ \text{etc.}\end{array}\right\},\ \text{que se re-}$$

duce á suma de potencias del menor factor n; y bien frecüente es su uso en las permutaciones, etc.

Los productos de números equidistantes de un tercero, formulados en la espresion $(m+d) \times (m-d) = m^2 - d^2$, se reducen como se ve á una diferencia de cuadrados; y estos productos son frecuentísimos en los cálculos ordinarios, ademas de representar el de estremos en la equidiferencia continua, y el de alternos en la progresion por diferencia.

La série de los números naturales pide con frecuencia la suma de sus términos, la de sus cuadrados, la de sus cubos, etc., que tienen por fórmulas respectivas las siguientes:

$$S_1 = \tfrac{1}{2}(n + n^2);$$

$$S_2 = \tfrac{1}{6}(n + 3n^2 + 2n^3);$$

$S_3 = \tfrac{1}{2}(n^2 + 2n^3 + n^4)$; y todas se reducen á sumas de potencias del número de sus términos. No es menester subir al Algebra superior para verse en la necesidad de estas fórmulas; la Aritmética misma puede ofrecerla: y para que el lector se persuada, le invitamos á que nos dé, sin valerse de ellas, la suma de los 1000 cuadrados, y la de los 1000 cubos contenidos en las presentes tablas ¡si puede!

En la Trigonometría rectilínea existe para el caso de los tres lados una fórmula, que da las proyecciones de los *b*, *c* sobre el mayor *a* en estas espresiones:

$$p = \frac{a^2 + (b^2 - c^2)}{2a}, \quad p = \frac{a^2 - (b^2 - c^2)}{2a};$$

las cuales suelen posponerse á las del seno, coseno, ó tangente del medio ángulo, sin embargo de su merecida preferencia: y esto solamente por evitar el cálculo de los cuadrados. Luego con nuestras tablas podria resolverse este caso por las proyecciones mas breve, fácil y exactamente; y lo que es mas, podria el calculador conocer, á vista de los cuadrados, si es ó no rectángulo el triángulo propuesto, y variar su procedimiento en la resolucion con ahorro de trabajo.

Mas usos podríamos citar todavía; pero los indicados bastan para hacer comprender cuántos y cuán útiles servicios pueden prestar las tablas de los cuadrados y cubos.

APLICACION DE LAS PRESENTES TABLAS A LA ESTRACCION DE RAICES DE LOS NUMEROS.

Siendo esta operacion inversa de la elevacion á potencias, debe tambien ser inverso el procedimiento: al de elevacion le llamamos de á doble entrada, y á este se le podria llamar de *doble salida.* En efecto, quiérase la raíz de un cuadrado contenido en la tabla v. gr. del número 83521, que se halla en la página VII, línea 15: si salimos de la página ascendiendo por la columna del dato, hallaremos el índice 200 que nos da las centenas para la raíz; y saliendo por la linea del dato hácia la izquierda, hallaremos al estremo de esta en la columna U, un número 89 que nos da las unidades para la raíz; luego los resultados de esta *doble salida* serán las centenas y las unidades de la raíz, y podremos asegurar que es $\sqrt{83521} = 289$.

Si se quiere la raíz 3ª de un número contenido en la tabla de los cubos, v. gr. del número 1601613 que se halla en la página IX, línea 18, seguiremos su columna hácia arriba, y á la salida tomaremos el índice que lleva, y tendremos las centenas de la raíz; seguiremos ademas la linea del dato hácia la izquierda, y al salir de la página hallaremos al estremo, columna U, el número 17 para unidades de la raíz; con lo cual podemos ya asegurar que es

$$\sqrt[3]{1601613} = 117.$$

Pero dése á este método el nombre que se quiera, lo que nos importa es comprenderlo bien para usarlo con seguridad. Ya dijimos en la elevacion que el principio ó idea cardinal de estas tablas, es la consideracion constante de las dos partes de la raíz, centenas y unidades, representando por cero la carencia de una ó de otra; lo mismo, pues, repetimos aquí: el método de estraccion es inverso del de elevacion; pero en ambos es idéntico el principio regulador, á saber, la idea mencionada.

