

5)



JE2 / 22

~~1841~~

755-756

1775

ALBERTINO PALERMO,
su Secretario, Director del
primer Secretario de
la Real Academia de la
Historia y de otras
Realidades.

1775

JEZ / 22

COMPENDIO *R. 1293*

DE

MATEMÁTICAS

PURAS Y MISTAS

POR

D. JOSEF MARIANO VALLEJO,
del Consejo de S. M. su Secretario, Director del
Gabinete Geográfico de la primera Secretaría de
Estado, ex-Catedrático de Matemáticas del Real
Seminario de Nobles de Madrid, individuo de la
Real Sociedad económica Matritense, y de otros
establecimientos científicos.

TOMO I.



VALENCIA:

En la Imprenta de Estévan.

1819.

AL REY
NUESTRO SEÑOR.

SEÑOR:

*La benigna acogida que han
merecido á V. M. mis produc-*

ciones científicas, y las gracias que ha tenido á bien dispensarme, me imponen la estrecha obligacion de ofrecer ahora á los pies del Trono una obra, que aunque pequeña en volúmen, encierra sin embargo las verdades fundamentales de aquellas ciencias, en que por la mayor parte estriba la felicidad de los Reinos. En su formacion he tenido presentes las oportunas reflexiones que V. M. me ha hecho al presentarle mis escritos; y sin desviarme un punto de ellas, he

vencido los obstáculos, he facilitado las doctrinas, he puesto al alcance de todos, en cuanto me ha sido posible, algunas de las mas elevadas teorías, con el objeto de que se difundan las luces por las diversas clases del Estado.

Permítame, pues, V. M. que honre tambien con su augusto nombre este pequeño fruto de mis meditaciones, como por un efecto de aquel empeño y eficacia con que desea V. M. promover los conocimientos útiles; y será una nueva gracia, que

añadiré á las que me tiene dispensadas.

Dios guarde la importante vida de V. M. muchos años.

Madrid 19 de Diciembre de 1818.

SEÑOR:

A L. R. P. de V. M.

Josef Mariano Vallejo.

PRÓLOGO.

Como el fin que me propuse al escribir mi tratado elemental de Matemáticas, fue el de formar Matemáticos de profesion, era indispensable que diese á conocer estas ciencias en el estado que en el dia se hallan, con todas las modificaciones que ha recibido su lenguaje, á consecuencia de los adelantamientos que en ellas se han hecho. Por lo cual hubiera sido un defecto de mucha consideracion el indicar una verdad, por sencilla que fuese, sin llevarla hasta la evidencia, ó dejar ceñidas á casos particulares algunas otras á que correspondiese por su importancia una demostracion general. De esta manera no se encontraria, entre aquel tratado elemental y las obras magistrales, la dependencia y relacion necesaria, para que la estudiosa juventud llegase á la cabal inteligencia de los escritos que han publicado los célebres y profundos Geómetras de Europa, ni se formarían jamas dignos profesores, capaces de adelantar unas ciencias que tanto influyen en la prosperidad de los

Estados. Más como no todos pueden aspirar por una parte á tan alto punto de perfeccion , y por otra son muchos los que necesitan tener algunos conocimientos de estas ciencias , he creido que no podia hacer mayor servicio á unos y á otros , que presentarles en un Compendio , como ahora lo hago , las verdades fundamentales de los diferentes ramos de que se componen. De este modo el comerciante, el oficinista y el artesano, tendrán las noticias necesarias para conducirse con acierto en sus operaciones: el médico, jurista , canonista y teólogo, lo que mas les interese saber para el completo estudio de sus respectivas facultades; y todos adquirirán las precisas ideas para distinguir el verdadero mérito, y saber apreciar las fatigas que los Matemáticos se toman en beneficio de la humanidad.

Para cumplir con todas estas miras, se ha procurado conciliar en esta obra la brevedad con la claridad : se han enlazado todas las materias que en ella se tratan, con el órden y exactitud que por su naturaleza piden ; y se han puesto al alcance de todos , en cuanto posible ha sido, hasta los principios elementales de

las teorías mas sublimes. Hablaria sobre este asunto tan difícil con ménos satisfaccion , si todo lo que contiene este Compendio fuese obra mia; pero su composicion se debe por la mayor parte á la laboriosidad de mi hermano el Capitan D. Andres Vallejo, que se halla de profesor en el Colegio militar de Valencia: su infatigable celo por la instruccion le ha hecho entrar en largas y detenidas meditaciones; ha simplificado los métodos; ha variado muchas demostraciones, y ha sustituido otras de no poca elegancia y sencillez : entre las cuales la del § 231 merece una particular atencion por su mucha importancia y trascendencia; y reuniendo sus tareas á las mias, hemos conseguido, sino me engaño, satisfacer los votos y deseos de tantos sabios y literatos, que con un empeño decidido nos han instado repetidas veces, para que en un pequeño volúmen reuniésemos lo mas fundamental de las ciencias exactas, para la instruccion y utilidad de todos.

*

ADVERTENCIA.

Un número dentro de un paréntesis denota que la operación ó proposición en que se funda la que se está efectuando, se halla en el párrafo que dice dicho número; además se pondrá la señal § cuando las citas estén entre cálculos.

Si alguno desease mas estension sobre cualquier punto de los contenidos en este Compendio, podrá consultar el *Tratado Elemental* en el paraje correspondiente.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO.

	Pág.
ARITMÉTICA. <i>Nociones preliminares, numeracion, division y subdivision de las unidades de pesos y medidas.....</i>	I
<i>De la operacion de sumar ó de la adiccion...</i>	8
<i>De la operacion de restar ó de la sustraccion.</i>	13
<i>De la multiplicacion.....</i>	16
<i>De la division.....</i>	27
<i>De las pruebas.....</i>	45
<i>Consecuencias importantes de las operaciones esplicadas.....</i>	45
<i>De los quebrados ó fracciones; de su espression, reduccion á un comun denominador, y simplificacion.....</i>	47
<i>Sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.....</i>	53
<i>De la valuacion de los quebrados.....</i>	59
<i>De los quebrados ó fracciones decimales.....</i>	60
<i>Sumar, restar, multiplicar y dividir decimales.....</i>	66
<i>Sumar, restar, multiplicar y dividir números denominados.....</i>	73
ÁLGEBRA. <i>Nociones preliminares.....</i>	79
<i>De la suma de las cantidades algebraicas....</i>	85
<i>De la operacion de restar cantidades algebraicas.....</i>	86
<i>De la multiplicacion algebraica.....</i>	87

<i>De la division algebraica.....</i>	91
<i>De los quebrados literales.....</i>	97
<i>De la elevacion á potencias y estraccion de raices de los monomios.....</i>	99
<i>De las espresiones imaginarias.....</i>	105
SEGUNDA PARTE DEL ÁLGEBRA. De la análisis algebraica, y resolucion de las ecuaciones de primer grado.....	107
<i>De la elevacion al cuadrado de los polinomios, y estraccion de la raiz cuadrada de las cantidades numéricas.....</i>	119
<i>De la formacion de las potencias en general.</i>	125
<i>De las ecuaciones determinadas de segundo grado.....</i>	127
<i>De las razones y proporciones.....</i>	131
<i>De las trasformaciones que se pueden dar á una proporcion, sin que deje de subsistir proporcion.....</i>	139
<i>De la regla de tres y de compañía.....</i>	148
<i>De las progresiones aritméticas y geométricas.....</i>	156
<i>De los logaritmos.....</i>	163
<i>Aplicacion de los logaritmos á la estraccion de la raiz cúbica.....</i>	172
<i>De las ecuaciones indeterminadas de primer grado.....</i>	172
<i>De las permutaciones y combinaciones.....</i>	175
<i>Proposiciones importantes acerca de las cantidades constantes y variables, y de los límites.....</i>	178
GEOMETRÍA. Nociones preliminares.....	186
<i>De las paralelas.....</i>	209

<i>Del círculo, y de las rectas consideradas en él.....</i>	214
<i>De los ángulos considerados en el círculo....</i>	219
<i>De las figuras en jeneral, y propiedades de los cuadriláteros.....</i>	224
<i>De los polígonos.....</i>	227
<i>De las líneas proporcionales.....</i>	231
<i>De la semejanza de las figuras.....</i>	238
SEGUNDA PARTE. De la estension en longitud y latitud, ó de las superficies.....	255
<i>De la reduccion de las superficies.....</i>	264
<i>De los planos, de su posicion, y de los ángulos sólidos.....</i>	265
TERCERA PARTE. De los prismas, y medicion de sus superficies y volúmenes.....	272
<i>De la pirámide, y medicion de su superficie y volúmen.....</i>	281
<i>De los poliedros regulares, ó de los cinco cuerpos regulares.....</i>	287
<i>De los tres cuerpos redondos.....</i>	288
TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.....	306
<i>Resolucion de los triángulos rectángulos.....</i>	321
<i>Resolucion de los triángulos oblicuángulos....</i>	325
<i>Idea jeneral de la resolucion de los triángulos esféricos.....</i>	329
GEOMETRÍA PRÁCTICA. De la nivelacion....	332
<i>De la medicion de las líneas.....</i>	335
<i>De la medicion de los ángulos.....</i>	337
<i>Medir alturas y distancias accesibles é inaccesibles, y modo de levantar los planos topográficos.....</i>	340

ERRATAS DE ESTE TOMO.

<u>Pág.</u>	<u>Lin.</u>	<u>Dice.</u>	<u>Debe decir.</u>
10	22	bebajo *	debajo.
81	24	positiva	positiva.
86	37	$+a - (-b) =$	$+a - (-b) =$
93	15	esprecion *	espresion.
99	10	praccará	practicará.
105	2	$\sqrt[12]{\frac{a^2 c^8}{b^2 d^6}}$	$\sqrt[12]{\frac{a^2 c^8}{b^5 d^6}}$
105	20	$\sqrt[15]{a^2 b^3 c}$	$\sqrt[15]{a^2 b^2 c}$
107	9	multip can	multiplican.
112	19	facres	factores.
113	29	$x^n = 0$	$x^n = b$.
114	penúl.	$a - 1z = c$	$a - 2z = c$.
123	11	res-*	resta.
144	últ.	4·7 *	4:7
158	11	foman	forman.
163	penúl.	correspondientes	correspondientes.
184	7	supuesso	supuesto.
194	34	es lo *	lo.
197	18	A	con A.
197	31	digo	digo que.
212	8	domostrar	demostrar.
220	8	simplificando AB*	simplificando por AB.
221	31	selañan	señalan.
245	24	AC	BC.
264	26	x	X.
319	27	$\sqrt{1 - \text{sen.}^2 A}$	$\sqrt{1 - \text{sen.}^2 A}$.
320	penúl.	CS.CO *	CS:CO
321	26	López	Lope.
332	24	aplanamiento	aplanamiento.

Nota. Las erratas que llevan el asterisco, no se encontrarán en todos los ejemplares.

INTRODUCCION.

Se llama *cuerpo* todo lo que es capaz de hacer *impresion* en nuestros sentidos. Las impresiones que nos causan los cuerpos, se llaman *sensaciones*. Las sensaciones consideradas como representando los objetos, se llaman *ideas*; y la facultad, por cuyo medio podemos retener las ideas, se llama *memoria*. Si para dar á conocer el objeto que representa una idea, es absolutamente necesario presentarle al sentido á que pertenece, como la *blancura, picante, &c.*, la idea es *simple*; y si el objeto se puede hacer conocer sin esta circunstancia como una *mesa, caballo, &c.*, la idea se llama *compuesta*. Si la idea conviene á un solo objeto, como la de *este libro*, se llama *singular ó individual*; y es *abstracta ó universal*, cuando conviene á muchos como la idea de *libro*; de manera que para formar una idea universal ó abstracta, se *observará aquello en que convienen muchos objetos, y se prescindirá de lo demas*.

La operacion por cuyo medio podemos prescindir de aquello en que se diferencian varios objetos, se llama *abstraccion*; de manera que *abstraccion es una operacion del alma, por medio de la cual concebimos como separadas, cosas que realmente no lo están*.

Para hacernos cargo de los muchos objetos que se nos presentan, se deben considerar separadamente, lo que se consigue por medio de la *atencion*; así la *atencion es una operacion del al-*

ma, por medio de la cual de muchos objetos que se nos presentan, elejimos uno para hacernos cargo de él; y haciendo lo mismo con todos los demas, se vendrá en conocimiento de todos ellos.

Como casi todos los objetos son compuestos, no basta la atencion sola para conocerlos, sino que es necesario ir considerando cada una de sus partes, y esto se consigue por la *análisis*, y es una operacion del alma, por medio de la cual se descompone un todo en sus partes, para ver qué relacion tienen entre sí y con el mismo todo, y se vuelven á juntar otra vez para que compongan el mismo todo. Por ejemplo, si tuviésemos que hacernos cargo de los muebles que habia en una sala, por medio de la atencion elejiríamos uno, v. g. un reloj; y por medio de la análisis le descompondríamos en las diferentes piezas de que constaba, para ver qué relacion tenian entre sí y con el total de la máquina; y despues las volveríamos á juntar para formar el reloj. Lo mismo se ejecutaria con todos los demas muebles.

La exactitud de las ideas depende del mayor grado de análisis que se haga de los objetos; y de aquí resulta otra division de las ideas, que es la contenida en el siguiente ejemplo. Si de muchos sujetos que han estado en una casa, uno sólo se acordase de la calle en que está dicha casa, habrá analizado muy poco, y la idea que de ella tiene se llama *obscura*. Otro que sabiendo la calle, sólo dudase entre dos ó tres casas, habrá analizado mas, y la idea que tiene de la casa se llama *confusa*. Otro que entrando en la calle, se fuese derecho á la casa sin preguntar á nadie,

habrá analizado mas , y la idea que tiene de la casa se llama *clara*. Y otro que no sólo supiese la casa , sino que estando léjos de ella , fuese capaz de dar á otro tales señas, que sin preguntar á nadie se fuese derecho á ella , este habrá analizado mas que todos, y la idea que tiene de la casa se llama *distinta ó exacta*. Esta es la idea que hemos de procurar en todos nuestros conocimientos.

Si despues de haber examinado dos objetos, v. g. dos relojes , prestamos nuestra atencion á ambos á un mismo tiempo, entónces se dice que los *comparamos*; de manera que comparacion es *una operacion del alma, por medio de la cual prestamos nuestra atencion á un mismo tiempo á dos objetos*. De la comparacion resultará que el uno será mejor, mayor, &c. que el otro ; y este grado de mejoría , mayoría , &c. se llama *relacion*, que *no es mas que el resultado de la comparacion*.

Cuando al comparar dos ideas hallamos que convienen, ó no , é interiormente nos convencemos de ello (como cuando me convengo de que *la nieve es blanca*), formamos lo que se llama *juicio*, que es *una operacion del alma, por medio de la cual afirmamos ó negamos una cosa de otra*.

Si se espresa el juicio con palabras (como si yo le digo á otro *la nieve es blanca*), se llama *proposicion*; de manera que proposicion es *un juicio espresado por palabras*.

La proposicion consta de tres partes : *sujeto*, que es la cosa de que se habla (v. g. en la anterior *la nieve*) ; *predicado*, que es lo que se afirma ó niega del sujeto (v. g. *blanca*); y *cópula* el verbo (v. g. *es*), que los une ó separa.

Cuando por la comparacion de dos ideas no podemos averiguar su relacion , y para esto las comparamos con otra ú otras , usamos del *raciocinio* , que es *una operacion* , por medio de la cual se comparan dos ideas con una ó mas intermedias , para averiguar su relacion. Si el raciocinio se espresa por proposiciones , se llama *razonamiento*.

Las proposiciones pueden ser *evidentes* , *ciertas* y *probables*. Se llaman evidentes ó *axiomas* , aquellas cuya verdad se conoce inmediatamente que se pronuncian. Tales son :

- 1.º *Una cosa es igual á ella misma.*
- 2.º *Un todo es igual al conjunto de sus partes.*
- 3.º *Lo que hagamos con el todo quedará hecho con el conjunto de sus partes ; y lo que hagamos con el conjunto de sus partes , quedará hecho con el todo.*
- 4.º *El todo es mayor que cualquiera de sus partes , ó la parte es menor que el todo.*
- 5.º *Cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.*

El primer axioma está al alcance de todos ; y los demas lo estarán igualmente , si se tiene presente que cuando una cosa se compone de otras , á la compuesta se le llama *todo* , y á cada una de las componentes se les llama *partes* del mismo todo.

El tercer axioma y el último son de la mayor importancia , pues en ellos se fundan casi todas las demostraciones.

Proposiciones ciertas ó *teoremas* , se llaman aquellas que para convencer de su verdad es preciso compararlas con los axiomas , y hacer ver que están comprendidas en ellos ; ó de otro modo : teo-

rema es una proposicion que necesita demostracion; y demostracion es un razonamiento seguido, en que se hace ver que la proposicion enunciada de tal modo concuerda con los principios mas ciertos y evidentes, que no deja duda de su verdad.

La demostracion puede ser directa ó á priori, é indirecta ó á posteriori, que tambien se llama ad absurdum. Es directa, cuando partiendo del sujeto de la proposicion se manifiesta la verdad que se ha enunciado; é indirecta, cuando se hace ver que no se puede verificar ninguna otra cosa mas que el enunciado. Este método de demostrar se llama método de exaucion.

Proposiciones probables son las que unas veces pueden ser verdaderas y otras falsas.

Segun las cosas que se enuncian en la proposicion, toma esta el nombre de definicion, problema, corolario, postulado, escolio y lema.

Definicion es una proposicion en que se da una idea clara y distinta de lo que se quiere dar á entender: como las que hemos dado de la atencion, análisis, &c. La definicion debe ser breve, clara, y no contener al definido.

Problema es una proposicion en que se enuncia que por medio de ciertas cosas conocidas debemos averiguar alguna desconocida. Estas proposiciones se conocen en que principian por el infinitivo ó imperativo del verbo. El problema consta de resolucion y demostracion; en la resolucion se dan las reglas para encontrar lo que se busca; y en la demostracion se hace ver que practicando dichas reglas, se llegará á tener lo que se pedia.

Postulado es un axioma enunciado en particu-

lar : como cuando se dice *en vez de un peso duro se pueden tomar cinco pesetas*.

Escolio es una proposicion en que se explica ó advierte alguna cosa.

Lema es una proposicion que perteneciendo á otro asunto diferente del que se trata , se enuncia para que sirva de ilustracion ó principio de lo mismo que se va á tratar.

Tambien hay proposiciones condicionales ; la parte en que entra la condicion se llama *hipótesis* ; y la otra , que es lo que se asegura , se llama *tésis*.

Esto supuesto , se llama *ciencia* el conjunto de todas las proposiciones evidentes y ciertas pertenecientes á un asunto , enlazadas entre sí con cierto orden.

Este orden ó dependencia es lo que se llama *método* , que es el orden que se sigue en la adquisicion (ó esposicion) de nuestros conocimientos. La circunstancia esencial del método es que se proceda siempre de lo conocido á lo desconocido ; si se nos dan conocidas las partes , y por ellas hemos de venir en conocimiento del todo , el método se llama *sintético* ó *de composicion* ; y si , conocido el todo , hemos de conocer sus partes , el método se llama *analítico* ó *de descomposicion*.

Si observamos un cuerpo cualquiera , v. g. un libro , le hallarémos dotado de muchas propiedades , como son : ocupar un espacio cualquiera , que se llama *estension* ; no poder ocupar otro cuerpo el mismo espacio que él á un mismo tiempo , que se llama *impenetrabilidad* ; serle indiferente el moverse ó estarse quieto , que se

llama *inercia* ; poder ser trasladado de una parte del espacio á otra , que se llama *movilidad* ; poder permanecer siempre en un mismo sitio , que se llama *quiescibilidad* ; dirijirse hácia la tierra inmediatamente que le falta el apoyo que le sostiene , que se llama *gravedad* ; el estar terminado de esta ó de la otra manera , que es lo que constituye su *forma* ó su *figura* , y se llama *figurabilidad* , &c. &c. ; y tambien la de poder ser mayor ó menor , que se llama *cantidad* ; de manera que cantidad es *todo lo que puede aumentar ó disminuir*.

La cantidad se divide en *discreta* y *continua* ; discreta es *aquella cuyas partes no tienen ninguna trabazon ni enlace* , como un monton de pesos duros ; y continua es *aquella cuyas partes están unidas entre sí* , como las partes de plata que componen un duro. La cantidad forma el objeto de las *Matemáticas* ; de manera que entendemos por *Matemáticas las ciencias que tratan de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad*. Como esta sólo es susceptible de aumento ó disminucion , las *Matemáticas sólo podrán espresar, componer y descomponer las cantidades* ; y cuando se ejecuta cualquiera de estas operaciones , se dice que se *calcula*.

Las *Matemáticas* se dividen en *puras* y *mistas* ; se llaman puras *las que tratan de la cantidad con la mayor abstraccion* ; y mistas son *las que consideran la cantidad en alguna de las propiedades de los cuerpos*. Los ramos de las *Matemáticas puras* son dos : uno que trata de la cantidad discreta , que se llama *Aritmética universal* , que se divide en *Aritmética propiamente dicha* y en *Álgebra* ; y otro que trata de la cantidad continua ó de la

estension, que se llama *Geometría*. Los tratados de las Matemáticas mistas son tantos como propiedades tienen los cuerpos; y aun una misma propiedad da oríjen á diferentes tratados. Por ejemplo: el movimiento considerado en los cuerpos terrestres sólidos, da oríjen á la *Dinámica*; considerado en los líquidos, origina la *Hidrodinámica* ó *Hidráulica*; considerado en los cuerpos celestes, origina la *Astronomía*, &c. &c. &c.