Así podrian hallarse la raíz cuadrada del número entero que no esceda de seis cifras, y la raíz 3ª del que no pase de nueve cifras; pero ignorando el lugar del dato en las tablas, seria preciso abrirlas y hojearlas al acaso, no pocas veces en vano: para obviar este inconveniente, acudamos á la idea cardinal y ella nos dará fiel guia.

Si quiero, por ejemplo, la $\sqrt{301401}$, y la $\sqrt[3]{9129329}$, discurriré del modo siguiente: Si el dato 301401 estuviera dividido en secciones de á dos cifras, como para estraer su raiz por el método ordinario, al momento conoceria que las centenas de la raiz que busco son 5; luego sin mas observacion debo inferir que el 301401 estará (si es cuadrado) en la columna 500, tabla de cuadrados, y recorriendo solo esta columna, que es la segunda de la página derecha en todo pique, hallo al momento en la página IV, linea última, que 301401 es el cuadrado del número 549; luego será

$\sqrt{301401} = 549.$

Por igual razonamiento respecto del dato 9129329, infiero que son 2 las centenas de su raiz 3ª, y que por ello debe existir (si es cubo) en la columna 200, tabla de cubos: como esta columna es la cuarta de la página izquierda, en todo pique, abro la tabla de cubos y al momento en la página IX, línea 10, encuentro que el número 9129329 es un cubo perfecto é $= 209^3$; luego con toda seguridad afirmo que es $\sqrt[3]{9129329} = 209.$

Tambien dan las tablas con frecuencia raíces exactas para números que no están en ellas esplícitamente; pero que por convenientes cámbios de forma, que en nada afecte á su valor, se les puede hacer coincidir con cuadrados ó cubos espresos en las tablas: evidenciemos esto con los ejemplos indicados en la siguiente

$$\text{llave:}\left\{\begin{array}{ll} \sqrt{70,3921} = A; & \sqrt[3]{363,994344} = D; \\ \sqrt{\dfrac{28561}{662596}} = B; & \sqrt[3]{\dfrac{9129329}{15069223}} = E; \\ \sqrt{1+\dfrac{2040}{9409}} = C; & \sqrt[3]{8+\dfrac{343983}{912673}} = F. \end{array}\right.$$

Empezando por A, D, y siguiendo de dos en dos letras por la analogía de casos, tendremos:

1.° $A^2 = 70,3921 = \frac{703921}{10000} = \frac{839^2}{10000}$

(página IV, línea 15) $= (\frac{839}{100})^2 = (8,39)^2$.

$D^3 = 363,994344 = \frac{363994344}{1000000} = \frac{(714)^3}{(100)^3}$

(página X, línea 15) $= (\frac{714}{100})^3 = (7,14)^3$.

Luego resulta: $A = 8,39$; $D = 7,14$.

2.° $B^2 = \frac{28561}{662596} = \frac{169^2}{814^2}$ (página V, línea 20, y página II, línea 15) $= (\frac{169}{814})^2$.

$E^3 = \frac{9129329}{15069223} = \frac{209^3}{247^3}$ (página IX, línea 10, y página XI, línea 23) $= (\frac{209}{247})^3$.

Luego resulta: $B = \frac{169}{814}$; $E = \frac{209}{247}$.

3.° $C^2 = 1 + \frac{2040}{9409} = \frac{11449}{9409} = \frac{107^2}{97^2}$ (página I, línea 8, y página VII, línea 23) $= (\frac{107}{97})^2 = (1 + \frac{10}{97})^2$.

$F^3 = 8 + \frac{343989}{912673} = \frac{7645373}{912673} = \frac{197^3}{97^3}$ (página XV, línea 23, columnas 100 y 0) $= (\frac{197}{97})^3 = (2 + \frac{3}{97})^3$.

Luego, en fin, será $C = 1 + \frac{10}{97}$; $F = 2 + \frac{3}{97}$ lo que debíamos probar.

RAICES INCONMENSURABLES.

La cuadrada y cúbica de un número primo desde el 2 hasta 1019, se hallará inmediatamente en la tabla (páginas XVII á XIX) que contiene estas raíces calculadas con siete cifras decimales.

Si el número cuya raíz se pide consiste en un producto ó cociente de uno de los primos dichos, por un número racional, se obtendrá la raíz del dato multiplicando ó partiendo la raíz del número primo, por la raíz del número racional: véanse á continuacion ejemplos de todo esto.

$$\sqrt{827} = 28{,}7576076\,;\ \sqrt[3]{977} = 9{,}9227379.$$

$$\sqrt{67300} = 10\sqrt{673} = 10 \times 25{,}9422435 = 259{,}422435.$$

$$\sqrt[3]{1{,}009} = \sqrt[3]{\frac{1009}{1000}} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{1009} = \frac{10{,}0299104}{10}$$
$$= 1{,}00299104.$$

$$\sqrt{775} = \sqrt{25 \times 31} = 5 \times \sqrt{31} = \frac{10\sqrt{31}}{2} = \frac{55{,}677643}{2}$$
$$= 27{,}838821.$$

$$\sqrt[3]{\frac{706}{16}} = \frac{353}{8} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{353} = \frac{7{,}0673766}{2} = 3{,}5336883.$$

Para los demas casos de raíz inconmensurable usaremos de la siguiente regla: *Por convenientes cámbios de forma, si son necesarios, dése al dato la de un entero capaz de tres secciones, como las que se harian si se hubieran de estraer las raíces por los métodos ordinarios; esta forma facilitará desde luego conocer las centenas de la raíz, y por ellas la columna de detencion en las tablas. Busquemos en esta columna la potencia comparable con el dato trasformado en entero, esto es, la potencia que mas se le acerque por defecto; y la raíz de ella espresará las tres primeras cifras de la raíz que se busca para dicho* *entero. La diferencia entre este y la potencia que se le compara, divídase por el duplo del número formado por las tres cifras (si la raíz es cuadrada), ó por el triplo del cuadrado de este número (si la raíz es tercera): las dos primeras cifras decimales del cociente serán 4ª y 5ª para la raíz de aquel entero. Hágase por fin la correccion consiguiente á los cámbios de forma que precedieron, y se tendrá la raíz del dato primitivo, exacta con cinco cifras* (1).

Ejemplos: 1.º $\sqrt{1039} = \sqrt{\frac{103900}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{103900}$; pero la página I, línea 23, da para potencia comparable el número $103684 = 322^2$, y la diferencia $\left.\begin{array}{r}103900\\ 103684\\ \hline 216\end{array}\right\}$; luego será $\sqrt{103900} = \left\{322 + \left(\frac{216}{322 \times 2} = \frac{108}{322} = 0,335\right.\right\}$; y con la correccion consiguiente al cámbio de forma en el dato primitivo, será por fin $\sqrt{1039} = \frac{322,33}{10}$ 32,233.

2.º $\sqrt[3]{9867} = \sqrt[3]{\frac{9867000}{1000}} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{9867000}$; pero la página IX, línea 15, da para potencia comparable el número $9800344 = 214^3$, y la diferencia

$\left.\begin{array}{r}9867000\\ 9800344\\ \hline 66656\end{array}\right\}$, luego será $\sqrt[3]{9867000} = \left\{214 + \left(\frac{66656}{3 \times 214^2} = \frac{22218}{45796} = 0,486\right.\right\}$; y por fin se tendrá $\sqrt[3]{9867} = \frac{214,48}{10} = 21,448$.

(1) Esta exactitud se funda en los supuestos $Q = D : 2A$ para la raíz segunda, y $Q = D : 3A^2$ para la raíz tercera; pero adviértese que ninguno de estos supuestos es de rigorosa igualdad.