Estas nociones estudiadas con buen método, son suficientes para poder comprender todos los conocimientos que vamos á esponer.

~~~~~

*Nombre, figura y valor de algunas letras griegas,  
de que harémos uso en adelante.*

| <u>Nombre.</u> | <u>Figura.</u>     | <u>Valor.</u> |
|----------------|--------------------|---------------|
| Alfa           | $\alpha$           | <i>a</i>      |
| Beta           | $\beta$            | <i>b</i>      |
| Gama           | $\gamma$           | <i>g</i>      |
| Delta          | $\Delta$           | <i>D</i>      |
| Tzeta          | $\theta$           | <i>tz</i>     |
| Lambda         | $\lambda$          | <i>l</i>      |
| Pi             | $\pi, \varpi, \Pi$ | <i>p, P</i>   |
| Sigma          | $\Sigma$           | <i>S</i>      |
| Fi             | $\phi$             | <i>f</i>      |
| Psi            | $\psi$             | <i>ps</i>     |



# ARITMÉTICA.

*Nociones preliminares, numeracion, division y subdivision de las unidades de pesos y medidas.*

1 **S**e llama *unidad* cualquier cantidad que se elije ó toma para que sirva de término de comparacion ó medida respecto de todas las de su especie. V. g. en una cantidad de dinero espresada en *reales*, sirve el real de unidad; espresada en *duros*, sirve el duro, &c.

El agregado ó conjunto de varias unidades forma lo que se llama *número*. O de otro modo: cuando comparamos una cantidad de dinero con un duro (ó real, &c.) con el fin de averiguar los duros (ó reales, &c.) que hay, el resultado de esta comparacion se llama *número*. Así, cuando despues de haberlos contado decimos que hay *tantos* duros (ó reales), la palabra *tantos* es el número.

Y se llama Aritmética la *ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad espresada por números*.

2 La Aritmética sólo puede hacer con los números las tres operaciones de *espresarlos, componerlos y descomponerlos*. La parte que trata de espresar los números, se llama *numeracion*. Esta puede ser *hablada*, y puede ser *escrita*; la numeracion hablada consiste en *espresar con palabras las diferentes colecciones de unidades*.

3 Para darla á conocer observaremos que cualquier objeto que nos presenta la naturaleza, es en sí lo que llamamos *uno*; esto supuesto, el agregado de uno y uno, se espresa con la palabra *dos*, y por lo tanto *dos* equivale á *uno y uno*; para espresar el conjunto de dos y uno, se usa de la palabra *tres*; tres y uno se espresa con la palabra *cuatro*; cuatro y uno con la palabra *cinco*; cinco y uno con la palabra *seis*;

A

T. I.



seis y uno con la palabra *siete*; siete y uno con la palabra *ocho*; ocho y uno con la palabra *nueve*; nueve y uno con la palabra *diez*.

4 Ahora se toma esta coleccion de diez unidades por una nueva unidad, que se llama *unidad de decena*, y se continúa contando por decenas y unidades, diciendo: *diez y uno*, *diez y dos*, &c.; más por una irregularidad del lenguaje, en vez de *diez y uno* se dice *once*; en vez de *diez y dos* se dice *doce*; en vez de *diez y tres* se dice *trece*; en vez de *diez y cuatro* se dice *catorce*; en vez de *diez y cinco* se dice *quince*; y despues se continúa regularmente *diez y seis*, *diez y siete*, *diez y ocho*, *diez y nueve*; y para espresar *dos dieces* ó *decenas* se usa de la palabra *veinte*, y se continúa diciendo: *veintiuno*, *veintidos*, *veintitres*,... *veintinueve*; y para espresar *tres dieces* ó *decenas* (y en general cualquier coleccion de decenas) se modifica la palabra *tres* (ó cuatro, cinco, &c.) que las espresa, con la terminacion *enta*, y se dice *treinta*; despues se continúa: *treinta y uno*, *treinta y dos*, *treinta y tres*,... *treinta y nueve*; *cuatro dieces* ó *cuarenta*, *cuarenta y uno*, *cuarenta y dos*,... *cuarenta y nueve*;  *cincuenta*, *cincuenta y uno*... *cincuenta y nueve*; *sesenta*, *sesenta y uno*.... *sesenta y nueve*; *setenta*, *setenta y uno*,... *setenta y nueve*; *ochenta*, *ochenta y uno*,... *ochenta y nueve*; *noventa*, *noventa y uno*,... *noventa y nueve*; *diez dieces* ó *decenas*, que se espresan con la palabra *ciento*.

5 Esta coleccion de diez decenas se toma por una nueva unidad, que se llama *centena*, y se continúa contando por centenenas, decenas y unidades, diciendo: *ciento*, *ciento y uno*,... *ciento y diez*,... *ciento cincuenta y seis*,... *doscientos*,... *doscientos ochenta y cuatro*,... *trescientos*,... *cuatrocientos*,... *quinientos*,... *seiscientos*,... *setecientos*,... *ochocientos*,... *novecientos*,... *novecientos noventa y nueve*. Añadiendo *uno* tendríamos *diez cientos*, que se espresa con la palabra *mil*; se toma por una nueva unidad, que se llama *millar*, y se continúa contando por millares, cen-



tenas, decenas y unidades, hasta tener un millar de millares, que se llama millon; este se vuelve á tomar por unidad, y se continúa contando por millones, centenas de millar, decenas de millar, millares, centenas, decenas y unidades, hasta tener un millon de millones, que se llama billon. Despues se continúa contando hasta un millon de billones, que se llama trillon; y así sucesivamente cuadrillon, quintillon, sestillon, &c. &c.; de modo que sólo con las trece palabras uno, dos, tres, euatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, ciento, mil y la millon modificada, se pueden espresar todos los números de que puede necesitar el hombre.

6 La numeracion escrita consiste en espresar todos estos números con pocos signos, que se llaman cifras, guarismos ó caractéres. La que nosotros vamos á esplicar consta de los diez guarismos siguientes

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0;  
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, cero;

y cada uno espresa la palabra que tiene debajo; advirtiéndole que el carácter 0 significa la idea que tenemos de la nada, y sólo sirve para ocupar en los números el lugar en donde falte alguna especie de unidades.

7 Para espresar con estas diez cifras todos los números posibles, se considerará cada una de ellas con dos valores: uno absoluto, que es el que le acabamos de fijar; y otro, relativo al lugar que ocupa contando de derecha á izquierda. Así, el guarismo 4 v. g. siempre espresará cuatro cosas; pero si está en el primer lugar de derecha á izquierda, serán cuatro unidades; si está en el segundo cuatro decenas, &c.

8 En general, el primer lugar, contando de derecha á izquierda, está destinado para las unidades; el segundo para las decenas; el tercero para las centenas; el cuarto para los millares; el quinto para las decenas de millar; el sexto para las centenas de millar; el séptimo para los millones; el octavo para las decenas de millon; el noveno para las centenas de



*millon; el décimo para los millares de millon; el undécimo para las decenas de millar de millon; el duodécimo para las centenas de millar de millon; el décimotercero para los billones; el décimocuarto para las decenas de billon; el décimoquinto para las centenas de billon; el décimosesto para los millares de billon; el décimoséptimo para las decenas de millar de billon; el décimo-octavo para las centenas de millar de billon; el décimonono para los trillones; y así sucesivamente; el vigésimoquinto para los cuadrillones.... el trigésimoprimo para los quillones, &c.*

9 Esto supuesto, para escribir los números, se seguirán las reglas de una rigurosa traducción; esto es, se colocarán sucesivamente los guarismos que expresen el número de unidades de cada orden, los unos al lado de los otros, principiando por la izquierda, teniendo bien presente la sucesión de estos órdenes para no omitir ninguno, y ocupando con ceros los lugares de los órdenes de unidades que puedan faltar.

10 La razón de empezar á escribir por la izquierda, es que la unidad de especie superior es la que está mas á la izquierda, y cuando enunciamos un número, principiamos por la especie superior.

11 Así, si quiero escribir el número *cincuenta y siete mil, seiscientos y tres*; lo primero escribiré la palabra *cincuenta*, que equivale (4) á cinco decenas; por consiguiente, pondré en primer lugar un 5, que para que sean decenas debe seguir (8) á su derecha otro guarismo, el cual ha de ser el que espese las unidades; y como despues de cincuenta sigue la palabra *siete*, infiero que despues del 5 debo poner un 7 y tendré 57, con lo que están escritas las palabras *cincuenta y siete*. Ahora sigue la palabra *mil*, lo que me indica que para que el 57 espese millares, faltan aun tres cifras (8); y como la primera que debe seguir es la que espese las centenas, y en el número dice *seiscientos*, escribiré el guarismo 6 para espesarlas, y tendré 576. Despues debe seguir el guarismo que espese las decenas; y como el núme-



ro dado no las tiene (pues no hay en él las palabras *diez*, *veinte*, *treinta*,... *noventa*, que las espresan), pondré 0 y tendré 5760. Aun faltan las unidades; y como en el número propuesto dice *tres*, escribiré el guarismo 3 despues del 0 y tendré 57603, que espresa el número que se queria.

12 Con la misma facilidad se escribirá cualquier otro número, aunque sea mas complicado. V. g. si quiero escribir el número *ocho mil quinientos sesenta y tres millones, doscientos cuarenta y seis mil*; lo primero escribiré por lo dicho ántes 8563, con lo que tendré escritas las palabras *ocho mil quinientos sesenta y tres*. Como despues sigue la palabra *millones*, me da á conocar que faltan aun seis cifras (8), y la primera que debe seguir es la que espresa las centenas de millar; y como el número dice (ántes de la palabra *mil*) *doscientos*, el primer guarismo que debo poner es el 2, y tendré 85632. Ahora han de seguir las decenas de millar; y como dice *cuarenta*, tendré que poner el 4 y me resultará 856324. Despues siguen los millares; y como dice *seis*, pondré el guarismo 6 y tendré 8563246. Despues deberán seguir las centenas, decenas y unidades que haya en el número propuesto; y como despues de las palabras *seis mil* no sigue nada, pondré tres ceros y tendré 8563246000, que espresa el número dado. Hé aquí varios ejemplos para que se ejerciten los prinpiantes.

1.º El número *trescientos cuarenta* se escribe 340.

2.º El número *siete mil cincuenta y ocho* se escribe 7058.

3.º El número *noventa mil seiscientos diez* se escribe 90610.

4.º *Doce millones, treinta y ocho mil setecientos cuatro* se escribe 12038704.

5.º *Quinientos tres mil millones y noventa* se escribe 503000000090.

13 Para leer un número cuando está escrito, se observará el lugar que ocupa cada guarismo y la especie de unidades que espresa, y se pronuncia la pa-



labra correspondiente á cada uno. Esto es fácil, si el número tiene pocos guarismos; pero si es complicado se divide en porciones de seis guarismos, empezando por la derecha; en la primera separacion se pone un 1, bien sea por la parte de arriba ó bien por la de abajo; en la segunda un 2; en la tercera un 3, &c.; despues se divide cada porcion de seis guarismos en dos de tres con una coma; y se empieza leyendo por la izquierda, pronunciando mil donde se encuentre una coma, y donde se halle un 1, un 2, un 3, &c. millon, billon, trillon, &c., y luego al fin se pronuncia unidades. Ejecutando esto con el número

468321572057002154300807

tendré 468,321<sub>3</sub> 572,057<sub>2</sub> 002,154<sub>1</sub> 300,807

que se lee: *cuatrocientos sesenta y ocho mil, trescientos veintiun trillones, quinientos setenta y dos mil cincuenta y siete billones, dos mil ciento cincuenta y cuatro millones, trescientos mil ochocientas y siete unidades.*

14 Ahora, si á un número cualquiera se le pone un cero á la derecha, se le hace diez veces mayor; porque su último guarismo que ántes espresaba unidades, ahora espresa decenas; las decenas, centenas, &c. del primitivo, se habrán hecho tambien diez veces mayores; luego habiéndose hecho cada parte diez veces mayor, lo habrá quedado el todo (intr. ax. 3.<sup>o</sup>). Del mismo modo se demostraria que añadiendo dos ceros, se hace el número cien veces mayor, &c.

15 Los números se dividen en *abstractos* y *concretos*; se llaman abstractos los que no determinan la especie de unidades, como cinco, veinte, y todos los que hemos considerado ántes; y concretos son los que la determinan, como cinco hombres, seis manzanas, &c.

Los números concretos se subdividen en *homojéneos* y *heterojéneos*; se llaman homojéneos los que espresan unidades de una misma especie, como 5 hombres, 60 hombres, &c.; y heterojéneos los que se



refieren á diferentes unidades , como 20 hombres, 80 manzanas , &c.

El número se llama *dijito* ó *simple* , cuando se escribe con un solo guarismo ; y *compuesto* , cuando se escribe con mas.

Ademas , el número se divide en *entero* , *quebrado* , *misto* , *fraccionario* y *quebrado de quebrado*. Entero es el que se compone exactamente de unidades, como todos los considerados hasta aquí; quebrado el que espresa partes de la unidad, como tres cuartos, dos quintos , &c.; misto el que se compone de entero y quebrado , como cuatro y medio ; fraccionario es aquel en que , contando por partes de la unidad , se llega á tener una unidad ó mas de una unidad, como tres tercios , cinco tercios ; y por último , quebrado de quebrado es el que espresa partes de partes de la unidad , como los tres cuartos de dos quintos , &c.

16 En los pesos y medidas españolas se observa la ley siguiente.

Las medidas de longitud se refieren al *pie* ; este se divide en 16 *dedos* , y el dedo en *mitad* , *cuarta* , *ochava* , y *diez y seisava parte* ; tambien se divide en 12 *pulgadas* , y la pulgada en 12 *líneas*.

La *vara* se compone de tres pies , y la *legua* de 20000 pies.

17 La primera de las medidas agrarias es el *estadal cuadrado* , que es un cuadro de 4 varas , ó 12 pies de largo y otro tanto de ancho. Despues sigue la *aranzada* , que se compone de 20 estadales en cuadro ; y luego la *fanega de tierra* , que se compone de 24 estadales en cuadro. La fanega de tierra se divide en 12 *celemines* , y el celemín en 4 *cuartillos*.

18 Para los granos , la sal y demas cosas secas, la unidad de especie superior es el *cahiz* , que se compone de 12 *fanegas* , y la fanega de 12 *celemines* ; tambien se divide la fanega en 2 *medias fanegas* y en 4 *cuartillas*.

19 Para los líquidos , escepto el aceite , se usa de la *cántara* ó *arroba* , que se divide en 2 *medias*



*cántaras*; la media cántara en 2 *cuartillas*; la cuartilla en 2 *azumbres*; la azumbre en 2 *medias azumbres*; la media azumbre en 2 *cuartillos*; el cuartillo en 2 *medios cuartillos*; el medio cuartillo en 2 *copas*; de modo que la cántara tiene 32 cuartillos. El *moyo* se compone de 16 cántaras.

Esceptuamos el aceite, porque sus medidas están arregladas al peso; y así se usa de la *arroba*, *media arroba*, *cuartilla* ó *cuarto de arroba*, *libra*, *media libra*, *cuarteron* ó *panilla*, y de la *media panilla*.

20 Para las cosas que se venden al peso, la unidad de especie superior es el *quintal*, que se compone de 4 *arrobas*; la arroba de 25 *libras*; la libra de 16 *onzas*; la onza de 16 *adarmes*; el adarme de 3 *tomines*, y el tomin de 12 *granos*. La libra se divide en 2 *medias libras*, en 4 *cuarterones*, y en 8 *medios cuarterones*; la onza en 2 *medias onzas*, en 4 *cuartas* y en 8 *ochavas* ó *dracmas*; la libra se divide tambien en 2 *marcos*, y el marco en 8 *onzas*.

21 En la moneda la unidad de especie superior es el *doblon*, que se compone de 4 *pesos*; el peso de 15 *reales*, y el real de 34 *maravedises*.

22 En el tiempo se observa la siguiente division: el *siglo* se compone de 100 *años*; el año de 12 *meses*, ó de 365 dias y algo mas; el mes de 28, 30, ó 31 *dias*; el dia de 24 *horas*; la hora de 60 *minutos*; el minuto de 60 *segundos*, &c.

#### *De la operacion de sumar ó de la adicion.*

23 Aunque es verdad que dado un número sólo se le podrá hacer mayor ó menor, los diferentes modos que hay de aumentar ó disminuir los números, conducen á seis operaciones, que son: *sumar*, *restar*, *multiplicar*, *dividir*, *elegar á potencias* y *extraer raices*.

Sumar es *reunir en un solo número el valor de dos ó mas homojéneos*; la operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *adicion*; los números



que se dan para sumar, *sumandos*; y lo que resulta de la operacion, *suma*. Los sumandos han de ser homojéneos, porque un número de hombres, por ejemplo, no puede aumentar uno de caballos &c.

Se indica esta operacion poniendo entre los sumandos este signo +, que se lee *mas*. Así, la expresion  $5+3$  se lee: *cinco mas tres*; y para indicar que despues de hecha esta suma resulta 8, se pone el signo =, que se lee *igual*; de manera que la expresion  $5+3=8$ , se lee: *cinco mas tres igual ocho*.

24 Para poder sumar es necesaaio saber perfectamente lo que componen juntos de dos en dos, los números dígitos, cuyas sumas son las contenidas en la siguiente

*Tabla para sumar.*

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 1 y 1 son 2   | 2 y 2 son 4   | 3 y 3 son 6   |
| 1 y 2..... 3  | 2 y 3..... 5  | 3 y 4..... 7  |
| 1 y 3..... 4  | 2 y 4..... 6  | 3 y 5..... 8  |
| 1 y 4..... 5  | 2 y 5..... 7  | 3 y 6..... 9  |
| 1 y 5..... 6  | 2 y 6..... 8  | 3 y 7..... 10 |
| 1 y 6..... 7  | 2 y 7..... 9  | 3 y 8..... 11 |
| 1 y 7..... 8  | 2 y 8..... 10 | 3 y 9..... 12 |
| 1 y 8..... 9  | 2 y 9..... 11 |               |
| 1 y 9..... 10 |               |               |
| 4 y 4 son 8   | 5 y 5 son 10  | 6 y 6 son 12  |
| 4 y 5..... 9  | 5 y 6..... 11 | 6 y 7..... 13 |
| 4 y 6..... 10 | 5 y 7..... 12 | 6 y 8..... 14 |
| 4 y 7..... 11 | 5 y 8..... 13 | 6 y 9..... 15 |
| 4 y 8..... 12 | 5 y 9..... 14 |               |
| 4 y 9..... 13 |               |               |
| 7 y 7 son 14  | 8 y 8 son 16  |               |
| 7 y 8..... 15 | 8 y 9..... 17 |               |
| 7 y 9..... 16 | 9 y 9..... 18 |               |

25 Sabida la tabla, se saben sumar de memoria todos los números dígitos; y para sumar un número



compuesto con un dígito, se añadirá el dígito á las unidades del compuesto, y se pronunciará el todo; si de la suma del dígito con las unidades del compuesto resulta alguna decena, se pronuncia en la suma la decena inmediatamente mayor á la que lleve el compuesto. V. g. 25 y 4 (diciendo: 5 y 4 son 9) son 29; 27 y 8 (diciendo 7 y 8 son 15) son 35, &c.

26 Entendido esto, para sumar toda clase de números enteros resolverémos el siguiente

Problema. Sumar números enteros.

Resolucion. Colóquense todos los sumandos, los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, &c.; tírese despues una raya; empiécese á sumar por la columna de las unidades, y súmense todas las de los sumandos: esta suma se compondrá ó de unidades solas, ó de decenas solas, ó de decenas y unidades; si se compone sólo de unidades, se pone debajo de la raya el guarismo que las expresa, de modo que se corresponda con las unidades de los sumandos; si se compone sólo de decenas, se pondrá o debajo de las unidades de los sumandos, y las decenas se guardarán para sumarlas con las de la columna siguiente; si hay decenas y unidades, se colocan las unidades debajo de las unidades, y se guardan las decenas para sumarlas con las de la columna inmediata. Despues se suma la columna de las decenas, teniendo cuidado de sumar con el primer guarismo las que resultaron de la suma de las unidades: esta suma de decenas se compondrá ó de decenas solamente, ó sólo de centenas, ó de centenas y decenas; si sólo contiene decenas, se pone debajo de la columna de las decenas el guarismo que las expresa; si tiene solamente centenas, se pone o debajo de las decenas, y se guardan las centenas que resulten para sumarlas con las de los sumandos; si contiene centenas y decenas, se colocan las decenas debajo de las decenas, y las centenas se guardan para sumarlas con las de la columna de la izquierda. Luego, se



pasa á sumar las centenas, teniendo cuidado de añadir al primer guarismo las que se llevaban de la suma de las decenas; y si en la suma de las centenas hay millares, se guardan para sumarlos con los de la columna inmediata; y así se continúa hasta llegar á la última columna de la izquierda, de cuya suma si resulta alguna ó algunas unidades de especie superior, se ponen á la izquierda del guarismo últimamente puesto; y el número que resulta debajo de la raya es la suma pedida.

*Ejemplo.* Si quiero sumar los números 3572, 696, 57 y 709, los pondré los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, &c.; tiraré despues una raya en esta forma:

|                                                        |      |
|--------------------------------------------------------|------|
| Empiezo á sumar por las unidades, y                    | 3572 |
| digo: 2 unidades y 6 son 8, y 7 son 15,                | 696  |
| y 9 son 24; en 24, que son unidades,                   | 57   |
| hay 2 decenas y 4 unidades; coloco las 4               | 709  |
| unidades debajo de la columna de las uni-              | —    |
| dades, y guardo las 2 decenas para su-                 | 5034 |
| marlas con las de la columna siguiente, en             |      |
| que digo: 7 decenas, y 2 que llevaba de la suma de     |      |
| las unidades, son 9 decenas, y 9 son 18, y 5 son       |      |
| 23, y 0 son 23; en 23, que son decenas, hay tres       |      |
| decenas y 2 centenas; por lo cual pongo un 3 de-       |      |
| abajo de las decenas, y guardo las 2 centenas para su- |      |
| marlas con las de la columna inmediata, diciendo:      |      |
| 5 centenas, y 2 que llevaba, son 7 centenas, y 6       |      |
| son 13, y 7 son 20; en 20, que son centenas, hay       |      |
| 2 millares justos y ninguna centena; por lo que pon-   |      |
| go 0 debajo de las centenas, y guardo los 2 millares   |      |
| para la columna inmediata, en que digo: 3 y 2 que      |      |
| llevaba son 5, que pongo debajo de los millares; y     |      |
| como ya no hay mas guarismos, digo que la suma de      |      |
| los números propuestos es cinco mil treinta y cuatro.  |      |

*Escolio.* Al sumar cada columna no se necesita ir repitiendo si son unidades, decenas, &c.; pues como por el sistema de numeracion cada diez unidades com-



ponen una de especie superior, se suman los guarismos de cada columna como si sólo espresasen unidades, y despues de colocar debajo de la columna que se suma, las unidades sencillas que resulten, se llevan para la columna inmediata tantas unidades como decenas resultaron en la suma de la columna anterior.

27 Como el problema consta de resolucion y demostracion, y hasta ahora sólo hemos dado la resolucion, nos falta la segunda parte que es la

*Demostracion.* La colocacion de los sumandos es por comodidad; el tirar la raya es por claridad, esto es, para que no se confunda la suma con los sumandos; todo lo demas está reducido á que en el número de debajo de la raya están todas las unidades, decenas, centenas, &c., esto es, todas las partes de los sumandos; y como lo que se hace con las partes (intr. ax. 3.º) queda hecho con el todo, se infiere que el número que está debajo de la raya es la suma de todos los sumandos, *que era lo que debia hacer y demostrar*, que se espresa: L. Q. D. H. y D.

*Esc.* Si fuesen muchos los sumandos, se podrian hacer varias sumas de á seis ú ocho sumandos cada una, y luego se sumarian estas sumas; pero es mejor acostumbrarse á hacer siempre la operacion de una vez, como se ve en los siguientes ejemplos.

|               |                |                |               |
|---------------|----------------|----------------|---------------|
| 1.º           | 3.º            | 4.º            | 5.º           |
| 4723          | 45638          | 49673          | 35286         |
| 87412         | 7946           | 35486          | 5732          |
| 7029          | 369204         | 359864         | 93468         |
| 379408        | 70803          | 68397          | 74253         |
| <u>478572</u> | 974932         | 75386          | <u>208739</u> |
|               | 67960          | 8535           |               |
| 2.º           | 540316         | 56384          | 6.º           |
| 7537          | 47210          | 724836         | 38497         |
| 96425         | 204562         | 97537          | 98704         |
| 17584         | 38930          | 35791          | 2746          |
| 2563          | <u>2367501</u> | <u>1511889</u> | 4821          |
| <u>124109</u> |                |                | <u>144768</u> |



*De la operacion de restar ó de la sustraccion.*

28 La primera operacion de disminuir es la de *restar*, que es *averiguar la diferencia entre dos números homojéneos*; la operacion por medio de la cual se ejecuta esto, se llama *sustraccion*; el número de que se ha de restar, *minuendo*; el que se resta, *sustraendo*; y lo que resulta de la operacion, se llama *resta*, *exceso ó diferencia*.

El minuendo y sustraendo deben ser homojéneos por razones análogas á las dichas (23).

Se conoce el minuendo en que lleva siempre antepuesta la preposicion *de*; y para indicar una operacion de restar se escribe el minuendo, despues este signo  $-$ , que se lee *ménos*, y luego el sustraendo que es el otro número; y para indicar el resultado se pone el signo  $=$ . Así, la espresion  $7-4=3$ , quiere decir, que *despues de quitar 4 de 7 quedan 3*, y se lee: *siete ménos cuatro igual tres*.

29 Entendido esto, pasemos á resolver el siguiente Problema. *Restar números enteros.*

Res. *Colóquese el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, &c.; tírese despues una raya debajo del sustraendo; véase las unidades que faltan á las del sustraendo para que tenga las mismas que el minuendo, y las que le falten se ponen debajo de la raya en la columna de las unidades; ejecútese lo mismo con las decenas, centenas, millares, &c., y el número que salga debajo de la raya será la resta.*

*Ejemp.* Si de 47835 quiero restar 23512, veré que el número que lleva la preposicion *de* es el 47835; por consiguiente este es el minuendo, y por lo mismo colocaré el sustraendo 23512 debajo de él, como aquí se ve:

|  |                                                       |
|--|-------------------------------------------------------|
|  | 47835                                                 |
|  | 23512                                                 |
|  | <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/> |
|  | 24323                                                 |

Y despues de tirada la raya, diré: de 2 unidades á 5 unidades van 3, que pongo debajo de la raya en la columna de las



unidades; de 1 decena á 3 van 2, que pongo debajo de la raya en la columna de las decenas; de 5 centenas á 8 van 3, que pongo debajo; de 3 millares á 7 van 4, que pongo debajo; de 2 decenas de millar á 4 van 2, que pongo debajo de su columna correspondiente; y tendré que la diferencia entre los dos números propuestos es 24323.

*Dem.* El colocar el sustraendo debajo del minuendo es por comodidad, y el tirar la raya por claridad; todas las demas reglas se reducen á que por ellas encontramos la diferencia entre las unidades de los dos números propuestos, la de las decenas, la de las centenas, &c., esto es, que hallamos la diferencia de todas las partes de los números dados; y como todas estas diferencias las hemos ido colocando las unas al lado de las otras en sus lugares correspondientes, resulta que su conjunto formará (intr. ax. 2.<sup>o</sup>) la diferencia total. L. Q. D. H. y D.

30 Al ejecutar las restas parciales no se necesita repetir si son unidades, decenas, &c., sino hacer siempre la resta como si fuesen unidades sencillas. V. g. si quiero restar 47305 de 58639, los colocaré como aquí se presenta:

|                                                                                                            |                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
|                                                                                                            | 58639                      |
| Y despues de tirada la raya diré: de 5                                                                     | 47305                      |
| á 9 van 4, que pongo debajo; de 0 á 3 van                                                                  | <hr style="width: 100%;"/> |
| 3; de 3 á 6 van 3; de 7 á 8 va 1, y de 4                                                                   | 11334                      |
| á 5 va 1; y colocando estas diferencias en sus lugares respectivos, digo que la diferencia total es 11334. |                            |

31 En la operacion de restar sucede con frecuencia que algunos guarismos del minuendo sean menores que los correspondientes del sustraendo. En este caso se toma una unidad del guarismo inmediato de la izquierda del minuendo, la cual como vale diez respecto del guarismo que se considera, se le añaden á este, y de su suma se resta el guarismo del sustraendo; y cuando se pasa á restar el otro, se considera el guarismo del minuendo con una unidad menos; pero es mas análogo con el modo de proceder en



las demas operaciones, dejar los guarismos del minuendo como lo que sean, y añadir una unidad al correspondiente del sustraendo. V. g. si quiero hallar la diferencia entre 58276 y 23848, los colocaré como he dicho (29) y aquí se ve:

|                                                                                                                                                                     |       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
|                                                                                                                                                                     | 58276 |
| Y despues de tirada la raya diré: de 8 á 6 no puede ser, es decir, que al 8 no le faltan ningunas unidades para convertirse en 6, ó que no puedo quitar 8 al que no | 23848 |
|                                                                                                                                                                     | 34428 |

tiene mas de 6; por lo mismo tomo una unidad del guarismo inmediato 7, que como vale 10 respecto de las del 6, las sumo y tengo 16, de cuya suma ya puedo restar el 8 diciendo: de 8 á 16 van 8 que pongo debajo; ahora podria considerar el 7 como 6, por haberle quitado una unidad, y decir de 4 á 6 van 2; pero es mejor acostumbrarse á añadir dicha unidad al guarismo del sustraendo; y así, diré: 4 y 1 que llevo son 5, de 5 á 7 van 2 que coloco debajo; paso á la columna inmediata y digo: de 8 á 2 no puede ser; tomaré una unidad del guarismo inmediato, y hallaré que de 8 á 12 van 4, que pongo debajo, y llevo 1; 3 y 1 que llevo son 4, de 4 á 8 van 4 que pongo, y no llevo nada; de 2 á 5 van 3 que pongo debajo, y resulta la diferencia 34428.

32 Tambien suele ocurrir en esta operacion *el que el minuendo termine en ceros, ó que tenga ceros entre sus guarismos significativos*; en cuyo caso se deja el minuendo como lo que es, y se añade una unidad al guarismo del sustraendo, siempre que para restar el anterior se haya tenido que tomar unidad auxiliar. V. g. si de 370480000 quiero restar 35729486, los colocaré como aquí se ve:

|                                                                                                                                                                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Y despues de tirada la raya diré:                                                                                                                                                                                   | 370480000 |
| de 6 á 10 van 4, y de 10 llevo 1;                                                                                                                                                                                   | 35729486  |
| 8 y 1 son 9, á 10 va 1, y de 10 llevo 1; 1 y 4 son 5, á 10 van 5, y llevo 1; 1 y 9 son 10, á 10 va cero, y llevo 1; 1 y 2 son 3, á 8 van 5, y no llevo nada; de 7 á 14 van 7, y llevo 1; 1 y 5 son 6, á 10 van 4, y | 334750514 |



llevo 1; 1 y 3 son 4, á 7 van 3, y no llevo nada; y como del 3 que queda á la izquierda no tengo nada que restar, le pongo debajo.

33 La razon de esta práctica, contrayéndonos al primer ejemplo, es que para poder restar el 8 tuve que tomar una unidad auxiliar del 7; de donde se infiere que al restar el 4 no se debe considerar al 7 mas que como 6; pero si dejo al 7 como lo que es, y cuando voy á restar el 4 tengo cuidado de quitarle una mas, resulta que cualquier práctica es igualmente segura, aunque la segunda es preferible.

Otros ejemplos de sustraccion.

| 1.º     | 2.º     | 3.º     | 4.º     | 5.º     |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 3571042 | 4268013 | 1350304 | 2570842 | 3204005 |
| 683475  | 586435  | 584258  | 643576  | 863957  |
| 2887567 | 3681578 | 0766046 | 1927266 | 2340048 |

#### *De la multiplicacion.*

34 La segunda operacion de aumentar es la de *multiplicar*. Esta es el caso particular de la suma en que todos los sumandos son iguales; y así, se dice que multiplicar es tomar un número tantas veces como unidades tiene otro. La operacion se llama *multiplicacion*; el número que se ha de tomar, se llama *multiplicando*; aquel que con sus unidades espresa las veces que se ha de tomar el multiplicando, se llama *multiplicador*; y lo que resulta de la operacion se llama *producto*; el multiplicando y multiplicador juntos, se llaman *factores* del producto.

La operacion de multiplicar se indica escribiendo el multiplicando, despues un punto ó este signo  $\times$ , y luego el multiplicador; así, 4.5 ó  $4 \times 5$  indica que se ha de multiplicar el 4 por el 5; y para indicar el resultado se usa tambien del signo  $=$ ; de manera que  $4.5 = 20$ , ó  $4 \times 5 = 20$ , espresa que el producto de multiplicar 4 por 5 es 20, y se lee: 4 *multiplicado por*



5 igual 20. Ocurre con mucha frecuencia el hacer oficios de multiplicando ó de multiplicador, sumas ó restas indicadas; en este caso se encierran en un paréntesis de este modo:  $(3+1) \times (7-2) = 20$ ;

que quiere decir que la suma de 3 con 1 que es 4, se debe multiplicar por lo que queda de restar 2 de 7 que es 5; y por eso hemos puesto el producto 20.

35 La definicion de la multiplicacion manifiesta que el producto debe ser de la misma especie que el multiplicando; y el multiplicador debe ser un número abstracto, que sólo dice las veces que se ha de tomar ó sumar el multiplicando. En algunas cuestiones conviene distinguir los factores; más en el producto no influye el que se truequen sus oficios, como vamos á manifestar en el siguiente

36 Teorema. *El orden de los factores no altera el producto.*

*Explicacion.* Si quiero multiplicar 5 por 4, voy á demostrar que el producto será el mismo, ya multiplique el 5 por el 4, ó ya el 4 por el 5.

*Dem.* Pues que la multiplicacion es una suma abreviada, tendré que sumando cuatro veces el 5, hallaré el producto que busco; pero si descompongo á cada 5 en las cinco unidades de que consta, deberé sacar el mismo resultado de sumar estas unidades que de sumar los cuatro 5 á que equivalen; por lo mismo, indicando y ejecutando la operacion como aquí se ve:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Observo que el conjunto de unidades que están á la derecha del signo de igualdad, equivalen á los cuatro 5 que están en columna; pero estas mismas unidades, sumadas, equivalen á los cinco 4 que hay debajo de la raya; luego si cuatro 5 equivalen á cinco 4, será cuatro veces un 5 igual cinco veces un 4; y por lo mismo cuatro veces 5 es igual á cinco veces 4 ó $4 \times 5 = 5 \times 4$ , que era L. Q. D. D. | $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ <hr style="border: 1px solid black;"/> $20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

B

T. I.



37 Entendido esto, para poder ejecutar una multiplicacion, es indispensable saber perfectamente los productos que resultan de multiplicar entre sí los números dígitos, que son los contenidos en la siguiente:

*Tabla de los productos de los números dígitos.*

|                          |                 |                 |
|--------------------------|-----------------|-----------------|
| 1 por 1 es 1             | 2 por 2..... 4  | 3 por 3 son 9   |
| 1 por 2..... 2           | 2 por 3..... 6  | 3 por 4..... 12 |
| 1 por 3..... 3           | 2 por 4..... 8  | 3 por 5..... 15 |
| 1 por 4..... 4           | 2 por 5..... 10 | 3 por 6..... 18 |
| 1 por 5..... 5           | 2 por 6..... 12 | 3 por 7..... 21 |
| 1 por 6..... 6           | 2 por 7..... 14 | 3 por 8..... 24 |
| 1 por 7..... 7           | 2 por 8..... 16 | 3 por 9..... 27 |
| 1 por 8..... 8           | 2 por 9..... 18 |                 |
| 1 por 9..... 9           |                 |                 |
| 4 por 4 son 16           | 5 por 5 son 25  | 6 por 6 son 36  |
| 4 por 5..... 20          | 5 por 6..... 30 | 6 por 7..... 42 |
| 4 por 6..... 24          | 5 por 7..... 35 | 6 por 8..... 48 |
| 4 por 7..... 28          | 5 por 8..... 40 | 6 por 9..... 54 |
| 4 por 8..... 32          | 5 por 9..... 45 |                 |
| 4 por 9..... 36          |                 |                 |
| 7 por 7 son 49           | 8 por 8 son 64  | 9 por 9 son 81  |
| 7 por 8..... 56          | 8 por 9..... 72 |                 |
| 7 por 9..... 63          |                 |                 |
| 10 por 10 son 100        |                 |                 |
| 10 por 100..... 1000     |                 |                 |
| 10 por 1000..... 10000   |                 |                 |
| 10 por 10000..... 100000 |                 |                 |
| 10 por 100000... 1000000 |                 |                 |

38 En la multiplicacion pueden ocurrir tres casos: *multiplicar un número dígito por otro dígito; un compuesto por un dígito, ó un dígito por un compuesto; y un compuesto por otro compuesto.* Para el prime-



ro basta saber la tabla de memoria ; para el segundo resolvéremos el siguiente

39 Problema: *Multiplicar un número compuesto por un dígito.*

Res. Colóquese el dígito debajo de las unidades del compuesto, y tírese una raya por la parte inferior ; multiplíquese el guarismo de las unidades del multiplicando, que es el compuesto, por el multiplicador que es el dígito: si en este producto hay sólo unidades, se colocan debajo de las de los factores: si contiene sólo decenas, se pone 0 en el lugar de las unidades, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas de la columna inmediata: y si contiene decenas y unidades, se ponen las unidades debajo de las de los factores, y se guardan las decenas para añadirlas al producto de las decenas. Despues se multiplican las decenas del multiplicando por el mismo multiplicador ; á su producto se añaden las que se llevaban del producto de las unidades, y se colocan las decenas que resulten debajo de las decenas, guardando las centenas, si las hay, para añadirlas al producto de las centenas de la columna inmediata. Luego, se multiplican por el mismo multiplicador las centenas del multiplicando, á cuyo producto se añaden las que se llevaban del producto de las decenas ; y así se continúa hasta que no haya mas guarismos en el multiplicando. Si en el último producto hay algunas unidades de especie superior que llevar, se colocan á la izquierda ; y el número que resulta debajo de la raya es el producto.

Ejemp. Si quiero multiplicar 453 por 6, ó 6 por 453, colocaré el 6 debajo de las unidades del 453, en esta forma:

Tiro debajo una raya, y empiezo á multiplicar diciendo : 3 por 6 son 18, que son unidades ; y como en 18 unidades hay 1 decena y 8 unidades, coloco el 8 debajo de las unidades de los factores, y guardo la decena para añadirla al producto

$$\begin{array}{r}
 453 \\
 6 \\
 \hline
 2718
 \end{array}$$



de las decenas , y digo: 5 por 6 son 30, y 1 que llevaba son 31 , que son decenas; y como en 31 decenas hay 3 centenas y 1 decena , coloco el 1 debajo de las decenas , y guardo las 3 centenas para añadirlas al producto de la columna siguiente , en que digo: 4 por 6 son 24 , y 3 que llevaba son 27 , que son centenas; y como en 27 centenas hay 2 millares y 7 centenas , coloco las 7 centenas , y guardo los 2 millares para añadirlos al producto de la columna siguiente; pero como ya no hay mas guarismos en el multiplicando , coloco estos 2 millares á la izquierda del 7 , y tengo que 453 multiplicado por 6 da 2718 por producto.

*Dem.* La colocacion de los factores es por comodidad , y la raya se tira para claridad. Todas las demas reglas están reducidas á multiplicar las unidades , las decenas , centenas , &c., esto es, todas las partes del multiplicando por el multiplicador; y como todos los productos parciales los hemos ido reuniendo en uno solo, resulta que el número que está debajo de la raya es el producto de todas las partes de que se compone el multiplicando por el multiplicador; luego (intr. ax. 3.<sup>o</sup>) será el producto total. L. Q. D. H. y D.

40 Al hallar cada producto no se necesita ir expresando la especie de unidades; de manera que en la práctica bastan las palabras del siguiente ejemplo. Si quiero multiplicar 7263 por 8 , colocaré los números como he dicho y aquí se ve:

|                                                        |       |
|--------------------------------------------------------|-------|
| y despues de tirada la raya diré: 3 por                | 7263  |
| 8 son 24, pongo el 4 y llevo 2; 6 por 8                | 8     |
| son 48 , y 2 que llevaba son 50 , pongo                | _____ |
| 0 y llevo 5; 2 por 8 son 16, y 5 que lle-              | 58104 |
| vaba son 21, pongo 1 y llevo 2; 7 por 8                |       |
| son 56 , y 2 que llevaba son 58 , pongo el 8 y llevo   |       |
| 5; que como no hay mas guarismos en el multipli-       |       |
| cando, coloco el 5 á la izquierda del 8, y resulta que |       |
| el producto de 7263 por 8 es 58104.                    |       |

41 Ahora observaremos que *todo número multiplicado por la unidad, ó la unidad multiplicada por*



cualquier número, da por producto el mismo número; y que cero multiplicado por cualquier número, ó al contrario, da cero por producto.

42 Si atendemos al sistema de numeracion, veremos (14) que un número resulta multiplicado por 10, sólo con añadirle un 0; se le multiplica por 100, con añadirle dos ceros, &c.; y en general, para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se colocarán á la derecha de dicho número tantos ceros como acompañen á la unidad.

43 De aquí se sigue que la multiplicacion de un número cualquiera por otro de un guarismo significativo y ceros, se reduce á la de por uno dígito; para lo cual se multiplica el número compuesto por el guarismo significativo, y al producto se le añaden tantos ceros como le acompañen.

En efecto, para multiplicar 537 por 400, indicaré la operacion de este modo:  $537 \times 400$ ; pero 400 es lo mismo que  $4 \times 100$ , luego poniendo en vez de 400 este valor, la espresion anterior se convertirá en  $537 \times 4 \times 100$ ; pero aquí tengo indicado que el producto de 537 por 4, que (40) es 2148, le debo multiplicar por 100; y como para multiplicar por 100, basta sólo añadir dos ceros, resulta que si al 2148 le añado dos ceros, tendré que 214800 es el producto de 537 por 400.

Otros ejemplos de multiplicacion.

| 1. <sup>o</sup> | 2. <sup>o</sup> | 3. <sup>o</sup> | 4. <sup>o</sup>  |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 5787<br>8       | 95687<br>7      | 8040753<br>60   | 14257839<br>5000 |
| 46296           | 669809          | 482445180       | 71289195000      |

44 Comprendido esto, pasemos al tercer caso que esplicaremos en el siguiente

Problema. *Multiplicar un número compuesto por otro compuesto.*

Res. *Tómese por multiplicador el que tenga mé-*



nos guarismos, y póngase debajo del multiplicando, que es el otro número, de modo que se correspondan en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, &c.; tírese una raya; multiplíquese todo el multiplicando por las unidades del multiplicador (40), cuyo producto se pondrá debajo de la raya de modo que caigan las unidades, decenas, &c. debajo de las unidades, decenas, &c. de los factores; multiplíquese despues todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y colóquese este producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda; luego, multiplíquese todo el multiplicando por el guarismo siguiente del multiplicador, y colóquese este producto debajo del antecedente, corriéndole tambien otro lugar hácia la izquierda; y continúese de este modo hasta que no haya mas guarismos en el multiplicador. Despues se tirará debajo de estos productos parciales otra raya; se sumarán todos ellos, y la suma será el producto que se pide.

*Ejemp.* Si quiero multiplicar 8237 por 536, tomaré por multiplicador el 536 y le colocaré debajo del multiplicando, en esta forma:

Y despues de tirada la raya multiplicaré el 8237 por 6, é iré colocando el producto debajo de la raya como en el caso dicho (40); despues paso á multiplicar todo el multiplicando 8237 por el segundo guarismo del multiplicador que es el 3, y coloco su producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda. Paso despues á multiplicar todo el multiplicando por el tercer guarismo del multiplicador, que es el 5, y coloco su producto debajo del anterior, corriéndole un lugar hácia la izquierda. Tiro despues una raya, porque ya no hay mas guarismos en el multiplicador; sumo todos estos productos parciales, y tengo en la suma 4415032 el producto de los dos números propuestos.

$$\begin{array}{r}
 8237 \\
 536 \\
 \hline
 49422 \\
 24711 \\
 41185 \\
 \hline
 4415032
 \end{array}$$



*Dem.* El tomar por multiplicador el de ménos guarismos es porque el órden de los factores (36) no altera el producto, y de este modo resulta la operacion con mas sencillez; su colocacion es por comodidad, y el tirar la raya por claridad; todas las demas reglas están reducidas á multiplicar todo el multiplicando por las unidades del multiplicador; despues todo el multiplicando por las decenas del multiplicador, y hemos de colocar este producto debajo del guarismo de las decenas del anterior, porque de multiplicar por decenas (42) debe resultar al fin un cero, y los guarismos significativos deben empezar desde las decenas en adelante, y por consiguiente se deben colocar debajo de las decenas del primer producto parcial, para poder ejecutar despues la suma; despues hemos multiplicado por las centenas, y así sucesivamente, hasta haber multiplicado todo el multiplicando por todos los guarismos ó partes del multiplicador; pero todos estos productos los hemos sumado y reunido en un solo número, que es el que sale debajo de la raya; luego (intr. ax. 3.<sup>o</sup>) este número que contiene la suma de los productos del multiplicando por todas las partes del multiplicador, contendrá el producto de todo el multiplicando por todo el multiplicador. L.Q.D.H.y D.

*Ejemplos de multiplicacion.*

| 1. <sup>o</sup>                                                               | 2. <sup>o</sup>                                                     | 3. <sup>o</sup>                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} 78546 \\ 3254 \\ \hline \end{array}$                        | $\begin{array}{r} 85368 \\ 647 \\ \hline \end{array}$               | $\begin{array}{r} 947586 \\ 4798 \\ \hline \end{array}$                           |
| $\begin{array}{r} 314184 \\ 392730 \\ 157092 \\ 235638 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{r} 597576 \\ 341472 \\ 512208 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{r} 7580688 \\ 8528274 \\ 6633102 \\ 3790344 \\ \hline \end{array}$ |
| $255588684$                                                                   | $55233096$                                                          | $4546517628$                                                                      |

4.<sup>o</sup> El producto de 695725 por 8563 es 5957493175.



5.º El producto de 85326 por 475 es 40529850.

6.º Y el de 357964 por 4867 es 1742210788.

45 La operacion de multiplicar se abrevia *cuando uno ó ambos factores terminan en ceros*; lo que se consigue *multiplicando sólo los guarismos significativos*, y *añadiendo al producto tantos ceros como hay al fin en ambos factores juntos*.

En efecto, si tengo que multiplicar 6300 por 56, será en virtud de lo espuesto (§ 43)

$$6300 \times 56 = 63 \times 100 \times 56 = (\S 36) 63 \times 56 \times 100.$$

Luego si multiplico el 63 por 56, y al producto le añado dos ceros (42), tendré en 352800 el producto de estos tres factores, ó el de los dos primitivos.

Del mismo modo si fuese 633000 por 2500, tendria  $633000 \times 2500 = 633 \times 1000 \times 25 \times 100 =$

$$633 \times 25 \times 1000 \times 100 = 1582500000.$$

Tambien se abrevia esta operacion *cuando los ceros se hallan entre los guarismos significativos del multiplicador*; en cuyo caso se *multiplica el multiplicando por los guarismos significativos del multiplicador, hasta llegar á los ceros*; en llegando á estos *no se multiplica por ellos*, y se *pasa á multiplicar por los demas guarismos significativos*; pero *teniendo cuidado de correr el primer producto hácia la izquierda tantos lugares mas no, cuantos ceros hay*; es decir, que si hay un cero se debe correr el primer producto dos lugares; si dos ceros, tres lugares, &c. á la izquierda, V.g. si tuviese que multiplicar 847536 por 400306, colocaria los factores de esta manera:

Multiplicaria todo el multiplicando por 6; lo que me da el producto parcial 5085216; como despues del 6 hay un cero en el multiplicador, paso á multiplicar por el primer guarismo significativo que encuentro, que es el 3, y coloco este producto de modo que su primer guarismo caiga debajo del 2 del producto

$$\begin{array}{r}
 847536 \\
 400306 \\
 \hline
 5085216 \\
 2542608 \\
 3390144 \\
 \hline
 339273746016
 \end{array}$$



antecedente, esto es, corriéndole dos lugares hácia la izquierda. Como despues vuelvo á encontrar ceros, paso á multiplicar por el guarismo significativo que hay despues de ellos, que es el 4; coloco el producto tres lugares mas hácia la izquierda respecto del antecedente, porque aquí hay dos ceros; sumo despues estos productos, y saco que 847536 multiplicado por 400306 da 339273746016 por producto.

46 Las cuestiones que conducen á la operacion de multiplicar, se presentan bájo tres aspectos diferentes, que se llaman *usos* de esta operacion: 1.º *cuando se quiere hacer á un número cierto número de veces mayor*; 2.º *cuando conocido el valor de una unidad, se quiere averiguar el de muchas*; y 3.º *cuando se quieren reducir unidades de especie superior á unidades de especie inferior*.

Para el primer caso *se multiplica el número dado por aquel que espresa con sus unidades las veces que se le quiere hacer mayor*. V. g. si al 754 le quiero hacer 58 veces mayor, multiplicaré el 754 por 58, y tendré que el producto 43732 es un número 58 veces mayor que el 754.

Para el segundo, *se multiplica el valor de la unidad por el número de ellas*. V. g. si quiero averiguar lo que valen 372580 varas de paño á 60 reales la vara, multiplicaré el número de varas por el valor de una de ellas, que es 60 reales, y hallaré que valen 22354800 reales. Porque, por cada unidad que haya, se debe tomar una vez su valor; luego se deberá tomar tantas veces el valor de una como unidades hay. Así mismo, 457 arrobas de aceite á 96 reales valen 43872 reales; y 3574 fanegas de trigo á 85 reales valen 303790 reales.

Para el tercer caso *se multiplica el número de unidades de especie superior, por aquel número que con sus unidades espresa las unidades de especie inferior de que se compone la mayor*.

1.º *ejemp.* Quiero saber cuántos pies tienen 7 varas; como la vara es la unidad de especie superior,



y se compone de 3 pies, multiplicaré el número 7 de varas por 3, y tendré en el producto 21 los pies que hay en 7 varas.

2.<sup>o</sup> Quiero averiguar cuántos maravedises hay en 79 doblones; para esto multiplicaré el 79 por los maravedises que tiene un doblon, que son 2040, y sacaré 161160 maravedises; pero es mas cómodo reducirlos primero á pesos, luego á reales y despues á maravedises. Así, en el ejemplo propuesto veré primero cuántos pesos hay en los 79 doblones; despues los pesos que saque, veré los reales que componen; y luego este número de reales veré los maravedises que tienen, como se ve en (A).

| (A)                                 | (B)                                    | (C)                                   |
|-------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------|
| 79 <i>dob.<sup>s</sup></i><br>4     | 75893 <i>varas</i><br>3                | 4367 <i>quint.<sup>s</sup></i><br>4   |
| 316 <i>pesos</i><br>15              | 227679 <i>pies</i><br>12               | 17468 <i>arrob.<sup>s</sup></i><br>25 |
| 1580<br>316                         | 455358<br>227679                       | 87340<br>34936                        |
| 4740 <i>real.<sup>s</sup></i><br>34 | 2732148 <i>pulg.<sup>s</sup></i><br>12 | 436700 <i>libras</i><br>16            |
| 1896<br>1422                        | 5464296<br>2732148                     | 26202<br>4367                         |
| 161160 <i>mar.<sup>s</sup></i>      | 32785776 <i>líneas</i>                 | 6987200 <i>onzas</i>                  |

Los dos ejemplos (B), (C), manifiestan: el (B) el modo de reducir 75893 varas á líneas; y el (C) el modo de reducir 4367 quintales á onzas.



*De la division.*

47 Pasemos á la segunda operacion de disminuir, que es cuando se ha de restar el sustraendo del minuendo todas las veces que se pueda; y como se podrá quitar tantas veces como esté contenido, se dice que *dividir es averiguar cuántas veces un número contiene á otro*. La operacion se llama *division*; el número que ha de contener, se llama *dividendo*; el que ha de estar contenido, se llama *divisor*; y lo que resulta *cociente*; el dividendo y divisor juntos, se llaman *términos* de la division ó del cociente.

48 Como dividir es averiguar las veces que el divisor está contenido en el dividendo, se infiere que *multiplicando el divisor por el cociente ha de resultar el dividendo*; luego en la division el número que multiplicado por el divisor no dé el dividendo no puede ser el cociente.

Para indicar que un número se ha de dividir por otro, se pone el dividendo, debajo una raya, y luego el divisor; ó se pone el dividendo, despues dos puntos, y luego el divisor; así,  $\frac{15}{5}$  ó  $15:5$ , indica la division de 15 por 5, y se lee: *15 dividido por 5*; y para indicar el resultado usaremos del signo  $=$ ; de manera que  $\frac{15}{5}=3$ , ó  $15:5=3$ , se lee: *15 dividido por 5 igual 3*.

49 Tres casos pueden ocurrir en la division, á saber: *dividir un número dígito por otro dígito*; *dividir un compuesto por un dígito*; y *dividir un compuesto por otro compuesto*.

Para dividir un número dígito por otro dígito, y aun uno compuesto sólo de dos guarismos por uno dígito que sea mayor que el guarismo de especie superior del compuesto, no hay mas que saber la tabla de la multiplicacion (37); pues en este caso en averiguando el número por que se ha de multiplicar el divisor para que dé el dividendo (ó el producto inmediatamente menor), este será el cociente.



1.<sup>er</sup> *ejemp.* Quiero saber cuántas veces el 6 contiene al 2, ó cuánto es 6 dividido por 2; y como haciendo varias tentativas encuentro que el 2 se ha de multiplicar por 3 para producir 6, digo que 3 es el cociente.

2.<sup>o</sup> Si quisiera dividir 11 por 4, veria que despues de dar al cociente 2, me sobran 3; estas 3 unidades que sobran *se ponen al lado del cociente hallado, debajo se tira una raya, y debajo se pone el divisor, en esta forma  $2\frac{3}{4}$ , y se lee: dos y tres cuartos.*

Para leer todas estas espresiones, *se lee el número que está encima de la raya con los nombres numerales absolutos, y el que está debajo con los numerales partitivos, sino llega á 10: ó con los absolutos si llega ó pasa de 10, añadiendo despues la partícula avos. Así, la espresion  $3\frac{9}{17}$  se lee: tres y nueve diez y siete avos.*

50 2.<sup>o</sup> caso. Prob. *Dividir un número compuesto por un dígito.*

Res. *Colóquese el divisor á la derecha del dividendo, de modo que se correspondan en un mismo renglon; tírese entre los dos una raya de arriba abajo, y otra debajo del divisor. Hecho esto, tómese el guarismo de especie superior del dividendo, véase cuántas veces está contenido en él el divisor, y se pone este cociente debajo de la raya del divisor; si el primer guarismo del dividendo es menor que el divisor, se toma otro guarismo mas del dividendo, y para que se sepa los que se han tomado, se pone una coma, y se ve cuántas veces en aquel número de dos guarismos se contiene el divisor, conforme se ha dicho (49), poniendo por cociente lo que resulte. Despues se multiplica este cociente por el divisor, y se coloca el producto debajo del guarismo ó dos guarismos que se separaron en el dividendo; se tira debajo una raya, y se resta este producto del guarismo ó guarismos separados. Al lado de esta resta, ó al lado de 0 sino quedó ninguna, se baja el guarismo siguiente del dividendo, y se ve cuántas veces en la*



resta, juntamente con el guarismo que se bajó, está contenido el divisor, y el número que resulte se pone en el cociente á la derecha del guarismo hallado ántes; se multiplica este segundo cociente por el divisor, se coloca el producto debajo del segundo dividendo parcial, se tira una raya, y se resta. Al lado de la resta se baja el siguiente guarismo, y así se continúa hasta que no haya en el dividendo mas guarismos que bajar, apuntando con una coma el que se baja para no equivocarse. Si al fin queda resta, se pone como se ha dicho (49), y el número que resulta debajo de la raya es el cociente.

*Ejem.* Si quiero dividir 924 por 7, pondré el divisor á la derecha del dividendo, separándolos con una raya tirada de arriba abajo, y tiraré otra debajo del divisor en esta forma:

Separo con la coma el guarismo 9 de la izquierda del dividendo, y digo: el 7 en 9 cuántas veces está contenido? veo que una vez, por lo que pongo 1 debajo de la raya del divisor; multiplico este primer cociente parcial 1 por el divisor 7, diciendo: 1 por 7 es 7, que pongo debajo del dividendo parcial 9; tiro una raya y resto 7 de 9. Al lado de la resta

$$\begin{array}{r|l}
 9,2,4 & 7 \\
 \hline
 7 & \hline
 22 & 132 \\
 21 & \\
 \hline
 014 & \\
 14 & \\
 \hline
 00 &
 \end{array}$$

2 bajo el guarismo siguiente 2 del dividendo, le apunto arriba y digo: el 7 en 22 cuántas veces está contenido? hallo que son 3, y pongo este segundo cociente parcial á la derecha del primero, le multiplico por el divisor 7, su producto 21 le pongo debajo del segundo dividendo parcial 22, y resto. Bajo al lado de la resta 1 el guarismo siguiente 4, y digo: 7 en 14 cuántas veces está contenido? veo que son 2, pongo este guarismo en el cociente á la derecha del 3, y le multiplico por el divisor 7; pongo su producto 14 debajo del tercer dividendo parcial, y le resto de él; y como no hay mas guarismos que bajar,



ni queda resta, resulta que el cociente de dividir 924 por 7 es 132.

*Dem.* La colocacion de los dos términos es por comodidad, y las rayas se tiran para claridad; ahora, para hacer ver la exactitud de lo demas de la regla, nos contraerémos al ejemplo anterior, donde observamos que hemos dividido primeramente 9 centenas por 7, ó hemos visto 9 centenas entre 7 á cómo les toca, y hemos hallado que es á 1; pero como el 9 es presa centenas, este cociente es 1 centena, y por lo mismo despues del 1 debe haber en el cociente otros dos guarismos; en 9 centenas, no sólo habia lo necesario para que tocasse á 1 centena, sino que habia algo mas, y por esto hemos multiplicado el cociente por el divisor, y le hemos restado de lo que nos servia de dividendo; á su lado hemos bajado el guarismo inmediato 2, y vemos que estas 22 son decenas, y hemos continuado diciendo: el 7 en 22 cuántas veces está contenido? ó 22 decenas entre 7 á cómo les toca? hemos hallado que es á 3, que las coloco á la derecha del 1 que habia de espresar centenas; ahora, para ver si despues de tocarles á 3 decenas quedan aun algunas decenas, se multiplica este segundo cociente por el divisor, y se resta del segundo dividendo parcial 22; la resta 1 que resulta espresa una decena, que junta con las 4 unidades que se bajan, son 14 unidades; que entre 7 les toca á 2, que pongo á la derecha del 3 que espresaba decenas; y como he visto cuánto cabe el divisor en todas las partes del dividendo, y tengo reunidos en un solo número todos los cocientes parciales, resulta (intr. ax. 3.<sup>o</sup>) que este es el cociente total. L. Q. D. H. y D.

51 Al ejecutar esta operacion se debe tener presente: 1.<sup>o</sup> que no se puede poner de una vez en el cociente nada mas que 9; porque si se pudiera poner á mas, lo ménos seria á 10, y la decena no corresponderia al cociente parcial que se hallase, sino al anterior, lo que daria á conocer que el anterior era menor de lo que debia.



2.º Que cuando se baja un guarismo y en él, junto con la resta si la hay, no cabe el divisor, se debe poner 0 en el cociente, y se baja al instante el otro guarismo.

3.º Que todo número cabe en sí mismo una vez, ó lo que es lo mismo, que si se tiene que dividir un número por sí mismo, el cociente es 1.

4.º Que todo número dividido por la unidad da por cociente el mismo número.

Y 5.º que 0 dividido por cualquier número siempre da 0 por cociente. Todo lo cual se ve practicado en los siguientes ejemplos.

| 1.º                                                                                                                                                                                                                         | 2.º                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $  \begin{array}{r}  72,0,8,4,7, \quad   \quad 8 \\  \underline{72} \phantom{0,8,4,7,} \\  00 \phantom{0} 8 \\  \phantom{00} 8 \\  \hline  \phantom{00} 047 \\  \phantom{00} 40 \\  \hline  \phantom{00} 07  \end{array}  $ | $  \begin{array}{r}  45,9,0,9,4 \quad   \quad 9 \\  \underline{45} \phantom{9,0,9,4} \\  00 \phantom{9} 9 \\  \phantom{00} 9 \\  \hline  \phantom{00} 009 \\  \phantom{00} 9 \\  \hline  \phantom{00} 04  \end{array}  $ |

52 Cuando se ha adquirido ya cierta destreza, se ejecuta la operacion con mucha brevedad, tomando del dividendo la parte que diga el divisor. V. g. si quiero dividir 45685 por 7, diré: la 7.<sup>a</sup> parte de 4, guarismo de especie superior, no puede ser; la 7.<sup>a</sup> parte de 45 es 6 (que será el primer guarismo del cociente), y quedan 3; que juntas con el guarismo siguiente 6 son 36, y diré: la 7.<sup>a</sup> parte de 36 es 5, que pongo al lado del 6, y queda 1, que junta con el 8 vale 18; la 7.<sup>a</sup> parte de 18 es 2, y quedan 4, que juntas con el guarismo siguiente 5 componen 45; la 7.<sup>a</sup> parte de 45 es 6, que pongo al lado del 2, y quedan 3 por resta; por lo que infiero que el cociente es  $6526\frac{3}{7}$ .



53 3.<sup>er</sup> caso. Prob. *Dividir un número compuesto por otro compuesto.*

Res. *Colóquese el divisor á la derecha del dividendo separándolos con una raya, y poniendo otra debajo del divisor segun se ha dicho en el caso anterior; despues se separan con una coma á la izquierda del dividendo tantos guarismos como tiene el divisor, ó un guarismo mas si en estos no cabe el divisor. Separados ya estos guarismos se ve cuántas veces el primer guarismo de la izquierda del divisor está contenido en el primero del dividendo (ó en los dos primeros si se tomó para el primer dividendo un guarismo mas de los que tenia el divisor), y el número de veces que está contenido se pone en el cociente; se multiplica este cociente por todo el divisor, y el producto se coloca debajo del dividendo parcial, se tira una raya y se resta de él. Al lado de la resta se baja el guarismo siguiente (apuntándole con la coma en el dividendo), y se ve cuántas veces el primer guarismo del divisor está contenido en el primero (si tiene tantos el uno como el otro) ó dos primeros del dividendo (si tuviese este uno mas que el divisor); se pone este guarismo en el cociente á la derecha del primer cociente parcial, se multiplica por todo el divisor, se tira la raya y se resta. Al lado de la resta se baja el guarismo siguiente, y así se procede hasta que no haya mas guarismos que bajar; y si al fin queda alguna resta se pone á la derecha del cociente con una raya y el divisor debajo.*

1.<sup>er</sup> ejem. Si quiero dividir 966 por 42, colocaré el divisor 42 á la derecha del dividendo 966, separándolos con una raya en esta forma:

|                                                                                                                                                                                                                                                               |                            |                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| Y despues de haber tirado otra debajo del divisor, separo á la izquierda del dividendo dos guarismos, y veo cuántas veces está contenido en el primero que es 9 el primero del divisor que es 4; hallo que son 2 veces, y pongo el guarismo 2 en el cociente; | 96,6,                      | 42                            |
|                                                                                                                                                                                                                                                               | 84                         | <hr style="width: 100%;"/> 23 |
|                                                                                                                                                                                                                                                               | 126                        |                               |
|                                                                                                                                                                                                                                                               | 126                        |                               |
|                                                                                                                                                                                                                                                               | <hr style="width: 100%;"/> |                               |
|                                                                                                                                                                                                                                                               | 000                        |                               |



ahora multiplico este cociente 2 por todo el divisor 42, y coloco el producto 84 debajo del dividendo parcial 96, tiro la raya y resto. Al lado de la resta 12 bajo el guarismo siguiente 6; y como ahora tengo por segundo dividendo un número que tiene un guarismo mas que el divisor, averiguaré cuántas veces en los dos primeros de este dividendo está contenido el primero del divisor; y así, diré: el 4 en 12 cuántas veces está contenido? veo que son 3, pongo 3 en el cociente á la derecha del 2, multiplico todo el divisor por este 3, y coloco el producto 126 debajo del dividendo parcial 126, tiro una raya y resto; y como no hay mas guarismos que bajar, ni queda resta, digo que el cociente de dividir 966 por 42 es 23.

2.<sup>o</sup> *ejem.* Si quiero averiguar cuántas veces cabe el 812 en 442635, colocaré los números como aquí se presenta:

Y despues de tiradas las rayas, separaré cuatro guarismos en el dividendo, por no ser suficientes los tres primeros para contener al divisor, y diré: 44 entre 8 les toca á 5, que pongo en el cociente; multiplico el 812 por 5, coloco el producto 4060 debajo del dividendo parcial 4426, tiro una raya y resto. Al lado de la resta 366 bajo el 3, hallo que el 8 está contenido 4 veces en 36, y pongo 4 en el cociente; multiplico el 812 por 4, coloco el producto 3248 debajo del dividendo parcial 3663, tiro una raya y resto. Al lado de la resta 415 bajo el 5, veo que el 8 está contenido 5 veces en 41, pongo 5 en el cociente, multiplico el 812 por 5, coloco el producto debajo del dividendo parcial, tiro la raya y resto; y como no hay mas guarismos que bajar, coloco la resta 95 como he dicho (49), y tengo que de dividir 442635 por 812 resulta  $545\frac{95}{812}$ .

C

T. I.

$$\begin{array}{r|l}
 4426,3,5, & 812 \\
 \hline
 4060 & \hline
 \hline
 0366\ 3 & 545\frac{95}{812} \\
 324\ 8 & \\
 \hline
 041\ 5\ 5 & \\
 40\ 6\ 0 & \\
 \hline
 00\ 9\ 5 & 
 \end{array}$$



*Dem.* La colocacion de los términos y las rayas, se hace por comodidad y claridad (50). Despues tomamos á la izquierda del dividendo tantos guarismos como se necesitan para que esté contenido el divisor, y hallamos, contrayéndonos al primer ejemplo, que se necesitan dos guarismos, y que en ellos está contenido el divisor 2 veces, ó que 96 entre 42 que es el divisor, les toca á 2; pero como el 96 espresaba decenas, resulta que estas dos serán decenas. Hago la multiplicacion y resta, para saber si ademas de tocarles á 2 decenas queda aun algo que repartir, como sucede en efecto, pues quedan 12 que son decenas; y bajando el guarismo 6 de las unidades, he visto cuántas veces cabe el 42 en 126, y hallo 3, que como son unidades las coloco á la derecha del 2 que espresaba decenas. Hago la multiplicacion y resta para ver si quedan aun algunas unidades por repartir, y veo que no; y como todos los cocientes que han salido de dividir todas las partes del dividendo por el divisor, los tengo reunidos en un solo número, resulta (intr. ax. 3.º) que este es el cociente total. L. Q. D. H. y D.

54 Suele suceder que el cociente sacado por la regla (52) es mayor de lo que corresponde, por no estar contenido todo el divisor en todo el dividendo parcial tantas veces como el primer guarismo del divisor está en el primero ó dos primeros del dividendo. Esta circunstancia (que arredra á los principiantes, y orijina toda la dificultad de la division) desaparece al instante, si se atiende á lo dicho (48); pues si el producto que resulte de multiplicar el divisor por el cociente puesto, fuese mayor que el dividendo, *está reducido á borrar dicho producto y cociente, y poner en este una unidad ménos; se procede á la multiplicacion, y si el producto es todavía mayor que el dividendo, se vuelve á borrar, y se quita otra unidad al cociente; y así se continúa hasta que encontrando un producto igual ó menor que el dividendo se ejecuta la resta; y siempre que la res-*



ta sea menor que el divisor, el cociente será el verdadero. Si la resta fuese igual ó mayor que el divisor, se irán añadiendo unidades al cociente, hasta que venga á quedar una resta menor que el divisor. De donde se infiere, que teniendo un poco de paciencia para hacer dos ó tres operaciones que comprueben el verdadero cociente, y ejecutando muchos ejemplos, llegarán á ponerse tan diestros que no tendrán luego que hacer ningun tanteo. Por lo mismo se ponen aquí estos dos ejemplos. 1.º Si quiero dividir 575726 por 493, los colocaré como se ve en (A).

$$\begin{array}{r}
 \text{(A)} \\
 575,7,2,6, \quad | \quad \underline{493} \\
 \underline{493} \\
 0827 \\
 \underline{986} \\
 493 \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 3342 \\
 \underline{3944} \\
 3451 \\
 \underline{2958} \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 03846 \\
 \underline{4437} \\
 3944 \\
 \underline{3451} \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 0395
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{(B)} \\
 37963,1,0,4, \quad | \quad \underline{6879} \\
 \underline{41274} \\
 34395 \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 035681 \\
 \underline{34395} \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 012860 \\
 \underline{13758} \\
 6879 \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 59814 \\
 \underline{61911} \\
 55032 \\
 \underline{\hspace{1.5cm}} \\
 04782
 \end{array}$$

Separo tres guarismos en el dividendo y digo: 5 entre 4 á 1 que pongo en el cociente; multiplico y resto. Al lado de la resta 82 bajo el guarismo siguiente 7 del dividendo, y digo: 8 entre 4 á 2, que pongo en el cociente y multiplico; y como el producto 986 es mayor que el dividendo parcial 827, infiero que el cociente 2 es mayor de lo que debe ser; borro,



pues, el 986 y tambien el 2, y pongo á 1 en el cociente; multiplico y resto (porque el producto 493 es menor que el dividendo). Al lado de la resta 334 bajo el guarismo siguiente 2, y digo: 33 entre 4 á 8, que pongo en el cociente, y multiplico; y como el producto 3944 es mayor que el dividendo 3342, le borro y tambien el 8; pongo á 7; y como el producto 3451 es aun mayor que el dividendo, los borro y pongo á 6; multiplico el divisor por este cociente 6; y como su producto 2958 es menor que el dividendo, tiro la raya y resto. Al lado de la resta 384 bajo el 6, y digo: 38 entre 4 á 9; y como el producto del divisor por 9 es mayor que el dividendo, los borro y pongo á 8; multiplico y sale tambien un producto mayor; le borro y pongo á 7; multiplico y resto, lo que da la resta 395; y reuniendo ahora todos los cocientes tendré el verdadero y total en  $1167\frac{395}{493}$ .

2.<sup>o</sup> Si quiero dividir 37963104 por 6879, ejecutaré la operacion como se ve en (B), y saco el cociente  $5518\frac{4782}{6879}$ .

55 Entendido el modo de hallar el verdadero cociente, se puede ahorrar todo este trabajo, practicando estas dos reglas: 1.<sup>a</sup> cuando el segundo guarismo del divisor sea 8 ó 9, se considerará el primero (al tiempo de buscar cada cociente) como con una unidad mas.

2.<sup>a</sup> Véase si en la resta que queda de dividir el primero ó dos primeros guarismos del dividendo por el primero del divisor, junta con el guarismo siguiente del dividendo, cabe el segundo del divisor el mismo número de veces que el primero en el primero ó dos primeros del dividendo; y si cabe se podrá asegurar que el cociente hallado es el verdadero, sino cabe no lo será.

Esc. Los principiantes deben aplicar la 1.<sup>a</sup> regla á los ejemplos anteriores, considerando en el primero (siempre que vayan á sacar el cociente) el 4 como si fuera 5: y en el segundo el 6 como si fuera 7, y verán que no escriben mas guarismos que los nece-



sarios para encontrar el verdadero cociente. Además deben resolver los siguientes ejemplos.

Si quiero dividir 185975 por 395, los colocaré como aquí se ve:

|                                                      |                                                          |                                                          |
|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Separo cuatro guarismos,                             | 1859,7,5,                                                | 395                                                      |
| y en vez de decir 18 entre                           | 1580                                                     | <hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/> |
| 3, diré: 18 entre 4 á 4, que                         | <hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/> | 46                                                       |
| pongo en el cociente; mul-                           | 02797                                                    | 70 <sup>325</sup> <sub>395</sub>                         |
| tiplico todo el divisor por                          | 2370                                                     |                                                          |
| este 4, coloco el producto                           | <hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/> |                                                          |
| debajo del dividendo, tiro                           | 0427                                                     |                                                          |
| una raya y resto. Al lado de                         | 2765                                                     |                                                          |
| la resta 279 bajo el guaris-                         | <hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/> |                                                          |
| mo siguiente 7, y digo: 27                           | 00325                                                    |                                                          |
| entre 4 á 6, que pongo en                            |                                                          |                                                          |
| el cociente; multiplico y resto; y como la resta 427 |                                                          |                                                          |
| es mayor que el divisor, infiero que el cociente de- |                                                          |                                                          |
| be ser mayor de lo que le he puesto; por lo cual le  |                                                          |                                                          |
| borro, y borro tambien la resta y producto; pongo    |                                                          |                                                          |
| á 7, multiplico y resto. Al lado de la resta 32 bajo |                                                          |                                                          |
| el guarismo siguiente 5, y por ser el dividendo me-  |                                                          |                                                          |
| nor que el divisor pongo 0 en el cociente; y como    |                                                          |                                                          |
| no hay mas guarismos que bajar, pongo la resta 325   |                                                          |                                                          |
| al lado del cociente, con la raya y el divisor deba- |                                                          |                                                          |
| jo, y resulta por cociente $470\frac{325}{395}$ .    |                                                          |                                                          |

Si quiero dividir 2285473 por 3526, los colocaré como aquí se ve:

|                                                   |                                                          |                                                          |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Separo cinco guaris-                              | 22854,7,3,                                               | 3526                                                     |
| mos y digo: 22 entre 3                            | 21156                                                    | <hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/> |
| á 7, y queda una, que                             | <hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/> | 648 <sup>625</sup> <sub>3526</sub>                       |
| junta con el 8 vale 18;                           | 016987                                                   |                                                          |
| y como 18 entre 5 (se-                            | 14104                                                    |                                                          |
| gundo guarismo del di-                            | <hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/> |                                                          |
| visor) no les cabe á 7,                           | 28833                                                    |                                                          |
| infiero que no puedo po-                          | 28208                                                    |                                                          |
| ner 7 en el cociente; veo                         | <hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/> |                                                          |
| que 22 entre 3 dándoles                           | 00625                                                    |                                                          |
| á 6 sobran 4, que juntas                          |                                                          |                                                          |
| con el 8 valen 48; y como 48 contiene al 5 mas de |                                                          |                                                          |



seis veces, digo que 6 es el cociente; le pongo, multiplico y resto. Al lado de la resta 1698 bajo el 7; y continuando el mismo racionio evito los tanteos, y saco el cociente  $648\frac{625}{3528}$ .

56 La operacion de dividir se puede abreviar siempre, *haciendo la resta al mismo tiempo que la multiplicacion del divisor por el cociente parcial.* V. g. si quiero dividir 57327 por 46, los colocaré como he dicho (53) y aquí se ve:

|                                  |           |                            |
|----------------------------------|-----------|----------------------------|
| Separaré dos guarismos en        | 57,3,2,7, | 46                         |
| el dividendo, y diré: 4 en 5     | 11 3      | <hr style="width: 100%;"/> |
| cabe una vez, y pongo 1 en       | 02 1 2    | 1246 $\frac{11}{48}$       |
| el cociente; multiplico ahora    | 0 2 8 7   |                            |
| el divisor 46 por el cociente 1, | 0 1 1     |                            |

y en vez de colocar este producto debajo del dividendo parcial 57, para restar despues, voy ejecutando la resta al mismo tiempo que formo el producto en esta forma: 6 por 1 es 6, de 6 á 7 va 1, que pongo debajo del 7, y continúo: 1 por 4 es 4, de 4 á 5 va 1, que pongo debajo del 5. Al lado de la resta 11 bajo el guarismo siguiente 3, y digo: 4 en 11 está contenido 2 veces, pongo 2 en el cociente, multiplico y resto diciendo: 2 por 6 son 12, de 12 á 13 va 1, y de 13 llevo 1; 2 por 4 son 8, y 1 que llevo son 9, de 9 á 11 van 2, y de 11 llevo 1; de 1 á 1 no va nada, y pongo 0 debajo del último 1. Al lado de la resta 21 bajo el guarismo siguiente 2, y digo: 4 en 21 á 5; pero como sólo sobra 1 unidad, y en ella junto con el guarismo siguiente 2, no está contenido 5 veces el segundo guarismo del divisor 6, les pondré sólo á 4; multiplico y resto, diciendo: 4 por 6 son 24, de 24 á 32 van 8, y de 32 llevo 3; 4 por 4 son 16, y 3 son 19, de 19 á 21 van 2, y de 21 llevo 2, á 2 no va nada. Al lado de la resta 28 bajo el guarismo siguiente 7, y digo: 4 en 28 está 7 veces; pero como no sobra nada pondré sólo á 6; haré la multiplicacion y resta, diciendo: 6 por 6 son 36, de 36 á 37 va 1, y de 37 llevo 3; 6 por 4 son 24, y 3 que llevaba son



27 , de 27 á 28 va 1 , y de 28 llevo 2 ; de 2 á 2 no va nada , y pongo 0 debajo del 2 ; y como no hay mas guarismos que bajar , pongo la resta 11 como he dicho (49) , y tengo el cociente  $1246\frac{11}{48}$ .

*Esc.* Si al ejecutar esta operacion no se pudiese hacer la última resta , es señal de que el cociente es mayor de lo que corresponde ; y si despues de hecha la resta , resulta esta igual ó mayor que el divisor , es señal que se ha puesto de ménos al cociente ; y en estos casos se hará la correccion necesaria.

Hé aquí mas ejemplos para ejercitarse.

| 1.º                                                                                                                                                                                      | 2.º                                                                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} 8450,3,1,7, \quad   \quad 3987 \\ \underline{0476 \quad 3} \\ 077 \quad 6 \quad 1 \\ \underline{37 \quad 7 \quad 4 \quad 7} \\ 01 \quad 8 \quad 6 \quad 4 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 98540,6,7,8, \quad   \quad 54781 \\ \underline{43759 \quad 6} \\ 05412 \quad 9 \quad 7 \\ \underline{0482 \quad 6 \quad 8 \quad 8} \\ 044 \quad 4 \quad 4 \quad 0 \end{array}$ |

57 Además se abrevia la division cuando ambos términos ó sólo el divisor terminan en ceros. En el 1.º caso se borran en los dos tantos ceros como hay en el que tiene ménos , y se hace la division con lo demas que queda. Y en el 2.º se separan á la derecha del dividendo tantos guarismos , como ceros hay al fin del divisor ; se hace la division de lo que queda á la izquierda ; al lado de la resta , si queda , se baja todo lo separado , y se tiene la resta total , la que se pondrá encima de una raya y todo el divisor debajo.

58 Los usos de la division son seis : 1.º cuando claramente se dice que se quiere buscar las veces que un número está contenido en otro ; 2.º cuando hay que repartir entre varias personas cierto número de cosas ; 3.º cuando se quiere dividir un número en partes iguales , ó tomar una parte de un número , como mitad , tercio , &c. 4.º cuando conociendo el valor de muchas unidades , se quiere averiguar el de una ; 5.º cuando se quieren reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior ; y 6.º cuando se



quieren hallar todos los números que dividen exactamente á otro dado.

En el primer caso se divide el mayor por el menor por el método espuesto (56).

En el 2.<sup>o</sup> se divide en abstracto el número de las cosas por el de las personas. V. g. Un padre al morir ha dejado 8 hijos, y en hacienda, alhajas, casas, &c. 7465235 reales; dividiendo el número 7465235 por el de los hijos que es 8, el cociente  $933154\frac{3}{8}$  expresará los reales que corresponden á cada uno.

En el 3.<sup>o</sup> se divide el número dado por el que expresa las partes en que se ha de dividir, ó la parte que se quiere tomar. V. g. si quiero dividir en 7 partes iguales el número 1673, dividiré 1673 por 7, y en el cociente 239 tendré el valor de una de estas partes.

En el 4.<sup>o</sup> caso, se divide el valor de dichas unidades por el número de ellas, y el cociente será el valor de una. V. g. sabiendo que 35 varas de paño han costado 1505 reales; para averiguar á cómo ha costado la vara, dividiré el valor de todas las varas, que es 1505 reales, por el número de ellas 35, y el cociente 43 será el valor de cada vara de paño.

En el 5.<sup>o</sup> caso, se divide el número de unidades de especie inferior por el número que expresa las veces que la unidad de especie inferior cabe en la de especie superior. V. g. si quiero reducir 9245 maravedises á reales, dividiré los 9245 maravedises por 34, que son los maravedises que tiene un real, y el cociente  $271\frac{31}{34}$  serán los reales que componen; pero en estos casos no se pone la resta como ántes (49), sino que se deja conservándole el nombre que tenia el dividendo de que provino; de modo que en vez de decir 271 reales y treinta y un treinta y cuatro avos de real, se dice 271 reales y 31 maravedises.

*Esc.* Si entre las unidades que se dan y aquellas á que se quieren reducir hay otras intermedias, se van reduciendo sucesivamente á las de especie superior inmediata hasta llegar á la que se pide. V. g. si quiero reducir 7483506 maravedises á doblones,



dividiré primero por 34, para reducirlos á reales; los reales que resulten los dividiré por 15, para reducirlos á pesos; y finalmente, estos pesos los dividiré por 4 para reducirlos á doblones; y tendré en este último cociente, junto con las restas anteriores, los doblones, pesos, reales y maravedises, que hay en el número propuesto. La operacion se ejecutará como aquí se ve:

|              |               |      |                |              |          |
|--------------|---------------|------|----------------|--------------|----------|
| maravedises. | 74,8,3,5,0,6, | 34   |                |              |          |
|              | 068           |      | 22,0,1,0,3,rs. | 15           |          |
|              | 035           | 70   | 101            | 14,6,7,3,ps. | 4        |
|              | 106           | 110  | 0053           | 026          |          |
|              | 4             | 0053 | 8              | 027          |          |
|              |               |      |                | 033          |          |
|              |               |      |                | 1            |          |
|              |               |      |                |              | 3668 ds. |

y diré que en 7483506 mrs. hay 3668 doblones, 1 peso, 8 reales y 4 maravedises.

59 Para proceder al sexto uso advertiremos, que cuando un número está contenido en otro un número exacto de veces, se llama al que contiene *múltiplo* del contenido, y al contenido *submúltiplo* ó *parte alícuota* del que contiene; cuando un número no está contenido en otro un número exacto de veces, se dice que es *parte alícuota* del continente. V. g. el 20 es múltiplo respecto del 4 y del 5; y el 4 y el 5 son partes alícuotas del 20; y 4 es parte alícuota del 21. La parte alícuota se llama también *factor*, porque multiplicada por la otra produce el número de que lo es; v. g.  $4 \times 5 = 20$ ; y como si dividimos el 20 por el 4 ó por el 5, dará cociente exacto, se infiere que *parte alícuota*, *factor* ó *divisor de un número*, es cualquier otro que le divide sin dejar resta.

Pero si consideramos el 5 y el 4, que son factores del 20, observaremos que el 5 no se puede divi-