Omitiendo el razonamiento, y limitándonos al cálculo en los demas ejemplos, tendremos

$$3.^{\circ}\ \sqrt{27093{,}06} = 9\times\frac{301034}{100} = \frac{3}{10}\sqrt{301034} =$$

$$\frac{3}{10}\left\{548 + \frac{730}{548\times 2} = \frac{365}{548} = 0{,}666..\right\} = \frac{3\times 548{,}666}{10} =$$

$$\frac{1645{,}998}{10} = 164{,}5998;$$ y tomando solamente cinco cifras,

será $\sqrt{27093{,}06} = 164{,}59.$

$$4.^{\circ}\ \sqrt[3]{1840{,}092328} = \sqrt[3]{8\times\frac{230011541}{1000000}} = \frac{2}{100}\times$$

$$\sqrt[3]{230011541} = \frac{1}{50}\left\{612 + \left(\frac{790613}{3\times 612^2} = \frac{263537}{374544} = 0{,}703\right\} =\right.$$

$$\frac{612{,}703}{50} = \frac{61{,}2703}{5} = 12{,}254;$$ ó $\sqrt[3]{1840{,}092328} = 12{,}254.$

$5.^{\circ}\ \sqrt[3]{1,(5882352941176470)}$, suprimiendo diez cifras decimales, quedará $\sqrt[3]{1,588235} = \left\{1{,}16 + \left(\frac{27339}{3\times 116^2} = \frac{9113}{13456} =\right.\right.$

$0{,}67\ ..\ \Big\}$; ó $\sqrt[3]{1,(5882352941176470)} = 1{,}1667$: cifras exactas, porque no puede influir en ellas la supresion de las diez del dato. Si de esto quedase alguna duda, atiéndase á este otro modo de resolver el mismo ejemplo. El decimal del dato es un período que revela por fraccion comun generatriz $\frac{n}{17} = \frac{10}{17}$; luego el dato se cámbia en

$$\sqrt[3]{1+\frac{10}{17}}=\sqrt[3]{\frac{27}{17}}=3:\sqrt[3]{17}=3:2{,}5712816=$$

1,16673. . . Luego las cinco cifras del resultado anterior son idénticas á las de este, que ha sido calculado sin supresion de una cifra siquiera.

Muchos mas ejemplos podríamos aducir; pero suspendemos aquí nuestra tarea, confiados en que el lector puede ya por sí solo continuar estas aplicaciones, y aun deducir otras que fácilmente se infieren de la naturaleza de las presentes tablas.

ERRATAS.

Pagina.	*Columna.*	*Linea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
4		7	12049	120409
5		7	paréntisis	paréntesis
6		12	$\frac{1}{2}(n^2+2n^3+n^4)$	$\frac{1}{4}(n^2+2n^3+n^4)$
IX	0	18	4513	4913

CUADRADOS Y CUBOS

DE

LOS NUMEROS ENTEROS

CONSECUTIVOS DESDE UNO HASTA MIL.

CUADRADOS DE LOS NUMEROS

desde 0 hasta 24 unidades con centenas 0 á 4.

U.	0	100	200	300	400
0	0	10000	40000	90000	160000
1	1	10201	40401	90601	160801
2	4	10404	40804	91204	161604
3	9	10609	41209	91809	162409
4	16	10816	41616	92416	163216
5	25	11025	42025	93025	164025
6	36	11236	42436	93636	164836
7	49	11449	42849	94249	165649
8	64	11664	43264	94864	166464
9	81	11881	43681	95481	167281
10	100	12100	44100	96100	168100
11	121	12321	44521	96721	168921
12	144	12544	44944	97344	169744
13	169	12769	45369	97969	170569
14	196	12996	45796	98596	171396
15	225	13225	46225	99225	172225
16	256	13456	46656	99856	173056
17	289	13689	47089	100489	173889
18	324	13924	47524	101124	174724
19	361	14161	47961	101761	175561
20	400	14400	48400	102400	176400
21	441	14641	48841	103041	177241
22	484	14884	49284	103684	178084
23	529	15129	49729	104329	178929
24	576	15376	50176	104976	179776

CUADRADOS DE LOS NUMEROS

desde 0 hasta 24 unidades con centenas 5 á 9.

U.	500	600	700	800	900
0	250000	360000	490000	640000	810000
1	251001	361201	491401	641601	811801
2	252004	362404	492804	643204	813604
3	253009	363609	494209	644809	815409
4	254016	364816	495616	646416	817216
5	255025	366025	497025	648025	819025
6	256036	367236	498436	649636	820836
7	257049	368449	499849	651249	822649
8	258064	369664	501264	652864	824464
9	259081	370881	502681	654481	826281
10	260100	372100	504100	656100	828100
11	261121	373321	505521	657721	829921
12	262144	374544	506944	659344	831744
13	263169	375769	508369	660969	833569
14	264196	376996	509796	662596	835396
15	265225	378225	511225	664225	837225
16	266256	379456	512656	665856	839056
17	267289	380689	514089	667489	840889
18	268324	381924	515524	669124	842724
19	269361	383161	516961	670761	844561
20	270400	384400	518400	672400	846400
21	271441	385641	519841	674041	848241
22	272484	386884	521284	675684	850084
23	273529	388129	522729	677329	851929
24	274576	389376	524176	678976	853776

CUADRADOS DE LOS NUMEROS

desde 25 hasta 49 unidades con centenas 0 á 4.

U.	0	100	200	300	400
25	625	15625	50625	105625	180625
26	676	15876	51076	106276	181476
27	729	16129	51529	106929	182329
28	784	16384	51984	107584	183184
29	841	16641	52441	108241	184041
30	900	16900	52900	108900	184900
31	961	17161	53361	109561	185761
32	1024	17424	53824	110224	186624
33	1089	17689	54289	110889	187489
34	1156	17956	54756	111556	188356
35	1225	18225	55225	112225	189225
36	1296	18496	55696	112896	190096
37	1369	18769	56169	113569	190969
38	1444	19044	56644	114244	191844
39	1521	19321	57121	114921	192721
40	1600	19600	57600	115600	193600
41	1681	19881	58081	116281	194481
42	1764	20164	58564	116964	195364
43	1849	20449	59049	117649	196249
44	1936	20736	59536	118336	197136
45	2025	21025	60025	119025	198025
46	2116	21316	60516	119716	198916
47	2209	21609	61009	120409	199809
48	2304	21904	61504	121104	200704
49	2401	22201	62001	121801	201601

CUADRADOS DE LOS NUMEROS

desde 25 hasta 49 unidades con centenas 5 á 9.

U.	500	600	700	800	900
25	275625	390625	525625	680625	855625
26	276676	391876	527076	682276	857476
27	277729	393129	528529	683929	859329
28	278784	394384	529984	685584	861184
29	279841	395641	531441	687241	863041
30	280900	396900	532900	688900	864900
31	281961	398161	534361	690561	866761
32	283024	399424	535824	692224	868624
33	284089	400689	537289	693889	870489
34	285156	401956	538756	695556	872356
35	286225	403225	540225	697225	874225
36	287296	404496	541696	698896	876096
37	288369	405769	543169	700569	877969
38	289444	407044	544644	702244	879844
39	290521	408321	546121	703921	881721
40	291600	409600	547600	705600	883600
41	292681	410881	549081	707281	885481
42	293764	412164	550564	708964	887364
43	294849	413449	552049	710649	889249
44	295936	414736	553536	712336	891136
45	297025	416025	555025	714025	893025
46	298116	417316	556516	715716	894916
47	299209	418609	558009	717409	896809
48	300304	419904	559504	719104	898704
49	301401	421201	561001	720801	900601

CUADRADOS DE LOS NUMEROS

desde 50 hasta 74 unidades con centenas 0 á 4.

U.	0	100	200	300	400
50	2500	22500	62500	122500	202500
51	2601	22801	63001	123201	203401
52	2704	23104	63504	123904	204304
53	2809	23409	64009	124609	205209
54	2916	23716	64516	125316	206116
55	3025	24025	65025	126025	207025
56	3136	24336	65536	126736	207936
57	3249	24649	66049	127449	208849
58	3364	24964	66564	128164	209764
59	3481	25281	67081	128881	210681
60	3600	25600	67600	129600	211600
61	3721	25921	68121	130321	212521
62	3844	26244	68644	131044	213444
63	3969	26569	69169	131769	214369
64	4096	26896	69696	132496	215296
65	4225	27225	70225	133225	216225
66	4356	27556	70756	133956	217156
67	4489	27889	71289	134689	218089
68	4624	28224	71824	135424	219024
69	4761	28561	72361	136161	219961
70	4900	28900	72900	136900	220900
71	5041	29241	73441	137641	221841
72	5184	29584	73984	138384	222784
73	5329	29929	74529	139129	223729
74	5476	30276	75076	139876	224676

CUADRADOS DE LOS NUMEROS

desde 50 hasta 74 unidades con centenas 5 á 9.