dir exactamente por ningun otro número mas que por él mismo y por la unidad; por lo que este número, y todos los que tienen esta misma propiedad, como 2, 3, 7, 11, 13, 17, &c. se llaman números *primos* ó *primeros* ó *factores simples*. El 4, ademas de ser divisible por sí mismo y por la unidad, lo es tambien por 2; por cuya razon este número, y todos los que son divisibles por algun otro ademas de ellos mismos y la unidad, como 6, 8, 9, 10, 12, &c., se llaman *factores compuestos*. Esto supuesto, para poder encontrar todos los factores simples y compuestos de los números, se debe saber que *todo número que termina en cero ó guarismo par es divisible por 2*. Todo número (v. g. 264) cuyas cifras (2, 6 y 4) sumadas como unidades sencillas, den 3 ó un múltiplo de 3 (que aquí es 12) es divisible por 3.

Como todos los múltiplos de 5 acaban en 0 ó en 5, se conocerá que un número es divisible por 5 si acaba en 0 ó en 5. Esto supuesto, para hallar los factores simples y compuestos de un número cualquiera, se pone el número lo mas alto y hácia la izquierda del papel ó pizarra donde se ejecuta la operacion; despues se tira una raya de arriba abajo, y á la derecha de esta raya, enfrente del número propuesto, se pone el número primero menor por que sea divisible; esta division, como es sencilla, se va haciendo mentalmente (52), y el cociente se va poniendo debajo del número propuesto. Enfrente de este cociente se pone otra vez el mismo divisor, si es divisible por él, y sino aquel número primero menor por que sea divisible este cociente; y así se continúa hasta llegar á un cociente que sea número primo, y se dividirá por sí mismo. Despues se tira una raya á la derecha de los factores simples; y para formar los compuestos de dos, se multiplica cada uno de los simples por los que tenga debajo de sí, y el producto se pondrá á la derecha de la raya enfrente del factor simple por que se multiplica. Luego, se tira otra raya; y para formar los compuestos de tres, se multiplica cada compuesto de



á dos por todos los simples que haya debajo del renglon en que está el compuesto de á dos; y así se procede hasta llegar al último que debe resultar en el renglon inferior é igual con el número propuesto.

1.<sup>er</sup> ejemplo. Si quiero hallar los factores simples y compuestos del número 210, le colocaré lo mas arriba y hácia la izquierda que pueda, y tiraré la raya como aquí se ve:

|     |   |            |             |  |     |  |
|-----|---|------------|-------------|--|-----|--|
| 210 | 2 |            |             |  |     |  |
| 105 | 3 | 6          |             |  |     |  |
| 35  | 5 | 10; 15     | 30          |  |     |  |
| 7   | 7 | 14; 21; 35 | 42; 70; 105 |  | 210 |  |
| 1   |   |            |             |  |     |  |

y como el 210 termina en cero, es divisible por 2; pongo el 2 enfrente, y hago la division diciendo: la mitad de 2 es 1, que pongo debajo del 2 del 210; continúo: la mitad de 1 es 0 que pongo debajo del 1 del 210; y me queda uno, que junto con el 0 de arriba da 10; la mitad de 10 es 5, que pongo á la derecha del 0. Como el 105 no es divisible por 2, veo si es divisible por 3, diciendo: 1 y 0 es 1, y 5 son 6; y como 6 es múltiplo de 3, infiero que el 105 se puede dividir por 3; y por lo mismo coloco el 3 á su derecha, y hago la division de este modo: la 3.<sup>a</sup> parte de 1 es 0, que no pongo y sobra 1, que junto con el 0 vale 10; la 3.<sup>a</sup> parte de 10 es 3, que pongo debajo del 0, y queda 1, que junto con el 5 son 15; la 3.<sup>a</sup> parte de 15 es 5, que pongo á la derecha del 3. El 35 no es ya divisible por 3, pero lo es por 5; coloco el 5 á su derecha y digo: la 5.<sup>a</sup> parte de 35 es 7, que pongo debajo del 5; y como el 7 es *número primo* le dividiré por él mismo, diciendo: la 7.<sup>a</sup> parte de 7 es 1, que pongo debajo del 7, y tengo todos los factores simples.

Para hallar los factores compuestos de dos simples, tiraré á la derecha de estos una raya, y multiplicaré el 2 por todos los que tenga debajo de sí,



diciendo : 2 por 3 son 6, que coloco á la derecha de la raya, enfrente del 3, que es por el que he multiplicado; continúo : 2 por 5 son 10, que pongo enfrente del 5 que es por el que he multiplicado, y continúo : 2 por 7 son 14, que pongo por la misma razon enfrente del 7. Paso á multiplicar el 3 por todos los que tiene debajo, diciendo: 3 por 5 son 15, que pongo enfrente del 5 que es por el que he multiplicado; y para que no se confunda con el 10 que tengo en el mismo renglon, los separo poniendo entre ellos punto y coma; continúo diciendo: 3 por 7 son 21, que pongo enfrente del 7, al lado del 14 separándolos con punto y coma; despues paso á multiplicar el 5 por todos los que tenga debajo de sí, diciendo: 5 por 7 son 35, que pongo enfrente del 7 al lado del 21. Como el 7 no tiene ninguno debajo de sí, no puedo ya sacar mas factores de á dos.

Paso á los de á tres, para lo cual tiro una raya y multiplico el 6, primer factor de á dos, por el 5 y por el 7, que son los simples que hay debajo del renglon donde se halla el 6, diciendo : 6 por 5 son 30, que pongo enfrente del 5, que es el simple por que he multiplicado; y luego 6 por 7 son 42 que pongo enfrente del 7. Paso ahora á multiplicar el 10 por el 7, que es el simple que tiene debajo de sí, diciendo: 10 por 7 son 70, que pongo enfrente del 7, al lado del 42; tiro otra raya y paso á los de á cuatro; para lo cual multiplicaré el 30 por los que haya en los simples debajo del renglon donde está el 30; y como sólo está el 7, diré: 30 por 7 son 210, que es el número dado, como debia verificarse; pues ya no hay mas factores.

Si se repite algun factor simple tambien se repetirán los compuestos; pero se evita el poner estos ejecutando la operacion como se ve en el ejemplo siguiente:







*le añade un número cualquiera y á otro se le quita el mismo número.*

2.<sup>o</sup> Como en la resta se quita el sustraendo del minuendo, se infiere que *cuanto mayor ó menor sea el minuendo, permaneciendo el mismo sustraendo, tanto mayor ó menor (se entiende por via de suma ó resta) será la resta; y cuanto mayor ó menor sea el sustraendo, permaneciendo el mismo minuendo, tanto menor ó mayor será la resta*; lo que manifiesta que la resta puede crecer ó aumentando el minuendo ó disminuyendo el sustraendo; y puede menguar disminuyendo el minuendo ó aumentando el sustraendo; ó lo que es lo mismo, á la resta le sucede lo mismo que al minuendo, y lo contrario que al sustraendo; y una resta no se alterará ó permanecerá la misma, añadiendo ó quitando una misma cantidad al minuendo y sustraendo.

3.<sup>o</sup> Pues que multiplicar es tomar tantas veces el multiplicando como unidades tiene el multiplicador, resulta que *cualquiera de los factores que crezca ó mengüe, debe causar incremento ó decremento en el producto. Si el multiplicando se hiciese el duplo, el triplo, &c. de lo que era (permaneciendo el multiplicador el mismo), el producto deberá ser el duplo, el triplo, &c. del que se sacó ántes. Si se hiciese la mitad, tercera, cuarta, &c. parte (quedando uno mismo el multiplicador), el producto será la mitad, tercera, cuarta, &c. parte del que se tenia ántes.*

Lo mismo decimos respecto del multiplicador, permaneciendo el mismo el multiplicando; de donde se infiere que *un producto permanecerá el mismo si un factor se parte por el mismo número que se multiplique el otro.*

4.<sup>o</sup> Hemos visto que dividir es averiguar las veces que el divisor está contenido en el dividendo, ó quitar aquel de este todas las veces que se pueda; luego *si el dividendo crece ó mengua, deberá crecer ó menguar el cociente; y si crece ó mengua el divisor, deberá menguar ó crecer el cociente.* Esto es en



general; pero si el dividendo se hace el duplo, el triplo, &c. (quedando uno mismo el divisor), el cociente será el duplo, el triplo, &c. de lo que era ántes; y si el dividendo se hace la mitad, tercera parte, &c. el cociente será la mitad, tercera parte, &c. de lo que era ántes. Si el divisor se hace el duplo, el triplo, &c. (quedando uno mismo el dividendo), el cociente será la mitad, tercera parte, &c. de lo que era ántes; pues para cada unidad que les tocasse ántes, habrá ahora dos, tres, &c. entre que repartirla; y si el divisor se hiciese la mitad, tercera parte, &c. el cociente será el duplo, el triplo, &c. de lo que era ántes; pues para cada dos, tres, &c. unidades que les tocasse ántes, no habrá ahora mas de uno entre que repartirlas. De donde se infiere que un cociente no se altera aunque se multipliquen ó partan los dos términos de la division por un mismo número. Porque lo que aumenta ó disminuye por razon del dividendo, lo disminuye ó aumenta por razon del divisor.

*De los quebrados ó fracciones; de su expresion, reduccion á un comun denominador, y simplificacion.*

62 Hemos dicho (15) que quebrados son aquellos números que espresan partes de la unidad. Para formarse una idea exacta del quebrado, es necesario atender al número de partes que se toman de la unidad, que se llama *numerador* (porque las cuenta ó numera), y á la clase de partes que se toman, esto es, en cuántas partes está dividida la unidad, que se llama *denominador* (porque da nombre al quebrado). V. g. en el quebrado *tres cuartos* ó *tres cuartas partes de una unidad*, como una manzana, una naranja, &c. el numerador es *tres*, y el denominador *cuatro*. El numerador y denominador juntos, se llaman *términos* del quebrado.

63 Teor. *Todo quebrado es una division indicada del numerador por el denominador.*



*Espl.* Si tenemos que dividir 11 manzanas entre 4, dará el cociente 2, y 3 de resta, que se han de repartir entre los mismos 4; pues vamos á demostrar que repartir estas 3 manzanas entre 4, equivale á tomar tres cuartas partes de una manzana sola.

*Dem.* Para esto, lo mas natural es dividir cada manzana en cuatro partes iguales, y dar á cada uno una de estas cuartas partes; pero como las unidades ó manzanas son iguales, en lugar de dar á cada uno una cuarta parte de la primera, otra de la segunda y otra de la tercera, le podremos dar tres de la primera, ó de cualquiera de ellas, que era L. Q. D. D.

Por esta razon se escriben y leen los quebrados del modo dicho (49); v. g. el quebrado anterior se escribe  $\frac{3}{4}$ , y el quebrado  $\frac{19}{24}$ , se lee: diez y nueve veinticuatro avos. Como el numerador denota las partes que se toman de la unidad, y el denominador en cuántas se considera dividida la misma unidad, ó cuántas componen una unidad, se infiere que cuando el numerador sea igual al denominador, el quebrado equivaldrá á la unidad, y así tendremos que

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \&c. \&c.$$

En este caso se dice que *la unidad se ha puesto en forma de quebrado*; y cuando el numerador sea mayor que el denominador, el quebrado se llama *impropio*. V. g.  $\frac{7}{4}$ ,  $\frac{8}{5}$ , &c. &c.

64 Teor. *Si una unidad se divide en un número cualquiera 3 v. g. de partes iguales, y la misma unidad se divide en otro número 5 de partes iguales, cada parte que resulte de dividirla en 5, será menor que la que resulte de dividirla en 3; y si se dividiera en 6 que es duplo de 3, cada parte que resulte de dividirla en 6, será la mitad de la que resultó dividiéndola en 3.*

*Dem.* Estando la unidad en el primer caso dividida en tres partes, equivaldrá al conjunto de ellas; y por la misma razon la misma unidad equivaldrá en el segundo caso al conjunto de las cinco partes; luego (intr. ax. 5.<sup>o</sup>) el conjunto de las tres partes pri-



meras equivaldrá al conjunto de las cinco segundas; luego si se necesitan 5 segundas para componer 3 primeras, no bastarán 3 segundas para componer 3 primeras; luego cada segunda será menor que cada primera. L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

Cuando se divida en 6, tendrémos, discurriendo del mismo modo, que las tres partes primeras equivaldrán al conjunto de las 6 segundas; luego si se necesitan 6 segundas para componer 3 primeras, cada 2 segundas compondrán 1 primera; luego cada segunda será la mitad de cada primera. L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

65 Teor. *Si permaneciendo uno mismo el denominador de un quebrado, aumenta ó disminuye su numerador, aumentará ó disminuirá del mismo modo el quebrado; y si aumenta por via de multiplicacion ó disminuye por via de division, lo hará del mismo modo el quebrado.*

*Dem.* Por no alterarse el denominador, no se altera el valor de cada parte; luego cuando se tomen mas partes, que es cuando crece el numerador, se tendrá un quebrado mayor; y cuando se tomen ménos, que es cuando disminuye el numerador, se tendrá un quebrado menor. L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

Si el número de partes que se tomó, fue el duplo, el triplo, &c. el valor del quebrado que nos resulte, será el duplo, el triplo, &c.; y si fue el subduplo, el subtriplo, &c. el valor del quebrado que nos resulte, lo será igualmente. L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

*Esc.* Hé aquí quebrados con esta condicion

$$\frac{8}{17}, \frac{9}{17}, \frac{7}{17}; \frac{16}{17}, \frac{4}{17};$$

y manifiestan que de quebrados que tienen un mismo denominador, *aquel es mayor que tiene mayor numerador*; y que para multiplicar ó dividir un quebrado por un número cualquiera, basta *multiplicar ó dividir su numerador por dicho número.*

66 Teor. *Si permaneciendo uno mismo el numerador de un quebrado, aumenta ó disminuye su denominador, disminuirá ó aumentará el quebrado. Si el denominador aumenta por via de multiplicacion, el*

D

T. I.



*quebrado disminuirá por via de division; y si el denominador disminuye por via de division, el quebrado aumentará por via de multiplicacion.*

*Dem.* Como el numerador permanece el mismo, se toma siempre un mismo número de partes; luego el valor del quebrado será mayor ó menor, segun lo sean las partes que espese; pero miéntras mayor sea el número de partes en que se divida una unidad cualquiera, será (64) menor el valor de cada una; luego miéntras mayor sea el denominador, será menor el valor de cada parte, y por consiguiente el valor de un número cualquiera de ellas. L. 1.º Q. D. D.

Si el denominador se hiciese dos ó tres &c. veces mayor, el valor de cada parte se haria (64) dos ó tres &c. veces menor; luego un número cualquiera de ellas será tambien dos ó tres &c. veces menor que lo que era ántes. Si el denominador disminuye por via de division, entónces el valor de cada parte aumentará por via de multiplicacion. L. 2.º Q. D. D.

*Esc.* Hé aquí quebrados que satisfacen á estas condiciones  $\frac{7}{16}, \frac{7}{17}, \frac{7}{15}; \frac{7}{32}, \frac{7}{8}$ ; y manifiestan que de quebrados que tienen un mismo numerador, *es mayor el que tiene menor denominador, y al contrario*; y que para multiplicar ó dividir un quebrado por un número cualquiera, basta *dividir ó multiplicar su denominador por dicho número.*

*Cor.* De aquí se sigue que *para multiplicar un quebrado por su denominador basta suprimir este, y el producto será igual al numerador.*

Así,  $\frac{5}{8} \times 8 = 5$ ,  $\frac{6}{11} \times 11 = 6$ ,  $\frac{8}{13} \times 13 = 8$ , &c. &c.

67 Teor. *Un quebrado no se altera, aunque sus dos términos se multipliquen ó partan por un mismo número.*

*Dem.* Cuando se multiplican ambos términos por un mismo número, tenemos que con multiplicar el numerador, se hace al quebrado tantas veces mayor (65) como unidades tiene el número por que se multiplica; pero con multiplicar el denominador por el mismo número, se le hace este mismo número de ve-



ces menor (66); luego no se altera su valor ó queda conforme estaba. L. 1.º Q. D. D.

Si se dividen por un mismo número, con dividir el numerador hacemos el quebrado tantas veces menor como unidades tiene el número por que se divide (65); y con dividir su denominador por el mismo número, se le hace el mismo número de veces mayor (66); luego queda conforme estaba. L. 2.º Q. D. D.

*Esc.* Hé aquí quebrados iguales que satisfacen al teorema  $\frac{8}{14} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} = \&c.$

y es digna de notarse la conformidad de estos resultados con los deducidos para la division (61, 4.º).

68 En la primera parte del teorema anterior se funda *la reduccion de los quebrados á un comun denominador*; y en la segunda su *simplificacion*.

Cuando dos ó mas quebrados tienen un mismo denominador, se dice que le tienen *comun*; muchas veces se necesita que le tengan, y para conseguirlo *se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demas*. En este caso no se altera el valor de ningun quebrado, porque sus dos términos se multiplican por un mismo número; y sale el mismo denominador, porque resulta de la multiplicacion de los denominadores de todos los quebrados. V. g. Si quiero reducir á un comun denominador los quebrados  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{5}{7}$ , los pondré

como aquí se ve:  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}, \frac{5}{7} \\ \frac{14}{21}, \frac{15}{21} \end{array} \right.$

Multiplicaré los dos términos del  $\frac{2}{3}$  por 7, que es el denominador del otro quebrado, diciendo: 2 por 7 son 14, que pongo por numerador del nuevo quebrado, debajo de su correspondiente  $\frac{2}{3}$ ; tiraré la raya y diré: 3 por 7 son 21, que pongo debajo de la raya. Paso al segundo quebrado  $\frac{5}{7}$  y digo: 5 por 3 son 15, que pongo debajo del  $\frac{5}{7}$ ; tiro la raya y despues pongo debajo 21, producto de 3 por 7; con lo que tengo los quebrados  $\frac{14}{21}$ ,  $\frac{15}{21}$ , que son iguales cada uno con su correspondiente y tienen un mismo denominador.



Si los quebrados fuesen  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{4}{5}$ , multiplicaria los dos términos del primero  $\frac{5}{6}$  por 10, producto de 2 por 5, que son los denominadores de los demas, y tendria que el primer quebrado se convertiria en  $\frac{50}{60}$ ; pasaria al segundo  $\frac{1}{2}$ , cuyos términos los multiplicaria por 30, producto de 6 y 5, denominadores de los demas, y se convertiria en  $\frac{30}{60}$ ; y luego los dos términos del tercero  $\frac{4}{5}$ , los multiplicaria por 12, producto de 6 por 2, denominadores de los demas, lo que da  $\frac{48}{60}$ ; con lo que tengo los tres quebrados  $\frac{50}{60}$ ,  $\frac{30}{60}$ ,  $\frac{48}{60}$ , que son iguales con los primitivos y tienen un mismo denominador.

Como el denominador comun resulta de la multiplicacion de todos los denominadores, no se necesita *hallar mas que el del primero, y ponerle á los demas cuando se ha puesto el numerador que les corresponde.*

$$\text{Ejemplo. } \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3} \\ \text{dan } \frac{72}{120}, \frac{60}{120}, \frac{90}{120}, \frac{40}{120} \end{array} \right.$$

69 Esta operacion convierte los quebrados en otros de igual valor, pero mas complicados; y así, sólo se ejecuta como auxiliar de otras; pero la que se debe hacer en todos los resultados donde haya quebrados, es *simplificarlos*. Se dice que se simplifica un quebrado *cuando se convierte en otro de igual valor, y cuyos términos son menores.*

Para esto, se dividen sus dos términos por 2 todas las veces que se pueda; luego por 3, y por los demas números primos, lo cual se conoce por lo dicho (59). Así, si quiero simplificar el quebrado  $\frac{72}{120}$ ; veo que sus dos términos se pueden dividir por 2; lo hago y tengo  $\frac{36}{60}$ , que es igual con  $\frac{72}{120}$ , y que se puede aun simplificar por 2; lo hago y tengo  $\frac{18}{30}$ , que aun se puede simplificar por 2; lo hago y tengo  $\frac{9}{15}$ , que no se puede simplificar por 2, pero sí por 3 (§ 59); lo hago y tengo  $\frac{3}{5}$ , que es igual con el  $\frac{72}{120}$  que se nos dió. En efecto, el  $\frac{72}{120}$  es el que provino (en el ejem-



plo de ántes) del  $\frac{3}{5}$ , al reducir los quebrados á un mismo denominador; y como ahora deshacemos lo que ántes hicimos, ha de resultar lo mismo que habia.

Los principiantes deben simplificar todos los puestos anteriormente, como se ve en el que aquí se presenta.

$$\frac{9900}{13860} = \frac{4950}{6930} = \frac{2475}{3465} = \frac{825}{1155} = \frac{275}{385} = \frac{55}{77} = \frac{5}{7}.$$

*Sumar, restar, multiplicar y dividir quebrados.*

70 Los quebrados tambien se *suman, restan, multiplican y parten.*

Para sumarlos *se reducen á un mismo denominador, (sino le tienen); despues se suman los numeradores; á esta suma se le pone por denominador el denominador comun; y si este quebrado es impropio, se divide el numerador por el denominador para sacar los enteros que contenga, y se simplifica si se puede.*

Si quiero sumar  $\frac{3}{4}$  con  $\frac{2}{5}$ , los reduciré á un comun denominador (20), y se convertirán en  $\frac{15}{20}$ ,  $\frac{8}{20}$ ; despues sumaré los numeradores 15 y 8, y á la suma 23 le pondré por denominador el 20, que es el comun, y la suma será  $\frac{23}{20}$ ; que sacando los enteros será  $1\frac{3}{20}$ .

La operacion se indica así:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20} = 1\frac{3}{20}.$$

Aplicando la regla á estos ejemplos se hallará

$$1.^{\circ} \frac{3}{5} + \frac{2}{9} + \frac{4}{7} = \frac{189}{315} + \frac{70}{315} + \frac{180}{315} = \frac{439}{315} = 1\frac{124}{315};$$

$$2.^{\circ} \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{60}{90} + \frac{72}{90} + \frac{75}{90} = \frac{207}{90} = 2\frac{27}{90} = 2\frac{9}{30} = 2\frac{3}{10}.$$

*Dem.* Se reducen á un comun denominador, porque no son homojéneos sino le tienen; despues se suman los numeradores, porque en ellos está el valor de los quebrados; y á esta suma se le pone por denominador el comun, para saber el nombre de aquellas partes. La simplificacion que despues se hace, es porque en todas las operaciones se deben presentar los resultados con la mayor sencillez. L. Q. D. D.

71 Al sumar quebrados pueden ocurrir tres casos: *sumar quebrados con quebrados, que es lo que acabamos de ejecutar; sumar un entero con un quebrado;*



y sumar números mistos con números mistos.

La cuestion que conduce á sumar un entero con un quebrado, se presenta cuando se tiene un número misto, tal como  $4\frac{3}{5}$ , y se quiere saber cuántos quintos compone el entero junto con el quebrado. En este caso, se dice que se reduce el entero á la especie del quebrado que le acompaña; para lo cual se multiplica el entero por el denominador del quebrado; á esto se añade el numerador; y á la suma se le pone por denominador el denominador del quebrado. De manera que para aplicarlo á  $7\frac{3}{5}$ , multiplicaré el 7 por el 5, al producto 35 le añadiré el numerador 3 del quebrado, y á la suma 38 le pondré por denominador el 5 del quebrado, y tendré en  $\frac{38}{5}$  ejecutada la operacion que se me pedia. Porque en este caso cada unidad vale cinco partes; luego 7 unidades valdrán siete veces cinco ó 35 partes, y las 3 que se tenian serán 38 de estas partes, esto es, 38 quintas partes ó  $\frac{38}{5}$ , que es L. Q. D. D.

Del mismo modo se tiene  $14\frac{5}{8} = \frac{117}{8}$ ;  $12\frac{7}{11} = \frac{139}{11}$ .

72 Para sumar números mistos con números mistos, se suman los quebrados con los quebrados, y los enteros con los enteros, cuidando de sumar con estos los que resulten de la suma de los quebrados, y se simplifica si se puede.

1.<sup>er</sup> ej. Si quiero sumar  $45\frac{3}{7}$  con  $27\frac{4}{7}$  y con  $6\frac{5}{7}$ , los pondré los unos debajo los otros en esta forma:

Como los quebrados tienen un mismo denominador, sumaré los numeradores, pondré á esta suma el denominador comun, y saco de la suma de los quebrados  $\frac{12}{7}$ ; pero en  $\frac{12}{7}$  hay un entero y  $\frac{5}{7}$ , borro el  $\frac{12}{7}$ , y pongo debajo el  $\frac{5}{7}$ ; el 1 le coloco sobre los enteros, separándole con una media luna, para que se conozca que ha provenido de la suma de los quebrados; sumo despues los enteros y saco 79; por lo que la suma pedida es  $79\frac{5}{7}$ .

$$\begin{array}{r} (1 \\ \hline 45\frac{3}{7} \\ 27\frac{4}{7} \\ 6\frac{5}{7} \\ \hline +2 \\ 79\frac{5}{7} \end{array}$$

2.<sup>o</sup> ej. Si quiero sumar los números  $47\frac{2}{3}$ ,  $9\frac{1}{3}$  y



$138\frac{3}{4}$ , primero reduciré los quebrados á un comun denominador, y ejecutaré la operacion como aquí se ve:

y saco la suma  $195\frac{29}{60}$ .

73 Para restar quebrados se reducen á un comun denominador (sino le tienen); despues se restan los numeradores; y á la resta se le pone por denominador el denominador comun, y se simplifica si se puede.

$$\begin{array}{r} (1 \\ \hline 47\frac{2}{5} \dots \frac{24}{60} \\ 9\frac{1}{3} \dots \frac{20}{60} \\ \hline 138\frac{3}{4} \dots \frac{45}{60} \\ \hline 195 \quad \frac{89}{60} \\ \hline \frac{29}{60} \end{array}$$

1.<sup>er</sup> ej. Si quiero restar  $\frac{2}{5}$  de  $\frac{3}{4}$ , los reduciré á un comun denominador (60), y se convertirán en  $\frac{8}{20}$  y  $\frac{15}{20}$ ; restando el 8 numerador del quebrado  $\frac{8}{20}$  correspondiente al sustraendo  $\frac{2}{5}$ , del 15 numerador del  $\frac{15}{20}$  correspondiente al minuendo  $\frac{3}{4}$ , y poniendo á la diferencia 7 el denominador comun 20, tendré la resta  $\frac{7}{20}$ , que no se puede simplificar.

La operacion se indica así:  $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$ .

2.<sup>o</sup>  $\frac{13}{15} - \frac{5}{9} = \frac{117}{135} - \frac{75}{135} = \frac{42}{135} = \frac{14}{45}$ .

Dem. Se reducen á un comun denominador, porque en la resta los datos deben ser homogéneos; despues se han de restar los numeradores, porque en ellos está el valor de los quebrados; y finalmente se ha de poner á la resta el denominador comun, porque es el que da nombre al quebrado. L. Q. D. D.

74 Al restar quebrados pueden ocurrir tres casos: *restar un quebrado de otro*, que es lo que se acaba de hacer; *restar un quebrado de un entero*; y *restar un número misto de otro número misto*.

Para restar un quebrado de un entero, se le quita al entero una unidad; al lado de este entero, despues de rebajada la unidad, se pone un quebrado cuyo numerador es igual á la diferencia que hay entre el denominador y el numerador del quebrado dado, y el denominador es el mismo que el del quebrado que se da; con lo que está hecha la resta.

Aplicando esta regla á los ejemplos siguientes, se encontrarán los resultados que ellos manifiestan.

1.<sup>o</sup>  $8 - \frac{3}{5} = 7\frac{2}{5}$ ; 2.<sup>o</sup>  $14 - \frac{2}{9} = 13\frac{7}{9}$ ; 3.<sup>o</sup>  $29 - \frac{14}{23} = 28\frac{9}{23}$ ;



porque haciendo en todos una descomposicion semejante á esta  $8 - \frac{3}{5} = 7 + \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = 7 + \frac{2}{5} = 7\frac{2}{5}$ , nos resulta L. Q. D. D.

75 Para restar un número misto de otro, *se resta el quebrado del quebrado, y el entero del entero.* Si despues de reducidos á un mismo denominador, sino le tienen, el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo, para poder restar *se toma una unidad del minuendo, la cual se reduce á la especie del quebrado que le acompaña* (lo que se consigue sumando el numerador del quebrado con el denominador, y á esto poniendo por denominador el comun); *de este quebrado que será impropio, se resta el del sustraendo, y luego al ejecutar la resta con los enteros, se debe advertir que al minuendo se le ha quitado una unidad.*

1.<sup>er</sup> *ejemp.* Si quiero restar  $18\frac{5}{7}$  de  $33\frac{8}{9}$ , los colocaré como aquí se ve:

|                                                    |                                     |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------|
| reduciré á un comun denominador los                | $33\frac{8}{9} \dots \frac{56}{63}$ |
| quebrados; y como sale el del su-                  | $18\frac{5}{7} \dots \frac{45}{63}$ |
| straendo menor que el del minuendo,                | $\underline{\hspace{1.5cm}}$        |
| paso á restar el quebrado del quebrado             | $15 \quad \frac{11}{63}$            |
| y el entero del entero, y saco $15\frac{11}{63}$ . |                                     |

2.<sup>o</sup> *ej.* Si quisiera restar  $24\frac{7}{8}$  de  $45\frac{6}{11}$ , los colocaria como aquí se ve:

|                                                                               |                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| reduciendo los quebrados á un                                                 | $45\frac{6}{11} \dots \frac{48}{88} \dots \frac{136}{88}$ |
| comun denominador, sale me-                                                   | $24\frac{7}{8} \dots \frac{77}{88} \dots \frac{77}{88}$   |
| nor el del minuendo; tomo una                                                 | $\underline{\hspace{1.5cm}}$                              |
| unidad del entero, que en este                                                | $20 \quad \frac{59}{88}$                                  |
| caso vale $\frac{88}{88}$ , y sumada con los                                  |                                                           |
| $\frac{48}{88}$ me da $\frac{136}{88}$ ; paso despues á la resta considerando |                                                           |
| al 5 del 45 como 4, y tengo por último $20\frac{59}{88}$ .                    |                                                           |

76 Para multiplicar un quebrado por otro *se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador, y se simplifica.* V. g. si quiero multiplicar  $\frac{2}{5}$  por  $\frac{4}{7}$  diré: 2 por 4 son 8; 5 por 7 son 35; poniendo por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el de los denominadores, tendré en  $\frac{8}{35}$  el producto pedido.



*Dem.* Porque si tuviera que multiplicar el  $\frac{2}{5}$  por 4, estaba reducida la operacion (65) á multiplicar su numerador por 4; y en este caso el producto seria  $\frac{8}{5}$ ; pero de multiplicar el  $\frac{2}{5}$  por un número siete veces menor que 4, esto es por  $\frac{4}{7}$ , ha de resultar un producto (61, 3.<sup>o</sup>) siete veces menor que  $\frac{8}{5}$ ; y como esto se consigue (66) multiplicando su denominador por 7, resulta, ejecutándolo, que  $\frac{8}{35}$  es el producto verdadero. L. Q. D. D.

Del mismo modo  $\frac{7}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ ;  $\frac{8}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{40}{90} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$ .

77 Al multiplicar quebrados pueden ocurrir tres casos: *multiplicar un quebrado por otro*, que es lo que acabamos de explicar; *multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero*; y *multiplicar un número misto por otro misto*.

Para multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero, se multiplica el entero por el numerador del quebrado, y al producto se le pone por denominador el denominador del quebrado, y se simplifica si se puede.

1.<sup>er</sup> ej. Si quiero multiplicar 4 por  $\frac{5}{7}$ , multiplicaré el 4 por 5, al producto 20 le pondré por denominador el denominador 7 del quebrado, y tendré que el producto será  $\frac{20}{7}$ ; que sacando los enteros se convierte en  $2\frac{6}{7}$ .

La operacion se indica así:  $4 \times \frac{5}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$ .

Del mismo modo  $7 \times \frac{3}{14} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ .

*Dem.* Esta regla está fundada en lo dicho (65 esc.), y tambien se deduce del caso anterior, poniendo al entero la unidad por denominador.

78 Para multiplicar un número misto por otro misto, se reduce el entero á la especie del quebrado que le acompaña en cada factor, y despues se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador. V. g. Si quiero multiplicar  $3\frac{2}{5}$  por  $2\frac{4}{7}$ , reduciré en ambos factores el entero á la especie del quebrado que le acompaña, y tendré que multiplicar  $\frac{17}{5}$  por  $\frac{18}{7}$ ; y ejecutando la operacion (76) tendré

$$3\frac{2}{5} \times 2\frac{4}{7} = \frac{17}{5} \times \frac{18}{7} = \frac{306}{35} = 8\frac{26}{35}.$$



Del mismo modo  $28\frac{8}{9} \times 24\frac{3}{4} = \frac{260}{9} \times \frac{99}{4} =$   
 $\frac{25740}{36} = \frac{12870}{18} = \frac{6435}{9} = \frac{2145}{3} = 715.$

79 Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y este será el numerador del cociente: y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y este producto será el denominador del cociente, y se simplifica. V. g. Si quiero dividir  $\frac{3}{4}$  por  $\frac{2}{7}$ , multiplicaré el numerador 3 del dividendo por el denominador 7 del divisor, y el producto 21 será el numerador del cociente; despues multiplicaré el denominador 4 del dividendo por el numerador 2 del divisor, y el producto 8 será el denominador del cociente, el cual será  $2\frac{1}{8}$  ó  $2\frac{5}{8}$ .

Del mismo modo  $\frac{4}{9} : \frac{8}{15} = \frac{60}{72} = \frac{30}{36} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$

*Dem.* Porque si sólo tuviese que dividir el  $\frac{3}{4}$  por 2, estaba reducida la operacion (66) á multiplicar su denominador por 2; de manera que  $\frac{3}{8}$  seria el cociente; luego de dividir el  $\frac{3}{4}$  por un número siete veces menor que 2, esto es por  $\frac{2}{7}$ , ha de resultar (61, 4.<sup>o</sup>) un cociente siete veces mayor que  $\frac{3}{8}$ ; y como esto se consigue (65) multiplicando su numerador 3 por 7, resulta, ejecutándolo, que el verdadero cociente será  $2\frac{1}{8}$ , ó lo que es lo mismo,  $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = 2\frac{1}{8} = 2\frac{5}{8}$ , que era L. Q. D. D.

80 Al dividir quebrados pueden ocurrir cuatro casos: *dividir un quebrado por otro*, que es lo que se acaba de hacer; *dividir un entero por un quebrado*; *dividir un quebrado por un entero*; y *dividir un número misto por otro misto*.

Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, á este producto se le pone por denominador el numerador del quebrado, y se simplifica si se puede.

V. g. si quiero dividir 7 por  $\frac{2}{5}$ , multiplicaré el entero 7 por el denominador 5, y tendré 35; á este producto le pondré por denominador el numerador 2 del quebrado, y tendré  $17\frac{1}{2}$ .

Del mismo modo  $9 : \frac{6}{7} = \frac{63}{6} = 10\frac{3}{6} = 10\frac{1}{2}.$



81 Para dividir un quebrado por un entero se multiplica el denominador del quebrado por el entero, y queda hecha la division.

V. g. si quiero dividir  $\frac{3}{5}$  por 6, multiplicaré el denominador 5 por el entero 6, y tendré por cociente  $\frac{3}{30}$ , ó  $\frac{1}{10}$  despues de simplificado.

Del mismo modo  $\frac{6}{13} : 4 = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$ ;  $\frac{15}{17} : 9 = \frac{15}{153} = \frac{5}{51}$ .

Dem. Poniendo, en este caso y el anterior, al entero la unidad por denominador, la demostracion se reduce á la dada (79), ó se puede deducir de lo dicho (61, 4.<sup>o</sup> y 66 esc.).

82 Para dividir un número misto por otro misto se reduce cada entero á la especie del quebrado que le acompaña, y despues se divide como un quebrado por otro.

V. g. quiero dividir  $5\frac{2}{3}$  por  $2\frac{5}{7}$ ; primero reduciré cada entero á la especie de su quebrado, y tendré que dividir  $\frac{17}{3}$  por  $\frac{19}{7}$ ; que (79) dará  $\frac{17}{3} : \frac{19}{7} = \frac{119}{57} = 2\frac{5}{57}$ .

Del mismo modo  $9\frac{5}{7} : 4\frac{6}{11} = \frac{68}{7} : \frac{50}{11} = \frac{748}{350} = \frac{374}{175} = 2\frac{24}{175}$ .

Esc. Ademas puede ocurrir el dividir un quebrado ó un entero por un número misto, y al contrario; pero reduciendo el entero á la especie del quebrado, se tienen los casos anteriores, que se practican como se ve en estos ejemplos.

$$1.^{\circ} \frac{3}{7} : 2\frac{4}{5} = \frac{3}{7} : \frac{14}{5} = \frac{15}{98};$$

$$2.^{\circ} 9 : 5\frac{3}{4} = 9 : \frac{23}{4} = \frac{36}{23} = 1\frac{13}{23};$$

$$3.^{\circ} 5\frac{3}{7} : \frac{4}{9} = \frac{38}{7} : \frac{4}{9} = \frac{342}{28} = \frac{171}{14} = 12\frac{3}{14};$$

$$4.^{\circ} 6\frac{2}{3} : 5 = \frac{20}{3} : 5 = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

### De la valuacion de los quebrados.

83 Valuar un quebrado es hallar su valor en unidades de especie inferior á la que se refiere. V. g. en  $\frac{1}{3}$  de vara no hay ninguna vara; pero como la vara tiene 3 pies, 1 pie será la tercera parte de la vara, y por lo mismo (intr. ax. 5.<sup>o</sup>)  $\frac{1}{3}$  de vara = 1 pie, y está valuado el quebrado.



Para valuar un quebrado, se multiplica el numerador por el número que espresa las veces que la unidad en que se quiere valuar el quebrado, está contenida en aquella á que se refiere el quebrado, y esto se parte por el denominador; si de la division resulta un número misto, y hay todavía unidades de especie inferior, se hace con el quebrado lo mismo; y así se continúa hasta que no haya mas unidades de especie inferior; en cuyo caso si queda todavía quebrado, se desprecia si el numerador no llega á ser la mitad del denominador: y se añade en vez del quebrado una unidad á las unidades anteriores, si el numerador llega ó pasa de la mitad del denominador.

Así, si quiero saber cuánto valen  $\frac{3}{7}$  de doblon, multiplicaré el numerador 3 por 4, que son los pesos que tiene el doblon, y dividiré el producto 12 por 7, lo que da 1 peso y  $\frac{5}{7}$  de peso. Para averiguar los reales que hay en  $\frac{5}{7}$  de peso, multiplicaré el numerador 5 por 15, que son los reales que contiene un peso, y dividiré el producto 75 por 7, y tendré 10 reales y  $\frac{5}{7}$  de real; para averiguar los maravedises que hay en  $\frac{5}{7}$  de real, multiplicaré el numerador 5 por 34, que son los maravedises que tiene un real, y dividiré el producto 170 por 7, y tendré 24 maravedises y  $\frac{2}{7}$  de maravedí; que como no hay unidad inferior al maravedí, y el numerador 2 no es la mitad del denominador 7, le desprecio: y tengo que los  $\frac{3}{7}$  de doblon valen 1 peso, 10 reales y 24 maravedises.

*Dem.* La razon de esto es que  $\frac{3}{7}$  de doblon es lo mismo (63) que 3 doblones repartidos entre 7; y como no les toca á doblon, se reducen á pesos, estos á reales, y los reales á maravedises, para ver á cómo les toca en estas unidades de especie inferior.

#### *De los quebrados ó fracciones decimales.*

84 La teoría de los quebrados acabada de explicar, embaraza mucho los cálculos, en razon de la ninguna ley que siguen los denominadores, que van



variando en cada quebrado. Para evitar este inconveniente, y facilitar y uniformar todas las operaciones, se han inventado las *fracciones decimales*; las que al mismo tiempo que son un caso particular de los quebrados comunes, llenan todos los objetos mencionados.

Son, pues, las decimales, unos quebrados que tienen por denominador 10; 100; 1000, &c. y en general la unidad seguida de ceros. Para formarnos una idea exacta de las decimales, concebiremos dividida la unidad en diez partes iguales, que se llaman *décimas*; concibiendo dividida cada décima en diez partes iguales, la unidad tendrá ciento, y por lo mismo se llaman *centésimas* partes de la unidad; concibiendo cada centésima dividida en diez partes, estas serán *milésimas* de la unidad; y continuando dividiendo en otras diez cada una que vaya saliendo, resultarán las *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, *millonésimas*, *diezmillonésimas*, *cienmillonésimas*, *millillonésimas*, *diezmillillonésimas*, &c.

Por la uniformidad de los denominadores, y la ley que sigue cada parte de ir siendo diez veces menor, no se escribe el denominador de estos quebrados, sino que se ponen á la derecha de las unidades las *décimas*, á la derecha de estas las *centésimas*, despues las *milésimas*, luego las *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, &c. Y para conocer el guarismo que expresa las unidades, se pone entre él y las *décimas* una coma; y sino hay unidades, se pone 0 ántes de la coma, para que ocupe el lugar de las unidades. V. g. si quiero expresar *cuarenta y cinco enteros y seis décimas*, escribiré así: 45,6; y la coma da á entender que el guarismo 5 expresa las unidades, y el 6 las *décimas*; si sólo hubiera querido escribir *seis décimas*, hubiera puesto 0 en lugar de las unidades, y tendria escritas las seis *décimas* de este modo: 0,6.

Si se quiere expresar el denominador, se puede poner  $\frac{6}{10}$  en vez de 0,6, y  $45\frac{6}{10}$  en vez de 45,6; donde se debe advertir que la coma hace officios de



denominador, y que cuando se quiera espresar este, se pondrá la unidad seguida de tantos ceros como guarismos hay despues de la coma. Por ejemplo

$$3,507 = 3\frac{507}{1000}, \text{ y } 0,0039 = \frac{39}{10000}.$$

85 Un número que lleva enteros y decimales, es un verdadero número misto; y así, para leerle, se leerá primero el entero (13), y luego los guarismos decimales del mismo modo, pronunciando despues de estas la denominacion que les corresponda: la cual sino se conoce al golpe por haber muchos guarismos decimales, se averigua diciendo desde la coma á la derecha, en el primer lugar décimas, en el segundo centésimas, y así sucesivamente, hasta el último guarismo, cuyo nombre se apunta si es complicado el número. Para que no se confundan las comas de la division de periodos con la de las decimales, se hace la coma mayor que las otras. Así, si quisiera leer el número 7056403274,3509053405703364,

averiguaria la especie de unidades del último guarismo 4, y hallaria ser *diezmilbillonésimas*. Despues le prepararé (13) en esta forma:

$$7,056_1 403,274,3,509_2 053,405_1 703,364;$$

y se lee así: *siete mil cincuenta y seis millones, cuatrocientos tres mil, doscientos setenta y cuatro unidades ó enteros: tres mil quinientos nueve billones, cincuenta y tres mil cuatrocientos cinco millones, setecientos tres mil trescientas sesenta y cuatro diezmilbillonésimas.*

86 El valor de las decimales no se altera cuando se ponen ó quitan ceros á continuacion de los guarismos significativos.

V. g.  $0,7 = 0,70 = 0,700 = 0,7000 = 0,70000$  &c.

Porque como  $0,7 = \frac{7}{10}$ , multiplicando sus dos términos por 10, por 100, por 1000 &c. no se alterará el quebrado (67), y se tendrá que

$$0,7 = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000} = \frac{7000}{10000} = \text{\&c.}$$

$$\text{ó } 0,7 = 0,70 = 0,700 = 0,7000 = \text{\&c.}$$



Si teniendo ceros al fin se quitan, resultan los dos términos divididos por un mismo número, lo que (67) tampoco altera el quebrado. L. Q. D. D.

87 Si los ceros se colocan entre la coma y los guarismos significativos, *se hace el quebrado tantas veces menor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como se han puesto entre la coma y los guarismos significativos*; porque en este caso se hace diez, ciento, mil, &c. veces menor el valor de cada parte, y no se hace diez, ciento, mil, &c. veces mayor el número de ellas.

Del mismo modo, si en un número que lleva enteros con decimales, se corre la coma un lugar hácia la izquierda, como el guarismo que ántes espresaba unidades, ahora espresará décimas: el que ántes décimas, ahora centésimas: y así sucesivamente; resulta que cada parte se ha hecho diez veces menor, y por lo mismo esta mutacion de la coma habrá convertido al número propuesto en otro diez veces menor. Si se hubiera corrido la coma dos lugares hácia la izquierda, hubiéramos hecho cien veces menor á dicho número; y en general, *con correr la coma un número cualquiera de lugares hácia la izquierda, se hace al número tantas veces menor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.*

Por el contrario, *corriendo la coma un número cualquiera de lugares hácia la derecha, quedará hecho el número tantas veces mayor, como espresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.* Así, si en el número 8532,74914 coloco la coma entre el 5 y el 3, tendré 85,3274914, que será cien veces menor que el propuesto; y si la pusiera entre el 9 y el 1 tendria 8532749,14, que es mil veces mayor que el propuesto.

88 Puesto que las decimales siguen la misma ley que los enteros, y se escriben y leen lo mismo que ellos, es un punto de la mayor importancia el sustituir los quebrados decimales á los comunes, lo que



se consigue convirtiendo en decimales los quebrados que hayan de entrar en los cálculos. Para esto se toma el numerador del quebrado por dividendo y el denominador por divisor, y se divide el uno por el otro; más si el quebrado es propio, no cabrá el divisor en el dividendo; y así, se pone 0 en el cociente, y después se añade un cero al dividendo y se divide por el divisor; el cociente se pone á la derecha de la coma; se multiplica por el divisor y se resta. A la resta se añade otro cero y se divide por el divisor; lo que resulta se pone en el cociente á la derecha del guarismo anterior, se multiplica y resta. A la resta se añade otro cero, y se continúa añadiendo un cero por cada guarismo decimal que se quiera sacar: observando que si después de añadir un cero no cabe el divisor en el dividendo, se pone cero al cociente y se añade otro cero al dividendo.

1.<sup>er</sup> ej. Quiero sacar con tres decimales el valor de  $\frac{5}{17}$ ; ejecutaré la operación como aquí se ve:

Tomo el 5 por dividendo y el 17 por divisor; veo que 17 no cabe en 5, y por lo mismo pongo 0 en el cociente, y después la coma; añado un 0 al 5, y veo que 50 entre 17 les toca á 2, que pongo en el cociente después de la coma; multiplico este cociente por el divisor, le resto del dividendo 50 y saco la resta 16. A esta añado un cero, y veo que 160 entre 17 les cabe á 9, que pongo en el cociente; multiplico por el divisor, y resto del dividendo 160. Al lado de la resta 7 pongo otro cero, veo que 70 entre 17 les toca á 4 que pongo en el cociente; multiplico por el divisor y resto. Del mismo modo continuaria si quisiera sacar mas de los tres guarismos decimales que me propuse; con lo cual tengo reducido el quebrado  $\frac{5}{17}$  á quebrado decimal, aproximado hasta milésimas.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 17 \\ 160 & \hline 0070 & 0,294 \\ & 02 \end{array}$$

2.<sup>o</sup> ej. Si quiero reducir á quebrado decimal  $\frac{8}{943}$ , lo ejecutaré como se ve en la página siguiente:



Tomaré el 8 por dividendo, el 943 por divisor, y pongo en el cociente cero y coma; añado un cero al 8, y como 80 no contiene al divisor 943, pongo 0 en el cociente; añado otro al dividendo, y pongo también 0 al cociente; añado otro 0 al dividendo, y veo que 943 en 8000 ó 9 en 80 cabe 8 veces, pongo 8 en el cociente despues de los dos ceros; multiplico por el divisor y resto; á la resta le añado un cero, y así continuaré la division hasta sacar los guarismos que necesite, que supongo aquí que son seis, y tengo el quebrado  $0,008482$ , que es el mismo que el  $\frac{8}{943}$ , con diferencia de ménos de una millonésima parte de la unidad.

*Dem.* Como de tomar el numerador por dividendo y el denominador por divisor, no puede salir ningun entero, se pone cero y coma en el cociente; añadiendo un cero al dividendo se convierte en décimas; y por lo mismo se ve si les toca á alguna, y sino, se pone también cero en el cociente en el lugar de las décimas; lo mismo decimos de todo lo demas de la regla y resulta L. Q. D. D.

89 Al convertir los quebrados en decimales resulta *cociente exacto*, cuando el denominador no tiene mas factores simples que el 2 y el 5, como 8; 16; &c. &c. 25; 125 &c. V. g. si convierto en decimales los quebrados  $\frac{5}{8}$ ;  $\frac{7}{25}$ ;  $\frac{14}{125}$ , lo haré como se ve en (A), (B), (C).

$$(A) \quad \begin{array}{r} 50 \quad | \quad 8 \\ \hline 20 \quad | \quad 0,625 \\ 40 \\ 0 \end{array}$$

$$(B) \quad \begin{array}{r} 70 \quad | \quad 25 \\ \hline 200 \quad | \quad 0,28 \\ 000 \end{array}$$

$$(C) \quad \begin{array}{r} 140 \quad | \quad 125 \\ \hline 150 \quad | \quad 0,112 \\ 0250 \\ 000 \end{array}$$

y saco cociente exacto; por lo que diré, que

$$\frac{5}{8} = 0,625; \quad \frac{7}{25} = 0,28, \quad \text{y} \quad \frac{14}{125} = 0,112.$$

E

T. I.



Sino sale cociente exacto, sucederá que como la resta ha de ser siempre menor que el divisor, así que se hayan sacado tantas restas diferentes como unidades tiene el divisor ménos una, la siguiente deberá ser una de las anteriores ó el mismo numerador; de donde se sigue que añadiendo un 0, dará el mismo cociente y resta que dió ántes: á esta le sucederá lo mismo; y así, se pondrán aquellos guarismos las veces que se quiera. Estas fracciones se llaman *periódicas*. Así, si convierto en decimal el quebrado  $\frac{5}{7}$ , tendré (A) que al sexto guarismo hallo la resta 5, que es el

$$\begin{array}{r}
 \text{(A)} \\
 \begin{array}{r}
 50 \\
 10 \\
 30 \\
 20 \\
 60 \\
 40 \\
 5
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 0,714285
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{(B)} \\
 \begin{array}{r}
 40 \\
 70 \\
 40 \\
 7
 \end{array}
 \left| \begin{array}{r}
 11 \\
 \hline
 0,3636
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

mismo numerador; por lo que se repetirán los mismos guarismos, y tendré  $\frac{5}{7} = 0,714285714285714285 \&c.$

Si convierto en decimal el quebrado  $\frac{4}{11}$ , encuentro (B) que al segundo guarismo se repite el numerador; por lo que  $\frac{4}{11} = 0,363636363636 \&c.$

Si convierto el  $\frac{2}{3}$  tendré que  $\frac{2}{3} = 0,66666 \&c.$

Si la resta que se repite no es el mismo numerador del quebrado, entónces la fraccion es *en parte periódica y en parte no*, como se verá en estos quebrados

$\frac{7}{12}$  y  $\frac{593}{925}$  que dan  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{12} = 0,58333 \&c. \\ \frac{593}{925} = 0,64108108108108 \&c. \end{array} \right.$

*Sumar, restar, multiplicar y dividir decimales.*

90 Para sumar las decimales se ponen los sumandos los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan las décimas debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas &c. esto es, que la



coma en todos los sumandos forme columna; despues se tira una raya y se suman exactamente como si fuesen enteros, teniendo cuidado de poner la coma en la suma, de modo que forme columna con las de los sumandos.

1.<sup>er</sup> ej. Si quiero sumar 0,027 con 35,46, con 783,0639, con 0,3, con 9,53 y con 32,0757, los pondré los unos debajo de los otros como aquí se ve:

Y despues de tirada la raya, empiezo por la derecha diciendo: 9 y 7 son 16, pongo 6 debajo de la raya, y paso á la columna siguiente donde digo: 7 y 1 que llevo son 8, y 3 son 11, y 5 son 16, pongo 6 y llevo 1 para añadirla á la suma de la columna siguiente; y continúo la operacion como si fuesen enteros (26), teniendo cuidado de poner la coma entre el 0 y el 4 debajo de las de los sumandos, y digo que la suma es 860,4566.

$$\begin{array}{r}
 0,027 \\
 35,46 \\
 783,0639 \\
 0,3 \\
 9,53 \\
 32,0757 \\
 \hline
 860,4566
 \end{array}$$

2.<sup>o</sup> ej.  $85,37+9,0345+0,6382+42,085=137,1277$ .

Dem. Como haciendo la colocacion dicha y sumando en columna, sumamos todas las unidades de una misma especie, y todas las sumas parciales las reunimos en una sola al mismo tiempo que las vamos sacando, resulta (intr.ax. 3.<sup>o</sup>) L. Q. D. D.

91 Para restarlas se pone el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de cada especie, esto es, que la coma del sustraendo corresponda debajo de la del minuendo; se tira una raya, y se resta como en los números enteros, poniendo la coma en la resta, formando columna con las de arriba.

Aquí puede ocurrir que no tengan un mismo número de guarismos decimales el minuendo y sustraendo: si el sustraendo tiene ménos, se ponen aquellos guarismos que tiene demas el minuendo, y luego se restan los del sustraendo de los que quedan en el minuendo; si el minuendo tiene ménos que el sustraen-



do, se resta el guarismo de la derecha del sustraendo de 10, y todos los demas de 9, hasta llegar al primer guarismo del minuendo, el cual se considera con una unidad ménos.

1.<sup>er</sup> ej. Quiero restar de 625,4685 el número 354,8796; pondré el sustraendo 354,8796 debajo del minuendo como he dicho y se ve en (A):

| (A)      | (B)           | (C)         |
|----------|---------------|-------------|
| 625,4685 | 8375,75426392 | 475,36      |
| 354,8796 | 789,4358      | 287,4753825 |
| 270,5889 | 7586,31846392 | 187,8846175 |

y despues de tirada la raya, resto como si fuesen enteros (31), cuidando de poner la coma entre el 0 y el 5, y saco la resta 270,5889.

2.<sup>o</sup> ej. Si quisiera restar de 8375,75426392 el número 789,4358, los colocaria como se ve en (B).

Y como el sustraendo tiene ménos guarismos decimales que el minuendo, pongo debajo de la raya los cuatro guarismos 6392 del minuendo, que no tienen correspondientes en el sustraendo, y despues resto como ántes y saco 7586,31846392.

3.<sup>er</sup> ej. Si de 475,36 quisiera restar 287,4753825, los pondria como se ve en (C).

Y como el sustraendo tiene mas guarismos que el minuendo, diria: de 5 á 10 van 5 que pongo; de 2 á 9 van 7; de 8 á 9 va 1; de 3 á 9 van 6; de 5 á 9 van 4; ahora debo considerar al 6 del minuendo con una unidad ménos, y digo: de 7 á 15 van 8, y de 15 llevo 1; y continuando la operacion como ántes saco la resta 187,8846175.

*Dem.* En los dos primeros casos es la misma (29); en el tercero, es porque se pueden considerar despues de los guarismos decimales los ceros que se deseen sin alterar su valor (86), y queda réducida la operacion á la espuesta (32), que por comodidad en este caso se practica del modo que hemos dicho. L. Q. D. D.



92 Para multiplicar las decimales *no se hace caso de la coma, se multiplican como si fuesen números enteros, y luego en el producto se separan con la coma tantos guarismos de derecha á izquierda como decimales habia en ambos factores juntos; y sino hay bastantes, se completarán con ceros á la izquierda.*

1.<sup>er</sup> ej. Quiero multiplicar 5,37 por 6,3; tomaré por multiplicador el 6,3, y le pondré debajo del multiplicando como sino hubiese coma, conforme se ve en (A):

| (A)                        | (B)                        | (C)                        | (D)                        |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 5,37<br>6,3                | 0,35<br>0,4                | 0,29<br>0,3                | 0,0273<br>0,0026           |
| <hr style="width: 100%;"/> | <hr style="width: 100%;"/> | <hr style="width: 100%;"/> | <hr style="width: 100%;"/> |
| 1611<br>3222               | 0,140                      | 0,087                      | 1638<br>546                |
| <hr style="width: 100%;"/> |                            |                            | <hr style="width: 100%;"/> |
| 33,831                     |                            |                            | 0,00007098                 |

Después de tirada la raya, multiplicaré (44) el 5,37 por el 6,3 sin hacer caso de la coma, y separando en el producto 33831 tres guarismos de derecha á izquierda, que son los decimales que habia en ambos factores, saco 33,831 que es el producto verdadero.

2.<sup>o</sup> ej. Si quiero multiplicar 0,35 por 0,4, ejecutaré la operación como se ve en (B).

Multiplicaré el 35 por 4, lo que me da el producto 140; y como debo separar tres guarismos, que son los que hay en ambos factores juntos, pondré ántes un cero y tendré 0,140; pero como los ceros después de los guarismos decimales no les aumentan ni les disminuyen (86), borraré el cero que hay después del 4, y diré que el producto es 0,14.

3.<sup>er</sup> ej. Si quiero multiplicar 0,29 por 0,3, ejecutaré la operación como se ve en (C).

Multiplicaré el 29 por 3; y como el producto 87 no tiene más de dos guarismos, y debo separar tres, supliré con ceros los guarismos que me falten, y tendré el producto 0,087.



Por último si quisiera multiplicar  $0,0273$  por  $0,0026$ , haria la operacion como se ve en (D), y tendria el producto  $0,00007098$ .

*Dem.* Con prescindir de la coma en el multiplicando, le hacemos tantas veces mayor como espresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales tiene (87); y con prescindir de ella en el multiplicador, le hacemos tantas veces mayor como espresa la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales hay en él; luego (61, 3.<sup>o</sup>) el producto debe salir tantas veces mayor como espresa el producto de estos dos números; luego para obtener el verdadero, se deberá hacer este mismo número de veces menor: lo que se consigue (87) separando con la coma tantos guarismos como decimales hay en ambos factores juntos. L. Q. D. D.

93 De lo dicho (87) se deduce que un número que lleva enteros y decimales, ó decimales solas, se multiplica por 10, corriendo la coma un lugar hácia la derecha; por 100 corriéndola dos; por 1000 corriéndola tres; y en general, *para multiplicar por la unidad seguida de cierto número de ceros, se correrá la coma tantos lugares hácia la derecha como ceros hay despues de la unidad.*

94 Para dividir las decimales *se completarán*, esto es, *se hará que ambos términos tengan un mismo número de guarismos decimales, añadiendo los ceros que se necesiten al que tenga ménos; entónces se borrar la coma, y se ejecuta la division como la de los enteros, sin tener que hacer nada en el cociente. Despues, si la division no sale exacta, aquella resta que se habia de poner en forma de quebrado, se convierte en quebrado decimal; esto es, se añade á la resta un cero, y se pone la coma en el cociente; se ve cuántas veces cabe el divisor en esta resta, se pone en el cociente despues de la coma este número de veces, ó cero sino cabe, se multiplica por el divisor y se resta; y así se continúa, añadiendo un cero á la resta por cada guarismo decimal que se quiera sacar.*



1.<sup>er</sup> ej. Quiero dividir 0,6 por 0,15; añadiré al dividendo un cero y se convertirá en 0,60; despues borro la coma en el dividendo y divisor, y queda reducida la operacion á dividir 60 por 15; lo que ejecutado como aquí se ve:

da 4 por cociente; y digo que 0,15 está contenido cuatro veces en 0,6.

$$\begin{array}{r} 60 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 00 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 15 \\ 4 \end{array}$$

2.<sup>o</sup> ej. Si quiero dividir 43 por 12,5, como el dividendo no tiene ningun guarismo decimal, le añado un cero; y borrando la coma en el divisor queda reducida la operacion á dividir 430 por 125; la que ejecutada como aquí se presenta:

da 3 por cociente y 55 por resta: la que reduciré á decimales añadiéndole un cero, poniendo la coma despues del 3, y continuando la division; para esto, veo que el 125 está

$$\begin{array}{r} 430 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 0550 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 0500 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 000 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 125 \\ 3,44 \end{array}$$

contenido 4 veces en 550, pongo este 4 despues de la coma, multiplico por el divisor y resto; á la resta 50 añado otro cero, veo que está contenido cuatro veces el divisor, pongo 4 en el cociente; y así continúo hasta sacar los guarismos decimales que desee, que aquí sólo son dos, porque da cociente exacto.

3.<sup>er</sup> ej. Si quisiera dividir 37,5421 por 8,3, añadiría al divisor tres ceros, porque le faltan tres para tener tantos decimales como el dividendo; borro despues la coma en ambos, y queda reducida la operacion á dividir 375421 por 83000; y ejecutada la operacion como aquí se ve:

saco el cociente 4, y en vez de añadir un cero á la resta borraré uno en el divisor, pondré coma en el cociente, y averiguaré cuántas veces el 8300 está contenido en 43421; hallo que cabe 5 veces, pongo 5 en el cociente despues de la coma,

$$\begin{array}{r} 375421 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 43421 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 1921 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 261 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 120 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 370 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ 38 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\ \hline 83000 \\ 4,52314 \end{array}$$

multiplico por el divisor y resto; borro otro cero en el divisor, y continúo la operacion, advirtiéndome



que si despues de borrados los ceros del divisor, quiero sacar mas guarismos decimales, se añaden ceros á la resta como allí se ve.

*Dem.* Con añadir los ceros que se necesiten al término que tiene ménos guarismos decimales, no alteramos de ningun modo su valor (86); y con suprimir la coma en los dos términos, los multiplicamos por la unidad seguida de tantos ceros como guarismos decimales hay, lo que (61, 4.º) no altera el cociente. L. Q. D. D.

95 Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros, queda hecha la division, *corriendo la coma hácia la izquierda tantos lugares como ceros acompañan á la unidad, supliendo con ceros á la izquierda si el dividendo no tiene bastantes guarismos*; lo cual está fundado en lo dicho (87). Así, si en el número 8465,379, corro la coma dos lugares hácia la izquierda, resultará dividido por 100, y será 84,65379.

96 Para valuar los quebrados decimales, *se multiplican por el número que espresa las veces que la unidad en que se quiere valuar el quebrado, cabe en aquella á que se refiere el quebrado.*

Si hay unidades de especie inferior todavía, *se vuelve á multiplicar el quebrado que resulte, por el número de veces que la unidad en que se quiere valuar ahora este quebrado, cabe en aquella á que se refiere; y así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior: y si al fin queda quebrado, se desprecia sino llega á cinco décimas; y se añade en vez de él una unidad, si llega ó pasa de cinco décimas.*

*Esc.* No se dice que se parta por el denominador, porque la division se hace al colocar la coma en el producto.

1.<sup>er</sup> *ej.* Si quiero averiguar cuánto valen 0,47 de doblon, multiplicaré el 0,47 por 4, que son los pesos que tiene un doblon, y saco como se ve en (A) 1,88 pesos, esto es, un peso y un quebrado de peso; valúo el quebrado de peso en reales; para lo cual coloco el 15 debajo de 1,88, le multiplico sin hacerlo con el entero 1, y saco 13,20 reales; borro el 0,



multiplico las 2 décimas de real por 34, y saco 6,8 maravedises ó 7 maravedises, porque 8 décimas es mayor que 5; por lo que digo que 0,47 de doblon valen 1 peso 13 reales y 7 maravedises.

2.<sup>o</sup> ej. Si quisiera averiguar cuánto valian 0,7432 de vara, ejecutaría la operacion como se ve en (B), y hallaría 2 pies, 2 pulgadas y 9 líneas.

| (A)       | (B)           |
|-----------|---------------|
| 0,47 dob. | 0,7432 varas  |
| 4         | 3             |
| 1,88 pes. | 2,2296 pies   |
| 15        | 12            |
| 440       | 4592          |
| 88        | 2296          |
| 13,20 rs. | 2,7552 pulg.  |
| 34        | 12            |
| 6,8 mrs.  | 15104         |
|           | 7552          |
|           | 9,0624 líneas |

*Sumar, restar, multiplicar y dividir números denominados.*

97 Se llaman números denominados *los que constan de unidades de diferentes especies relativas todas á un mismo género*: como 6 varas, 1 pie, 7 pulgadas y 4 líneas, y 5 quintales, 3 arrobas y 8 libras. Para entender las operaciones que vamos á hacer con estos números, es indispensable tener bien presente la division de las unidades de pesos y medidas (16).

98 Para sumarlos *se ponen todos los sumandos los unos debajo de los otros, de modo que se correspondan las unidades de cada especie; se tira una raya, y se empieza á sumar por la especie inferior; si la suma de estas unidades contiene alguna ó algunas de la especie superior inmediata, se guardan para sumarlas con ellas; se suman estas; y así se continúa hasta haber sumado las de especie superior, y el número que resulta debajo de la raya es la suma pedida.*

*Ejemp.* Quiero sumar 38 doblones, 3 pesos, 13 reales y 14 maravedises, con 4 doblones, 1 peso, 3



reales y 6 maravedises, con 49 doblones, 2 pesos, 8 reales y 25 maravedises, y con 53 doblones, 12 reales y 19 maravedises; colocaré todos los sumandos los unos debajo de los otros como aquí se ve:

Tiraré una

|                                                                                |                    |                  |                   |         |
|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------|------------------|-------------------|---------|
| raya, y sumando los maravedises tengo 64,                                      | (2<br>—<br>38 dob. | (2<br>—<br>3 ps. | (1<br>—<br>13 rs. | 14 mrs. |
| que componen un real y quedan 30 maravedises; borro el 64, pongo debajo los 30 | 4 „                | 1 „              | 3 „               | 6 „     |
|                                                                                | 49 „               | 2 „              | 8 „               | 25 „    |
|                                                                                | 53 „               | 0 „              | 12 „              | 19 „    |
|                                                                                |                    |                  |                   |         |
|                                                                                | 146 „              | 8                | 37                | 64      |
|                                                                                |                    | 0 „              | 7 „               | 30 „    |

que quedan, y el 1 real que llevo para la columna inmediata, le pongo encima de los reales separado con una media luna; sumo todos estos reales, y tengo 37, que componen 2 pesos y 7 reales; borro el 37, pongo debajo los 7 reales que quedaron, y los 2 pesos los coloco sobre los pesos; sumo estos y tengo 8 pesos, que componen 2 doblones justos; por lo que borro el 8, pongo debajo 0, y coloco los 2 doblones en la columna de los doblones, cuya suma da 146 doblones; y tengo por suma de los números propuestos 146 doblones, 0 pesos, 7 reales y 30 maravedises.

*Dem.* Como hemos sumado todas las partes de los sumandos, no queda duda de que hemos sumado los todos. L. Q. D. D.

99 Para restar los números denominados, se pone el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie; se tira una raya, y se va restando cada especie de unidades del sustraendo de las correspondientes en el minuendo, empezando por las de la especie inferior. Si alguna especie de unidades del sustraendo es mayor que la correspondiente en el minuendo, se toma en este una unidad de la especie inmediata superior; y sino hubiese en esta se tomará de la otra, ó de la siguiente si tampoco hubiese en esta &c., y cuando



se toma una unidad de dos ó tres órdenes superior, se descompone en las inferiores del modo que se verá en los siguientes ejemplos.

1.º De 295 doblones, 2 pesos, 3 reales y 15 maravedises, quiero restar 89 doblones, 3 pesos, 2 reales y 5 maravedises; colocaré el sustraendo debajo del minuendo como aquí se ve:

Y despues de tirada la raya empezaré á restar por la columna de los maravedises, lo que da 10 maravedises de

|          |       |       |         |
|----------|-------|-------|---------|
| 295 dob. | 2 ps. | 3 rs. | 15 mrs. |
| 89 „     | 3 „   | 2 „   | 5 „     |
| -----    |       |       |         |
| 205 „    | 3 „   | 1 „   | 10 „    |

resta; paso á restar los reales del sustraendo de los correspondientes del minuendo, y hallo 1 de resta; paso á los pesos, y como de 2 pesos no puedo restar 3, tomo una unidad de los doblones que vale 4 pesos, y con los 2 que hay hacen 6, de los que restando los 3 quedan 3 por resta; y por último pasando á los doblones, teniendo en consideracion que tomé 1, resulta por resta 205 doblones, 3 pesos, 1 real y 10 maravedises.

2.º Si de 47 quintales quiero restar 23 quintales, 2 arrobas, 9 libras y 14 onzas, los colocaré como aquí se ve:

Y como no puedo restar 14 onzas de donde no hay, paso á tomar una libra, que como tampoco hay, ni arrobas, tomo un quin-

|        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|
| 47 qs. | 0 ars. | 0 lib. | 0 onz. |
| 23 „   | 2 „    | 9 „    | 14 „   |
| -----  |        |        |        |
| 23 „   | 1 „    | 15 „   | 2 „    |

tal que tiene 4 arrobas; y como yo sólo necesito una libra para restar las onzas, dejo 3 arrobas en el lugar de las arrobas: de la arroba que queda dejo 24 libras en el lugar de las libras; y de la otra libra que vale 16 onzas, resto las 14 onzas, y continúo la operacion como allí se ve, considerando al 7 del 47 quintales como 6; y saco por resta 23 quintales, 1 arroba, 15 libras y 2 onzas.



3.<sup>o</sup> Si restara 327 varas, 2 pies, 6 pulgadas y 5 líneas, de 578 varas, haria la operacion como aquí se ve:

|                                                          |       |         |        |         |
|----------------------------------------------------------|-------|---------|--------|---------|
|                                                          | 2     | 11      | 12     |         |
| y la resta seria 250<br>varas, 5 pulgadas y<br>7 líneas. | 0 ps. | 0 pulg. | 0 lín. | 578 vs. |
|                                                          | 2 „   | 6 „     | 5 „    | 327 „   |

|  |       |     |     |     |  |
|--|-------|-----|-----|-----|--|
|  | 250 „ | 0 „ | 5 „ | 7 „ |  |
|--|-------|-----|-----|-----|--|

*Dem.* Como restamos todas las partes del sustraendo de todas las del minuendo, y todas las restas parciales las tenemos reunidas en un solo número, este espresará la resta total. L. Q. D. D.

100 En la multiplicacion de los números denominados se pueden seguir varios métodos; pero aquí sólo pondrémos el que es mas independiente del talento del calculador, y consiste en practicar las tres reglas siguientes; 1.<sup>a</sup> *redúzcanse el multiplicando y multiplicador á la menor de sus especies*; 2.<sup>a</sup> *multiplíquense entre sí estos dos números despues de reducidos*; 3.<sup>a</sup> *divídase el producto por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador cabe en la mayor, y el cociente espresará el producto en las unidades de especie inferior del multiplicando*; por lo que se deberán reducir á las de especie superior segun las reglas dadas (58). En esta cuestion es indispensable conocer cada factor, para practicar la 3.<sup>a</sup> regla; por lo que dirémos que el *multiplicando es el de la especie que se busca en el producto, y por consiguiente el otro será el multiplicador.*

1.<sup>er</sup> ej. Si quiero averiguar cuánto valen 7 varas y 1 pie á 9 pesos y 6 reales la vara, observaré que como lo que busco aquí son pesos y reales, el multiplicando es 9 pesos y 6 reales; por lo que los reduciré primero á la menor de sus especies, y tendré reducido el multiplicando á 141 reales y el multiplicador á 22 pies; multiplico el 141 por 22, y saco el producto 3102; el cual le divido por 3, á causa de que el pie está contenido 3 veces en la vara, lo



que me da el cociente 1034, que espresa los reales que valen las 7 varas y 1 pie; y reduciendo estos 1034 reales á pesos (58), sacaré 68 pesos y 14 reales.

2.<sup>o</sup> ej. Si quisiera averiguar cuánto valen 6 quintales, 3 arrobas y 8 libras de azúcar, á 8 doblones, 2 pesos y 9 reales el quintal, los reduciré á la menor de sus especies, y se me convertirán el multiplicando en 519 reales, y el multiplicador en 683 libras; multiplicaré estos dos números entre sí, y el producto 354477 le dividiré por 100, lo que (95) dará 3544,77 reales, que reducidos á doblones hacen 59 doblones y 4,77 reales, que (96) vienen á ser 4 reales y 26 maravedises.

*Dem.* El reducir los factores á su menor especie no influye nada en el resultado; pues lo mismo son (ej. 1.<sup>o</sup>) 7 varas y 1 pie que 22 pies, y 9 pesos y 6 reales lo mismo que 141 reales. Al practicar la 2.<sup>a</sup> regla tomamos el valor de la vara tantas veces como pies hay; esto es, multiplicamos el valor de la vara por un número tres veces mayor que el que debe ser; y como practicando la 3.<sup>a</sup> hacemos el producto tantas veces menor como lo que ántes le habíamos tomado mayor, resulta que éste será el verdadero. El convertirle en las unidades de especie superior, es por satisfacer á la cuestion en los mismos términos que venia propuesta. L. Q. D. D.

101 Para dividir los números denominados se practicarán las tres reglas siguientes: 1.<sup>a</sup> se reduce el divisor á la menor de sus especies; 2.<sup>a</sup> se hace la division empezando por las unidades de especie superior del dividendo; y si de esta division queda alguna resta, se reduce á las unidades de especie inferior inmediata, y se añaden las unidades de esta especie que hay en el dividendo; se dividen por el divisor, y si queda alguna resta se reduce á las unidades de especie inferior inmediata; y así se continúa hasta que no haya unidades de especie inferior; 3.<sup>a</sup> despues se multiplica todo este cociente por el número que espresa las veces que la unidad de



*especie inferior del divisor está contenida en la mayor, empezando esta multiplicacion por las unidades de especie inferior, para si resultan unidades de especie superior, añadirlas al producto de la columna inmediata, y el resultado es lo que se pide.*

Por ejemplo. Sé (100) que 7 varas y 1 pie han costado 68 pesos y 14 reales; si quiero averiguar á cómo ha costado la vara, dividiré los 68 pesos y 14 reales por 7 varas y 1 pie. Aquí se conoce el dividendo en que es de la misma especie que lo que se busca. Practico la 1.<sup>a</sup> regla y se me convierte el divisor en 22 pies; ahora hago la division como aquí se ve:

|                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                       |                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Empiezo por los pesos, y digo: 68 entre 22 les toca á 3, que son pesos, y me quedan de                                                                                                                                                                                   | 68 ps. 14 rs.                         | 22                                    |
| resta 2 pesos, que para                                                                                                                                                                                                                                                  | 02                                    | <hr style="width: 50px; margin: 0;"/> |
| reducirlos á reales los                                                                                                                                                                                                                                                  | 15                                    | 3 ps. 2 rs.                           |
| multiplicaré por 15, y                                                                                                                                                                                                                                                   | <hr style="width: 50px; margin: 0;"/> | 3                                     |
| al producto 30 le añadiré los 14 reales que                                                                                                                                                                                                                              | 30                                    | <hr style="width: 50px; margin: 0;"/> |
| hay en el dividendo; veo que el 22 cabe dos veces                                                                                                                                                                                                                        | 14                                    | 9 ,, 6 ,,                             |
| en 44, y no deja resta; ahora el cociente 3 pesos y 2 reales le multiplico por 3, que es el que espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, y saco el producto 9 pesos y 6 reales, que es en efecto el valor de la vara. | <hr style="width: 50px; margin: 0;"/> |                                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                          | 44                                    |                                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0                                     |                                       |

Dem. El reducir el divisor á su menor especie no influye nada en el resultado; pues 7 varas y 1 pie es lo mismo que 22 pies. Al practicar la 2.<sup>a</sup> regla, como dividimos por el número de pies, hallamos el valor de un pie; y como lo que se pide en la cuestion es el valor de la vara, por esta razon se ha de practicar la 3.<sup>a</sup> regla; esto es, en este caso se ha de multiplicar el valor del pie por 3 que son los pies que tiene la vara, y en general por el número que espresa las veces que la unidad inferior del divisor está contenida en la mayor. L. Q. D. D.



ALGEBRA.

*Nociones preliminares.*

102 *Algebra es la ciencia que trata de la cantidad en general.* Los signos de que se vale para espresar las cantidades, son las letras del alfabeto; v. g. *a* puede representar cualquier cantidad, sea de la especie que sea, como 20, 30, &c. 40 varas, 50 hombres, &c. Nunca le pueden faltar signos al Álgebra para espresar las cantidades; pues se vale de los dos alfabetos minúsculo y mayúsculo, y tambien del griego. Además, si á una letra v. g. *a* se le pone un acento por la parte de arriba ó por la parte de abajo, á la derecha ó á la izquierda, en esta forma *a'*, *'a*, *a<sub>1</sub>*, *a<sub>2</sub>*, representa una cantidad diferente de la que espresa *a*; y se leen *a primera*, *primera a*, *a subprimera*, *subprimera a*; tambien se le pueden poner dos, tres &c. acentos, y se leen *segundas*, *subsegundas* &c.

Las definiciones de la Aritmética y Álgebra manifiestan la mayor generalidad de esta, y para que el principiante no tema el emprender su estudio, le decimos que las operaciones del Álgebra son las mismas que las de la Aritmética, y que hay una grandísima analogía entre ellas. En efecto, despues de haber dado á conocer los números, v. g. 20 hombres, 20 caballos, 20 peras &c. hemos prescindido de que los 20 fuesen hombres, caballos &c., y nos hemos quedado con el número abstracto 20; pero este nunca puede ser 19 ni tampoco 21 &c. Donde se ve que la mayor abstraccion que puede hacer la Aritmética en los números, es la del valor específico; pero si ahora sólo consideramos en el 20 una coleccion de hombres, caballos &c. sin atender á que sea un número determinado, sino una coleccion capaz de aumento ó disminucion, entónces no puede estar representada por 20, y la espresarémos por *a*; por consiguiente la *a* representa una cantidad de hombres, caballos &c. segun



nos acomode. Consiste, pues, todo el gran secreto del Álgebra *en prescindir del valor numérico de las cantidades*; cuya máxima bien inculcada á los principiantes les hará disipar el gran cúmulo de dificultades que vulgarmente se dice que hay en el Álgebra, lo que los arredra, y hace que la miren como superior á sus fuerzas.

103 Para indicar las diferentes operaciones y supuestos que se hacen con las cantidades, emplea el Algebra los signos que dejamos esplicados en la Aritmética, y algunos otros que daremos á conocer. Así, la espresion  $a+b$  quiere decir que lo que valga  $b$  se ha de añadir á lo que valga  $a$ , y nada mas;  $a-b$  quiere decir que lo que valga  $b$  se ha de quitar de lo que valga  $a$ ;  $a \times b$  ó  $a.b$  ó  $ab$ , indica que el valor de  $a$  se ha de multiplicar por el de  $b$  (en el Algebra se puede suprimir el signo  $\times$  ó  $.$  y dejar sólo  $ab$ , y en la Aritmética no, á causa del sistema de numeracion; v. g.  $3 \times 4$  ó  $3.4$  vale 12; y si se quita el signo

vale treinta y cuatro);  $\frac{a}{b}$  ó  $a:b$ , indica que el valor de  $a$  se ha de dividir por el de  $b$ .

Este signo  $>$  es el de *mayoría*, y puesto al revés  $<$  el de *menoría*; así,  $a > b$  quiere decir que  $a$  es mayor que  $b$ ; y  $b < a$ , que el valor de  $b$  es menor que el de  $a$ ; ó mas general: el signo  $>$  ó  $<$  sirve para espresar la *desigualdad* de dos cantidades. El signo  $\pm$  se llama el *signo de ambigüedad*; así,  $a \pm b$ , ó  $a \mp b$ , indica que la  $b$  se ha de añadir ó quitar al valor de  $a$ , ó al contrario.

104 En el Algebra no sólo se atiende al valor absoluto de las cantidades, sino al modo con que influyen en la cuestion que el calculador se propone resolver. Ahora, al resolver una cuestion sólo se pueden encontrar dos clases de cantidades que influyan en ella: cantidades que *conspiren al fin que se propone el calculador*, que se llaman *positivas*; y cantidades que *conspiren á un fin opuesto*, que se llaman



*negativas*. Así, si quiero averiguar en cuánto tiempo se llenará un estanque, en que por un lado entra agua y por otro sale, tendré que atender al agua que entra y á la que sale; y como el agua que entra conspira al fin que me propongo, esta será la positiva; y la que sale, que conspira á vaciar el estanque, será la negativa.

Si, al contrario, quiero averiguar el tiempo en que se vacia un estanque, en que por una parte sale agua y por otra entra, tendré que atender tambien en estè caso al agua que sale y á la que entra; en cuyo caso la que sale es la positiva, y la que entra la negativa.

Como las cantidades positivas conspiran al fin que se propone el calculador, tratan de aumentar el resultado que busca, y por lo mismo se señalan con el signo +, que es el de aumento ó de adición; y como las cantidades negativas conspiran al fin opuesto al que se propone el calculador, tratan de disminuir el resultado que busca, y por lo mismo se señalan con el signo —. De manera que de aquí en adelante el signo + tendrá dos acepciones: una general, que es la de indicar la operacion de sumar, y la otra particular de decir que la cantidad á que afecta, es positiva; lo mismo sucede con el signo —, que siempre indicará la operacion de restar, y en particular, que la cantidad á que afecta es negativa.

Por consiguiente toda cantidad que se escriba, deberá llevar el signo + ó el signo — para denotar si es positiva ó negativa; no ostante el signo + se suprime al principio de escritura. V. g. *a* es lo mismo que +*a*; el — nunca se suprime.

105 Los signos + y —, ó las cantidades positivas y negativas, son los únicos recursos del Álgebra para espresar las palabras con que se suple todo en Aritmética: y aun las frases irónicas con que nos producimos, cuando decimos que *fulano tiene 100 reales que debe*; la palabra *tiene* parece que da á conocer que *posee dinero*, y la palabra *debe* manifiesta



que lo decimos de chanza ó que nos burlamos: esta frase del lenguaje vulgar se espresa en Álgebra diciendo: *fulano tiene —100 reales.*

106 Entendido esto, cuando está repetida por sumando una misma letra, se pone una sola vez con un número ántes que espresa las veces que está repetida, cuyo número se llama *coeficiente*; v. g. en vez de  $a+a$  se escribe  $2a$ ; en vez de  $ab+ab+ab$ , se pone  $3ab$ ; y los números 2 y 3, son los coeficientes. Tambien se pone coeficiente cuando la letra ó cantidad está repetida con el signo —; así, en vez de  $-ab-ab-ab-ab$ , se pone  $-4ab$ .

Cuando una letra está repetida por factor, se pone una vez sola con un número á su derecha un poquito mas alto, que tenga tantas unidades como veces está repetida la letra por factor; así, en vez de  $aa$ , se escribe  $a^2$ ; en vez de  $aaa$  se pone  $a^3$ . Este número se llama *esponente*; y para leer v. g.  $a^5$  se dice *a cinco*, ó *a elevada á cinco*.

Cuando una letra  $a$  se presenta sola, se le supone la unidad por coeficiente, la unidad por esponente, y tambien si se quiere la unidad por divisor; por esta

causa  $a$  es lo mismo que  $1a$ , que  $a^1$ , y que  $\frac{1a^1}{1}$ .

Ahora, toda cantidad ó espresion de cantidad, sea de la especie que sea, separada de otras por medio del signo  $+$  ó  $-$ , se llama *término*; v. g.  $-a$  es un término,

$3abd$ ,  $\frac{7bd}{c}$ ,  $\frac{a^8b^3c^5}{d-e}$ , son tambien términos.

107 Se dice de un término que consta de tantas *dimensiones* cuantas letras tiene, sino hay denominador; v. g.  $+a$  es un término de *una* dimension;  $5ac$  de *dos*;  $-7abc$  de *tres*; donde se ve que el coeficiente no constituye dimension.

Si la cantidad está en forma de quebrado, el número de las dimensiones está espresado por la diferencia entre las del numerador y las del denominador;



v. g.  $\frac{ab}{d}$  es de *una* sola dimension ;  $\frac{2ab}{cd}$  es un tér-

mino de dimension *nula*, ó de *cero dimensiones* ; y cuando hay mas en el denominador que en el numerador, entónces se dice que la dimension es *negativa*;

así, el término  $\frac{ab}{cde}$  es de *ménos una* dimension. Fi-

nalmente, cuando las letras tienen esponentes, se reputa cada letra por tantas dimensiones como unidades hay en su esponente.

108 Cuando una espresion algebraica consta de un solo término, se llama *monomia* ó es un *monomio*; cuando consta de mas de uno se llama en general *polinomio*, distinguiéndose en particular con los nombres de *binomio*, *trinomio*, *cuadrinomio* &c. cuando consta de dos, tres, cuatro &c. monomios. Así, las espresiones  $a+b$ ,  $4a^5-5b^2c^3$  son binomios, de los cuales  $a$  y  $4a^5$  son los *primeros* términos, y  $+b$ ,  $-5b^2c^3$  son los *segundos*; &c.

Cuando todos los términos de un polinomio tienen un mismo número de dimensiones, se dice que es *homojéneo*; y cuando no, que es *heterojéneo*.

109 Se llaman términos *semejantes* aquellos que tienen unas mismas letras y en cada una los mismos esponentes; por ejemplo  $4a^2b$ ,  $5a^2b$  y  $7ba^2$  son términos semejantes.

Es muy frecuente en el Álgebra el encontrar términos de esta especie en los resultados de las operaciones, en cuyo caso se deben *simplificar*. Esta simplificacion se hace *sumando los coeficientes*, si tienen un mismo signo los términos semejantes, y poniendo esta suma por coeficiente á uno de los términos con su signo, cuya operacion se llama *reduccion*; ó *restando los coeficientes*, si tienen diferente signo, y poniendo la resta á uno de los términos semejantes, con el signo del término que tenia mayor coeficiente, cuya operacion se llama *destruccion*.



Por ejemplo, supongamos que se tiene el polinomio  $4a^3 - 7bc - d^2 + 3ac + 6a^3 + 3bc + a^3 - 8d^2 - 3ac + 4b^3$ ; en que observo tres términos donde se halla  $a^3$ , y por lo mismo hay tres semejantes con él; y como tienen un mismo signo, haré la reduccion diciendo: 4 coeficiente de  $4a^3$ , y 6 de  $6a^3$ , son 10, y 1 coeficiente de  $a^3$  (§ 106) son 11; luego pondré un término en que haya  $a^3$  con un coeficiente 11, y con el signo + que es el que llevan dichos términos; pero aquí se omitirá dicho signo (104). Luego, veo que hay dos términos donde se halla  $bc$ ; y como tienen diferente signo, haré la destruccion diciendo: la diferencia entre 7 y 3 es 4, que será el coeficiente que deberé poner á  $bc$ ; y como el término  $-7bc$  es el que tiene mayor coeficiente, manifiesta que las cuatro que quedan son para quitar, y de consiguiente pondré el signo - al  $4bc$ ; como hay dos términos semejantes con  $d^2$  y tienen un mismo signo, haré la reduccion diciendo: 1 coeficiente de  $-d^2$ , y 8 de  $-8d^2$  son 9, que pondré por coeficiente al  $d^2$  con el signo -, y tendré  $-9d^2$ ; ahora paso á hacer la destruccion de los términos  $+3ac$  y  $-3ac$ , diciendo: la diferencia entre 3 y 3 es cero, que deberá ser el coeficiente de  $ac$ ; pero el cero por coeficiente manifiesta que no está el término aquel ninguna vez por sumando, y por lo mismo no se pondrá. Cuando los términos semejantes son iguales por tener un mismo coeficiente, y tienen diferente signo como en este caso, se dice  $+3ac$  y  $-3ac$  se destruyen, y se borran ó tachan en el paraje donde están; y como ya no hay mas que el  $+4b^3$  que no tiene semejante, este quedará del mismo modo en el resultado, el que será  $11a^3 - 4bc - 9d^2 + 4b^3$ .

Para entender la razon de esto, se considerará que cada término, sin coeficiente, representa una cosa cualquiera, como un duro, una manzana &c.; y así como no encontramos ninguna dificultad en que tres manzanas y cuatro manzanas son siete manzanas: nueve duros menos seis duros son tres duros: y menos cinco pesetas menos cuatro pesetas son menos nue-



ve pesetas, ó que el que debe cinco pesetas por un lado y cuatro por otro, resulta debiendo nueve &c.: del mismo modo una cosa  $ab$  mas tres veces la misma  $ab$  ó  $3ab$ , son cuatro veces la cosa  $ab$  ó  $4ab$ . Todo está, segun se ve, en comprender el lenguaje algebraico.

*De la suma de las cantidades algebraicas.*

110 Sumar en Álgebra es reunir en una sola expresion el valor de dos ó mas.

Para ejecutar esta operacion se colocan todos los sumandos los unos á continuacion de los otros con los mismos signos que llevan, y queda hecha la suma; despues se simplifica si se puede (109).

*Dem.* En efecto, si quiero sumar  $+b$  con  $+a$ , indicaré la operacion como aquí se ve:  $+a+(+b)$ ; donde observo que el signo  $+$  que está fuera del paréntesis, indica la operacion de sumar, esto es, que aquí lo que me propongo es aumentar; el signo  $+$  de dentro del paréntesis, indica que la cantidad  $+b$  que está dentro, es positiva, esto es, que conspira al fin que me propongo; y como este es aumentar, se deberá poner la  $b$  á continuacion de la  $a$  con el signo que denote este aumento, esto es, con  $+$ , y tendré que

$$+a+(+b)=+a+b=a+b.$$