U.	500	600	700	800	900
50	302500	422500	562500	722500	902500
51	303601	423801	564001	724201	904401
52	304704	425104	565504	725904	906304
53	305809	426409	567009	727609	908209
54	306916	427716	568516	729316	910116
55	308025	429025	570025	731025	912025
56	309136	430336	571536	732736	913936
57	310249	431649	573049	734449	915849
58	311364	432964	574564	736164	917764
59	312481	434281	576081	737881	919681
60	313600	435600	577600	739600	921600
61	314721	436921	579121	741321	923521
62	315844	438244	580644	743044	925444
63	316969	439569	582169	744769	927369
64	318096	440896	583696	746496	929296
65	319225	442225	585225	748225	931225
66	320356	443556	586756	749956	933156
67	321489	444889	588289	751689	935089
68	322624	446224	589824	753424	937024
69	323761	447561	591361	755161	938961
70	324900	448900	592900	756900	940900
71	326041	450241	594441	758641	942841
72	327184	451584	595984	760384	944784
73	328329	452929	597529	762129	946729
74	329476	454276	599076	763876	948676

CUADRADOS DE LOS NUMEROS

desde 75 hasta 99 unidades con centenas 0 á 4.

U.	0	100	200	300	400
75	5625	30625	75625	140625	225625
76	5776	30976	76176	141376	226576
77	5929	31329	76729	142129	227529
78	6084	31684	77284	142884	228484
79	6241	32041	77841	143641	229441
80	6400	32400	78400	144400	230400
81	6561	32761	78961	145161	231361
82	6724	33124	79524	145924	232324
83	6889	33489	80089	146689	233289
84	7056	33856	80656	147456	234256
85	7225	34225	81225	148225	235225
86	7396	34596	81796	148996	236196
87	7569	34969	82369	149769	237169
88	7744	35344	82944	150544	238144
89	7921	35721	83521	151321	239121
90	8100	36100	84100	152100	240100
91	8281	36481	84681	152881	241081
92	8464	36864	85264	153664	242064
93	8649	37249	85849	154449	243049
94	8836	37636	86436	155236	244036
95	9025	38025	87025	156025	245025
96	9216	38416	87616	156816	246016
97	9409	38809	88209	157609	247009
98	9604	39204	88804	158404	248004
99	9801	39601	89401	159201	249001

CUADRADOS DE LOS NUMEROS

desde 75 hasta 99 unidades con centenas 5 á 9.

U.	500	600	700	800	900
75	330625	455625	600625	765625	950625
76	331776	456976	602176	767376	952576
77	332929	458329	603729	769129	954529
78	334084	459684	605284	770884	956484
79	335241	461041	606841	772641	958441
80	336400	462400	608400	774400	960400
81	337561	463761	609961	776161	962361
82	338724	465124	611524	777924	964324
83	339889	466489	613089	779689	966289
84	341056	467856	614656	781456	968256
85	342225	469225	616225	783225	970225
86	343396	470596	617796	784996	972196
87	344569	471969	619369	786769	974169
88	345744	473344	620944	788544	976144
89	346921	474721	622521	790321	978121
90	348100	476100	624100	792100	980100
91	349281	477481	625681	793881	982081
92	350464	478864	627264	795664	984064
93	351649	480249	628849	797449	986049
94	352836	481636	630436	799236	988036
95	354025	483025	632025	801025	990025
96	355216	484416	633616	802816	992016
97	356409	485809	635209	804609	994009
98	357604	487204	636804	806404	996004
99	358801	488601	638401	808201	998001

CUBOS DE LOS NUMEROS

desde 0 hasta 24 unidades con centenas 0 á 4.

U.	0	100	200	300	400
0	0	1000000	8000000	27000000	64000000
1	1	1030301	8120601	27270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964808
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939264
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30959144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024

CUBOS DE LOS NUMEROS

desde 0 hasta 24 unidades con centenas 5 á 9.

U.	500	600	700	800	900
0	125000000	216000000	343000000	512000000	729000000
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	127263527	219256227	347428927	517781627	736314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521660125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525557943	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872229	225866529	356400829	529475129	751089429
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	231475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	379503424	559476224	788889024

CUBOS DE LOS NUMEROS

desde 25 hasta 49 unidades con centenas 0 á 4.

U.	0	100	200	300	400
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649337	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849

CUBOS DE LOS NUMEROS

desde 25 hasta 49 unidades con centenas 5 á 9.

U.	500	600	700	800	900
25	144703125	244140625	381078125	561515625	791453125
26	145531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796597983
28	147197952	247673152	385828352	567663552	799178752
29	148035889	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	397065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825293672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019
40	157464000	262144000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	268336125	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349

CUBOS DE LOS NUMEROS

desde 50 hasta 74 unidades con centenas 0 á 4.

U.	0	100	200	300	400
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424

CUBOS DE LOS NUMEROS

desde 50 hasta 74 unidades con centenas 5 á 9.

U.	500	600	700	800	900
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424

CUBOS DE LOS NUMEROS

desde 75 hasta 99 unidades con centenas 0 á 4.

U.	0	100	200	300	400
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438976	5451776	21024576	53157376	107850176
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753571	6967871	24642171	59776471	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499

CUBOS DE LOS NUMEROS

desde 75 hasta 99 unidades con centenas 5 á 9.

U.	500	600	700	800	900
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	929714176
77	192100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	193100552	311665752	470910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955671625
86	201230056	322828856	485587656	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303872	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	213847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999

TABLA DE RAICES CUADRADAS Y CUBICAS

para los números primos desde el 2 hasta el 1019.

Núm.	R. cuadrada.	R. cúbica.	Núm.	R. cuadrada.	R. cúbica.
2	1,4142135	1,2599210	101	10,0498756	4,6570095
3	1,7320508	1,4422496	103	10,1488915	4,6875481
5	2,2360679	1,7099759	107	10,3440804	4,7474594
7	2,6457513	1,9129312	109	10,4403065	4,7768562
11	3,3166247	2,2239801	113	10,6301458	4,8345881
13	3,6055512	2,3513347	127	11,2694276	5,0265257
17	4,1231056	2,5712816	131	11,4455231	5,0787531
19	4,3588989	2,6684016	137	11,7046999	5,1551367
23	4,7958315	2,8438670	139	11,7898261	5,1801015
29	5,3851648	3,0723168	149	12,2065556	5,3014592
31	5,5677643	3,1413806	151	12,2882057	5,3250740
37	6,0827625	3,3322218	157	12,5299640	5,3946907
41	6,4031242	3,4482172	163	12,7671453	5,4625556
43	6,5574385	3,5033981	167	12,9228479	5,5068784
47	6,8556546	3,6088261	173	13,1529464	5,5720547
53	7,2801098	3,7562858	179	13,3790881	5,6357408
59	7,6811457	3,8929965	181	13,4536240	5,6566528
61	7,8102496	3,9364972	191	13,8202749	5,7589652
67	8,1853527	4,0615480	193	13,8924439	5,7789966
71	8,4261497	4,1408178	197	14,0356688	5,8186478
73	8,5440037	4,1793392	199	14,1067359	5,8382725
79	8,8881944	4,2908404	211	14,5258390	5,9533418
83	9,1104335	4,3620707	223	14,9331845	6,0641270
89	9,4339811	4,4647451	227	15,0665191	6,1001702
97	9,8488578	4,5947009	229	15,1327459	6,1180332