Si con la cantidad  $+a$  quiero sumar  $-b$ , indicaré la operacion como aquí se ve:  $+a+(-b)$ ; donde observo, como ántes, que el signo  $+$  de fuera del paréntesis, indica que el fin que me propongo es aumentar; el signo  $-$  de dentro, indica que la cantidad  $b$  es negativa, ó que conspira al fin contrario para que se entabla el cálculo; luego conspirará á disminuir; por lo que deberé poner la  $b$  á continuacion de la  $a$  con el signo  $-$  que denota la disminucion, y tendré que  $+a+(-b)=+a-b=a-b$ .

Comparando estos resultados con lo que prescribe la regla, y generalizándola á los polinomios, resulta L. Q. D. D.

*Cor.* De donde se sigue que

$$a+(\pm b)=a\pm b, \text{ y } a+(\mp b)=a\mp b.$$



111 Para sumar polinomios se indica la operacion, poniendo los sumandos los unos á continuacion de los otros, cada uno dentro de un paréntesis; despues se practica la regla sólo con quitar los paréntesis; y luego se simplifica, como se ve en este ejemplo.

$$\begin{aligned} & (4b^2a+5a^2c-2abd)+(3b^2-8a^3)+ \\ & (7abd+4a^3-2a^2c+3b^2a)+(4c^3-6a^4)=4b^2a+5a^2c- \\ & 2abd+3b^2-8a^3+7abd+4a^3-2a^2c+3b^2a+4c^3- \\ & 6a^4=7b^2a+3a^2c+5abd+3b^2-4a^3+4c^3-6a^4. \end{aligned}$$

*De la operacion de restar cantidades algebraicas.*

112 Restar en Álgebra es hallar la diferencia entre dos cantidades, ó quitar una cantidad de otra dada.

Esta operacion se ejecuta poniendo el sustraendo con signos contrarios á los que lleve, á continuacion del minuendo, y despues se simplifica.

*Dem.* En efecto, si de la cantidad  $+a$  quiero restar la cantidad  $+b$ , indicaré la operacion como aquí se ve:  $+a-(+b)$ ;

donde observo que el signo  $-$  de fuera del paréntesis indica la operacion de restar, esto es, que el fin que me propongo es disminuir; el signo  $+$  de dentro, indica que la cantidad  $b$  es positiva, ó que conspira al fin que me propongo; luego deberé poner la  $b$  despues de la  $a$  con el signo  $-$  que indica la disminucion, y tendré que  $+a-(+b)=+a-b=a-b$ .

Si de la cantidad  $a$  quisiera restar la cantidad  $-b$ , indicaria la operacion de este modo:  $+a-(-b)$ ; y observaria que el signo  $-$  de fuera del paréntesis, indica que el fin que me propongo es disminuir; el signo  $-$  de dentro, indica que la cantidad  $b$  conspira al fin opuesto; luego conspirará á aumentar; luego se deberá poner la  $b$  á continuacion de la  $a$ , con el signo  $+$  que denota dicho aumento, y tendré que

$$+a-(-b)=+a+b=a+b.$$

Comparando estos resultados con la regla, y generalizándola á los polinomios, resulta L. Q. D. D.



*Cor.* De donde se sigue en general que

$$a - (\pm b) = a \mp b, \text{ y } a - (\mp b) = a \pm b.$$

*Esc.* El segundo resultado de la operacion de sumar corresponde al lenguaje irónico á un hombre le han hecho pobre con dádivas, que quiere decir que le han aumentado gastos. Igualmente, el segundo resultado de la operacion de restar corresponde á hacer rico á un hombre quitándole; pero será quitándole gastos. Más el Algebra, que es una lengua perfecta, no admite palabras de doble sentido, ni capciosas; en ella todo está perfectamente determinado, todo es verdad, todo exactitud.

113 Para restar polinomios se escribe el minuendo (si se quiere dentro de paréntesis), despues el signo —, y luego el sustraendo dentro de un paréntesis; despues se practica la regla quitando los paréntesis, cuidando de mudar los signos del sustraendo, y se simplifica, como se ve en este ejemplo.

Si de  $18a^7b^2 - 5c^4d + 9a^2b^2c^3$   
quiero restar  $4a^2b^2c^3 - 3a^7b^2 - 7c^4d$ ,  
ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$\begin{aligned} 18a^7b^2 - 5c^4d + 9a^2b^2c^3 - (4a^2b^2c^3 - 3a^7b^2 - 7c^4d) = \\ 18a^7b^2 - 5c^4d + 9a^2b^2c^3 - 4a^2b^2c^3 + 3a^7b^2 + 7c^4d = \\ 21a^7b^2 + 2c^4d + 5a^2b^2c^3. \end{aligned}$$

*De la multiplicacion algebraica.*

114 Multiplicar en Álgebra es tomar una cantidad tantas veces como diga otra, y tomarla del modo que diga se debe tomar. Esto es, el multiplicador con sus unidades dice las veces que se debe tomar el multiplicando, y con su signo el modo con que se debe tomar.

Pueden ocurrir tres casos: multiplicar un monomio por otro; un polinomio por un monomio, ó al contrario; y un polinomio por otro polinomio.

Para multiplicar un monomio por otro, hay que atender á cuatro cosas: á signos, coeficientes, letras y esponentes.



Para demostrar la regla de los signos, me propondré multiplicar  $+a$  por  $+b$ , ó para mayor sencillez y claridad haré  $b=1$ , é indicaré la operacion de este modo:  $+a \times +1$ ;

ahora, el multiplicador  $+1$  dice con sus unidades que se tome una vez al multiplicando; y con su signo  $+$  dice que se debe tomar como él sea; el multiplicando  $+a$  es positivo, luego se deberá tomar una vez positivamente; luego será  $+a \times +1 = +1a = +a$ ; y en cuanto á los signos dará  $+ \times + = +$ .

Sea ahora el multiplicador  $-1$ , y tendré indicada la operacion de este modo:  $+a \times -1$ ;

aquí, el multiplicador con sus unidades dice que se debe tomar una vez al multiplicando; y con su signo que se debe tomar al contrario de como él sea; el multiplicando es positivo, luego le deberé tomar una vez negativamente, y tendré  $+a \times -1 = -1a = -a$ ; y en cuanto á signos:  $+ \times - = -$ .

Si el multiplicando fuese negativo tal como  $-a$ , y el multiplicador  $+1$ , indicaria la operacion de este modo:  $-a \times +1$ ;

donde el multiplicador  $+1$ , dice con sus unidades que se debe tomar una vez el multiplicando; y con su signo, que se debe tomar como él sea; el multiplicando es negativo, luego se deberá tomar una vez negativamente, y será  $-a \times +1 = -1a = -a$ ; y para los signos dará  $- \times + = -$ .

Finalmente, si el multiplicador fuese  $-1$ , tendria indicada la operacion de este modo:  $-a \times -1$ ; donde el multiplicador  $-1$ , dice con sus unidades que se debe tomar el multiplicando una vez; y con su signo, que se debe tomar al contrario de como él sea; el multiplicando es negativo, luego se deberá tomar positivamente, y se tendrá  $-a \times -1 = +1a = +a$ ; y para los signos resultará  $- \times - = +$ .

Estos cuatro casos se convierten en estos dos, á saber: *signos semejantes*, esto es,  $+$  por  $+$  ó  $-$  por  $-$ , ó en general  $\pm$  por  $\pm$  ó  $\mp$  por  $\mp$ , dan siempre  $+$  en el producto; y *signos desemejantes*, esto es,



+ por - ó - por +, ó en general  $\pm$  por  $\mp$  ó  $\mp$  por  $\pm$ , dan siempre - en el producto.

Los coeficientes se multiplican por las reglas de *Aritmética*; porque si  $a \times b = ab$ , de multiplicar  $2a$  por  $3b$ , debe resultar (61, 3.º) un producto seis veces mayor que  $ab$ , esto es,  $2 \times 3ab$  ó  $6ab$ .

Las letras que son diferentes en ambos factores, se ponen unas á continuacion de otras sin interposicion de signos ningunos (103).

En punto á los esponentes, los de una misma letra se suman; porque si se tiene que multiplicar  $a^3$  por  $a^2$ , indicando y ejecutando la operacion como aquí se ve:  $a^3 \times a^2 = aaaa \times aa = aaaaaa = a^5 = a^{3+2}$  resultará la regla.

Así, para multiplicar  $+4b^3a^4c^2e$  por  $5a^3b^5cd^4$ , diré: + por + da +, que pondré en el producto; 4 por 5 son 20, que pondré despues del signo +;  $b^3$  por  $b^5$ , sumando sus esponentes, será  $b^8$ ;  $a^4$  por  $a^3$  dará  $a^7$ ;  $c^2$  por  $c$ , sumando sus esponentes 2 y 1, dará  $c^3$ ; y como no hay  $e$  en el multiplicador ni  $d$  en el multiplicando, se pondrán despues de lo que ya hemos sacado, y se tendrá que

$$+4b^3a^4c^2e \times +5a^3b^5cd^4 = +20b^8a^7c^3ed^4.$$

Si los esponentes son indeterminados, se indica la suma de los de los factores; así, si quiero multiplicar  $+3a^m b^2 c^n d^r$  por  $-7b^s a^t e^7 d^s$ , tendré que el producto será  $-21a^{m+t} b^{2+s} c^n d^{r+s} e^7$ .

115 Para multiplicar un polinomio por un monomio, ó un monomio por un polinomio, se multiplica cada término del polinomio por el monomio; así, si quiero multiplicar

$5b^2c^4 - 4a^3d^5 + 3b^2cd^4$  por  $-3a^5d^6c^3$ , indicaré y ejecutaré la operacion de este modo:

$$(5b^2c^4 - 4a^3d^5 + 3b^2cd^4) \times -3a^5d^6c^3 =$$

$$-15b^2c^7a^5d^6 + 12a^8d^{11}c^3 - 9b^2c^4d^{10}a^5;$$

multiplicaré el primer término  $5b^2c^4$  por  $-3a^5d^6c^3$ , lo que (114) dará  $-15b^2c^7a^5d^6$ ; luego, multiplicaré el  $-4a^3d^5$  por  $-3a^5d^6c^3$ , lo que dará  $+12a^8d^{11}c^3$ ;



y por último multiplicaré el  $+3b^2cd^4$  por  $-3a^5d^0c^3$ , que dará  $-9b^2c^4d^1a^5$ , y tendré el producto que allí se presenta.

116 Para multiplicar un polinomio por otro, se multiplica todo el multiplicando por el 1.<sup>er</sup> término del multiplicador; despues todo el multiplicando por el 2.<sup>o</sup> término del multiplicador; despues por el tercero &c.; se van colocando los productos unos á continuacion de otros con los signos con que vayan saliendo, y luego se simplifica si se puede.

1.<sup>er</sup> ej. Si quiero multiplicar  $a+b$  por  $a-b$ , multiplicaré primero  $a+b$  por  $a$ , lo que da  $a^2+ab$ ; y luego  $a+b$  por  $-b$ , lo que da  $-ab-b^2$ , que puesto á continuacion del anterior y destruyendo  $+ab$  con  $-ab$ , se tendrá

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

Esc. Este resultado nos dice: que la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, da por producto la diferencia de estas cantidades con un exponente duplo del que tenian en los factores.

Recíprocamente, si dada la diferencia de dos cantidades se quiere descomponer en factores, se pondrá la suma de dichas cantidades multiplicada por su diferencia, poniendo á cada una la mitad del exponente que tenia. Así,  $a^8-b^6=(a^4+b^3)(a^4-b^3)$ ;

$$m^9-n^5=(m^{4\frac{1}{2}}+n^{2\frac{1}{2}})(m^{4\frac{1}{2}}-n^{2\frac{1}{2}}).$$

2.<sup>o</sup> ej. Si quiero multiplicar

$$4a^3b^2-3a^2b^3+5b^5 \text{ por } 3a^2b-4ab^2,$$

indicaré y ejecutaré la operacion de este modo:

$$\begin{aligned} (4a^3b^2-3a^2b^3+5b^5)(3a^2b-4ab^2) &= \\ 12a^5b^3-9a^4b^4+15b^6a^2-16a^4b^4+12a^3b^5-20ab^7 &= \\ 12a^5b^3-25a^4b^4+15b^6a^2+12a^3b^5-20ab^7; \end{aligned}$$

multiplicaré primero todo el multiplicando por el primer término  $3a^2b$  del multiplicador, lo que da el producto  $12a^5b^3-9a^4b^4+15b^6a^2$ ; despues multiplicaré todo el multiplicando por el segundo término  $-4ab^2$  del multiplicador, é iré colo-



cando el producto á continuacion del anterior, y ejecuto la reduccion como allí se ve.

$$3.^\circ (a^6b^3+a^9+b^9+b^6a^3)(a^3-b^3)=a^9b^3+a^{12}+a^3b^9+b^6a^6-a^6b^6-a^9b^3-b^{12}-b^9a^3=a^{12}-b^{12}.$$

*De la division algebraica.*

117 Dividir en Álgebra es buscar cuántas veces una cantidad contiene á otra, y del modo que la contiene; de donde resulta que el divisor multiplicado por el cociente debe dar el dividendo; y por lo mismo se puede decir tambien que dividir es hallar una cantidad que multiplicada por el divisor dé el dividendo.

Para dividir un monomio por otro hay que atender á cuatro cosas, que son: 1.º signos; 2.º coeficientes; 3.º letras; y 4.º esponentes.

1.º Signos semejantes dan + en el cociente, y desemejantes dan -.

Dem. Como el signo del divisor, combinado con el que haya de llevar el cociente, ha de producir el del dividendo, cuando el dividendo tenga el signo + el cociente tendrá el mismo signo que el divisor; pues sólo signos semejantes (114) producen +; y cuando el dividendo tenga el signo -, el cociente llevará signo contrario al que tenga el divisor; pues estos son (114) los que producen -;

$$\text{luego } \frac{+}{+}=+, \frac{+}{-}=-, \frac{-}{+}=-, \frac{-}{-}=+,$$

$$\text{ó en general } \frac{\pm}{\pm}=+, \frac{\pm}{\mp}=-, \frac{\mp}{\pm}=-, \frac{\mp}{\mp}=+,$$

que es L. Q. D. D.

2.º Los coeficientes se dividen por las reglas de la Aritmética; y si no se pueden dividir con exactitud, se simplifica si se puede.

Dem. Como el cociente multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo, el coeficiente del cociente por el del divisor ha de producir el del dividendo.



do; luego el coeficiente del cociente deberá ser, lo que resulte de dividir el del dividendo por el del divisor. L. Q. D. D.

3.º *Las letras diferentes que tengan el dividendo y divisor, se dejan donde estén; y las letras que haya comunes, sin esponente ó con uno mismo, se borran en ambos términos.*

*Dem.* Lo primero es porque de esta manera queda indicada la operacion; y lo segundo, porque en el cociente no puede haber nada que sea comun á los dos términos de la division; pues al hacer la multiplicacion resultarian duplicadas en el producto, y no como están en el dividendo, que es lo que debe resultar. L. Q. D. D.

4.º *Si las letras comunes tienen esponentes diferentes, se resta el menor del mayor; y queda la letra en el término que tiene mayor esponente, con un esponente igual á la diferencia hallada.*

*Dem.* Esto equivale á suprimir en ambos términos lo que tienen de comun. L. Q. D. D.

Entendido esto, vamos á resolver algunos ejemplos.

1.º Si quisiera dividir  $12a^5b^2c^3d^2$  por  $-3ba^3c^7e$  diria: + del dividendo (104) dividido por —, da —; 12 dividido por 3 da 4;  $a^5$  dividido por  $a^3$ , es  $a^2$ , porque restando el esponente 2 de la  $a$  del divisor, del esponente 5 de la  $a$  del dividendo, queda 2;  $b^2$  dividido por  $b$ , es  $b$ , porque  $2-1=1$ , y  $b^1=b$ ;  $c^3$  dividido por  $c^7$  da  $c^4$  en el divisor, porque la diferencia entre 3 y 7 es 4, y en el divisor es donde hay mayor esponente; la  $d^2$  quedará en el dividendo, y la  $e$  en el divisor; de manera que tendré

$$\frac{12a^5b^2c^3d^2}{-3ba^3c^7e} = \frac{4a^2bd^2}{c^4e}$$

2.º Si tuviera que ejecutar esta division indicada  $\frac{20a^9b^5c^m d^s f}{8a^4b^2c^n d^r f^2}$ , diria: + por + da +, que no pongo (104); 20 dividido por 8 no se puede ejecutar, y así



simplificaré dividiendo ambas cantidades por 4, lo que las reducirá á  $\frac{5}{2}$ ; ahora diré:  $a^9$  dividido por  $a^4$  es  $a^5$  en el dividendo;  $b^5$  dividido por  $b^2$  da  $b^3$ ;  $c^m$  dividido por  $c^n$  no podemos hacer sino indicarlo; pero como no sabemos si  $m$  es mayor que  $n$  ó  $n$  mayor que  $m$ , no sabemos cuál se debe restar de cuál; podemos restar la  $n$  de la  $m$  y dejar en el numerador del cociente  $c^{m-n}$ ; ó al contrario, y dejar  $c^{n-m}$  en el denominador, pues siempre el cociente por el divisor da el dividendo; pero preferirémos el dejar  $c^{m-n}$  que es mas sencillo; y haciendo lo mismo con las demas letras tendrémos

$$\frac{20a^9b^5c^m d^s f}{8a^4b^2c^n d^r f^2} = \frac{5a^5b^3c^{m-n}d^{s-r}}{2f}, \text{ ó } = \frac{5a^5b^3}{2c^{n-m}d^{r-s}f}$$

118 Consideremos ahora los resultados que puede dar la espresion  $\frac{c^m}{c^n} = c^{m-n}(A)$ .

Aquí puede ocurrir que  $m > n$ , ó  $m = n$ , ó  $m < n$ .

1.º Si  $m > n$  será necesario añadir á  $n$  una cantidad cualquiera  $u$ , para que sea igual con  $m$ ; de manera que  $m = n + u$ ; y sustituyendo este valor en la

espresion (A), será  $\frac{c^m}{c^n} = c^{m-n} = c^{n+u-n} = c^u$ ,

porque  $+n$  y  $-n$  se destruyen. Este caso no nos enseña nada de nuevo.

2.º Si  $m = n$ , sustituyendo en (A), será

$$\frac{c^m}{c^n} = c^{m-n} = c^{n-n} = c^0;$$

aquí encuentro una espresion  $c^0$ , desconocida; así, para ver lo que significa haré la sustitucion de  $n$  por  $m$  ántes de indicar la resta de los esponentes, y tendré

$$\frac{c^m}{c^n} = \frac{c^n}{c^n} = 1,$$

porque toda cantidad dividida por sí misma da (51, 3.º)



la unidad; luego tengo aquí dos espresiones  $c^0$  y 1 que son el resultado de una misma  $\frac{c^m}{c^n}$ ; luego serán

(intr. ax 5.<sup>o</sup>) iguales entre sí, y se tendrá  $c^0=1$ ; pero  $c$  espresa una cantidad cualquiera, luego toda cantidad elevada á cero es igual á la unidad.

3.<sup>o</sup> Si  $m < n$ , añadiendo á  $m$  una cantidad cualquiera  $u$ , para que sea igual con  $n$  será  $m+u=n$ , y poniendo en (A) en vez de  $n$  este valor, tendré

$$\frac{c^m}{c^n} = c^{m-n} = c^{m-(m+u)} = c^{m-m-u} = c^{-u}.$$

Tambien hallo aquí una espresion  $c^{-u}$  no conocida; así, para indagar lo que espresa, haré la sustitucion ántes de indicar la resta de los esponentes, y tendré

$$\frac{c^m}{c^n} = \frac{c^m}{c^{m+u}} = \frac{c^m}{c^u c^m} = \frac{1}{c^u};$$

donde tengo dos valores de  $\frac{c^m}{c^n}$ , á saber:  $c^{-u}$  y  $\frac{1}{c^u}$ ,

que por lo dicho (intr. ax. 5.<sup>o</sup>) serán iguales, y ten-

dré  $\frac{1}{c^u} = c^{-u}$ ;

que dice que *toda cantidad se puede trasladar del divisor al dividendo, ó al contrario, mudando el signo á su esponente.*

119 Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio; porque dividiendo todas las partes del dividendo, y reuniendo todos los cocientes, debe resultar (intr. ax. 3.<sup>o</sup>) el cociente total.

Así, si quiero dividir la cantidad

$15a^6b^2 - 12a^4c^3 + 8b^4c^5$  por  $-6a^3bc^4$ , tendré

$$1.^o \quad \frac{15a^6b^2}{-6a^3bc^4} = -\frac{5a^3b}{2c^4};$$



$$2.^{\circ} \frac{-12a^4c^3}{-6a^3bc^4} = \frac{2a}{bc}; \quad 3.^{\circ} \frac{8b^4c^5}{-6a^3bc^4} = -\frac{4b^3c}{3a^3};$$

luego  $\frac{15a^6b^2 - 12a^4c^3 + 8b^4c^5}{-6a^3bc^4} = \frac{2a}{bc} - \frac{5a^3b}{2c^4} + \frac{4b^3c}{3a^3}$ .

120 Para dividir un polinomio por otro, lo primero que se hará es *ordenar*; para lo cual se verá la letra que está mas repetida en el dividendo y divisor, y se volverán á escribir principiando en ambos por el término en que dicha letra tenga mayor esponente; despues el que tenga el esponente inmediato menor &c.

Hecho esto, *divídase el 1.<sup>er</sup> término del dividendo por el 1.<sup>o</sup> del divisor, y se tendrá un término del cociente; multiplíquese este término por todo el divisor, y réstese el producto de todo el dividendo (lo cual se conseguirá mudando los signos del producto conforme se vaya formando) y se hará la destrucción que se pueda. Despues se divide el 1.<sup>er</sup> término de esta resta por el 1.<sup>o</sup> del divisor, lo que dará el 2.<sup>o</sup> término del cociente; despues se ejecutará la multiplicacion y resta; y se continuará del mismo modo hasta que se halle cociente exacto, ó hasta que el mayor esponente de la letra por que se ordena, sea en la resta menor que el mayor de la misma en el divisor; entón-ces no hay cociente exacto, y se indica la division de la resta por el divisor (49).*

*Ejemp.* Quiero dividir

$$a^3b^3c - ab^2c^2 - 2a^4b^2c + a^5bc + 2a^2bc^2 - a^3c^2$$

por  $a^2 + b^2 - 2ab$ .

Para ordenar, veo que la *a* es la que se halla mas repetida en ambos términos, y ordenando por ella tendré

$$\begin{array}{r|l} a^5bc - 2a^4b^2c + a^3b^3c + 2a^2bc^2 - ab^2c^2 & a^2 - 2ab + b^2 \\ -a^3c^2 & \hline -a^5bc + 2a^4b^2c - a^3b^3c & a^3bc - ac^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -a^3c^2 + 2a^2bc^2 - ab^2c^2 \\ +a^3c^2 - 2a^2bc^2 + ab^2c^2 \\ \hline \end{array}$$

○ ○ ○



Ahora empezaré la division diciendo:  $a^5bc$  dividido por  $a^2$  es  $a^3bc$ , que pondré en el cociente; haré la multiplicacion de  $a^3bc$  por todo el divisor, diciendo:  $+$  por  $+$  da  $+$ , y como se ha de restar es  $-$  que pongo debajo del  $+$  que debia tener el 1.<sup>er</sup> término del dividendo;  $a^3bc$  por  $a^2$  da  $a^5bc$ , que pongo despues del signo  $-$ ; continúo:  $+$  por  $-$  da  $-$ , que como se ha de restar es  $+$ ;  $a^3bc$  por  $2ab$  es  $2a^4b^2c$ , que pongo despues del signo  $+$ ;  $+$  por  $+$  da  $+$ , que como se ha de restar será  $-$ ;  $a^3bc$  por  $b^2$  da  $a^3b^3c$ , que pondré tambien; tiraré una raya para poner debajo de ella la resta que quede despues de hecha la destruccion; pero advirtiéndolo que  $+a^5bc$  de arriba con  $-a^5bc$  de abajo se destruyen, que  $-2a^4b^2c$  se destruye con  $+2a^4b^2c$ , y  $+a^3b^3c$  con  $-a^3b^3c$ , pongo debajo de la raya lo que queda, que es

$$-a^3c^2 + 2a^2bc^2 - ab^2c^2.$$

El 1.<sup>er</sup> término de esta resta  $-a^3c^2$ , le dividiré por  $a^2$  primero del divisor, lo que dará  $-ac^2$ ; multiplico y resto, diciendo:  $-$  por  $+$  da  $-$ , y como se ha de restar es  $+$ , que pongo debajo del signo  $-$  del  $-a^3c^2$ ;  $a^2$  por  $ac^2$  es  $a^3c^2$  que pongo; continúo  $-ac^2$  por  $-2ab$  es  $+2a^2bc^2$ , que como se ha de restar pongo  $-2a^2bc^2$ ; sigo:  $-ac^2$  por  $b^2$  es  $-ab^2c^2$ , que como se ha de restar será  $+ab^2c^2$ ; y como estos términos se destruyen con sus correspondientes, pondré debajo de la raya o por resta, y tengo que el cociente será  $a^3bc - ac^2$ .

*Dem.* El ordenar es una operacion que se puede hacer, porque esto no altera el valor de los términos de la division; y se debe practicar, porque muchas cantidades (como la anterior) que ordenadas dan cociente exacto, no le darian sin esta circunstancia, y el resultado debe ser siempre el mas sencillo.

Todo lo demas es enteramente análogo al procedimiento aritmético (53), y se reduce á buscar los diferentes términos de un polinomio que multiplicado por el divisor dé el dividendo, que es L. Q. D. D.

*Esc.* La multiplicacion del cociente por el primer



término del divisor se puede omitir; porque como dará el 1.<sup>er</sup> término del dividendo, y se ha de restar de él, se podrá tachar inmediatamente el 1.<sup>er</sup> término del dividendo y multiplicar desde el 2.<sup>o</sup> del divisor en adelante, que es lo que se ve en el ejemplo siguiente.

Si quiero dividir  $a^6 - b^6$  por  $a^2 - b^2$ , haré la operación como aquí se presenta.

$$\begin{array}{r|l} a^6 - b^6 & a^2 - b^2 \\ + a^4 b^2 & \\ + a^2 b^4 & \\ + b^6 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a^2 - b^2 \\ \hline a^4 + a^2 b^2 + b^4 \end{array} \right.$$

Donde veo que sale cociente exacto, porque el  $+b^6$  que resulta, se destruye con el  $-b^6$  del dividendo.

*De los quebrados literales.*

121 Los quebrados literales ó algebraicos se calculan del mismo modo que los numéricos; porque todas las demostraciones que dimos respecto de estos, estaban concebidas en términos generales. Así, su valor no se alterará aun cuando se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad. Por esta causa se reducirán á un comun denominador del mismo modo que aquellos (68); de manera que si tengo los quebrados

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}, \frac{p}{q},$$

quedarán reducidos á un comun denominador, si multiplico los dos términos del primero por  $dnq$ , los del segundo por  $bnq$ , los del tercero por  $bdq$ , y los del cuarto por  $bdn$ , cuya operación los trasformará en

$$\frac{adnq}{bdnq}, \frac{cbnq}{bdnq}, \frac{mbdq}{bdnq}, \frac{bdnp}{bdnq}.$$

Igualmente, si se dan quebrados con factores ó letras comunes arriba y abajo, se podrán suprimir y quedarán simplificados. Así,

$$\frac{ad}{d^2 c} = \frac{a}{dc}, \text{ y } \frac{ad+ba}{d^2+bd} = \frac{a}{d};$$

pues en el numerador y denominador del primero es

G T. I.



comun la  $d$ , y en los dos términos del segundo es comun el factor  $d+b$ , que suprimido se convertirá el quebrado en lo que hemos puesto.

122 Para sumarlos se hará lo mismo que con los numéricos (70).

$$\text{De manera que } \frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} + \frac{bm}{bn} = \frac{an+bm}{bn}.$$

123 Para restarlos se hará lo mismo que con los numéricos (73). Así, si de  $\frac{a}{b}$  quiero restar  $\frac{m}{n}$ , tendré

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} - \frac{bm}{bn} = \frac{an-bm}{bn}.$$

124 Para reducir aquí un entero á la especie del quebrado que le acompaña, ya sea por via de suma ó de resta, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, con esto se suma el numerador del quebrado cuando este lleva el signo  $+$ , ó se resta cuando lleva el  $-$ , y á todo esto se le pone por denomina-

dor el del quebrado. Sea la espresion  $a^2+b^2+\frac{a^4}{b^2-a^2}$

la que se quiera reducir; multiplicaré el entero  $a^2+b^2$  por el denominador  $b^2-a^2$ , que me da (116 esc.)  $b^4-a^4$ ; con esto sumaré el numerador  $a^4$ , y á la suma le pondré por denominador el del quebrado, en

$$\text{esta forma: } a^2+b^2+\frac{a^4}{b^2-a^2} = \frac{(a^2+b^2)(b^2-a^2)+a^4}{b^2-a^2} =$$

$$= \frac{b^4-a^4+a^4}{b^2-a^2} = \frac{b^4}{b^2-a^2}.$$

125 Para multiplicarlos se hace lo dicho (76); de manera que

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn} \quad \text{y} \quad \frac{a+m}{c^2-n^2} \times \frac{a-m}{c^2+n^2} = \frac{(a+m)(a-m)}{(c^2-n^2)(c^2+n^2)} = \frac{a^2-m^2}{c^4-n^4}$$



Y para multiplicar un quebrado por un entero ó al contrario, se multiplicará el numerador del quebrado por el entero, como aquí se ve:

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}, \text{ y } (a^2 + b^2) \frac{m}{n} = \frac{(a^2 + b^2)m}{n} = \frac{a^2m + b^2m}{n}.$$

126 Para dividirlos se ejecutará lo dicho (79); de manera que

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm}; \text{ y } \frac{a+m}{c+n} : \frac{c-n}{a-m} = \frac{(a+m)(a-m)}{(c+n)(c-n)} = \frac{a^2 - m^2}{c^2 - n^2}.$$

Si se tratase de dividir un entero por un quebrado, se practicaría lo dicho (80); así,  $a : \frac{c}{d^2} = \frac{ad^2}{c}$ .

Para dividir un quebrado por un entero se practicará lo dicho (81); así,

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}, \text{ y } \frac{a^2b}{c^2 - n} : d^3 = \frac{a^2b}{(c^2 - n)d^3} = \frac{a^2b}{c^2d^3 - nd^3}.$$

*De la elevacion á potencias y estraccion de raices de los monomios.*

127 Se llama en general *potencia* de una cantidad, al *producto* de multiplicar dicha cantidad por sí misma cierto número de veces; si se multiplica una vez, resulta la *segunda* potencia ó *cuadrado*; si se multiplica dos veces, resulta la *tercera* ó *cubo*; si tres, la *cuarta*; y si  $n$ , la potencia del grado  $n+1$ . La cantidad que se multiplica se llama *raiz*; y en general, se llama raiz de una cantidad *aquella que multiplicada por sí misma cierto número de veces produce la cantidad primitiva*.

128 Para indicar que una cantidad se ha de elevar á una potencia, si consta sólo de una letra, basta ponerle á su derecha un poco mas alto el número que espresa la potencia á que se ha de elevar; y si la cantidad tiene mas de una letra ó tiene esponen-



te, se encierra dentro de un paréntesis, y fuera de este se coloca un poco mas elevado el número que expresa la potencia, el cual se llama *esponente* de la potencia. Así, para indicar que la cantidad  $2ab$  se ha de elevar al cuadrado, se escribirá  $(2ab)^2$ , que (106) se lee: *dos ab elevado á dos*;  $(2ab)^3$  se lee: *dos ab elevado á tres*; y  $(2ab)^n$  se lee: *dos ab elevado á n*.

Los grados de las potencias se han deducido del número de veces que entra por factor la raiz, que son tantas como unidades tiene el esponente; por lo que toda cantidad sin esponente ó con 1, es su *primera* potencia. Las multiplicaciones son tantas ménos una como unidades tiene el esponente.

La elevacion á potencias es el caso particular de la multiplicacion, en que los factores son iguales; pero aquí sólo se necesita atender: 1.º á *signos*, 2.º á *coeficientes* y 3.º á *esponentes*.

1.º *Si el esponente de la potencia es número par, el signo de la potencia será siempre +; y si es impar, el signo que lleve la potencia será el que tenga la raiz.* Porque si la raiz lleva el signo +, combinado cualquier número de veces siempre dará +; pero si lleva —, cuando el esponente sea par, como un número par de signos — en la multiplicacion producen +, y un número impar producen —, resulta la regla de los signos.

2.º *De los coeficientes se formará la potencia que diga el esponente, esto es, se multiplicarán por sí mismos tantas veces ménos una como unidades tenga el esponente;* porque en la operacion de multiplicar, los coeficientes se multiplican (114) los unos por los otros, y aquí dichos coeficientes son iguales.

3.º *En punto á esponentes se multiplicará el de la cantidad por el de la potencia.* Porque en la multiplicacion se suman; y aquí habrá que sumar cada esponente consigo mismo, tantas veces como unidades tenga el de la potencia, que equivale á multiplicarlos.

*Cor.* De lo dicho (125) y de lo que acabamos de manifestar, se infiere que para formar potencias de que-



brados, se formará la del numerador y denominador.

Aplicando las reglas á estos ejemplos se tendrá

$$1.^{\circ} \quad (a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^6 = a^{2 \times 3};$$

$$2.^{\circ} \quad (-4ab^3n^5)^5 = -4^5 a^5 b^{15} n^{25} = -1024 a^5 b^{15} n^{25};$$

$$3.^{\circ} \quad (6a^2b^nc^r)^m = 6^m a^{2m} b^{nm} c^{rm};$$

$$4.^{\circ} \quad \left( \frac{3a^2b^3c^4}{4e^2d^5f^3} \right)^3 = \frac{(3a^2b^3c^4)^3}{(4e^2d^5f^3)^3} = \frac{27a^6b^9c^{12}}{64e^6d^{15}f^9}.$$

Los cuales manifiestan que *la potencia de un producto ó de un quebrado, es lo mismo que el producto ó cociente de la misma potencia de cada uno de los factores ó términos del quebrado.*

129 Para indicar que se ha de proceder de la potencia á la raiz, se usa del *signo radical*  $\sqrt{\quad}$ ; entre sus ramas ó piernas se pone el *esponente radical*, que es el número que espresa el grado de la raiz que se quiere estraer; y debajo del signo se pone la cantidad cuya raiz se quiere sacar.

Como estraer raices es *buscar una cantidad, que entrando por factor tantas veces como unidades tiene el esponente radical, produzca la cantidad dada, que se considera como potencia*: establecerémos por regla.

1.<sup>o</sup> Si el esponente radical es par, la raiz llevará el signo de ambigüedad; y si el esponente radical es impar, la raiz llevará el mismo signo de la cantidad. Porque cuando la potencia es de grado par, siempre tiene (123, 1.<sup>o</sup>) el signo +, bien tenga la raiz el + ó el -; y cuando la potencia es de grado impar, lleva el mismo signo que tenia la raiz.

2.<sup>o</sup> De los coeficientes se dejará indicada la *operacion debajo del radical*, hasta que se sepan estraer las raices de los números.

3.<sup>o</sup> En punto á esponentes, se dividirá el esponente de la cantidad por el del radical. Porque esta operacion es la inversa de elevar á potencias, y en esta operacion se multiplican.

Así, si quiero estraer la raiz cuadrada de  $a^6b^8$ ,



observaré que ocurriendo con mucha frecuencia el extraer raíces cuadradas, se omite el esponente 2 del radical;

de modo que  $\sqrt{a^6 b^8}$  es lo mismo que  $\sqrt[2]{a^6 b^8}$ ; y ejecutando la operacion del modo que acabamos de

decir, será 1.º  $\sqrt{a^6 b^8} = \pm a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{8}{2}} = \pm a^3 b^4$ ;

$$2.º \sqrt[3]{-a^6 b^{12} c^9} = -a^2 b^4 c^3;$$

$$3.º \sqrt[n]{7 a^5 b^r c^s d^3} = \sqrt[n]{7} \times a^{\frac{5}{n}} b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}} d^{\frac{3}{n}}.$$

Si fuesen quebrados, se extraerá la raiz del numerador y la del denominador, en esta forma:

$$\sqrt{\frac{a^8}{b^6}} = \pm \frac{a^{\frac{8}{2}}}{b^{\frac{6}{2}}} = \pm \frac{a^4}{b^3}; \quad \sqrt[n]{\frac{a^m b^r c^5}{d^7 f^8 e^s}} = \frac{a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{5}{n}}}{d^{\frac{7}{n}} f^{\frac{8}{n}} e^{\frac{s}{n}}};$$

lo cual está fundado en que para elevar á potencias un quebrado, se ha de elevar el numerador y el denominador; por lo que aquí se deberá seguir la regla contraria; de donde se deduce que *la raiz de un producto ó de un quebrado es lo mismo que el producto ó cociente de las raices de los factores, ó términos del quebrado.*

130 Cuando la division de los esponentes no se puede hacer exactamente, aun debe permanecer radical en la espresion; pero se debe sacar de él todo lo que se pueda; para lo cual del esponente fraccionario que resulta de quitar el radical, se sacan los enteros que se puedan; y aquella cantidad se descompone en factores poniendo por primer factor la cantidad con el esponente entero, y por segundo la misma cantidad con el esponente quebrado; y luego se vuelve á restablecer el radical poniendo entre sus piernas el denominador del quebrado, y debajo de él la cantidad con el numerador del quebrado por esponente.



Así, si quiero extraer la raíz cúbica de  $a^5b^7c^6$ , ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^5b^7c^6} &= a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{3}}c^{\frac{6}{3}} = a^{1\frac{2}{3}}b^{2\frac{1}{3}}c^2 = \\ &aa^{\frac{2}{3}}b^2b^{\frac{1}{3}}c^2 = ab^2c^2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} = ab^2c^2\sqrt[3]{a^2b}. \end{aligned}$$

Esto está fundado (129) en que la raíz de un producto de tantos factores como se quiera, es igual al producto de las raíces del mismo grado de los factores.

131 Estas cantidades que están afectas del signo

$\sqrt{\quad}$  se llaman *cantidades radicales*; así,  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt[3]{b}$ , &c. son cantidades radicales; cuando  $a$  y  $b$  se representen por números, podrá suceder que  $a$  v. g. sea un número cuadrado como 1, 4, 9, 16 &c. ó  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{16}$  &c., y que  $b$  sea un número cúbico, como 1, 8, 27, &c. ó  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{27}$  &c. En este caso el radical desaparecerá; pero cuando no sea ninguno de estos números, como cuando  $a$  valga 2, 3, 5, &c. y  $b$  sea 2, 3, 4, 5, &c. no tiene raíz exacta; y es imposible hallar un número entero ni quebrado que espresé el valor de estos radicales; por lo cual  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$  &c.

$\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{5}$  &c., se llaman *números sordos, irracionales ó incommensurables*.

132 Con los radicales se hacen las mismas operaciones que con las demas cantidades.

La suma y la resta se ejecutan en un todo lo mismo; sólo que para que los términos sean semejantes han de tener un mismo esponente radical, y unas mismas letras y esponentes fuera del radical y debajo.

133 Para multiplicarlos, si el radical es de un mismo grado se pondrá (129) debajo del radical el producto de las cantidades; y despues se verá si se puede sacar algo de debajo del radical (130).

Por ejemplo:  $\sqrt[4]{a^3b} \times \sqrt[4]{a^2bc^2} = \sqrt[4]{a^5b^2c^2} = a\sqrt[4]{ab^2c^2}$ .

Cuando los radicales no tienen un mismo esponente, se reducen á él *multiplicando los esponentes*



de cada cantidad y de cada radical, por el producto de los esponentes de los radicales de los demas.

Esto está fundado en lo dicho (68); pues si se quitan los radicales poniendo á las letras esponentes fraccionarios (130), no habrá mas diferencia sino que aquí los esponentes de los radicales hacen oficios de denominadores, y los de las letras hacen oficios de numeradores. Así, si quiero reducir á un mismo

esponente radical los  $\sqrt[3]{a^2b^2}$ ,  $\sqrt[4]{a^3b^2}$ ,  $\sqrt{an}$ , multiplicaré primero todos los esponentes radicales diciendo: 3 por 4 son 12; 12 por 2 esponente del tercero son 24, y este será el esponente comun del radical; ahora, para saber los que deben tener las cantidades que se hallan debajo de cada radical, multiplicaré los esponentes de las letras que se hallan debajo del primero por 8, producto de 4 por 2; los de las que se hallan debajo del segundo por 6, producto de 3 por 2; y los de las que se hallan debajo del tercero por 12, producto de 3 por 4; de manera que dichos radicales los tendré reducidos á

$$\sqrt[24]{a^{16}b^{16}}, \sqrt[24]{a^{18}b^{12}}, \sqrt[24]{a^{12}n^{12}};$$

y si los quisiera multiplicar sacaria por producto

$$\sqrt[24]{a^{16}b^{16}} \times \sqrt[24]{a^{18}b^{12}} \times \sqrt[24]{a^{12}n^{12}} =$$

$$\sqrt[24]{a^{46}b^{28}n^{12}} = ab \sqrt[24]{a^{22}b^4n^{12}}.$$

134 Para dividirlos, cuando los radicales tengan un mismo esponente, quedará hecha la division (129) con poner debajo de un radical del mismo grado el cociente de las cantidades que haya debajo.

$$\text{Luego } \frac{\sqrt[4]{a^3b^2c}}{\sqrt[4]{a^2b^3cd^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^3b^2c}{a^2b^3cd^2}} = \sqrt[4]{\frac{a}{bd^2}}.$$

Sino tienen el mismo esponente radical, se redu-



cirán á él, como se ve en el ejemplo siguiente:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2bc^2}}{\sqrt[4]{a^2b^3d^2}} = \frac{\sqrt[12]{a^8b^4c^8}}{\sqrt[12]{a^6b^9d^6}} = \sqrt[12]{\frac{a^8b^4c^8}{a^6b^9d^6}} = \sqrt[12]{\frac{a^2c^8}{b^2d^6}}$$

135 Para elevarlos á una potencia cualquiera basta (133) elevar la cantidad que está debajo á la misma potencia, dejando el mismo esponente del ra-

dical; porque elevar  $\sqrt[5]{a^3b^4}$  á la segunda potencia, es efectuar el producto

$$(\sqrt[5]{a^3b^4})^2 = \sqrt[5]{a^3b^4} \times \sqrt[5]{a^3b^4} = \sqrt[5]{a^6b^8} = ab\sqrt[5]{ab^3}.$$

Como extraer raíces es lo contrario de elevar á potencias, para extraer la raíz de una cantidad radical, se dividirá el esponente de la cantidad que haya debajo, por el esponente de la raíz que se quiera sacar, y al resultado se le pondrá el mismo radical.

Así,  $\sqrt[3]{\sqrt[8]{a^6b^3c^3}} = \sqrt[8]{a^2bc}$ ; pero como no siem-

pre se podrá ejecutar la division exactamente, con el fin de que en el resultado sólo haya un radical, se multiplica el esponente del radical primitivo por el de la raíz que se quiere sacar, sin llegar á las cantidades que hay debajo del signo radical. Así,

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2b^2c}} = \sqrt[15]{a^2b^3c}.$$

### De las espresiones imaginarias.

136 Hemos visto (128) que al elevar una cantidad á una potencia par, siempre resultaba el signo +; de donde se deduce que ninguna cantidad negativa puede ser potencia de grado par; luego si nos pidiesen una raíz de grado par de una cantidad negativa, se nos pedia un imposible; no ostante ocurre esto con mucha frecuencia, y por esta causa á estas es-



presiones se les ha dado el nombre de *imaginarias*.

Así,  $\sqrt{-a^2}$ ,  $\sqrt[4]{-a^3}$ ,  $\sqrt[6]{-b^5}$ ,  $\sqrt[2n]{-a^m}$   
son espresiones imaginarias.

Antes de enseñar cómo se calculan, demostraremos esta proposición.

*Toda espresion imaginaria se puede descomponer en dos factores: el uno real que será un radical del mismo grado, que contenga debajo de sí la cantidad real; y el otro un radical del mismo grado que contenga debajo de sí la unidad con el signo negativo.*

En efecto, sea la espresion  $\sqrt[2n]{-a^m}$ , y se tendrá que como toda cantidad se puede considerar multiplicada por la unidad, será

$$-a^m = -1 a^m = +1 \times -a^m = -1 \times +a^m;$$

luego  $\sqrt[2n]{-a^m} = \sqrt[2n]{a^m} \times -1 = (\S 129) a^{\frac{m}{2n}} \times (-1)^{\frac{1}{2n}};$

y restableciendo los radicales será  $\sqrt[2n]{a^m} \times \sqrt[2n]{-1}$ , que era L. Q. D. D.

137 Con las imaginarias se hacen las mismas operaciones que con las cantidades reales. La suma y la resta se practican por las reglas dadas (132).

138 Para multiplicarlas se descompondrán ántes en sus dos factores, y despues se ejecutará la operacion como en los radicales; así, para multiplicar

$\sqrt{-a}$  por  $\sqrt{-b}$ , descompondré á  $\sqrt{-a}$  en  $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ , y á  $\sqrt{-b}$  en  $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$ , y la multiplicacion la haré en esta forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{-a} \times \sqrt{-b} &= \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \\ \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times (-1)^{\frac{1}{2}} \times (-1)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{ab} \times (-1)^1 = \\ \sqrt{ab} \times -1 &= -\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Observando este resultado echarémos de ver que el producto de dos imaginarias de segundo grado es una cantidad real: y que el signo que nos resulta es



contrario al que daría la multiplicacion (114); pues teniendo  $\sqrt{-a}$  y  $\sqrt{-b}$  los signos positivos, deberá salir el producto positivo, y vemos que es negativo.

139 Para dividir las se descompondrán tambien en factores el dividendo y el divisor; así, será

$$\frac{\sqrt{-a} \sqrt{a\sqrt{-1}}}{\sqrt{-b} \sqrt{b\sqrt{-1}}};$$

y como  $\sqrt{-1}$  arriba y  $\sqrt{-1}$  abajo se pueden supri-

mir, quedará  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = (\S 134) \sqrt{\frac{a}{b}}$ .

140 Si se multipican entre sí dos binomios de esta forma  $A+B\sqrt{-1}$ , pero que en cada uno sea diferente el signo del radical, el producto será una cantidad real; v. g. si multiplico  $A+B\sqrt{-1}$  por  $A-B\sqrt{-1}$ , tendré  $(A+B\sqrt{-1})(A-B\sqrt{-1}) = A^2 + AB\sqrt{-1} - AB\sqrt{-1} + B^2 = A^2 + B^2$ .

De donde se deduce una regla para descomponer en factores la suma de dos cantidades, cuya operacion es muy socorrida en la práctica, y es: que se ponga la raiz cuadrada de uno de los términos en ambos factores por primer término, y por segundo la raiz del otro multiplicada por  $\sqrt{-1}$ , pero con diferente signo en cada factor; de manera que

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2\sqrt{-1})(a^2 - b^2\sqrt{-1}).$$

## SEGUNDA PARTE DEL ÁLGEBRA.

*De la análisis algebraica, y resolucion de las ecuaciones de primer grado.*

141 Se llama *ecuacion* la igualdad de dos cantidades, como  $c = a + b$ ; lo que se pone á la izquierda



del signo  $=$ , se llama *primer miembro*; y lo que se pone á la derecha, *segundo miembro*; y cada una de las cantidades que los forman, se llaman *términos*. La parte del Algebra que trata de resolver los problemas despues de puestos en ecuacion, se llama *análisis*; cuyo espíritu consiste en suponer conocido lo mismo que se trata de averiguar.

Como en los problemas entran cantidades conocidas, que se llaman *datos*, y desconocidas que se llaman *incógnitas*, las conocidas se señalan con las primeras letras  $a, b, c, \&c.$ , del alfabeto; y las incógnitas con las últimas  $z, y, x, u, \&c.$

142 Señaladas las cantidades con letras, se pasa á *plantear el problema*, que es cifrar en ecuaciones todas las condiciones que contiene. Para plantear bien un problema es necesario leerle tres ó cuatro veces, hacerse bien cargo del sentido absoluto y terminante de las palabras, y condiciones á que han de satisfacer las cantidades, y escribir los signos correspondientes. Es, por consiguiente, el planteo de un problema, una rigurosa traduccion del lenguaje comun al lenguaje algebraico; y así, para poder ejecutarle con alguna facilidad, se tendrá entendido que las palabras *sumado, agregado, aumentado en*  $\&c.$  y sus sinónimas, conducen á poner el signo  $+$ ; las *restado de, quitado, disminuido en, \&c.* y sus sinónimas quedan traducidas poniendo el signo  $-$ ; las *multiplicado por, tantas veces mayor*  $\&c.$  conducen á poner el signo  $\times$ ; las *dividido por, tantas veces menor, \&c.* conducen al signo: ó *raya* de la division; las *tal potencia*  $\&c.$  al de elevar á potencias; y las *extraer tal raiz*  $\&c.$  al signo radical; y las palabras *dé, componga, resulte, salga*, y todas sus equivalentes, quedan traducidas escribiendo el signo  $=$ .

Cuando planteado un problema se hallan tantas ecuaciones como incógnitas, la cuestion es *determinada*; cuando resultan ménos ecuaciones que incógnitas, es *indeterminada*; y cuando resultan mas ecuaciones que incógnitas, se deberia llamar *mas que determi-*



*nada*; pero en este caso la cuestion ó es absurda, ó es inútil alguna condicion de las que se dieron; por lo que no se considera esta clase de cuestiones.

Cuando en una ecuacion, considerada por sí sola, no hay mas de una incógnita, se dice que es *determinada*; pero cuando hay dos ó mas incógnitas, se dice que es *indeterminada*.

143 Las ecuaciones, sean determinadas ó indeterminadas, se dividen en *grados*, tomando el nombre del mayor esponente que tiene la incógnita; así,  $a+bx=cx+d+e$  es una ecuacion de 1.<sup>er</sup> grado, porque la incógnita  $x$  sólo se halla elevada á la primera potencia; y es determinada, porque sólo contiene la incógnita  $x$ . La ecuacion  $ax^2+bx=c+dx$  es de 2.<sup>o</sup> grado, porque el mayor esponente de la incógnita es 2; y es determinada, porque sólo contiene la incógnita  $x$ ; y la ecuacion  $ax^2+bx^9+d=cx^3$  es de 9.<sup>o</sup> grado; y es determinada por la misma razon que las anteriores.

Las ecuaciones indeterminadas tambien toman el nombre del mayor esponente de las incógnitas; pero como puede haber términos donde se hallen multiplicadas ó divididas entre sí, para averiguar el grado de la ecuacion, se suman los esponentes de las incógnitas que se hallan en el término que hay mas dimensiones desconocidas. V. g. la ecuacion  $ax=bz+d$  es indeterminada, porque tiene dos incógnitas; y es de 1.<sup>er</sup> grado, porque en un mismo término sólo se halla una incógnita, y es con la unidad por esponente; la ecuacion  $ax^3+bx^3x^4=ax^2+cd$ , es indeterminada, porque tiene dos incógnitas; y ademas es de 7.<sup>o</sup> grado, porque en el segundo término del primer miembro se hallan dos incógnitas, la una con el esponente 3, y la otra con 4; luego en este término hay siete dimensiones desconocidas.

Cuando las ecuaciones son de un grado mas elevado al primero, pueden ser de dos maneras: *puras* ó *incompletas*, que son aquellas en que sólo se halla la incógnita con el esponente que da nombre á la ecuacion; ó *mistas*, *completas* ó *afectas*, que son



aquellas en que, además del término donde se halla la incógnita con el esponente que da nombre á la ecuacion, se encuentra en otros términos con un esponente menor. V. g.  $x^3+a=b$ ,  $x^5+c=d$ , ó en general  $x^n=e$ , son ecuaciones puras de 3.<sup>o</sup>, 5.<sup>o</sup> y n.<sup>o</sup> grado. Las ecuaciones  $x^3+x+c=b$ ,  $x^5+ax^3+bx=cd$ , ó en general  $x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\dots+c=c$ , son ecuaciones mistas, completas ó afectas, de los mismos grados que las anteriores.

*Esc.* Cuando las cantidades conocidas que entran en las ecuaciones son números, como en estas:

$x^5+3x=38$ ,  $x^3+2xz=20$ , &c. las ecuaciones se llaman *numéricas*; y cuando las cantidades conocidas están espresadas por letras, como en  $x^3+ax^2+bx=c$ ,  $x^2+ax=b$ , &c. las ecuaciones se llaman *literales* ó *algebraicas*. En estas, y siempre que en los cálculos entran cantidades conocidas enlazadas con las incógnitas, se da el nombre de coeficiente á toda la cantidad conocida que multiplica á la incógnita. V. g. en el término  $2x$ , el coeficiente es 2; y en la espresion  $2ax$  el coeficiente es  $2a$ .

144 Como el espíritu analítico consiste en hallar una ó mas cosas desconocidas, en valores de las que se dan conocidas, todo el artificio de la análisis, cuando ya está planteado el problema, consiste en *determinar á qué cantidades conocidas es igual ó son iguales las incógnitas*; y las operaciones que se ejecutan para dejarla sola en un miembro, sin coeficiente, esponente, ni divisor, y con el signo positivo, se comprenden bájó el nombre de *despejo de las incógnitas*.

145 En el planteo de los problemas (142) se suelen encontrar muchas dificultades, porque las condiciones á que han de satisfacer las cantidades, están á veces tan intrincadas y enredosas, que nos parece imposible atinar con la operacion á que deben conducir; lo cual no sucede así en el despejo de las incógnitas, que está fundado en que *si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales*; y además hay una regla para saber las ope-



raciones que se han de hacer, que son las contrarias de las que estén indicadas con las cantidades que afectan á las incógnitas.

146 En efecto, 1.<sup>o</sup> cuando la incógnita se halla sumada con otra cantidad, queda despejada pasando por via de resta al otro miembro la cantidad que sumaba á la incógnita. V. g. si se tiene  $x+a=b$ , quedará despejada la  $x$  pasando el término  $+a$  al otro miembro con el signo  $-$ , de este modo  $x=b-a$ ; porque siendo  $x+a=b$ , si de ambos miembros quitamos la  $a$ , será  $x+a-a=b-a$ ; pero en el primer miembro  $+a$  y  $-a$  se destruyen, luego quedará  $x=b-a$ .

147 2.<sup>o</sup> Cuando una cantidad afecta á la incógnita por via de resta, queda despejada pasando al otro miembro dicha cantidad por via de suma. Por ejemplo, si se tiene  $x-a=b$ , será  $x=b+a$ ; porque si á ambos miembros de la ecuacion añadimos una misma cantidad  $a$ , se tendrá  $x-a+a=b+a$ ; y como  $-a$  y  $+a$  se destruyen, quedará  $x=b+a$ .

Cor. De estos dos casos se deduce que para pasar un término de un miembro á otro basta mudarle el signo; y que si al fin de un cálculo resulta la incógnita con el signo  $-$ , se podrá poner con el signo  $+$ , mudando los signos á toda la ecuacion; porque esto equivale á trasladar los términos de un miembro á otro; así, si tuviese  $-x=a-b$  podría poner  $x=b-a$ .

148 3.<sup>o</sup> Cuando una cantidad multiplica á la incógnita, quedará esta despejada partiendo el otro miembro por lo que multiplica á la incógnita. V. g.

si se tiene  $ax=b$ , resultará  $x=\frac{b}{a}$ ;

porque si dividimos ambos miembros de dicha ecuacion por  $a$ , se tendrá  $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$ ; y como  $a$  arriba y  $a$

abajo se pueden suprimir (61, 4.<sup>o</sup>), quedará  $x=\frac{b}{a}$ .

149 4.<sup>o</sup> Cuando una cantidad divide á la incóg-



nita, se despeja esta *multiplicando el otro miembro por lo que divide á la incógnita*. V. g. si se tiene

$$\frac{x}{a} = b, \text{ será } x = ab; \text{ porque multiplicando ambos}$$

miembros de la ecuacion por  $a$ , se tendrá  $\frac{ax}{a} = ab$ ;

y suprimiendo en el primer miembro  $a$  arriba y abajo (61, 4.º) será  $x = ab$ .

150 Al despejar una incógnita no siempre se presentan ecuaciones tan sencillas como las que hemos considerado hasta ahora, sino que se hallan á un tiempo enlazadas con las incógnitas las cantidades conocidas, por via de suma, resta, multiplicacion y division; y en este caso para despejarla, lo primero que se hace es *pasar (147 cor.) al primer miembro todos los términos donde se halla la incógnita, y al segundo todos aquellos donde no se halla*. Despues se *quitan todos los divisores de los términos donde hay incógnita, lo que se consigue multiplicando cada término por el producto de los divisores de los demas; luego, se descompondrá el primer miembro en dos factores, sacando la incógnita fuera de un paréntesis, y encerrando dentro de él lo que la multiplique; y finalmente, quedará despejada dividiendo el otro miembro por lo que multiplica á la incógnita, que es lo que se halla dentro del paréntesis*.

Así, si quiero despejar la incógnita en esta ecua-

$$\text{cion } 3x - a + \frac{2x}{b} + ax = \frac{4dx}{7} + n - \frac{x}{3c},$$

primero pasaré al primer miembro los términos

$$\frac{4dx}{7} \text{ y } -\frac{x}{3c} \text{ del segundo y el } -a \text{ al segundo mudán-$$

doles los signos, y tendré

$$3x + \frac{2x}{b} + ax - \frac{4dx}{7} + \frac{x}{3c} = n + a(A);$$



ahora quitaré los divisores, multiplicando el  $3x$  por  $21bc$ , producto de los divisores  $b$ ,  $7$  y  $3c$ , de los de-

mas; el  $\frac{2x}{b}$  por  $21c$ , producto de  $7$  y  $3c$ ; el  $ax$  por

$21bc$ , producto de  $b$ ,  $7$  y  $3c$ ; el  $-\frac{4dx}{7}$  por  $3bc$ , pro-

ducto de  $b$  y  $3c$ ; el  $\frac{x}{3c}$  por  $7b$ , producto de  $b$  y de  $7$ ;

todo el segundo miembro se multiplicará por  $21bc$ , producto de los divisores  $b$ ,  $7$  y  $3c$ , y se tendrá  $63bcx+42cx+21abcx-12bcdx+7bx=(n+a)21bc$ .

Esta trasformacion no altera la ecuacion (A), porque equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto  $21bc$  de todos los divisores; pues en el término donde haya alguno, queda hecha la multiplicacion con suprimirle (66 cor.)

Ahora, sacando la  $x$  fuera de un paréntesis que contenga todo lo que la multiplica, se tendrá

$x(63bc+42c+21abc-12bcd+7b)=(n+a)21bc$ ; y dividiendo por lo que multiplica á la incógnita, re-

sultará  $x = \frac{(n+a) \times 21bc}{63bc+42c+21abc-12bcd+7b}$ .

Cor. De aquí se deduce que una cantidad que en un miembro se halla como factor puede pasar al otro por divisor; y al contrario, toda cantidad que se halla por divisor puede pasar por factor al otro miembro; y que quitar los divisores de una ecuacion equivale á multiplicar sus dos miembros por el producto de todos ellos.

151 Cuando la incógnita se halla elevada á potencias en una ecuacion pura, se despeja estrayendo del otro miembro una raiz del mismo grado que el de la potencia. V. g. si se tiene  $x^n = o$ ,

quedará despejada la  $x$  poniendo  $x = \sqrt[n]{b}$ ; porque si estraemos de ambos miembros la raiz  $n$ , será

H

T. I.



$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{b}$ ; pero  $\sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$ , luego  $x = \sqrt[n]{b}$ .

Si  $n$  es un número par, se deberá poner el signo  $\pm$ ; de manera que si fuese  $x^2 = a^2$ , resultaría  $x = \pm a$ .

152 Si se hallase la incógnita debajo de algun radical, quedaria despejada *elevando el otro miembro á una potencia del mismo grado que el radical*. V. g.

si se tuviese  $\sqrt[n]{x} = b$  resultaria  $x = b^n$ ; porque si ele-

vamos á  $n$  los dos miembros de la ecuacion  $\sqrt[n]{x} = b$

resultará  $(\sqrt[n]{x})^n = (\S 135)x = b^n$ .

153 Cuando al plantear una cuestion hay tantas ecuaciones como incógnitas, dicha cuestion es determinada (142); para despejar en este caso cada incógnita se pueden seguir tres métodos diferentes; pero aquí sólo esplicarémos el *de sustitucion*.

Este consiste *en determinar en la ecuacion mas sencilla la incógnita mas sencilla, y sustituir su valor en las demas; luego, en la ecuacion mas sencilla que resulte, se determinará la incógnita mas sencilla, y se sustituirá su valor en las demas; y así se continuará hasta que sólo se tenga una ecuacion con una incógnita; en cuyo caso se despejará; y sustituyendo su valor en los anteriores quedarán despejadas todas las incógnitas*.

Propongámonos despejar las incógnitas en este sistema de ecuaciones (A).

Para esto determinaré en la primera una cualquiera de ellas tal como la  $x$ , y tendré  $x = a + u - z$ .

$$\left. \begin{array}{l} (1.^a) \quad x - u + z = a \\ (2.^a) \quad x + u - z = b \\ (3.^a) \quad x - u - z = c \end{array} \right\} (A)$$

Sustituiré este valor de  $x$  en las dos de abajo y se convertirán en (B), ó simplificando en (C);

$$\left. \begin{array}{l} a + u - z + u - z = b \\ a + u - z - u - z = c \end{array} \right\} (B) \quad \left. \begin{array}{l} a + 2u - 2z = b \\ a - 1z = c \end{array} \right\} (C);$$

y como en la segunda de estas ecuaciones no hay mas



de la incógnita  $z$ , la despejaré por lo dicho (150) y será

$$z = \frac{a-c}{2} = \frac{1}{2}(a-c) (*).$$

Sustituyendo en vez de  $z$  su valor en la primera de las (C), ó desde luego en vez de  $-2z$  su valor  $c-a$ , tendré:  $a+2u+c-a=b$ , ó  $2u+c=b$ , que (150) da  $u = \frac{1}{2}(b-c)$ .

Sustituyendo estos valores de  $z$  y de  $u$  en el de  $x$ , será  $x = a+u-z = a + \frac{1}{2}(b-c) - \frac{1}{2}(a-c)$ ; que, reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, se convierte en

$$x = \frac{2a+b-c-a+c}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(a+b).$$

Con lo cual quedan despejadas las tres incógnitas. Entendido esto, vamos á resolver algunas cuestiones.

154 1.<sup>a</sup> Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar la mayor y la menor.

Res. y Dem. Sea  $s$  la suma dada, y  $d$  la diferencia; sea  $x$  la cantidad mayor que se pide, y  $z$  la menor, y el problema quedará planteado en estas dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} x+z &= s \\ x-z &= d \end{aligned}$$

Determinando  $z$  en la primera será  $z = s-x$ ; cuyo valor sustituido en la segunda da

$$x-s+x=d \text{ ó } 2x=s+d;$$

de donde (§ 148)  $x = \frac{1}{2}(s+d) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$ ;

y sustituyendo este valor en el de  $z$ , se tendrá

$$z = s - \frac{s+d}{2} = \frac{2s-s-d}{2} = \frac{s-d}{2} = \frac{s}{2} - \frac{d}{2} = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d.$$

Cuyos resultados manifiestan que la cantidad mayor  $x$  es igual á la mitad de la suma, mas la mitad de la diferencia; y la menor  $z$  á la mitad de la suma, ménos la mitad de la diferencia.

---

(\*) Cuando tengamos cantidades divididas por números, les pondremos ántes el coeficiente quebrado que les corresponda, poniendo la cantidad dentro de paréntesis, ó no, segun sea necesario.



Así, si se pidiese hallar la edad de un padre y de un hijo, en el supuesto de que entre ambos tuviesen 60 años, y el padre llevase á su hijo 20, diria: la mitad de 60 es 30; la mitad de 20 es 10; sumando 30 y 10, será 40 la edad del padre, que es la mayor. Y para hallar la del hijo, que es la menor, diria: 30 menos 10 son 20, que seria la edad del hijo; cuyas dos cantidades son tales que

$$40 + 20 = 60 \text{ y } 40 - 20 = 20.$$

155 2.<sup>a</sup> Hallar tres números tales, que si del duplo del primero se quitan los dos tercios de los otros dos, resulte 56; si del triplo del segundo se quitan los  $\frac{5}{7}$  de los otros dos, resulte 48; y si del séptuplo del tercero se quitan las tres cuartas partes de los otros dos, resulte 39.

*Res. y Dem.* Sean  $u, x, z$ , los tres números que se piden, y el problema quedará planteado en las tres ecuaciones (A), ó quitando los divisores en las (B).

$$\left. \begin{array}{l} 2u - \frac{2}{3}(x+z) = 56 \\ 3x - \frac{5}{7}(u+z) = 48 \\ 7z - \frac{3}{4}(x+u) = 39 \end{array} \right\} (A) \quad \left\{ \begin{array}{l} 6u - 2x - 2z = 168 \\ 51x - 5u - 5z = 316 \\ 28z - 3x - 3u = 156 \end{array} \right\} (B)$$

Determinando  $x$  en la primera de las (B), se tiene

$$x = \frac{1}{2}(6u - 2z - 168) = 3u - z - 84;$$

sustituyendo su valor en las otras dos, resulta

$$\left. \begin{array}{l} 51(3u - z - 84) - 5u - 5z = 316 \\ 28z - 3(3u - z - 84) - 3u = 156 \end{array} \right\}$$

ó efectuando las operaciones tendremos

$$\left. \begin{array}{l} 153u - 51z - 4284 - 5u - 5z = 316 \\ 28z - 9u + 3z + 252 - 3u = 156 \end{array} \right\}$$

que reduciendo y trasladando sale

$$\left. \begin{array}{l} 148u - 56z = 316 + 4284 = 5100 \\ 31z - 12u = 156 - 252 = -96 \end{array} \right\}$$

ó dividiendo la primera de estas dos por 4, resultará

$$\left\{ \begin{array}{l} 37u - 14z = 1275 \\ 31z - 12u = -96. \end{array} \right.$$

Despejando  $z$  en la 1.<sup>a</sup> da  $z = \frac{1}{14}(37u - 1275)$ , cuyo valor sustituido en la segunda da

$31 \times \frac{1}{14}(37u - 1275) - 12u = -96$ ;  
quitando el divisor será

$$31(37u - 1275) - 168u = -1344;$$



haciendo la multiplicacion indicada tendrémós

$$1147u - 39525 - 168u = -1344;$$

reduciendo y trasladando resultará

$$979u = -1344 + 39525 = 38181;$$

y despejando  $u$ , da  $u = \frac{38181}{979} = 39$ .

Poniendo este valor de  $u$  en el de  $z$  resulta

$$z = \frac{1}{14}(37u - 1275) = \frac{1}{14}(37 \times 39 - 1275) = \\ \frac{1}{14}(1443 - 1275) = \frac{1}{14} \times 168 = 12;$$

y sustituyendo estos valores en el de  $x$ , darán

$$x = 3u - z - 84 = 3 \times 39 - 12 - 84 = 117 - 96 = 21.$$

Por consiguiente los tres números pedidos son 39, 21 y 12; los cuales satisfacen á las condiciones del problema, como cualquiera puede comprobar.

156 Las cuestiones suelen venir propuestas con adornos, como puede verse en estos dos ejemplos.

1.º Supónese una sala adornada con tres estatuas, de Juno, Júpiter y Febo, tales que las dos primeras pesan veinte minas (ó arrobas), y la tercera que pesa seis, es igual á la cuarta parte de la primera, mas la tercera parte de la segunda; se quiere saber cuánto pesa cada una, y se propone la cuestion en estos términos.

Juno y Júpiter pesan veinte minas;  
Un cuarto del primero y un tercio del segundo  
Componen al Dios Febo,  
Que pesa seis, Lucero  
De la aurora serás si me adivinas  
Lo que pesa cada uno,  
Juno sin Júpiter, Júpiter sin Juno.

*Res. y Dem.* Llamando  $x$  las minas que pesa Juno, Júpiter pesará  $20 - x$  (pues entre los dos pesan 20); y como  $\frac{1}{4}$  de Juno y  $\frac{1}{3}$  de Júpiter componen seis, el problema estará planteado en esta ecuacion

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}(20 - x) = 6$ , de donde (150) sale  $x = 8$ , peso de Juno; el de Júpiter será 12; y la cuestion queda resuelta.

2.º Supónese un Leon de bronce, que arroja agua



por los ojos, por un pie y por la boca, y se sabe el tiempo en que cada caño solo llena el pilon de la fuente; se trata de saber el tiempo en que le llenarán corriendo todos á la vez, y la cuestion se propone en estos términos.

El que fulminó incendios en el Cielo,  
 Y si me abrasa el Sol, abraso el mundo,  
 Hoy en la tierra convertido en hielo,  
 Por ojos, pies y boca, me difundo,  
 Y con néctar divino  
 Refresco al fatigado peregrino.  
 Este pilon de mármol esculpido,  
 Que en pocos dias ha sido fabricado,  
 En dos el primer ojo le ha llovido;  
 Pero en tres el segundo le ha llorado;  
 En cuatro el pie le toca,  
 Y le escupo en seis horas por la boca.  
 Esto hace un caño solo,  
 ¿Y todos juntos? Lo defina Apolo.  
 ¿Y combinados? Tú lo has de hacer solo.

*Res. y Dem.* Sea  $t$  el tiempo que han de correr todos los caños á la vez, para llenar el pilon, que llamaremos  $p$ ; y tendrémos que el primer ojo que llena el pilon en 2 dias, en 1 llenará.....  $\frac{1}{2}p$ ;  
 el segundo ojo que le llenaba en 3 dias, }  $\frac{1}{3}p$ ;  
 en 1 llenará..... }  
 el pie que le llenaba en 4 dias, en 1 llenará..  $\frac{1}{4}p$ ;  
 la boca que le llenaba en 6 horas ó  $\frac{1}{4}$  de }  $4p$ ;  
 dia, en 1 día llenará..... }  
 ahora, sabiendo ya lo que cada caño llena en un dia, se sigue que corriendo el tiempo  $t$  todos juntos, arrojarán una cantidad de agua espresada por lo que cada uno arroja en un dia multiplicado por el tiempo; esto es, el primer ojo, en  $t$  dias ó tiempo, arrojará  $\frac{1}{2}pt$ ; el segundo,  $\frac{1}{3}pt$ ; el pie,  $\frac{1}{4}pt$ ; y la boca  $4pt$ ; y como toda el agua que han de arrojar en el tiempo  $t$ , se quiere que sólo sea la del pilon  $p$ , se tendrá la ecuacion  $\frac{1}{2}pt + \frac{1}{3}pt + \frac{1}{4}pt + 4pt = p$ ;



que dividiéndola toda por  $p$ , será  $\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}t + 4t = 1$ ; y multiplicándola toda por 12, se convertirá en

$$6t + 4t + 3t + 48t = 12, \text{ ó } 61t = 12;$$

de donde sale  $t = \frac{12}{61}$  de día = (§ 83) 4 horas, 43 minutos y 16.7 segundos.

*Esc.* El último renglon da oríjen á diez soluciones mas, que corresponden á averiguar el tiempo que tardarán los dos ojos solos, el primer ojo y el pie &c. como se ve en las respuestas siguientes.

1.<sup>a</sup> Los dos ojos le llenarán en 1 día, 4 horas y 48 minutos.

2.<sup>a</sup> El primer ojo y el pie le llenarán en 1 día y 8 horas.

3.<sup>a</sup> El primer ojo y la boca le llenarán en 5 horas y 20 minutos.

4.<sup>a</sup> El segundo ojo y el pie le llenarán en 1 día, 17 horas, 8 minutos, 34,3 segundos.

5.<sup>a</sup> El segundo ojo y la boca le llenarán en 5 horas, 32 minutos, 18,5 segundos.

6.<sup>a</sup> El pie y la boca le llenarán en 5 horas, 38 minutos, 49,4 segundos.

7.<sup>a</sup> Los dos ojos y el pie le llenarán en 22 horas, 9 minutos, 13,3 segundos.

8.<sup>a</sup> Los dos ojos y la boca le llenarán en 4 horas, 57 minutos, 55,9 segundos.

9.<sup>a</sup> El primer ojo, el pie y la boca, le llenarán en 5 horas, 3 minutos, 9,5 segundos.

10.<sup>a</sup> El segundo ojo, el pie y la boca, le llenarán en 5 horas, 14 minutos, 10,9 segundos.

*De la elevacion al cuadrado de los polinomios, y estraccion de la raiz cuadrada de las cantidades numéricas.*

157 Queda dicho (127) que *cuadrado* es el producto de una cantidad por ella misma; así, multiplicando  $a+b$  por  $a+b$ , se tendrá el cuadrado de  $a+b$ , como se ve en la página siguiente:



$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$  (A)  
 que quiere decir que el cuadrado de una cantidad que se compone de dos partes, consta de tres, á saber: *de cuadrado de primera parte* (esto es lo que dice  $a^2$ ); *de duplo de primera por segunda* (esto es lo que dice  $2ab$ ); y *de cuadrado de segunda* (que es lo que espresa  $b^2$ ).

Toda espresion que como la anterior suministra una regla práctica, se llama *fórmula*; de manera que *fórmula es una espresion analítica en que está cifrado el modo de ejecutar una operacion, ó alguna propiedad de una cantidad.*

Si la segunda parte del binomio tuviera el signo negativo —, resultaria

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ,  
 y sólo habria que enmendar en la regla, el decir *ménos el duplo de primera por segunda*; de modo que reuniendo los dos resultados, será

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

158 Esto supuesto, la fórmula

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

sirve para elevar al cuadrado cualquier polinomio tal como  $a+b+c+d$ ; donde observaré que tomando por primera parte la  $a$ , y lo demas por segunda, el cuadrado se compondrá de las tres partes que acabamos de decir. El formar el cuadrado de  $a$  y tomar el duplo de  $a$  ó  $2a$  por lo que sigue, nada tiene que hacer; despues, para formar el cuadrado de la segunda  $b+c+d$ , se tomará  $b$  por primera parte y lo demas por segunda &c. &c., y continuando la misma observacion, establecerémos la siguiente regla para elevar al cuadrado un polinomio: *cuádrese el primer término; multiplíquese el duplo del primer término por todos los que siguen; cuádrese despues el segundo; multiplíquese su duplo por todos los que le siguen; cuádrese el tercero, y continúese lo mismo hasta cuadrar el último término.* Así, aplicándola al polinomio dicho tendré  $(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$  (B).



159 Los cuadrados de los números dígitos están en la tabla de multiplicar, pues  $1^2=1\times 1=1$ ;

$$2^2=2\times 2=4; \quad 3^2=3\times 3=9; \quad 4^2=4\times 4=16;$$

$$5^2=5\times 5=25; \quad 6^2=6\times 6=36; \quad 7^2=7\times 7=49;$$

$$8^2=8\times 8=64; \quad 9^2=9\times 9=81.$$

Estos es necesario saberlos de memoria, para encontrar sus raíces y las de los números intermedios; de modo que los principiantes se deben familiarizar mucho con este lenguaje: *la raíz de 25 es 5 y no sobra nada; la raíz de 38 es 6 y sobran 2; &c.*

Ahora, si el número es compuesto, se descompondrá siempre en decenas y unidades; así, si quiero elevar 38 al cuadrado, le descompondré en dichas partes, y será  $38=30+8$ ;

y suponiendo  $30=a$  y  $8=b$ , tendré por medio de la fórmula (A) que  $38^2=(30+8)^2=30^2+2\times 30\times 8+8^2=900+480+64=1444$ ;

donde advierto que el cuadrado de todo número que se compone de decenas y unidades, consta de tres partes: *de cuadrado de decenas, de duplo de decenas por unidades, y de cuadrado de unidades.*

160 Formemos ahora los cuadrados siguientes.

$$\left. \begin{array}{l} 1^2=1 \\ 9^2=81 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 10^2=100 \\ 99^2=9801 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 100^2=10000 \\ 999^2=998001 \end{array} \right\} \&c.$$

Y observando las cifras que tienen los números y sus cuadrados, veo que el menor número 1 de una cifra tiene una en su cuadrado, y el mayor 9 tiene dos; el menor número 10 de dos cifras tiene tres en su cuadrado 100, y el mayor 99 tiene cuatro; y en general *todo número de n cifras tiene en su cuadrado lo mas el duplo ó  $2n$ , y lo ménos el duplo ménos una ó  $2n-1$ .*

161 Recíprocamente, todo número de una ó dos cifras tiene su raíz espresada por una; todo número de tres á cuatro cifras tiene dos en su raíz; y en general *todo número de un número par  $2n$  de cifras tiene en su raíz la mitad  $n$ ; y todo número de un número impar  $2n-1$  de cifras, tiene en su raíz la mitad y  $\frac{1}{2}$  mas, esto es,  $\frac{1}{2}(2n-1)+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=n$ .*



162 Aplicando la fórmula (B) al número 678, será  $a=600$ ,  $b=70$ ,  $c=8$ , y  $d=0$ , y

$$678^2 = (600+70+8)^2 = 600^2 + 2 \times 600 \times 70 + 2 \times 600 \times 8 + 70^2 + 2 \times 70 \times 8 + 8^2 = 360000 + 84000 + 9600 + 4900 + 1120 + 64 = 459684;$$

donde observo que el cuadrado de las centenas espresa decenas de millar; el duplo de centenas por decenas espresa millares, &c; luego para proceder del cuadrado á la raiz, hemos de buscar cada parte del cuadrado en el lugar que le corresponde. Así, se establecerá por regla.

*Divídase el número propuesto en periodos de á dos guarismos, empezando por la derecha, y no le hace que el último periodo contenga sólo un guarismo; á su derecha se colocan las rayas de dividir; se halla la raiz del periodo de la izquierda, y se pone en las rayas; esta raiz se cuadra, y el cuadrado se resta de dicho periodo; al lado de la resta se baja el periodo siguiente, y se separa con una coma el guarismo de la derecha; lo que queda á la izquierda de la coma se divide por el duplo de la raiz hallada (que se coloca debajo de lo separado con la coma); el cociente que resulta se pone en la raiz á la derecha del guarismo anterior, y al lado del duplo de la raiz que sirvió de divisor; se multiplica el divisor junto con el cociente, por el mismo cociente, y el producto se resta de lo que tiene encima, esto es, del residuo anterior, junto con el periodo que se le añadió; al lado de la resta que resulte, se baja el periodo siguiente, y se separa el guarismo de la derecha; lo que queda á la izquierda se divide por el duplo de toda la raiz hallada; y así se continúa hasta que no haya mas periodos que bajar; en cuyo caso, si la última resta es cero, el número tiene raiz exacta; y sino, es señal de que no la tiene. Para aproximarla por decimales se añadirán á la resta dos ceros, los que se considerarán como si fuese un periodo; esto es, se separará uno, se dividirá lo que quede á la izquierda por el duplo de toda la raiz hallada, el co-*



*iente se pondrá en la raiz despues de la coma; y luego se continuará todo lo que se quiera, añadiendo dos ceros por cada guarismo que se intente sacar.*

V. g. si quiero estraer la raiz cuadrada de 459684, le dividiré en periodos de á dos guarismos cada uno, y tiraré las rayas como aquí se ve:

Luego, veré que la raiz de 45 es 6, que pongo en las rayas, y su cuadrado 36 debajo del 45; tiro una raya y resto, lo que da 9. Al lado de la resta 9 bajo el siguiente periodo 96; separo el guarismo de la derecha con una coma, y lo que queda á la izquierda que es 99, lo divido por 12, duplo de la raiz hallada, que pongo debajo del 99, esto es, debajo de lo

$$\begin{array}{r|l}
 45,96,84 & 678 \\
 \underline{36} & \\
 099,6 & \\
 127 & \\
 \underline{\phantom{0000}} & \\
 1078,4 & \\
 1348 & \\
 \underline{\phantom{0000}} & \\
 0000 & 
 \end{array}$$

separado con la coma; el cociente 7 de dividir 99 por 12, le pongo en la raiz á la derecha del 6, y tambien al lado del 12; multiplico el 127 por el cociente 7, y voy restando el producto de lo que tiene encima, diciendo: 7 por 7 son 49, de 49 á 56 van 7 y llevo 5; 7 por 2 son 14, y 5 que llevaba son 19, de 19 á 19 va cero y llevo 1; 7 por 1 es 7, y 1 que llevaba son 8, de 8 á 9 va 1 que pongo. Al lado de la resta 107, bajo el periodo siguiente 84, separo el guarismo 4, y lo que queda á la izquierda lo divido por el duplo de toda la raiz hallada que es 134; el cociente 8 de dividir 1078 por 134, le pongo en los parajes dichos; y hecha la multiplicacion del 1348 por 8, y restando al mismo tiempo, nos sale 0; de consiguiente la raiz exacta del número propuesto es 678.

*Esc.* Al dividir lo separado á la izquierda de la coma por el duplo de la raiz hallada, se debe tener presente: *que nunca se puede poner mas de á 9 en la raiz; y si lo que está á la izquierda es menor que el duplo de la raiz, se pondrá 0 en ella y se bajará el periodo siguiente.* Tambien suele ocurrir el que se



ponga en la raíz mas de lo que corresponde: lo que se conoce si al ejecutar la multiplicacion y resta, no se puede hacer esta última.

163 Si en la fórmula (A) hacemos  $b=1$ , se tendrá

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a \times 1 + 1^2 = a^2 + 2a + 1;$$

y como el primer término  $a^2$  es el cuadrado de  $a$ , resulta que los cuadrados de dos números  $a$  y  $a+1$  que se diferencian en una unidad, se diferencian en el duplo del menor  $a$  mas la unidad, (esto es, en  $2a+1$ ). Esta proposicion sirve para comprobar las restas que resulten al estraer las raices, pues siempre pueden llegar á ser hasta el duplo de la raíz hallada; pero en llegando á ser el duplo mas uno, deberá tener la raíz una unidad mas de lo que se le haya puesto.

164 Para estraer la raíz cuadrada de 1715037, le dividiré en periodos, y ejecutaré la operacion como aquí se presenta.

Donde advierto que como al sacar el tercer guarismo sale 0, el producto del 260 por cero debe ser cero; y así, la resta será el 250, al lado de la cual bajo el periodo siguiente 37; y como al fin me sale una resta 1556, infiero que el número propuesto no tiene raíz exacta, y diré que su raíz es 1309 y algo mas.

Si quiero aproximarla por decimales, pondré coma en la raíz, añadiré á la resta 1556 dos ceros por cada guarismo decimal que quiera sacar, y consideraré cada dos ceros, como si fuese un periodo, (cuya práctica está fundada en que si la raíz tuviese un guarismo decimal, su cuadrado tendrá dos, uno por cada vez

$$\begin{array}{r|l}
 1,7150,37 & 1309,594 \\
 \hline
 07,1 & \\
 23 & \\
 \hline
 025,0 & \\
 260 & \\
 \hline
 2503,7 & \\
 2609 & \\
 \hline
 015560,0 & \\
 26185 & \\
 \hline
 0246750,0 & \\
 261909 & \\
 \hline
 01103190,0 & \\
 2619184 & \\
 \hline
 00555164 &
 \end{array}$$



que es factor), y aproximándola hasta milésimas tendré la raíz 1309,594.

Si el número consta de enteros y decimales, ó de decimales solas, se hará que el número de guarismos decimales sea par, añadiendo un cero si fuese impar. V. g. si quiero estraer la raíz cuadrada de 0,9, añadiré un cero, y despues de haber puesto el cero y coma en las rayas, como aquí se presenta:

veré que la raíz de 90 es 9 que pongo en la raíz, resto su cuadrado 81, y añado á la resta 9 dos ceros; y continúo hasta sacar los guarismos que desee, que supongo que son tres, y tendré que la raíz de 0,9 es 0,948.

$$\begin{array}{r|l}
 0,90 & 0,948 \\
 90,0 & \hline
 184 & \\
 \hline
 1640,0 & \\
 1888 & \\
 \hline
 1296 & 
 \end{array}$$

165 Dejamos dicho (128) cómo se forman las potencias, y (129) cómo se estraen las raíces de los quebrados; pero cuando son numéricos, suele ser mas sencillo el convertirlos en decimales, y luego hacer con ellos las operaciones que se quieran. Así, si quiero estraer la raíz de  $\frac{5}{7}$ , tendré por el primer método

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{2,236}{2,645} = 0,845;$$

pero es mas sencillo de este modo

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{0,714285} = 0,845,$$

como se puede comprobar.

*De la formacion de las potencias en general.*

166 Hemos dicho (127) lo que se entiende por potencia en general; y hemos dado las reglas para formar las de los monomios. Para formar las de los binomios, y deducir una regla general, sea  $a+b$  el binomio cuyas potencias se quieren formar: que yéndole multiplicando por sí mismo, y reduciendo dará las potencias siguientes.



$$1.^a (a+b)^1 = a + b$$

$$2.^a (a+b)^2 = a^2 + 2a b + b^2$$

$$3.^a (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$4.^a (a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4$$

$$5.^a (a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Donde se observa (5.<sup>a</sup> por ejemplo) que la primera parte  $a$  del binomio, se halla en todos los términos ménos el último, que su esponente en el primero es el mismo 5 de la potencia, y va menguando una unidad en cada uno hasta no encontrarse en el último; que la segunda parte  $b$  del binomio no se halla en el primer término; en el segundo tiene la unidad por esponente, y va aumentándola en cada término hasta que en el último tiene el mismo esponente 5 de la potencia.

Luego en punto á letras y esponentes está conocida la ley que siguen. Veamos los coeficientes: el 5 del segundo término es el esponente de la potencia;

el coeficiente 10 del tercero es lo mismo que  $\frac{5 \times 4}{2}$ ;

pero 5 es el coeficiente del segundo término, 4 el esponente que lleva en él la primera parte, y 2 divisor, es lo mismo que el número de términos que hay ántes del tercero que se busca. Esto mismo se verifica en los demas; luego para hallar el coeficiente de un término cualquiera, se multiplicará el del término anterior por el esponente que en él lleve la primera parte, y el producto se partirá por el número de términos que anteceden al que se busca.

Si la segunda parte  $b$  del binomio fuese negativa, variarian de signo los términos en que se hallase  $b$  con esponente ímpar, que son los que ocupan lugares pares en la potencia; por lo que seria — el signo del segundo término, + el del tercero, — el del cuarto, y así alternativamente.

*Esc.* Todos estos resultados puestos en regla darían á conocer las partes de que se compone cada potencia; y contrayéndolos á números descompuestos en decenas y unidades, darían igualmente á conocer



las partes de que se componian sus potencias, y qué especie de unidades espresaba cada una de dichas partes, para poder proceder de la potencia á la raiz, y deducir una regla para estraer raices de un grado cualquiera. Pero como desde la raiz cúbica en adelante son muy complicadas las operaciones, y por otra parte hay medios sencillos de ejecutarlo, lo reservamos para otro lugar.

*De las ecuaciones determinadas de segundo grado.*

167 Queda dicho (143) lo que se entiende por ecuacion de segundo grado, y quedan resueltas (151) las puras. Para resolver las mistas, es necesario manifestar que *toda ecuacion mista de segundo grado ha de constar de tres términos*: uno en que se halle la incógnita elevada al cuadrado, otro en que se halle elevada á la primera potencia, y otro donde no se halle incógnita; de modo que la espresion general de las ecuaciones de segundo grado será

$$ax^2+bx=c, \text{ ó } ax^2+bx-c=0 \text{ (A).}$$

No puede haber mas términos, porque no puede hallarse ninguno con la incógnita elevada á la tercera potencia, ni á ninguna otra superior; si hubiese muchos términos donde se hallase  $x^2$  ó la  $x$ , se reducirian todos á uno encerrando en un paréntesis todo lo que las multiplicase; y todos los términos donde no se hallase la  $x$  se podrian considerar como uno solo.

Tampoco puede tener ménos términos; porque si faltase el  $ax^2$  no seria de segundo grado; si faltase el  $bx$  no seria mista; y si faltase el término constante  $c$ , quedaria reducida á  $ax^2+bx=0$ , que dividiendo por  $x$  se convertirá en  $ax+b=0$ , que es de primer grado.

Ahora, dividiendo por  $a$ , la ecuacion (A) se con-

$$\text{vertirá en } x^2+\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}=0;$$

$$\text{y haciendo } \frac{b}{a}=p, \text{ y } -\frac{c}{a}=q, \text{ será } x^2+px+q=0 \text{ (B),}$$



que será la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado; cuando la ecuacion está bájo esta forma, se dice que está *preparada*. Para esto se requiere que se haya reducido la ecuacion á solos tres términos; que se halle sin coeficiente el primer término, que es donde la incógnita está elevada al cuadrado, (lo que se consigue dividiendo toda la ecuacion por el coeficiente que tenga dicho término); y que además dicho primer término tenga el signo positivo, lo que se conseguirá mudando los signos á toda la ecuacion (147 cor.) en caso de no tenerle.

168 Puesto que como acabamos de ver

$$x^2+px+q=0 \text{ ó } x^2+px=-q,$$

es la forma general de las ecuaciones de 2.<sup>o</sup> grado, en resolviendo esta, se tendrá la regla para las demas.

Para esto advertimos que esta ecuacion quedaria resuelta, si el primer miembro fuese un cuadrado exacto, porque estrayendo la raiz cuadrada, tendríamos la  $x$  elevada sólo á la primera potencia; pero comparando el primer miembro con la expresion  $x^2+2ax+a^2$  del cuadrado de  $x+a$ , vemos que le falta el tercer término del cuadrado; luego considerando á  $x$  como primera parte,  $x$  será su cuadrado,  $px$  el duplo de primera por segunda; y como  $x$  es la primera,  $p$  será el duplo de la segunda, y por lo mismo su mitad  $\frac{1}{2}p$  será igual á dicha segunda parte; luego si á ambos miembros añadimos  $\frac{1}{4}p^2$ , que es el cuadrado de dicha mitad, la ecuacion no se alterará, y el primer miembro será cuadrado perfecto; luego se tendrá

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2-q;$$

que estrayendo la raiz cuadrada da

$$x+\frac{1}{2}p=\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}, \text{ y } x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q} \text{ (C).}$$

Este resultado comparado con la ecuacion (B, 167) da la siguiente regla.

Para resolver una ecuacion de 2.<sup>o</sup> grado que ya está preparada, póngase desde luego la incógnita; luego el signo =; despues de este signo la mitad del coeficiente del segundo término con un signo contrario al



que lleve; despues el signo de ambigüedad  $\pm$ ; luego un radical de segundo grado; debajo de este radical, el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, siempre con el signo positivo; y despues el tercer término de la ecuacion con el mismo signo que tenga en el segundo miembro, ó con un signo opuesto al que tenga en el primero.

Sacando los dos valores que da el signo  $\pm$  de la ecuacion (C) se tiene

$$x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}, \text{ y } x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

Estos dos valores no pueden ser iguales, á ménos que  $p$  no sea cero; porque entónces el primero será

$$x = \sqrt{-q}, \text{ y el segundo } x = -\sqrt{-q},$$

que sólo se diferencian en el signo. Pero cuando  $p=0$ , la ecuacion (B) es pura; luego para que los dos valores que da una ecuacion de segundo grado sean iguales, aunque de signo contrario, es preciso que dicha ecuacion sea pura, ó que el coeficiente del segundo término sea cero.

*Esc.* Toda ecuacion de segundo grado da dos valores para la incógnita, ó ha de ser imaginaria; por analogía se deduce, que si fuera de tercer grado tendria tres valores &c. y en general toda ecuacion, y por consiguiente todo radical, de un grado cualquiera, da para la incógnita tantos valores como unidades tiene el esponente que da nombre á la ecuacion ó al radical.

169 Propongámonos resolver algunas cuestiones.

1.<sup>a</sup> Dos correos A y B, salen al mismo tiempo al encuentro uno de otro, de dos ciudades distantes entre sí 320 leguas; A anda cada dia 8 leguas mas que B, y el número de dias que tardan en encontrarse es la mitad de las leguas que anda B al dia; cuántos dias tardarán en encontrarse?

*Res. y Dem.* Sea  $x$  el número de dias que se piden; con lo cual  $2x$  serán las leguas que B anda al dia; y el total de leguas que habrá andado B hasta encontrar á A, será  $2x \times x = 2x^2$ .

Siendo  $2x$  lo que anda B, A que anda 8 leguas

I

T. I.



mas, andará  $2x+8$ , y el total hasta encontrarse será el producto de lo que anda en un dia, que es  $2x+8$ , por los dias que está caminando que son  $x$ , esto es

$$(2x+8)x=2x^2+8x.$$

Y como lo que anduvieron los dos es toda la distancia de las dos ciudades, se tendrá planteado el problema en esta ecuacion

$$2x^2+8x+2x^2=320, \text{ ó } 4x^2+8x=320;$$

y dividiendo por 4 será  $x^2+2x=80$ ,

que da  $x=-1 \pm \sqrt{1+80}=-1 \pm \sqrt{81}=-1 \pm 9$ ;

de donde sale  $x=-1+9=8$ , ó  $x=-1-9=-10$ ,

por consiguiente se encontraron al cabo de ocho dias; B andaba 16 leguas diarias, y A andaba 24; el total de A hasta encontrarse, será  $24 \times 8=192$ , y el de B será  $16 \times 8=128$ , que entre las dos componen las 320. El valor  $x=-10$  satisface á la ecuacion  $4x^2+8x=320$ , pues la convierte en

$$4 \times (-10)^2 + 8 \times -10 = 4 \times 100 - 80 = 320;$$

más no al sentido en que viene propuesta la cuestion.

2.<sup>a</sup> *Dividir el número 14 en dos partes cuyo producto sea 54.*

*Res. y Dem.* Sea  $x$  la mayor, con lo que la menor será  $14-x$ ; y la cuestion quedará planteada en esta ecuacion  $x(14-x)=54$  ó  $14x-x^2=54$  ó

$x^2-14x=-54$ , que da  $x=7 \pm \sqrt{49-54}=7 \pm \sqrt{-5}$ .

170 Este resultado imaginario manifiesta que la cuestion es imposible; y como generalmente al enunciar un problema, ó al proponerse uno una investigacion cualquiera, no se conocen todas las relaciones de los datos con el resultado, la imposibilidad de este manifiesta que la proposicion enunciada está en contradiccion con alguna verdad demostrada; y hé aquí la utilidad de las imaginarias.

En efecto, en el problema propuesto, se pide que el producto de las dos partes del número 14 sea 54, que es mayor que el cuadrado 49 de la mitad de 14; pero el producto máximo de un número descompuesto en dos partes, es el cuadrado de su mitad; luego pe-



dir un producto mayor, es pedir un imposible.

Para demostrarlo, sea  $2a$  la cantidad que se ha de descomponer en dos partes, con la condicion de que su producto sea el máximo posible; si llamamos  $2x$  la diferencia de dichas dos partes, estas (154) serán  $a+x$  y  $a-x$ , y su producto  $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ , el cual nunca será mayor que cuando  $x=0$ ; pues entonces no habrá que restar nada del cuadrado  $a^2$ ; pero si  $x$  es 0, cada parte de la cantidad  $2a$  se convierte en  $a$  que es su mitad; luego resulta la proposicion.

*De las razones y proporciones.*

171 Se llama *razon* la comparacion de dos cantidades; la cantidad que se compara se llama *antecedente*; aquella con que se compara, *consecuente*; los dos juntos se llaman *términos de la razon*; y lo que resulta se llama *esponente de la razon* ó simplemente *razon*. Si el antecedente es igual al consecuente, se llama *razon de igualdad*; si el antecedente es mayor que el consecuente, se llama *de mayor desigualdad*; y si menor, *de menor desigualdad*.

Con dos miras diferentes se pueden comparar dos cantidades: ó para averiguar la diferencia que hay entre ellas, que se llama *razon aritmética*, ó para averiguar las veces que la una contiene á la otra, que se llama *razon geométrica*.

La razon aritmética se señala poniendo el antecedente, despues un punto, y luego el consecuente; la geométrica poniendo dos puntos entre el antecedente y el consecuente. V. g. la razon aritmética entre 7 y 3, se escribe 7.3, y se lee: 7 es aritméticamente á 3; la razon geométrica entre 12 y 4 se señala 12:4, y se lee 12 es geométricamente á 4; ó por ser estas razones las que ocurren con mas frecuencia, se leen omitiendo la palabra *geométricamente* de este modo; 12 es á 4.

Para hallar la razon aritmética se resta el consecuente del antecedente; v. g. la de 7 á 3 será  $7-3=4$ . Para hallar la geométrica se divide el antecedente por



el consecuente; v. g. la de 12 á 4 será  $12:4$  ó  $\frac{12}{4}=3$ . Donde observamos que aunque con distinto lenguaje, volvemos á las operaciones de restar y dividir; y que el punto puesto entre los términos de la razon aritmética equivale al signo  $-$  de la operacion de restar.

Cor. De esto y de lo dicho (61, 2.º y 4.º) se sigue que á una razon aritmética le sucede lo mismo que al antecedente, y lo contrario que al consecuente; y por lo mismo si se tienen dos razones con un mismo antecedente, aquella será mayor que tenga menor consecuente, y viceversa; y si tienen un mismo consecuente, aquella será mayor ó menor, que tenga mayor ó menor antecedente; y una razon aritmética no se altera aunque á sus dos términos se les añada ó quite una misma cantidad. A la geométrica le sucede lo mismo; y no se alterará aun cuando se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad.

172 Cuando de dos razones de una misma especie, la una tiene por antecedente lo que la otra por consecuente, se dice que la una es *inversa* de la otra; así,  $3.7$  es inversa de la  $7.3$ ; y en efecto se tiene  $3-7=-4$ , que es lo contrario de  $7-3=4$ .

Tambien  $4:12$  es razon geométrica inversa de la  $12:4$ ; pues  $4:12=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ , es lo contrario de  $12:4=\frac{12}{4}=3=\frac{3}{1}$ .

173 *Proporcion* es la igualdad de dos razones de una misma especie; así, *proporcion aritmética* es la igualdad de dos razones aritméticas; y *proporcion geométrica* la igualdad de dos razones geométricas.

Para escribir una porporcion aritmética se pone una razon á continuacion de otra, separándolas con dos puntos; y para escribir una geométrica se ponen cuatro puntos entre las dos razones. Para leerlas se lee cada razon separadamente, y cuando se llega á los dos puntos en la aritmética, ó á los cuatro en la geométrica, se lee *como*. En toda proporcion entran cuatro términos, de los cuales el primero y tercero se llaman *antecedentes*, y el segundo y cuarto *consecuentes*; el primero y cuarto *estremos*, y el segundo y tercero *medios*.



174 Para escribir proporciones aritméticas con facilidad, se pondrán dos cantidades cualesquiera, separadas entre sí con un punto, para que formen la primera razon; despues se pondrán dos puntos, y luego á las dos cantidades primitivas se les añadirá (ó quitará) una misma cantidad; y se pondrán estos dos números despues de los dos puntos, separados entre sí con un punto, los cuales formarán la segunda razon; pues en este caso las dos razones son iguales (171 cor.).

Para formar una proporcion geométrica, se escribirán dos cantidades cualesquiera, separadas con dos puntos, para que formen la primera razon; luego, se pondrán los cuatro puntos, y despues por segunda razon lo que resulte de multiplicar (ó dividir) por una misma cantidad los dos términos de la primera; porque en este caso tambien serán iguales las dos razones (171 cor.).

Así, si quiero escribir una proporcion aritmética, pondré dos cantidades cualesquiera 7 y 5, separadas con un punto; luego, pondré los dos puntos, y añadiré á las anteriores una misma cantidad, v. g. 6, y tendré 7.5:13.11, que leeria diciendo: 7 es aritméticamente á 5 como 13 á 11.

Si quiero escribir una proporcion geométrica, escribiré dos cantidades cualesquiera v. g. 8 y 5, para que formen la primera razon; despues de puestos los cuatro puntos multiplicaré ambas cantidades por otra cualquiera, tal como 3, y tendré la proporcion

$$8:5::24:15,$$

que leeré diciendo: 8 es á 5 como 24 á 15.

175 Cuando los medios de una proporcion son diferentes, como en las anteriores, las proporciones se llaman *discretas*; y cuando son iguales los medios, la proporcion se llama *continua*. Así, para formar una proporcion continua aritmética, se pondrá por tercer término el segundo, y para poner el cuarto se añadirá al tercero lo que el segundo llevaba al primero (ó se le quitará lo que el primero llevaba al segundo), v.g. para escribir una proporcion aritmética continua, pon-



dré por primera razon cualquiera 5.9; despues del 9 pondré los dos puntos, luego el mismo 9, y despues de un punto, lo que resulta de añadir 4 al 9, y tendré la proporcion 5.9:9.13.

La proporcion aritmética continua se escribe de un modo abreviado, poniendo ántes este signo  $\div$ , despues el primer término, luego el medio, y despues el otro extremo separándolos con un punto; de manera que la anterior se escribe  $\div 5.9.13$ .

Donde el signo  $\div$  puesto ántes, da á conocer que se ha de repetir el segundo término, y se lee: 5 es aritméticamente á 9 es á 13.

Para formar una proporcion geométrica continua, se escribirá un número cualquiera, despues se pondrá por segundo término y por tercero un múltiplo cualquiera de este número; y luego para el cuarto se toma el mismo múltiplo del múltiplo anterior. V. g. pondré primero un número cualquiera 5, despues un múltiplo cualquiera de este, tal como 15, y este será el que represente los medios; para hallar el otro extremo, tomaré el mismo múltiplo de 15, esto es, el triplo, y tendré 5:15::15:45 ó  $\div\div 5:15:45$ .

Donde el signo  $\div\div$  puesto ántes, indica que se ha de repetir el 2.<sup>o</sup> término, y se lee: 5 es á 15 es á 45.

176 *En toda proporcion aritmética discreta la suma de los extremos es igual á la de los medios; y al duplo del término medio en la continua.*

*Espl.* Sean las proporciones 10.7:17.14,  $\div 8.11.14$ ; digo que en la primera será  $10+14=7+17$ , y en la segunda  $8+14=2\times 11$ .

*Dem.* 1.<sup>o</sup> Como proporcion es igualdad de razones, la primera dará  $10-7=17-14$ ; y trasladando (147 cor.) las cantidades negativas al miembro opuesto del en que se hallan, será

$$10+14=17+7, \text{ que era L. 1.}^{\circ} \text{ Q. D. D.}$$

2.<sup>o</sup> La segunda proporcion puesta con estension, será 8.11:11.14; que da  $8-11=11-14$ ; y trasladando como ántes, será  $8+14=11+11=2\times 11$ , que era L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.



*Esc.* Sean en general las dos proporciones  $a.b:c.d$  y  $\div a.b.c$ ; y discurrendo del mismo modo que ántes, dará la primera  $a-b=c-d$ , y trasladando (147 cor.) será  $a+d=c+b$  (A).

La segunda nos dará  $a-b=b-c$ , y trasladando será  $a+c=b+b=2b$  (B), que manifiestan la proposicion con toda generalidad.

177 Si en la ecuacion (A)  $a+d=b+c$ , despejamos la  $d$ , se tendrá  $d=b+c-a$ ; que quiere decir, que *dados los tres primeros términos a, b, c, de una proporcion, se hallará el cuarto d sumando el segundo con el tercero, y restando el primero.* Así, dados los tres términos 9, 25 y 32, para hallar el cuarto, que llamaré  $x$ , haré

$$x=25+32-9=48,$$

cuya operacion y proporcion se practican de este modo:  $9.25:32.x=25+32-9=48$ .

*Esc.* Despejando las demas letras se tendrá

$$a=b+c-d, \quad b=a+d-c, \quad c=a+d-b,$$

y cada una dará una regla para hallar el primero, el segundo, el tercero términos, cuando se necesiten.

178 Si en la ecuacion (B)  $a+c=2b$ , despejamos la  $c$ , dará  $c=2b-a$ ;

que quiere decir, que *cuando se quiera hallar un tercer término continuo proporcional aritmético á dos cantidades dadas, del duplo de la segunda se restará la primera.* Así, si quiero hallar un tercero proporcional á 26 y 34, espresándole por  $x$ , será  $x=2 \times 34 - 26 = 42$ , que se ejecuta como aquí se ve:

$$\div 26.34.x=2 \times 34 - 26 = 42.$$

Si en la misma ecuacion despejamos la  $b$ , dará

$$b=\frac{1}{2}(a+c),$$

que quiere decir, que *si dadas dos cantidades se quiere hallar una media proporcional aritmética, de la suma de dichas cantidades se tomará la mitad.* Así, si quiero hallar un medio proporcional entre 27 y 39, llamándole  $x$ , se tendrá  $x=\frac{1}{2}(27+39)=33$ ;

y la proporcion será  $\div 27.33.39$ .

179 *En toda proporcion geométrica discreta el*



producto de los extremos es igual al de los medios; y al cuadrado del término medio en la continua.

*Espl.* Sean las proporciones

$$8:3::24:9, \div\div 6:18:54;$$

voy á demostrar que  $8 \times 9 = 3 \times 24$ , y que  $6 \times 54 = 18^2$ ; ó en general, si  $a:b::c:d$ , y  $\div\div a:b:c$ , será  $ad=bc$ , y  $ac=b^2$ .

*Dem.* Como proporción es igualdad de razones,

la primera dará  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ,

y trasladando los divisores (150 cor.), será  $ad=bc$  (A), que era L. 1.º Q. D. D.

2.º La segunda proporción, puesta con estension,

será  $a:b::b:c$ ; que da  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ,

y quitando los divisores, será  $ac=bb=b^2$  (B).

180 Recíprocamente, si cuatro cantidades son tales que el producto de dos de ellas sea igual al producto de las otras dos, con dichas cantidades se podrán formar ocho proporciones diferentes, poniendo por extremos las dos que formen un producto, y por medios las dos que formen el otro producto.

*Espl.* Sean  $a, b, c, d$ , tales cantidades que  $ad=bc$ ; voy á demostrar que se pueden sacar las ocho proporciones siguientes (A).

*Dem.* Si en la ecuación  $ad=bc$ , trasladamos (150 cor.) la  $d$  y la  $b$  al

otro miembro, se tendrá  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ,

que puesta en proporción dará  $a:b::c:d$  (1.ª).

Si en la misma ecuación trasla-

damos la  $d$  y la  $c$ , será  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ,

que da  $a:c::b:d$  (2.ª).

|            |       |
|------------|-------|
| (A)        |       |
| $a:b::c:d$ | (1.ª) |
| $a:c::b:d$ | (2.ª) |
| $d:b::c:a$ | (3.ª) |
| $d:c::b:a$ | (4.ª) |
| $c:d::a:b$ | (5.ª) |
| $c:a::d:b$ | (6.ª) |
| $b:a::d:c$ | (7.ª) |
| $b:d::a:c$ | (8.ª) |



Si trasladamos la  $a$  y la  $b$ , resultará  $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ ,

que da  $d:b::c:a$  (3.<sup>a</sup>)

Si trasladamos la  $a$  y la  $c$ , será  $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ ,

que da  $d:c::b:a$  (4.<sup>a</sup>).

Como es lo mismo  $ad=bc$  que  $bc=ad$ , trasladan-

do en esta la  $b$  y la  $d$ , será  $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$  que da  $c:d::a:b$  (5.<sup>a</sup>).

Trasladando la  $b$  y la  $a$ , será  $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ ,

que da  $c:a::d:b$  (6.<sup>a</sup>).

Trasladando la  $c$  y la  $a$ , será  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ,

que da  $b:a::d:c$  (7.<sup>a</sup>).

Y trasladando la  $c$  y la  $d$ , será  $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$ ,

que da  $b:d::a:c$  (8.<sup>a</sup>), que era L. Q. D. D.

*Esc.* Si se quisiesen sacar mas proporciones, saldría alguna de las anteriores; de donde se sigue que *dada una ecuacion se pueden sacar ocho proporciones; ó dada una proporcion se le pueden dar ocho formas diferentes.*

181 Si en la ecuacion (A § 179)  $ad=bc$ , despejamos la  $d$ , se tendrá  $d = \frac{bc}{a}$ ;

que quiere decir, que *dadas tres cantidades, se hallará una cuarta proporcional geométrica, multiplicando la segunda por la tercera, y partiendo el producto por la primera.* Así, si quiero hallar un cuarto proporcional á los números 9, 14 y 27, llamándole  $x$

tendré  $x = \frac{14 \times 27}{9} = 42$ ; cuya operacion se dispone co-



mo aquí se ve:  $9:14::27:x = \frac{14 \times 27}{9} = \frac{378}{9} = 42.$

*Esc.* Despejando los términos  $a, b, c$ , se tendrá

$$a = \frac{bc}{d}, \quad b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b};$$

y cada una dará la regla para hallar el primero, el segundo, ó el tercer término, cuando se necesiten.

182 Si en la ecuacion (B § 179)  $ac = b^2$ , despejamos la  $c$ , dará  $c = \frac{b^2}{a}$ ;

que quiere decir, que para hallar un tercer término continuo proporcional geométrico á dos cantidades dadas, el cuadrado de la segunda se partirá por la primera. Así, si quiero hallar un tercero proporcio-

nal á 16 y 24, llamándole  $x$  será  $x = \frac{24^2}{16} = \frac{576}{16} = 36$ , que se practica como aquí se ve:

$$\div \div 16:24:x = \frac{24^2}{16} = \frac{576}{16} = 36.$$

Si en la misma ecuacion despejamos la  $b$ , será

$$b = \sqrt{ac};$$

que quiere decir, que si dadas dos cantidades se quiere hallar una media proporcional geométrica, del producto de dichas cantidades se extraerá la raíz cuadrada. Así, si quiero hallar un medio proporcional entre 8 y 18, llamándole  $x$ , será

$$x = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = 12;$$

y la proporción será  $\div \div 8:12:18.$

*Esc.* Es digna de notarse la analogía que hay entre las propiedades de las proporciones aritméticas y geométricas; pues las de aquella se convierten en las de esta, sustituyendo *multiplicar* á la voz *sumar*; *dividir* á la *restar*; *cuadrar* á *tomar el duplo*, y *extraer la raíz cuadrada* á *tomar la mitad*.



*De las transformaciones que se pueden dar á una proporcion , sin que deje de subsistir proporcion.*

183 Hemos visto (180) que á la proporcion  
 $a:b::c:d,$

se la pueden dar ocho formas diferentes, y que siempre hay proporcion. Estas y otras varias que vamos á esponer, se llaman *alternar, invertir, componer, dividir, permutar y convertir.*

*Alternar es comparar antecedente con antecedente, y consecuente con consecuente, cuya operacion queda hecha mudando de lugar los medios ó los extremos. Así, la segunda y tercera (180) están alternadas respecto de la primera.*

*Invertir es comparar consecuente con antecedente en cada una de las razones; cuya operacion queda hecha poniendo los medios en lugar de los extremos, y los extremos en lugar de los medios. Así, la (7.<sup>a</sup>) está invertida respecto de la primera.*

Ahora, si se continúa alternando é invirtiendo la primera, se llegarán á tener las ocho que hemos dicho.

Toda proporcion se puede *componer*, que es *comparar la suma de antecedente y consecuente con uno de los dos, en cada una de las razones, esto es, ó con el antecedente ó con el consecuente.*

Sea la proporcion  $a:b::c:d$ ;  
 digo que  $a+b:b::c+d:d$  y  $a+b:a::c+d:c$ .

*Dem.* La proporcion  $a:b::c:d$  da  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ;

añadiendo 1 á ambos miembros será  $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ ;

reduciendo el entero á la especie del quebrado que le

acompaña, se tendrá  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ;

que poniendo en proporcion da  $a+b:b::c+d:d$  (A),  
 que era L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.



Invirtiendo la proporcion dada se tendrá  $b:a::d:e$ ,  
 que da  $\frac{b}{a} = \frac{d}{e}$ ; añadiendo 1 tendríamos  $\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{e} + 1$ ;  
 reduciendo el entero á la especie del quebrado que le  
 acompaña, da  $\frac{b+a}{a} = \frac{d+e}{e}$ , ó  $b+a:a::d+e:e$  (B),  
 que era L. 2.º Q. D. D.

Toda proporcion se puede *dividir*, que es *comparar la diferencia de antecedente y consecuente con uno de los dos, en cada una de las razones*; esto es, ó bien con el antecedente ó bien con el consecuente.

Sea la proporcion  $a:b::c:d$ ; digo que  $a-b:b::c-d:d$ ,  
 y que  $a-b:a::c-d:c$ .

*Dem.* La proporcion  $a:b::c:d$ , da  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ;

quitando 1 de ambos miembros, será  $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ ;  
 reduciendo el entero á la especie del quebrado que le  
 acompaña, dará  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ,

ó formando proporcion  $a-b:b::c-d:d$  (C),  
 que era L. 1.º Q. D. D.

Invirtiendo la dada, se tendrá  $b:a::d:c$ ,  
 que da  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ;

quitando ambos miembros de la unidad, ó restando  
 esta ecuacion de la  $1=1$ , resultará

$$1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c},$$

ó poniendo en proporcion  $a-b:a::c-d:c$  (D),  
 que era L. 2.º Q. D. D.

Permutar es *mudar de lugar las razones*, ó poner



la segunda razon por primera, y la primera por segunda. Así, la quinta está permutada respecto de la primera (§ 180).

Convertir es *invertir una proporcion compuesta ó dividida*; cuando se invierte una compuesta, se llama *convertir componiendo*: y cuando una dividida, *convertir dividiendo*.

Así, invirtiendo la (A) y (B) tendremos

$$b:a+b::d:c+d \text{ (E) y } a:a+b::c:c+d \text{ (F),}$$

que respecto de la primitiva están convertidas componiendo; é invirtiendo las (C) y (D) se tendrá

$$b:a-b::d:c-d \text{ (G) y } a:a-b::c:c-d \text{ (H),}$$

que respecto de la primitiva están convertidas dividiendo.

184 Ahora vamos á demostrar algunas propiedades de las proporciones.

1.<sup>a</sup> *Si los antecedentes de una proporcion son iguales, tambien lo serán los consecuentes; y recíprocamente.*

*Dem.* La proporcion  $a:b::c:d$ , da  $ad=bc$ ; si se supone  $a=c$ , se podrán suprimir, y quedará  $d=b$ ; y suponiendo  $d=b$ , quedaria  $a=c$ , que es L.Q. D. D.

2.<sup>a</sup> *Si dos proporciones tienen una razon comun, con las otras dos razones se podrá formar proporcion.*

*Espl.* Sean las dos proporciones  $a:b::c:d$ , y  $a:b::m:n$ , que tienen comun la razon  $a:b$ ; digo que se tendrá  $c:d::m:n$ .

*Dem.* Igualando las razones en cada proporcion,

$$\text{se tendrá } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ y } \frac{a}{b} = \frac{m}{n};$$

$$\text{y como } \frac{c}{d} \text{ y } \frac{m}{n} \text{ son ambas iguales á } \frac{a}{b},$$

serán (intr. ax. 5.<sup>o</sup>) iguales entre sí, esto es,  $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ ;

que formando proporcion, tendremos  $c:d::m:n$ , que es L. Q. D. D.



*Cor.* De aquí se deduce que si dos proporciones tienen unos mismos antecedentes ó unos mismos consecuentes, se podrá formar proporción con los consecuentes ó antecedentes; porque alternadas tendrían una razón común.

3.<sup>a</sup> En toda proporción geométrica la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

*Espl.* Sea la proporción  $a:b::c:d$ ;  
voy á demostrar que  $a+c:b+d::a:b$  ó  $a+c:b+d::c:d$ .

*Dem.* Alternando la dada será  $a:c::b:d$ ;  
y componiéndola dará  $a+c:c::b+d:d$  ó  $a+c:a::b+d:b$ ,  
que alternadas serán  $a+c:b+d::c:d$  (I),  
y  $a+c:b+d::a:b$  (K), que es L. Q. D. D.

4.<sup>a</sup> En toda proporción geométrica la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

*Espl.* Sea la proporción  $a:b::c:d$ ;  
voy á demostrar que  $a-c:b-d::c:d$ , ó  $a-c:b-d::a:b$ .

*Dem.* Alternando la dada será  $a:c::b:d$ ;  
y dividiéndola, se tendrá

$a-c:c::b-d:d$ , ó  $a-c:a::b-d:b$ ;  
que alternadas dan  $a-c:b-d::c:d$  (L),  
y  $a-c:b-d::a:b$  (M), que es L. Q. D. D.

5.<sup>a</sup> En toda proporción geométrica la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes.

*Dem.* Si de las proporciones (I) y (L), que tienen común la razón  $c:d$  sacamos la

$a+c:b+d::a-c:b-d$  (N), tendrémos L. Q. D. D.

6.<sup>a</sup> En toda proporción geométrica la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á su diferencia.

*Dem.* Porque si alternamos la proporción anterior tendrémos  $a+c:a-c::b+d:b-d$  (O),  
que espresa L. Q. D. D.

*Cor.* De todo esto resulta que dando la primitiva ocho formas, la (A) otras ocho, la (B) otras ocho, la (C) otras ocho; la (D) otras ocho, la (I) otras ocho,



la (K) otras ocho, la (L) otras ocho, la (M) otras ocho, y la (N) otras ocho; se sigue que alternando é invirtiendo la primitiva, y las que resultan de ella, se pueden sacar ochenta proporciones de una dada.

185 Es tan importante la regla dada (174), que por su medio no sólo se pueden formar inmediatamente proporciones, sino que dada una razon se pueden poner otra multitud iguales con ella, multiplicando sus dos términos por 2, por 3 &c. Así, dada la razon 2:3, obtendremos

$$2:3::4:6::6:9::8:12::10:15::12:18::14:21::\&c.$$

que es lo que se llama *serie de razones iguales*, y se suelen escribir abreviadamente de este modo:

$$2:4:6:8:10:12:14: \&c.::3:6:9:12:15:18:21:\&c.$$

Cuando se quiera sacar una proporcion, se tomarán dos términos cualesquiera ántes de los cuatro puntos, y otros dos cualesquiera equidistantes despues. Sus propiedades son las siguientes.

1.<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la suma de todos los antecedentes es á la de todos los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

*Dem.* Sea esta la serie de razones iguales

$$a:b::c:d::m:n::\&c.:\&c.;$$

y tomando las dos primeras tendremos  $a:b::c:d$ ;

que (184, 3.<sup>a</sup>) nos dará  $a+c:b+d::c:d$ ,

ó poniendo en vez de la razon  $c:d$  su igual  $m:n$  por el supuesto, será  $a+c:b+d::m:n$ ;

que por la misma propiedad da

$$a+c+m:b+d+n::m:n \text{ (a), que es L. Q. D. D.}$$

*Esc.* Si hubiese mas razones iguales, en vez de la última  $m:n$ , se sustituiria otra, y se continuaria del mismo modo hasta que no hubiese mas.

2.<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

*Dem.* Supongamos la misma serie  $a:b::c:d::m:n::\&c.$

y tomando las dos primeras será  $a:b::c:d$ ;

la cual (184, 4.<sup>a</sup>) nos dará  $a-c:b-d::c:d$ ; ó poniendo

en vez de  $c:d$  su igual  $m:n$ , será  $a-c:b-d::m:n$ ;



que en virtud de la misma propiedad nos da

$$a-c-m:b-d-n::m:n \text{ (b), que es L. Q. D. D.}$$

3.<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes.*

*Dem.* Como las dos proporciones (a), (b), tienen comun la razon  $m:n$ , con las otras dos formaremos proporción (184, 2.<sup>a</sup>), y tendremos

$$a+c+m:b+d+n::a-c-m:b-d-n \text{ (c). L. Q. D. D.}$$

4.<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á la suya.*

*Dem.* Porque si alternamos la proporción anterior, tendremos  $a+c+m:a-c-m::b+d+n:b-d-n$  (d), que espresa L. Q. D. D.

5.<sup>a</sup> *En toda serie de razones iguales la relacion que tenga un antecedente con la suma de los otros, esa misma tendrá el consecuente correspondiente con la suma de los demas.*

*Dem.* Sea la serie de razones iguales

$$a:b::c:d::m:n::p:q::\mathcal{E}c::\mathcal{E}c.$$

Si consideramos que empieza desde la segunda razon, tendremos (1.<sup>a</sup>)  $c+m+p+\mathcal{E}c::d+n+q+\mathcal{E}c::c:d$ ; pero si en vez de  $c:d$  ponemos su igual  $a:b$ , resultará

$$c+m+p+\mathcal{E}c::d+n+q+\mathcal{E}c::a:b;$$

la cual permutada y alternada se convierte en

$$a:c+m+p+\mathcal{E}c::b:d+n+q+\mathcal{E}c. \text{ (e),}$$

que espresa L. Q. D. D.

*Cor.* De aquí resulta que si el primer antecedente es igual con la suma de los demas, el primer consecuente tambien será igual con la suma de los demas consecuentes; porque si en la última proporción suponemos  $a=c+m+p+\mathcal{E}c$ . la primera razon será de igualdad, y debiéndolo ser la segunda, será

$$b=d+n+q+\mathcal{E}c.$$

186 Se llama *razon compuesta* la que resulta de multiplicar ordenadamente (esto es antecedente por antecedente, y consecuente por consecuente) dos ó mas razones. Así, si las dos razones 3:5 y 4:7, las multi-



plicamos ordenadamente, tendrémos 12:35, que será la razon compuesta de aquellas dos; las tres razones 4:5; 6:11; 9:13, dan la compuesta

$$4 \times 6 \times 9 : 5 \times 11 \times 13 \text{ ó } 216 : 715; \&c.$$

Si la razon compuesta resulta de dos razones iguales, se llama *duplicada* ó *cuadrada*; así, si se tienen las dos razones iguales 6:8 y 3:4, la  $6 \times 3 : 8 \times 4$  ó 18:32, será duplicada ó cuadrada de la 6:8 ó 3:4.

Si se multiplican tres razones iguales, v. g. 3:5; 6:10 y 9:15, la compuesta  $3 \times 6 \times 9 : 5 \times 10 \times 15$  ó 162:750, se llama *triplicada* ó *cúbica*; y así sucesivamente *cuadruplicada* &c.

Haciendo la multiplicacion como hemos dicho, se sigue que formar razones compuestas es lo mismo que multiplicar quebrados; pues toda razon es un quebrado cuyo numerador es el antecedente y el denominador el consecuente. Así, cuando las razones son iguales, equivale á formar potencias de los mismos quebrados; y hé aquí la razon porque se llaman *cuadradas* ó *duplicadas*, *cúbicas* ó *triplicadas* &c. De que se sigue, que no es lo mismo razon *dupla* que *duplicada*; una razon es dupla de otra, cuando su esponente es duplo del de ella, duplicada cuando es su cuadrado, &c. &c.

187 Es muy importante el simplificar las razones y proporciones, para poder ejecutar con espedicion los cálculos de sus continuas aplicaciones. Así, en cuanto se dé una razon se verá si se puede simplificar, dividiendo sus dos términos por 2, por 3 &c. lo que no la altera (171 cor.); por lo que en vez de la razon 6:12 se podrá poner 3:6 ó 1:2; en vez de 12:18 se pondria 6:9 ó 2:3 &c.

188 Si la primera razon de una proporcion no se puede simplificar, ó se ha simplificado ya, se verá si se pueden dividir los dos antecedentes por un mismo número, lo que tampoco alterará la proporcion; pues si se alternase, se podria ya simplificar la primera razon. Así, si tengo la proporcion (A pág. sigte.) cuyo cuarto término  $x$  quiero buscar, simplificaré la primera razon por 4, y tendré la 2.<sup>a</sup> que allí se ve;

K

T. I.



ahora dividiré por 3 los antecedentes, y tendré la tercera; que da para el cuarto término  $x=24$ , que es lo mismo que

$$(A)$$

$$12:8::36:x$$

$$3:2::36:x$$

$$1:2::12:x=24$$

$$x = \frac{8 \times 36}{12} = \frac{288}{12} = 24,$$

pero mucho mas sencillo.

189 Al formar razones compuestas, puede ocurrir el que no pudiéndose simplificar las simples, se puedan simplificar las compuestas; porque algunos factores de los antecedentes de las unas lo sean tambien de los consecuentes de las otras, y al contrario.

En este caso, en lugar de simplificar la compuesta despues de formada, se indica la operacion resolviendo en factores simples los términos de las componentes, y suprimiendo los que sean comunes. Así, si tengo las razones 3:5; 4:9; 10:21, que dan la compuesta 120:945, ó simplificando 40:315 ú 8:63; formaré la compuesta de este modo:

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 : 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7,$$

que suprimiendo los factores comunes 3 y 5 queda en  $2 \times 2 \times 2 : 3 \times 3 \times 7$  ú 8:63, que es la misma que ántes.

Como al formar una razon compuesta, se puede poner en lugar de cualquier razon simple, otra que sea igual con ella, se sigue que despues de formada, se podrá hacer igualmente esta sustitucion, poniendo el antecedente en vez del antecedente y el consecuente en vez del consecuente. Así, cuando voy á formar la razon compuesta de las 3:5 y 6:7, en vez de esta pondré su igual 12:14 ó 18:21; y en vez de la compuesta  $3 \times 6 : 5 \times 7$  tendré  $3 \times 12 : 5 \times 14$  ó  $3 \times 18 : 5 \times 21$ ; luego inversamente, si tengo la razon compuesta

$$3 \times 18 : 5 \times 21,$$

en vez de la componente 18:21 podré poner cualquiera de sus iguales 12:14 ó 6:7; y la tendré convertida en  $3 \times 12 : 5 \times 14$ , ó  $3 \times 6 : 5 \times 7$ . Esta proposicion es de la mayor importancia, y los principiantes suelen encontrar mil dificultades en ella, cuando no se presenta con toda esta especificacion.



190 Si dos ó mas proporciones se multiplican ordenadamente, el resultado será una proporción compuesta. Porque siendo las razones componentes de la primera razón compuesta, iguales (por la naturaleza de las proporciones) con las componentes de la segunda, las razones compuestas serán iguales y formarán proporción. Así, si tenemos las proporciones (a), (b), multiplicadas darán la compuesta (c).

$$\begin{array}{r} 4: 5:: 8: 10 \text{ (a)} \\ 6: 11:: 18: 33 \text{ (b)} \\ \hline 24: 55:: 144: 330 \text{ (c)} \end{array}$$

Luego multiplicando ordenadamente una proporción por sí misma, el resultado formará proporción; de donde resulta que si cuatro cantidades están en proporción, también lo estarán sus cuadrados, sus cubos, y en general las potencias de un mismo grado; y al contrario, si cuatro cantidades están en proporción, también lo estarán sus raíces de un mismo grado.

En efecto, la proporción  $a:b::c:d$  da  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ;

y elevando á la potencia  $n$  resultará  $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$ ;

y formando proporción será  $a^n:b^n::c^n:d^n$ , que es L. 1.º Q. D. D.

La misma proporción  $a:b::c:d$  da  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ;

y extrayendo la raíz del grado  $n$  será

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}} \quad \text{ó} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}},$$

que da  $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$ , que es L. 2.º Q. D. D.

191 Al formar proporciones compuestas, convendrá simplificar las razones al tiempo de sacarlas;



pero particularmente conviene tener presente, que si dos razones son tales que en la una es antecedente lo que en la otra consecuente, se omite el término común, y se ponen los otros. Así, si tenemos

$$\left. \begin{array}{l} P:Q::a:b \\ Q:R::c:d \end{array} \right\} \text{se tendrá } P:R::ac:bd;$$

porque si se hiciera con estension seria  $PQ:QR::ac:bd$ ; y simplificando la primera razon por  $Q$ , resultaria por último  $P:R::ac:bd$ .

### *De la regla de tres y de compañía.*

192 Se llama *regla de tres ó regla de oro*, la que enseña á determinar los efectos por medio de las causas, ó las causas por medio de los efectos, cuando se conoce la dependencia que tienen entre sí.

La regla de tres puede ser *simple y compuesta*; es simple, cuando para determinar el efecto ó causa que se busca, sólo se atiende á una circunstancia; y compuesta, cuando se necesita atender á dos ó mas.

La regla de tres simple se subdivide en *directa é inversa*; directa es aquella en que se trata de averiguar el efecto que produce una causa, ó la causa de que proviene un efecto, cuando se conoce el efecto producido por una causa de la misma especie; y la inversa es aquella en que se trata de averiguar la causa que se necesita para producir, junta con otra dada, el mismo efecto que han producido ya otras dos causas de la misma especie. Para que se vea bien la diferencia que hay entre las reglas de tres, nos valdrémos de estos ejemplos.

1.º Si sabiendo que 12 oficiales de sastre han hecho en una semana 72 vestuarios, quiero averiguar cuántos vestuarios podrán hacer 24 sastres en el mismo tiempo, esto es, en una semana: esta es una regla de tres simple; porque el número de vestuarios que busco, sólo depende de una circunstancia, á saber, del número de oficiales de sastre que los han de hacer; ademas es directa, porque trato de averiguar los ves-



tuarios, esto es, el efecto que han de producir los 24 sastres, que son la causa, por medio del conocimiento que tengo del que han producido en las mismas circunstancias 12 sastres.

Tambien seria simple y directa la regla de tres, si viniese propuesta en estos términos: *si 12 sastres han hecho en una semana 72 vestuarios, para hacer en el mismo tiempo 144 vestuarios, ¿cuantos sastres se necesitarán?* Porque aquí se trata de averiguar la causa, esto es, los oficiales de sastre que se necesitan para hacer los 144 vestuarios, que son el efecto, por medio del efecto conocido 72 vestuarios que han hecho los 12 sastres.

2.<sup>o</sup> *Si sabiendo que 12 sastres han hecho en tres dias 72 vestuarios, quiero averiguar cuántos sastres se necesitarán para hacer los mismos 72 vestuarios en 6 dias:* esta regla de tres será inversa; porque aquí tengo un mismo efecto, 72 vestuarios, para cuya produccion han concurrido dos causas, los 12 sastres y los tres dias que han trabajado; y ahora trato de determinar una de las causas, á saber, el número de sastres, que junta con la otra, es decir, con los 6 dias en que han de trabajar, ha de producir el mismo efecto de hacer los 72 vestuarios.

3.<sup>o</sup> *Si sabiendo que 12 sastres han hecho en 4 dias 72 vestuarios, quiero averiguar los vestuarios que harán 36 sastres en 6 dias:* esta regla de tres será compuesta; porque el número de vestuarios que busco, depende de dos circunstancias, á saber, de los 36 sastres, y de los 6 dias que han de estar trabajando.

193 Toda cuestion que conduce á una regla de tres, consta de dos partes: del *supuesto* y la *pregunta*; en el supuesto se da la dependencia que tiene la causa con el efecto; y en la pregunta, la causa ó efecto que se da, para determinar el efecto ó causa que se busca.

En toda regla de tres simple entran tres cantidades conocidas: dos del supuesto, y una de la pregunta; como esta ha de ser de la misma especie que



una de las del supuesto, á las dos cantidades conocidas que son de una misma especie, se les llama *principales*; la otra y la que se busca, se llaman *relativas*; pero como de las relativas sólo se conoce una, se llama cantidad principal y su relativa á las dos del supuesto, siendo la principal la que es de la misma especie que la de la pregunta. V. g. cuando quiero averiguar los vestuarios que harán 24 sastres en el supuesto de que 12 hayan hecho 72 vestuarios, las dos cantidades principales son los 12 sastres y los 24; las relativas son los 72 vestuarios y los que busco; y las que se llaman cantidad principal y su relativa son los 12 sastres y los 72 vestuarios, siendo la principal los 12 sastres que es la de la misma especie que la de la pregunta.

194 Toda la dificultad de la regla de tres consiste en plantearla; porque despues todo está reducido á encontrar el cuarto término de una proporcion geométrica. Por lo cual vamos á deducir reglas generales para su planteo.

Si la regla de tres es directa, y se pide el efecto que producirá la causa  $c$ , sujeta á las mismas condiciones en que la causa  $a$  ha producido el efecto  $b$ , como no conocemos este efecto le llamaremos  $x$ ; y siendo  $b$  el efecto que ha producido  $a$ , el efecto pro-

ducido por cada unidad de  $a$  será (§ 58, 4.º)  $\frac{b}{a}$ ;

y como la  $c$  ha de producir  $x$ , una unidad de  $c$  pro-

ducirá  $\frac{x}{c}$ ; ahora, por ser  $c$  y  $a$  de la misma especie,

será igual el efecto que produzca cada una de sus

unidades; luego se tendrá  $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ , que formando

proporcion, será  $b:a::x:c$  ó  $a:b::c:x$  ó  $a:c::b:x$ .

Luego para plantear una regla de tres directa, se pondrá por primer término la cantidad principal del



supuesto; luego, cualquiera de las otras dos, á saber, la relativa del supuesto ó la principal de la pregunta; despues la otra, y el cuarto término de la proporcion será lo que se busca; que para encontrarle se practicará lo dicho (181).

Entendido esto, pasaremos á resolver algunos ejemplos.

1.º Se sabe que 40 soldados han abierto en un tiempo cualquiera 160 varas de trinchera; para abrir 800 varas en el mismo tiempo, cuántos soldados se necesitarán?

Aquí la cantidad principal y su relativa son 160 varas y 40 soldados; luego plantearémos la cuestion del modo siguiente:

$$160^{v.s} : 800^{v.s} :: 40^{sold.s} : x = \frac{40 \times 800}{160} = 200,$$

y saco que se necesitan poner á trabajar 200 hombres.

2.º Un sujeto desea saber lo que le producirán 78437 rs. que va á imponer en un fondo al 6 por 100. Aquí la cantidad principal del supuesto es 100; porque la cuestion quiere decir que 100 reales le dan de rédito al año 6 reales; y así, la operacion se ejecutará como aquí se ve:

$$100 : 78437 :: 6 : x = \frac{78437 \times 6}{100} = \frac{470622}{100} =$$

$$4706,22 = 4706 \text{ rs. y } 7 \text{ mrs.}$$

195 Si la regla de tres es inversa, y se supone que las dos causas  $a$  y  $b$  han producido un efecto  $K$ , y dada una causa  $c$  de la misma especie que  $a$ , se quiere averiguar otra causa  $x$  de la misma especie que  $b$ , que junta con la  $c$ , produzca el mismo efecto  $K$ ; discurremos de este modo. Si la causa  $a$  sola produjese

el efecto  $K$ , una unidad de  $a$  produciria  $\frac{K}{a}$ ;

ahora, este efecto debe ser tanto menor en cuanto la causa  $a$  sea ayudada de la  $b$ ; luego el efecto que pro-



duzca una unidad cuando obra la causa  $b$ , será  $\frac{K}{ab}$ .

Por la misma razon, el efecto de una unidad de  $c$  si obrase sóla, seria  $\frac{K}{c}$ ;

y obrando la causa  $x$  que buscamos, deberia ser  $\frac{K}{cx}$ ;

y como  $a$  y  $c$  son de una misma especie, el efecto de cada una de sus unidades será igual, y se tendrá

$$\frac{K}{ab} = \frac{K}{cx}, \text{ ó } Kcx = Kab,$$

y dividiendo por  $K$  será  $cx = ab$ , que da  $c:a::b:x$  ó  $c:b::a:x$ ; que manifiesta que la regla de tres inversa se plantea escribiendo por primer término la cantidad principal de la pregunta, despues las dos del supuesto, y el cuarto término será lo que se pide; que se hallará por lo dicho (181).

Apliquemos esta regla á algunos ejemplos.

1.º *Un comerciante ha ganado en 5 meses 450 doblones, con un capital de 6000 doblones; para ganar los mismos 450 doblones con un capital de 1800 doblones, cuánto tiempo necesitará?*

Aquí la cantidad principal y su relativa son 6000 doblones y 5 meses, y la principal de la pregunta es 1800 doblones; por lo que ejecutando la operacion como aquí se ve:

$$1800^{d.s} : 6000^{d.s} :: 5^{m.s} : x =$$

$$\frac{6000 \times 5}{1800} = \frac{60 \times 5}{18} = \frac{10 \times 5}{3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3},$$

hallo que necesitará 16 meses y  $\frac{2}{3}$ , que equivalen á 16 meses y 20 dias.

2.º *Un General de trinchera tiene calculado que*



con poner 3000 hombres á trabajar, ya á la zapa, ya á la trinchera, llegará en 6 dias á hacer todas las obras que necesita para llegar al camino cubierto; tiene aviso de su mayor General que es indispensable tomar el camino cubierto dentro de 4 dias; cuántos hombres necesitará poner á trabajar?

Aquí la cantidad principal y su relativa son 6 dias y 3000 hombres, y la principal de la pregunta es 4 dias; por lo cual plantearé la cuestion en estos términos:

$$4^d : 6^d :: 3000^h : x = \frac{3000 \times 6}{4} = 1500 \times 3 = 4500 \text{ homb.}$$

que son los que tendrá que poner á trabajar.

196 Para resolver una regla de tres compuesta, se halla primero el resultado que corresponde á la pregunta, atendiendo á una sola circunstancia; despues el que corresponde á este resultado hallado, considerando como pregunta, atendiendo á otra circunstancia; despues el que corresponde á este resultado hallado, atendiendo á otra circunstancia; y así sucesivamente, como manifiestan estos ejemplos.

1.º Quiero averiguar los cahices de trigo que podrán traer 36 carros en 6 dias, en el supuesto de haber traído 12 carros en 4 dias 72 cahices. Primero averiguaré los cahices que traerán los 36 carros en 4 dias, lo que ejecutaré como aquí se ve:

$$12 \text{ carr.} : 36 \text{ carr.} :: 72 \text{ cah.} : x \text{ cah.} = \frac{72 \times 36}{12} = 72 \times 3 = 216;$$

y encuentro que traerán 216 cahices. Ahora, si en 4 dias traen 36 carros 216 cahices, en 6 dias cuántos traerán? Ejecutaré la operacion como aquí se ve:

$$4^d : 6^d :: 216 \text{ cahices} : x = \frac{216 \times 6}{4} = 54 \times 6 = 324,$$

y saco que traerán 324 cahices.

2.ª Sé que 4 soldados en 5 dias, trabajando en cada dia 8 horas, han hecho 1200 fajinas: 6 solda-



dos en 8 dias, trabajando 6 horas al dia, ¿cuántas fajinas harán?

Aquí tendré que hacer las tres reglas de tres simples siguientes:

$$4^s : 6^s :: 1200 \text{ faj.}^s : 1800 \text{ faj.}^s$$

$$5^d : 8^d :: 1800 \text{ faj.}^s : 2880 \text{ faj.}^s$$

$$8^h : 6^h :: 2880 \text{ faj.}^s : 2160 \text{ faj.}^s$$

y saco que harán 2160 fajinas.

197 Se llama *regla de compañía* la que enseña á determinar cuánto corresponde de la ganancia ó pérdida á cada uno de muchos compañeros que han puesto su caudal en un fondo, con arreglo á lo que puso cada uno. Esta, como se suele decir, es de dos modos: *simple* y *compuesta* ó *con tiempo*; se acostumbra llamar simple, cuando el caudal que tiene cada uno en el fondo, permanece un mismo tiempo; y compuesta, cuando no permanecen los caudales el mismo tiempo en el fondo. Esta, se reduce á la simple, multiplicando el tiempo por lo que puso cada uno; pues lo mismo es 50 doblones en dos años que 100 en un año. Esta regla se funda en la siguiente cuestion.

*Partir un número dado a en las partes que se quiera, v. g. en tres, que tengan entre sí la misma razon que las cantidades dadas m, n, p; esto es, que la primera tenga con la segunda la razon de m:n, y la primera con la tercera la razon de m:p.*

Si llamo  $x$  la primera parte, será

$$m:n::x:\frac{nx}{m} \text{ la segunda, y } m:p::x:\frac{px}{m} \text{ la tercera;}$$

y como todas juntas han de equivaler á  $a$ , se tendrá

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a;$$

que quitando los divisores será  $mx + nx + px = ma$ , ó descomponiendo en factores  $x(m+n+p) = ma$ ,



de donde se saca  $x = \frac{ma}{m+n+p} = m \times \frac{a}{m+n+p}$ .

Si sustituimos este valor de  $x$  en lo que correspondía á la segunda, y simplificamos, se tendrá

$$\frac{nx}{m} = \frac{na}{m+n+p}; \text{ y la tercera será } \frac{px}{m} = \frac{pa}{m+n+p};$$

cuyos resultados manifiestan, que podemos hallar cada una de estas partes, por medio de la siguiente proporcion:  $m+n+p$  (suma de las puestas) :  $a$  (ganancia ó pérdida) :: lo que puso cada uno : á la ganancia ó pérdida que le corresponde.

*Ejemplo.* Si de tres sujetos el primero ha puesto en un fondo 500 doblones, 720 el segundo, y 300 el tercero, y han ganado 456 doblones; para hallar lo que corresponde á cada uno, será

$$m=500, n=720, p=300, \text{ y } m+n+p=1520,$$

$$\text{luego será la parte del 1.º } = \frac{500 \times 456}{1520} = 150 \text{ dobl.},$$

$$\text{la del segundo.....} = \frac{720 \times 456}{1520} = 216 \text{ dobl.},$$

$$\text{y la del tercero.....} = \frac{300 \times 456}{1520} = 90 \text{ dobl.};$$

cuyas partes componen la ganancia total 456 doblones.

El no haber contado con el tiempo, indica que las puestas permanecieron uno mismo en el fondo; pero si el primero la hubiese puesto por 8 meses, el segundo por 10, y el tercero por 5, siendo la misma ganancia, para hallar lo que corresponde á cada uno se observará que 500 doblones puestos por 8 meses, es lo mismo que  $500 \times 8$  por un solo mes; 720 doblones puestos por 10 meses, es lo mismo que  $720 \times 10$  doblones por un solo mes; y 300 doblones puestos por 5 meses, equivalen á  $300 \times 5$  por un solo mes; de manera, que las puestas serán 4000; 7200 y 1500,



cuya suma es 12700; y en este caso tocará

$$\text{al primero } \frac{456 \times 4000}{12700} = 143 \frac{79}{127},$$

$$\text{al segundo } \frac{456 \times 7200}{12700} = 258 \frac{66}{127},$$

$$\text{y al tercero } \frac{456 \times 1500}{12700} = 53 \frac{109}{127},$$

cuya suma es igual 456 como ántes.

*Esc.* En las corporaciones y regimientos, ocurre con bastante frecuencia el hacer gastos que han de satisfacer los individuos ú oficiales á proporcion de sus sueldos; para determinar la cuota de cada uno se dirá: *el sueldo total de los individuos es al gasto que se ha hecho, como el sueldo de cada uno es á la parte que tiene que pagar.*

#### *De las progresiones aritméticas y geométricas.*

193 Se llama *progresion aritmética* una serie ó continuacion de términos, tales que cada uno lleva al que le precede ó sigue un mismo exceso ó diferencia; cuando lleva al que le precede, la progresion se llama *creciente*; y cuando lleva al que le sigue, *decreciente*.

Se llama *razon ó diferencia*, lo que se debe añadir (ó quitar) á un término, para que se convierta en el que le sigue; aquí se tratará sólo de las crecientes, pues sus propiedades son las mismas, mudando el signo á la diferencia. Para escribir una progresion aritmética se pone una proporcion continua (175), y se continúa como aquí se ve:  $\div 2.5.8.11.14.17.20.23 \&c.$  Donde el signo  $\div$  indica que cada término medio se ha de repetir.

Si al primer término le llamamos  $a$ , y  $d$  á la razon, la espresion  $\div a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d \dots a+(n-1)d = u(A)$ , será una progresion aritmética general.



De la definición de la progresion aritmética resulta, que el segundo término es igual al primero mas la razon; que el tercero es igual al segundo mas la razon; pero como el segundo es igual al primero mas la razon, el tercero será igual al primero mas dos veces la razon; el cuarto se compondrá del tercero mas la razon, ó del primero mas tres veces la razon; y en general un término cualquiera se compondrá del primero, mas tantas veces la razon como términos hay ántes de él: que es lo que espresa la fórmula (A), en que  $u$  es el término que se busca,  $n$  el lugar que ocupa en la progresion,  $a$  el primero, y  $d$  la diferencia ó razon.

Con dicha fórmula (A) se puede hallar un término cualquiera en conociendo el primero y la razon. Así, si en la progresion anterior se quiere el término séptimo, será  $a=2$ ,  $d=3$ ,  $n=7$ , y se tendrá  
 térm.<sup>o</sup> 7.<sup>o</sup>  $= 2 + (7 - 1) \times 3 = 2 + 6 \times 3 = 2 + 18 = 20$ .

199 De la formacion de la progresion se deducen varias consecuencias.

1.<sup>a</sup> Cuatro términos consecutivos, tomados donde se quiera, forman proporcion discreta.

Así, 5.8:11.14.

2.<sup>a</sup> Tres términos consecutivos la forman continua.

Así,  $\div 5.8.11$ .

3.<sup>a</sup> Dos términos consecutivos forman proporcion discreta con otros dos términos consecutivos, tómense donde se quiera; porque la razon de los dos primeros (que es la de la progresion) es la misma que la de los dos últimos. Así, 5.8:17.20.

4.<sup>a</sup> Dos términos cualesquiera están en proporcion discreta con otros dos términos cualesquiera, que disten entre sí tanto como los dos primeros distaban; porque la razon en ambas equivale á tantas veces la de la progresion como términos hay en medio mas uno.

Así, 5.11:17.23.

5.<sup>a</sup> Tres términos cualesquiera, tales que los dos extremos disten igualmente del medio, forman proporcion continua; porque la razon entre el primero y el medio es la misma que entre el medio y el extremo;



pues ambas equivalen á tantas veces la de la progresion, como términos hay entre ellos mas uno.

Así,  $\div 5.14.23$ .

6.<sup>a</sup> *La suma del primer término y último es igual á la suma de dos términos cualesquiera, equidistantes de los extremos; é igual al duplo del término medio, si el número de términos es impar.* Porque el primer término y el segundo forman proporcion con el penúltimo y el último (cons. 3.<sup>a</sup>), y dan (176) que el segundo junto con el penúltimo serán iguales con el primero junto con el último; el primero y el tercero forman proporcion con el antepenúltimo y último, y darán que la suma del primero con el último equivaldrá á la del tercero y antepenúltimo; y así de los demas.

200 Fundados en esta propiedad vamos á encontrar la suma de tantos términos como se quiera de una progresion aritmética. Para esto sea la progresion general  $\div a.b.c.d....q.r.t.u$ ;

llamando  $s$  la suma de los términos hasta  $u$ , que consideraremos ser el último, y observando que la suma no se altera aunque se escriba al revés, tendremos poniendo debajo de la suma ella misma escrita en un orden inverso:

$$\left. \begin{array}{l} s = a + b + c + d + \dots + q + r + t + u \\ s = u + t + r + q + \dots + d + c + b + a \end{array} \right\} \text{Y sumando estas dos} \\ \text{ecuaciones será} \\ 2s = (a + u) + (b + t) + (c + r) + (d + q) + \dots \\ (q + d) + (r + c) + (t + b) + (u + a).$$

Y como  $a + u = b + t = c + r = \dots = \frac{1}{2}c$  (cons. 6.<sup>a</sup>), sustituyendo se tendrá

$$2s = (a + u) + (a + u) + (a + u) + (a + u) + \dots \\ + (a + u) + (a + u) + (a + u) + (a + u);$$

donde veo que el duplo de la suma equivale á tantas veces la suma del primer término y último, como términos hay en la progresion; luego si llamo  $n$  al número de términos tendré  $2s = (a + u) \times n$ ;

de donde despejando  $s$  sale  $s = \frac{1}{2}(a + u) \times n = (a + u) \times \frac{1}{2}n$ ; que nos dice que *la suma de todos los términos que se quieran de una progresion aritmética, se halla sumando el primer término con el último, y multipli-*



cando esto por la mitad del número de los términos.

Así, la suma de 7 términos de la progresion (198) será igual á  $(2+20) \times \frac{7}{2} = 22 \times \frac{7}{2} = 11 \times 7 = 77$ , como en efecto se verifica.

201 Si en la ecuacion  $u = a + (n-1)d$  despejo  $d$ , tendré  $d = \frac{u-a}{n-1}$ , la cual dice que conocido el último

término, el primero y el número de ellos, para hallar la razon se resta el primero del último, y lo que queda se divide por el número de términos menos uno.

En esto se funda la interpolacion de un número cualquiera de medios aritméticos entre dos números ó cantidades dadas. Así, si quiero interpolar entre 7 y 43 ocho medios aritméticos, restaré el 7 del 43, y la resta 36 la dividiré por el número de términos que ha de haber ántes del 43; y como entre 7 y 43 ha de haber ocho medios, habrá ántes del 43 un término mas, á saber, el primero 7; luego esta resta la deberé dividir por el número de medios que se han de interpolar mas 1, esto es, por 9, y resultará que  $\frac{36}{9} = 4$ , y los términos serán  $\div 7.11.15.19.23.27.31.35.39.43.$

202 Se llama *progresion geométrica* una serie ó continuacion de términos, que cada uno cabe en el que le precede ó sigue un mismo número de veces; cuando cabe en el que le sigue, la progresion es *creciente*; y cuando en el que le precede, *decreciente*.

Aquí se llama *razon* al número por que se ha de multiplicar un término cualquiera, para que resulte el que le sigue. Para escribir una progresion geométrica se pone una proporcion continua (175), y se continúa como aquí se ve:  $\div 3:6:12:24:48:96:192:384:\&c.$  y escrita con estension será  $3:6::6:12::12:24::24:48::\&c.$  Si espresamos por  $a$  el primer término y por  $q$  la razon,  $\div a:aq:aq^2:aq^3:aq^4:aq^5:aq^6 \dots aq^{n-1} = u(B)$ , será una progresion geométrica general.

De la definicion de la progresion geométrica resulta, que el segundo término se compone del primero multiplicado por la razon; el tercero del segundo



*multiplicado por la razon; pero como el segundo equivale al primero multiplicado por la razon, el tercero equivale al primero multiplicado por el cuadrado de la razon; el cuarto se compone del primero multiplicado por el cubo de la razon; y en general, un término cualquiera se compone del primero multiplicado por una potencia de la razon, espresada por el número de términos que hay ántes de él: que es lo que espresa la fórmula (B), en que  $u$  es el término que se busca,  $n$  el lugar que ocupa,  $a$  el primero, y  $q$  la razon.*

La fórmula (B) sirve para calcular un término cualquiera; v. g. si quiero hallar el sexto término de la anterior, tendré  $n=6$ ,  $a=3$ ,  $q=2$ ,

y será  $\text{tér.}^{\circ}6.{}^{\circ} = 3 \times 2^{6-1} = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$ .

203 Es digna tambien de notarse aquí la analogía entre el lenguaje de las progresiones aritmética y geométrica; pues las propiedades de aquella se convierten en las de esta, sustituyendo *multiplicar* á la voz *sumar*; *cuadrar la razon al duplo* ó *dos veces la razon*; y en general *formar potencias de la razon* á *sumar muchas veces la razon*; y por lo mismo se verificará que 1.º cuatro términos consecutivos forman proporcion geométrica discreta; 2.º tres consecutivos la forman continua; 3.º dos términos consecutivos están en proporcion con otros dos consecutivos cualesquiera; 4.º dos términos cualesquiera forman proporcion con otros dos cualesquiera, que disten igualmente entre sí; 5.º tres términos equidistantes la forman continua &c.

204 Para hallar la suma de una progresion geométrica, llamaremos  $a$  el primer término,  $q$  la razon (por consiguiente  $aq$  será el segundo),  $u$  el último, y  $s$  la suma de todos los términos que buscamos; y observando (202) que todos los términos medios se han de repetir, resulta que todos los de la progresion serán antecedentes ménos el último, y por consiguiente la suma de estos será  $s-u$ ; todos son consecuentes ménos el primero, y por consiguiente la suma de estos será  $s-a$ ; luego por lo dicho (185, 1.ª) tendremos

$$s-u:s-a::a:aq::1:q;$$



que multiplicando extremos y medios, nos dará

$$(s-u) \times q = (s-a) \times 1, \text{ ó } sq - uq = s - a,$$

de donde sale  $sq - s = uq - a$ , ó

$$s(q-1) = uq - a, \text{ y } s = \frac{uq - a}{q-1} \text{ (m).}$$

Lo que dice que para hallar la suma de una progresion geométrica, se multiplicará el último término por la razon, de esto se restará el primero, y la resta se dividirá por la razon ménos uno. Así, si quiero hallar 8 términos de la progresion (202), será  $a=3$ ,  $q=2$ ,  $u=384$ , y resultará

$$\text{sum. de 8 términos} = \frac{384 \times 2 - 3}{2-1} = \frac{768-3}{1} = 765,$$

como en efecto se verifica.

Esc. Si en vez de  $u$  sustituimos en la fórmula (m) su valor  $aq^{n-1}$ , nos resultará

$$s = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} \text{ (p);}$$

la cual servirá para hallar la suma de  $n$  términos de una progresion, cuando sólo se conozca el primer término  $a$  y la razon  $q$ .

205 Si en la fórmula  $u = aq^{n-1}$  despejo la  $q$ ,

$$\text{sacaré } q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}};$$

la cual podrá servir para interpolar medios geométricos entre dos números dados; para lo cual, se dividirá el último término por el primero, y del cociente se extraerá una raiz del grado que espese el número de términos que ha de haber en todos ménos uno; ó del grado que espese el número de medios que se han de interpolar mas uno.

Esc. 1.º Si la progresion fuese decreciente, la razon  $q$  sería un quebrado propio, y el término subtractivo,  $aq^n$  de la fórmula (p) será tanto menor, cuan-



to mayor sea el número  $n$  de términos que se vayan tomando; y tantos se podrán tomar, que dicho término llegue á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que esta sea; de donde se sigue que la diferencia entre el numerador de la fórmula (p) y el primer término  $a$  de la progresion, podrá llegar á ser me-

nor que cualquier cantidad asignable; luego  $\frac{a}{1-q}$  (r) es

una cantidad á la cual se puede acercar todo lo que se quiera la suma de los términos de la progresion, y nunca puede dicha suma ser igual con ella. Es, pues, la espresion (r) como veremos dentro de poco, el *límite* de la suma de la progresion decreciente; y aunque se la suele mirar como si en efecto fuese la suma verdadera, es añadiendo la circunstancia de que la progresion esté continuada al *infinito*; pero como esta es una palabra de cuyo significado no podemos formarnos una cabal idea, advertimos que cuando nos valgamos de esta voz en algunas ocasiones, no queremos dar á entender otra cosa, sino que la cantidad á que la apliquemos ha llegado á ser tal, que la diferencia entre ella y su límite es menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; por consiguiente la sustitucion del límite en vez de ella, sólo se debe mirar como una espresion abreviada del largo razonamiento que se deberia hacer para darla á conocer circunstanciadamente. Esto supuesto, la fórmula (r) traducida en regla bájo estos principios, nos dará que para hallar la suma de una progresion geométrica decreciente, continuada indefinidamente, *se dividirá el primer término por la diferencia que haya entre la unidad y la razon.*

Por esta causa la suma de la progresion

$$\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \&c. \text{ es } \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

*Esc. 2.º* En este resultado observamos que siendo 2 la suma de todos los términos, y uno el primero, todos los términos que siguen al primero no valdrán



mas de 1; siendo la suma total 2, y  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  la de los dos primeros términos, todos los que siguen al segundo valdrán  $\frac{1}{2}$  &c.; luego en este caso *un término cualquiera es igual á la suma de todos los que le siguen.*

*Esc. 3.<sup>o</sup>* Si la progresion fuese  $\div \div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \&c.$

$$\text{cuya suma es } s = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2},$$

se tendrá que como el primero vale 1, los demas valdrán menos de 1, esto es,  $\frac{1}{2}$ ; el primero y segundo valen  $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ , que para  $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ , sólo le falta  $\frac{1}{6}$ , esto es, menos de  $\frac{1}{3}$ ; luego aquí *un término cualquiera es mayor que la suma de todos los que le siguen.*

*Esc. 4.<sup>o</sup>* Si la progresion fuese  $\div \div 1 : \frac{3}{5} : \frac{9}{25} : \frac{27}{125} : \&c.$

$$\text{cuya suma es } s = \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2};$$

se tendrá que valiendo 1 el primer término, los demas valdrán  $\frac{3}{5}$ , esto es, mas que el primero; el primero y segundo valen  $1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10}$ , que para  $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$ , le faltan  $\frac{9}{10}$ , que es mayor que  $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$  &c. &c.; luego en este caso *un término cualquiera es menor que la suma de todos los que le siguen.*

*Cor. general.* Luego en una progresion geométrica decreciente, un término cualquiera puede ser igual, mayor ó menor, que la suma de todos los que le siguen, segun sea cada término igual, menor ó mayor que la mitad del anterior.

### *De los logaritmos.*

206 Si reunimos dos progresiones, una aritmética y otra geométrica, de modo que se correspondan sus términos como aquí se ve:

$$\left. \begin{array}{l} \div 4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.\&c. \\ \div 3:6:12:24:48:96:192:384:768:1536:\&c. \end{array} \right\}$$

los términos de la aritmética se llaman *logaritmos* de los correspondientes de la *geométrica*, que toman el nombre de *números*. Como son infinitas las progresio-





nes que se pueden elejir, se sigue que es infinita la diversidad de logaritmos; pero si entre las progresiones se elije la aritmética, que principiando por 0 siga despues por la serie de los números naturales, y la geométrica que empiece por la unidad, entónces se tiene un *sistema de logaritmos*. V. g.

$\begin{array}{l} \div 0.1.2.3.4.5.6.\&c. \\ \div 1:4:16:64:256:1024:4096:\&c. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \div 0.1.2.3.4.5.6.\&c. \\ \div 1:4:16:64:256:1024:4096:\&c. \end{array}} \right\} \text{forman un sistema.}$

Donde debemos observar que los términos de la aritmética son los esponentes á que se ha de elevar el segundo término de la geométrica, para producir cualquier término; pues 64 v. g. es  $4^3$ , y 3 es el logaritmo ó término de la aritmética correspondiente á 64; y como puede elejirse cualquier otro número para segundo término de la geométrica, resulta que tambien *puede haber muchos sistemas de logaritmos*.

Esto entendido, se llama *base* en un sistema de logaritmos al segundo término de la progresion geométrica, cuyo logaritmo es la unidad, y de cuyas potencias van resultando los demas; y logaritmo de un número *es el esponente á que se ha de elevar la base para producir dicho número*.

207 Sea, pues,  $a$  la base de un sistema cualquiera,  $x$  un logaritmo y  $z$  su número, y se tendrá

$$x = \log.z \text{ y } a^x \text{ ó } a^{\log.z} = z;$$

igualmente, siendo  $x' = \log.z'$ ,

$$\text{se tendrá } a^{x'} = a^{\log.z'} = z'.$$

1.º Si multiplicamos estas dos ecuaciones, tendrém<sup>os</sup>  $a^x \times a^{x'} = zz'$  ó  $a^{x+x'} = zz'$ ;

pero  $x+x'$  es el esponente á que se ha de elevar la base  $a$ , para que resulte el producto  $zz'$ ;

luego será su logaritmo, y se tendrá  $x+x' = \log.zz'$ ;

y como  $x = \log.z$  y  $x' = \log.z'$ ,

sustituyendo resultará  $\log.z + \log.z' = \log.zz'$ ;

que quiere decir que *para hallar el logaritmo de un producto se han de sumar los de los factores; y el número que en las tablas del sistema corresponda á es-*



ta suma, será el producto. Así, si quiero multiplicar 16 por 256, diré:  $\log.16=2$ ,  $\log.256=4$ ; y su suma  $=6$  será el logaritmo del producto; y como 6 corresponde á 4096, infiero que este es el producto de 16 por 256, como en efecto se verifica.

2.º Dividiendo las mismas dos ecuaciones, se tendrá

$$\frac{a^x}{a^{x'}} = \frac{z}{z'} \quad \text{ó} \quad a^{x-x'} = \frac{z}{z'};$$

y como ahora  $x-x'$  es el esponente á que se ha de elevar la base para producir el cociente ó número  $\frac{z}{z'}$ ,

este esponente será su logaritmo, y se tendrá

$$x-x' = \log.\frac{z}{z'}, \quad \text{ó} \quad \log.z - \log.z' = \log.\frac{z}{z'};$$

que quiere decir, que para hallar el logaritmo de un cociente, se restará el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo; y el número que en las tablas corresponda á esta diferencia, será el cociente que se busca. Así, si quiero dividir 1024 por 16, diré:

$$\log.1024=5, \quad \log.16=2;$$

y su diferencia  $=3$  será el logaritmo del cociente; y como este 3 corresponde al número 64, este será el cociente y se tendrá  $\frac{1024}{16}=64$ , como en efecto se verifica.

3.º Si elevamos á diferentes potencias la ecuacion anterior  $a^x=z$ , ó  $z=a^x$ , será

$$z^2=(a^x)^2=a^{2x}, \quad z^3=(a^x)^3=a^{3x}, \dots z^n=(a^x)^n=a^{nx};$$

de donde sale (por ser  $nx$  el esponente á que se ha de elevar la base  $a$  para producir  $z^n$ ) que

$$\log.z^n=nx=n\log.z;$$

que quiere decir, que para hallar el logaritmo de una potencia, se ha de multiplicar el logaritmo de la raiz (ó cantidad) por el esponente de la potencia; y el número que en las tablas corresponda al producto hallado, será la potencia que se pide. Así, si quiero formar la tercera potencia de 16, diré:  $\log.16=2$ , que multiplicado por 3 (esponente de la potencia) da 6;



y como 6 corresponde al número 4096, infiero que  $16^3=4096$ , como en efecto se verifica.

4.º Si de la ecuacion  $z=a^x$  extraemos raices de diferentes grados, tendremos

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{a^x}=a^{\frac{x}{n}}; \sqrt[3]{a^x}=a^{\frac{x}{3}}; \dots \sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{a^x}=a^{\frac{x}{n}};$$

de donde sale (por ser  $\frac{x}{n}$  el esponente á que se ha

de elevar la base  $a$  para producir el número  $\sqrt[n]{z}$ ),

$$\text{que } \log.\sqrt[n]{z}=\frac{x}{n}=\frac{\log.z}{n};$$

que quiere decir que *para hallar el logaritmo de una raiz, se ha de dividir el logaritmo de la cantidad por el esponente de la raiz; y el número que en las tablas corresponda á este cociente, será la raiz que se pide.*

Así, si quiero extraer la raiz cuadrada de 4096, diré:  $\log.4096=6$ , que dividido por 2 (esponente de la raiz) da 3; y como 3 corresponde al número 64, digo que 64 es la raiz de 4096, ó que  $\sqrt{4096}=64$ , como en efecto se verifica.

208 Como el sistema de numeracion sigue su ley constante de diez en diez, tambien se ha elejido este número para base del sistema logarítmico mas usual; de modo que para la formacion de las tablas se han reunido las dos progresiones siguientes:

$$\begin{array}{l} \div 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. \&c. \\ \div 1:10:100:1000:10000:100000:1000000:\&c. \end{array}$$

Si en ellas se interpolase entre cada dos términos un número considerable de medios, los resultados formarían dos nuevas progresiones sumamente largas; y tomando en la geométrica los números naturales 1, 2, 3, 4, 5 &c. hasta 10000, hasta 108000, (de todas estas hay tablas impresas) hasta 200000, (de estas las hay calculadas, pero no impresas) &c. poniéndolos en



columna, y en otra á su derecha los términos correspondientes de la aritmética ó los logaritmos, se tendrían formadas las tablas como vulgarmente se presentan.

En todas las tablas de logaritmos está esplicada su disposicion particular, y las reglas para manejarlas; y como para entender estas dos cosas, suele aprovechar mas media hora de viva voz del Profesor, que toda la esplicacion que se puede poner en un libro de la naturaleza de este, y por otra parte en nuestro *Tratado elemental* decimos muy circunstanciadamente todo lo necesario para la inteligencia y uso de las de D. Tadeo Lope y Aguilar, que son de las que nos servimos, tanto en aquella obra como en esta, para todas las operaciones: y por otra parte, como esta misma esplicacion conviene á las otras tablas que hay publicadas, omitirémos aquí todo esto, y sólo harémos algunas observaciones.

209 Puesto que  $10^0=1$ , y  $10^1=10$ , verémos que  $\log.1=0$ ,  $\log.10=1$ ; luego el logaritmo de todo número díjito 2,3,4 &c. ha de ser mayor que 0 y menor que 1; esto es, será un quebrado decimal. Igualmente, como  $10^1=10$  y  $10^2=100$ , se inferirá que el logaritmo de todo número de dos cifras, desde 11 hasta 99 inclusive, ha de ser mayor que 1 y menor que 2, esto es, será *un entero* y un quebrado decimal. Del mismo modo se inferirá que el de todo número de tres cifras, desde 101 hasta 999 inclusive, será mayor que 2 y menor que 3; esto es, *dos enteros* y un quebrado decimal. Y en general que el logaritmo de todo número compuesto (escepto la unidad seguida de ceros) *consta de tantas unidades en enteros, como cifras tiene el número ménos una, y de un quebrado decimal*; si el número es la unidad seguida de ceros, su logaritmo *consta de tantas unidades como ceros acompañan á la unidad, y el quebrado decimal es cero*.

210 El número que espresa los enteros en los logaritmos, se llama *característica*, y el quebrado decimal se llama *mantisa*.

Luego dado un número, se puede conocer inme-



diatamente la característica de su logaritmo (209); y dado un logaritmo se puede saber inmediatamente las cifras que ha de tener el número en enteros, que son tantas mas una como unidades tenga la característica; por esta causa se suele omitir la característica en algunas tablas.

211 Los logaritmos de los números que crecen en progresion décupla tienen una misma mantisa; porque han de resultar de la suma del logaritmo del menor con el de 10, 100, 1000, &c.

que son 1, 2, 3, &c. sin mantisa. V. g. la mantisa de 23 es la misma que la de 230, de 2300, de 23000 &c.; porque

$$230 = 23 \times 10 \text{ y } (\S 207, 1.^{\circ}) \log.230 = \log.23 + \log.10;$$

$$2300 = 23 \times 100 \text{ y } \log.2300 = \log.23 + \log.100.$$

De donde resulta que si se añade una unidad á la característica de un logaritmo, corresponde á un número diez veces mayor, ó equivale á multiplicar por diez dicho número; si se añaden dos unidades, equivale á multiplicar por 100 el mismo número; y así sucesivamente. Y si se quita una unidad á la característica de un logaritmo, equivale á haber dividido su número por 10; si se le quitan dos, equivale á haber dividido su número por 100, &c. &c.

212 Se llama complemento aritmético de un número, lo que le falta para valer la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene dicho número. Así, el complemento de los números dígitos es lo que les falta para 10; el de los números de dos cifras, es lo que les falta para 100, &c. De donde se sigue que para hallar el complemento aritmético de un número cualquiera, se restará la cifra de las unidades de 10 y todas las demas de 9; ó al contrario, que es lo mejor, se restará, empezando por la izquierda, cada guarismo de 9, y el último significativo, ó el de las unidades de 10. Así, si quiero hallar el complemento de 357, diré: de 7 á 10 van 3; de 5 á 9 van 4; de 3 á 9 van 6; y tendré que comp. arit. de  $357 = 643$ ;



ó empezando por la izquierda diria: de 3 á 9 van 6; de 5 á 9 van 4, y de 7 á 10 (porque es el último) van 3, y tengo 643 como ántes; y haciendo la resta por el método ordinario (32) como aquí se ve (M): se halla lo mismo.

Si quiero hallar el de 8940, diré, empezando por la izquierda: de 8 á 9 va 1; de 9 á 9 va 0; de 4 á 10 (porque es el último significativo) van 6; de 0 á 0, va 0; y tengo comp.aritm.8940=1060.

$$\begin{array}{r} (M) \\ 1000 \\ 357 \\ \hline 643 \end{array}$$

213 Se llama tambien *complemento logarítmico de un número* al complemento aritmético de su logaritmo. Así, si quiero hallar el complemento logarítmico de 85436 buscaré su logaritmo, y encontraré que es 4,9316409;

y hallando el complemento de este, diciendo de 4 á 9 van 5; de 9 á 9 va 0; de 3 á 9 van 6; de 1 á 9 van 8; de 6 á 9 van 3; de 4 á 9 van 5; de 0 á 9 van 9; de 9 á 10 va 1: tendré que comp.log.85436=5,0683591.

214 El complemento aritmético convierte la operacion de restar en sumar; para lo cual se suma con el minuendo el complemento aritmético del sustraendo, y en la suma se rebaja la unidad (ó unidades) correspondiente al complemento; esto es, en las decenas, si el complemento fue á 10; en las centenas, si el complemento fue á 100, &c. Así, si quiero restar 438 de 787, con el 787 sumaré (A) el complemento de 438 que es 562, y en la suma 1349 tacharé el millar, y me quedará la resta verdadera 349.

$$\begin{array}{r} (A) \\ 787 \\ 562 \\ \hline 1349 \\ \hline 349 \end{array}$$

Esto se funda en que en vez de quitar de 787 el 438, le añado lo que le falta para mil; luego no sólo tendré que quitar el 438, sino ademas el 562; y como todo compone 1000, por eso se borra en la suma, donde corresponde, la unidad del complemento.

215 La importancia del complemento es cuando hay que hacer sumas y restas con las cantidades; pues entónces *sumando los complementos de las que*



se han de restar, y rebajando las unidades donde corresponda, con una sola operacion se hacen todas. Esto es lo que sucede en las proporciones, en que se quiere calcular el cuarto término por logaritmos; pues como su logaritmo se compondrá de la suma de los logaritmos de los medios, ménos el logaritmo del primero: en vez de sumar y restar, se suma con los logaritmos de los medios el complemento logarítmico del primero; y rebajando la decena en la característica, se tendrá el logaritmo del cuarto término. Así, si quiero hallar por logaritmos el cuarto término de esta proporcion  $864:1329::4635:x$ ,

$$\text{con.....log.1329} = 3,1235250$$

$$\text{sumo.....log.4635} = 3,6660497$$

$$\text{y.....comp.log.864} = 7,0634863$$

---


$$\text{y tendré .....log.x} = 3,8530610 = \text{log.7129,53;}$$

cuyo número será el cuarto término que se pide.

216 Por estensas que sean unas tablas, nunca pueden contener los logaritmos de todos los números; pero por su medio se pueden hallar. En efecto, si se quiere hallar el logaritmo de un número misto, se reducirá el entero á la especie del quebrado que le acompaña (71), y estará reducido á hallar el logaritmo de un cociente (207, 2.<sup>o</sup>). Así, si se pide el logaritmo de  $25\frac{4}{9}$ , diré:  $\text{log.}25\frac{4}{9} = \text{log.}\frac{229}{9} =$

$$\text{log.}229 - \text{log.}9 = 2,3598355 - 0,9542425 = 1,4055930$$

Si en vez de reducir el entero á la especie del quebrado, se convirtiese este en decimal con cinco guarismos, seria 25,44444; en este caso, poniendo 1 de característica, se encontraria que la mantisa es  $4055854 + 75 = 4055929$ , y  $\text{log.}25,44444 = 1,4055929$ , que sólo se diferencia del anterior en 1 en el séptimo guarismo decimal, que en nada influye.

217 El logaritmo de todo quebrado es *negativo* ó *defectivo*, como manifiesta la ecuacion  $a^m = n$ , en que si  $n$  ha de ser un quebrado, debe (118) por precision la  $m$  ser *negativa*, pues la base  $a$  es un nú-



mero entero. Pero como nosotros hemos sentado por regla general, que cuando se hayan de calcular quebrados se conviertan en decimales, sólo trataremos de estos introduciendo el complemento logarítmico, para evitar los logaritmos negativos. Así, si quiero el logaritmo de 0,37, diré:  $\log.0,37 = \log.\frac{37}{100} =$

$$\log.37 - \log.100 = \log.37 + \text{comp.}\log.100;$$

por consiguiente con  $\log.37 = 1,5682017$

$$\text{sumo.....comp.}\log.100 = 8,$$

y tengo..... $\log.0,37 = 9,5682017$ .

Si fuera  $\log.0,037 = \log.\frac{37}{1000}$ , diria:

con..... $\log.37 = 1,5682017$

$$\text{sumo.....comp.}\log.1000 = 7,$$

y tengo..... $\log.0,037 = 8,5682017$ .

Si fuera  $\log.0,0037 = \log.\frac{37}{10000}$ , diria:

con..... $\log.37 = 1,5682017$

$$\text{sumo.....comp.}\log.10000 = 6,$$

y tengo..... $\log.0,0037 = 7,5682017$ ;

y del mismo modo seria  $\log.0,00037 = 6,5682017, \&c.$

Donde observando que en todos ellos es la mantisa una misma, que es la de los guarismos significativos 37, y la característica respectiva 9, 8, 7, 6 &c., se deduce por regla general, que *el logaritmo de todo quebrado decimal tiene por característica 9, ó tantas unidades ménos que 9, como ceros hay entre la coma y los guarismos significativos, y por mantisa la misma que la de estos.*

218 Recíprocamente, si se pidiese el quebrado decimal á que correspondia un logaritmo dado, se pondria 0 y coma; despues se pondrian tantos ceros como unidades faltasen á la característica para 9; y luego las cifras significativas que correspondiesen á la mantisa. Así, se tiene  $9,6542343 = \log.0,45106$ ;  $8,7725711 = \log.0,059234$ ;  $7,3765770 = \log.0,00238$ .



*Aplicacion de los logaritmos á la estraccion de la raiz cúbica.*

219 Si para formar el cubo de un número, preferimos á la multiplicacion el ejecutarlo por medio de los logaritmos (207, 3.<sup>o</sup>), respecto del 47 diremos:

$$\log.47^3 = 3 \times \log.47 = 3 \times 1,6720979 =$$

$$5,0162937 = \log.103823,$$

que es en efecto el cubo de 47.

Más para extraer la raiz cúbica de un número cualquiera, siempre se hará por logaritmos; para lo cual, se dividirá (207, 4.<sup>o</sup>) el logaritmo del número por el esponente 3; y el número que corresponda á este cociente será la raiz cúbica, exacta ó aproximada.

Así, si quiero extraer la raiz cúbica de 592704 diré:

$$\log.\sqrt[3]{592704} = \frac{\log.592704}{3} = \frac{5,7728379}{3} =$$

$$1,9242793 = \log.84;$$

por consiguiente la raiz cúbica del número 592704 es 84 exactamente. El que lo quiera comprobar puede formar el cubo de 84, y encontrará 592704.

Igualmente se tiene

$$\log.\sqrt[3]{75425} = \frac{\log.75425}{3} = \frac{4,8775153}{3} =$$

$$1,6258384 = \log.42,2511;$$

$$\log.\sqrt[3]{7854679545} = \frac{\log.7854679545}{3} = \frac{9,8951286}{3} =$$

$$3,2983762 = \log.1987,8159.$$

*De las ecuaciones indeterminadas de primer grado.*

220 Dejamos dicho (142) lo que se entiende por problema indeterminado, y ecuacion indeterminada. Ahora añadimos, que se llama *cantidad constante* la que en una misma cuestion no puede tener mas de un



solo valor; y *cantidad variable*, la que en una misma cuestion puede tener todos los valores que se quiera. V. g. si quiero dividir el 12 en dos partes, puedo decir que son 8 y 4, ó 7 y 5, ó 9 y 3, ó  $10\frac{1}{2}$  y  $1\frac{1}{2}$ ; ó 15 y  $-3$  &c.; donde veo que las partes en que voy dividiendo el 12 son diferentes, y por lo mismo son *variables*; y el 12, que permanece uno mismo, es *constante*. El número de soluciones de una cuestion indeterminada, se limita en muchas ocasiones poniendo por condicion el que los números sean enteros y positivos. Las cantidades constantes se señalan con las primeras letras del alfabeto, y las variables con

las últimas; así,  $ax \pm bz = c$  que da  $z = \frac{c}{b} \mp \frac{ax}{b}$ ,

es la forma general de las ecuaciones indeterminadas de primer grado entre dos variables  $x$  y  $z$ . Pasemos á resolver algunas cuestiones.

221 1.<sup>a</sup> Hallar dos números cuya suma sea 16.

Res. Sean  $x$  y  $z$  los dos números que busco, y tendré planteado el problema en la ecuacion

$$x + z = 16, \text{ que da } z = 16 - x.$$

Ahora, dando valores á  $x$ , irán resultando para  $z$  los que aquí se ve:

Si  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$ ,  $x = 4$ ,  $x = 5$ ,  
será  $z = 16$ ,  $z = 15$ ,  $z = 14$ ,  $z = 13$ ,  $z = 12$ ,  $z = 11$ ,  
 $x = 6$ ,  $x = 7$ , 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,  
 $z = 10$ ,  $z = 9$ , 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0,  $-1$ .

Donde se ve que la primera y penúltima no son soluciones, porque no dan dos números, pues resulta uno de ellos  $= 0$ . La última tampoco es solucion, porque resulta un número negativo; y observando que la solucion  $x = 8$  á que corresponde  $z = 8$ , no da dos números diferentes, se deducirá que el infinito número de soluciones que se podian dar á la cuestion, queda reducido á sólo siete; pues v. g. la  $x = 5$  queda  $z = 11$ , es la misma que la  $x = 11$  que da  $z = 5$ . Por consiguiente, la cuestion en números enteros positivos y diferentes, sólo admite estas siete resoluciones:



1 y 15; 2 y 14; 3 y 13; 5 y 11; 6 y 10; 7 y 9.

222 2.<sup>3</sup> Dividir 53 en dos partes tales que la una sea divisible por 4, y la otra por 7.

Res. Puesto que la una ha de ser divisible por 4, la podremos llamar  $4x$ , y la otra será  $7z$ ; y tendremos  $4x+7z=53$ .

Ahora se despeja la  $x$ , ó en general la variable que tenga menor coeficiente; si en su espresion resulta quebrado, se igualará con otra variable del mismo signo que la del quebrado; se despeja esta; y si en su valor resulta quebrado, se hace lo mismo, hasta llegar á una variable que determine exactamente la anterior; en este caso, se va sustituyendo en los valores de las antecedentes, y se tendrán las del problema, que sólo dependerán de la última; se dan valores á esta, y se van formando las soluciones que satisfarán al problema. Así, aplicando este método á la anterior, como se ve en (A), despejando  $x$  y sacando los enteros tendré la (ec.B); igualo el quebrado que me ha resultado, con otra variable  $u$ , y tengo el valor (C); (le pongo el signo ménos, porque el numerador debe ser negati-

vo, si ha de ser entero, y de consiguiente el cociente de partir por 4 tambien lo será); despejo en esta la  $z$  y tengo el valor (D); igualo el quebrado con  $t$ , y tengo la (E); despejo la  $u$  y tengo el valor (F); ahora sustituyo este valor de  $u$  y  $t$  en el de  $z$  (D), y se con-

$$(A) \quad 4x+7z=53$$

$$(B) \quad x=\frac{53-7z}{4}=13-z+\frac{1-3z}{4}$$

$$(C) \quad \frac{1-3z}{4}=-u \text{ ó } 1-3z=-4u$$

$$(D) \quad z=\frac{4u+1}{3}=u+\frac{u+1}{3}$$

$$(E) \quad \frac{u+1}{3}=t \text{ ó } u+1=3t$$

$$(F) \quad u=3t-1$$

$$(G) \quad z=3t-1+t=4t-1$$

$$(H) \quad x=13-4t+1-3t+1=15-7t$$



vierte en (G); sustituyo el de  $z$  y el de  $u$  en el (B) de  $x$ , y sale el (H). Donde tengo los valores de las variables del problema, que sólo dependen de la variable  $t$ ; doy, pues, valores á esta empezando por cero, y tengo que

si  $t=0$ ,  $t=1$ ,  $t=2$ ,  $t=3$   
 sale  $z=-1$ ,  $z=3$ ,  $z=7$ ,  $z=11$   
 y  $x=15$ ,  $x=8$ ,  $x=1$ ,  $x=-6$ .

El valor  $t=0$  y  $t=3$  no satisfacen, porque dan negativa una de las partes del 53; luego sólo tiene el problema dos soluciones: primera  $t=1$ , que da  $z=3$ , y  $x=8$ , y las dos partes  $4x$  y  $7z$  del número serán 32 y 21, cuya suma =53; y segunda  $t=2$ , que da  $z=7$  y  $x=1$ ; y las dos partes del número serán 4 y 49, cuya suma =53.

223 3.<sup>a</sup> Un mercader compra paño de á 61 reales la vara, y paño de á 78; al ajustar cuentas encuentra que el paño de á 78 le ha costado 97 reales mas que el de á 61, cuánto compró de cada clase?

Res. Sea  $x$  el paño de á 61, con lo que  $61x$  será su valor; por lo mismo también será  $78z$  el valor del paño de á 78; y como el de á 78 le ha costado 97 reales mas, se tendrá planteado el problema en la ecuacion  $61x+97=78z$ , ó  $61x=78z-97$ .

De la que aplicando el mismo racionio de ántes, se sacará despues de haber sustituido las variables  $u$ ,  $t$ ,  $s$ ,  $r$ ,  $q$ , que  $x=78q+47$ , y  $z=61q+38$ .

Por consiguiente, dando valores, resulta que pudo comprar las siguientes varas de

paño de á 61  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } q=0, 1, 2, 3, 4, 5, \&c. \\ x=47, 125, 203, 281, 359, 437, \&c. \end{array} \right.$   
 Idem de á 78  $\left\{ \begin{array}{l} z=38, 99, 160, 221, 282, 343, \&c. \end{array} \right.$

Cuyos números satisfacen á la condicion de valer siempre 97 reales mas el paño de á 78 que el de á 61.

*De las permutaciones y combinaciones.*

224 Se llaman *permutaciones* los diferentes modos de disponer ó colocar muchas cosas las unas con



respecto á las otras; y se llaman *combinaciones* los diferentes modos de tomar muchas cosas de una en una, de dos en dos, de tres en tres &c. sin atender al orden con que se han de colocar.

Sean, pues, las cosas por permutar las letras del alfabeto. Si tuviéramos una sola letra tal como *a*, esta no admitiría nada mas que una permutacion. Si tomamos ahora dos letras *a* y *b*, se podrá poner la *a* ántes ó despues de la *b*, en esta forma *ab*, *ba*; luego dos letras se pueden permutar de  $2 \times 1$  maneras. Si suponemos ahora otra tercer letra *c*, esta se podrá colocar al principio, en medio y al fin de cada permutacion de las anteriores, y tendrémos las seis siguientes

*cab*, *acb*, *abc*, *cba*, *bca*, *bac*;

luego tres cosas ofrecen un número de permutaciones espresado por  $3 \times 2 \times 1$ ;

y en general siguiendo el mismo racionio, determinaríamos que un número *n* de letras ó cosas, ofrece un número de permutaciones espresado por

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2 \times 1.$$

Es prodijioso el número de permutaciones que ofrecen las cosas; pues si suponemos que en una clase entran nueve discípulos, y se quiere averiguar los diferentes modos de que podrán colocarse, este número estará espresado por

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880;$$

y suponiendo que cada cinco veces que se colocasen, lo hiciesen en un minuto, necesitarían 50 dias, 9 horas, y 36 minutos.

225 Si de las cosas que se dan para permutar fuesen dos iguales, el número de permutaciones se reduciría á la mitad, ó se debería partir por  $2 = 2 \times 1$ : como se ve en *ab* y *ba*, pues si  $a = b$  no hay mas que una *aa* ó *bb*. Si de las tres letras *a, b, c*, que dan seis permutaciones, fuese  $a = b$ ; no habria mas que las tres *cbb*, *bcb*, *bbc*, que es la mitad. Si hubiese tres letras iguales, el número de permutaciones se reduciría á la sexta parte, ó se debería dividir por  $6 = 3 \times 2 \times 1$ : como se ve en las seis permutaciones que dan *a, b, c*;



pues si  $a=b=c$ , se reducen á una sola  $aaa$  ó  $bbb$  ó  $ccc$ . Continuando del mismo modo se deducirá que si hubiese cuatro letras iguales, se debería dividir el número de permutaciones por  $4 \times 3 \times 2 \times 1$ ;

y en general que si hubiese  $m$  letras iguales, se debería dividir por  $m(m-1)(m-2) \dots 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ;

226 En las combinaciones generalmente se pone por condicion, que no se repita ninguna, cuando se forman las de dos en dos, de tres en tres, &c. Así, si se toman para combinar las diez letras  $a, b, c, d,$

$e, f, g, h, i, k$ , de una en una, darán  $10 = \frac{10 \times 1}{1}$

combinaciones. Si se quieren combinar de dos en dos, la  $a$  da las.....9,  $ab, ac, ad \dots ak$ ,

la  $b$  daría otras 9,  $ba, bc, bd \dots bk$ ,

y cada una daría 9; de modo que el número total será  $10 \times 9$ ; pero como  $ab$  y  $ba$ , no dan mas de una combinacion, y cada una se repetirá tambien dos veces,

el número de combinaciones diferentes será  $\frac{10 \times 9}{2} = 45$ .

Si las mismas letras se quieren combinar de tres en tres, cada dos darian ocho diferentes, cuyo total seria  $10 \times 9 \times 8$ ; pero como cada seis no formarían mas de una combinacion diferente, se deberá partir dicho

número por  $2 \times 3$ , y dará  $\frac{10 \times 9 \times 8}{2 \times 3} = 120$ .

Del mismo modo se sacará que de cuatro en cua-

tro darán  $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{2 \times 3 \times 4} = 210$ ;

y así sucesivamente.

Cor. Luego el jugador de lotería que acertase los cinco extractos, puede ganar

$$\frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ ambos; y } \frac{5 \times 4 \times 3}{2 \times 3} = 10 \text{ ternos.}$$

M

T. I.



*Proposiciones importantes acerca de las cantidades constantes y variables, y de los límites.*

227 Teor. *Si una cantidad variable  $X$  al paso que crece se acerca á la constante  $B$ , la constante  $B$  será mayor que la variable  $X$ .*

*Dem.* Sino es  $B > X$ , será  $B = X$ , ó  $B < X$ .

No puede ser  $B = X$ ; porque entónces, si  $X$  crece se separa del valor de  $B$ ; y si vuelve á crecer se volverá á separar mas; y á cada paso que vaya creciendo, se irá separando del valor de  $B$ ; lo cual no cumple con la circunstancia del teorema, que es aproximarse  $X$  á  $B$  al tiempo que crece; luego no puede ser  $B = X$ .

Tampoco puede ser menor; pues si  $B < X$ , al paso que  $X$  crezca, se diferenciará mas de  $B$ ; y por lo mismo no cumple con la circunstancia de que  $X$  al crecer se acerque á  $B$ ; luego no puede ser  $B < X$ ; luego si  $B$  no puede ser igual ni menor que  $X$  será

$B > X$ , que era L. Q. D. D.

228 Teor. *Si una cantidad variable  $X$  al paso que mengua, se acerca á la constante  $B$ , esta  $B$  será menor que  $X$ .*

*Dem.* En efecto, sino es  $B < X$ , será igual ó mayor. Si es  $B = X$ , y  $X$  mengua, se diferenciará de  $B$ ; y si vuelve á menguar, se diferenciará mas; y al paso que vaya menguando, se irá diferenciando mas de  $B$ ; lo que no puede ser, pues la condicion del teorema exige que se vaya aproximando.

Tampoco puede ser  $B > X$ , pues al paso que  $X$  mengüe, se irá diferenciando mas de  $B$ , que tampoco cumple con lo enunciado. Luego si  $B$  no puede ser igual ni mayor que  $X$ , será  $B < X$ , que es L. Q. D. D.

229 Teor. *Si dadas dos cantidades desiguales, de la mayor se quita la mitad, y de lo que quede la mitad, y así sucesivamente, se llegará á un resultado que será menor que la otra cantidad, por pequeña que sea.*

*Espl.* Sean  $B$  y  $K$  estas dos cantidades (esto es,  $B$  tan grande y  $K$  tan pequeña como se quiera); digo



que si de la mayor  $B$  se quita la mitad, y de lo que quede la mitad, y así sucesivamente, llegaré á tener un residuo menor que la otra cantidad  $K$ , por pequeña que esta sea.

*Dem.* Multiplíquese  $K$  por un número  $n$ , tal, que el producto  $nK$  sea mayor que  $B$ , y al mismo tiempo sea el múltiplo mayor mas aproximado al valor de  $B$ ; y en este caso será  $B < nK$ .

Ahora, si estas cantidades son desiguales, tambien tendrán desiguales sus mitades, y se tendrá  $\frac{B}{2} < \frac{nK}{2}$ ;

pero si en vez de tomar la mitad de  $nK$ , se quita solamente  $K$  (que será igual con la mitad de  $nK$  sólo cuando  $n=2$ , y en todos los demas casos será menor que la mitad de  $nK$ ), con mayor razon quedarán desiguales; luego  $\frac{1}{2}B < nK - K = (n-1)K$ .

Si de estas cantidades desiguales quitamos la mitad, tambien quedarán desiguales; y si de la mayor quitamos ménos de la mitad (como será quitar  $K$  en el caso de que  $(n-1)$  sea mayor que 2), con mas razon quedarán desiguales, y se tendrá  $\frac{1}{4}B < (n-2)K$ ; y como siguiendo quitando á la menor la mitad, y á la mayor la cantidad  $K$  (que sólo será igual con la mitad en el caso de que el múltiplo que reste de  $K$  sea el duplo) los resultados quedarán siempre desiguales: tendrémós que al haber hecho un número de divisiones y restas, espresado por  $n-1$ , los resultados

$$\frac{B}{2^{n-1}} \text{ y } nK - (n-1)K = K,$$

quedarán aun desiguales, esto es,  $\frac{B}{2^{n-1}} < K$ ;

luego  $K$  será mayor que el residuo que nos quede de haber quitado á  $B$  la mitad, y á lo que quede la mitad &c. que es L. Q. D. D.

*Cor. 1.º* De aquí resulta que si de dos cantidades desiguales de la mayor se quita mas de la mitad, y de lo que quede mas de la mitad, y así sucesiva-



mente, con mas razon podemos asegurar que lo que resulte, podrá llegar á ser menor que una cantidad dada, por pequeña que sea.

Cor. 2.<sup>o</sup> Tambien resulta que podemos concebir á toda variable un valor menor que cualquier otra cantidad dada, por pequeña que sea.

Porque se puede suponer que la ley de su variacion sea el irse haciendo sucesivamente dos veces ó mas de dos veces menor.

Cor. 3.<sup>o</sup> Y como un producto (61, 3.<sup>o</sup>) disminuye al paso que mengua uno cualquiera de sus factores, cuando se quiera hacerle menor que cualquier cantidad dada, basta hacer á uno de los factores sucesivamente dos veces ó mas de dos veces menor.

230 Teor. Si la variable  $X$  se puede acercar á un mismo tiempo (creciendo ó menguando) tanto como se quiera á dos constantes  $A$ ,  $B$ , dichas constantes serán iguales.

Dem. Sino es  $A=B$ , será  $A=B+K$ ; y entónces acercándose  $X$  á  $A$  tanto como se quiera, no se podrá acercar á  $B$  al mismo tiempo, pues se acercaria á  $B+K$ , y lo impediria la cantidad  $K$ ; y como por el supuesto se puede  $X$  acercar á  $A$  y  $B$  á un mismo tiempo tanto como se desee, se sigue que no puede haber ninguna diferencia entre ellas; luego serán iguales. L. Q. D. D.

231 Teor. Si dos variables  $X$ ,  $Z$ , creciendo ó menguando, se pueden acercar tanto como se quiera á dos constantes  $A$ ,  $B$ , la relacion de las constantes será la misma que la de las variables, y se tendrá  $A:B::X:Z$ .

Espl. Esta proposicion tiene dos partes, á saber: cuando las variables crecen, y cuando menguan, ó lo que es lo mismo: primero, cuando  $A>X$ ,  $B>Z$ ; y segundo, cuando  $A<X$ ,  $B<Z$ .

Dem. 1.<sup>o</sup> Sino se verifica que  $A:B::X:Z$ , será  $A:B>X:Z$ , ó  $A:B<X:Z$ .

Si  $A:B>X:Z$ , podremos hacer que crezca el antecedente  $X$  de la segunda razon lo suficiente, para



que esta resulte igual con la primera; y suponiendo que sea  $X'$  dicho antecedente, se tendrá

$$A:B::X':Z \text{ (m), siendo } X' > X;$$

pero por pequeña que sea la diferencia  $X' - X$ , todavía por el supuesto puede ser menor la diferencia  $A - X$ ; luego será  $A - X < X' - X$ ;

y como estas dos diferencias, desiguales, tienen el mismo consecuente, el antecedente de la primera (171 cor.) será menor que el de la segunda, y se tendrá  $A < X'$ .

Comparando estas dos cantidades con una misma  $B$ , cuando se compare la menor se tendrá (171 cor.) menor razón, y será  $A:B < X':B$ ;

pero (prop. m)  $A:B::X':Z$ ;

luego sustituyendo esta segunda razón en vez de la primera, se tendrá  $X':Z < X':B$ ;

y como estas dos razones tienen un mismo antecedente, la menor tendrá (171 cor.) mayor consecuente, ó lo que es lo mismo, será  $Z > B$ , que es contra el supuesto; luego no puede ser  $A:B > X:Z$ .

Tampoco puede ser menor; porque si  $A:B < X:Z$ , podrémos hacer que crezca el consecuente  $Z$  de la segunda razón, para que mengüe esta y resulte igual con la primera; y representándole por  $Z'$ , se tendrá

$$A:B::X:Z' \text{ (n) y } Z' > Z;$$

pero por pequeña que sea la diferencia  $Z' - Z$ , puede ser aun menor la  $B - Z$  por el supuesto; luego será

$$B - Z < Z' - Z, \text{ lo que da } B < Z'.$$

Comparando ahora la cantidad  $A$  con estas dos, cuando se compare con la menor  $B$ , se tendrá mayor razón, esto es,  $A:B > A:Z'$ ;

pero (prop. n)  $A:B::X:Z'$ ;

luego sustituyendo se tendrá  $X:Z' > A:Z'$ ;

y como estas dos razones tienen un mismo consecuente, la mayor tendrá mayor antecedente, y dará  $X > A$ , que tambien es contra el supuesto; luego sino puede ser  $A:B >$  ni  $< X:Z$ , será  $A:B::X:Z$ ,

que era L. 1.º Q. D. D.

2.º En el caso de  $A < X$  y  $B < Z$ , tendríamos que sino fuese  $A:B::X:Z$ , seria  $A:B >$  ó  $< X:Z$ .



Supongamos en primer lugar que  $A:B > X:Z$ , en cuyo caso se hará  $A:B::X:Z'$  (o), siendo  $Z' < Z$ ; y discurrendo como ántes sacarémos  $Z-B < Z-Z'$ ; de donde (171 cor.) sale  $B > Z'$ ; comparando ahora la  $A$  con estas dos cantidades, dará  $A:B < A:Z'$ , y en virtud de la (prop. o), será  $X:Z' < A:Z'$ , que (171 cor.) da  $X < A$ , que es contra el supuesto; luego no puede ser  $A:B > X:Z$ .

Tampoco puede ser menor; porque si  $A:B < X:Z$ , se podrá hacer  $A:B::X':Z$  (p), siendo  $X' < X$ ; y siguiendo el raciocinio del caso anterior se deducirá que  $X-A < X-X'$ , lo que nos dará  $A > X'$ ; y comparando con una misma cantidad  $B$ , se tendrá  $A:B > X':B$ , ó (prop. p)  $X':Z > X':B$ , de donde resulta  $Z < B$ , que tambien es contra el supuesto; luego sino puede ser  $A:B >$  ni  $< X:Z$ , será  $A:B::X:Z$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* De aquí resulta que si la segunda razon fuese de igualdad, la primera tambien lo seria; ó lo que es lo mismo, si las variaciones de  $X$  y  $Z$  fuesen tales que en todos los casos se tuviese  $X=Z$ , se tendria  $A=B$ , ó las constantes serian iguales.

*Esc. 1.º* El caso de  $A > X$  y  $B < Z$  no tiene lugar; porque cuatro cantidades de esta especie, comparadas ordenadamente, jamas pueden formar proporcion.

*Esc. 2.º* Los principiantes deben procurar familiarizarse mucho con el lenguaje de la demostracion anterior; pues en lo sucesivo sólo pondrémos las desproporciones y consecuencias que de ellas resulten.

232 Cuando una cantidad variable se puede acercar á otra constante tanto como se quiera, de manera que la diferencia entre ellas pueda llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, pero sin que jamas puedan llegar á ser iguales, se llama á la constante *límite* de la variable.

En la idea de límite están comprendidas esencialmente dos: la primera que la cantidad se pueda acercar al límite tanto como se quiera; y la segunda que jamas pueda llegar á serle igual.



Por esta causa  $A$  y  $B$  (§ 230) son el límite de  $\lambda$ ; y aquella proposicion quiere decir, que *si dos cantidades son límite de una tercera, son iguales entre sí.* Igualmente (§ 231)  $A$  es el límite de  $X$  y  $B$  el de  $Z$ ; y dicha proposicion quiere decir, que *si dos variables al crecer ó menguar, se acercan respectivamente á sus límites, la relacion de estos es la misma que la de las variables.*