Núm.	R. cuadrada.	R. cúbica.	Núm.	R. cuadrada.	R. cúbica.
233	15,2643375	6,1534495	419	20,4694894	7,4829241
239	15,4596248	6,2058218	421	20,5182845	7,4948112
241	15,5241746	6,2230843	431	20,7605394	7,5536888
251	15,8429795	6,3079935	433	20,8086520	7,5653548
257	16,0312195	6,3578612	439	20,9523268	7,6001385
263	16,2172747	6,4069586	443	21,0475651	7,6231519
269	16,4012194	6,4553148	449	21,1896201	7,6574137
271	16,4620776	6,4712736	457	21,3775583	7,7026246
277	16,6433169	6,5186839	461	21,4709105	7,7250324
281	16,7630546	6,5499116	463	21,5174347	7,7361877
283	16,8226038	6,5654144	467	21,6101827	7,7584023
293	17,1172427	6,6418522	479	21,8860686	7,8242942
307	17,5214154	6,7459967	487	22,0680764	7,8676130
311	17,6351920	6,7751690	491	22,1585198	7,8890946
313	17,6918060	6,7896613	499	22,3383079	7,9317104
317	17,8044938	6,8184619	503	22,4276614	7,9528476
331	18,1934053	6,9173964	509	22,5610283	7,9843444
337	18,3575597	6,9589433	521	22,8254244	8,0466030
347	18,6279360	7,0271058	523	22,8691932	8,0568862
349	18,6815416	7,0405806	541	23,2594066	8,1482764
353	18,7882942	7,0673766	547	23,3880311	8,1782888
359	18,9472953	7,1071937	557	23,6008474	8,2278254
367	19,1572440	7,1595988	563	23,7276210	8,2572633
373	19,3132079	7,1984050	569	23,8537208	8,2864928
379	19,4679223	7,2367972	571	23,8956062	8,2961902
383	19,5703857	7,2621674	577	24,0208242	8,3251475
389	19,7230829	7,2998937	587	24,2280828	8,3729668
397	19,9248588	7,3495966	593	24,3515913	8,4013981
401	20,0249843	7,3741979	599	24,4744765	8,4296383
409	20,2237484	7,4229141	601	24,5153013	8,4390098

Núm.	R. cuadrada.	R. cúbica.	Núm.	R. cuadrada.	R. cúbica.
607	24,6373699	8,4670001	821	28,6530975	9,3637049
613	24,7588368	8,4948065	823	28,6879765	9,3713022
617	24,8394846	8,5132435	827	28,7576076	9,3864601
619	24,8797106	8,5224321	829	28,7923600	9,3940206
631	25,1197133	8,5771523	839	28,9654967	9,4316423
641	25,3179778	8,6222248	853	29,2061637	9,4838136
643	25,3574446	8,6311830	857	29,2745623	9,4986148
647	25,4361946	8,6490437	859	29,3087017	9,5059981
653	25,5538646	8,6756974	863	29,3768616	9.5207304
659	25,6709953	8,7021882	877	29,6141857	9,5719377
661	25.7099202	8,7109827	881	29,6816441	9.5864682
673	25,9422435	8,7633809	883	29,7153159	9,5937170
677	26.0192236	8,7807084	887	29,7825452	9,6081817
683	26,1342686	8,8065722	907	30,1164406	9,6798604
691	26,2868788	8,8408227	911	30,1827765	9,6940694
701	26,4764045	8,8832661	919	30,3150127	9,7223631
709	26,6270539	8,9169311	929	30,4795013	9,7575003
719	26,8141753	8,9586581	937	30,6104557	9,7854289
727	26,9629375	8,9917620	941	30,6757233	9,7993336
733	27,0739727	9,0164309	947	30,7733651	9,8201169
739	27,1845544	9,0409655	953	30,8706980	9,8408127
743	27,2580263	9,0572482	967	31,0966236	9,8887673
751	27,4043792	9,0896392	971	31,1608729	9,9023835
757	27,5136329	9,1137818	977	31,2569992	9,9227379
761	27,5862284	9,1298061	883	31,3528308	9,9430092
769	27,7308492	9,1616869	991	31,4801524	9,9699095
773	27,8028775	9,1775445	997	31,5753068	9,9899900
787	28,0535202	9,2326189	1009	31,7647603	10,0299104
797	28,2311884	9,2715592	1013	31,8276609	10,0431469
811	28,4780617	9,3255320	1019	31,9217793	10,0629364