233 *Toda cantidad variable tiene dos límites: uno verdadero que es 0; y otro que es un límite considerado, y se representa por  $\frac{1}{0}$ .*

En efecto, si  $x$  es dicha variable, y á cada variacion se va convirtiendo en ser la mitad ó menor que la mitad, al cabo de cierto tiempo llegará á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea; y por lo mismo la diferencia entre  $x$  y 0 podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada. Por otra parte,  $x$  jamas llegará á ser cero, miéntras permanezca cantidad; luego el 0 tiene las dos circunstancias esenciales al límite, y por lo mismo *es el límite de las cantidades que decrecen.*

Ahora, si en la espresion  $\frac{a}{x}$  ó  $\frac{1}{x}$ , la  $x$  va dis-

minuyendo,  $\frac{a}{x}$  ó  $\frac{1}{x}$  irá aumentando; y como  $x$  pue-

de disminuir tanto como se desee, resulta que  $\frac{a}{x}$  ó  $\frac{1}{x}$ ,

podrá llegar á ser mayor que toda cantidad asignable; pero  $x$  al disminuir se va acercando continua-

mente á su límite 0, luego la espresion  $\frac{a}{x}$  ó  $\frac{1}{x}$

se irá acercando continuamente á  $\frac{a}{0}$  ó  $\frac{1}{0}$ ;

que *es el límite de las cantidades que crecen.*



*Esc.* Este límite no es verdadero; porque no contiene la segunda propiedad del límite; en efecto, no se puede suponer que siendo  $Z$  una variable, que va creciendo, le falta para llegar á ser  $\frac{1}{\circ}$  la cantidad  $K$ ; porque entónces añadiendo á  $Z$  la  $K$ , debería ser  $Z+K=\frac{1}{\circ}$ , y por consiguiente  $\frac{1}{\circ}$  no podría exceder de  $Z+K$ , que es contra el supuesto de que  $\frac{1}{\circ}$  puede ser mayor que toda cantidad dada, por grande que sea.

234 A la espresion  $\frac{1}{\circ}$  se le suele dar el nombre de *infinito*, y se señala con este signo  $\infty$ ; de manera que  $\frac{1}{\circ}$  é  $\infty$  representan una misma cosa.

Puesto que  $\frac{1}{\circ}=\infty$ , si quitamos el divisor será

$$1=\circ\times\infty; \text{ y dividiendo por } \infty, \text{ será } \frac{1}{\infty}=\circ;$$

lo que suministra otro medio de representar el cero, límite de las cantidades que decrecen.

235 La espresion  $1=\circ\times\infty$ , ó  $a=\circ\times\infty$ , da á conocer que *una cantidad cualquiera se puede suponer representada por cero multiplicado por el infinito.*

Si en vez de  $\infty$  ponemos su valor  $\frac{a}{\circ}$  ó  $\frac{1}{\circ}$ , será

$$a=\circ\times\frac{a}{\circ}=\frac{a\times\circ}{\circ}=\frac{\circ}{\circ};$$

y si en vez de  $\circ$  sustituimos  $\frac{1}{\infty}$ , será

$$a=\circ\times\infty=\frac{1}{\infty}\times\infty=\frac{\infty}{\infty};$$

donde se ve que tambien es símbolo de una cantidad

cualquiera la espresion  $\frac{\circ}{\circ}$  ó  $\frac{\infty}{\infty}$ .

236 Todos estos símbolos sirven para indicarnos, cuándo las circunstancias con que tratamos de determinar una cantidad, son insuficientes para este objeto, por convenir á cualquier cantidad en general. V. g. esta cuestion,



Un hombre, á quien se pregunta cuánto dinero tiene, responde: si al triplo de mi dinero añado 5 duros, tengo dos veces la séptima parte de 21, mas cinco octavas partes de veinticuatro veces mi dinero partido por cinco, ménos un duro. Cuánto dinero tenia?

Res. Llamando  $x$  á dicho número, tendré planteado el problema en la siguiente ecuacion:

$$3x+5=\frac{2}{7}\times 21+\frac{5}{8}\times\frac{24x}{5}-1;$$

que practicando lo dicho (150), tendré

$$3x-\frac{5}{8}\times\frac{24x}{5}=\frac{2}{7}\times 21-5-1, \text{ ó } x(3-\frac{5}{8}\times\frac{24}{5})=\frac{2}{7}\times 21-5-1$$

$$\text{que da } x=\frac{\frac{2}{7}\times 21-5-1}{3-\frac{5}{8}\times\frac{24}{5}}=\frac{\frac{42}{7}-5-1}{3-\frac{120}{40}}=\frac{6-5-1}{3-3}=\frac{0}{0}.$$

Lo que manifiesta que la cantidad  $x$  puede tener un valor cualquiera. Para que no se estrañe este resultado, se ejecutarán las operaciones indicadas en el segundo miembro de la ecuacion, y se tendrá

$$3x+5=\frac{42}{7}+\frac{120}{40}x-1=6+3x-1=3x+5;$$

que quiere decir que el triplo de dicho número mas cinco, es igual con el mismo triplo mas cinco. Y como cualquier cantidad es igual con ella misma, resulta que toda ecuacion en que los dos miembros estén representados por una misma cantidad, no puede servir para determinarla; y por lo mismo el cálculo debe indicar en el último resultado, que cualquier cantidad cumple con la circunstancia exigida.

Esc. Esta clase de ecuaciones se llaman *idénticas*; y aunque las espresiones que se reducen á  $\frac{0}{0}$  pueden tener en general un valor cualquiera, hay casos particulares en que no tienen mas de uno solo y determinado, como veremos á su tiempo.



## GEOMETRÍA.

## PARTE PRIMERA.

*Nociones preliminares*

237 **G**eometría es la ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la estension, en cuanto terminada ó figurada. De consiguiente, entre todas las propiedades de los cuerpos que hemos dado á conocer (intr.), la Geometría sólo considera la *estension* y la *figurabilidad*.

Para adquirir una idea exacta de la estension, se observará que un cuerpo cualquiera, v. g. un libro, en cualquier paraje que esté, ocupa una parte del espacio; y quitado de allí, la parte del espacio se quedará donde estaba, la cual es la *estension* del libro.

Donde se ve que el objeto de la Geometría no es la estension impenetrable del cuerpo, sino la parte del espacio que ocupa, en donde se pueden ir colocando sucesivamente otros diferentes cuerpos.

Todo cuerpo es estenso en tres sentidos diferentes que se llaman *dimensiones*; cada una de estas tiene su nombre particular, relativo al modo con que se considera el cuerpo. Así, la dimension que al mirar un cuerpo es la mas larga, se llama *longitud*; la que constituye lo ancho del cuerpo, se llama *latitud*; y la que constituye el grueso, altura ó profundidad, se llama *profundidad* ó *grueso*. Así, en el libro (fig. 1) visto de plano, lo que hay desde A á B es la longitud; lo que hay desde B á D la latitud; y lo que hay desde B á G su grueso; pero si se mira el libro de canto, por la parte DFGB, entónces se llamará longitud á la DB, latitud á la BG, y profundidad á la AB, que ántes era la longitud.

238 La estension de un cuerpo se llama tambien *volúmen* ó *cuerpo geométrico*; y aunque para consti-



tuirlos son indispensables las tres dimensiones, ó por mejor decir, aunque en la estension de todo cuerpo existen simultáneamente las tres dimensiones, sin embargo por medio de la abstraccion podemos prescindir de una, de dos, y aun de las tres. Así, prescindiendo del grueso BG, queda sola la estension con las dos dimensiones, longitud AB, y latitud BD, que es lo que se llama *superficie*.

Si en esta prescindimos de la latitud BD, queda la idea de estension en sola longitud, que se llama *línea*; y si ahora prescindimos de esta longitud, no quedará absolutamente nada de la estension; y á esta idea que resulta, se le llama *punto matemático*. De modo que así como para formarnos idea de la *nada* ó de *cero*, es necesario prescindir de toda cantidad, igualmente para formarse una idea cabal del punto, es necesario prescindir de toda estension; por manera que *punto matemático*, y *cero* ó *carencia de toda estension*, es una misma cosa.

239 De todo lo dicho resulta: 1.<sup>o</sup> que *la superficie no tiene nada de grueso, y que es el límite de los cuerpos*; pues para formarnos su idea prescindimos de él; pero si en vez de prescindir de una vez, suponemos que va disminuyendo poco á poco, el cuerpo se irá acercando á la superficie, sin que jamas pueda confundirse con ella, hasta que el grueso se reduzca á cero, esto es, hasta que no haya cuerpo, que son las dos circunstancias del límite (232).

2.<sup>o</sup> Que *la línea no tiene nada de grueso ni de ancho, y por lo mismo, es el límite de la superficie*.

3.<sup>o</sup> Que *el punto no tiene ninguna dimension, y es el límite de la línea, y de toda estension*.

240 La línea se divide en *recta* y *curva*; línea recta es la que tiene todos sus puntos en una misma *direccion*; esto es, aquella que está dispuesta de tal manera, que colocándose en uno de sus extremos, quedan ocultos todos sus puntos intermedios, como sucede en las alamedas puestas á cordel, y con los guias de un regimiento cuando están alineados; tales son las



que queremos representar por las AB, BD, CD, &c.

Curva es *aquella cuyos puntos no están todos en una misma direccion*, como la DF, BG, &c.

241 La superficie se divide en *plana y curva*; se llama plana, *aquella cuyos puntos están todos tan altos los unos como los otros*, como la ABDC; y curva *aquella cuyos puntos no están todos tan altos los unos como los otros*, como la CDFE. Además, las superficies y líneas curvas, pueden ser *cóncavas y convexas*: las cuales toman estas denominaciones, según el aspecto bájo que se miran.

242 La Geometría tiene tres partes: la primera trata de las líneas; la segunda de las superficies; y la tercera de los volúmenes.

En la primera parte se supone que todas las líneas están trazadas sobre un *plano matemático*, que es una superficie plana (241) que concebimos sin límites, y con tal perfección cual no existe en la naturaleza.

243 *Una recta queda determinada, en fijando dos de sus puntos*. Porque la esencia de la línea recta, es que todos sus puntos estén en una misma direccion; y como en la idea de direccion sólo entra la del punto ó paraje A (fig. 2), de donde se parte, y la del punto ó sitio B á que uno se dirige, se sigue que los puntos intermedios deben quedar cubiertos por los extremos A y B; y los que se supongan á la izquierda de A le deben cubrir, como igualmente los que se supongan á la derecha de B, deben quedar cubiertos por él. Pero este conocimiento ha provenido sólo de los dos puntos A y B; luego *dos puntos determinan la posición de una recta*.

244 *Un punto no es suficiente*; porque desde un punto O se puede ir á todas partes; y en el mismo punto O pueden concurrir todas las direcciones que se quieran.

Cor. 1.º *Desde un punto A á otro B (fig. 3) no se puede tirar mas de una línea recta; pero sí infinitas curvas*. Porque si se pudiese tirar mas de una recta, no bastarian dos puntos para fijar su posición;



pero no yendo en línea recta, se podrá ir por ACB, ó por ADB, ó por AEB &c.

Cor. 2.<sup>o</sup> *La distancia entre dos puntos se debe medir por una recta; porque es la única que se puede tirar de su especie.*

Cor. 3.<sup>o</sup> *Dos rectas no pueden encontrarse mas que en un punto; porque si se encontrasen en dos, se confundirían en una sola; y de consiguiente no habría dos rectas, que es contra el supuesto.*

245 Por suponerse las rectas tiradas en un mismo plano, y no tener este límites, inferimos que cuando se necesite, se podrán concebir prolongadas ó acortadas las líneas; y que en siendo rectas se podrán *superponer*, de manera que se confundan en un todo si son iguales, ó en aquella parte que tengan de comun; y recíprocamente, *si al superponer dos rectas se confunden sus extremos, se habrán confundido en toda su longitud, y de consiguiente serán iguales.*

*Esc.* Se dice que dos líneas tienen una *comun medida*, ó que son *comensurables*, cuando ambas contienen á una tercera de su misma especie un número exacto de veces.

246 Entre la infinidad de curvas que puede concebir nuestra imaginacion, la Geometría elemental sólo considera la *circunferencia de círculo*, que es una *línea curva reentrante*, cuyos puntos distan todos igualmente de uno que se llama *centro*: tal es (fig. 4) la AEBD, cuyo centro es C. El espacio ó superficie que encierra la circunferencia, se llama *círculo*. Las rectas CA, CE, &c. que desde el centro van á parar á la circunferencia, se llaman *radios*; los cuales son todos iguales, por medir (244 cor. 2.<sup>o</sup>) la distancia de la circunferencia al centro, y ser dicha distancia una misma en todos los puntos.

Toda línea DCE, que pasando por el centro termina con sus extremos en la circunferencia, se llama *diámetro*; por consiguiente *el diámetro es igual á dos radios ó al duplo de uno*; y como todos los radios son iguales, *tambien lo serán los diámetros.*



*Esc.* Para tirar rectas y describir circunferencias, se emplea la *regla* y el *compas*, cuya construcción y uso se entiende fácilmente con la explicación del Profesor.

247 Se llama *arco* una porción cualquiera de la circunferencia; así, la parte BFD es un arco, y la parte DAB es otro arco; toda recta BD que desde un extremo de un arco va á parar al otro, se llama *cuerda* del arco; y se llama *sajita* del mismo arco, á la parte FG del radio FC, interceptada entre el punto medio de dicho arco y la cuerda. Se llama *sector* de círculo, al espacio Cbfd, comprendido por dos radios y un arco; y se llama *segmento*, al espacio comprendido entre una cuerda y su arco, tal es el BDF. Siempre que se hable de arcos ó cuerdas, se entiende de los menores.

Cuando dos circunferencias ABD, *abd* (fig. 5), tienen un mismo centro C, se dice que son *concéntricas*; y cuando tienen diferentes centros, se llaman *escéntricas*.

El espacio ABDdba, comprendido entre dos circunferencias concéntricas, se llama *corona* ó *ánulo*.

248 Teor. *Dos circunferencias concéntricas no se pueden encontrar sin confundirse en una sola.*

*Dem.* Porque ó sus radios son iguales ó desiguales: si son iguales, todos los puntos de la una se confundirán exactamente con los de la otra, y por lo mismo se habrán confundido en una sola. Si los radios son desiguales, la que tenga menor radio estará toda dentro de la otra, habiendo siempre entre ellas una distancia igual á la diferencia de los radios. Luego *dos circunferencias &c.*

*Cor.* De donde se deduce que *si dos circunferencias tienen un mismo radio serán iguales; y colocada la una sobre la otra, de manera que se confundan sus centros, se confundirán todas ellas.*

249 Teor. *El diámetro divide al círculo y á la circunferencia en dos partes iguales.*

*Espl.* Sea el círculo ABDE (fig. 6); digo que si



se dobla por el diámetro AD, la parte AED caerá exactamente sobre la ABD; y habiéndose confundido serán iguales.

*Dem.* Si la parte AED no cae sobre ABD, caerá ó por mas arriba ó por mas abajo. Si cayese por mas arriba, y estuviese representada por AND, tirando la NC, esta seria un radio del círculo, y por consiguiente igual con BC, radio tambien del mismo círculo; lo que es absurdo, por ser NC todo y BC parte suya; luego no se puede suponer que caiga por mas arriba. Si cae por mas abajo, y se representa por AMD, tirando la MC, será un radio del círculo, y por consiguiente igual con BC, lo que tambien es imposible; luego no puede caer por mas abajo. Luego sino puede caer ni por mas arriba ni por mas abajo, se habrán confundido y serán iguales. L. Q. D. D.

250 Cuando dos líneas AB, AC (fig. 7) se encuentran en un punto A, se llama *ángulo* á la abertura ó inclinacion que tienen entre sí; el punto A donde se encuentran, se llama *vértice*; y se llaman *lados* las dos líneas AB, AC, que le forman.

Cuando un ángulo está solo, se enuncia nombrando la letra del vértice; pero cuando en un mismo punto se forman varios ángulos, se leen las tres letras, pronunciando siempre en medio la del vértice; así, el de la (fig. 7) se leerá BAC ó CAB.

Es mas sencillo aun poner una letra minúscula dentro del vértice y pronunciarla sola; así, el mismo ángulo se leerá con mas sencillez *el ángulo n*.

Si se prolonga la CA hasta D, la AB formará con la parte prolongada AD el ángulo BAD ó *m*, cuyos dos ángulos BAC, BAD ó *n*, *m*, se llaman *ángulos contiguos ó adyacentes*.

Como, ya se prolonguen ó acorten las líneas AB, AC, su direccion no se altera (245), resulta que la inclinacion que tienen entre sí no varía; por lo que *la cantidad de un ángulo no pende de la longitud de sus lados, sino de su inclinacion*.

Cuando los lados del ángulo son líneas rectas, se



llama *rectilíneo* ó ángulo *plano*; cuando curvas, *curvilíneo*, como DAC (fig. 3); y cuando uno de los lados es una línea recta, y el otro una curva, se llama *mistilíneo*, tal es el CAB.

251 Teor. *Dos ángulos iguales se pueden superponer de modo que se confundan.*

*Espl.* Si el ángulo  $bac = BAC$  (fig. 8), y se coloca el uno sobre el otro, de manera que el vértice *a* caiga sobre el A, y *ac* sobre AC, digo que *ab* caerá sobre AB, y quedarán confundidos en uno solo.

*Dem.* Si esto no se verifica, la *ab* caerá por mas arriba de la AB, ó por mas abajo. Si cae por mas arriba y toma la direccion AN, se tendrá que *bac* estará representado por NAC, ó será igual con él; y como por el supuesto  $bac = BAC$ , será (intr. ax. 5.<sup>o</sup>)  $NAC = BAC$ , lo que es absurdo: pues NAC es todo y BAC parte suya; luego la *ab* no puede caer por mas arriba de AB.

Si cae por mas abajo, y se representa por AM, se tendrá  $MAC = bac$ ; y como por el supuesto  $BAC = bac$ , será  $MAC = BAC$ ; lo cual siendo tambien absurdo, por ser MAC parte y BAC todo, manifiesta que no puede caer por mas abajo. Luego se confundirán. L. Q. D. D.

*Esc.* Recíprocamente, si dos ángulos son tales que puesto el uno sobre el otro se confunden exactamente, serán iguales; pues para formarnos la idea de la igualdad ó desigualdad de dos cosas, siempre recurrimos á la superposicion. Ademas, advertimos que siempre que digamos de dos cosas, que son *iguales* han de ser tales que se puedan superponer, como sucede con un duro que se puede superponer á otro duro, y no se ve mas de uno; y cuando una cosa valga tanto como otra, pero que puesta la una sobre la otra no se ajusten exactamente, como sucede con un duro y dos medios duros ó cinco pesetas, las llamaremos *equivalentes*.

252 Cuando una línea DC (fig. 9) forma con otra AB los dos ángulos adyacentes DCA, DCB, iguales entre sí, cada uno de dichos ángulos se llama *recto*, y la línea DC *perpendicular* á la AB; de manera que



una línea es perpendicular á otra *cuando forma con ella dos ángulos iguales, ó cuando cae sin inclinarse mas hácia un lado que hácia otro.*

Todo ángulo BCK, menor que uno recto, se llama *agudo*; todo ángulo ACK, mayor que uno recto, se llama *obtusos*; y se llaman *ángulos opuestos al vértice* los que tienen sus vértices opuestos, como AOD y COB (fig. 13), y AOC y DOB.

Toda línea CK (fig. 9) que forma con otra dos ángulos desiguales, se llama *oblicua* respecto de ella.

253 Teor. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*

*Espl.* Sea DC perpendicular á AB, lo que supone (252) que los ángulos DCA, DCB, son rectos é iguales entre sí; y sea HG perpendicular á EF, lo que tambien supone que los ángulos HGE, HGF, son rectos é iguales entre sí; pues voy á demostrar que estos últimos son iguales con los primeros.

*Costruccion.* Tómese  $AC=EG$ ,  $CB=GF$ , y se tendrá  $AB=EF$ ; colóquese la EF sobre la AB, de modo que se confundan sus extremos, en cuyo caso el punto G, extremo de EG, caerá sobre el punto C, extremo de su igual AC; y digo que la línea GH caerá sobre la CD.

*Dem.* Porque si esto no se verifica, el lado GH caerá fuera del CD; si suponemos que tenga la direccion CK, se tendrá  $ACK=KCB$ , por ser estos ángulos los que representan á los EGH, HGF, iguales por el supuesto; pero esto es un absurdo, porque siendo tambien por el supuesto  $ACD=DCB$ , no se puede verificar que ACK que es mayor que ACD, sea igual con KCB que es menor que DCB, ó que su igual ACD; luego no se puede suponer que la GH caiga fuera de la CD; luego caerá encima, y se confundirá EGH con ACD, y HGF con DCB; luego se tendrá  $EGH=ACD$  y  $FGH=BCD$ , que era L. Q. D. D.

254 Teor. *Los dos ángulos juntos que forma una línea al caer sobre otra, valen dos ángulos rectos.*

N

T. I.



*Espl.* Si KC cae sobre AB de un modo cualquiera, digo que la suma de los dos ángulos ACK, KCB, contiguos que forma con ella, equivalen á dos rectos.

*Dem.* Concíbese la perpendicular CD, y tendremos que los dos ángulos ACD, DCB serán rectos; y como  $ACK = ACD + DCK$ , se tendrá  $ACK + KCB = ACD + DCK + KCB$ ; pero  $DCK + KCB$  componen el ángulo recto DCB, luego resultará  $ACK + KCB = ACD + DCB = 2$  rectos  $= \pi$ , que era L. Q. D. D.

*Esc.* De aquí en adelante llamaremos  $\pi$  á la suma de dos ángulos rectos, y por consiguiente  $\frac{1}{2}\pi$  al ángulo recto.

*Cor. 1.º* Si uno de los ángulos ACK ó KCB es recto, lo será igualmente el otro; porque entre los dos han de valer dos rectos.

*Cor. 2.º* Si una línea CD (fig. 10) es perpendicular á otra AB, esta AB lo será á la primera CD. Porque como la CD es perpendicular á AB, se tiene  $AEC = CEB$  por rectos; y como de ser el AEC recto, se deduce que su adyacente AED tambien lo ha de ser, resulta que la AE es perpendicular (252) á la CD.

De ser recto el ángulo CEB, se deduce que su contiguo BED lo ha de ser; luego cuando dos perpendiculares se cruzan, forman cuatro ángulos rectos.

*Cor. 3.º* Todos los ángulos ACF, FCD, DCE, ECB, que se forman (fig. 11) en un punto, hácia un mismo lado de una recta AB, valen juntos dos ángulos rectos ó  $\pi$ ; y todos los ángulos ACF, FCD, DCE, ECB, BCP, PCN, NCM, MCA, que se pueden formar al rededor de un punto C, no valen mas ni ménos que cuatro rectos ó  $2\pi$ .

255 Un ángulo es suplemento de otro, cuando es lo que le falta para dos rectos; así, KCB (fig. 9) es suplemento de ACK, y al contrario. Y un ángulo es complemento de otro, cuando es lo que le falta ó sobra para un recto; así, el ángulo KCD es complemento de cada uno de los dos ACK y KCB: del primero por exceso, y del segundo por defecto. De donde se



deduce que los ángulos que tienen un mismo suplemento ó suplementos iguales, son iguales; y los que tengan un mismo complemento, sólo serán iguales cuando los complementos sean ambos por exceso ó por defecto.

256 Teor. Si dos líneas tiradas al extremo de otra forman con ella dos ángulos que juntos valgan dos rectos, dichas dos líneas son una sola y misma línea.

*Espl.* Sean AC y BC (fig. 12) dos rectas tiradas por el extremo C de la CD, de modo que  $ACD + DCB = \pi$ ; digo que dichas dos rectas AC y CB son una sola y misma línea, ó que la CB es prolongacion de la AC.

*Dem.* Si esto no se verifica, la recta AC prolongada caerá ó por mas arriba ó por mas abajo de la BC. Si la prolongacion de la AC fuese la CE, seria

$$(\S 254) ACD + DCE = \pi;$$

y como por el supuesto  $ACD + DCB = \pi$ ,

$$\text{será (intr. ax. 5.º) } ACD + DCE = ACD + DCB;$$

y quitando el ángulo comun ACD queda  $DCE = DCB$ : lo que es absurdo, por ser DCE parte y DCB todo; luego la AC prolongada no puede caer por mas arriba de la CB.

Si dicha prolongacion fuese la CF, se tendria

$$ACD + DCF = \pi;$$

y como por el supuesto  $ACD + DCB = \pi$ ,

$$\text{seria } ACD + DCF = ACD + DCB;$$

de donde quitando ACD, quedará  $DCF = DCB$ , que tampoco puede ser; luego si la AC prolongada no puede caer por mas arriba ni por mas abajo de la CB, caerá encima, y dichas rectas AC, CB, serán una sola y misma línea. L. Q. D. D.

257 Teor. Los ángulos opuestos al vértice son iguales.

*Espl.* Sean las dos rectas AB, CD (fig. 13), que se corten en el punto O; digo que el ángulo  $AOD = COB$ , y que  $DOB = AOC$ .

*Dem.* Si consideramos que la DC cae sobre la AB, será (§ 254)  $AOD + DOB = \pi$ ;

y suponiendo que la BA cae sobre la DC, se tendrá

$$COB + BOD = \pi;$$



luego (intr. ax. 5.º)  $AOD + DOB = COB + BOD$ ;  
y quitando el ángulo comun  $DOB$  quedará  $AOD = COB$ ;  
del mismo modo se demostrará que  $DOB = AOC$ ,  
que es L. Q. D. D.

258 Se llama *triángulo rectilíneo*, ó simplemente triángulo, el espacio cerrado por tres líneas rectas, que se llaman *lados del triángulo*.

Los triángulos, con relacion á sus lados, se dividen en *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*; y con relacion á sus ángulos, en *rectángulos* y *oblicuángulos*. Triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados iguales, como  $ABC$  (fig. 14); isósceles el que tiene dos lados iguales, como  $ABC$  (fig. 15); y escaleno el que tiene sus tres lados desiguales entre sí, como  $ACB$  (fig. 16). Es rectángulo un triángulo cuando tiene un ángulo recto, como  $ACB$  (fig. 17); y es oblicuángulo cuando no tiene ningun ángulo recto. Este se llama *obtusángulo*, cuando tiene un ángulo obtuso, como  $ACB$  (fig. 16); y *acutángulo*, cuando sus tres ángulos son agudos, como  $ABC$  (fig. 14).

En el triángulo rectángulo el lado  $AB$  (fig. 17) opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*; y los otros dos lados  $AC$ ,  $BC$ , *catetos*.

En general se llama *base* de un triángulo al lado sobre que se considera insistiendo; pero cuando el triángulo es isósceles, se llama *base* al lado que no es igual con ninguno de los otros. La línea que se baja perpendicularmente á la base ó á su prolongacion, desde el ángulo opuesto, se llama *altura*; así, las líneas  $AC$  son las bases en las (figs. 15 y 16), y las  $BD$  las alturas; cuando en un triángulo rectángulo (fig. 17) se considera por base un cateto  $AC$ , la altura es el otro cateto  $BC$ .

259 Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen sus tres lados iguales.*

*Espl.* Sean los dos triángulos  $ABC$ ,  $abc$  (fig. 18), en que se supone  $AB = ab$ ,  $AC = ac$  y  $BC = bc$ ; digo que sus tres ángulos tambien son iguales; esto es,  $A = a$ ,  $B = b$  y  $C = c$ .



*Costr.* Haciendo centro en A con un radio  $AC=ac$ , trácese el arco  $mn$ ; y haciendo centro en B con  $BC=bc$ , trácese el arco  $op$ .

*Dem.* Concíbese superpuesto el triángulo  $abc$  sobre el ABC, de manera que el lado  $ab$  se confunda con AB: en lo cual no habrá dificultad (245) por ser  $AB=ab$ ; con lo cual el punto  $c$  extremo de  $ac=AC$ , caerá en algún punto (246) del arco  $mn$ ; y por ser  $bc=BC$ , el extremo  $c$  del lado  $bc$  caerá también en algún punto del arco  $op$ ; pero los dos lados  $ac$ ,  $bc$ , tienen su extremo en el punto común  $c$ , luego este mismo punto será común á los dos arcos  $mn$ ,  $op$ ; luego será su punto de intersección; pero su punto de intersección se halla en C, punto donde se encuentran los lados AC y BC del triángulo ABC; luego el punto  $c$  extremo del lado  $ac$  se habrá confundido con C extremo de AC; y como el punto  $a$  se había confundido A, resulta (245) que todo el lado  $ac$  se habrá confundido con AC; por la misma razón el lado  $bc$  se habrá confundido con BC; y habiéndose confundido sus tres lados, se habrán confundido también sus tres ángulos (251 esc.); es decir, que se tendrá  $A=a$ ,  $B=b$ ,  $C=c$ , que era L. Q. D. D.

*Esc.* Se debe advertir que los ángulos que resultan iguales, son los que en cada triángulo se oponen á los lados iguales.

260 Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido.*

*Espl.* Sean ABC,  $abc$ , dos triángulos, en que se tenga  $AB=ab$ ,  $AC=ac$ , y el ángulo en A = al en  $a$ ; digo dichos triángulos son iguales.

*Dem.* Concíbese superpuesto el triángulo  $abc$  sobre el ABC, de manera que el vértice  $a$  caiga sobre A, y el lado  $ab$  sobre AB, con lo que el lado  $ac$  caerá (251) sobre AC. Ahora, por ser  $ab=AB$  y partir estas líneas desde un mismo punto A, el punto  $b$  caerá sobre B; y por la misma razón el punto  $c$  caerá sobre C. Pero  $b$  y  $c$  no sólo son extremos de  $ab$  y de  $ac$ , sino que lo son también del lado  $bc$ ; luego se han



confundido los extremos del lado  $bc$  con los del  $BC$ ; luego (245) todo el lado  $bc$  ha coincidido con el  $BC$ ; y habiéndose confundido sus tres lados, serán iguales dichos triángulos. L. Q. D. D.

261 Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual á un lado, adyacente á dos ángulos iguales.*

*Espl.* Sean los dos triángulos  $ABC$ ,  $abc$ , en que se supone el ángulo  $A=a$ , el  $B=b$ , y el lado  $AB$ , adyacente á los ángulos  $A$ ,  $B$  del primero, igual al  $ab$  del segundo; digo que estos triángulos son iguales.

*Dem.* Concíbese superpuesto el triángulo  $abc$  sobre el  $ABC$ , de manera que el lado  $ab$  caiga sobre  $AB$ , lo cual se puede hacer, porque  $ab=AB$ ; hecho esto, el lado  $bc$  tomará (251) la direccion del lado  $BC$ , por ser el ángulo  $B=b$ ; y por la misma razon el  $ac$  tomará la direccion del  $AC$ . Ahora, como las rectas  $bc$ ,  $ac$ , y  $BC$ ,  $AC$ , se cortaban ántes de superponerse, y la superposicion no altera en nada la naturaleza de los triángulos, resulta que tambien se cortarán despues; y como dos rectas no pueden encontrarse (244 cor. 3.º) mas que en un punto, se sigue que habiéndose confundido las  $bc$ ,  $ac$  con las  $BC$ ,  $AC$ , el punto de interseccion  $c$  de las primeras, se habrá confundido con el punto de interseccion  $C$  de las segundas; luego se ha confundido el triángulo  $abc$  con el  $ABC$ , y será igual con él. L. Q. D. D.

262 De lo dicho se infiere que con cualesquiera datos que satisfagan á lo demostrado en los teoremas anteriores, se podrá formar un triángulo igual á otro dado; y ademas se podrán resolver estos problemas.

263 1.º *En un punto  $a$  (fig. 19) de una línea  $ab$ , formar un ángulo  $bac$  igual con otro dado  $BAC$ .*

*Res. y Dem.* Haciendo centro en  $a$  con un radio cualquiera  $ap$ , trácese un arco indefinido  $prq$ ; haciendo centro en  $A$  con el mismo radio, se trazará un arco  $PRQ$ , hasta que encuentre á los lados del ángulo  $CAB$ ; con la cuerda  $PQ$  del arco  $PRQ$ , haciendo centro en  $p$ , se trazará un arco  $ux$ ; por el



punto de intersección  $q$  y por  $a$ , tírese la línea  $aq$ , y se tendrá el ángulo  $cab = CAB$ . Porque si concebimos las cuerdas  $pq$ ,  $PQ$ , que son iguales por construcción, los triángulos  $AQP$ ,  $aqp$ , serán iguales (259), y por lo mismo el ángulo en  $a =$  al en  $A$ .

264 2.º Dado un ángulo  $CAB$ , dividirlo en dos partes iguales.

*Res. y Dem.* Haciendo centro en  $A$  con un radio cualquiera  $AP$ , trácese entre sus lados un arco  $PRQ$ ; haciendo centro en sus extremos  $P$  y  $Q$ , con un radio cualquiera, trácense dos arcos que se crucen en  $T$ , por  $A$  y  $T$ , tírese la línea  $AT$ , la cual dividirá el ángulo propuesto en las dos partes iguales  $QAT$  y  $TAP$ . Porque si se conciben los radios  $PT$ ,  $QT$ , los triángulos  $QAT$ ,  $TAP$ , serán iguales (259).

265 Teor. En un mismo triángulo, ó en triángulos iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales; ó lo que es lo mismo, en un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales, y al contrario, si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos tambien lo serán, ó el triángulo será isósceles.

*Espl.* Sea en el triángulo  $ABC$  (fig. 15),  $AB = BC$ ; digo que se tendrá el ángulo  $ACB =$  al  $BAC$ ; y si se supone  $ACB = BAC$ , será  $AB = BC$ .

*Dem.* 1.º Por el vértice  $B$  y el punto  $D$ , medio del lado  $AC$ , concíbese tirada la  $DB$ , y resultará que los triángulos  $ADB$ ,  $BDC$ , serán iguales (259); luego los ángulos en  $A$  y en  $C$ , opuestos al lado comun  $BD$ , serán iguales. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si los lados  $BC$ ,  $AB$  no son iguales, serán desiguales. Supongamos que  $BA$  sea el mayor; tomando en él una parte  $AE = BC$ , y concibiendo la  $CE$ , los triángulos  $AEC$ ,  $ABC$ , tendrán el lado  $AC$  comun, el lado  $AE = CB$  por construcción, y el ángulo  $EAC = ACB$  por el supuesto; luego (260) serán iguales, lo que es absurdo; porque el  $BAC$  es todo, y el  $AEC$  es su parte; luego si los lados  $BA$  y  $BC$  no pueden ser desiguales, serán iguales. L. 2.º Q. D. D.



*Cor.* Luego el triángulo equilátero es equiángulo y al contrario.

*Esc.* La igualdad de los triángulos ABD, BDC, prueba al mismo tiempo que el ángulo  $ABD = DBC$ , y que  $BDA = BDC$ ; de donde se deduce (252) que estos dos últimos son rectos, y por consiguiente que una línea tirada desde el vértice de un triángulo isósceles al medio de su base, es perpendicular á esta base, y divide á su ángulo opuesto en dos partes iguales.

266 *Teor.* Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo externo es mayor que cualquiera de los dos internos opuestos.

*Espl.* Sea el triángulo ABC (fig. 20); digo que si se prolonga uno de los lados BC, el ángulo ACD (que se llama *externo* por estar fuera del triángulo) es mayor que cualquiera de los dos BAC, ABC, opuestos á los lados que forman el externo.

*Dem.* Para demostrarlo respecto del BAC, tírese por B y por el punto E medio de AC, la BE, y prolonguese de manera que la prolongacion  $EF = BE$ ; únase el punto F con el C, y resultarán los triángulos ABE, FCE iguales (260); luego nos darán el ángulo BAE ó  $BAC = ECF$ ; pero  $ACD > ECF$ , luego  $ACD > BAC$ .

Haciendo en el lado BC una construcción análoga, se demostrará del mismo modo que  $BCK > ABC$ ; y como (§ 257)  $BCK = ACD$ , resultará  $ACD > ABC$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* 1.º Siendo  $BAC < ACD$ , añadiendo ACB, será  $BAC + ACB < ACD + ACB$ ; pero  $ACD + ACB = \pi$ , luego  $BAC + ACB < \pi$ ; luego en todo triángulo la suma de dos ángulos es menor que dos rectos.

*Cor.* 2.º Luego en todo triángulo rectángulo ú obtusángulo, cada uno de los otros dos ángulos debe ser agudo.

*Cor.* 3.º Desde un punto cualquiera C (fig. 21), fuera de una recta AB, no se le puede tirar mas de una perpendicular CD, porque si se le pudieran tirar dos; tales como CD, CE, en el triángulo CDE



los ángulos CDE, CED, valdrian juntos dos rectos, lo que es imposible.

Cor. 4.<sup>o</sup> *La perpendicular es la que mide la verdadera distancia que hay desde un punto á una línea; pues es la única que se puede tirar de su especie.*

Cor. 5.<sup>o</sup> *Tampoco se puede tirar mas de una perpendicular en un punto D de una línea AB; porque si suponemos que haya dos, tales como DC, DK, se tendrá que los ángulos KDA, CDA, serán rectos, y por consiguiente iguales (253): lo que no puede ser, porque ADK es parte, y ADC es todo.*

267 Teor. *En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo; y al contrario, al mayor ángulo está opuesto el mayor lado.*

Espl. Sea el triángulo BAC (fig. 22); digo que si el lado  $AC > BC$ , será el ángulo  $ABC > BAC$ ; y si se supone  $ABC > BAC$ , será  $AC > BC$ .

Dem. 1.<sup>o</sup> Tómese en el lado mayor AC una parte  $CD = BC$ , y tírese la BD: con lo cual el triángulo BDC dará los ángulos  $n$  y  $m$  iguales (265); pero  $n > A$  por ser esterno en el triángulo ABD, luego tambien será  $m > A$ ; y como  $ABC > m$ , con mas razon será

$ABC > BAC$ , que era L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>o</sup> Sino es  $AC > BC$ , será AC igual ó menor que BC.

Si  $AC = BC$ , resultará por lo demostrado (265), que  $ABC = BAC$ , que es contra el supuesto; tampoco puede ser menor, porque entónces el ángulo ABC seria menor que el BAC, que es tambien contra el supuesto; luego sino puede ser  $AC =$  ni  $< BC$ , será  $AC > BC$ , que es L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

268 Teor. *La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero.*

Espl. Sea BCA (fig. 23) un triángulo cualquiera; digo que  $BA + CA > BC$ .

Costr. Haciendo centro en B y con un radio igual al lado mayor BC, trácese el arco CED, hasta que encuentre al lado BA prolongado, y tírese la cuerda DC.

Dem. Las líneas BC y BD son iguales por radios de un mismo círculo, luego (265) en el triángulo CBD



el ángulo  $DCB = g$ ; pero el ángulo  $r < DCB$  por ser parte suya; luego también será  $r < g$ . Luego en el triángulo  $DCA$  el ángulo  $g > r$ , y por lo mismo (267) el lado  $CA > DA$ . Si á estas cantidades desiguales añadimos una misma cantidad  $AB$ , también permanecerán desiguales, y se tendrá  $CA + AB > DA + AB$ ; y como  $DA + AB = BD = BC$ , se sigue que  $CA + AB > BC$ , que era L. Q. D. D.

269 Teor. Si desde un punto cualquiera dentro de un triángulo, se tiran líneas á los vértices de dos de sus ángulos, la suma de estas líneas será menor que la de los lados del triángulo opuestos á los ángulos; y el ángulo que formen dichas líneas, será mayor que el ángulo que formen dichos lados.

Espl. Sea el triángulo  $ABC$  (fig. 24); digo que si desde un punto  $D$ , elegido dentro, se tiran dos líneas  $DB$ ,  $DC$ , á dos ángulos cualesquiera  $B$ ,  $C$ , se tendrá  $BD + DC < AB + AC$ ; y que  $BDC$ , ó el ángulo en  $o > m$ .

Dem. 1.º Prolongando una cualquiera de las dos líneas, tal como  $BD$ , hasta que vaya á encontrar al lado opuesto  $AC$ , se tendrá (§ 268)  $BA + AE > BE$ ; y añadiendo  $EC$ , será  $BA + AE + EC > BE + EC$ , ó reduciendo será  $BA + AC > BE + EC$  (m).

Ahora, el triángulo  $DEC$  dará  $DE + EC > DC$ ; y añadiendo  $BD$ , se tendrá  $BD + DE + EC > BD + DC$ ; ó por ser  $BD + DE = BE$ , resultará  $BE + EC > BD + DC$ .

Y como ántes (m) teníamos  $BA + AC > BE + EC$ , con mas razon se tendrá  $BA + AC > BD + DC$ , que era L. 1.º Q. D. D.

2.º El triángulo  $BAE$  da (266) el ángulo  $n > m$ ; y por la misma razon el triángulo  $DEC$  dará el ángulo  $o > n$ ; luego con mas razon  $o > m$ , que es L. 2.º Q. D. D.

270 Teor. Si desde un punto á otro se tira una recta y una curva, la recta es mas corta que la curva.

Espl. Si desde el punto  $A$  (fig. 25) al punto  $B$ , se tira la recta  $AB$  y la curva  $ACB$ , digo que  $ACB > AB$ .

Dem. Desde  $A$  y  $B$  tírense á un punto cualquiera  $C$  de la curva, las rectas  $AC$  y  $BC$ , y se tendrá (§ 268)  $AC + CB > AB$ ;



y si desde los puntos C y A se tiran á uno cualquiera D, intermedio del arco AC, las AD, DC, se tendrá tambien  $AD+DC > AC$ ;

que añadiendo CB, da  $AD+DC+CB > AC+CB$ ;

y si volviéramos á tirar rectas á los puntos intermedios de los arcos AD, DC, &c., el conjunto de líneas que resultase seria mayor que el  $AD+DC+\&c.$  pues la suma de cada dos líneas siempre seria mayor que su correspondiente; pero este conjunto de líneas, al paso que crece, se aproxima á la curva ACB, por tener mas puntos comunes con ella, y hallarse entre el conjunto anterior y la misma curva; luego la curva será mayor (227) que cada uno de estos conjuntos; y como cualquiera de estos es mayor que AB, con mas razon será la curva  $ACB > AB$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Luego la línea recta es la mas corta de todas cuantas se pueden tirar desde un punto á otro.

271 Teor. Si desde un punto á otro se tira una línea recta, y diferentes curvas, que sean cóncavas ó convexas hácia un mismo lado, la curva que mas se acerque á la recta será la mas corta.

*Espl.* Si desde el punto A al punto B (fig. 26), se tiran diferentes curvas ACB, ADB, la ACB que mas se acerca á la recta AB, es la mas corta.

*Dem.* Concíbese por el punto C la recta MN, tal que sólo tenga el punto C comun con la curva interior ACB, estando toda ella fuera, y en virtud de lo demostrado (270) se tendrá  $MDN > MN$ ;

y añadiendo  $AM+NB$ , resultará

$$MDN+AM+NB > MN+AM+NB;$$

pero el 1.<sup>er</sup> miembro  $MDN+AM+NB =$  curva ADB, y el segundo  $MN+AM+NB =$  conjunto AMNB; luego  $ADB > AMNB$ .

Concíbese ahora por los puntos P y U, tomados entre C y A y entre C y B, las rectas RS y TQ con las mismas circunstancias que la MN, y se tendrá (§ 270 cor.)  $RM+MS > RS$ ,  $TN+NQ > TQ$ ;

y sumando ordenadamente resultará

$$RM+MS+TN+NQ > RS+TQ.$$



Añadiendo á ambos miembros la cantidad  
 $AR+ST+QB$ ,  
 será  $RM+MS+TN+NQ+AR+ST+QB > RS+$   
 $TQ+AR+ST+QB$ ;

pero el primer miembro = conjunto AMNB,  
 y el segundo = ARSTQB; luego  $AMNB > ARSTQB$ ,  
 y con mas razon será  $ADB > ARSTQB$ .

Y como si se tirasen rectas por los puntos intermedios de los arcos AP, PC, CU, &c. se demostraria del mismo modo que el conjunto de líneas que fuese resultando, seria menor que el anterior ARSTQB, y así sucesivamente, se sigue que con mas razon la curva ADB será mayor que cualquiera de estos conjuntos; pero estos conjuntos de líneas, al paso que menguan se van acercando á la curva ACB, por tener mas puntos comunes con ella y estar cada conjunto entre la curva y el conjunto anterior; luego (228) la curva ACB es menor que cualquiera de estos conjuntos, y con mas razon se tendrá  $ACB < ADB$ , que era L. Q. D. D.

*Cor.* Puesto que la curva interior es menor que cualquier conjunto de líneas, cada arco de curva será menor que la porcion de líneas correspondientes á dicho arco, ó lo que es lo mismo arco  $CoP < PS+CS$ .

272 *Teor.* Si dos lados de un triángulo son iguales á dos de otro, y el ángulo que forman es desigual, el lado opuesto al mayor ángulo será mayor que el que en el otro triángulo está opuesto al ángulo menor.

*Espl.* Sean dos triángulos ABC, DEF (fig. 27), tales que  $AC=DF$ ,  $AB=DE$ , y el ángulo  $BAC > EDF$ ; digo que  $BC > FE$ .

*Dem.* Superpóngase el triángulo DEF sobre el BAC, de manera que el lado DF se confunda con AC, con lo que el triángulo DEF vendrá á tener la posicion del AE'C, cayendo DE dentro del ángulo BAC por ser el ángulo  $FDE < BAC$ .

Aquí pueden ocurrir tres casos; primero: que el punto E caiga fuera del triángulo ABC como en E'.

2.º Que caiga sobre el lado BC como en H; y ter-



cero que caiga dentro del triángulo como en K.

1.º Si cae en E' será (§ 268)

$$E'G+GC > E'C, \text{ y } AG+GB > BA;$$

y sumando ordenadamente se tendrá

$$E'G+GC+AG+GB > E'C+BA,$$

ó lo que es lo mismo  $E'A+BC > E'C+BA$ ;

y suprimiendo en ambos miembros E'A y BA, que son iguales por ser  $E'A=DE=BA$ , quedará  $BC > E'C=EF$ .

2.º Si E cae en H, en el lado BC, se tendrá (ax. 4.º)

$$BC > HC=FE.$$

3.º En fin, si el punto E cayese dentro, v. g. en K, se tendría (§ 269)  $AB+BC > AK+KC$ ;

y quitando AB y AK, que son iguales por ser

$DE=AK=AB$ , quedará  $BC > KC=EF$ , que es L.Q.D.D.

*Cor.* Recíprocamente, si dos lados de un triángulo son iguales á dos de otro, y el tercer lado desigual, el ángulo opuesto en el triángulo donde el lado sea menor, será menor que el del otro triángulo donde el lado es mayor. Porque no puede ser igual ni mayor.

273 Teor. Si desde un punto fuera de una recta, se tira una perpendicular y diferentes oblicuas: primero, la perpendicular será mas corta que las oblicuas; segundo, las oblicuas que disten igualmente de la perpendicular, serán iguales; y tercero, la oblicua que mas se separe de la perpendicular, será la mas larga.

*Espl.* Si desde el punto A fuera de la FD (fig. 28) se le tira una perpendicular AB, y diferentes oblicuas AE, AC, AD, se verificará: 1.º que la AB será la mas corta de todas; 2.º que las oblicuas AE, AC, equidistantes de la perpendicular AB, serán iguales; y 3.º que de las oblicuas AC, AD, la AD que mas se separa de la perpendicular, será la mas larga.

*Dem.* 1.º Por ser el triángulo ABC rectángulo en B, y ser el ángulo recto el mayor de un triángulo (266 cor. 2.º), se sigue (267) que el lado  $AC > AB$ , ó  $AB < AC$ , que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Si  $BC=BE$ , los triángulos ABE, ABC, serán iguales (260); luego darán  $AE=AC$ , que es L. 2.º Q. D. D.

3.º Siendo el triángulo ABC rectángulo en B, el



ángulo ACD, esterno de dicho triángulo será obtuso, pues ha de ser mayor (266) que el interno y recto ABC; luego (266 cor. 2.º) el ángulo ACD es el mayor del triángulo ACD, y por lo mismo se le opondrá mayor lado (269); luego  $AD > AC$ , que era L. 3.º Q. D. D.

Cor. 1.º *Desde un mismo punto fuera de una línea, no se le pueden tirar tres rectas iguales.*

Cor. 2.º *Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos, ó uno de los ángulos agudos; porque primero sean los triángulos ABC y DEF (fig. 29), en que se supone  $AC = DF$  y  $AB = DE$ ; digo que  $BC = EF$ ; y por lo mismo estos triángulos son iguales (259).*

En efecto, si colocamos el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que DE se confunda con AB, resultará que como los ángulos en B y en E son iguales por rectos, el lado EF caerá sobre el BC (§ 251). Ahora, si el punto F no cae sobre el punto C, caerá ó mas á la izquierda como en G, ó mas á la derecha como en H.

Si cae en G, la línea DF estará representada por la AG; y como por el supuesto  $DF = AC$ , se tendrá  $AC = AG$ , que es un absurdo, pues se tendrán dos oblicuas iguales á un mismo lado de la perpendicular AB. Como del mismo modo se demostraría que no puede caer hácia la derecha de C, v. g. en H, resulta que caerá sobre C; luego se habrán confundido los tres lados del triángulo DEF con los del ABC; luego son iguales.

Sea en 2.º lugar  $AC = DF$ , y el ángulo  $BAC = EDF$ ; colocando el triángulo DEF sobre el BAC, de modo que DF se confunda con AC, la DE tomará la dirección de AB (§ 251); y como el punto F se ha confundido con C, si la FE no cayese sobre la CB, se podrian tirar desde C dos perpendiculares á AB, lo que es absurdo; luego los triángulos serán iguales.

Cor. 3.º *Si un punto de una perpendicular dista igualmente de dos puntos de la línea á que lo es, todos los puntos de la primera estarán á igual distancia de aquellos mismos puntos de la segunda. Porque*



si fuese B (fig. 28) el punto que distase igualmente de E y C, desde cualquier punto A, M ó H, de la AH, que se tirasen líneas á E y C, serian iguales los triángulos ABE, ABC, los MBE y MBC tambien, ó los HBE, HBC; luego se tendrá  $AE=AC$ ,  $ME=MC$  y  $HE=HC$ .

Si el punto A que se halla fuera de la FD, dista igualmente de E y de C, será  $AE=AC$ ; y como tienen un lado AB comun los triángulos rectángulos ABE, ABC, resultará que  $EB=BC$ ; y si por un punto cualquiera de AB, tal como M, se tiran las ME, MC, serán iguales, por hipotenusas de triángulos EBM, MBC, iguales; y como lo mismo se demostraria de cualquier otro punto, resulta la proposicion.

274 Teor. *Si una recta tiene dos puntos que disten igualmente de otros dos de otra, le será perpendicular.*

*Espl.* Si los dos puntos A y H, ó A y B, ó A y M, de la recta AH, distan igualmente de los puntos E y C de la FD, digo que la AH es perpendicular á la FD.

*Dem.* 1.º Sean los dos puntos A y H, ó sea  $AE=AC$  y  $HE=HC$ , lo que dará los triángulos AEH, AHC iguales (259), pues ademas tienen comun el lado AH; la igualdad de estos triángulos dará el ángulo  $EAB=BAC$ ; luego los triángulos EAB, ABC, serán iguales: pues tienen los ángulos EAB, BAC, iguales, comun el lado AB, é iguales tambien los lados AE, AC por el supuesto; luego los ángulos en B serán iguales, y por consiguiente rectos (252); luego la AH es perpendicular á la FD.

2.º Sean ahora los puntos A y B, y tendremos  $AE=AC$  y  $BE=BC$ ; y por lo mismo los triángulos ABE, ABC, serán iguales (259); luego los ángulos en B serán iguales, y por consiguiente rectos; luego la AH será perpendicular á la FD.

3.º Sean los dos puntos A y M, y se tendrá  $AE=AC$ ,  $ME=MC$ ; luego los triángulos AME, AMC, serán iguales (259), lo que da el ángulo  $EAM=CAM$ ; y teniendo los triángulos AEB, ACB, iguales los án-



gulos en A y los lados que los forman, á saber:  $AE=AC$  por el supuesto, y  $AB$  por comun, serán iguales (260); luego los ángulos en B son iguales, y por consiguiente rectos; luego la  $AH$  es perpendicular á la  $FD$ , que es L. Q. D. D.

Cor. Si una perpendicular  $CD$  (fig. 21) tiene un punto cualquiera  $D$ , equidistante de dos  $A$  y  $B$  de la línea  $AB$  á que lo es, pasa por todos los puntos que en dicho plano distan igualmente de  $A$  y de  $B$ . Porque si hubiese otro punto tal como  $K$  con esta circunstancia, tirando por él y por  $D$ , la  $DK$ , esta seria perpendicular á la  $AB$ , por lo que acabamos de demostrar; y como  $CD$  lo es por el supuesto, resultarían dos perpendiculares en un mismo punto de la recta  $AB$ , lo que es absurdo (266 cor. 5.<sup>o</sup>).

275 Probl. 1.<sup>o</sup> Desde un punto  $A$  fuera de una línea  $BC$  (fig. 30), tirar una perpendicular á esta línea.

Res. y Dem. Haciendo centro en el punto dado  $A$ , y con un radio cualquiera, trácense dos arcos que corten á la línea en  $D$  y  $E$ ; haciendo centro en estos puntos  $D$  y  $E$ , con el mismo ó con otro radio cualquiera, trácense por la parte inferior otros dos arcos que se corten; por el punto de interseccion  $F$  y el punto dado  $A$ , tírese la  $AF$ , que será perpendicular á la  $BC$ . Porque tiene dos puntos  $A$  y  $F$  á igual distancia de los  $D$  y  $E$ .

276 Probl. 2.<sup>o</sup> Por un punto  $A$  de una línea  $BC$  (fig. 31), tirarle una perpendicular.

Res. y Dem. Haciendo centro en el punto dado  $A$ , trácense dos arcos en  $D$  y  $E$  con un radio cualquiera; haciendo centro en  $D$  y  $E$  con un radio arbitrario, pero mayor que  $AE$ , trácense dos arcos por arriba ó por abajo; por el punto de interseccion  $F$  y el punto dado  $A$ , tírese la  $FA$ , que será perpendicular á la  $BC$ . Porque tiene dos puntos  $A$  y  $F$  á igual distancia de los  $D$  y  $E$ .

277 Probl. 3.<sup>o</sup> Dividir una línea  $AB$  (fig. 32) en dos partes iguales.

Res. y Dem. Haciendo centro en sus extremos  $A$



y B con un mismo radio, trácense dos arcos que se corten por la parte de arriba, y otros dos que se corten por la parte de abajo; y tirando la FG dividirá á la AB en dos partes iguales. Porque teniendo la FG dos puntos equidistantes de A y B, será perpendicular (274) á la AB, y tendrá (272 cor. 3.<sup>o</sup>) todos sus puntos á igual distancia de A que de B; luego  $AH=HB$ .

*De las paralelas.*

278 Cuando dos líneas rectas se hallan en un plano, de modo que no se encuentran aunque se las prolongue todo lo que se quiera, como AB, CD (fig. 33), se llaman *paralelas*.

Cuando dos paralelas AB, CD son cortadas por una línea FE, esta se llama *secante*; la cual forma con las paralelas ocho ángulos: cuatro, *m, n, p, q*, *internos*, y cuatro, *k, l, r, s*, *externos*.

Cuando se comparan dos ángulos internos á diferente lado de la secante, uno en cada paralela, se llaman *ángulos alternos internos*: tales son los *m* y *q*, y los *n* y *p*; cuando se comparan dos ángulos internos á un mismo lado de la secante, como los *m, p*, ó los *n, q*, se llaman solamente *internos*; cuando se comparan dos ángulos externos, uno en cada paralela hácia diferente lado de la secante, se llaman *alternos externos*: tales son los *k* y *r*, y los *l* y *s*; cuando se comparan dos ángulos externos á un mismo lado de la secante, tales como *k* y *s* ó *l* y *r*, se llaman simplemente *externos*; y cuando se comparan dos ángulos, uno en cada paralela, á un mismo lado de la secante, uno dentro y otro fuera, se llaman *correspondientes*: tales son los *k* y *p*, los *m* y *s*, los *l* y *q*, y los *n* y *r*.

279 Teor. *Dos líneas perpendiculares á una tercera son paralelas.*

*Espl.* Si las dos líneas AB, CD, son perpendiculares á la GH, son paralelas, ó no se pueden encontrar en ningun punto del plano donde se hallan.

O

T. I.



*Dem.* Porque si se encontrasen, desde el punto en que lo hiciesen, se tendrían tiradas dos perpendiculares á la GH, lo que no puede ser (266 cor. 5.º)

*Cor. 1.º* Luego para tirar una paralela á una línea dada AB, desde un punto cualquiera G, se bajará á esta línea desde dicho punto una perpendicular GH, y en dicho punto G se tirará á esta perpendicular GH, otra línea GD que le sea perpendicular, la cual será paralela á la propuesta AB; por ser ambas perpendiculares á la GH.

*Cor. 2.º* Y como desde el punto G no se puede bajar mas de una perpendicular GH á la AB, y en G sólo se puede levantar una perpendicular á GH, resulta que por un punto dado, sólo se podrá tirar una paralela á una línea dada.

280 Teor. Si una línea es perpendicular á una de dos paralelas, lo será tambien á la otra.

*Espl.* Sean AB, CD dos paralelas, y GH perpendicular á AB; digo que la GH tambien es perpendicular á la CD.

*Dem.* Si la GH no es perpendicular á CD, le será oblicua, y por G se podrá concebir una línea TU perpendicular á GH, la cual (279 cor. 1.º) será paralela á BA; y como la CD lo es por el supuesto, se tendrán por el punto G tiradas dos paralelas CD, UT á la AB, lo que no puede ser (279 cor. 2.º)

281 Teor. Si dos rectas cortadas por otra, forman ángulos alternos internos, ó alternos externos, iguales, dichas rectas serán paralelas.

*Espl.* Sean AB, CD, dichas rectas, y EF la secante; digo que si  $n=p$ , ó  $m=q$ , ó  $k=r$ , ó  $l=s$ , dichas líneas no se encuentran, ó serán paralelas.

*Dem. 1.º* Sea  $n=p$  ó  $m=q$ , y se tendrá que las líneas AB, CD no se podrán encontrar en un punto K hácia la derecha de FE; porque entónces las tres líneas FE, CD, AB, formarían un triángulo, en el cual por ser  $n=p$  ó  $m=q$ , el ángulo externo  $n$  sería igual á uno de los internos opuestos  $p$ , lo que no puede ser en virtud de lo demostrado (266).



Del mismo modo se demuestra que no se pueden encontrar hácia la izquierda; luego dichas líneas son paralelas. L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>o</sup> Si se supone  $k=r$  ó  $l=s$ , sus opuestos al vértice  $n$  y  $p$  ó  $m$  y  $q$ , serán iguales; pero estos son alternos internos, luego por la primera parte del teorema, dichas líneas son paralelas. L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

282 Teor. *Si dos líneas cortadas por otra, forman con ella los ángulos correspondientes iguales, serán paralelas.*

*Dem.* Porque si se supone  $k=p$ , como  $k=n$  (§ 257), será  $n=p$ , que es el caso anterior; luego serán paralelas. L. Q. D. D.

283 Teor. *Si dos líneas cortadas por otra forman ángulos internos ó externos, que juntos valgan dos rectos, dichas líneas son paralelas.*

*Dem.* Porque si se supone  $m+p=\pi$ , como  $m+n=\pi$  (§ 254), será (intr.ax.5.<sup>o</sup>)  $m+p=m+n$ , de donde quitando  $m$ , quedará  $p=n$ ; luego (281) serán paralelas. Y si se supone  $k+s=\pi$ , como  $p+s=\pi$ , será  $k+s=p+s$ , y quitando  $s$  quedará  $k=p$ ; pero estos son correspondientes, luego (282) serán paralelas. L. Q. D. D.

284 Teor. *Si una secante corta dos paralelas, se verifica: primero, que los ángulos alternos internos son iguales; segundo, que los alternos externos tambien lo son; tercero, que tambien son iguales los correspondientes; cuarto, que los dos internos juntos valen dos rectos, ó son el uno suplemento del otro; y quinto, que lo mismo se verifica en los externos.*

*Espl.* Sean  $AB$ ,  $DE$  (fig. 34) las paralelas y  $FK$  la secante; digo 1.<sup>o</sup> que los ángulos  $m=n$  y  $p=q$ ; 2.<sup>o</sup> que  $r=t$  y  $u=s$ ; 3.<sup>o</sup> que  $r=n$ ,  $p=s$ ,  $u=q$  y  $m=t$ ; 4.<sup>o</sup> que  $m+q=\pi$ ,  $n+p=\pi$ , y por lo mismo  $m$  es suplemento de  $q$ , y  $n$  de  $p$ ; y 5.<sup>o</sup> que  $r+s=\pi$ ,  $u+t=\pi$ , ó que  $r$  es suplemento de  $s$ , y  $u$  de  $t$ .

*Dem.* 1.<sup>o</sup> Por el punto  $L$ , medio de la parte  $CO$  de la  $FK$ , interceptada por las paralelas, concíbese la  $GH$  perpendicular á una de las dos paralelas, la cual lo será tambien á la otra (280), y por lo mismo los dos



triángulos GLO, CLH, serán rectángulos en G y H; y como  $LO=LC$  por construcción, y los ángulos en L son iguales (257), dichos triángulos (273 cor. 2.º) serán iguales, y darán el ángulo en  $m=n$ ; y como los  $p$  y  $q$  son sus suplementos, serán (255) también iguales. L. 1.º Q. D. D.

2.º Como (§ 257)  $m=r$  y  $n=t$ , y por lo acabado de demostrar es  $m=n$ , será  $r=t$ ; del mismo modo se demuestra que  $u=s$ , que es L. 2.º Q. D. D.

3.º El ángulo  $m=r$  (§ 257) y  $m=n$  por alternos internos; luego  $r=n$ ; del mismo modo se demuestra que  $p=s$ ,  $u=q$  y  $m=t$ , que es L. 3.º Q. D. D.

4.º Siendo  $m+p=\pi$ , resulta que por ser  $m=n$ , se tendrá  $n+p=\pi$ , y por lo mismo  $n$  es suplemento de  $p$ ; y como lo mismo se demuestra respecto de  $m$  y  $q$ , resulta L. 4.º Q. D. D.

5.º Siendo  $p+r=\pi$ , y  $p=s$ , será  $r+s=\pi$ , y por lo mismo  $r$  es suplemento de  $s$ ; y como lo mismo se demuestra de los  $u$  y  $t$ , resulta L. 5.º Q. D. D.

285 Teor. *Si una línea es paralela á una de dos paralelas, lo es también á la otra.*

*Espl.* Sean las líneas AB, DE paralelas, y la XZ paralela á AB; digo que también lo será á la DE.

*Dem.* Por ser AB y XZ paralelas, se tiene (284, 3.º)  $k=r$ ; y por serlo las AB, DE, se tiene  $n=r$ ; luego  $k=n$ ; luego XZ es (282) paralela á DE. L. Q. D. D.

286 Teor. *Las partes de paralelas interceptadas entre paralelas son iguales.*

*Espl.* Sean AB, CD (fig. 35) dos paralelas; digo que si desde la AB se tiran á la CD las FG, HE, KL, MN, &c. paralelas entre sí, todas estas partes, y lo mismo las FH, GE, ó HK, EL, &c. comprendidas por las paralelas, son iguales.

*Dem.* Tírese la secante GH, y se tendrán los triángulos FGH, GHE, que por tener el lado GH comun, el ángulo  $p=m$ , por alternos internos entre las paralelas AB, CD, el ángulo  $n=q$  por la misma razón entre las FG, HE, serán (261) iguales; luego se tendrá  $FG=HE$ ,  $FH=GE$ . Del mismo modo se demuestra



de todas las demas, y resulta L. Q. D. D.

*Esc. 1.º* Si fuesen perpendiculares sucederia lo mismo, y se deducirá que *las paralelas están equidistantes en todos sus puntos.*

*Esc. 2.º* La igualdad de los triángulos FGH, GHE, da el ángulo  $\text{GFH} = \text{GEH}$ ; y como  $n = q$ , y  $m = p$ , será sumando  $n + m = q + p$ , ó  $\text{FGE} = \text{FHE}$ .

287 Teor. *Si dos líneas cortadas por otra, forman con ella dos ángulos internos que juntos valgan ménos que dos rectos, dichas líneas se encontrarán hácia el paraje donde forman dichos ángulos.*

*Espl.* Si las dos líneas UT, AB (fig. 33), cortadas por la GH, forman los dos ángulos UGH, AHG, tales que  $\text{UGH} + \text{AHG} < \pi$ , se llegarán á encontrar hácia la izquierda de la GH.

*Dem.* Sino se encuentran, serán paralelas (278); pero si en G formamos el ángulo HGC tal, que junto con el AHG valga dos rectos ó  $\pi$ , la línea DC será paralela á la AB; luego se tendrían tiradas por el punto G dos paralelas UT, CD, á una misma línea AB, lo que no puede ser (279 cor. 2.º); luego dichas líneas, prolongadas suficientemente, se encontrarán. Y esto se verificará hácia la izquierda de la GH, porque no pudiendo la UT volver á encontrar en ningun punto á la GD, con ménos razon podrá encontrar á la parte HB; luego se encontrarán hácia la izquierda, que es hácia donde forman los ángulos cuya suma es menor que dos rectos. L. Q. D. D.

288 Teor. *Dos ángulos que tienen sus lados paralelos, ó son iguales, ó son el uno suplemento del otro: son iguales, cuando sus vértices están vueltos hácia un mismo lado, ó en situacion enteramente opuesta; y son el uno suplemento del otro, cuando le tienen vuelto hácia diferente lado.*

*Espl.* Los dos ángulos  $n$ ,  $m$  (fig. 36), que tienen sus lados paralelos y sus vértices vueltos hácia un mismo lado, ó los  $m$  y  $o$  que los tienen en una situacion enteramente opuesta, son iguales; y los DEG y  $m$ , que tienen los lados paralelos y sus vértices há-



cia diferente lado, son el uno suplemento del otro.

*Dem.* Prolónguese la DE hasta que encuentre á la BC en H; y será  $n=p$ , por correspondientes entre las paralelas GF, BC, siendo la secante DH; y  $p=m$  por correspondientes entre las paralelas AB, DH, y la secante BC; luego  $m=n$ ; y como  $n=o$  por opuesto al vértice, será tambien  $m=o$ .

Ahora, DEG es suplemento de  $n$ ; luego tambien lo será de su igual  $m$ , que era todo L. Q. D. D.

289 Teor. *Los tres ángulos de un triángulo valen juntos dos rectos, ó  $\pi$ .*

*Dem.* Si por el vértice A (fig. 37), se tira la DE paralela al lado BC, se tendrá  $m=C$ ,  $n=B$ , por alternos internos entre las paralelas BC, DE, siendo las secantes AC, AB; luego sumando será  $m+n=C+B$ ; y añadiendo el ángulo  $o$ , será  $m+n+o=C+B+o$ ; pero (§ 254 cor. 3.<sup>o</sup>)  $m+n+o=\pi$ , luego  $C+B+o=\pi$ , que es L. Q. D. D.

*Cor. 1.<sup>o</sup>* Luego dados dos ángulos de un triángulo, se conocerá el tercero, restando de dos rectos la suma de los dos dados; y dado un ángulo, se hallará la suma de los otros dos, restándole de dos rectos; así, en un triángulo cualquiera un ángulo es suplemento de la suma de los otros dos, y al contrario; y en un triángulo rectángulo cada ángulo agudo es complemento del otro, pues entre los dos valen un recto.

*Cor. 2.<sup>o</sup>* Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, el tercero será igual al tercero; pues en ambos ha de ser lo que falta á los otros dos para dos rectos.

*Del círculo y de las rectas consideradas en él.*

290 Teor. *El diámetro es la mayor de todas las cuerdas.*

*Espl.* Sea AB un diámetro (fig. 38), y AD una cuerda; digo que  $AD < AB$  ó que  $AB > AD$ .

*Dem.* Tirando el radio OD al otro extremo de la cuerda, se tendrá (§ 268)  $AO+OD > AD$ ; pero  $AO+OD=AB$ , luego  $AB > AD$ , que era L. Q. D. D.



291 Teor. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, arcos iguales tienen cuerdas iguales, y cuerdas iguales subtenden arcos iguales.*

*Espl.* Sea  $A\text{DBF}$  (fig. 39) un círculo; digo que si se suponen los arcos  $AzD$ ,  $AxF$  iguales, las cuerdas  $AD$ ,  $AF$ , tambien lo serán; y si se suponen las cuerdas  $AD$ ,  $AF$  iguales, los arcos  $AzD$ ,  $AxF$  serán iguales.

*Dem.* 1.º Tírese el diámetro  $AB$ ; y concibiendo doblada por él la figura, la parte  $AFB$  se confundirá (249) con  $ADB$ ; y por ser iguales los arcos  $AzD$  y  $AxF$ , el punto  $F$  caerá sobre el punto  $D$ ; pero el punto  $F$  es tambien extremo de la cuerda  $AF$ , y  $D$  lo es de la  $AD$ : y ademas dichas líneas tienen comun el punto  $A$ ; luego se han confundido en sus extremos; luego (245) serán iguales. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si  $AD=AF$ , tirando los radios  $CD$ ,  $CF$ , los triángulos  $ACD$ ,  $ACF$ , serán iguales (259), y darán el ángulo  $CAF=$  al  $CAD$ . Esto supuesto, si se dobla la figura por el diámetro  $AB$ , la parte  $AFB$ , caerá sobre  $ADB$ , y el punto  $F$  caerá sobre el punto  $D$ , por la igualdad de los triángulos; pero el punto  $F$  y el  $D$ , extremos de las cuerdas, son tambien extremos de los arcos; luego habiéndose confundido los extremos de los arcos, serán iguales. L. 2.º Q. D. D.

*Cor.* Si en el primer caso tiramos los radios  $CD$ ,  $CF$ , los triángulos  $ACD$ ,  $ACF$ , serán iguales (259), y darán el ángulo  $ACD=$  al  $ACF$ ; de donde se deduce que si desde los extremos de dos arcos iguales de un mismo círculo ó de círculos iguales, se tiran radios al centro, los ángulos formados por dichos radios son iguales.

292 Teor. *En un mismo círculo, ó en círculos iguales, el mayor arco tiene mayor cuerda; y la mayor cuerda subtende á mayor arco.*

*Dem.* 1.º Porque si se supone el arco  $AzH > AzD$ , tirando las cuerdas  $AD$ ,  $AH$ , y los radios  $CD$ ,  $CH$ , los dos lados  $AC$ ,  $CH$  del triángulo  $ACH$ , serán iguales á los dos lados  $AC$ ,  $CD$  del  $ACD$ ; el ángulo  $ACH$ , que es todo respecto del  $ACD$ , será mayor



que él; y por lo mismo (272) el tercer lado  $AH > AD$ , que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Si  $AH > AD$ , digo que será  $AzH > AzD$ .

Porque si esto no se verifica, será  $AzH =$  ó  $< AzD$ .

Si  $AzH = AzD$ , resultará  $AH = AD$ , que es contra el supuesto; si  $AzH < AzD$ , se tendría por la primera parte  $AH < AD$ , que también es contra el supuesto; luego no pudiendo ser  $AH$  igual ni menor que  $AD$ , será  $AH > AD$ , que es L. 2.º Q. D. D.

293 Teor. *A una línea que corta á la cuerda de un círculo, le pueden suceder tres cosas: primera, que pase por el centro; segunda, que sea perpendicular á la cuerda; y tercera, que la divida en dos partes iguales; digo que si se verifican dos de estas cosas, se verificará la tercera.*

*Dem.* Supongamos primero que la  $CP$  (fig. 40), salga del centro y sea perpendicular á la cuerda  $FM$ ; digo que divide á la cuerda en dos partes iguales, esto es, que  $FP = PM$ .

En efecto, por salir la  $CP$  del centro, tiene un punto  $C$  equidistante de  $F$  y de  $M$ ; y por ser perpendicular los tiene todos (273 cor. 3.º); luego el punto  $P$  que es punto de la  $CP$ , está equidistante de  $F$  que de  $M$ ; luego las líneas  $FP$ ,  $PM$ , que miden estas distancias, serán iguales. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si la  $CP$  sale del centro y divide á la  $FM$  en dos partes iguales, digo que es perpendicular á la  $FM$ .

En efecto, por salir la  $CP$  del centro, tiene el punto  $C$  equidistante de  $F$  y de  $M$ ; y por dividir á la cuerda en dos partes iguales tiene el punto  $P$  equidistante de  $F$  y de  $M$ ; luego la línea  $CP$  tiene dos puntos  $C$  y  $P$  equidistantes de los  $F$  y  $M$  de la  $FM$ ; luego (274) le será perpendicular. L. 2.º Q. D. D.

3.º Si la  $CP$  divide á la cuerda  $FM$  en dos partes iguales, y le es perpendicular, pasará por el centro.

En efecto, por dividir la  $CP$  á la  $FM$  en dos partes iguales, tiene el punto  $P$  equidistante de  $F$  que de  $M$ ; y por serle perpendicular, pasa (274 cor.) por todos los puntos que en dicho plano están á igual distancia



de F que de M; y como el centro es uno de estos, se deduce que la CP pasará por él. L. 3.<sup>o</sup> Q. D. D.

294 Teor. *La línea que cumple con estas circunstancias divide en dos partes iguales al arco que la cuerda subtende.*

*Dem.* Porque siendo perpendicular, y teniendo un punto equidistante de F y de M, los tendrá todos; luego el punto Q donde la CP vaya á encontrar al arco FQM, tambien estará equidistante de F que de M; luego las cuerdas FQ y QM serán iguales; luego tambien lo serán los arcos FfQ, QmM, que es L. Q. D. D.

*Esc.* Recíprocamente, si una línea CP sale del centro y divide al arco en dos partes iguales, será perpendicular á la cuerda FM de dicho arco. Porque por las condiciones con que está tirada, tiene el punto C y el punto Q equidistantes de los extremos F, M, de la cuerda FM.

295 Teor. *Si en un círculo se tiran dos cuerdas paralelas, los arcos que estas interceptan serán iguales.*

*Espl.* Sean FM y fm estas dos paralelas; digo que los arcos Ff, Mm son iguales.

*Dem.* Si desde el centro C tiramos una línea CP perpendicular á una de ellas, lo será igualmente á la otra (280), y dividirá (293 y 294) tanto á ellas como á los arcos FQM, fQm, en dos partes iguales, y se tendrá  $FfQ = MmQ$ ,  $fQ = mQ$ ; restando estas ecuaciones será  $FfQ - fQ = MmQ - mQ$ , ó arco  $Ff = Mm$ , que era L. Q. D. D.

296 Teor. *Dados tres puntos A, B, C (fig. 41), que no estén en línea recta, se puede siempre hacer pasar por ellos una circunferencia de círculo.*

*Costr.* Únanse dichos puntos por medio de las líneas AB, BC, y divídanse estas en dos partes iguales por medio de las perpendiculares EL, KG, las cuales se encontrarán en el punto O, que será el centro.

*Dem.* En efecto, sino se encuentran, serán paralelas; y en este caso la AB perpendicular á DE, será perpendicular (280) á FG en el punto K; pero BK, prolongacion de AB, es diferente de BF, pues que



los tres puntos A, E, C, no están en línea recta; luego tendríamos dos perpendiculares BF, BK, tiradas desde un mismo punto B, á la línea GK, lo que es imposible; luego las perpendiculares DE, FG, se cortarían en un punto tal como O.

Ahora, por pertenecer el punto O á la perpendicular DE, está á igual distancia de los dos puntos A y B; el mismo punto O, por pertenecer á la perpendicular FG, está á igual distancia de los dos puntos B, C; luego las tres distancias OA, OB, OC, son iguales; luego la circunferencia descrita haciendo centro en O con el radio OB, pasará por los tres puntos A, B, C, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.º *Para trazar una circunferencia por tres puntos dados ó por los tres vértices de un triángulo, se aplicará la construcción del teorema.*

Cor. 2.º *Para hallar el centro de un círculo, ó de un arco de circunferencia, se tirarán de un modo cualquiera dos cuerdas AB, BC; se dividirán en dos partes iguales por medio de perpendiculares, y el punto donde se encuentren será el centro.*

297 Cuando una línea corta á la circunferencia de un círculo, teniendo parte dentro y parte fuera, se llama *secante*: tal es la AB (fig. 42).

Y cuando una línea es tal que no tiene mas de un punto comun con la circunferencia, teniendo fuera todo lo demas, aunque se la prolongue, se llama *tangente*: tal es la CE. El punto D, que es comun á la circunferencia y á la tangente, se llama *punto de contacto*.

298 Teor. *Toda línea CE perpendicular al extremo D de un radio, es tangente del círculo.*

*Dem.* Por ser CE perpendicular á OD, esta lo será á CE (§ 254 cor. 2.º) y se tendrá la oblicua  $ON > OD$ ; luego el punto N estará fuera del círculo; luego la línea CDE no tiene comun con la circunferencia sino el punto D; luego es tangente. L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *para tirar una tangente por un punto dado en una circunferencia, se tirará el radio correspondiente á dicho punto, y en*



*el extremo de este se levantará una perpendicular.*

299 Teor. *Toda tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.*

*Dem.* Por suponerse la CE tangente, todos sus puntos están fuera del círculo, excepto el de contacto D; luego toda línea que desde el centro termine en la CE, es mayor que la OD; luego la OD es la línea mas corta que desde O se puede tirar á la CE; luego es perpendicular. L. Q. D. D.

*De los ángulos considerados en el círculo.*

300 Teor. *Si haciendo centro en el vértice de un ángulo, con un radio cualquiera se traza un arco, y se concibe dividido en un número cualquiera de partes iguales, y por los puntos de division se tiran radios al vértice, los ángulos en que quede dividido el ángulo dado serán iguales.*

*Espl.* Sea el ángulo COA (fig. 43); digo que si con un radio AO, se traza un arco ABC, y se divide en partes iguales AB, BD, &c. y por los puntos de division B, D, &c. se tiran los radios OB, OD, &c., los ángulos AOB, BOD, &c. serán iguales.

*Dem.* Doblando la figura por el radio OB, se tendrá (249) que el arco AB caerá sobre el arco BDC; y por ser iguales los arcos AB, BD, el extremo A del primero caerá sobre el extremo D del segundo; luego habiéndose confundido el punto A con el D, las líneas AO, OD, que parten desde un mismo punto O, tambien se habrán confundido (245); luego (251 esc.) los ángulos serán iguales. Como lo mismo se demostraria de los demas, resulta L. Q. D. D.

301 Teor. *Si desde los vértices O, o, de dos ángulos AOC, aoc, se describen con un mismo radio dos arcos de círculo, la relacion de los arcos comprendidos entre los lados de cada ángulo, será la misma que la de estos ángulos.*

*Espl.* Aquí pueden ocurrir dos casos: ó que los dos arcos AC, ac tengan una comun medida (245 esc.), ó que no la tengan.



*Dem.* 1.º Si los dos arcos  $AC$  y  $ac$  tienen por común medida al arco  $AB=ab$ , colocándola sobre cada uno de ellos tantas veces como se pueda, quedarán divididos ambos en partes iguales; y llamando  $m$  al número de partes iguales á  $AB$  que contiene el arco  $AC$ , y  $n$  al número de partes iguales á  $ab=AB$ , que contiene el  $ac$ , se tendrá  $AC=m \times AB$ ,  $ac=n \times AB$ ; y formando proporcion y simplificando por  $AB$ , será

$$AC:ac::m \times AB:n \times AB::m:n;$$

ahora, si por los puntos de division se tiran los radios  $OB, \&c. ob, \&c.$ , el ángulo  $AOC$  quedará dividido (300) en tantos ángulos iguales con  $AOB$ , como partes iguales á  $AB$  contenia el arco  $CA$ , esto es, en  $m$  ángulos iguales; y por la misma razon el ángulo  $aoc$  quedará dividido en  $n$  ángulos iguales á  $aob=AOB$ , por lo demostrado (§ 291 cor.); y se tendrá

$$AOC=m \times AOB, aoc=n \times aob=n \times AOB;$$

y formando proporcion, será

$$AOC:aoc::m \times AOB:n \times AOB::m:n;$$

y como esta proporcion y la anterior tienen comun la razon  $m:n$ , resultará (§ 134, 2.ª)  $AC:ac:AOC:aoc$ .

Luego la relacion de los arcos &c.

2.º Si los arcos  $AC, ac$  son incommensurables, digo que la relacion de dichos arcos no puede ser mayor ni menor que la de los ángulos, y de consiguiente será igual.

Si se supone (fig. 44) la relacion de los ángulos menor que la de los arcos, ó  $AOC:aoc < AC:ac$ , para que la segunda razon sea igual con la primera, se necesitará que su consecuente  $ac$  crezca, y se convierta v. g. en  $ad$ ; lo que dará  $AOC:aoc::AC:ad$ .

En este caso, concibiendo dividido el arco  $AC$  en dos partes iguales, y luego en otras dos &c. se llegará á un arco menor que  $cd$ , el cual colocado sobre el  $acd$ , hará que uno de los puntos de division caiga entre  $c$  y  $d$ , v. g. en  $e$ ; con lo cual los ángulos  $AOC$  y  $aoe$ , guardarán la misma relacion que los arcos commensurables  $AC, ae$ , y se tendrá  $AOC:aoe::AC:ae$ ; pero esta proporcion tiene los mismos antecedentes



que la anterior, luego (184, 2.<sup>a</sup> cor.) los consecuentes darán  $aoc:aoc::ad:ae$ ;

pero esto es un absurdo, pues la primera razon  $aoc:aoc$  es de menor desigualdad, y la segunda  $ad:ae$ , es de mayor; luego la relacion de los ángulos no puede ser menor que la de los arcos.

Tampoco puede ser mayor; porque si se supone

$$AOC:aoc > AC:ac,$$

disminuyendo el consecuente de la segunda razon, lo suficiente para que resulte igual con la primera, y suponiendo que se convierta en  $ad'$ , se tendrá

$$AOC:aoc::AC:ad';$$

y concibiendo dividido como ántes el arco AC en partes iguales, bastante pequeñas, para que colocada una sobre el arco  $ac$  las veces que se necesite, caiga un punto de division entre  $c$  y  $d'$ , como en  $e'$ , se tendrá

$$AOC:aoc'::AC:ae';$$

que (184, 2.<sup>a</sup> cor.) dará  $aoc:aoc'::ad':ae'$ ,

que es un absurdo, porque una razon es de mayor desigualdad, y otra de menor. Luego si la razon de los ángulos no puede ser menor ni mayor que la de los arcos, deberá ser igual. L. Q. D. D.

302 Por esta razon la *medida de los ángulos* es el arco de círculo comprendido entre sus dos lados, y descrito desde su vértice como centro.

Para entender bien esta medida debe saberse que la circunferencia se considera dividida en 360 partes iguales, que se llaman *grados*; cada grado en 60 partes iguales, que se llaman *minutos*; cada minuto en 60 partes iguales, que se llaman *segundos*; cada segundo en 60 *terceros* &c. Los grados se selañan con una *o* sobre el número, los minutos con un acento, los segundos con dos &c. de manera que  $57^{\circ}17'44''22'''$ , quiere decir 57 *grados*, 17 *minutos*, 44 *segundos*, y 22 *terceros*. De consiguiente la medida de un ángulo recto es un cuadrante ó  $90^{\circ}$ .

303 Teor. *El ángulo formado por una tangente y una cuerda, tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*



*Espl.* Sea el ángulo  $\text{ETA}$  (fig. 45), formado por la cuerda  $\text{AT}$  y por la tangente  $\text{EM}$ ; digo que tiene por medida la mitad  $\text{FT}$  del arco  $\text{TFA}$  que la cuerda  $\text{AT}$  subtende.

*Costr.* Tírese el diámetro  $\text{HF}$  perpendicular á la cuerda  $\text{AT}$ , el  $\text{BD}$  paralelo á la misma cuerda, y tírese el radio  $\text{CT}$ .

*Dem.* Por ser  $\text{FH}$  perpendicular á  $\text{AT}$ , lo será también á su paralela  $\text{BD}$  (§ 280); luego el ángulo  $\text{FCD}$  es recto; el ángulo  $\text{ETC}$  también es recto (299), luego (253) será  $\text{FCD} = \text{ETC}$ .

Ahora, el ángulo  $o = p$ , por alternos internos entre las paralelas  $\text{AT}$ ,  $\text{BD}$ , siendo  $\text{CT}$  la secante; luego restando estas ecuaciones, se tendrá

$$\text{FCD} - o = \text{ETC} - p, \text{ ó } n = \text{ETA};$$

pero por tener  $n$  su vértice en el centro del círculo, tiene por medida al arco  $\text{FT}$ ; luego el ángulo  $\text{ETA}$  que es su igual, tendrá la misma medida  $\text{FT}$ , que es L. Q. D. D.

*Esc.* Como entre los dos ángulos  $\text{ETA}$ ,  $\text{ATM}$ , han de valer dos rectos, el valor del ángulo  $\text{ATM}$  será lo que le falte á la mitad de  $\text{AFT}$  para la semicircunferencia, ó su medida será la mitad del arco  $\text{ABHT}$ ; luego ya se considere el arco mayor ó el menor que la cuerda subtende, se verifica la proposición.

304 Teor. *El ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, formado por el concurso de dos cuerdas, tiene por medida la mitad del arco que abrazan sus dos lados.*

*Espl.* Sea el ángulo  $\text{DTE}$  (fig. 46), cuyo vértice  $\text{T}$  está en la circunferencia, formado por las dos cuerdas  $\text{TE}$ ,  $\text{TD}$ ; digo que tiene por medida la mitad del arco  $\text{ED}$  que sus dos lados abrazan.

*Dem.* Porque si en  $\text{T}$  se tira la tangente  $\text{AT}$ , los tres ángulos  $\text{ATD}$ ,  $\text{DTE}$ ,  $\text{ETB}$ , valdrán juntos la mitad de la circunferencia  $\text{TEDM}$ ; pero el  $\text{ATD}$  tiene por medida la mitad de  $\text{TMD}$ , y el  $\text{BTE}$  la mitad de  $\text{TE}$ ; luego el  $\text{DTE}$  tendrá por medida la mitad de  $\text{DE}$ , que era L. Q. D. D.



Cor. 1.º Si se unen los puntos D y E con el centro C, el ángulo DCE tendrá por medida todo el arco DE, y DTE su mitad; luego será  $DCE = 2DTE$ . Al ángulo DCE, por tener su vértice en el centro, se le llama *ángulo central*, y al DTE, por tener su vértice en la circunferencia, se le llama *ángulo inscrito*; luego *el ángulo central es duplo del ángulo inscrito*.

Cor. 2.º Todos los ángulos BAE, BCE, BDE (fig. 47), que tienen sus vértices en la circunferencia é insisten sobre un mismo arco BE, son iguales; porque todos tienen por medida la mitad del arco BE.

Cor. 3.º Todo ángulo ACB (fig. 48), cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro AB, es recto; porque tiene por medida la mitad del arco AEB, que es un cuadrante.

Cor. 4.º Todo ángulo ACD, cuyo vértice esté en la circunferencia y abrace un arco mayor que la semicircunferencia, será obtuso; porque la mitad de este arco será mayor que un cuadrante; y todo ángulo ACE, cuyo vértice esté en la circunferencia y sus lados abracen un arco menor que la semicircunferencia, es agudo; porque su mitad será menor que un cuadrante.

305 Prob. En el extremo B de una línea AB (fig. 49) que no se puede prolongar, levantar una perpendicular.

Res. y Dem. Haciendo centro en un punto cualquiera C, trácese una circunferencia que pase por B, y que además corte en otro punto cualquiera A á dicha línea. Por este punto tírese el diámetro AD; únase el extremo D de dicho diámetro con el B por medio de la BD; y esta será la perpendicular pedida. Porque el ángulo ABD es recto (304 cor. 3.º), y por lo mismo la BD perpendicular á la AB.

306 Probl. Dado un punto A (fig. 50) fuera de un círculo DEB, tirarle una ó dos tangentes.

Res. y Dem. Únase dicho punto A con el centro C del círculo, por medio de la AC; sobre esta línea como diámetro, trácese una circunferencia; desde el



punto dado tírense á los puntos de interseccion D, B, las líneas AD, AB, las cuales serán las tangentes pedidas. Porque tirando los radios CD, CB, los ángulos ADC, ABC, que tienen su vértice en la circunferencia del círculo BDA, y cuyos lados pasan por los extremos del diámetro AC, serán rectos; y por lo mismo la AD será perpendicular á DC, y la AB á CB; y como DC, CB son radios del círculo dado DEB, resulta que las AD, AB, perpendiculares á estos radios, son tangentes de dicho círculo.

*De las figuras en general, y propiedades de los cuadriláteros.*

307 Se llama *figura* el espacio terminado por líneas. En la idea de figura entran estas dos: la del espacio cerrado, que se llama *área* ó *superficie*, y la de las líneas que le cierran, que se llama *contorno* ó *perímetro*. Las figuras terminadas por rectas, se llaman *rectilíneas*; las terminadas por una ó muchas curvas, *curvilíneas*; y las que por líneas rectas y curvas, *mixtilíneas*.

Cuando dos figuras tienen sus perímetros de igual estension, se llaman *isoperímetras*; cuando sus superficies son iguales, se dice que son *equivalentes*; y cuando son tales que superpuesta la una á la otra se confunden exactamente, se llaman *iguales*.

Se dice que una figura está *inscrita* en un círculo, ó que un círculo está *circunscrito* á una figura, cuando todos sus ángulos están en la circunferencia de dicho círculo, como ABDC (fig. 51).

Cuando una figura es tal que todos sus lados son tangentes de un círculo, se dice que está *circunscrita* al círculo, ó que el círculo está *inscrito* en la figura: tal es la ABCDE (fig. 52).

En general se llama *base* de una figura al lado sobre que se considera insistiendo; *altura*, la perpendicular bajada á la base, desde el punto de la figura que diste mas de la base; y se llama *diagonal*



toda línea AD (fig. 51), que desde un ángulo va á parar á otro no inmediato.

308 De esto y de lo dicho (270 y 271) se deduce, 1.<sup>o</sup> que el perímetro de una figura inscrita en una curva, es menor que la misma curva; 2.<sup>o</sup> de dos figuras inscritas en una curva, la que tenga mayor número de lados tiene mayor perímetro; 3.<sup>o</sup> el perímetro de toda figura circunscrita á una curva, es mayor que la misma curva; y 4.<sup>o</sup> de dos ó mas figuras circunscritas á una curva, la que tenga mayor número de lados tiene menor perímetro; pues aquí llamamos perímetro á lo que allí conjuntos de líneas.

309 Cuando una figura está terminada por cuatro líneas, se llama *cuadrilátero*. Si de estas cuatro líneas ninguna es paralela á otra, la figura se llama *trapezoide*, como ABCD (fig. 53); cuando dos son paralelas entre sí, como AD, BC (fig. 54), se llama *trapecio*; y *paralelogramo*, cuando las cuatro líneas son paralelas de dos en dos.

Hay cuatro especies de paralelogramos: primero, cuando los ángulos A y D (fig. 55) adyacentes á un mismo lado AD, y los lados AB, AD que forman un mismo ángulo, son desiguales, el paralelogramo se llama *romboide*; cuando los ángulos adyacentes á un mismo lado son desiguales, é iguales los lados que forman un mismo ángulo, como ABCD (fig. 56), se llama *rombo*; cuando los ángulos adyacentes á un mismo lado son iguales, y los lados que forman un mismo ángulo desiguales, como en la (fig. 57), se llama *rectángulo*; y cuando los lados que forman un mismo ángulo son iguales, y los ángulos adyacentes á un mismo lado tambien son iguales, como se ve en ABCD (fig. 58), se llama *cuadrado*.

Se llama *base* de un paralelogramo el lado sobre que se considera insistiendo, y la perpendicular á la base ó á su prolongacion, desde el lado opuesto, se llama *altura*; así, BE es la altura de los paralelogramos ABCD (figs. 55 y 56), cuando se considera por base el lado AD. En un trapecio se llaman *bases*



los dos lados paralelos; y *altura* la perpendicular tirada desde uno de ellos al otro.

310 Teor. *Los cuatro ángulos de un cuadrilátero valen  $2\pi$  ó cuatro rectos.*

*Dem.* Porque (figs. 53, 54 y 55), tirando la diagonal AC quedará dividido en dos triángulos, cuyos ángulos valen lo mismo que los del cuadrilátero; y como los ángulos de cada triángulo valen  $\pi$ , los del cuadrilátero valdrán  $2\pi$  ó cuatro rectos. L. Q. D. D.

311 Teor. *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, será un paralelogramo.*

*Espl.* Si los dos lados AB, CD del cuadrilátero ABCD (fig. 59), son iguales y paralelos, los otros dos lados AD, BC, también lo serán, y la figura será un paralelogramo.

*Dem.* Si se tira la diagonal AC, se tendrán dos triángulos BAC, DAC, que tienen  $AB=CD$  por el supuesto; el lado CA comun, y el ángulo  $m=n$ , por alternos internos entre las paralelas AB, CD y la secante AC; luego son iguales (260); luego  $AD=BC$ , y el ángulo  $p=q$ ; pero estos son alternos internos entre las líneas AD, BC, cortadas por otra AC, luego dichas líneas serán paralelas (281), y la figura un paralelogramo. L. Q. D. D.

312 Teor. *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero será un paralelogramo.*

*Espl.* Si en el cuadrilátero ABCD, se supone  $AD=BC$ , y  $BA=CD$ ,

digo que AD será paralela á BC, y BA á CD, y la figura un paralelogramo.

*Dem.* Porque tirando la diagonal AC, los triángulos ABC, ADC serán iguales (259); luego el ángulo  $m=n$ , y  $p=q$ ; la primera ecuacion da que CD es (281) paralela á BA, y la segunda que AD lo es á BC; luego la figura es un paralelogramo. L. Q. D. D.

313 Si aplicamos aquí lo demostrado (286), y se sustituye el lenguaje de *paralelogramo*, *lados*, &c. se tendrá: primero, que *la diagonal de un paralelogramo le divide en dos triángulos iguales*. Segundo. *En*



todo paralelogramo son iguales los lados y ángulos opuestos. Tercero. Dos ángulos *A*, *D*, contiguos á un mismo lado de un paralelogramo, son (284, 4.<sup>o</sup>) el uno suplemento del otro. Cuarto. Si uno de los ángulos es recto, lo son todos. Quinto. Si dos lados contiguos de un paralelogramo son iguales, lo son todos los demas.

314 Si dos paralelogramos tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, serán iguales; pues los otros dos lados lo serán por opuestos á los dados; y los ángulos serán el opuesto igual al dado, y los adyacentes tambien serán iguales por ser suplementos suyos.

Ademas puede observarse que si por la parte superior ó inferior de la *AD*, y por la derecha ó izquierda de la *AB*, se tirasen varias líneas, y por el punto *C* se tirasen paralelas respectivamente á dichas líneas, resultarían una porcion de paralelogramos, que todos tendrían una misma diagonal *AC*.

### De los polígonos.

315 Una figura terminada por mas de cuatro líneas se llama *polígono*; si está terminada por cinco lados, se llama *pentágono*; si por 6, *exágono*; si por 7, *eptágono*; si por 8, *octógono*; si por 9, *eneágono*; si por 10, *decágono*; si por 11, *endecágono*; si por 12, *dodecágono*. Cuando ocurre nombrar un *polígono* de mas lados, se dice *polígono de 16, de 20, de 30 lados*.

Un polígono es *regular* cuando tiene iguales todos sus ángulos y todos sus lados, como *ABDEF* (fig. 60); y es *irregular* cuando le falta alguna de estas circunstancias, como *ABCDEF* (fig. 61).

Se llama *ángulo saliente* de un polígono, aquel cuyo vértice mira hácia fuera de la figura, como los *A*, *B*; y *ángulo entrante*, aquel cuyo vértice mira hácia dentro de la figura como el *D*.

Cuando el polígono es regular hay un punto dentro, tal que todas las líneas que desde él se tiran á los ángulos, son iguales; este punto se llama el *cen-*



tro del polígono, y las líneas tiradas *radios oblicuos*; y se llaman *radios rectos* las perpendiculares tiradas desde el centro á los lados; y en un polígono se llama *sajita* á la diferencia entre el radio oblicuo y el radio recto.

316 Teor. *La suma de todos los ángulos de un polígono vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono menos dos.*

*Dem.* Porque si desde uno de los ángulos A (fig. 61) se tiran diagonales, quedará dividido el polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos; pero los ángulos de estos triángulos componen los del polígono; luego los ángulos de este valen tanto como los de los triángulos; y como los de cada triángulo valen dos rectos, se deduce L. Q. D. D.

*Cor. 1.º* Luego llamando  $\pi$  á dos ángulos rectos ó á  $180^\circ$  y  $n$  al número de lados,  $(n-2)\pi$  será la expresión del valor de todos los ángulos de un polígono.

*Cor. 2.º* Como en un polígono regular todos los ángulos son iguales, y hay tantos como lados, para hallar el valor de uno se dividirá el valor de todos que es  $(n-2)\pi$ , por  $n$  que es tambien el número de ángulos, y se tendrá:

$$\text{Angulo de polígono regular} = \frac{(n-2)\pi}{n}.$$

*Esc.* La fórmula anterior da á conocer que el ángulo de un polígono regular siempre es menor que  $\pi$ ; porque para obtener su valor, se ha de multiplicar

$$\pi \text{ por el quebrado propio } \frac{n-2}{n}.$$

Sustituyendo 3, 4, 5, &c. en vez de  $n$ , se tendrán los ángulos de los polígonos regulares siguientes, que es muy útil saber de memoria.

$$\text{Ángulo de triángulo equilátero} = 60^\circ;$$

$$\text{Ángulo de cuadrado} = 90^\circ,$$

$$\text{Ángulo de pentágono regular} = 108^\circ;$$

$$\text{Ángulo de exágono regular} = 120^\circ.$$



317 Teor. Si se dividen los ángulos de un polígono regular en dos partes iguales por medio de líneas, estas se encontrarán en un mismo punto y serán iguales.

*Espl.* Si los ángulos A, B, D, &c. (fig. 60), se dividen en dos partes iguales por medio de las líneas AC, BC, DC, &c., digo que estas se encontrarán en un mismo punto C y serán iguales.

*Dem.* Pues que (316 esc.) el ángulo FAB < 180°, su mitad CAB valdrá menos de 90°; por la misma razón ABC valdrá menos de 90°; luego será

$$CAB + ABC < 180^\circ;$$

luego las líneas AC, BC se encontrarán (287) en un punto tal como C. Y como los ángulos CAB, CBA, son iguales por ser mitades de los iguales FAB, ABD, el triángulo ACB será isósceles y dará AC = CB.

Del mismo modo se demostrará que la DC encontrará á la BC; pero falta probar que la DC encontrará á la BC en el mismo punto en que la AC encuentra á la BC. Para esto observaremos que los triángulos CAB, BCD tienen iguales los lados AB, BD, é iguales los ángulos adyacentes á estos lados, por ser mitades de los ángulos A, B, D, &c. del polígono; luego serán iguales, y se podrán superponer; luego podremos concebir que el triángulo DCB se doble por la BC, de modo que BD caiga sobre BA, en cuyo caso DC se confundirá con AC, é irán por consiguiente á encontrar á la BC en un mismo punto C.

Como lo mismo se demuestra de todas las demas, resulta que todas se encontrarán en C, y que

$$AC = BC = DC = \&c. \text{ que es L. Q. D. D.}$$

*Cor. 1.º* Luego el punto C será el centro del polígono, y las líneas AC, BC, DC, &c. los radios oblicuos; de manera que en todo polígono regular son iguales los radios oblicuos.

*Cor. 2.º* Luego los triángulos CAB, CBD, CDE, &c. son isósceles é iguales entre sí; porque tienen sus tres lados respectivamente iguales.

*Cor. 3.º* Si desde el centro se tiran las perpendiculares CP, CQ, &c. á los lados de dicho polígono,



serán los radios rectos; y como los triángulos ACQ, ACP, tienen el lado AC comun, el ángulo CAP=CAQ por mitades de FAB, y el P=Q por rectos, resulta (273 cor. 2.<sup>o</sup>) que son iguales, y dan CP=CQ; luego en un polígono regular todos los radios rectos son iguales.

Cor. 4.<sup>o</sup> El radio recto de un polígono regular divide al lado correspondiente en dos partes iguales; porque (265 esc.) los triángulos FCA, ACB, &c. son isósceles.

Cor. 5.<sup>o</sup> Si desde el centro de un polígono regular y con el radio oblicuo, se traza una circunferencia, esta pasará por todos los ángulos del polígono, y por consiguiente el círculo quedará circunscrito al polígono.

Cor. 6.<sup>o</sup> Si desde el centro del polígono se traza una circunferencia con un radio igual al radio recto (fig. 62), esta pasará por los extremos de todos ellos; y siendo cada lado perpendicular al radio recto, que se ha convertido en radio del círculo, este quedará inscrito en el polígono.

Esc. al cor. 5.<sup>o</sup> y 6.<sup>o</sup> Debe observarse que radio oblicuo de un polígono inscrito en un círculo, y radio de un círculo circunscrito á un polígono, es una misma cosa; y que radio recto de un polígono circunscrito á un círculo, y radio de un círculo inscrito en un polígono, es tambien una misma cosa; ó mas general, el radio oblicuo de todos los polígonos que se pueden inscribir en un círculo, es el mismo que el del círculo en que lo están; y el radio recto de todos los polígonos que se pueden circunscribir á un círculo, es el mismo que el del círculo á que lo están.

Cor. 7.<sup>o</sup> Como todos los triángulos ACB, BCD, &c. (fig. 60) son iguales, los ángulos ACB, BCD, &c. formados en el centro, serán iguales; y como en virtud de lo espuesto (254 cor. 3.<sup>o</sup>) todos valen  $360^{\circ}$  ó  $2\pi$ , y hay tantos como lados, resulta que

$$\text{áng. del centro de un políg.reg.} = \frac{360^{\circ}}{n}.$$



Cor. 8.<sup>o</sup> *El lado del exágono es igual al radio del círculo circunscrito; porque los triángulos ACB, BCD, &c. (fig. 63) que en todos los polígonos regulares son isósceles, en el exágono son equiláteros, por ser equiángulos; pues siendo  $ABD=120^{\circ}$ , su mitad CBA valdrá  $60^{\circ}$ , y tambien  $CAB=60^{\circ}$ ; luego el  $ACB=60^{\circ}$ ; luego  $CA=AB$ .*

Cor. 9.<sup>o</sup> *Luego para inscribir un exágono en un círculo basta colocar el radio seis veces sobre la circunferencia, y tirar líneas por los puntos de division A, B, D, &c. Si ahora se quiere inscribir un triángulo equilátero, se unirán de dos en dos los extremos de los lados, con las líneas AD, DF, FA.*

Cor. 10.<sup>o</sup> *Y si se quisiese un arco de  $30^{\circ}$ , se dividiría (294) en dos partes iguales el arco AB correspondiente á una cuerda igual al radio.*

318 Para inscribir un cuadrado se tirarán dos diámetros AB, CD (fig. 64), que se crucen á ángulos rectos, y se unirán sus extremos por las cuerdas AC, AD, DB, BC.

Si se levantan en A, B, C, D perpendiculares á los radios OA, OB, OC, OD, se tendrá circunscrito el cuadrado MNPQ: en el cual por ser cada lado, v. g. MN igual (313, 2.<sup>o</sup>) al diámetro AB, se tendrá que el perímetro del cuadrado circunscrito vale cuatro diámetros.

Ahora, por ser el lado del exágono igual al radio del círculo circunscrito, su perímetro valdrá seis radios ó tres diámetros; pero la circunferencia es mayor (308) que el perímetro de cualquier figura inscrita, y menor que el de la circunscrita; luego la circunferencia es menor que cuatro diámetros y mayor que tres, ó está entre tres y cuatro diámetros.

### De las líneas proporcionales.

319 Teor. *Si en una línea que con otra forma un ángulo cualquiera, se toma un número cualquiera de partes iguales, y por los puntos de division se*



tiran paralelas entre sí, hasta que encuentren á la otra, y por estos puntos de concurso se tiran paralelas á la primera: cada una de estas líneas quedará dividida en partes iguales entre sí.

*Espl.* Si en la AV (fig. 65) que con la AZ forma un ángulo cualquiera VAZ, se toma

$$AB=BC=CD=\&c.:$$

por los puntos de division B, C, D, &c. se tiran las BF, CG, &c. paralelas entre sí: y por los puntos F, G, H, &c. donde estas encuentran á la AZ, se tiran las FS, GT, &c. paralelas á la primera AV: digo que las partes AF, FG, GH, &c. de la AZ, serán iguales; y que tambien lo serán las de las líneas FS, GT, &c., y las de CG, DH, &c.

*Dem.* Por el supuesto se tiene  $AB=BC$ ; pero  $BC=FK$  por lados opuestos del paralelogramo BCKF, luego  $AB=FK$ .

El ángulo  $FKG=ABF$  (§ 288):  
el  $BAF=KFG$ , por correspondientes entre las paralelas AV, FS, siendo la secante AZ;  
luego (261) los triángulos BAF, KFG, serán iguales y darán  $AF=FG$ .

Del mismo modo se demostrará que el triángulo  
 $FKG=GNH=HPQ=\&c.$ ;  
luego  $AF=FG=GH=HQ=\&c.$

Ahora,  $FK=BC$  por lados opuestos de paralelogramo; y por la misma razon  $KL=CD$ ,  $LM=DE$ , &c.; pero  $BC=CD=DE=\&c.$  por el supuesto, luego  $FK=KL=LM=\&c.$

Para demostrarlo respecto de las CG, DH, &c., observaremos que  $CK=BF$  por lados opuestos de paralelogramo;  $BF=KG$  por la igualdad de los triángulos ABF, KFG; luego  $CK=KG$ .

Ahora,  $DL=CK$  y  $LN=KG$ , por lados opuestos de paralelogramo; pero  $CK=KG$  por lo acabado de demostrar, luego  $DL=LN$ ; y como  $KG=NH$  por la igualdad de los triángulos FKG, GNH, resulta tambien que  $DL=LN=NH$ , que era todo L. Q. D. D.

*Cor.* Puesto que  $AB=BC=\&c.$  y  $AF=FG=\&c.$



resultará que la razón que tenga AB con AF, esa misma tendrá BC con FG, &c.;

luego  $AB:AF::BC:FG::CD:GH::\&c.:\&c.$ ;

y multiplicando los dos términos de la primera razón por una misma cantidad, se tendrá

$$AB:AF::2AB:2AF::3AB:3AF::4AB:4AF::$$

$$n \times AB:n \times AF::m \times AB:m \times AF::\&c.:\&c.$$

Esto quiere decir, que un número cualquiera  $n$  de partes de la primera es al mismo número de partes de la segunda, como otro número cualquiera  $m$  de partes de la primera es á este mismo número de partes de la segunda: ó alternada dirá: un número cualquiera  $n$  de partes de la primera es á otro número cualquiera  $m$  de partes de la misma, como el número  $n$  de partes de la segunda es al número  $m$  de partes de la misma; de manera que se tendrá esta serie de razones iguales

$$AB:AF::BC:FG::CD:GH::DE:HQ::AC:AG::$$

$$BD:FH::CE:GQ::AD:AH::\&c.:\&c.$$

320 Teor. Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á la base, los lados de dicho triángulo quedan divididos en partes proporcionales.

*Espl.* Sea el triángulo ABC (fig. 66); digo que si desde un punto cualquiera D de uno de los lados, se tira una línea DE paralela á la base, esta línea dividirá á los lados BA, BC en partes proporcionales, de modo que se tendrá  $BA:BD::BC:BE$ .

*Dem.* Aquí pueden ocurrir dos casos: 1.º que BA sea comensurable con BD, y 2.º que no lo sea.

En el primer caso sea la comun medida de BA y BD la AP; y representando por  $m$  el número de veces que está contenida en BA, y por  $n$  las que está contenida en BD, se tendrá  $AB=m \times AP$ ,  $BD=n \times AP$ ; y formando proporcion y simplificando por AP, será

$$AB:BD::m \times AP:n \times AP::m:n;$$

pero si por los puntos de division P se tiran líneas paralelas á la AC tales como la PQ, el lado BC quedará dividido (319) en  $m$  partes iguales con CQ, y la



línea BE en  $n$ , y se tendrá  $BC = m \times CQ$ ,  $BE = n \times CQ$ ;  
de donde  $BC:BE::m \times CQ:n \times CQ::m:n$ ;

luego esta proporción y la anterior (184, 2.<sup>a</sup>) darán  
 $AB:BD::BC:BE$ .

2.<sup>o</sup> Si BA y BD son incomensurables, digo que la razón de BA:BD no puede ser mayor ni menor que la de BC:BE.

En efecto, no se puede suponer  $BA:BD::BC:BL$ , siendo  $BL < BE$ ; porque en este caso concibiendo la BA dividida en partes iguales, tan pequeñas que tirando paralelas á AC por los puntos de división, caiga una de estas tal como *de*, entre E y L, á causa de la comensurabilidad de BA con Bd, se tendrá

$$BA:Bd::BC:Be.$$

Cuya proporción y la anterior dará (§ 184, 2.<sup>a</sup> cor.)  $BD:Bd::Bl:Be$ , resultado absurdo; porque la una razón es de mayor desigualdad, y la otra de menor.

Tampoco se puede suponer que  $BA:BD::BC:BL'$ , siendo  $BL' > BE$ ; porque concibiendo dividida la BA en partes tan pequeñas como se necesite, para que una de las paralelas tal como *d'e'*, tiradas á la base AC por los puntos de división, caiga entre E y L', se tendrá  $BA:Bd'::BC:Be'$ ;

y formando proporción con los consecuentes de estas dos proporciones, será  $BD:Bd'::BL':Be'$ , resultado absurdo por la misma razón que ántes; luego no pudiendo ser la razón  $BA:BD >$  ni  $<$   $BC:BE$ , será  $BA:BD::BC:BE$ , que es L. Q. D. D.

Cor. 1.<sup>o</sup> Dividiendo esta proporción tendremos  $BA - BD:BD::BC - BE:BE$ , ó  $DA:BD::CE:BE$ , la cual compuesta y alternada, se convierte en  $DA + BD = BA:CE + BE = BC::BD:BE::DA:CE$ ; que nos manifiesta que los lados del triángulo son proporcionales con las partes superiores é inferiores á la paralela, y estas proporcionales entre sí.

Cor. 2.<sup>o</sup> De aquí se sigue también que si tres paralelas AC, DE, de, se cortan por dos secantes Ad, Ce, estas y las partes en que quedan divididas por la paralela DE, serán proporcionales entre sí; de



manera que se tendrá  $Ad:Ce::AD:CE::Dd:Ee$ ,  
ó  $Ad:AD:Dd::Ce:CE:Ee$ .

Porque concibiendo prolongadas las secantes hasta que se encuentren en B, el triángulo BAC nos dará  $Bd:Be::Ad:Ce$ ; y el BDE dará  $Bd:Be::Dd:Ee$ ; por lo que (184, 2.<sup>a</sup>) será  $Ad:Ce::Dd:Ee$ ; y (184, 4.<sup>a</sup>)  $Ad-Dd:Ce-Ee::Ad:Ce::Dd:Ee$ ; que reduciendo y permutando resulta

$$Ad:Ce::AD:CE::Dd:Ee,$$

ó (§ 185)  $Ad:AD:Dd::Ce:CE:Ee$ .

321 Teor. *Si una recta divide los lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela á la base.*

*Espl.* Sea el triángulo BAC (fig. 67); digo que si la DE divide los lados BA, BC, de modo que se tenga  $BA:BD::BC:BE$ ,

la línea DE será paralela á la base AC.

*Dem.* Si la DE no es paralela á la AC, se le podrá tirar por el punto D una línea que lo sea. Si esta fuese la  $De$ , se tendria (§ 320)  $BA:BD::BC:Be$ ; y como esta proporcion y la del supuesto tienen los tres primeros términos comunes, resulta  $BE=Be$ , que es absurdo, porque BE es todo y Be parte suya; luego la paralela á la base no puede caer por mas arriba de la DE. Tampoco puede caer por la parte inferior; porque si se supone que la  $De'$  es paralela á la AC, resultará  $BE=Be'$ , que tambien es absurdo; luego si la paralela tirada por el punto D á la base AC, no puede pasar ni por mas arriba ni por mas abajo de la DE, esta será la paralela. L. Q. D. D.

322 Teor. *La DE, que es paralela á la base, es tambien proporcional con la misma base; de manera que se tiene  $BA:BD::AC:DE$ .*

*Dem.* Tirando por D la DF paralela á BC, tendríamos (320 cor. 1.<sup>o</sup>)  $BA:BD::AC:CF$ ; pero  $DE=FC$  por ser lados opuestos del paralelogramo DFCE; luego  $BA:BD::AC:DE$ , que era L. Q. D. D.

323 Probl. *Dividir una línea dada AG (fig. 68) en las partes iguales que se quiera, v. g. en ocho.*

*Res. y Dem.* Tírese por uno de sus extremos A



una línea cualquiera AQ; tómense en esta ocho partes iguales á una magnitud arbitraria, tal como AB; únase el extremo F de la octava division con el G de la línea propuesta; y por todos los puntos de division tírense paralelas á la FG, las cuales dividirán á la AG en las ocho partes iguales que se deseaba (319).

*Esc.* Si se quisiera dividir la línea en dos (ó mas) partes que tuviesen una razon dada, como de 3 á 5, se dividiría la línea AG en 8 partes por el método anterior; y la línea DE tirada por el punto que señale uno de los números dados paralela á GF, dividirá la AG en las dos partes AE, EG, que serán como 3:5 (§320 cor.)

324 Probl. *Dadas tres líneas G, K, L (fig. 69), hallarles una cuarta proporcional geométrica.*

*Res. y Dem.* Fórmese un ángulo cualquiera VAZ con dos líneas indefinidas AV, AZ; en uno de los lados AV tómese una parte AB= con la 1.<sup>a</sup> G; en el mismo lado tómese otra parte AC= con la 2.<sup>a</sup> K; en el otro lado AZ tómese una parte AE= á la 3.<sup>a</sup> L; únase el extremo B de la primera con el E de la tercera por medio de la BE, y por el extremo C de la segunda tírese la CF paralela á BE, la cual irá á encontrar al otro lado, de manera que la parte AF será la cuarta proporcional pedida. Porque el triángulo ACF (§ 320) da AB:AC::AE:AF, ó sustituyendo á estas líneas sus iguales, G:K::L:AF.

*Esc.* Si sólo se diesen las dos líneas G, K, y se pidiese una tercera proporcional geométrica, se emplearía la misma construcción sin mas diferencia que tomar AE=AC=K.

325 Probl. *Formar la escala universal que se conoce con el nombre de escala de mil partes.*

*Res. y Dem.* Tómese una magnitud arbitraria K (fig. 70), y repítase diez veces sobre la AB desde A hasta O; tómese toda la magnitud AO=10K, y repítase nueve veces desde O hácia la derecha; en los extremos levántense perpendiculares, en las cuales se tomarán tambien diez partes iguales con otra magni-



tud arbitraria, y se tirarán líneas por los puntos de division 1, 2, 3, &c. que serán paralelas é iguales (311) á la AB; y en la última CE fórmense las mismas partes que en la AB.

Desde D á C y desde O á A, póngase 10, 20, 30, &c. en las divisiones 1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup> &c.; únase el punto O con el 10 de la de arriba; el 10 de la AO con el 20 de la de arriba, y así sucesivamente hasta unir el punto 90 de la de abajo con el C de la de arriba; únase tambien el punto O con el D, y en los puntos de division de la derecha se pondrán, tanto arriba como abajo, 100, 200, 300, &c.; con lo cual quedará formada la escala.

En ella se podrán tomar hasta mil partes, de esta manera: considerando que la distancia A90 vale diez partes, la AO valdrá 100; y como  $AB=10AO$ , se sigue que la AB que es la mayor magnitud que se puede tomar, valdrá mil partes.

*Esc. 1.<sup>o</sup>* Ahora, para tomar un número cualquiera de partes menor que mil, se procederá del modo siguiente. En primer lugar *esta distancia se debe tomar en la paralela á AB que pase por el punto que espresa el guarismo de las unidades del número propuesto; y la magnitud estará espresada por la parte de esta línea que hay interceptada entre la línea que espresa las centenas, y la que va desde las decenas de abajo á una decena mas de la de arriba.* Así, si se quieren tomar 237 partes, se echará de ver que esta distancia se debe tomar en la línea 7F, y estará representada por la parte HN, interceptada entre la línea 200 que espresa las centenas, y la que desde el 30 de la de abajo que espresa las decenas, va al 40 de la de arriba.

Porque  $NH=Hm+mr+rN$ ; ahora,  $Hm$  es igual á 200, y por consiguiente vale 200 partes; la  $Nr=O30$ , tambien por lados opuestos del paralelogramo  $NrO30$ , y por consiguiente vale 30 de estas partes; y la  $rm$  por lo que ahora probarémos vale 7 de dichas partes; luego  $NH=200+30+7=237$  partes.

Para probar que  $rm$  vale 7 partes, se observará



que el triángulo  $OD_{10}$ , por ser la  $rm$  paralela á  $D_{10}$ , da  $rm:D_{10}::Om:OD::7\times Ot:10\times Ot::7:10$ ;

$$\text{luego } rm = \frac{D_{10} \times 7}{10};$$

y como la distancia  $D_{10}$  la suponemos compuesta de diez partes, resulta que  $rm = \frac{10 \times 7}{10} = 7$ .

*Esc. 2.º* Es muy importante el conocimiento de la escala, pues es lo primero que se ha de hacer para delinear todo plano, y es la que en los mismos planos y mapas sirve para conocer la distancia de dos puntos.

*De la semejanza de las figuras.*

326 Se llaman *figuras semejantes* las que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales; y *desemejantes*, aquellas á que falta alguna de estas dos circunstancias. De modo que las dos figuras  $ABCDE$ ,  $abcde$  (fig. 71) serán semejantes, siempre que sus ángulos sean  $A=a$ ,  $B=b$ ,  $C=c$ , &c., y además se tenga  $AB:ab::BC:bc::CD:cd::\&c.:\&c.$

327 Teor. Todos los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.

*Dem.* Porque siendo en ambos uno mismo el número

$n$  de lados, la fórmula (§ 316 cor. 2.º)  $\frac{(n-2)\pi}{n}$

dará un mismo valor para cada ángulo; luego los ángulos del uno serán iguales á los del otro; y como en cada uno han de ser iguales los lados entre sí, resulta que la razón que uno de ellos tenga con otro, esa será la que tengan otros dos cualesquiera. Luego serán semejantes. L. Q. D. D.

328 Teor. Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á uno de los otros lados, se orijinará un triángulo que será semejante al primitivo.



*Espl.* Si por el punto  $b'$  del lado  $AB$  (fig. 72), se tira la  $b'c'$  paralela á  $BC$ , el triángulo  $Ab'c'$  será semejante al  $ABC$ .

*Dem.* Ambos triángulos tienen comun el ángulo en  $A$ ; el ángulo en  $b' =$  al en  $B$  por correspondientes; el en  $c' =$  al en  $C$ , por la misma razon; luego son equiángulos. Ahora, el triángulo  $ABC$  nos da (§ 320 y 322)  $AB:Ab'::AC:Ac'::BC:b'c'$ .

Luego estos dos triángulos tienen los ángulos iguales, y proporcionales los lados; luego son semejantes. L. Q. D. D.

329 Teor. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen sus tres lados proporcionales.*

*Espl.* Sean los dos triángulos  $ABC$ ,  $abc$ , en que se supone  $AB:ab::AC:ac::BC:bc$ ; digo que los ángulos serán  $a=A$ ,  $b=B$ ,  $c=C$ , y por lo mismo los triángulos serán semejantes.

*Costr.* Tómese en el lado  $AB$  una parte  $Ab'=ab$ , y en  $AC$  una parte  $Ac'=ac$ , y únase el punto  $b'$  con el  $c'$ .

*Dem.* Por el supuesto tenemos  $AB:ab::AC:ac$ ; luego sustituyendo en vez de  $ab$  y  $ac$  sus iguales  $Ab'$ ,  $Ac'$ , será  $AB:Ab'::AC:Ac'$ ; luego (321) la  $b'c'$  será paralela á la base, y proporcional (322) á la misma base; luego  $AB:Ab'::BC:b'c'$ ; y como  $ab=Ab'$ , esta proporción y la del supuesto tienen los tres primeros términos iguales; luego el cuarto será igual en ambas, y se tendrá  $b'c'=bc$ ; luego los triángulos  $Ab'c'$ ,  $abc$  son iguales (259); y como  $Ab'c'$  es semejante (328) al  $ABC$ , resulta que su igual  $abc$  tambien será semejante á  $ABC$ , que era L. Q. D. D.

330 Teor. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, formado por dos lados proporcionales.*

*Espl.* Sean  $ABC$ ,  $abc$  dos triángulos, en que se supone  $A=a$ , y  $AB:ab::AC:ac$ ; digo que son semejantes.

*Dem.* Hecha la construcción anterior resulta que si en la proporción del supuesto sustituimos en vez de  $ab$ ,  $ac$ , sus iguales  $Ab'$  y  $Ac'$ , se tendrá

$$AB:Ab'::AC:Ac';$$



luego la  $b'c'$  divide en partes proporcionales los lados del triángulo  $ABC$ , y por lo mismo será paralela á la base; luego (328) el triángulo  $Ab'c'$  es semejante al  $ABC$ ; y como  $abc$  es igual (260) con  $Ab'c'$ , resulta que  $abc$  será semejante á  $ABC$ , que es L. Q. D. D.

331 Teor. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.*

*Espl.* Sean dos triángulos  $ABC$ ,  $abc$ , en que se supone  $A=a$ ,  $B=b$  y  $C=c$ ; digo que son semejantes.

*Costr.* Tómese en  $AB$  una parte  $Ab'$  igual con  $ab$ , y por  $b'$  tírese la  $b'c'$  paralela á  $BC$ .

*Dem.* El ángulo  $b'=B$  por correspondientes; y como  $B=b$  por el supuesto, será  $b'=b$ ; luego los dos triángulos  $Ab'c'$ ,  $abc$  son iguales (261); pero  $Ab'c'$  es semejante con  $ABC$ , luego  $abc$  también lo será, que es L. Q. D. D.

Cor. 1.º *Cuando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, los triángulos son semejantes; porque en este caso el tercer ángulo es igual al tercero.*

Cor. 2.º *Dos triángulos rectángulos son semejantes, siempre que además del ángulo recto tengan otro igual ó comun.*

Cor. 3.º *Dos triángulos  $ABC$ ,  $DEF$  (fig. 73) son semejantes cuando tienen sus lados paralelos; porque si  $AB$  es paralelo á  $DE$  y  $BC$  á  $EF$ , el ángulo  $B=E$  (§ 288); y además por ser  $AC$  paralelo á  $DF$  será igualmente el ángulo  $C=F$  y  $A=D$ .*

Cor. 4.º *Dos triángulos  $DEF$ ,  $ABC$  (fig. 74), son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares; porque dando á uno de ellos un cuarto de conversion (lo que no altera el triángulo) resultarían sus lados paralelos á los del otro.*

Esc. 1.º *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen proporcionales un cateto y la hipotenusa.*

En efecto, si suponemos rectángulos en  $B$  y en  $b$  (fig. 72) los triángulos  $ABC$ ,  $abc$ , y que  $AB:AC::ab:ac$ , serán semejantes; porque tomando  $Ab'=ab$  y  $Ac'=ac$ , la proporción se convertirá en  $AB:AC::Ab':Ac'$ ;



luego si unimos el punto  $b'$  con  $c'$  por medio de la  $b'c'$ , esta será (321) paralela á  $BC$ ; y como el ángulo  $B$  es recto por el supuesto, tambien lo será (284, 3.<sup>o</sup>) el  $b'$ ; luego (273 cor. 2.<sup>o</sup>) los triángulos  $Ab'c'$ ,  $abc$  serán iguales; pero  $Ab'c'$  es semejante (328) al  $ABC$ ; luego tambien lo será el  $abc$ , que era L. Q. D. D.

*Esc. 2.<sup>o</sup>* Siempre que se hayan de sacar proporciones de triángulos semejantes se compararán los lados del uno con los *homólogos* del otro; esto es, los que estén opuestos á ángulos iguales, ó sean paralelos ó perpendiculares.

332 Teor. Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verificarán seis cosas: 1.<sup>a</sup> el triángulo quedará dividido en otros dos semejantes al total, y semejantes entre sí; 2.<sup>a</sup> la perpendicular bajada será media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa; 3.<sup>a</sup> cada cateto será medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente; 4.<sup>a</sup> el cuadrado de la hipotenusa será igual á la suma de los cuadrados de los catetos; 5.<sup>a</sup> los cuadrados de los catetos serán entre sí como los segmentos correspondientes; y 6.<sup>a</sup> la perpendicular será cuarta proporcional á la hipotenusa y á los catetos.

*Espl.* Si desde el ángulo recto  $A$  (fig. 75) del triángulo rectángulo  $ABC$ , se baja una perpendicular  $AD$  á la hipotenusa  $BC$ , digo que se verificarán seis cosas: 1.<sup>a</sup> los dos triángulos  $ADB$ ,  $ADC$  serán semejantes al total  $BAC$ , y semejantes entre sí; 2.<sup>a</sup> la perpendicular  $AD$  será media proporcional entre los dos segmentos  $BD$  y  $DC$  de la hipotenusa  $BC$ ; 3.<sup>a</sup> cada cateto  $AB$  ó  $AC$  será medio proporcional entre la hipotenusa  $BC$  y el segmento  $BD$ , ó  $DC$  que á cada uno corresponde; 4.<sup>a</sup> el cuadrado  $BC^2$  de la hipotenusa será igual á la suma  $BA^2 + CA^2$  de los cuadrados de los catetos; 5.<sup>a</sup> los cuadrados  $BA^2$ ,  $CA^2$  de los catetos serán entre sí como los segmentos correspondientes  $BD$  y  $DC$ ; y 6.<sup>a</sup> la  $DA$  será cuarta proporcional á la hipotenusa  $BC$  y á los catetos  $CA$ ,  $AB$ .

Q

T. I.



*Dem.* 1.<sup>a</sup> Por tener los triángulos BAC y BAD un ángulo comun en B, y ademas el primero uno recto A por el supuesto, y el segundo el  $r$  tambien recto, dichos triángulos serán semejantes (331 cor. 2.<sup>o</sup>). Por tener los triángulos BAC y DAC comun el ángulo en C, y ademas cada uno uno recto, el primero en A, y el segundo en  $m$ , tambien serán semejantes. Ahora, de ser semejantes BAC y BAD se sigue que el ángulo en C= $n$ ; luego los triángulos BAD y DAC, ademas del ángulo recto  $r$  y  $m$ , tienen otro ángulo igual; luego (331 cor. 2.<sup>o</sup>) son semejantes. L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>a</sup> Por ser los triángulos BAD y DAC semejantes, darán (§ 331 esc. 2.<sup>o</sup>)  $BD:AD::DA:DC$ , que es L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

3.<sup>a</sup> Los triángulos semejantes BAC y BAD darán (331 esc. 2.<sup>o</sup>)  $BC:BA::BA:BD$  (m).

Los BAC, DAC, dan  $BC:AC::AC:DC$  (n), que junta con la (m) manifiesta L. 3.<sup>o</sup> Q. D. D.

4.<sup>a</sup> Las proporciones (m) y (n) dan

$$BA^2=BC \times BD \text{ (p)}, \quad AC^2=BC \times CD \text{ (q)};$$

y sumando, resolviendo en factores y reduciendo, será  $BA^2+AC^2=BC \times BD+BC \times CD=BC \times (BD+CD)=BC \times BC=BC^2$  ó  $BC^2=AB^2+AC^2$ ,

que es L. 4.<sup>o</sup> Q. D. D.

5.<sup>a</sup> Si con las dos ecuaciones (p) y (q) formamos proporcion, y simplificamos por BC, será

$$BA^2:AC^2::BC \times BD:BC \times CD::BD:CD,$$

que es L. 5.<sup>o</sup> Q. D. D.

6.<sup>a</sup> Los triángulos BAC, BAD, dan

$$BC:CA::BA:AD, \text{ que es L. 6.<sup>o</sup> Q. D. D.}$$

*Cor.* Una vez que  $BC^2=BA^2+CA^2$ , si estraemos la raiz cuadrada de ambos miembros será

$$BC=\sqrt{BA^2+CA^2};$$

luego en conociendo los dos catetos se conocerá la hipotenusa, *estrayendo la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos*. Y si en la misma ecuacion se despeja un cateto, tal como CA, se tendrá

$$CA^2=BC^2-AB^2, \text{ que da } CA=\sqrt{BC^2-BA^2};$$



la primera quiere decir, que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto*; y la segunda, que en conociendo la hipotenusa y un cateto, se conocerá el otro cateto *extrayendo la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto*.

333 Teor. Si desde un punto cualquiera *A* de la circunferencia (fig. 76) se baja una perpendicular al diámetro *BC*, se verificarán cuatro cosas: 1.<sup>a</sup> la perpendicular *AD* será media proporcional entre los dos segmentos *BD*, *DC* del diámetro; 2.<sup>a</sup> si desde los extremos del diámetro se tiran las cuerdas *BA*, *CA* á dicho punto de la circunferencia, estas serán medias proporcionales entre el diámetro y el segmento correspondiente; 3.<sup>a</sup> los cuadrados  $BA^2$ ,  $CA^2$  de dichas cuerdas serán entre sí como los segmentos correspondientes; y 4.<sup>a</sup> el cuadrado  $BC^2$  del diámetro es igual á la suma de los cuadrados  $BA^2$ ,  $CA^2$  de las cuerdas, que desde sus extremos se tiren á un punto cualquiera *A* de la circunferencia.

Dem. Es la misma que la del caso anterior, sólo con sustituir las voces *diámetro* á la *hipotenusa*; *cuerda* á *cateto*; *punto de la circunferencia* á *vértice de ángulo recto*; pues el triángulo *BAC* es rectángulo en *A* (§ 304 cor. 3.<sup>o</sup>)

Cor. 1.<sup>o</sup> Una vez que  $BA^2 = BC \times BD$ , y *BA* es una cuerda cualquiera, se sigue que *el cuadrado de una cuerda es siempre igual al diámetro ó duplo del radio multiplicado por el segmento correspondiente á dicha cuerda*.

Cor. 2.<sup>o</sup> Luego si se tienen dos cuerdas, tiradas cada una desde su diámetro, el cuadrado de cada una será igual al diámetro multiplicado por el segmento que le corresponda; y formando proporcion con las dos ecuaciones, se tendrá despues de simplificar la última razon, que en general *los cuadrados de las cuerdas son como los segmentos que causan en el diámetro que pasa por uno de sus extremos, las perpendiculares bajadas desde los otros extremos; y las cuerdas serán entre*



si (190) como las raíces cuadradas de los segmentos.

334 Probl. Entre dos líneas dadas  $K, L$  (fig. 76), hallar una media proporcional.

*Res. y Dem.* Póngase una á continuación de otra de modo que  $BD=K, DC=L$ ; sobre toda la  $BC$  como diámetro, describáse la semicircunferencia  $BAC$ ; en el punto  $D$  donde se unieron, levántese la perpendicular  $DA$  hasta encontrar á la circunferencia, la cual será la media proporcional pedida (333 1.<sup>a</sup>).

335 Teor. En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del mayor lado es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados; y en todo triángulo acutángulo, el cuadrado del lado mayor es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

*Espl.* Sea primero el triángulo obtusángulo  $ABC$  (fig. 77); digo que el cuadrado de  $AB$  es mayor que la suma de los cuadrados de  $AC$  y  $CB$ , ó que

$$AB^2 > AC^2 + CB^2;$$

y si el triángulo  $ABC$  (fig. 78) es acutángulo, se tendrá  $AB^2 < AC^2 + CB^2$ .

*Dem.* 1.<sup>o</sup> Bajando la perpendicular  $BD$  (fig. 77), el triángulo  $ADB$  será rectángulo, y (332, 4.<sup>a</sup>) dará

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ (n);}$$

pero  $AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2$ ;

y por ser rectángulo el triángulo  $CBD$  será (§ 332 cor.)

$$BD^2 = BC^2 - CD^2;$$

luego poniendo en vez de estos cuadrados sus valores en la ecuacion (n), se convertirá en

$$AB^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2 + BC^2 - CD^2 = \\ AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD;$$

luego el cuadrado de  $AB$ , que es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, mas la cantidad  $2AC \times CD$ , excederá á dicha suma en esta cantidad; luego será mayor. L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>o</sup> Bajando la perpendicular  $BD$  (fig. 78) el triángulo rectángulo  $ABD$  dará  $AB^2 = AD^2 + BD^2$  (p);

pero  $AD^2 = (AC - CD)^2 = AC^2 - 2AC \times CD + CD^2$ ;

y el  $BDC$  dará  $BD^2 = BC^2 - CD^2$ ;

y sustituyendo estos valores en (p) resultará



$$AB^2 = AC^2 - 2AC \times CD + CD^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CD;$$

luego al cuadrado de AB, que es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos la cantidad  $2AC \times CD$ , le faltará dicha cantidad para ser igual con ella; luego será menor. L. 2.º Q. D. D.

*Esc. 1.º* Para cifrar en ecuaciones la relacion de los lados de los triángulos, y para la expedicion de los cálculos, se señalan en general los ángulos por las letras mayúsculas *A*, *B*, *C*, que se suponen en sus vértices, y por *a*, *b*, *c* los lados opuestos respectivamente á dichos ángulos, como se ve (figs. 77 y 78); con lo cual las dos ecuaciones anteriores reunidas en una, darán  $c^2 = b^2 + a^2 \pm 2b \times CD$ ;

que quiere decir, que *en todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado mayor (ó de un lado), es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, mas ó ménos el duplo del lado sobre que se tira la perpendicular, multiplicado por el segmento interceptado por la perpendicular hasta el ángulo opuesto al lado que se considera.*

*Esc. 2.º* Si el segmento CD fuese nulo, se tendría  $c^2 = b^2 + a^2$ , y el triángulo seria rectángulo, pues la perpendicular caeria por el mismo lado AC, ó seria él mismo.

336 Teor. *Si desde dos vértices cualesquiera de un triángulo se tiran dos líneas al punto medio de su respectivo lado opuesto, dichas líneas se encontrarán á las dos terceras partes de distancia á su vértice respectivo.*

*Espl.* Sea ABC (fig. 79) un triángulo cualquiera; digo que si desde dos ángulos cualesquiera *A*, *C*, se tiran las AL, CO, á los puntos L, O, medios de los lados opuestos BC, AB, el punto de interseccion G distará de A los dos tercios de AL, ó será  $AG = \frac{2}{3}AL$ , y del mismo modo  $CG = \frac{2}{3}CO$ .

*Dem.* Porque tirando la OL, será (321) paralela á AC, pues divide en partes iguales á los lados AB, BC, y se tendrá (§ 322)  $AB:BO::AC:OL$ ;



y como por el supuesto  $BO = \frac{1}{2}AB$ , resulta  $OL = \frac{1}{2}AC$ .

Ahora, los triángulos  $OGL$ ,  $AGC$ , son semejantes por tener los ángulos en  $G$  iguales por opuestos al vértice, el ángulo  $OLG = GAC$  por alternos internos; luego (331 cor. 1.<sup>o</sup>) son semejantes, y darán

$$AC:OL::AG:GL::CG:GO;$$

y como  $OL = \frac{1}{2}AC$ , será  $GL = \frac{1}{2}AG$ , y  $OG = \frac{1}{2}CG$ , ó se tendrá  $AG:GL::2:1$ ;

que componiendo, comparando con el antecedente, será  $AG+GL=AL:AG::3:2$ , que da  $AG = \frac{2}{3}AL$ ;

del mismo modo se tiene  $CG = \frac{2}{3}CO$ ,

y resulta L. Q. D. D.

337 Teor. *Si dos líneas se encuentran dentro de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.*

*Espl* Se dice de dos líneas que están divididas en partes recíprocamente proporcionales, cuando las partes de la una, ó ella y una parte suya, forman los medios de una proporción, y las partes de la otra, ó ella y una parte suya, forman los extremos; así, vamos á probar que las dos líneas  $BA$ ,  $DC$  (fig. 80) que se encuentran dentro del círculo  $ADBC$ , se cortan de manera que  $AE:EC::ED:EB$ .

*Dem.* Únanse los puntos  $D$  y  $A$  por la  $DA$ , y los  $B$  y  $C$  por la  $BC$ ; los triángulos  $DAE$ ,  $BEC$  tienen los ángulos en  $E$  iguales (257), y los en  $D$  y en  $B$  iguales (304 cor. 2.<sup>o</sup>) por insistir sobre un mismo arco  $AC$ ; luego son semejantes y darán  $AE:EC::DE:EB$ , que es L. Q. D. D.

338 Teor. *Si desde un punto fuera del círculo se tiran dos secantes que terminen en la parte cóncava de la circunferencia, las partes externas serán recíprocamente proporcionales con las secantes enteras.*

*Espl.* Si desde el punto  $P$  (fig. 81) se tiran al círculo  $ABDC$  dos secantes  $PD$ ,  $PC$ , digo que tendremos  $PA:PB::PD:PC$ .

*Dem.* Si tiramos las  $CB$  y  $DA$ , los triángulos  $PBC$ ,  $PAD$ , además del ángulo común  $P$ , tienen iguales (304, cor. 2.<sup>o</sup>) los  $C$  y  $D$ ; luego (331 cor. 1.<sup>o</sup>) serán seme-



jantes, y nos darán  $PA:PB::PD:PC$ , que es L. Q. D. D.

339 Teor Si desde un ángulo de un triángulo se tira una perpendicular al lado opuesto, el lado sobre que cae la perpendicular es á la suma de los otros dos, como la diferencia de estos es á la diferencia de los segmentos.

Espl. Si desde el ángulo B del triángulo ABC (fig. 32), se tira la perpendicular BD al lado opuesto AC, se verificará que  $AC:AB+BC::AB-BC:AD-CD$ .

Dem. Haciendo centro en B con un radio igual al lado menor BC, trácese la circunferencia CEGF, y prolónguese la AB hasta que encuentre á dicha circunferencia; con lo cual las dos secantes tiradas desde A darán (§ 338)  $CA:AE::AG:AF$ ;

$$\text{pero } \begin{cases} AE=AB+BE=AB+BC, \\ AG=AB-BG=AB-BC, \\ AF=AD-DF=AD-DC; \end{cases}$$

luego sustituyendo estos valores en la proporción será

$$AC:AB+BC::AB-BC:AD-DC,$$

ó espresando por  $S, s$ , los segmentos AD, CD, se tendrá  $b:c+a::c-a:S-s$ , que es L. Q. D. D.

$$\text{Esc. Esta proporción da } S-s = \frac{(c+a)(c-a)}{b};$$

y como  $S+s=AD+DC=AC=b$ ,

se tendrá (§ 154)

$$S = \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{(c+a)(c-a)}{b}, \text{ y } s = \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{(c+a)(c-a)}{b}.$$

340 Teor. Si desde dos ángulos homólogos de dos figuras semejantes  $ABCDE, abcde$  (fig. 71), se tiran diagonales á los demas ángulos, los triángulos homólogos, ó del mismo modo colocados, serán semejantes.

Dem. Por ser las figuras semejantes, se tiene

$$AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE:de::EA:ea::\&c.: \&c.,$$

y  $A=a, B=b, C=c, D=d, E=e, \&c. \&c.$

Luego los triángulos ABC, abc, tienen el ángulo  $B=b$ , formado por dos lados proporcionales; luego son semejantes (330) y dan  $BC:bc::CA:ca::CD:cd$



(por la serie de razones iguales del supuesto), y el ángulo  $ACB=acb$ .

Ahora, si de los ángulos totales en  $C$  y  $c$ , que son iguales, quitamos los iguales  $ACB$  y  $acb$ , los residuos  $ACD$ ,  $acd$ , también serán iguales; luego los triángulos  $ACD$ ,  $acd$ , se hallan en el mismo caso que los anteriores; luego son semejantes; y como lo mismo se demostraría de todos los demas, resulta L. Q. D. D.

341 Teor. *Recíprocamente, si dos figuras se componen de un mismo número de triángulos semejantes, y del mismo modo colocados en cada figura, serán semejantes.*

*Dem.* De la semejanza de los triángulos  $ABC$ ,  $abc$ , se deduce que el ángulo  $B=b$ , y  $BCA=bca$ ; de la de los triángulos  $ACD$ ,  $acd$ , se deduce que  $ACD=acd$ ; sumando estas dos ecuaciones será

$$BCA+ACD=bca+acd, \text{ ó } BCD=bcd;$$

y como lo mismo demostraríamos de los demas ángulos, resulta que las figuras  $ABCDE$ ,  $abcde$ , tienen iguales sus ángulos.

Ahora, los triángulos semejantes  $ABC$ ,  $abc$ , dan  $AB:ab::BC:bc::AC:ac$ ;

los  $ACD$ ,  $acd$ , dan  $AC:ac::DC:dc::AD:ad$ ;

los  $ADE$ ,  $ade$ , dan  $AD:ad::DE:de::EA:ea$ .

La segunda de estas series de razones iguales tiene comun con la primera la razon  $AC:ac$ , y la tercera tiene con la segunda comun la  $AD:ad$ ; luego podremos enlazar las tres de este modo

$AB:ab::BC:bc::AC:ac::DC:dc::AD:ad::DE:de::EA:ea$ ;  
ó prescindiendo de las razones en que entran las diagonales, será  $AB:ab::BC:bc::DC:dc::DE:de::EA:ea$ .

Luego, además de tener los ángulos iguales, tienen proporcionales los lados, y por lo mismo son semejantes. L. Q. D. D.

*Esc.* Si representamos en general por  $L, L', L'', \&c.$ ,  $l, l', l'', \&c.$  los lados de dos figuras semejantes: por  $P, p$ , sus perímetros: por  $D, d$ , dos diagonales homólogas: y por  $R, r$ , los radios rectos ú oblicuos de dos polígonos regulares de un mismo número de



lados, que entónces son semejantes (327), se tendrá  
 $L:l::L':l'::L'':l''::\&c.::D:d,$

que (185, 1.<sup>a</sup>) da

$$L+L'+L''+\&c.:l+l'+l''+\&c.::L:l::D:d,$$

ó reduciendo será  $P:p::L:l::D:d$  (m),

y si son regulares será  $P:p::L:l::R:r$  (n).

La (m) quiere decir, que los perímetros de dos figuras semejantes son entre sí como sus lados ó diagonales homólogos; y la (n) dice que en los polígonos regulares semejantes, los perímetros son entre sí como los lados homólogos, ó como los radios rectos ú oblicuos.

342 Si siendo AB (fig. 83) el lado de un polígono regular cualquiera inscrito en un círculo, se quisiese otro de duplo número de lados, no habria mas que tirar el radio recto OE prolongado hasta B', y unir el punto B' con los A, B; pues cada lado AB' subtenderia un arco que seria la mitad del primero. Y si dado un polígono *abcdef* (fig. 85) inscrito, se quisiese uno circunscrito, se tirarian los radios oblicuos (tambien pueden servir los rectos) Oa, Ob, &c. y tirando en sus extremos las tangentes FA, AB, &c. su conjunto formaria el polígono que se queria; pues todos los triángulos *aAb*, *bBe*, &c. son iguales (261) é isósceles (303); de donde se sacará la igualdad de los lados AB, BC, &c. y la de los ángulos A, B, C, &c.

Y si teniendo un polígono MRVO (fig. 86) circunscrito á un círculo, se quisiese otro de duplo número de lados, se tirarian los radios oblicuos CM, CR, &c. y en los puntos Q, D, &c. donde encontrasen á la circunferencia, se tirarian las tangentes PN, BT &c. y se tendria el polígono PNBT &c. que se queria; porque tirando las AQ, AD, &c. todos los triángulos QNA, ABD serian iguales entre sí é isósceles.

343 Teor. Si en un círculo se inscribe un polígono cualquiera, y despues otro de duplo número de lados, y así sucesivamente, la sajita correspondiente á cada uno irá siendo mas de dos veces menor que la del anterior; y por lo mismo podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.



*Espl.* Sea ABED (fig. 84) un cuadrado inscrito en el círculo; digo que si se le inscribe un octógono, y luego un polígono de 16 lados, y así sucesivamente, la sajita Bk del cuadrado será mas de dos veces menor que el radio BC; y la Br del octógono mas de dos veces menor que la Bk del cuadrado, y así sucesivamente; de manera que al cabo de cierto tiempo podrá ser menor que cualquier cantidad dada.

*Dem.* Si dividimos el arco BA en dos partes iguales en H, y tiramos la AH y la BH, esta será el lado del polígono de duplo número de lados; y por ser los cuadrados de las cuerdas tiradas desde los extremos de un diámetro (333 cor. 2.<sup>o</sup>) como sus segmentos correspondientes, tendremos  $BA^2: BH^2:: BC: Bk$ ; pero por ser obtusángulo el triángulo BHA se tiene (335, 1.<sup>o</sup>) que  $AB^2 > BH^2 + AH^2$ ; pero  $AH = BH$ , luego  $AH^2 = BH^2$ , y la desigualdad anterior se convertirá en  $AB^2 > 2BH^2$ ; luego la proporcion anterior es tal que el antecedente de la primera razon es mas de dos veces mayor que el consecuente; luego el antecedente BC de la segunda será tambien mas de dos veces mayor que su consecuente Bk, ó  $BC > 2Bk$ , ó lo que es lo mismo  $Bk < \frac{1}{2}BC$ .

Y como lo mismo se demostraria de Br respecto de Bk, &c. resulta (229 cor. 2.<sup>o</sup>) L. Q. D. D.

344 Teor. Si á un círculo se le circunscribe un polígono regular cualquiera, y despues otro de duplo número de lados, y así sucesivamente, 1.<sup>o</sup> el lado de este último será mas de dos veces menor que el del anterior; y 2.<sup>o</sup> la sajita del segundo será mas de dos veces menor que la del primero; y por lo mismo dichas líneas podrán llegar á ser menores que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.

*Espl.* Sea MRVO (fig. 86) un cuadrado circunscrito al círculo, y TBNP &c. un octógono; digo 1.<sup>o</sup> que el lado del octógono NB es mas de dos veces menor que el del cuadrado MR, ó que  $NB < \frac{1}{2}MR$ ; y 2.<sup>o</sup> que la sajita Bc del octógono (siempre llamaremos sajita



en un polígono regular, la diferencia entre sus radios recto y oblicuo) es mas de dos veces menor que la RD del cuadrado, ó que  $Bc < \frac{1}{2}RD$ ; y si se continúa circunscribiendo polígonos de duplo número de lados, dichas líneas podrán llegar á ser menores que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.

*Dem.* 1.<sup>o</sup> El triángulo rectángulo BDR da  $BR > BD$ ; y como (§ 342)  $BD = AB$  será  $BR > AB$ ; por la misma razon será  $MN > NA$ ; sumando ordenadamente se tendrá

$$BR + MN > AB + NA = NB;$$

y añadiendo NB será  $BR + MN + NB > NB + NB$ , ó reduciendo será  $MR > 2NB$  ó  $NB < \frac{1}{2}MR$ , que es L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>o</sup> Para demostrar la segunda parte, hallaremos los valores de las sajitas, y comparándolos se deducirá lo que hemos dicho. En efecto, bajando la perpendicular  $Dl$ , esta será semilado del cuadrado inscrito, *al* será la sajita del mismo cuadrado, y ademas la  $Dl$  será paralela á  $aR$ ; por lo que (320 cor. 1.<sup>o</sup>) el triángulo  $CaR$  dará

$$Ca:CR::la:DR = \frac{CR \times la}{Ca} = \frac{CR}{Ca} \times la \text{ (m).}$$

Bajando la perpendicular  $cs$ , esta será semilado del octógono inscrito,  $Ds$  será su sajita, y ademas la  $cs$  será paralela á  $BD$ ; por lo que el triángulo  $CDB$

$$\text{dará } CD:CB::Ds:Bc = \frac{CB \times Ds}{CD} = \frac{CB}{CD} \times Ds \text{ (n).}$$

Comparando los valores (m), (n) de  $DR$  y  $Bc$ , se verá

$$\text{que el factor } \frac{CR}{Ca} \text{ del primero es mayor que el } \frac{CB}{CD}$$

del segundo, pues teniendo igual denominador, el numerador  $CR$  del primero es mayor (273) que el  $CB$  del segundo: el factor  $la$  del primero es (343) mas de dos veces mayor que el  $Ds$  del segundo; luego el valor de  $Bc$  es por razon del factor  $CB$  menor que el de



DR; y por razon del factor  $Ds$  mas de dos veces menor; luego con mas razon será mas de dos veces menor, ó se tendrá  $Bc < \frac{1}{2}DR$ , que es L. 2.<sup>o</sup> Q. D. D.

345 Teor. Si en un círculo se inscribe y circunscribe un polígono regular de un mismo número de lados, y despues se inscriben y circunscriben otros de duplo número de lados, y así sucesivamente, la diferencia entre el perímetro del circunscrito y el del inscrito podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.

Dem. Sea  $P$  el perímetro del polígono circunscrito y  $R$  su radio recto, que es el mismo del círculo: y sean  $p$  y  $r$  el perímetro y radio recto del inscrito; y como estos polígonos son semejantes (327), sus perímetros serán proporcionales (341 esc.) con sus radios rectos, y se tendrá  $P:p::R:r$ ; que dividiendo da

$$P-p:P::R-r:R; \text{ de donde sale } P-p = \frac{P(R-r)}{R}.$$

Y como en el valor de  $P-p$  entra por factor  $R-r$ , que es la sajita del polígono inscrito, y esta va siendo mas de dos veces menor al paso que se inscriben polígonos de duplo número de lados, resulta en virtud de lo espuesto (229 cor. 3.<sup>o</sup>) que la diferencia  $P-p$  de los perímetros podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. L. Q. D. D.

Cor. Luego con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir un polígono al círculo, en que la diferencia entre el perímetro de uno ú otro y la circunferencia, sea menor que cualquier cantidad dada. Porque como la circunferencia (308) es mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el del circunscrito, al acercarse estos perímetros el uno al otro, se acercarán con mas razon á la circunferencia.

346 Teor. Las circunferencias de los círculos son entre sí como sus radios  $R, r$ , ó diámetros  $D, d$ .

Dem. Sean  $P, p$  los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, circunscritos á dos círculos cuyas circunferencias sean  $C, c$ , los diámetros  $D, d$ , y  $R,$



$r$  los radios, que tambien son (317 esc.) los radios rectos de dichos polígonos; y (341 esc.) se tendrá  $P:p::R:r$ ; pero aumentando el número de lados de estos polígonos, se pueden acercar  $P$  á  $C$ , y  $p$  á  $c$  al mismo tiempo tanto como se quiera (345 cor.); y siendo  $C, c$  constantes, resulta (231) que  $P:p::C:c$ ; y como esta proporcion y la anterior tienen una razon comun, nos darán (§ 184, 2.<sup>a</sup>)  $C:c::R:r::2R:2r::D:d$ , que es L. Q. D. D.

Cor. 1.<sup>o</sup> Luego si se conociese la relacion que un diámetro tenia con su circunferencia, en dando otro diámetro ó circunferencia se podria venir en conocimiento de la circunferencia ó diámetro respectivo; pues en cualquiera de estos dos casos serian conocidos tres términos de la proporcion anterior.

347 Pero Arquimédes halló que dicha relacion del diámetro á la circunferencia era la de 7 á 22; Pedro Mecio halló la de 113 á 355; y la que nosotros hemos calculado por procedimientos geométricos en nuestro Tratado elemental (tomo I, § 505) es la de 1 á 3,14159265358979324; y por las series (tomo II del mismo Tratado haciendo uso de la fórmula del § 647) hemos hallado que la espresada relacion es la de

1 á 3,1415926535897932384626433832795028; luego haciendo uso de esta última, para hallar la circunferencia correspondiente al diámetro  $D$  formaremos la siguiente proporcion

$1:3,14159 \&c.::D:C=3,14159 \&c.\times D=\pi D=2\pi R$ ; llamando  $\pi$  al factor 3,14159 &c. Donde debe observarse que cuando la letra  $\pi$  está en las espresiones de circunferencia, círculo, &c. espresa el valor 3,14159 &c. y cuando se trata de ángulos vale dos ángulos rectos.

348 Para rectificar un arco ó hallar su longitud estendido en línea recta, se dirá:  $360^\circ$ , que vale toda la circunferencia, es á su longitud  $3,14159D=\pi D$ , como el número de grados  $G$  del arco es á su lon-

gitud respectiva  $L$ ; ó  $360^\circ:\pi D::G:L=\frac{\pi DG}{360^\circ}$ .



349 Los cálculos que hay que hacer para hallar la relacion anterior, son sumamente complicados bájo cualquier aspecto, y por cualquier método que se hagan, como puede verse en los parajes ántes citados; por lo cual vamos á poner aquí un método gráfico muy sencillo, que podrá servir para casi todas las aplicaciones prácticas. Es el siguiente.

Sea *AEBD* (fig. 87) una circunferencia; tírese en el punto *A* una tangente indefinida *FG*; tómese (317 cor. 10.º) el arco *Am* de 30º; por el punto *m* tírese el radio *Om* hasta *F*; tómese ahora sobre la misma tangente desde *F* á la derecha la magnitud *FG* igual á tres veces el radio; desde el punto *G* tírese al extremo *B* del diámetro la *BG*, y esta será igual en longitud á la semicircunferencia *ADB*, aproximada hasta mas de diezmilésimas.

En efecto, tirando la *mn* perpendicular al radio *AO*, será semilado de exágono, y de consiguiente igual á la mitad del radio *Om*; por lo que el trián-

$$\text{gulo AFO dará } On:OA::mn:FA = \frac{mn \times AO}{On};$$

pero suponiendo el radio  $AO=1$ , será  $mn = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}$ ,

$$\text{y } On = \sqrt{Om^2 - mn^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\text{luego sustituyendo se tendrá } FA = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

multiplicando arriba y abajo por  $\sqrt{3}$ ; de donde resulta que el cateto *AG* del triángulo rectángulo *BAG* será  $AG = 3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ; de consiguiente la hipotenusa

$$\begin{aligned} BG \text{ será } BG &= \sqrt{AB^2 + AG^2} = \sqrt{2^2 + (3 - \frac{1}{3}\sqrt{3})^2} = \\ &= \sqrt{4 + 9 - 2 \times 3 \times \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9} \times 3} = \sqrt{13 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2 \times 1,7320508} = \\ &= \sqrt{13,3333333 - 3,4641016} = \sqrt{9,8692317} = 3,14153 \end{aligned}$$



Pero la semicircunferencia, siendo el radio la unidad, está espresada por 3,14159 &c. ; luego la línea BG es igual á la semicircunferencia BDA con ménos de una diezmilésima de diferencia. L. Q. D. D.

## SEGUNDA PARTE.

*De la estension en longitud y latitud, ó de las superficies.*

350 Hasta aquí sólo hemos considerado en las figuras su perímetro; ahora pasamos á manifestar las propiedades del espacio que encierran, ó de las superficies.

*Teor. Los paralelogramos que tienen bases y alturas iguales, ó que tienen una misma base y altura, ó que tienen una misma base y están entre unas mismas paralelas, son equivalentes.*

*Espl.* Sean ABCD, ABEF (fig. 88) dos paralelogramos que tienen la misma base AB, y están comprendidos entre las paralelas AB, DE (por consiguiente (286 esc. 1.<sup>o</sup>) tienen igual altura); digo que son iguales en superficie, ó que  $ABCD = ABEF$ .

*Dem.* En efecto, dichos paralelogramos nos dan  $AD = BC$ ,  $AF = BE$ ;

ademas, de ser  $AB = EF$  y  $AB = CD$ , se saca  $CD = EF$ ; y añadiendo CF será  $CD + CF = EF + CF$  ó  $DF = CE$ ; luego los triángulos DAF, CBE son iguales (259). Ahora, si quitamos estos triángulos del cuadrilátero ABED, se tendrá  $ABED - DAF = ABED - CBE$ ; ó  $ABEF = ABCD$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Luego todo paralelogramo ABEF (fig. 89), equivale al rectángulo ABCD que tiene la misma base y altura.

351 *Teor. Todo triángulo es la mitad de un paralelogramo de la misma base y altura.*

*Dem.* Sea ABC (fig. 90) el triángulo dado; si por A se tira la AD paralela á BC, y por C la CD paralela á BA, se tendrá un paralelogramo BADC, del cual será diagonal el lado AC; luego (313) el trián-



gulo  $ABC=ACD$ , y la superficie de cada uno equivaldrá á la mitad de  $ABCD$ , que es L. Q. D. D.

Cor. 1.<sup>o</sup> Luego un triángulo  $ABC$  es la mitad del rectángulo  $BCEF$  que tiene la misma base  $BC$  y la misma altura  $AO$ ; porque el rectángulo  $BCEF$  es igual en superficie al paralelogramo  $ABCD$ .

Cor. 2.<sup>o</sup> Todos los triángulos que tienen bases y alturas iguales son equivalentes; por ser mitades de paralelogramos iguales en superficie.

352 Teor. Las superficies de dos rectángulos de una misma altura, son entre sí como sus bases.

Espl. Sean  $ABCB$ ,  $abcd$  (fig. 91) ó  $R$ ,  $r$ , dos rectángulos de iguales alturas  $AD=ad$ ; digo que serán entre sí como sus bases  $AB$ ,  $ab$ , ó que  $R:r::AB:ab$ .

Aquí puede ocurrir que las bases sean comensurables, ó que no lo sean.

Dem. 1.<sup>o</sup> Si las bases tienen la comun medida  $AO=ao$ , y representamos por  $m$ ,  $n$ , las veces que está contenida en cada una, se tendrá  $AB=m \times AO$ ,  $ab=n \times ao=n \times AO$ ; y formando proporcion y simplificando por  $AO$ , será  $AB:ab::m \times AO:n \times AO::m:n$ .

Ahora, si por los puntos de division  $O$ , &c.,  $o$ , &c., se conciben perpendiculares  $OP$ , &c.,  $op$ , &c., los rectángulos  $R$ ,  $r$ , quedarán divididos el primero en  $m$  rectángulos como  $AOPD$  iguales entre sí por lo demostrado (350); y el segundo en  $n$  rectángulos como  $aopd$  iguales entre sí y con  $AOPD$  por la misma razon; luego se tendrá  $R=m \times AOPD$ ,  $r=n \times AOPD$ ; y formando proporcion y simplificando por  $AOPD$ , será  $R:r::m \times AOPD:n \times AOPD::m:n$ ; esta proporcion y la anterior (184, 2.<sup>a</sup>) dan

$R:r::AB:ab$ , que es L. 1.<sup>o</sup> Q. D. D.

2.<sup>o</sup> Si las bases son incommensurables, digo que no puede ser  $R:r >$  ni  $< AB:ab$ , y de consiguiente será  $R:r::AB:ab$ .

Sca  $R:r > AB:ab$ ; en este caso menguando el consecuente  $ab$  crecerá la segunda razon; y suponiendo que se convierte en  $ax$ , para que la segunda razon



resulte igual á la primera, se tendrá  $R:r::AB:ax$ .

Hecho esto, concíbese dividida la  $AB$  en dos partes iguales, y luego en otras dos, &c. hasta que resulte una parte menor que  $bx$ , en cuyo caso colocada desde  $a$  hácia  $b$ , un punto de division caerá entre  $x$  y  $b$ , v. g. en  $t$ ; y tirando la perpendicular  $ut$ , los rectángulos  $R$  y  $atud$  que tienen comensurables sus bases  $AB$ ,  $at$ , serán como estas y darán  $R:atud::AB:at$ ; y como esta proporción y la anterior tienen los mismos antecedentes, los consecuentes darán

$$r=abcd:atud::ax:at;$$

proporción absurda, por ser la primera razón de mayor desigualdad y la segunda de menor; luego no se puede suponer  $R:r > AB:ab$ .

Por un razonamiento análogo se demuestra que no puede ser menor; luego será igual. L. 2.º Q. D. D.

353 Teor. *Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

*Espl.* Sean  $ABCD$ ,  $AEGF$  ó  $R$ ,  $r$  (fig. 92) estos dos rectángulos; digo que  $R:r::AB \times AD:AE \times AF$ .

*Dem.* Habiendo dispuesto los rectángulos de manera que los ángulos en  $A$  estén opuestos al vértice, prolónguense los lados  $GE$ ,  $CD$  hasta que se encuentren en  $H$ , y tendremos que los dos rectángulos  $R$ ,  $R'$ , que tienen la misma altura  $AD$ , serán como sus bases  $AB$ ,  $AE$ , y darán  $R:R'::AB:AE$ ; del mismo modo los rectángulos  $R'$ ,  $r$ , que tienen la misma altura  $AE$ , darán  $R':r::AD:AF$ .

Multiplicando estas dos proporciones y omitiendo (191) el término  $R'$ , se tendrá  $R:r::AB \times AD:AE \times AF$ , que es L. Q. D. D.

*Esc.* Luego se puede tomar por medida de un rectángulo el producto de su base por su altura, con tal que se entienda por este producto el de dos números que espresen las unidades lineales contenidas en la base, y las contenidas en su altura.

Así, eligiendo por unidad de medida el cuadrado  $a$  (fig. 93) cuyo lado sea la unidad de longitud, esto es, 1 pie, 1 vara &c. y suponiendo que esté con-



tenida dicha unidad de longitud 5 veces en la base del rectángulo  $A$ , y 3 en la altura, se tendrá

$A:a::5\times 3:1\times 1::15:1$ ; que da  $A=15a=15$ ; el rectángulo  $A$  equivaldrá á  $5\times 3a=15a=15$ , porque el cuadrado de 1 es igual 1; esto es, el rectángulo  $A$  vale 15 veces el cuadrado  $a$ , como manifiesta la figura.

354 Teor. *La superficie de un paralelogramo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

*Dem.* Porque el paralelogramo  $ABEF$  (fig. 89) es equivalente al rectángulo  $ABCD$ , que tiene la misma base  $AB$ , y la misma altura  $AD$ ; pero este tiene por medida  $AB\times AD$ ; luego  $AB\times AD$  es igual á la superficie del paralelogramo  $ABEF$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* De donde resulta que *la superficie de un triángulo es igual al producto de su base por la mitad de su altura, ó á la altura por la mitad de la base.* Porque el triángulo  $ABC$  (fig. 90) es la mitad del paralelogramo  $ABCD$ ; y como la superficie de este es  $BC\times AO$ , la del triángulo será la mitad ó

$$BC\times\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}BC\times AO.$$

*Esc.* Si llamamos  $P$  á un paralelogramo cualquiera (fig. 94),  $A$  á su altura, y  $B$  á su base, se tendrá  $P=B\times A$ ; llamando  $p$  á otro paralelogramo, cuya base sea  $b$ , y  $a$  su altura, se tendrá  $p=b\times a$ ; y formando proporcion, será  $P:p::B\times A:b\times a$ ; que espresa que *las superficies de dos paralelogramos cualesquiera son como los productos de sus bases por sus alturas, ó están en razon compuesta de sus bases y alturas.*

Si  $A=a$ , será  $P:p::B\times A:b\times A::B:b$ ; que quiere decir, que *los paralelogramos que tienen una misma altura, son como sus bases.*

Si se supone  $B=b$ , será  $P:p::B\times A:B\times a::A:a$ ; que quiere decir, que *los paralelogramos de iguales bases son como sus alturas.*

Si  $P=p$ , serán tambien iguales sus espresiones, ó será  $B\times A=b\times a$ , de donde (§ 180)  $B:b::a:A$ ; es decir, que *cuando los paralelogramos son iguales,*



las bases están en razon inversa de las alturas.

Si multiplicamos extremos y medios en la proporcion primitiva, será  $P \times b \times a = p \times B \times A$ ;

de donde  $B:b::P \times a:p \times A$ ,

que quiere decir, que á desigualdad de todo, las bases están en razon compuesta, directa de los paralelogramos, é inversa de las alturas; y sacando de la misma ecuacion la razon de las alturas, se tendrá

$$A:a::P \times b:B \times p;$$

que quiere decir, que á desigualdad de todo, las alturas están en razon compuesta, directa de los paralelogramos, é inversa de las bases.

355 Si en la proporcion primitiva se supone

$A:a::B:b$ , en la razon compuesta  $A \times B:a \times b$ ,

se podrá sustituir en vez de  $A:a$  su igual  $B:b$  ó al contrario, y se tendrá

$$P:p::A \times A:a \times a::B \times B:b \times b::A^2:a^2::B^2:b^2;$$

que quiere decir, que cuando las alturas son proporcionales con las bases, las superficies son como los cuadrados de ellas; pero el ser las bases proporcionales con las alturas es propiedad de los paralelogramos semejantes; luego dos paralelogramos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus bases, de sus alturas, y en general de sus líneas homólogas, como se demuestra tambien geoméricamente.

En efecto, sean  $P, p$  (fig. 94) dos paralelogramos, que por lo dicho ántes darán  $P:p::BC \times AE:bc \times ae$ ;

y por ser semejantes, será  $AB:ab::BC:bc$

y el ángulo  $B=b$ ; y como los en  $E$  y  $e$  son rectos, los triángulos  $ABE, abe$ , son semejantes (331 cor. 2.<sup>o</sup>),

y darán  $AB:ab::AE:ae$ .

Luego sustituyendo en la razon compuesta de arriba, en vez de la  $AE:ae$ , su igual  $BC:bc$  ó  $AB:ab$ , se tendrá  $P:p::BC \times BC:bc \times bc::BC^2:bc^2::AB^2:ab^2::AE^2:ae^2$ .

*Esc.* Y como las mitades son entre sí como los todos, se deduce que los triángulos son como los productos de sus bases por sus alturas; que á igualdad de bases, son como sus alturas &c. Sobre cuyas propiedades y modo de deducirlas, aconsejamos á los



principiantes que se ejerciten todo lo que juzguen necesario, hasta que se lleguen á apropiarse ó familiarizarse con este procedimiento; pues son innumerables las continuas aplicaciones que tiene.

356 Teor. *La superficie de un trapecio ABCD (fig. 95) es igual á su altura EF multiplicada por la semisuma de las bases paralelas AB, CD.*

*Dem.* Si por el punto G, medio de CB, se tira KL paralela al lado opuesto AD, y se prolonga DC hasta que encuentre á esta en K, los triángulos GBL, GCK serán iguales (261); pues los ángulos en G son iguales, los B, C, también, y CG=GB por construcción; luego añadiendo á ambos ALGCD, resultará el trapecio ABCD equivalente al paralelogramo ADKL, y tendrá por medida la de este que es EF×AL.

$$\text{Pero } AL=DK=\frac{2AL}{2}=\frac{AL+DK}{2}=\frac{AB-BL+DC+CK}{2}=\frac{AB+CD}{2}$$

$$\frac{AB-BL+DC+CK}{2}=\frac{AB+CD}{2}$$

(porque -BL y +CK se destruyen por la igualdad de los triángulos); luego sustituyendo este valor de AL en la espresion EF×AL, resultará la superficie del

$$\text{trapecio } ABCD=EF\times\frac{AB+CD}{2},$$

que era L. Q. D. D.

*Esc.* Si por el punto G medio de BC, se tira GH paralela á la base AB, el punto H será también el medio de AD; porque AHGL es un paralelogramo, por ser paralelos los lados opuestos; luego

$$HG=AL=\frac{AB+CD}{2};$$

y sustituyendo este nuevo valor será  $ABCD=EF\times HG$ , esto es, *la superficie de un trapecio es igual á su altura multiplicada por una paralela equidistante de las bases paralelas.*



357 Teor. *La superficie de un polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad de su radio recto.*

*Espl.* Sea GHPK &c. (fig. 96) un polígono regular de  $n$  lados, que representaremos por  $P'$ , sea  $P$  el perímetro GHP &c. y  $R$  su radio recto OT; digo que se tendrá  $P' = P \times \frac{1}{2}R$ .

*Dem.* Por ser regular el polígono, todos los  $n$  triángulos GOH, GOM, &c. son (317 cor. 2.º) iguales; luego será GHPK &c.  $= n \times GOH = n \times HG \times \frac{1}{2}OT$ ; pero  $n \times HG$  compone el perímetro  $P$  del polígono; luego sustituyendo será  $P' = P \times \frac{1}{2}R$ , que es L. Q. D. D.

*Cor. 1.º* Luego si llamamos  $p'$  otro polígono regular,  $p$  al perímetro, y  $r$  á su radio recto, se tendrá  $p' = p \times \frac{1}{2}r$ ; y formando proporcion será

$$P':p'::\frac{P \times R}{2}:\frac{p \times r}{2}::P \times R:p \times r.$$

*Cor. 2.º* Si los polígonos fuesen de un mismo número de lados serian semejantes (327), y se tendria (§ 341 esc.)  $P:p::R:r::L:l$ , representando por  $L, l$ , dos líneas homólogas; luego sustituyendo en la razon compuesta anterior  $P \times R:p \times r$  en vez de una de las componentes su igual sacada de aquí, se tendrá

$P':p'::P \times P:p \times p::R \times R:r \times r::P^2:p^2::R^2:r^2::L^2:l^2$ ; que quiere decir, que *las superficies de los polígonos regulares semejantes ó de un mismo número de lados, guardan la misma razon que los cuadrados de los perímetros, de los radios rectos, y en general son como los cuadrados de sus líneas homólogas.*

*Esc. 1.º* Aunque los polígonos no sean regulares, se verifica esta proposicion, con tal que sean semejantes; porque en este caso los podremos dividir (340) en cierto número de triángulos  $A, B, C, \&c. a, b, c, \&c.$  semejantes, y será

$$P' = A + B + C + \&c. e. \text{ y } p' = a + b + c + \&c. e.$$

y como los triángulos tendrán la razon de los cuadrados de los lados homólogos, se sigue que si espre-



samos por  $L, l$  á estos lados, nos resultará

$$A:a::B:b::C:c::\mathcal{E}c::\mathcal{E}c::L^2:l^2,$$

de donde (185, 1.<sup>a</sup>) sale

$$A+B+C+\mathcal{E}c::a+b+c+\mathcal{E}c::L^2:l^2;$$

ó lo que es lo mismo  $P':p'::L^2:l^2$ .

*Esc. 2.<sup>o</sup>* Cuando el polígono no es regular se divide en triángulos por medio de diagonales, &c.; se halla la superficie de cada uno, y se tendrá la de la figura.

358 Teor. Si en un círculo se circunscriben é inscriben polígonos regulares de un mismo número de lados, despues de un duplo número de lados, y así sucesivamente, la diferencia entre el circunscrito y el inscrito se podrá hacer menor que cualquier cantidad dada.

*Dem.* Si espresamos por  $P'$  la superficie del polígono circunscrito, por  $p'$  la del inscrito, y por  $R, r$  sus radios rectos, se tendrá (357 cor. 2.<sup>o</sup>)  $P':p'::R^2:r^2$ ; que dividiendo da  $P'-p':P'::R^2-r^2:R^2$ ;

$$\text{de donde sale } P'-p' = \frac{P'(R^2-r^2)}{R^2}.$$

Pero el radio recto del polígono circunscrito, que es el mismo que el del círculo, se compone del radio recto del polígono inscrito y de la sajita, á que llamaremos  $s$ ; luego  $R^2 = (r+s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$ ; cuyo valor sustituido en el numerador de la espresion anterior, y reduciendo, la convertirá en

$$P'-p' = \frac{P'(2rs+s^2)}{R^2} = \frac{P'(2r+s)}{R^2} \times s;$$

y como en esta espresion entra por factor la sajita  $s$ , que (344) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, resulta (229 cor. 3.<sup>o</sup>) que tambien podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, la diferencia entre las superficies de dichos polígonos. L. Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá hacer que la diferencia entre la superficie de uno de estos polí-



gonos, y la del círculo, sea menor que cualquier cantidad dada. Porque el círculo es menor que el polígono circunscrito del que es parte, y mayor que el inscrito, respecto del cual es todo.

359 Teor. *La superficie de un círculo es igual al producto de la circunferencia por la mitad del radio.*

*Espl.* Sea  $O$  un círculo cualquiera,  $C$  su circunferencia, y  $R$  el radio; digo que  $O = C \times \frac{1}{2}R$ .

*Dem.* Si espresamos por  $P'$  la superficie de un polígono regular circunscrito al círculo, por  $P$  su perímetro, y por  $R$  su radio recto, que es el mismo del círculo, tendremos (§ 357)  $P' = P \times \frac{1}{2}R$ ; pero  $P'$  se puede acercar (358 cor.) á  $O$  tanto como se quiera, y  $P \times \frac{1}{2}R$  se puede acercar al mismo tiempo á  $C \times \frac{1}{2}R$  tanto como se desee, por poderlo hacer (§ 345 cor.)  $P$  á  $C$  y ser  $\frac{1}{2}R$  comun; luego tenemos aquí dos cantidades variables  $P'$  y  $P \times \frac{1}{2}R$ , que al paso que menguan se pueden acercar á las dos constantes  $O$  y  $C \times \frac{1}{2}R$  todo lo que se quiera, conservando siempre la razon de igualdad; luego las constantes tendrán (231 cor.), esta misma razon y será  $O = C \times \frac{1}{2}R$ , que es L. Q. D. D.

*Cor. 1.º* Dividiendo por 2, por 4, por  $n$ , la ecuacion anterior, se tendrá

$$\frac{O}{2} = \frac{C}{2} \times \frac{1}{2}R, \quad \frac{O}{4} = \frac{C}{4} \times \frac{1}{2}R, \quad \frac{O}{n} = \frac{C}{n} \times \frac{1}{2}R;$$

que quiere decir, que el semicírculo, el cuadrante, y en general el sector del círculo, es igual á su arco correspondiente multiplicado por la mitad del radio.

*Cor. 2.º* Si en vez de  $C$  sustituimos su valor (347) se tendrá  $O = 3,14159 \times D \times \frac{1}{2}R = 3,14159 \times 2R \times \frac{1}{2}R = 3,14159 \times R^2 = \pi R^2$ , cuya fórmula importa retener, por ser el fundamento para la resolucion de todas las cuestiones relativas al círculo.

*Esc.* Si representamos por  $o$  otro círculo, por  $c$ ,  $r$ , su circunferencia y radio, por  $d$  su diámetro, y en general por  $l$  una línea homóloga á  $L$  del otro, como cuerdas de arcos de un mismo número de gra-



dos &c. se tendrá  $0 = c \times \frac{1}{2}r$ ; y formando proporcion será  $O:0::C \times \frac{1}{2}R:c \times \frac{1}{2}r::C \times R:c \times r$ ;

y sustituyendo (139) en la razon compuesta  $C \times R:c \times r$ , en vez la razon  $C:c$ , su igual  $R:r$ , ó  $D:d$ , ó  $L:l$ , &c, ó al contrario, se tendrá  $O:0::C \times C:c \times c::R \times R:r \times r::D \times D:d \times d::C^2:c^2::R^2:r^2:D^2:d^2::L^2:l^2$ ;

que manifiesta que *las superficies de los círculos están en razon duplicada de sus circunferencias, radios, diámetros, y en general de las líneas homólogas.*

*De la reduccion de las superficies.*

360 Cuando dada una superficie se encuentra otra que le sea igual, se dice que se *reduce* la primera á la segunda.

Ahora, como vamos á manifestar que toda superficie se puede reducir á cuadrado, se suele decir que *medir una superficie y cuadrar una superficie es una misma cosa.* En efecto, cuando se mide una superficie, no se hace otra cosa que encontrar la relacion que tiene aquella con el cuadrado que sirve de unidad de medida; y luego buscando un cuadrado que tuviese con el propuesto esta relacion, tendríamos un cuadrado cuya superficie seria igual con la propuesta.

361 Así, si nos propusiéramos *hallar un cuadrado equivalente á un paralelogramo dado ABCD* (fig. 97), buscaríamos una media proporcional (334) entre la base BC y la altura AE, que llamándola  $x$  será el lado del cuadrado que se pide. Porque la construccion da  $\div BC:X:AE$ , de donde  $X^2 = BC \times AE$ ; y como  $X^2$  es el cuadrado formado sobre  $X$ , y  $BC \times AE$  es la superficie del paralelogramo (354), resulta que son iguales en superficie.

*Cor.* Luego para cuadrar un triángulo se hallará una media proporcional entre la base y la mitad de la altura.

362 Como un polígono regular es igual al perímetro por la mitad del radio recto, para cuadrarle se hallará una media proporcional entre el perímetro y la mitad del radio recto.



363 Del mismo modo, *para reducir un círculo á cuadrado, ó buscar un cuadrado equivalente á un círculo, se hallará una media proporcional entre la circunferencia y la mitad del radio.*

*De los planos, de su posicion, y de los ángulos sólidos.*

364 Hasta aquí sólo hemos considerado las líneas tiradas sobre un mismo plano; ahora vamos á manifestar las posiciones que pueden tener respecto de los planos donde no se hallan, y la posicion de los diferentes planos entre sí.

Se dice que una recta es *perpendicular* á un plano, ó que un plano es *perpendicular* á una recta, cuando dicha recta es perpendicular á todas las líneas que en dicho plano pasan por el punto en que esta perpendicular encuentra al plano, cuyo punto se llama el *pie* de la perpendicular. Este pie de la perpendicular se llama tambien la *proyeccion* del punto del espacio sobre dicho plano.

Una recta es *paralela* á un plano, ó un plano es *paralelo* á una recta, cuando no se pueden encontrar aunque se prolonguen todo lo que se desee; y dos planos son *paralelos*, cuando no se pueden encontrar á cualquier distancia que se prolonguen.

365 Esto entendido, lo primero que se debe saber es que así como por un punto pueden pasar infinitas líneas (244), del mismo modo *por una recta pueden pasar infinitos planos*. En efecto, si concebimos que el libro (fig. 1) se abre, la tapa ABDC jirará al rededor de la recta CD, y tantas posiciones como se dén á dicha tapa, manifestarán la situacion de otros tantos planos que pasen por la recta CD; y como estas posiciones pueden ser infinitas, se sigue que son infinitos los planos que pueden pasar por una recta. Ahora, si ademas de la recta CD, ó de los puntos C, D, se señalase otro punto A, *ya no habria mas que un plano que pasase por dichos tres puntos, ó por una recta y un punto dado fuera de ella.*



De donde se deduce 1.<sup>o</sup> que *por dos puntos pueden pasar infinitos planos.*

2.<sup>o</sup> Que *tres puntos no situados en línea recta, ó un triángulo  $ABC$  (fig. 98), determinan la posición de un plano.*

3.<sup>o</sup> *Dos rectas  $AB, AC$  que se cortan, están en un mismo plano; porque concibiendo un plano que pase por la  $AB$ , y que va jirando hasta que pase por  $C$ , quedará determinada la posición del plano, que pasa por los tres puntos  $A, B, C$ , ó por las dos rectas dadas.*

4.<sup>o</sup> *Dos paralelas  $AB, CD$  (fig. 99) determinan la posición de un plano; porque si se tiran las secantes  $EF, HG$  que se corten, el plano que pase por estas, será el plano en que se hallen dichas paralelas, pues cada una tiene dos puntos  $H, E$  y  $F, G$  en el plano que pasa por las dos secantes.*

366 Teor. *La intersección común de dos planos que se cortan es una línea recta.*

*Dem.* Porque si en los puntos comunes á los dos planos se encontrasen tres que no estuviesen en línea recta, los dos planos de que se trata, que pasan cada uno por estos tres puntos, no formarían sino un solo y mismo plano, lo que es contra el supuesto.

367 Teor. *Si una recta  $AP$  (fig. 100) es perpendicular á otras dos  $PB, PC$ , que se cruzan en su pie en el plano  $MN$ , será perpendicular al plano  $MN$ .*

*Dem.* Porque como las dos rectas  $PB, PC$  determinan la posición del plano  $MN$ , lo que suceda á las rectas debe suceder al plano; pero la recta  $AP$  es perpendicular á las dos  $PB, PC$ , luego es perpendicular al plano. L. Q. D. D.

Cor. 1.<sup>o</sup> *La perpendicular  $AP$  es mas corta que una oblicua cualquiera  $AQ$ ; porque es cateto, y la oblicua hipotenusa de un triángulo rectángulo.*

Cor. 2.<sup>o</sup> *Por un punto  $P$  dado sobre un plano, no se puede levantar sino una perpendicular á este plano.*

Cor. 3.<sup>o</sup> *Tambien es imposible bajar desde un punto fuera de un plano dos perpendiculares á este plano.*



*Cor. 4.º* Luego la verdadera distancia de un punto á un plano, se debe medir por la perpendicular tirada al plano desde dicho punto; por ser la única que se puede tirar de su especie.

368 Teor. Las oblicuas  $AB, AC, AD$  (fig. 101) que distan igualmente de la perpendicular son iguales; y de dos oblicuas  $AE, AD$ , que distan desigualmente de la perpendicular, la que mas se aleja es la mas larga.

*Dem.* Porque siendo rectos los ángulos  $APB, APC, APD$ , si se suponen las distancias  $PB, PC, PD$  iguales entre sí, los triángulos  $APB, APC, APD$  tendrán dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego serán iguales; luego las hipotenusas ó las oblicuas  $AB, AC, AD$  serán iguales entre sí. Ahora, si la distancia  $PE$  es mayor que  $PD$  ó su igual  $PB$ , tendrémos que siendo recto el ángulo  $APB$ , el  $ABE$  será obtuso (266); luego será mayor que el  $AEB$ , y por lo mismo  $AE > AB = AD$ , que es L. Q. D. D.

369 Teor. Sea  $AP$  (fig. 102) una perpendicular al plano  $MN$ , y  $BC$  una línea situada en este plano; si desde el pie de la perpendicular se tira la  $PD$  perpendicular á  $BC$ , y se tira la  $DA$ , digo que  $DA$  será perpendicular á  $BC$ , en el plano que pasa por las dos líneas  $AD, CB$ .

*Dem.* Porque si se toma  $DB = DC$ , y se tiran las  $PB, PC, AB, AC$ , será (273) la oblicua  $PB = PC$ ; luego las  $AB, AC$  tambien lo serán (368); luego la  $AD$  tiene dos de sus puntos  $A$  y  $D$  equidistantes de los extremos  $B$  y  $C$  de la  $BC$ ; luego (274) le es perpendicular. L. Q. D. D.

*Esc.* Se ve al mismo tiempo, que la  $BC$  es perpendicular al plano  $APD$ , pues es perpendicular á las dos rectas  $AD, PD$ , que se hallan en él.

370 Teor. Si una línea  $AP$  (fig. 103) es perpendicular á un plano  $MN$ , toda línea  $DE$  paralela á  $AP$  será perpendicular al mismo plano.

*Dem.* Porque concibiendo un plano que pase por las paralelas  $AP, DE$ , su interseccion con el  $MN$  será  $PD$ ; y tirando en el plano  $MN$  la  $BC$  perpendicular



á PD, y uniendo el punto A con el D, tendremos que BC será perpendicular (369 esc.) al plano APDE; luego el ángulo BDE será recto; pero el EDP es también recto, pues AP es perpendicular á PD, y DE paralela á AP; luego la línea DE es perpendicular á las dos rectas DP, DB; luego es perpendicular á su plano MN, que es L. Q. D. D.

*Cor.* Recíprocamente, si las rectas AP, DE son perpendiculares al mismo plano MN, serán paralelas.

371 Teor. Si una línea AB (fig. 104) es paralela á una recta CD, tirada en el plano MN, será paralela á este plano.

*Dem.* Porque concibiendo un plano por las dos paralelas AB, CD, si la recta AB encontrase al plano MN debería hacerlo en un punto de la CD, lo que es imposible; luego la AB no puede encontrar al plano MN, y le será paralela. L. Q. D. D.

372 Teor. Dos planos MN, PQ (fig. 105) perpendiculares á una misma recta AB, son paralelos entre sí.

*Dem.* Porque si se encontrasen, tirando de un punto cualquiera O de la intersección dos rectas OA, OB una en cada plano, la recta AB sería perpendicular á las dos líneas OA, OB (§ 364), y en el triángulo AOB habría dos ángulos rectos, lo que (266 cor. 1.º) es imposible; luego los planos son paralelos. L. Q. D. D.

373 Teor. Las intersecciones EF, GH (fig. 106) de dos planos paralelos MN, PQ, con un tercer plano FG, son líneas paralelas.

*Dem.* Porque si las líneas EF, GH, situadas en un mismo plano, que aquí es el EFHG, no son paralelas, prolongadas se encontrarán; luego los planos MN, PQ, en que se hallan, también se encontrarán, y por lo mismo no serían paralelos, que es contra el supuesto. Luego &c.

374 Teor. La línea AB (fig. 105) perpendicular al plano MN, es perpendicular al plano PQ paralelo al MN.

*Dem.* Porque si tiramos á arbitrio la línea BC en



el plano PQ, y por ella y por la AB concebimos un plano, este cortará al MN en una línea AD, que será paralela (373) á la BC; por ser AB perpendicular al plano MN lo es tambien (364) á la línea AD; luego tambien lo será (280) á su paralela BC; luego es perpendicular al plano PQ, que es L. Q. D. D.

375 Teor. *Las partes EG, FH (fig. 106) de paralelas comprendidas por dos planos paralelos MN, PQ, son iguales.*

*Dem.* Porque concibiendo un plano EGHF que pase por las paralelas EG, FH, encontrará á los planos paralelos en las líneas EF y GH; estas intersecciones son tambien paralelas (373), así como por el supuesto lo son las EG, FH; luego la figura EGHF es un paralelogramo, y por lo mismo (§ 313)  $EG = FH$ , que era L. Q. D. D.

*Cor.* Luego dos planos paralelos tienen todos sus puntos equidistantes los unos de los otros; porque si EG y FH son perpendiculares á los dos planos MN, PQ, serán paralelas é iguales entre sí.

376 Teor. *Si dos ángulos CAE, DBF (fig. 107) no situados en el mismo plano, tienen sus lados paralelos y dirigidos en un mismo sentido, serán iguales; y los planos donde se hallan serán paralelos.*

*Dem.* Tómese  $AC = BD$ ,  $AE = BF$ , y tírense las CE, DF, AB, CD, EF. Pues que AC es igual y paralela á BD, la figura ABDC es un paralelogramo (311); luego CD es igual y paralela con AB. Por una razon semejante EF será igual y paralela con AB; luego tambien CD es igual y paralela á EF; luego la figura CEFD es un paralelogramo, y el lado CE igual y paralelo á DF; luego los triángulos CAE, DBF, tienen sus tres lados iguales entre sí; luego son iguales (259) y darán  $\angle CAE = \angle DBF$ , que es L. 1.º Q. D. D.

En segundo lugar digo que el plano ACE es paralelo al plano BDF; porque si el plano paralelo á BDF, tirado por el punto A, encontrase á las líneas CD, EF en otros puntos que en C y E, v. g. en G y H, entónces las tres líneas AB, GD, FH serian igua-



les (375); pero las tres  $AB$ ,  $EF$ ,  $DC$ , lo eran ya; luego se tendrá  $CD=GD$  y  $FH=EF$ , lo que es absurdo, pues las unas son partes, y las otras todos; luego el plano  $ACE$  es paralelo al  $BDF$ , que era L. 2.º Q. D. D.

Cor. Si dos planos paralelos  $MN$ ,  $PQ$ , son cortados por otros dos planos  $CABD$ ,  $EABF$ , los ángulos  $CAE$ ,  $DBF$ , formados por las intersecciones de los planos paralelos, serán iguales; porque la intersección  $AC$  es paralela á  $BD$ , y  $AE$  lo es á  $BF$ ; luego el ángulo  $CAE=DBF$ .

377 Teor. El ángulo formado por dos planos  $MAN$ ,  $MAP$  (fig. 108), se puede medir, y se mide en efecto, por el ángulo  $NAP$  que forman entre sí dos perpendiculares  $AN$ ,  $AP$ , tiradas en cada uno de ellos á un mismo punto  $A$  de la intersección común  $AM$ .

Dem. Porque si se supone que el un plano está sobre el otro, como dos hojas de un libro, y se tiran las perpendiculares  $AN$ ,  $AP$ , estas también estarán confundidas. Ahora, concibiendo que el plano  $PAB$  se empieza á separar del  $NAC$ , la perpendicular  $AP$  estará tan inclinada respecto de  $AN$ , como el plano  $APB$  que contiene á la primera, lo está respecto del  $ANC$  en que se halla la segunda. Luego el ángulo rectilíneo  $NAP$  mide la inclinación de los planos  $PAB$ ,  $NAC$ , que es L. Q. D. D.

Esc. 1.º Esta inclinación  $PAMC$  se suele llamar *ángulo diedro*; y cuando el ángulo que la mide es recto, se dice que *el un plano es perpendicular al otro*.

Esc. 2.º Cuando dos planos se atraviesan mutuamente, los ángulos opuestos al vértice son iguales, y los ángulos adyacentes valen juntos dos rectos; luego *si un plano es perpendicular á otro, este es perpendicular al primero*.

Igualmente, en el concurso de los planos paralelos con un tercer plano, se verifican las mismas igualdades de ángulos, y las mismas propiedades que en el concurso de dos líneas paralelas con otra tercera.

378 Teor. Si una línea  $AP$  (fig. 100), es per-



pendicular á un plano  $MN$ , todo plano  $APB$  que pase por la  $AP$ , será perpendicular al  $MN$ .

*Dem.* Porque si concebimos la  $PC$  perpendicular á la interseccion  $PB$ , la  $AP$  que tambien lo es (364), nos dará el ángulo  $APC$  recto; y como este mide (377) la inclinacion de los planos  $APC$ ,  $MN$ , resulta que el plano  $APB$  es perpendicular al  $MN$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* De aquí se deduce que la comun interseccion de dos planos  $APB$ ,  $APQ$ , perpendiculares á un tercero  $MN$ , es perpendicular al mismo plano  $MN$ . Porque podemos considerar que el plano  $APQ$  es uno de los muchos que pueden pasar por la recta  $AP$ , y que todos son perpendiculares al  $MN$ ; luego la interseccion de ellos, que es la  $AP$ , tambien es perpendicular al plano  $MN$ .

379 Se llama *ángulo sólido* al espacio angular comprendido entre muchos planos que se reúnen en un mismo punto; así, el ángulo sólido  $S$  (fig. 109), está formado por la reunion de los ángulos planos  $ASB$ ,  $BSC$ ,  $CSD$ ,  $DSA$ .

380 Teor. Si dos ángulos sólidos se componen de tres ángulos planos iguales cada uno al suyo, los planos en que se hallan los ángulos iguales estarán igualmente inclinados.

*Espl.* Sea el ángulo  $ASC=DGF$  (fig. 110), el  $ASB=DGE$ , y el  $BSC=EGF$ ; digo que los dos planos  $ASC$ ,  $ASB$ , tendrán entre sí una inclinacion igual á la de los planos  $DGF$ ,  $DGE$ .

*Costr.* Habiendo tomado  $SB$  á arbitrio, tírese  $BO$  perpendicular al plano  $ASC$ ; desde el punto  $O$  donde esta perpendicular encuentra al plano, tírense las  $OA$ ,  $OC$ , perpendiculares á  $SA$ ,  $SC$ , y tírense las  $AB$ ,  $BC$ . Tómese despues  $GE=SB$ ; tírese la  $EP$  perpendicular al plano  $DGF$ ; desde el punto  $P$  tírense las  $PD$ ,  $PF$ , perpendiculares á  $GD$ ,  $GF$ ; y por último tírense las  $DE$ ,  $EF$ .

*Dem.* El triángulo  $SAB$  es (369) rectángulo en  $A$ , y el  $GDE$  en  $D$ ; y pues que el ángulo  $ASB=DGE$ ,



se tiene tambien  $SBA = GED$ . Por otra parte  $SB = GE$ , luego el triángulo  $SAB$  es igual al  $GDE$ ; luego

$$SA = GD, \text{ y } AB = DE;$$

del mismo modo se demostrará que  $SC = GF$  y  $BC = EF$ .

Esto supuesto, el cuadrilátero  $SAOC$  es igual al  $GDPF$ ; porque poniendo el ángulo  $ASC$  sobre su igual  $DGF$ , á causa de  $SA = GD$  y  $SC = GF$ , el punto  $A$  caerá en  $D$ , y el  $C$  en  $F$ . Al mismo tiempo la  $AO$  perpendicular á  $SA$  caerá sobre la  $DP$  perpendicular á  $GD$ , é igualmente  $OC$  sobre  $PF$ ; luego el punto  $O$  caerá sobre  $P$ , y se tendrá  $AO = DP$ . Pero los triángulos  $AOB$ ,  $DPE$ , son rectángulos en  $O$  y en  $P$ , la hipotenusa  $AB = DE$ , y el lado  $AO = DP$ ; luego estos triángulos son iguales (273 cor. 2.<sup>o</sup>), y por lo mismo el ángulo  $OAB = PDE$ . Pero el ángulo  $OAB$  es la inclinacion de los dos planos  $SAC$ ,  $SAB$ , y el  $PDE$  es la inclinacion de los dos planos  $DGF$ ,  $DGE$ ; luego estas dos inclinaciones son iguales. L. Q. D. D.

*Cor.* De donde resulta que *dos ángulos sólidos formados como los anteriores se pueden superponer de modo que se confundan.*

### PARTE TERCERA.

*De los prismas, y medicion de sus superficies y volúmenes.*

381 Pasamos ya á considerar la estension con sus tres dimensiones de longitud, latitud y profundidad ó grueso. Cuando la estension se halla terminada por planos, se llama en general *sólido*, ó mas bien *cuerpo poliedro*.

Quando el cuerpo consta de cuatro caras, se llama en particular *tetraedro*; quando de seis, *exaedro*; quando de ocho, *octaedro*; quando de doce, *dodecaedro*; y quando de veinte, *icosaedro*, &c.

La interseccion comun de dos caras adyacentes de un poliedro, se llama *lado* ó *arista* del poliedro.

Quando el poliedro tiene dos caras opuestas igua-



les y paralelas, y las demas caras son paralelogramos, se llama *prisma*; los dos planos paralelos é iguales, se llaman *bases* del prisma; y los paralelogramos, *caras* del prisma; de donde resulta (375) que *todas las aristas de un prisma son iguales*.

382 Para concebir formado un cuerpo de esta especie, supongamos que ABCDE (fig. 111) sea un polígono cualquiera, y que en un plano paralelo al ABC &c. se tiren las líneas FG, GH, HL, &c. iguales y paralelas á los lados AB, BC, CD, &c. con esto se formará un polígono FGHLK igual al ABCDE; y si despues se unen los vértices de los ángulos homólogos por medio de las rectas AF, BG, CH, &c. las caras ABGF, BCHG, &c. serán paralelogramos; y el cuerpo ABCDEKFGHL formado de este modo será un prisma, cuyas bases son ABCDE, FGHLK.

Se llama *altura* del prisma la perpendicular tirada desde una de las bases á la opuesta ó á su prolongacion; cuando las aristas del prisma son perpendiculares á la base, el prisma se llama *recto*, como el ABCDHFEG (fig. 112); y cuando esto no se verifica, es *oblicuo*, como el ABCDEKFGHL (fig. 111).

383 El prisma se llama *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, *exagonal*, &c. segun sea la base triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, &c.

Como hay diferentes especies de cuadriláteros, resulta que el prisma cuadrangular recibe diferentes nombres; así, cuando la base es un paralelogramo, se llama *paralelepípedo*; cuando es romboide, *prisma romboidal*; cuando rombo, *prisma romboidal*; cuando la base es un rectángulo, *prisma rectangular*; y cuando la base es un cuadrado y la altura es el mismo lado del cuadrado, se le llama *cubo*.

384 Teor. *Dos poliedros no pueden tener los mismos vértices, y en el mismo número, sin coincidir el uno con el otro.*

*Dem.* Porque si suponemos construido uno de ellos, y se quiere construir otro que tenga los mismos vértices y en el mismo número, cada plano de los que



formen el segundo tendrá con su correspondiente en el primero, tantos puntos comunes como ángulos haya en la cara del poliedro; y como en cada cara ha de haber lo ménos tres ángulos, resulta que todas las caras coincidirán, y por consiguiente los poliedros quedarán confundidos en uno solo. L. Q. D. D.

385 Teor. *Dos prismas son iguales, cuando tienen un ángulo sólido igual comprendido por tres planos, iguales cada uno al suyo y semejantemente colocados.*

*Espl.* Sean  $ABCL$ ,  $abcl$  (fig. 111) dos prismas que tengan el ángulo sólido  $B=al\ b$ ; y además los planos que le forman respectivamente  $ABCDE=abcde$ ,

$$ABGF=abgf, \text{ y } BCHG=bchg;$$

digo que estos prismas son iguales.

*Dem.* Concibiendo el ángulo sólido  $B$  superpuesto al  $b$ , se confundirán (380 cor.) por ser iguales; y por ser iguales los planos que los forman, se confundirán exactamente  $ABCDE$  con  $abcde$ ,  $ABGF$  con  $abgf$ , y  $BCHG$  con  $bchg$ ; luego el lado  $GF$  caerá sobre su igual  $gf$ ,  $GH$  sobre  $gh$ , y toda la base superior  $FGHLK$  sobre su igual  $fghlk$ ; luego los dos prismas  $ABCL$ ,  $abcl$ , tienen los mismos vértices; luego (384) se confundirán; luego son iguales. L. Q. D. D.

386 Teor. *En todo paralelepípedo los planos opuestos son iguales y paralelos; y reciprocamente si un poliedro está terminado por seis planos paralelos de dos en dos, es un paralelepípedo.*

*Dem.* Por ser paralelepípedo, las bases  $ABCD$ ,  $EFGH$  (fig. 113) son paralelogramos iguales y paralelos. Pero  $AD$  es igual y paralela á  $BC$ , y  $AE$  igual y paralela á  $BF$ ; luego (376) el ángulo  $DAE=CBF$ , y el plano  $DAE$  paralelo á  $CBF$ ; luego (313) el paralelogramo  $DAEH=al\ CCFG$ ; y como demostraríamos lo mismo de los paralelogramos  $ABFE$ ,  $DCGH$ , resulta L. 1.º Q. D. D.

Ahora, si suponemos que los seis planos sean paralelos, esto es, que  $AF$  paralelo á  $DG$ ,  $AH$  á  $BG$ , y  $AC$  á  $EG$ , se tendrá que las comunes intersecciones de los planos  $AF$ ,  $DG$  con el  $AC$ , serán dos líneas  $AB$ ,  $DC$



paralelas (373). Las  $AD$ ,  $BC$ , comunes secciones de los planos paralelos  $AH$ ,  $BG$  con el  $AC$ , serán paralelas; luego la figura  $AC$  es un paralelogramo.

Del mismo modo demostraríamos que todas las demas caras lo son; pero el  $AF$  da (§ 313)  $AB$  igual y paralela á  $EF$ ; el  $BG$  da  $BC$  igual y paralela á  $FG$ ; de donde se deduce (376) que el ángulo  $EFG = ABC$ , y el paralelogramo  $ABCD = EFGH$ ; luego dicho cuerpo es un paralelepípedo. L. 2.º Q. D. D.

387 Teor. *Si los ángulos homólogos opuestos de las bases de un paralelepípedo recto, se unen por medio de las diagonales  $DB$ ,  $HF$ , el plano  $DBFH$  que pase por ellas, dividirá al paralelepípedo  $ABCDHEFG$  en dos prismas  $ABDHEF$ ,  $DBCGHF$  iguales.*

*Dem.* La naturaleza del paralelepípedo da  
 $ABCD = EFGH$ ,

y por lo mismo  $ABD = DBC = EFH = FGH$ ;  
luego el ángulo sólido en  $C$  será igual al en  $E$ , pues el ángulo  $BCG = AEH$  por rectos, el  $GCD = AEF$  por la misma razon, y el  $BCD = HEF$  por la igualdad de dichos triángulos.

Por otra parte (386) las caras  $BCGF$ ,  $DCGH$  son respectivamente iguales á las  $AEHD$ ,  $AEFB$ ; luego (385) los dos prismas triangulares son iguales. L. Q. D. D.

*Cor.* *Luego el prisma triangular  $ABDHEF$  es la mitad del paralelepípedo  $ABCDHEFG$ , que tiene la misma altura, y cuya base  $ABCD$  es dupla de la  $ABD$  del primero.*

388 Teor. *Si dos paralelepípedos tienen una base comun, y sus bases opuestas en un mismo plano y entre unas mismas paralelas, estos paralelepípedos serán equivalentes, ó iguales en volúmen.*

*Espl.* Sean  $AG$ ,  $AL$  (fig. 114) dos paralelepípedos que tienen la base comun  $ABCD$ , y las opuestas  $EFGH$ ,  $NKLM$  en un mismo plano  $HK$  y entre las paralelas  $EK$ ,  $HL$ ; voy á demostrar que el paralelepípedo  $AG =$  al  $AL$ .

*Dem.* El paralelepípedo  $AG$  da  $ABCD = EFGH$ , el  $AL$  da  $ABCD = NKLM$ , luego  $EFGH = NKLM$ ;



y añadiendo á ambos miembros la parte FNMG resultará  $EFGH + FNMG = NKLM + FNMG$ ,

ó reduciendo se tendrá  $ENMH = FKLK$ ;

ademas el primero da  $AEHD = BFGC$ ;

y por lo dicho (350) se deduce el triángulo  $AEN = BFK$ .

Luego los prismas triangulares AENMHD, BFKLGC tienen los ángulos sólidos E, F formados por tres planos iguales; luego (385) dichos prismas son iguales.

Ahora, si del poliedro total AEL se quitan dichos prismas, los residuos serán iguales, y se tendrá

$$AEL - AEM = AEL - BFL,$$

ó paralelepípedo  $AL = AG$ , que es L. Q. D. D.

389 Teor. *Dos paralelepípedos de la misma base y altura son iguales en volúmen, ó son equivalentes.*

*Dem.* Porque si suponemos que ABCD (fig. 115) sea la base comun de los dos paralelepípedos AG, AL, resulta que por tener una misma altura, sus bases superiores EFGH, RKLM se hallarán sobre un mismo plano. Ahora, si se conciben prolongados los planos ABFE, DCGH, y los ADMR, BCLK hasta que se encuentren, formarán por su comun interseccion un tercer paralelepípedo que tendrá la misma base ABCD, y cuya base opuesta estará representada por el paralelogramo NOPQ. Pero este tercer paralelepípedo es igual (388) en volúmen al AG; pues teniendo la misma base inferior, las superiores están en un mismo plano y entre las paralelas GQ y FN; y por una razon semejante este tercer paralelepípedo será igual con el AL; luego  $AG = AL$ , que es L. Q. D. D.

390 Teor. *Todo paralelepípedo se puede convertir en uno recto y rectángulo de igual volúmen, que tenga la misma altura y una base equivalente.*

*Dem.* Porque si AG es el paralelepípedo propuesto, y desde los puntos A, B, C, D, se tiran las AR, BK, CL, DM, perpendiculares al plano de la base, tendrémos formado el paralelepípedo recto AL, igual en volúmen al AG. Luego si la base ABCD es un rectángulo, AL será el paralelepípedo recto y rectángulo equivalente al propuesto AG. Pero si ABCD (fig. 116)



no es un rectángulo, se tirarán las  $AO$ ,  $BN$  perpendiculares á  $CD$ , despues las perpendiculares  $OQ$  y  $NP$  á la base  $ABCD$ , con lo cual se tendrá el poliedro  $ABNOQPKE$  que será un paralelepípedo recto y rectángulo. Y como los dos paralelepípedos  $AP$ ,  $AL$  se puede reputar que tienen la misma base  $ABKE$  y la misma altura  $AO$ , resulta que son iguales en volúmen; luego el paralelepípedo oblicuo  $AG$  (fig. 115) que se habia reducido á un paralelepípedo recto equivalente  $AL$ , se encuentra de nuevo convertido en un paralelepípedo rectángulo  $AP$ , que tiene la misma altura  $AE$ , y cuya base  $ABNO$  es equivalente á la  $ABCD$ , que es L. Q. D. D.

391 Teor. Toda seccion  $NOPQR$  (fig. 111) hecha en un prisma por un plano paralelo á la base  $ABCDE$ , es igual á esta base.

*Dem.* Porque las partes  $AQ$ ,  $BP$ ,  $CO$ , &c. de paralelas comprendidas entre los planos paralelos  $ABC$ ,  $NOP$ , son iguales (375); y así, todas las figuras  $ABPQ$ ,  $BCOP$ , &c. son paralelogramos.

De aquí se sigue que el lado  $PQ$  es igual y paralelo á  $AB$ ,  $OP$  á  $BC$ ,  $ON$  á  $CD$ , &c.; luego (376) el ángulo  $ABC=QPO$ , el  $BCD=PON$ , &c.; luego los dos polígonos  $ABCDE$ ,  $NOPQR$  tienen los lados y los ángulos iguales respectivamente; luego son iguales. L. Q. D. D.

392 Teor. La superficie lateral de un prisma es igual al producto de una de sus aristas por el perímetro de una seccion perpendicular á dicha arista.

*Dem.* Si el prisma fuese el  $abck$  (fig. 111), su superficie lateral seria igual á la de todas las caras  $ag$ ,  $bh$ ,  $cl$ ,  $dk$ ,  $ef$ ; pero si por un punto cualquiera de una de las aristas se hace pasar un plano  $nopqr$  perpendicular á dicha arista, será perpendicular á todas las demas (370); luego el paralelogramo  $ag=gb \times pq$ , el  $bh=ch \times op$ , el  $cl=dl \times no$ , el  $dk=ke \times nr$ , el  $ef=ek \times qr$ ; y como todas las aristas  $af$ ,  $bg$ ,  $ch$ ,  $dl$ ,  $ek$  son iguales, se tendrá que sup. lat. de prisma  $abcdk=$  á la de los paralelogramos  $ag+bh+cl+dk+ef=$



$bg \times pq + ch \times op + dl \times no + ke \times nr + ek \times qr$ ;  
 sustituyendo  $bg$  á las demas aristas, y sacándola fuera de un paréntesis como factor comun, resultará  
 sup. lat. de prisma  $abck = bg(pq + op + no + nr + rq) =$   
 $bg \times \text{perím. de sec. } nopqr$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Si el prisma es recto, la seccion será paralela é igual á la base, y por lo mismo *la superficie lateral de un prisma recto es igual al perimetro de la base multiplicado por su arista ó altura, que es lo mismo.*

393 Teor. *Dos paralelepípedos rectos AG, ag (fig. 112), de iguales bases ABCD, abcd, son entre sí como sus alturas AF, af, ó se tendrá AG:ag::AF:af.*

*Dem.* Aquí pueden ocurrir dos casos; ó que las alturas sean comensurables, ó que no lo sean.

1.º Si tienen la comun medida  $AX = ax$ , y expresamos por  $m, n$ , las veces que está contenida en cada una de ellas, se tendrá  $AF = m \times AX$ , y  $af = n \times ax$ ; y formando proporcion y simplificando por  $AX = ax$ , será  $AF:af::m \times AX:n \times ax::m:n$ .

Si por los puntos de division  $X, Z, \&c., x, z, \&c.$ , se tiran planos paralelos á las bases, el paralelepípedo  $AG$  quedará dividido en  $m$  paralelepípedos iguales con  $AU$ , y el  $ag$  en  $n$  iguales con  $au = AU$ , y todos iguales entre sí (389); y se tendrá

$$AG = m \times AU, \quad ag = n \times au = n \times AU;$$

y formando proporcion será  $AG:ag::m \times AU:n \times au::m:n$ .

Esta proporcion y la anterior dará (§ 184, 2.ª)  $AG:ag::AF:af$ , que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Si las alturas son incomensurables, se demuestra por un procedimiento semejante al que hemos seguido (352), que la razon de  $AG:ag$  no puede ser mayor ni menor que  $AF:af$ ; luego será igual. L. 2.º Q. D. D.

394 Aunque hemos dicho en el teorema anterior que los paralelepípedos han de ser rectos, y en los dos siguientes decimos rectángulos, es por la mayor facilidad en las costrucciones; pues las proposiciones se verifican en cualesquiera paralelepípedos. Porque



segun hemos visto (390), todo paralelepípedo se puede convertir en uno recto y rectángulo igual en volumen; luego lo que se demuestre de estos quedará demostrado de aquellos.

395 Teor. *Dos paralelepípedos rectángulos AG, AK (fig. 117) de una misma altura AE, son entre sí como sus bases ABCD, AMNO, ó se tendrá*  
 $AG:AK::ABCD:AMNO.$

*Dem.* Habiendo colocado el uno al lado del otro como representa la figura, prolónguese el plano ONKL hasta que encuentre al DCGH, cuya comun seccion sea PQ; y tendrémos un tercer paralelepípedo AQ, que se podrá comparar con cada uno de los AG, AK. Los AG, AQ que tienen la misma base AEHD, dan  $AG:AQ::AB:AO;$

igualmente los paralelepípedos AQ, AK, que tienen la misma base AOLE, dan  $AQ:AK::AD:AM;$

multiplicando ordenadamente y omitiendo (191) el factor comun AQ, será  $AG:AK::AB \times AD:AO \times AM;$

pero  $AB \times AD$  representa (353 esc.) la base ABCD, y  $AO \times AM$  representa la AMNO;

luego  $AG:AK::ABCD:AMNO$ , que es L. Q. D. D.

396 Teor. *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera, son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas, ó como los productos de sus tres dimensiones.*

*Dem.* Porque habiendo colocado los dos paralelepípedos AG, AZ (fig. 117), de manera que sus superficies tengan el ángulo comun BAE, prolónguense los planos necesarios para formar el tercer paralelepípedo AK, de la misma altura que el AG, y (395) se tendrá  $AG:AK::ABCD:AMNO;$

pero (393) los dos paralelepípedos AK, AZ, que tienen la misma base AMNO, dan  $AK:AZ::AE:AX;$

luego multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y omitiendo el factor comun AK, se tendrá

$$AG:AZ::ABCD \times AE:AMNO \times AX;$$

y sustituyendo en vez de las bases ABCD, AMNO, sus valores  $AB \times AD$  y  $AO \times AM$ , será



$AG:AZ::AB \times AD \times AE:AO \times AM \times AX$ , que es L.Q.D.D.

*Cor.* De aquí se deduce que se puede tomar por medida de un paralelepípedo rectángulo el producto de su base por su altura, ó el producto de sus tres dimensiones; con tal que por esta espresion se entienda el producto de los números de unidades lineales que contiene cada una.

397 Para medir los volúmenes se ha elejido por unidad el cubo, cuyo lado sea tambien la unidad, esto es, 1 vara, 1 pie, &c. Así, si el cubo  $a$  (fig. 118) es el de una vara, y suponemos que está contenida la vara en BC siete veces, en CD dos, y en CG cuatro, el paralelepípedo rectángulo CF será

$vol.CF = 7 \times 2 \times 4$  varas cúbicas = 56 varas cúbicas, ó 56 cubos iguales con el  $a$  que se tomó por unidad: como lo manifiesta la figura.

398 Teor. *El volúmen de un paralelepípedo, y en general el volúmen de un prisma cualquiera, es igual al producto de su base por su altura.*

*Dem.* Porque 1.º un paralelepípedo cualquiera equivale (390) á uno recto y rectángulo de la misma altura y de una base equivalente. Pero el volúmen de este se halla multiplicando su base por su altura, luego el volúmen del primero es del mismo modo igual al producto de su base por su altura.

2.º Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de la misma altura y de dupla base; y como el volúmen de este es igual á su base multiplicada por su altura, resulta que la del prisma triangular es igual al producto de su base, mitad de la del paralelepípedo, multiplicada por su altura.

3.º Un prisma cualquiera se puede dividir en tantos prismas triangulares de la misma altura, como triángulos se pueden formar en el polígono que le sirve de base. Pero el volúmen de cada prisma triangular es igual á su base multiplicada por su altura; y como la altura es la misma para todos, se sigue que la suma de todos los prismas parciales será igual á la suma de todos los triángulos que les sirven



de bases , multiplicada por la altura comun.

Luego el volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura. L. Q. D. D.

*Cor.* Luego los prismas que tengan bases y alturas iguales serán equivalentes, ó iguales en volúmen.

*De la pirámide y medicion de su superficie y volúmen.*

399 Se llama *pirámide* un poliedro que tiene por base una figura cualquiera, y cuyas caras son triángulos que tienen un ángulo en un mismo punto, llamado *cúspide* ó *vértice* de la pirámide; tal es el SABCDE (fig. 119) en que el polígono ABCDE es la base de la pirámide, S su cúspide ó vértice, y los triángulos ASB, BSC, CSD, &c. las caras. Toda línea SO (figs. 119 y 120) que desde el vértice se tire perpendicularmente á la base ó á su prolongacion, se llama *altura* de la pirámide.

Una pirámide es *triangular*, *cuadrangular*, &c. segun la base es un triángulo, cuadrilátero, &c.

Cuando el polígono de la base es regular, y ademas la línea que desde el cúspide va al centro del polígono es perpendicular á la base, la pirámide se llama *regular*; y cuando le falta alguna de estas dos circunstancias, se llama *irregular*. En la regular se llama *apotema* la perpendicular SK (fig. 119), que desde el cúspide S se tira en una de las caras al lado AB de la base.

400 Teor. En toda pirámide regular los triángulos laterales ASB, BSC, CSD, &c. (fig. 119) son *isósceles* é iguales entre sí.

*Dem.* Por suponerse la pirámide regular, la SO será perpendicular al plano ABCDE, y los radios oblicuos AO, OB, &c. serán iguales; luego (368) las oblicuas SA, SB, SC, &c. son iguales; luego los triángulos SAB, SBC, &c. son *isósceles*; y como ademas tienen iguales los lados, AB, BC, &c. de la base, se infiere que ademas de ser *isósceles* son (259) iguales. L. Q. D. D.

*Cor.* Si se conciben planos por la altura SO y por



cada una de las aristas, quedará dividida la pirámide en tantas pirámides triangulares iguales (384) como lados tiene la base; y como aunque la pirámide sea irregular, se puede dividir su base desde un punto cualquiera de ella, en tantos triángulos como lados tiene, concibiendo planos por cada arista y por la línea que une dicho punto con el vértice, quedará dividida la pirámide en tantas triangulares como lados tiene.

401 Teor. La superficie lateral  $S$  de toda pirámide regular es igual al perímetro  $P$  de la base por la mitad de la apotema, que llamaremos  $Ap.$ , ó se tendrá  $S = P \times \frac{1}{2} Ap.$

Dem. Por ser regular la pirámide, todos los triángulos laterales serán iguales, y por lo mismo la superficie lateral equivaldrá á tantas veces uno de ellos como caras tiene la pirámide; y como esta tiene tantas caras como lados la base, resulta que llamando  $n$  al número de lados de la base, será  $S = n \times \text{triángulos}$ ; pero la superficie de un triángulo tal como el  $ASB$  se halla multiplicando la mitad de la apotema  $Sk$  ó  $Ap.$  por el lado  $AB$ , que llamaremos  $L$ ; luego la superficie de uno de los triángulos laterales será  $L \times \frac{1}{2} Ap.$ , lo que dará  $S = n \times L \times \frac{1}{2} Ap. = nL \times \frac{1}{2} Ap.$ ;

y como  $nL = P$ , se tendrá  $S = P \times \frac{1}{2} Ap.$  que es L.Q.D.D.

Esc. Si á la espresion de la superficie lateral añadimos la de la base, se tendrá la superficie total de la pirámide. Cuando la pirámide ó cualquier otro poliedro es irregular, se halla separadamente la superficie de cada cara, y su suma será la superficie del poliedro.

402 Teor. Si una pirámide  $SABCD$  (fig. 121) se corta con un plano paralelo á la base  $ABCD$ , se verificarán tres cosas. Primera. Este plano cortará á todas las aristas  $SA, SB, SC, \&c.$  en partes proporcionales, que tendrán unas con otras la misma razon que las de otra recta  $SE$ , tirada desde el vértice de la pirámide al plano de la base; y la misma razon tambien que dos lados homólogos cualesquiera  $AB, ab$ , de la



*base y de la seccion. Segunda. La seccion abcd será semejante á la base ABCD. Tercera. La superficie de la base ABCD tendrá con la abcd de la seccion, la misma razon que los cuadrados de las líneas SE, Se.*

*Dem.* 1.<sup>a</sup> Si por la recta SE y por las aristas de la pirámide, se conciben los planos SEA, SEB, SEC, &c. estos cortarán á la seccion *abcd* en las líneas *ea*, *eb*, &c. que serán paralelas (373) á las EA, EB, &c. luego (328) los triángulos ASE, BSE, ASB, BSC, &c. serán semejantes á sus correspondientes *aSe*, *bSe*, *aSb*, *bSc*, &c. y darán

$SE:Se::SA:Sa::SB:Sb::SC:Sc::\&c.: \&c.: AB:ab::BC:bc.$

2.<sup>a</sup> Una vez que los triángulos AEB, BEC, CED, &c. en que está dividida la base ABCD, tienen sus lados respectivamente proporcionales á los de los triángulos *aeb*, *bec*, *ced*, &c. en que está dividida la seccion *abcd*, resulta que todos estos triángulos son semejantes unos á otros (329); luego las dos figuras ABCD, *abcd*, tambien lo serán (341).

3.<sup>a</sup> Y por ser semejantes las figuras ABCD, *abcd*, serán entre sí como los cuadrados de sus líneas homólogas (357 esc. 1.<sup>o</sup>) y por lo mismo

$$ABCD:abcd::AB^2:ab^2::SE^2:Se^2,$$

que es L. Q. D. D.

*Cor.* Luego si se cortan dos pirámides *SABCD*, *SFGH* (fig. 122) de iguales alturas *SE*, *SE'*, con un plano paralelo al de sus bases, las secciones *abcd*, *fgh*, tendrán una con otra la razon de las bases *ABCD*, *FGH*; y si estas son iguales, tambien lo serán las secciones. Porque por lo demostrado últimamente, será  $ABCD:abcd::AB^2:ab^2::SE^2:Se^2$ ;

por la misma razon  $FGH:fgh::SE'^2:Se'^2$ ; pero  $SE=SE'$  por el supuesto, y como el plano es paralelo á las bases, cortará partes iguales de las alturas; luego siendo *Ee*, *E'e'* iguales, los residuos *Se*, *Se'* serán iguales, y por lo mismo las dos proporciones de arriba tendrán igual la última razon; y formando proporcion con las otras dos será  $ABCD:abcd::FGH:fgh$ ,

ó  $ABCD:FGH::abcd:fgh$ ; luego si  $ABCD=FGH$ ,



resultará  $abcd = fgh$ , que es L. Q. D. D.

*Esc.* Se dice de dos pirámides que son semejantes, cuando sus bases son semejantes, y tienen todas las líneas homólogas proporcionales; y como todas las de la pirámide SABCD son proporcionales con las de la  $Sabcd$ , y ABCD es semejante á  $abcd$ , resulta que la pirámide quitada ó deficiente  $Sabcd$ , es semejante á la SABCD.

403 La parte ABCDabcd que queda, se llama tronco ó trozo de pirámide, ó pirámide truncada; y cuando la pirámide de que resulta el trozo es regular, su superficie lateral se halla multiplicando la parte de la apotema comprendida entre las dos bases opuestas, por la semisuma de los perímetros de las bases paralelas, ó por el perímetro de una sección hecha á distancias iguales de las bases paralelas.

*Dem.* Porque observando que todos los trapecios tendrán una misma altura  $Kk$  (fig. 121) será  
Sup. lat. de trozo ABCDdacb =  $Ab + Bc + Cd + Da =$

$$(\S 356) kK \times \frac{AB+ab}{2} + kK \times \frac{BC+bc}{2} + kK \times \frac{CD+cd}{2} +$$

$$kK \times \frac{DA+da}{2} = kK \times \frac{AB+ab+BC+bc+CD+cd+DA+da}{2} =$$

$$kK \times \frac{\text{perím. ABCD} + \text{perím. } abcd}{2};$$

y como (§ 356 esc.)

$$\frac{AB+ab}{2} = mn, \quad \frac{BC+bc}{2} = no, \quad \frac{CD+cd}{2} = op, \quad \text{y} \quad \frac{DA+da}{2} = pm,$$

resulta:

$$\text{Sup. lat. de trozo} = kK \times mn + kK \times no + kK \times op + kK \times pm = kK \times (mn + no + op + pm) = kK \times \text{perím. de sec. equidistante de las bases paralelas. L. Q. D. D.}$$

404 Teor. Á toda pirámide se le puede inscribir y circunscribir un número de prismas, de manera que la diferencia entre la suma de los circunscritos y la



*de los inscritos sea menor que cualquier cantidad dada.*

*Dem.* Sea  $SABC$  (fig. 123) la pirámide propuesta, si se divide la altura en un número cualquiera de partes iguales, v. g. en 4, y por los puntos de division se conciben planos paralelos á su base, se tendrá dividida la pirámide en otra  $SQRT$ , y en tantos trozos  $QRTNMX$ ,  $XMNHGF$ ,  $FGHCBA$ , como partes tenia la altura ménos una. Concibiendo ahora un prisma  $ZVSTRQ$ , que tenga la misma base y altura que la pirámide, y en cada trozo dos prismas de la misma altura que él, que el uno tenga por base la mayor del trozo y el otro la menor, se tendrá el número de prismas circunscritos  $ZVSTRQ$ ,  $OPTNMX$ ,  $LKNHGF$ ,  $DEHCBA$ , y el de los inscritos  $QRTNml$ ,  $XMNHgf$ ,  $FGHCba$ ; pero el primer prisma circunscrito  $ZVSTRQ$  es igual (398 cor.) con el primer inscrito  $QRTNml$ ; el segundo circunscrito con el segundo inscrito, y el tercero con el tercero; luego la diferencia entre la suma de los circunscritos é inscritos estará representada por el último circunscrito  $DEHCBA$ ; y si inscribiéramos y circunscribiéramos duplo número de prismas, el último circunscrito que espresaria la diferencia, seria dos veces menor que el  $DEHCBA$ ; y como continuando del mismo modo, el último prisma circunscrito que espresa la diferencia, va haciéndose dos veces menor, al cabo de cierto tiempo llegará (229) á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. L. Q. D. D.

*Cor.* Siendo el volúmen de la pirámide mayor que la suma de los prismas inscritos, y menor que la de los circunscritos, *con mas razon se le podrá inscribir ó circunscribir un número de prismas, de modo que la diferencia entre la suma de cualesquiera de estos y el volúmen de la pirámide, sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

405 Teor. *Dos pirámides de igual base y altura son iguales en volúmen.*

*Dem.* Sean  $SABC$ ,  $S'A'B'C'$  las dos pirámides; si se concibe dividida su altura en un mismo número de partes iguales, y por los puntos de division se ha-



cen pasar planos, las secciones que causen estos planos serán iguales (402 cor.); concibiendo ahora un prisma circunscrito á cada una de las partes en que quedan divididas las pirámides, y llamando  $S$  la suma de los prismas circunscritos á  $SABC$ , y  $S'$  á la de los circunscritos á  $S'A'B'C'$ , se tendrá  $S=S'$ , pues cada prisma de la  $SABC$  es igual (398 cor.) con el correspondiente de la  $S'A'B'C'$ ; pero  $S$  se puede acercar (404 cor.) á  $SABC$ , y  $S'$  á  $S'A'B'C'$  tanto como se quiera; luego tenemos aquí dos cantidades  $S$ ,  $S'$ , variables, pero siempre iguales, que se pueden acercar á las dos constantes  $SABC$ ,  $S'A'B'C'$  tanto como se quiera; luego (231 cor.) estas constantes son iguales, y se tiene  $SABC=S'A'B'C'$ , que es L. Q. D. D.

406 Teor. *Todo prisma triangular ABCFDE (fig. 124), se puede dividir en tres pirámides equivalentes.*

*Dem.* Si por las diagonales  $AD$ ,  $AF$  de dos caras contiguas del prisma, se concibe un plano, quedará dividido el prisma en dos pirámides una triangular,  $ADEF$  (fig. 125), cuya base  $DEF$  y la altura  $AE$  serán las mismas que las del prisma: y la otra cuadrangular (fig. 126) que tendrá por base á la otra cara del prisma, y por altura á la altura del triángulo  $BAC$  de la base. Si por las aristas  $DA$ ,  $AC$  de esta se concibe un plano  $DAC$ , su comun seccion con el  $BCFD$ , será la diagonal  $DC$ , por lo que dicha pirámide quedará dividida en otras dos triangulares  $ABCD$ ,  $ACDF$ , que tendrán bases iguales (313, 1.º), y una misma altura por tener su vértice comun en  $A$ ; por lo cual estas dos pirámides serán iguales en volúmen. Ahora, la pirámide  $DBAC$  se puede considerar que tiene por base al triángulo  $BAC$ , que es una de las bases del prisma, y por altura la misma que la del prisma; y como las dos bases opuestas de un prisma son iguales, resulta que las dos pirámides  $DBAC$  y  $ADEF$  (fig. 125) son iguales tambien en volúmen; luego las tres pirámides son iguales en volúmen. L. Q. D. D.

Cor. 1.º *Toda pirámide triangular es el tercio de*



*un prisma triangular de igual base y altura; porque equivaliendo el prisma BACFED (fig. 124) á tres pirámides iguales con la ADEF, cada una de estas será el tercio del prisma; y como podemos concebir á toda pirámide dividida en tantas pirámides triangulares como lados tiene su base, y cada una será el tercio del prisma de igual base y altura, resulta, que en general toda pirámide, de cualquier clase que sea, es igual á la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

*Cor. 2.º* Luego siendo el volúmen del prisma (398) igual á la superficie de su base multiplicada por su altura, *el de la pirámide será igual á la superficie de la base multiplicada por el tercio de la altura.*

*De los poliedros regulares, ó de los cinco cuerpos regulares.*

407 Se llaman *poliedros regulares* aquellos cuyas caras son polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos sólidos son todos iguales entre sí.

De estos sólo hay los cinco siguientes, á saber: el *tetraedro* (fig. 127) que es un cuerpo terminado por cuatro triángulos equiláteros iguales; el *octaedro* (fig. 128) que está terminado por ocho triángulos equiláteros iguales; el *icosaedro* (fig. 129) que está terminado por veinte triángulos iguales; el *exaedro* ó cubo (fig. 130) que está terminado por seis cuadrados iguales; y el *dodecaedro* (fig. 131) que está terminado por doce pentágonos iguales.

Para hallar su superficie, se halla la de una cara, y se multiplica por el número de ellas.

Para encontrar su volúmen, observaremos que siendo el tetraedro una pirámide, le hallaremos conforme lo hemos dicho (406 cor. 2.º); el octaedro no viene á ser otra cosa que dos pirámides cuadrangulares reunidas por su base, y la regla que acabamos de citar nos dará su volúmen; y siendo el exaedro un cubo nos servirá la regla dada (398).

Ahora, para hallar el volúmen del dodecaedro y



del icosaedro, los consideraremos como compuestos de tantas pirámides como caras tienen, cuya base sea cada cara, y la altura la mitad de la distancia que hay entre dos caras opuestas.

*De los tres cuerpos redondos.*

408 Se llama *cuerpo redondo* ó de revolucion, el que está terminado por una superficie que no presenta esquinas ó ángulos sólidos.

Se llama *cilindro* un cuerpo cuyas dos bases opuestas son dos círculos iguales y paralelos, y cuya superficie lateral es convexa; tal es el EFCD (fig. 132); la línea AB que une los dos centros, se llama su *eje*; cuando el eje es perpendicular á las bases, el cilindro es *recto*; cuando no, *oblicuo*, tal como el EFCD (fig. 133); en cuyo caso la *altura* es la perpendicular DO tirada desde un punto cualquiera de la base superior á la inferior ó á su prolongacion.

El cilindro recto se puede concebir orijinado de la revolucion de un rectángulo ABCD (fig. 132) al rededor del lado inmóvil AB; con este movimiento los lados AD, BC describen los círculos iguales DHP, CGQ, que son las bases del cilindro; el lado CD describe su superficie lateral, y la línea AB es el eje del cilindro.

El cilindro oblicuo se puede considerar formado del movimiento de un círculo FGCQ (fig. 133) paralelamente á sí mismo en la direccion de la línea CD.

409 Se dice que un poliedro cualquiera está *inscrito* en un cuerpo redondo, cuando todos los vértices de sus ángulos sólidos se hallan en la superficie del cuerpo; y que está *circunscrito*, cuando todas sus caras son tangentes del mismo cuerpo, ó sólo tiene de comun con él una recta, estando todo lo demas de la cara fuera.

410 Teor. Toda seccion MLKN (figs. 132 y 133) hecha en un cilindro paralela á las bases, es un círculo igual á las bases.



*Dem.* Por ser el plano MLK paralelo á la base FGC, se tiene (§ 375)  $FM=BS=KC=\&c.$ ; luego si se concibe un número cualquiera de planos EABF, HABG, &c. que pasen por el eje AB, todas las figuras FBSM, GBSL, &c. serán paralelogramos (311), que darán  $FB=MS$ ,  $GB=LS$ , &c.; pero  $FB=GB=\&c.$ ; luego  $MS=LS=\&c.$ ; luego todos los puntos de la seccion distan igualmente de S, y por lo mismo es un círculo; y como su radio es igual al de la base, resulta que el círculo seccion será igual al de la base. L. Q. D. D.

411 Teor. Si en el cilindro recto se inscriben y circunscriben dos prismas, la superficie del cilindro es mayor que la del inscrito, y menor que la del circunscrito; y la diferencia entre la superficie del circunscrito y la del inscrito podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

*Dem.* 1.º Sea  $p$  el perímetro de la base del prisma inscrito, cuya superficie lateral espresarémos por  $\omega$ ; y como su arista será el mismo lado  $L$  del cilindro, tendrémos (§ 392 cor.)  $\omega=p \times L$  (m).

Ahora, si aumentase el número de lados, crecería (308) el perímetro  $p$ , y por consiguiente tambien crecería la superficie  $\omega$ ; y como el prisma que tenga mas lados, tendrá mas aristas comunes con la superficie del cilindro, y ademas la superficie de dicho prisma se hallará entre la del cilindro y la del prisma que tenga ménos, resulta que  $\omega$  es una cantidad variable, que al paso que crece se acerca á la superficie convexa del cilindro, que es constante; luego (227) esta es mayor que aquella. L. 1.º Q. D. D.

2.º Si espresamos por  $P$  el perímetro de la base del prisma circunscrito, y por  $\Pi$  su superficie lateral, se tendrá  $\Pi=P \times L$  (n).

Ahora, si el número de lados de la base aumenta,  $P$  disminuye (308), y por consiguiente tambien disminuirá la superficie  $\Pi$ ; pero el prisma que tiene mas lados se acerca mas á la superficie del cilindro, por tener mas aristas comunes con ella, y estar la super-

T

T. I.



ficie de dicho prisma entre la del cilindro y la del prisma que tiene ménos lados; luego  $\Pi$  es una cantidad variable, que al paso que mengua se acerca á una constante, que es la superficie del cilindro; luego (228) esta es menor que aquella. L. 2.º Q. D. D.

3.º Si restamos las (ecs.  $m, n$ ), se tendrá

$$\Pi - \varpi = P \times L - p \times L = (P - p)L.$$

Y como  $P - p$  puede llegar (345) á ser menor que cualquier cantidad dada, se sigue (229 cor. 3.º) que tambien podrá llegarlo á ser la diferencia  $\Pi - \varpi$  entre las superficies de dichos prismas. L. 3.º Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir un prisma á un cilindro, de manera que la diferencia entre sus superficies sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

412 Teor. La superficie convexa de un cilindro recto, que llamaremos  $G$ , es igual al producto de la circunferencia  $C$  de su base por su lado, ó  $G = C \times L$ .

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá  $\Pi = P \times L$ ; pero al paso que aumenta el número de lados, disminuye dicha superficie  $\Pi$  y se va acercando á  $G$ , de modo que su diferencia puede llegar (411 cor.) á ser menor que cualquier cantidad dada, y como al mismo tiempo el producto  $P \times L$  se acerca á  $C \times L$ , pues  $P$  se puede acercar (345 cor.) á  $C$  tanto como se quiera, y el factor  $L$  es comun, resulta que las dos cantidades variables  $\Pi$  y  $P \times L$ , siendo siempre iguales, se pueden acercar respectivamente á las dos constantes  $G$  y  $C \times L$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, ó se tiene  $G = C \times L$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Si en vez de  $C$  se sustituye su valor (347), se tendrá  $G = 3,14159 \times D \times L = \pi DL = 2\pi RL$ , que es la fórmula general de donde se deduce la superficie del semicilindro, cuadrante de cilindro, &c.

413 Teor. Á un cilindro recto se puede inscribir y circunscribir un prisma tal, que la diferencia entre el volúmen del circunscrito y del inscrito sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

*Dem.* Sean ahora  $\Pi'$  y  $\varpi'$  los volúmenes de dos



prismas circunscrito é inscrito á un cilindro, que tambien llamaremos  $G$ ;  $P'$ ,  $p'$  las superficies de sus bases, y  $A$  su altura comun, que es la misma que la del cilindro, y (398) tendremos  $\Pi' = P' \times A$ ,  $\varpi' = p' \times A$ ; que restando la una de la otra, resultará

$$\Pi' - \varpi' = P' \times A - p' \times A = (P' - p') \times A;$$

y como en este valor entra por factor  $P' - p'$ , que (358) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, se sigue (229 cor. 3.<sup>o</sup>) que lo mismo sucederá á  $\Pi' - \varpi'$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Como el prisma inscrito es parte del cilindro, será menor que él; y como el circunscrito es todo respecto del mismo cilindro, será mayor que él. Luego con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir un prisma en el cilindro, de modo que la diferencia entre cualquiera de sus volúmenes y el del cilindro, sea menor que cualquier cantidad dada.

414 Teor. El volúmen de un cilindro  $G$  es igual á la superficie  $C$  del círculo de su base multiplicada por su altura  $A$ , ó se tendrá  $G = C \times A$ .

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, tendremos respecto del prisma circunscrito  $\Pi' = P' \times A$ ; pero si crece el número de lados,  $\Pi'$  se va acercando á  $G$ , de modo que su diferencia (413 cor.) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y como al mismo tiempo la espresion de  $\Pi'$ , esto es,  $P' \times A$ , se puede acercar á  $C \times A$  todo lo que se quiera, por hacerlo (358 cor.)  $P'$  á  $C$  y ser  $A$  comun, resulta que las dos cantidades variables é iguales  $\Pi'$  y  $P' \times A$ , se pueden acercar todo lo que se quiera á las dos constantes  $G$  y  $C \times A$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, y se tiene  $G = C \times A$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Si en vez de  $C$  (359 cor. 2.<sup>o</sup>) sustituimos su valor, se tendrá  $G = \pi R^2 A$ ; de esta fórmula se deducen todas las que tienen relacion con el volúmen del cilindro, semicilindro, sector cilíndrico, &c.; y si se tuviese  $A = R$ , seria  $G = \pi R^3$ .

*Esc.* La demostracion anterior sirve tambien para el cilindro oblicuo.



415 Se llama *cono* un cuerpo (figs. 134 y 135) que tiene por base un círculo, y está terminado por una superficie curva que termina en un punto S llamado cúspide ó vértice del cono, tal es SCDBE; la línea que desde el cúspide va al centro de la *base*, se llama *eje* del cono; cuando el eje es perpendicular á la base, el cono es *recto* (fig. 134); y cuando no, *oblicuo* (fig. 135); en este se llama *altura* la perpendicular bajada desde el cúspide á la base, ó á su prolongacion; en el recto la altura es el mismo eje.

El cono recto se origina de un triángulo rectángulo SAB, que jira al rededor de un cateto inmóvil SA; pues en este movimiento el cateto AB describe la base BDCE, y la hipotenusa SB que se llama *lado* del cono, traza la superficie del cono.

416 Teor. Toda seccion FKHL (figs. 134 y 135) hecha en un cono paralela á su base, es un círculo.

Dem. Concíbanse por el eje SA los planos SAD, SAB, &c. cuyas intersecciones con los planos paralelos CDB, FKH, serán (375) líneas paralelas; por lo que los triángulos SAD, SAB, SAE, &c. darán  $SA:SG::AD:GK$ ,  $SA:SG::AB:GH$ ,  $SA:SG::AE:GL$ , &c.; y como estas proporciones tienen comun la razon  $SA:SG$ , las otras serán iguales y darán

$$AD:GK::AB:GH::AE:GL::\&c.:\&c.;$$

pero los antecedentes son iguales por radios de la base; luego los consecuentes tambien lo serán, y se tendrá  $GK=GH=GL=\&c.$  que manifiesta que distando todos los puntos de la seccion igualmente del G, dicha seccion será un círculo. L. Q. D. D.

417 La parte FCDBH comprendida entre la base y la seccion, se llama *tronco*, ó *trozo de cono*, ó *cono truncado*.

418 Teor. Si en un cono recto se inscriben y circunscriben dos pirámides regulares, la superficie lateral del cono es mayor que la de la inscrita, y menor que la de la circunscrita; y la diferencia entre la superficie de la inscrita y la de la circunscrita podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada.



*Dem.* 1.º Sea  $p$  el perímetro de la base de la pirámide inscrita, cuya superficie lateral espresarémos por  $\varpi$ , y sea  $l$  su apotema, y (401) tendrémos

$$\varpi = p \times \frac{1}{2} l \text{ (m).}$$

Ahora, si aumentase el número de lados, crecería (308) el perímetro  $p$ , y también crecería (368) la apotema  $l$ ; luego también crecerá la superficie  $\varpi$ ; y como la pirámide que tenga mas lados, tendrá mas aristas comunes con la superficie del cono, y la superficie de dicha pirámide se hallará entre la del cono y la de la pirámide de menor número de lados, resulta que la cantidad variable  $\varpi$ , al paso que crece, se acerca á la superficie convexa del cono, que es constante; luego (227) esta es mayor que aquella. L. 2.º Q. D. D.

2.º Si espresamos por  $P$  el perímetro de la base de la pirámide circunscrita, por  $L$  su apotema, que será el mismo lado del cono, y por  $\Pi$  su superficie lateral, se tendrá  $\Pi = P \times \frac{1}{2} L$  (n).

Ahora, si aumenta el número de lados de la base, la  $L$  permanecerá la misma,  $P$  disminuirá (303), y por consiguiente también disminuirá  $\Pi$ ; pero la pirámide que tiene mas lados, se acerca mas á la superficie del cono, por tener mas aristas comunes con ella, y estar su superficie entre la del cono y la de la pirámide que tiene ménos lados; luego  $\Pi$  es una variable que al paso que mengua, se acerca á una constante que es la superficie del cono; luego (228) esta es menor que aquella. L. 2.º Q. D. D.

3.º Si restamos las (ecs. m, n) se tendrá

$$\Pi - \varpi = P \times \frac{1}{2} L - p \times \frac{1}{2} l;$$

pero  $p$  se puede acercar (345) á  $P$  y  $l$  á  $L$  todo lo que se quiera; porque  $l$  es una oblicua que se va separando cada vez mas de la perpendicular, que es el eje del cono, y  $L$  no varía; luego si la diferencia de los factores  $P, L$  y  $p, l$ , puede ser menor que cualquier cantidad dada, la de la mitad de sus productos, y de consiguiente la diferencia  $\Pi - \varpi$ , también lo podrá llegar á ser. L. 3.º Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá circunscribir



ó inscribir una pirámide á un cono, tal que la diferencia entre sus superficies sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

419 Teor. La superficie lateral  $G$  de un cono recto es igual á la circunferencia  $C$  de su base por la mitad de su lado  $L$ , ó  $G=C \times \frac{1}{2}L$ .

Dem. Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá  $\Pi=P \times \frac{1}{2}L$ ; pero al paso que aumenta el número de lados, disminuye dicha superficie  $\Pi$ , y se va acercando á  $G$ , de modo que su diferencia puede (418 cor.) llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y como al mismo tiempo el producto  $P \times \frac{1}{2}L$  se acerca á  $C \times \frac{1}{2}L$ , pues  $P$  se acerca (345 cor.) á  $C$ , y el factor  $\frac{1}{2}L$  es comun, resulta que las dos cantidades variables  $\Pi$  y  $P \times \frac{1}{2}L$ , siendo siempre iguales, se pueden acercar respectivamente á las dos constantes  $G$  y  $C \times \frac{1}{2}L$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, ó se tiene  $G=C \times \frac{1}{2}L$ , que es L. Q. D. D.

Cor. Sustituyendo en vez de  $C$  su valor (347), será  $G=\pi D \times \frac{1}{2}L=\pi \times 2R \times \frac{1}{2}L=\pi RL$ ;

que es la fórmula general que da todas las que tienen relacion con la superficie del cono.

420 Como  $C \times \frac{1}{2}L=\frac{1}{2}C \times L$ , y si por el punto  $F$  medio del lado del cono se da una seccion paralela á la base, la circunferencia  $FKHL$  será la mitad de la  $CDBE$ , por ser su radio la mitad (322), se tendrá  $G=FKHL \times L$ ; que quiere decir, que la superficie lateral de todo cono recto es igual á su lado multiplicado por la circunferencia de un círculo paralelo á la base, y tirado por el punto medio del lado.

421 Lo dicho respecto del cono y las pirámides inscritas y circunscritas en él, se aplica del mismo modo al trozo de cono recto, y los trozos de pirámides inscritos y circunscritos á él; y se deduce que la superficie lateral de todo trozo de cono recto es igual á su lado multiplicado por la semisuma de las circunferencias de las bases paralelas, ó á su lado multiplicado por la circunferencia de un círculo trazada equidistante de las bases paralelas; ó lo que es lo



mismo (fig. 134) superficie de trozo  $CDBELHKF =$

$$FC \times \frac{CDBE + FKHL}{2} = FC \times \text{circunferencia MN};$$

y si en vez de las circunferencias sustituimos (347) sus valores  $2\pi \times CA$ ,  $2\pi \times FG$ , y sacamos el factor co-

mun  $2\pi$ , se tendrá sup. de trozo  $= 2\pi \times \frac{CA + FG}{2} \times FC$ .

422 Teor. *Á todo cono se puede inscribir y circunscribir una pirámide, de modo que la diferencia entre su volúmen sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

*Dem.* Sean ahora  $\Pi'$  y  $\varpi'$  los volúmenes de dos pirámides circunscrita é inscrita al cono;  $P'$ ,  $p'$  las superficies de sus bases, y  $A$  su altura comun, que tambien es la del cono; y (406 cor. 2.<sup>o</sup>) tendrémós

$$\Pi' = P' \times \frac{1}{3}A, \quad \varpi' = p' \times \frac{1}{3}A;$$

que restando la una de la otra resultará

$$\Pi' - \varpi' = P' \times \frac{1}{3}A - p' \times \frac{1}{3}A = (P' - p') \times \frac{1}{3}A;$$

y como en este valor entra por factor  $P' - p'$ , que (358) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, se sigue (229 cor. 3.<sup>o</sup>) que lo mismo sucederá á la diferencia  $\Pi' - \varpi'$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá inscribir y circunscribir al cono una pirámide tal que la diferencia entre su volúmen y el del cono sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

423 Teor. *El volúmen de todo cono recto G es igual á la superficie C de la base multiplicada por el tercio de la altura A, ó  $G = C \times \frac{1}{3}A$ .*

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá respecto de la pirámide circunscrita  $\Pi' = P' \times \frac{1}{3}A$ ; pero si crece el número de lados,  $\Pi'$  se va acercando á  $G$ , de modo (422 cor.) que su diferencia puede ser tan pequeña como se quiera; y como al mismo tiempo la espresion de  $\Pi'$ , ó  $P' \times \frac{1}{3}A$  se puede acercar todo lo que se quiera á  $C \times \frac{1}{3}A$ , por hacerlo (358 cor.)  $P'$  á  $C$  y ser  $\frac{1}{3}A$  comun, resulta que



las dos cantidades variables é iguales  $\Pi'$  y  $P' \times \frac{1}{3}A$ , se pueden acercar todo lo que se quiera á las dos constantes  $G$  y  $C \times \frac{1}{3}A$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, y se tiene  $G = C \times \frac{1}{3}A$ , que es L. Q. D. D.

Cor. 1.º Sustituyendo en vez de  $C$  su valor, será  $G = \pi R^2 \times \frac{1}{3}A$ ; de esta fórmula general salen todas las que tienen relacion con el volúmen del cono.

Cor. 2.º Y como el volúmen de un cilindro de igual base y altura que el cono sería  $C \times A$ , se sigue que todo cono es la tercera parte de un cilindro de igual base y altura.

Esc. El volúmen del trozo de cono CDBL se hallará restando del cono total el volúmen del deficiente SFKH; pero como cuando se da el trozo, no se conoce la altura total del cono, ni la del deficiente, será necesario de antemano determinar esta. Para conseguirlo, sea  $A$  la altura del trozo,  $x$  la del deficiente,  $R$  el radio de la base inferior,  $r$  el de la superior, y los triángulos semejantes SAC, SGF darán  $AC:FG::SA:SG$ , ó  $R:r::A+x:x$ ;

de donde sale  $x = \frac{Ar}{R-r}$ ,

$$\text{y } SA = A + x = A + \frac{Ar}{R-r} = \frac{AR - Ar + Ar}{R-r} = \frac{AR}{R-r};$$

luego tendremos

vol. de trozo CDBL = cono SCDB - cono SFKH =

$$\pi R^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{AR}{R-r} - \pi r^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{Ar}{R-r} =$$

$$\pi \times \frac{1}{3} A \times \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \pi \times \frac{1}{3} A (R^2 + Rr + r^2).$$

424 Teor. Si un triángulo ABC (fig. 136) jira al rededor del lado mayor AC, describirá un cuerpo cuyo volúmen será igual á la superficie que describe uno de los otros lados AB, multiplicada por el tercio de la perpendicular Cq tirada á dicho lado, ó á



su prolongacion, desde el otro extremo C del lado que sirve de eje; ó lo que es lo mismo

$$\text{vol. } ABC = \text{sup. } AB \times \frac{1}{3} Cq.$$

*Dem.* Si desde el punto B se concibe la perpendicular Bb al eje, el cuerpo descrito por el triángulo ABC, se compondrá de dos conos, cuya base comun será el círculo descrito por el radio Bb; luego (423) el volúmen de este cuerpo, ó volúmen ABC = cono CBb + cono ABb =  $\text{círc.}^{\circ} Bb \times \frac{1}{3} Cb + \text{círc.}^{\circ} Bb \times \frac{1}{3} Ab = \text{círc.}^{\circ} Bb \times (\frac{1}{3} Cb + \frac{1}{3} Ab) = \text{círc.}^{\circ} Bb \times \frac{1}{3} CA.$

Esto supuesto (§ 359 cor. 2.º)  $\text{círc.}^{\circ} Bb = \pi Bb^2$ , y (§ 419 cor.)  $\text{sup. cono } AB = \pi \times Bb \times AB$ ; y formando proporcion y simplificando la segunda razon por  $\pi \times Bb$ , será

$$\text{círc.}^{\circ} Bb : \text{sup. cono } AB :: \pi \times Bb^2 : \pi \times Bb \times AB :: Bb : AB.$$

Ahora, los triángulos rectángulos ABb, CqA, tienen ademas el ángulo en A comun; luego son semejantes y dan  $Cq : AC :: Bb : AB$ ; y como esta proporcion y la anterior tienen comun la razon Bb:AB, darán

$$\text{círc.}^{\circ} Bb : \text{sup. cono } AB :: Cq : AC = Cq \times \frac{\text{sup. cono } AB}{\text{círc.}^{\circ} Bb}.$$

Sustituyendo este valor de AC en el anterior del volúmen, y simplificando por  $\text{círc.}^{\circ} Bb$ , se tendrá

$$\text{vol. } ABC = \text{círc.}^{\circ} Bb \times \frac{1}{3} Cq \times \frac{\text{sup. } AB}{\text{círc.}^{\circ} Bb} = \frac{1}{3} Cq \times \text{sup. } AB =$$

$\text{sup. } AB \times \frac{1}{3} Cq$ , que es L. Q. D. D.

*Esc.* Si el triángulo que jirase fuese el AB'C, en cuyo caso la perpendicular al lado AB' cae fuera, en vez de los triángulos ABb, ACq, se compararian los AB'b', ACq, y se deduciria lo mismo.

425 Si el triángulo fuese rectángulo como DUO (fig. 137), y jirase al rededor del punto O, permaneciendo la UO perpendicular á MN, se verifica tambien la proposicion, esto es, que  $\text{vol. } DUO = \text{sup. } DU \times \frac{1}{3} OU.$

En efecto, concibiendo la DM perpendicular á MN, el volúmen del cuerpo enjendrado por DUO



será igual al del cilindro engendrado por DUOM, menos el volúmen del cono engendrado por DMO, ó vol. DUO = vol. DUOM — vol. DMO =

$$\begin{aligned} & \text{círc.}^{\circ} DM \times DU - \text{círc.}^{\circ} DM \times \frac{1}{3} OM = \\ & \text{círc.}^{\circ} DM \times (DU - \frac{1}{3} OM) = \text{círc.}^{\circ} OU \times (DU - \frac{1}{3} DU) = \\ & \text{círc.}^{\circ} DM \times \frac{2}{3} DU = \pi \times DM^2 \times \frac{2}{3} DU; \end{aligned}$$

pero la superficie cilíndrica engendrada por DU (§412) ó sup. cilínd. DU = circunf. DM × DU = 2π × DM × DU,

$$\text{que da } DU = \frac{\text{sup. DU}}{2\pi \times DM};$$

luego sustituyendo este valor de DU en la espresion anterior del volúmen, se tendrá

$$\text{vol. DUO} = \pi \times DM^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\text{sup. DU}}{2\pi \times DM} =$$

$$\frac{1}{3} DM \times \text{sup. DU} = \text{sup. DU} \times \frac{1}{3} OU, \text{ que es L. Q. D. D.}$$

*Esc.* Obsérvese que siendo los dos triángulos DUO, DOM iguales, el primero enjendra un volúmen duplo del del segundo; pues

$$\text{vol. DOM} = \text{círc. DM} \times \frac{1}{3} OM;$$

y como entre los dos cuerpos valen el cilindro engendrado por DUOM ó círc. DM × OM, resulta que el del enjendrado por DUO será

$$\text{vol. DUO} = \text{círc. OU} \times \frac{2}{3} OM.$$

426 Teor. Si un polígono regular de un número par de lados, se hace jirar al rededor de un diámetro del círculo circunscrito á dicho polígono, trazará un cuerpo cuya superficie será igual á la circunferencia de uno de los radios rectos, multiplicada por el diámetro que sirve de eje: y su volúmen será igual á la superficie de dicho cuerpo, multiplicada por la tercera parte del radio recto de dicho polígono.

*Espl.* Sea el polígono ABCDE &c. (fig. 138); digo que si jira al rededor del diámetro AF del círculo circunscrito, describirá un cuerpo, cuya superficie s será igual á la circunferencia de un radio recto Op multiplicada por dicho diámetro AF, ó se tendrá

$$s = \text{circunf. Op} \times AF;$$



y su volúmen  $v$  será igual á la superficie del cuerpo, multiplicada por la tercera parte del radio recto  $Op$ , ó se tendrá  $v = \text{circunf.}Op \times AF \times \frac{1}{3}Op$ .

*Costr.* Concíbanse desde los extremos de cada lado y desde su punto medio, las perpendiculares  $pp'$ ,  $Bb$ ,  $mn$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , &c. á la  $AF$ , y ademas los radios rectos  $Op$ ,  $Om$ ,  $Oq$ , &c.; con lo cual el cuerpo descrito por el polígono al jirar, se compondrá del cono enjandrado por  $AB$ , y de los trozos de cono enjandrados por los lados  $BC$ ,  $CD$  (este será cilindro) &c., y de otros tantos iguales respectivamente por la parte de abajo de  $Oq$ ; por lo que hallando la superficie de cada uno de estos cuerpos y sumando, se tendrá la superficie pedida.

Lo mismo sucede con el volúmen; pero como la fórmula para hallar el del trozo del cono es muy complicada, para hacer aplicacion de ella, consideraremos el volúmen del cuerpo como compuesto del que enjendra el triángulo  $OBA$ , el  $OCB$ , el  $OCq$ , &c. y sus iguales por la parte inferior; y sumándolos todos, se tendrá el volúmen total.

*Dem.* 1.º La superficie del cono (420) enjandrado por  $AB$  es igual á  $AB \times \text{circunf.}pp'$ .

La del trozo enjandrado por  $BC$  es igual (421) á  $BC \times \text{circunf.}mn$ .

Y la del cilindro trazado por  $Cq$  es igual (412) á  $Cq \times \text{circunf.}Oq$ .

Del mismo modo se procederia si el polígono tuviese mas lados.

Ahora, los triángulos  $ABb$ ,  $pOp'$  son rectángulos, el uno en  $b$ , y el otro en  $p'$ ; ademas tienen el ángulo  $ABb$  del primero igual al  $pOp'$  del segundo, porque tienen iguales medidas, á saber, el  $ABb$  la (304) mitad del arco  $Ab'$  que es igual con la mitad de  $AB$ , y la mitad de este es la medida del  $pOp'$ ;

luego (331 cor. 2.º) son semejantes, y darán

$AB:Ab::Op:pp'::(\S 346)\text{circunf.}Op:\text{circunf.}pp'$ ;

de donde sale  $AB \times \text{circunf.}pp' = Ab \times \text{circunf.}Op$ .

Los triángulos  $BCx$ ,  $Omn$ , que tienen sus tres lados



respectivamente perpendiculares, serán (331 cor. 4.º) semejantes, y darán

$BC:Bx::Om:mn::\text{circunf.}Om:\text{circunf.}mn;$   
que da  $BC \times \text{circunf.}mn = Bx \times \text{circunf.}Om.$

Observando ahora que  $Op=Om=Oq=\&c.$  por radios rectos, y que  $Bx=bc$ ,  $Cq=Oc$ ,  $\&c.$ , sustituyendo en vez de los valores que teníamos ántes de las superficies, los que acabamos de sacar, y sumando, se tendrá sup. enjendrada por  $ABCq=$

$Ab \times \text{circunf.}Op + bc \times \text{circunf.}Op + cO \times \text{circunf.}Op =$   
 $\text{circunf.}Op \times (Ab + bc + cO) = \text{circunf.}Op \times AO;$

y como esta es la mitad de la superficie del cuerpo, duplicando el factor  $AO$ , se tendrá la del total, que será  $= \text{circunf.}Op \times AF$ , que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Por lo demostrado (424) se tendrá

$\text{vol.}ABO = \text{sup.}AB \times \frac{1}{3}Op;$

el del triángulo  $BCO$  será igual al enjendrado por  $OCU$ , ménos el enjendrado por  $OBU$ , ó lo que es lo mismo  $\text{vol.}BCO = \text{vol.}UCO - \text{vol.}UBO =$

$\text{sup.}UC \times \frac{1}{3}Om - \text{sup.}BU \times \frac{1}{3}Om =$   
 $\frac{1}{3}Om \times (\text{sup.}UC - \text{sup.}BU) = \frac{1}{3}Om \times \text{sup.}BC.$

Del mismo modo se continuaria prolongando lados, si hubiese mas, hasta llegar al cuerpo enjendrado por  $OCq$ , cuyo volúmen (425) es,  $\text{vol.}OCq = \text{sup.}Cq \times \frac{1}{3}Oq.$

Sumando todos estos volúmenes parciales, y observando que  $Op=Om=Oq=\&c.$ , se tendrá volúmen enjendrado por  $ABCq=$

$\text{sup.}AB \times \frac{1}{3}Op + \text{sup.}BC \times \frac{1}{3}Op + \text{sup.}Cq \times \frac{1}{3}Op =$   
 $(\text{sup.}AB + \text{sup.}BC + \text{sup.}Cq) \times \frac{1}{3}Op = \text{sup.}ABCq \times \frac{1}{3}Op.$

Este es el volúmen del semicuerpo enjendrado por  $ABCD \&c.$ , por lo que duplicando el factor  $\text{sup.}ABCq$ , se tendrá el volúmen enjendrado por todo el polígono, que será  $\text{vol.}ABCDEF = 2 \text{sup.}ABCq \times \frac{1}{3}Op =$   
 $\text{sup.}ABCDEF \times \frac{1}{3}Op$ , que es L. 2.º Q. D. D.

427 Si el polígono estuviese circunscrito al círculo, su volúmen seria igual á la superficie del cuerpo multiplicada por la tercera parte del radio de dicho círculo.

428 Se llama esfera un cuerpo terminado por una



superficie curva, cuyos puntos están todos á igual distancia de uno que se llama *centro*.

La esfera se puede concebir enjendrada por el movimiento de un semicírculo DAEK (fig. 139) al jirar al rededor del diámetro DK; pues cada punto de la superficie de este cuerpo se habrá orijinado de uno del semicírculo jenerador, que dista del centro una magnitud igual al radio de dicho semicírculo.

El diámetro DK al rededor del cual ha jirado el semicírculo jenerador, se llama *eje* de la esfera; los extremos D y K del eje, se llaman *polos*; y *radio* de la esfera es una línea que desde el centro va á terminar á su superficie.

429 El cuerpo DABC que se orijina de la revolucion del sector de círculo DCA, se llama *sector esférico*, el cual se compone de la parte DAFBM, que se llama *casquete esférico*, y del cono CAFBM: se llama *zona* una parte de la superficie de la esfera comprendida por dos planos paralelos, que se llaman *bases de la zona*.

430 Teor. *Toda seccion de la esfera por un plano es un círculo.*

*Dem.* Sea AFBM la seccion causada por un plano en la esfera: desde el centro C concíbese la perpendicular CO al plano AMB, y diferentes rectas CM, CM', &c. á diferentes puntos de la curva AMB en que termina la seccion, y se tendrá que las oblicuas CM, CM', CB, son iguales por radios de la esfera; y por lo mismo la curva AFBM tiene todos sus puntos equidistantes del O, luego es un círculo.

Cor. 1.º *Si la seccion pasa por el centro de la esfera, su radio será el de la esfera; y por lo mismo todos los círculos que resulten de planos que pasen por el centro serán iguales.*

Estos se llaman *círculos máximos*, y los que no pasan por el centro se llaman *círculos menores*.

Cor. 2.º *Dos círculos máximos se dividen siempre en dos partes iguales; porque su comun interseccion es un diámetro.*



Cor. 3.<sup>o</sup> *Todo círculo máximo divide á la esfera y á su superficie en dos partes iguales, que se llaman hemisferios; porque si despues de haber separado dichas dos partes, se las aplica sobre la base comun, las dos superficies coincidirán la una con la otra, por consiguiente serán iguales.*

Cor. 4.<sup>o</sup> *Toda seccion que no pase por el centro será un círculo menor.*

Cor. 5.<sup>o</sup> *Los círculos menores van siendo mas pequeños á medida que se alejan del centro.*

Cor. 6.<sup>o</sup> *Por dos puntos de la superficie de la esfera se puede hacer pasar un arco de círculo máximo; porque los dos puntos dados y el centro determinan la posicion de un plano.*

Sin embargo, si los dos puntos fuesen los extremos de un diámetro, entónces estos dos puntos y el centro estarian en línea recta, y habria tantos círculos máximos como se quisiesen (365).

431 Teor. *Si en el semicírculo de que se origina la esfera, se inscribe un semipolígono regular, se le circunscribe otro, y se concibe que jiren estos semipolígonos al mismo tiempo que el semicírculo, se tendrá un cuerpo inscrito y otro circunscrito; y la superficie de la esfera será mayor que la del cuerpo inscrito, y menor que la del circunscrito; y la diferencia entre la superficie del circunscrito y del inscrito podrá ser menor que cualquier cantidad dada.*

*Espl.* Sea *s.c.* la superficie del cuerpo descrito por el polígono inscrito ABCD &c. (fig. 138), por *r* su radio *Op*, por *D* el diámetro AF de la esfera ó del círculo jenerador; sea *S.C.* la superficie del cuerpo descrito por el polígono circunscrito, cuyo lado es *GL*, su radio recto ó del círculo jenerador *R*, al eje *GK* le llamaremos *H*; y sea *S.E.* la superficie de la esfera descrita por el semicírculo ABCDEF; digo que se tendrá *S.E.* > *s.c.*, *S.E.* < *S.C.*, y *S.C.* — *s.c.* podrá ser menor que cualquier cantidad dada.

*Dem.* 1.<sup>o</sup> Por lo dicho (426, 1.<sup>o</sup>) se tiene  
 $s.c. = \text{circunf. } r \times D \text{ (m).}$



ahora, si aumenta el número de lados crecerá el factor *circunf.r*, pues que crecerá el radio *r*; el factor *D* permanecerá el mismo; luego deberá crecer (61, 3.º) también *s.c.* ó la superficie del cuerpo inscrito, á medida que aumenta el número de lados del polígono jenerador; y como la superficie del cuerpo orijinado por el polígono de mas lados, tendrá mas circunferencias comunes con la superficie de la esfera, y ademas dicha superficie se hallará entre la del cuerpo orijinado por el polígono de ménos lados, y la de la esfera, resulta que *s.c.* es una variable que al paso que crece se acerca á la superficie de la esfera, que es constante; luego (227) esta es mayor que aquella, ó *S.E.* > *s.c.*, que es L. 1.º Q. D. D.

2.º Igualmente se tendrá  $S.C. = \text{circunf.}R \times H(n)$ ; pero aumentando el número de lados, disminuirá (344) el factor *H*, que se compone del diámetro *D* del círculo jenerador, y de las dos sajititas del polígono circunscrito; el factor *circunf.R* es constante, por ser *R* el radio del círculo jenerador; luego (61, 3.º) disminuirá *S.C.*; y como al paso que mengua se acerca á la superficie de la esfera, por tener mas circunferencias comunes con ella, y estar dicha superficie entre la del cuerpo enjendrado por el polígono de ménos lados, y la de la esfera, se sigue (228) que *S.E.* < *S.C.*, que es L. 2.º Q. D. D.

3.º Restando la ecuacion (m) de la (n), resultará  $S.C. - s.c. = \text{circunf.}R \times H - \text{circunf.}r \times D$ ; pero *circunf.r* se puede acercar todo lo que se quiera á *circunf.R*, pues (343) lo puede hacer *r* á *R*; y *H* se puede acercar (344) todo lo que se quiera á *D*; luego si la diferencia entre los factores *circunf.R*, *H*, y *circunf.r*, *D*, puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, la de sus productos, y de consiguiente la diferencia *S.C.* - *s.c.* tambien lo podrá llegar á ser. L. 3.º Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá circunscribir ó inscribir á la esfera un cuerpo tal, que la diferencia entre cualquiera de sus superficies y la de la es-



*fera sea menor que cualquier cantidad dada.*

432 Teor. *La superficie de la esfera es igual á la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por el diámetro.*

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá respecto del cuerpo circunscrito

$$S.C. = \text{circunf.} R \times H;$$

pero al paso que aumenta el número de lados del polígono, disminuye  $S.C.$  y se va acercando á  $S.E.$  de modo que su diferencia (431 cor.) puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y como al mismo tiempo el producto  $\text{circunf.} R \times H$  se acerca á  $\text{circunf.} R \times D$ , pues  $H$  se acerca (344) á  $D$  y  $\text{circunf.} R$  es comun, resulta que las dos cantidades variables  $S.C.$  y  $\text{circunf.} R \times H$ , siendo siempre iguales, se pueden acercar respectivamente á las dos constantes  $S.E.$  y  $\text{circunf.} R \times D$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, ó se tiene  $S.E. = \text{circunf.} R \times D$ , que es L. Q. D. D.

*Cor.* Si en vez de  $\text{circunf.} R$  se sustituye su valor (347), será

$$S.E. = 2\pi R \times D = \pi \times 2R \times D = \pi \times D \times D = \pi D^2;$$

que es la fórmula general que da todas las que tienen relacion con la superficie de la esfera.

433 Como la superficie de un círculo máximo de la esfera será  $\pi R^2$ , y  $D^2 = (2R)^2 = 4R^2$ , se sigue que *la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos.*

434 Teor. *Á toda esfera se pueden inscribir y circunscribir dos cuerpos, tales, que la diferencia entre sus volúmenes sea menor que cualquier cantidad dada.*

*Espl.* Sean ahora  $V.C.$ ,  $v.c.$  los volúmenes de dos cuerpos circunscrito é inscrito á la esfera;  $S.C.$ ,  $s.c.$ , sus superficies;  $R$ ,  $r$ , los radios rectos de los polígonos jeneradores; y digo que la diferencia  $V.C. - v.c.$  puede ser menor que cualquier cantidad dada.

*Dem.* Por lo dicho (426) se tiene

$$V.C. = S.C. \times \frac{1}{3}R, \quad v.c. = s.c. \times \frac{1}{3}r;$$

y restando será  $V.C. - v.c. = S.C. \times \frac{1}{3}R - s.c. \times \frac{1}{3}r$ ;

y como la diferencia entre los factores puede ser



(431 y 344) respectivamente menor que cualquier cantidad dada, resulta que lo mismo sucederá á los productos, y de consiguiente á  $V.C.$ — $v.c.$  cuyo valor espresa. L. Q. D. D.

*Cor.* Luego con mas razon se podrá circunscribir, ó inscribir en la esfera un cuerpo tal, que la diferencia entre su volúmen y el de la esfera sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

435 Teor. El volúmen de la esfera  $V.E.$  es igual á su superficie  $S.E.$  multiplicada por el tercio del radio  $R$ , ó  $V.E.=S.E.\times\frac{1}{3}R$ .

*Dem.* Conservando las mismas denominaciones de ántes, se tendrá  $V.C.=S.C.\times\frac{1}{3}R$ ; pero al paso que crece el número de lados del polígono jenerador, va acercándose  $V.C.$  á  $V.E.$ , de modo que su diferencia puede ser menor que cualquier cantidad dada (434 cor.); y como al mismo tiempo la espresion de  $V.C.$ , esto es,  $S.C.\times\frac{1}{3}R$ , se va acercando á  $S.E.\times\frac{1}{3}R$  todo lo que se quiera (229 cor. 3.<sup>o</sup>) por hacerlo  $S.C.$  á  $S.E.$ , y ser comun  $\frac{1}{3}R$ , resulta que las dos cantidades variables  $V.C.$  y  $S.C.\times\frac{1}{3}R$ , siendo siempre iguales, se pueden acercar todo lo que se quiera á las dos constantes  $V.E.$  y  $S.E.\times\frac{1}{3}R$ ; luego (231 cor.) estas son iguales, y se tiene

$$V.E.=S.E.\times\frac{1}{3}R, \text{ que es L. Q. D. D.}$$

*Cor.* Sustituyendo en vez de  $S.E.$  su valor (432 cor.) será  $V.E.=\pi D^2\times\frac{1}{6}D=\frac{1}{6}\pi D^3=$

$$\frac{1}{6}\times 3,14159\&c.\times D^3=0,523595\times D^3,$$

que es la fórmula de donde se sacan todas las que tienen relacion con el volúmen de la esfera.

*Esc.* 1.<sup>o</sup> Sustituyendo  $2R$  en vez de  $D$ , el volúmen de la esfera será,  $V.E.=\pi(2R)^2\times\frac{1}{3}R=4\pi\times\frac{1}{3}R^3$ , y el del hemisferio  $EKG$ , que llamaremos  $H$ , será  $H=2\pi\times\frac{1}{3}R^3$ . Ahora, si concebimos el cilindro  $ELPG$  circunscrito á la esfera, y cuya altura sea el radio de la misma esfera, su volúmen llamándole  $G$  será (§ 414 cor.)  $G=\pi R^3$ .

Restando de esta ecuacion la anterior, el residuo representará la porcion de cilindro circunscrito

V

T. I



ELTPGKZSQ, cuyo volúmen tendrá por espresion  
 $G-H=\pi R^3-2\pi\times\frac{1}{3}R^3=(1-\frac{2}{3})\pi R^3=\pi\times\frac{1}{3}R^3.$

Esc. 2.º Ahora podríamos comparar las espresiones de las superficies y volúmenes de todos los cuerpos que hemos dado á conocer, y determinar la razon en que estaban; pero solo lo harémos con los que se llaman *semejantes*, que son aquellos que están terminados por un mismo número de caras semejantes, y cuyos ángulos sólidos homólogos son iguales en número y en cantidad. Sean  $V, v$ , los volúmenes de dos cuerpos semejantes;  $A, B, C$ , las tres dimensiones que constituyen al primero, y  $a, b, c$ , las del segundo; y tendrémos  $V=ABC$ ,  $v=abc$ , y formando proporcion seré  $V:v::ABC:abc$ ; y como por ser semejantes, todas sus dimensiones han de ser proporcionales, sustituyendo (189) en vez de  $B, C$  y  $b, c$ , sus proporcionales  $A, a$ , se tendrá  $V:v::A^3:a^3$ ; que manifiesta que *los volúmenes de dos cuerpos semejantes son como los cubos de sus dimensiones homólogas.*

## TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

436 Se llama *Trigonometría* la ciencia que trata de la resolucion de los triángulos. Cuando el triángulo que se ha de resolver es rectilíneo, la Trigonometría se llama *plana*, ó *rectilínea*; y cuando está formado sobre la superficie de una esfera por arcos de círculos máximos se llama *Trigonometría esférica*.

En todo triángulo hay seis cosas que considerar, á saber, tres lados, y tres ángulos; tres de estos datos determinan un triángulo (con tal de que en los rectilíneos entre un lado), y por lo mismo el objeto de la Trigonometría es resolver este problema general:

*Dadas tres de las seis cosas de que consta un triángulo, hallar las otras tres*; estos datos bien combinados, ofrecen los seis casos siguientes para la resolucion de los triángulos.

I. *Dados los tres lados, hallar los tres ángulos.*



II. *Dados dos lados y el ángulo comprendido, hallar el otro lado y los dos ángulos.*

III. *Dado un lado y los ángulos adyacentes, hallar el otro ángulo y los dos lados.*

IV. *Dados dos ángulos y un lado opuesto á uno de ellos, hallar los otros dos lados y el tercer ángulo.*

V. *Dados dos lados, y el ángulo opuesto á uno de ellos, hallar el otro lado y los dos ángulos.*

VI. *Dados los tres ángulos, hallar los tres lados.*

437 Los tres primeros son los de la igualdad de los triángulos; y como el cuarto es lo mismo que el tercero, porque dados dos ángulos se conoce el otro (289 cor. 1.<sup>o</sup>), resulta que en los cuatro primeros casos siempre se puede resolver el triángulo.

438 En el quinto se pueden dar dos soluciones cuando el ángulo conocido es el opuesto al lado menor, porque los datos pueden corresponder á dos triángulos, como manifiesta la (fig. 140) en que los dos triángulos ABC, BDC tienen los mismos datos, á saber, comun el ángulo en C, y el lado  $AB=BD$ .

439 El sexto caso es de todo punto indeterminado en los triángulos rectilíneos; porque los datos pueden corresponder á cuantos triángulos se quieran; pues tirando las  $bc, b'c'$ , paralelas á BC (fig. 141), los triángulos ABC,  $Abc, Ab'c'$ , y otros muchísimos que se podrian formar, todos son equiángulos, y por consiguiente tienen los mismos datos. Pero como en este caso los triángulos son semejantes (331) y tienen sus lados proporcionales, la Trigonometría manifiesta de un modo general la relacion que tienen entre sí.

440 Pará fijar esta relacion, y que quede determinada cuando se conoce uno de los lados, se ha inventado un conjunto ó sistema de líneas, que se llaman *líneas trigonométricas*; las cuales están dotadas de dos propiedades importantes: 1.<sup>a</sup> que con su magnitud y signo determinan la magnitud absoluta de un arco, y de consiguiente la del ángulo de que es medida; y 2.<sup>a</sup> que dichas líneas son proporcionales con los lados de los triángulos.



441 Para darlas á conocer, consideremos un arco cualquiera  $AB$  (fig. 142), que teniendo su principio ú oríjen en  $A$ , vaya á terminar en cualquier punto  $B$  de la circunferencia; y lo que se diga de este arco se deberá entender del ángulo  $ACB$  de que es medida. Esto supuesto, se llama *seno recto* ó *seno* de un arco, la perpendicular tirada desde uno de sus extremos al radio ó diámetro que pasa por el otro extremo; así,  $BD$  es el seno del arco  $AB$ . La parte  $AD$  del radio ó diámetro interceptada entre el principio  $A$  del arco y el pie  $D$  del seno, se llama *senoverso* del mismo arco  $AB$ . Si en el principio  $A$  del arco se tira la tangente indefinida  $Ae$ , y se prolonga el radio  $CB$  hasta encontrarla en  $E$ , la parte  $AE$  se llama *tangente trigonométrica* ó *tangente* del arco  $AB$ ; y el radio  $CB$  prolongado hasta encontrar á la tangente, esto es, la  $CE$ , se llama *secante* del mismo arco; de manera que la tangente y secante se determinan mutuamente la una á la otra. Así, se dice que la tangente de un arco es *la parte de la tangente tirada en uno de sus extremos, hasta encontrar al radio que pasa por el otro extremo*; y secante es *el radio prolongado que pasa por un extremo, hasta encontrar á la tangente tirada en el otro extremo*. Donde se ve que todo arco tiene cuatro líneas: un seno, un senoverso, una tangente y una secante.

442 Si consideramos ahora el arco  $BF$ , la  $BH$  será su seno,  $FH$  su senoverso,  $FG$  su tangente, y  $CG$  su secante; y suponiendo que  $ABF$  sea un cuadrante,  $BF$  será complemento de  $AB$ , y las líneas  $BH$ ,  $FH$ ,  $FG$ ,  $CG$ , serán las líneas del complemento de  $AB$ . En muchas ocasiones se hace uso de estas, refiriéndolas todas al arco primitivo; por lo cual á cada arco corresponden ocho líneas trigonométricas: cuatro, propiamente suyas, y cuatro de su complemento, á saber: *seno*, *senoverso*, *tangente*, y *secante*, y las del complemento que se espresan *coseno*, *cosenoverso*, *cotangente*, y *cosecante*. Para introducir estas líneas en los cálculos, sólo se escriben las letras



indispensables para que no se confundan unas con otras; así, sólo se pone *sen.*, *sen.ver.*, *tang.*, *sec.*, *cos.*, *cos.ver.*, *cot.*, y *cosec.*

*Cor. 1.º* Como  $BH=CD$ , por lados opuestos del rectángulo  $DCHB$ , se sigue que  $CD$  también será el coseno de  $AB$ , y por lo mismo en tirando el seno de un arco, *la parte interceptada entre su pie y el centro es el coseno de dicho arco.*

*Cor. 2.º* Luego si espresamos en términos trigonométricos la proporción (333, 1.<sup>a</sup>), dirá que *el senoverso de un arco ó de un ángulo es á su seno, como el mismo seno es á la suma del radio y del coseno del mismo ángulo.*

443 Teor. *El seno de un arco es la mitad de la cuerda de un arco duplo.*

*Dem.* Porque si prolongamos el seno  $BD$  hasta que vuelva á encontrar á la circunferencia por abajo en el punto  $S$ , tendremos que por ser  $CA$  perpendicular á  $BS$ , la dividirá (293) en dos partes iguales en  $D$ , y también (294) al arco  $BAS$ ; por consiguiente  $sen. AB=BD=\frac{1}{2}BS=\frac{1}{2}$  cuerda  $BAS=\frac{1}{2}$  cuerda  $2AB$ , que era  $L. Q. D. D.$

*Cor.* Como (290) la mayor cuerda de un círculo es el diámetro, resulta que su mitad, que es el seno de un cuadrante, ó *el radio es el mayor seno que se puede considerar.*

444 Teor. *Conocido el radio de un círculo se conoce el valor absoluto de tres líneas trigonométricas, á saber: el seno de un cuadrante, que es el mismo radio; la tangente de  $45^\circ$ , que también es igual al radio; y el seno de  $30^\circ$  que es igual á la mitad del radio.*

*Dem. 1.º* Está fundado en lo que se acaba de demostrar (443 cor.).

*2.º* Si se supone el arco  $AB$  ó el ángulo  $ACB$  de  $45^\circ$ , el  $AEC$  valdrá también  $45^\circ$ ; luego el triángulo  $EAC$  es isósceles, y da  $AE=AC$ , ó  $tang. 45^\circ=R$ .

*3.º* Si el arco  $AB$  fuese de  $30^\circ$ , su duplo  $BAS$  valdría  $60^\circ$ , y la cuerda  $BS$  sería lado de exágono regular que es (317 cor. 8.º) igual al radio  $R$ ; luego



su mitad  $BD$  ó  $\text{sen.} 30^\circ = \frac{1}{2}R$ , que es L. Q. D. D.

445 Teor. Dado el seno de un arco y el radio, se pueden determinar en valores suyos todas las demas líneas trigonométricas.

Dem. El triángulo  $BDC$  rectángulo en  $D$ , dará

$$(332 \text{ cor.}) BD^2 + DC^2 = BC^2 (a), \text{ ó } DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} (b);$$

y sustituyendo sus valores será  $\text{cos.} = \sqrt{R^2 - \text{sen.}^2} (c)$ .

Haciendo  $R=1$ , las ecuaciones de arriba se convierten en

$$\text{sen.}^2 + \text{cos.}^2 = 1 (d), \text{ cos.} = \sqrt{1 - \text{sen.}^2} (e).$$

Ahora, por ser  $AE$  también perpendicular á  $AC$ , las  $BD$ , y  $AE$  serán paralelas, y los triángulos semejantes  $AEC$ ,  $BDC$  darán

$$DC:AC::BD:AE::BC:EC; \text{ ó } \text{cos.}:1::\text{sen.}:\text{tang.}::1:\text{sec.}$$

Donde despejando la tangente y la secante, refiriéndonos á la primera razon, se tendrá

$$\text{tang.} = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = (e) \frac{\text{sen.}}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}} (f),$$

$$\text{sec.} = \frac{1 \times 1}{\text{cos.}} = \frac{1}{\text{cos.}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}} (g).$$

Los triángulos  $BDC$ ,  $GFC$  también son semejantes, por ser ambos rectángulos, el uno en  $D$  y el otro en  $F$ , y tener además el ángulo  $DBC = GCF$  por alternos internos entre las paralelas  $BD$ ,  $FC$ , siendo  $GC$  la secante; luego darán

$$BD:CF::DC:FG::BC:CG, \text{ ó } \text{sen.}:1::\text{cos.}:\text{cot.}::1:\text{cosec.}$$

$$\text{De donde sale } \text{cot.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = (e) \frac{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}}{\text{sen.}} (h),$$

$$\text{y } \text{cosec.} = \frac{1 \times 1}{\text{sen.}} = \frac{1}{\text{sen.}} (i).$$

Las ecuaciones (e), (f), (g), (h), (i), manifiestan



que todas las líneas trigonométricas dependen del seno y del radio. L. Q. D. D.

*Esc.* Es muy conveniente encomendar á la memoria las fórmulas

$$\text{tang.} = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}, \text{ sec.} = \frac{1}{\text{cos.}}, \text{ cot.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}}, \text{ y cosec.} = \frac{1}{\text{sen.}},$$

por las muchísimas trasformaciones de que son susceptibles, y que cada una da un valor particular para la línea que se despeja. Además debe observarse que el triángulo rectángulo CAE da  $AC^2 = EC^2 - AE^2$ , ó  $1 = \text{sec.}^2 - \text{tang.}^2$ , que también da  $\text{sec.}^2 = 1 + \text{tang.}^2$ ;

y como de la (ec. g) se saca  $\text{cos.} = \frac{1}{\text{sec.}}$  será

$$\text{cos.}^2 = \frac{1}{\text{sec.}^2} = \frac{1}{1 + \text{tang.}^2}.$$

446 Entendido esto, para determinar las alteraciones que corresponden á las líneas de un arco, por las que puedan sobrevenir al mismo arco, y manifestar la jeneralidad de las fórmulas halladas, y su conformidad con sus definiciones y construcciones geométricas, prescindiremos del senoverso y cosenoverso, y principiaremos fijando las ideas del modo siguiente.

Sea A el principio ú oríjen de todos los arcos que vamos á considerar; y todos los arcos que se cuenten desde A hácia B, F, &c. serán positivos, y todos los que se cuenten desde A hácia S, Y, &c. serán negativos. Sea LAe una tangente indefinida, donde se han de contar todas las tangentes, llamando positivas las que se cuenten desde A para arriba, y negativas las contrarias; sea GFU una cotangente indefinida, donde se han de contar todas las cotangentes, llamando positivas las que se cuenten á la izquierda del punto F, y negativas las que se cuenten á la derecha; sea AP el diámetro sobre que se han de tirar perpendiculares todos los senos, llamando positivos los que estén por la parte de arriba, y negativos los que estén por la parte de abajo; sea este mismo diámetro



donde se han de contar los cosenos, llamando positivos los que estén á la izquierda, y negativos los que estén á la derecha del centro C; y como las secantes y cosecantes varían de direccion á cada arco, sin que haya línea ni punto fijo en que se puedan contar, sólo las llamaremos negativas cuando no cumplan exactamente con su definicion; ó lo que es lo mismo, cuando no sea el radio que pasa por el otro extremo del arco el que encuentra á la tangente, sino el radio que está en direccion opuesta.

Sentado esto, si el arco AB crece y se convierte en ABb, su seno bd será mayor que BD; porque á mayor arco bAt corresponderá mayor cuerda que á BAS, esto es,  $bt > BS$ ; luego  $\frac{1}{2}bt > \frac{1}{2}BS$ , ó  $\text{sen.}ABb > \text{sen.}AB$ .

El coseno Cd será menor que el CD del primero, porque es parte respecto de él. La tangente Ae será mayor que la AE del primero; porque como la ha de determinar la secante Cb, y esta pasa por fuera de la CE, la irá á encontrar mas arriba (ó por fuera) del punto E. La secante Ce ha de ser mayor que la CE, por separarse mas de la perpendicular CA. La cotangente Fg debe ser menor que FG, porque debiéndola terminar el radio Cb prolongado, y estando este entre CG y CF deberá encontrar á la FG ántes del punto G. La cosecante Cg debe ser menor que la CG, porque se separa ménos de la perpendicular CF. *Luego cuando crece un arco sin llegar al cuadrante, crecen sus líneas y menguan sus cotineas.*

Esto mismo lo confirman las fórmulas (445) que espresan sus valores.

447 Si el arco ABb continúa creciendo, y se convierte en el cuadrante ABF, entónces de las seis líneas trigonométricas, dos son iguales con cero, á saber, el coseno y la cotangente; dos con el radio, á saber, el seno y la cosecante; y dos infinitas, á saber, la tangente y la secante.

En efecto, el coseno se reduce á cero; porque habiéndose confundido el extremo del arco con el radio



CF no hay distancia ninguna entre el pie del seno y el centro. La cotangente lo hace igualmente, porque ha de ser la parte de la tangente geométrica levantada en el punto F, y comprendida entre dicho punto y el paraje en que la encuentre el radio que pasa por F; luego para encontrar á dicho radio no necesita salir ni separarse del punto F, y por lo mismo se reducirá á cero dicha cotangente.

Siendo el seno entónces la mitad de la cuerda de  $180^\circ$  ó  $\pi$ , que es el diámetro, se convierte en el radio. La cosecante es tambien igual al radio; porque la cosecante es el radio prolongado hasta que encuentre a la cotangente, que se ha reducido al punto F; luego no se debe prolongar nada dicho radio para encontrar á la cotangente.

Finalmente, la secante y tangente son infinitas; porque siendo ABF un cuadrante, la FC es perpendicular á AC; y siéndolo tambien la AE, resulta que estas dos líneas son paralelas, y no se pueden encontrar; luego serán infinitas.

Todo esto lo dan á conocer tambien las fórmulas halladas (445), como cualquiera puede comprobarlo.

448 Sea ahora el arco AFM; y se tendrá su seno MN *positivo*, su coseno NC *negativo*, su tangente AL *negativa*, y su secante CL *negativa*. Porque la tangente cae por la parte de abajo del punto A, y la secante en vez de ser el radio CM prolongado hácia Q, es al contrario prolongado desde C hácia L. Para deducir sus valores negativos como deben ser, consideraremos los triángulos semejantes CNM, CAL, que dan  $CN:CA::NM:AL::CM:CL$ ,  
ó  $-\cos.:1::\text{sen.:tang.}::1:\text{sec.}$ ,

$$\text{de donde sale } \text{tang.} = -\frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}, \text{ y } \text{sec.} = -\frac{1}{\text{cos.}}.$$

La cotangente FV es *negativa*, y la cosecante CV es *positiva*; la cotangente es negativa, porque va desde F hácia la derecha; y la cosecante es positiva, porque siendo la secante del complemento, es exactamente



el radio prolongado que pasa por el extremo del arco hasta encontrar á la cotangente.

Comparando los lados de los triángulos semejantes CMN, CFV, se obtienen estos mismos resultados.

449 Supongamos que continúa el arco creciendo; y se convierte en AFP; y se tendrá su seno = 0, su cos. = -1, su tang. = 0, su sec. = -1; su cotangente FV y su cosecante CP prolongada llegan á ser paralelas, y por consiguiente son infinitas.

450 Sea ahora el arco AFPZ, y se tendrá su seno ZN *negativo*; su coseno CN *negativo*; su tangente AE *positiva*; su secante CE *negativa* (porque en vez de ser el radio CZ prolongado hácia X, es el mismo radio prolongado hácia á la parte opuesta); su cotangente FG es *positiva*; y su cosecante CG (que son las líneas del complemento FPZ del arco que consideramos) es *negativa*; la primera por ir desde F hácia la izquierda; y la segunda por las mismas razones que ya hemos dado, esto es, porque en vez de ser el radio CZ prolongado hácia X, lo está al contrario.

Sus valores se deducen de los triángulos semejantes CNZ, CAE, y de los CNZ, CGF.

451 Supongamos ahora que el arco llega á ser los tres cuadrantes, esto es, AFPY; y tendríamos su seno CY *negativo* é = -1: su coseno que se reduce al punto C, será = 0; su tangente AE llega á ser =  $\infty$ ; y su secante CE = - $\infty$  (porque vienen á ser paralelas); su cotangente se reduce al punto F, y por consiguiente es = 0; y su cosecante se reduce al radio CF *negativo* ó = -1.

452 Sea ahora el arco AFPYS el que vamos á considerar, y tendríamos su seno SD *negativo*; su coseno CD *positivo*; su tangente AL *negativa*; su secante CL *positiva*; su cotangente FV *negativa*; y su cosecante CV igualmente *negativa*.

Para deducir sus valores se consideran los triángulos semejantes CDS, CAL, y los CDS, CFV.

453 Supongamos ahora que el arco llega á ser toda la circunferencia; y se tendrá su seno = 0; su



coseno  $=1$ ; su tangente  $=0$ ; su secante  $=1$ ; su cot.  $=\infty$ ; su cosec.  $=\infty$ .

454 Si el arco continuase creciendo, se tendrían los mismos valores que ántes, con sólo añadir una, dos ó mas circunferencias á cada arco de los que acabamos de considerar.

455 Consideremos ahora que el arco AB, en vez de ir creciendo, va menguando (con lo cual menguarán sus líneas y crecerán sus colíneas) hasta llegar á cero, y tendrémos: su seno  $=0$ ; su coseno  $=1$ ; su tangente  $=0$ ; su secante  $=1$ ; su cotangente  $=\infty$ ; y su cosec.  $=\infty$ . Donde es digno de notarse que todas las líneas de un arco *cero* son las mismas que las de la circunferencia entera; pero se diferencian en posición, excepto el coseno y la secante.

456 Supongamos ahora que el arco continúa menguando todavía, ó por mejor decir, que crece en un sentido opuesto al de ántes, y se llega á convertir en AS, y tendrémos su seno SD *negativo*; su coseno CD *positivo*; su tangente AL *negativa*; su secante CL *positiva*; su cotangente FV *negativa*; y su cosecante CV también *negativa*.

La cotangente del arco negativo AS será la tangente del complemento de dicho arco; pero el complemento de un arco negativo debe ser este mismo arco mas un cuadrante; luego el complemento de que tratamos es todo el arco SAF; y como la tangente de este arco es la FV *negativa*, y su secante es la CV también *negativa*, resulta que la tangente y cosecante del arco negativo son *negativas*.

Luego cuando un arco pasa de positivo á negativo, sólo varían de signo el seno, tangente, cotangente y cosecante; y permanecen las mismas la secante y el coseno.

457 Todo lo espuesto manifiesta la perfecta conformidad de las fórmulas de las líneas trigonométricas con su misma definición y construcción geométrica; y se deduce que como todas las líneas vienen espresadas en el seno y el coseno, en sabiendo los valores



absolutos y signos de estos, se hará la sustitucion conveniente, y se tendrán los valores y signos de todas las demas líneas trigonométricas.

458 Para hacer esta sustitucion con facilidad, conviene tener bien presente que en el primer cuadrante que se considere se tienen *senos y cosenos positivos*; y en el 2.<sup>o</sup> *senos positivos y cosenos negativos*; en el 3.<sup>o</sup> *senos y cosenos negativos*; y en el 4.<sup>o</sup> *senos negativos y cosenos positivos*.

459 Consideremos ahora dos arcos AFM, PM, que el uno tenga su oríjen en A, y el otro en P, y que sean el uno suplemento del otro, ó entre los dos valgan la semicircunferencia, y tendrémos que el seno MN conviene en un todo á ambos arcos. El coseno MT ó CN es tambien el mismo en magnitud para los dos arcos AFM, MP; pero se diferencian en posicion, pues respecto del AFM se cuenta desde el pie N del seno hácia el principio A del arco, y en el MP se cuenta desde el pie del seno hácia la parte opuesta del principio P del arco MP. La cotangente FV conviene en magnitud á los dos arcos AFM, MP; pero se diferencian en posicion, por razones análogas á las anteriores. Los triángulos CAL, CPQ, por tener CA=CP, los ángulos en C iguales por opuestos al vértice, y los en A y P por rectos, son iguales (261), y dan AL=PQ, CL=CQ; lo que manifiesta que la tangente y secante del arco AFM son iguales en magnitud á las del arco PM; pero ambas se diferencian en posicion, porque la tangente AL del primero se cuenta en un sentido opuesto á aquel en que se ha contado el arco; y la PQ del segundo se cuenta en el mismo sentido que su arco. La secante CL del arco AFM, en vez de ser el radio prolongado que pasa por el extremo M del arco, es la prolongacion de este radio en un sentido opuesto; la secante CQ del arco PM es positiva; porque cumple exactamente con su definicion. Esto mismo sucede á la cosecante CV, y de consiguiente conviene en magnitud y posicion á ambos arcos. De donde resulta, que *las líneas de un*



arco son las mismas en magnitud que las de su suplemento; pero se diferencian en posición, excepto el seno y la cosecante, que convienen en un todo á ambos arcos.

*Cor. gener.* De toda la doctrina espuesta se deduce que si espresamos por  $\frac{1}{2}\pi$  el cuadrante ABF, y por  $m$  el arco BF, será  
 $\text{sen. AB} = \text{sen. (ABF - BF)} = \text{sen. } (\frac{1}{2}\pi - m) = \text{BD} = \text{cos. } m,$   
 y  $\text{cos. AB} = \text{cos. } (\frac{1}{2}\pi - m) = \text{BH} = \text{sen. } m.$

Si se hace FM =  $m$ , será

$\text{sen. AFM} = \text{sen. } (\frac{1}{2}\pi + m) = \text{MN} = \text{cos. } m,$   
 y  $\text{cos. AFM} = \text{cos. } (\frac{1}{2}\pi + m) = -\text{CN} = -\text{sen. } m.$

Y si hacemos PM =  $m$ , será

$\text{sen. AFM} = \text{sen. (AFP - PM)} = \text{sen. } (\pi - m) = \text{MN} = \text{sen. } m;$   
 y  $\text{cos. AFM} = \text{cos. } (\pi - m) = -\text{CN} = -\text{cos. } m.$

460 Puesto que dado el radio  $R$  de un círculo, se conoce el seno de un cuadrante y la tangente de  $45^\circ$  que son iguales con él, y el seno de  $30^\circ$  que vale la mitad del radio, y conocido el seno de un arco se pueden conocer todas sus líneas trigonométricas, vamos á ver como por su medio se podrán calcular las de todos los arcos; para lo cual se tienen las tres proposiciones siguientes en el supuesto de ser el radio  $R=1$ , y de que para indicar el cuadrado de una línea trigonométrica de un arco  $A$ , por ejemplo de un seno, se escribe indiferentemente  $\text{sen.}^2 A$ , ó  $\text{sen. } A^2 \&^2$ .

1.<sup>a</sup> Dado el seno de un arco  $A$ , el seno de la mitad

viene espresado por  $\text{sen. } \frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \text{sen.}^2 A}}$ .

*Dem.* Sea (fig. 143) el arco AHB =  $A$ , y BD su seno; con lo cual tendríamos que si tiramos la cuerda AB, su mitad AE será el seno pedido; y como

$$AE = \frac{1}{2}AB = (\S 333, \text{ cor. } 1.^{\circ}) \frac{1}{2} \sqrt{2AC \times AD} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2AC(AC - CD)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 1(1 - \text{cos. AHB})} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\text{cos. AHB}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\text{cos. } A} =$$

$$(\S 445, e) \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \text{sen.}^2 A}}, \text{ que es L. Q. D. D.}$$



2.<sup>a</sup>. Dados los senos y por consiguiente (445) los cosenos de dos arcos  $A$ ,  $B$ , los senos y cosenos de la suma y diferencia de dichos arcos son:

$$\begin{cases} \text{sen.}(A+B) = \text{sen.}A \cos.B + \text{sen.}B \cos.A & (m), \\ \text{cos.}(A+B) = \text{cos.}A \cos.B - \text{sen.}A \text{sen.}B & (n), \\ \text{sen.}(A-B) = \text{sen.}A \cos.B - \text{sen.}B \cos.A, \\ \text{cos.}(A-B) = \text{cos.}A \cos.B + \text{sen.}A \text{sen.}B. \end{cases}$$

*Dem.* Sean (fig. 144)  $AB=A$ , y  $BD=B$ , los arcos dados; colocando el uno á continuacion del otro, será  $ABD=AB+BD=A+B$ , y poniendo el  $BD$  desde  $B$  hasta  $M$ , será  $AM=AB-BD=A-B$ ; luego bajando las perpendiculares  $DF$ ,  $MP$  al radio  $AC$

$$\text{será } \begin{cases} DF = \text{sen.}ABD = \text{sen.}(A+B), \\ CF = \text{cos.}ABD = \text{cos.}(A+B), \\ MP = \text{sen.}AM = \text{sen.}(A-B), \\ CP = \text{cos.}AM = \text{cos.}(A-B), \end{cases} \quad (P)$$

Para determinar estas líneas en valores de las de los arcos dados, tiraremos la cuerda  $MD$ , y el radio  $CB$  que (294 esc.) le será perpendicular, y tambien tiraremos la  $BE$  perpendicular á la  $AC$ , y tendremos que las líneas de los arcos dados

$$\text{serán } \begin{cases} BE = \text{sen.}A, & CE = \text{cos.}A, \\ DH = \text{sen.}B, & CH = \text{cos.}B, \end{cases}$$

Si ahora tiramos la  $HK$  paralela á  $BE$ , y las  $HL$ ,  $MN$ , paralelas á la  $AC$ , y observamos que los triángulos  $MNH$ ,  $HLD$  (por tener  $MH=HD$  por lo dicho ántes, el ángulo  $HMN=DHL$  por correspondientes entre las paralelas  $MN$ ,  $HL$  siendo  $MD$  la secante, y el ángulo  $MHN=HDL$ , por la misma razon entre las paralelas  $HK$ ,  $DF$ , siendo tambien la secante  $MD$ ) son iguales, y dan  $MN=HL$ , y  $NH=LD$ ; las líneas  $DF$ ,  $CF$ ,  $MP$ ,  $CP$  que tratamos de conocer, las podremos espresar del modo siguiente:

$$\begin{cases} DF = DL + LF = DL + HK, \\ CF = CK - FK = CK - HL, \\ MP = NK = HK - NH = HK - DL, \\ CP = CK + KP = CK + MN = CK + HL. \end{cases}$$



Puesto que los triángulos CBE, CHK son semejantes,

$$\text{darán } \begin{cases} \text{CB:CH}::\text{BE:HK}::\text{CE:CK}, \\ \text{ó } 1:\cos.B::\text{sen}.A:\text{HK}::\cos.A:\text{CK}, \end{cases}$$

que despejando el cuarto y sexto término, refiriéndonos á la primera razon, se tendrá

$$\text{HK}=\text{sen}.A\cos.B, \quad \text{CK}=\cos.A\cos.B.$$

Los triángulos CBE, DHL, por tener sus lados perpendiculares, serán (331 cor. 4.<sup>o</sup>) semejantes y

$$\text{darán } \begin{cases} \text{CB:DH}::\text{BE:HL}::\text{CE:DL}, \\ \text{ó } 1:\text{sen}.B::\text{sen}.A:\text{HL}::\cos.A:\text{DL}, \end{cases}$$

de donde resultará,

$$\text{HL}=\text{sen}.A\text{sen}.B, \quad \text{DL}=\text{sen}.B\cos.A.$$

Luego sustituyendo estos valores en las ecuaciones (P), y poniendo los primeros miembros por segundos, nos resultará

$$\begin{cases} \text{sen}.(A+B)=\text{sen}.A\cos.B+\text{sen}.B\cos.A. \\ \text{cos}.(A+B)=\cos.A\cos.B-\text{sen}.A\text{sen}.B. \\ \text{sen}.(A-B)=\text{sen}.A\cos.B-\text{sen}.B\cos.A. \\ \text{cos}.(A-B)=\cos.A\cos.B+\text{sen}.A\text{sen}.B. \end{cases}$$

que es L. Q. D. D.

3.<sup>a</sup> Dado el seno, y por consiguiente el coseno de un arco A, el seno y coseno del arco duplo son:

$$\begin{aligned} \text{sen}.2A &= 2\text{sen}.A\cos.A = 2\text{sen}.A\sqrt{1-\text{sen}.^2A} \text{ (p)}, \\ \text{cos}.2A &= \cos.^2A - \text{sen}.^2A = 1 - 2\text{sen}.^2A \text{ (q)}. \end{aligned}$$

*Dem.* No hay mas que en las fórmulas anteriores hacer  $B=A$ , y sustituir despues en vez de  $\cos.A$  su igual  $\sqrt{1-\text{sen}.^2A}$ , y  $1-\text{sen}.^2A$  en vez de  $\cos.^2A$ .

*Cor.* Si hacemos  $2A=A'$ , será  $A=\frac{1}{2}A'$ ; y sustituimos en las fórmulas anteriores, se tendrá

$$\begin{aligned} \text{sen}.A' &= 2\text{sen}.\frac{1}{2}A'\cos.\frac{1}{2}A'; \\ \text{cos}.A' &= \cos.^2\frac{1}{2}A' - \text{sen}.^2\frac{1}{2}A'; \end{aligned}$$

y como  $\cos.^2\frac{1}{2}A' = 1 - \text{sen}.^2\frac{1}{2}A'$ , será

$$\text{cos}.A' = 1 - \text{sen}.^2\frac{1}{2}A' - \text{sen}.^2\frac{1}{2}A' = 1 - 2\text{sen}.^2\frac{1}{2}A'.$$

461 Si en la fórmula (m) se hace  $B=2A$ , se convertirá en  $\text{sen}.3A = \text{sen}.A\cos.2A + \text{sen}.2A\cos.A$ ; y poniendo en vez de  $\cos.2A$ ,  $\text{sen}.2A$ , y  $\cos.A$ , sus



valores (q), (p) y (e) (445) todo espresado en valores del seno, se tendrá  $\text{sen. } 3A = \text{sen. } A(1 - 2\text{sen.}^2 A) +$

$$2\text{sen. } A\sqrt{1 - \text{sen.}^2 A} \times \sqrt{1 - \text{sen.}^2 A} =$$

$$\text{sen. } A - 2\text{sen.}^3 A + 2\text{sen. } A(1 - \text{sen.}^2 A) =$$

$\text{sen. } A - 2\text{sen.}^3 A + 2\text{sen. } A - 2\text{sen.}^3 A = 3\text{sen. } A - 4\text{sen.}^3 A$ , que es la fórmula que espresa el seno del arco triplo en valores del arco sencillo. Igualmente se puede hallar el coseno del mismo arco; y por procedimientos análogos se pueden determinar todas las líneas trigonométricas de cualquier arco múltiplo de otro dado.

462 Además de la propiedad de determinar la magnitud del arco, se verifica también que *todas las líneas trigonométricas son proporcionales con los radios de los círculos con que están trazados los arcos.*

*Dem.* En efecto, si suponemos que haciendo centro en C (fig. 145) vértice del ángulo DCG, se trazan con los radios CA, CD, dos arcos de círculo AB, DG, y bajamos desde A y D, las AP, DE perpendiculares á CG, resultará que serán los senos respectivos de los arcos AB, DG, que tendrán un mismo número de grados por ser ambos medida del ángulo DCG; las líneas CP, CE, serán sus cosenos; y levantando en B y G las perpendiculares BN, GM á la CG, serán las tangentes, y CN, CM las secantes. Ahora los triángulos semejantes CDE, CAP, dan

$$CD:CA::DE:AP::CE:CP,$$

ó poniendo en vez de estas líneas sus valores, y acentuando las líneas correspondientes al radio CA, que también señalarémos con la  $R'$  acentuada, será

$$R:R'::\text{sen.}::\text{sen.}'::\text{cos.}::\text{cos.}' (a);$$

los triángulos semejantes CGM, CBN, también darán

$$CG:CB::GM:BN::CM:CN,$$

ó  $R:R'::\text{tang.}::\text{tang.}'::\text{sec.}::\text{sec.}' (b).$

Ahora, completando los cuadrantes GDR, BAQ, se tendrá que RS, QO, serán las cotangentes de los arcos GD, BA; y CS, CO serán las cosecantes; y los triángulos semejantes CSR, COQ darán

$$CR:CQ::RS:OQ::CS:CO,$$

ó  $R:R'::\text{cot.}::\text{cot.}'::\text{cosec.}::\text{cosec.}' (c).$



Y como las tres series de razones iguales (a), (b), (c), tienen comun la razon  $R:R'$ , enlazando las demas porque son iguales, se tendrá  $R:R'::\text{sen}::\text{sen}'::\text{cos}::\text{cos}'::\text{tang}:\text{tang}'::\text{sec}::\text{sec}'::\text{cot}::\text{cot}'::\text{cosec}::\text{cosec}'$ .

*Cor.* Luego si respecto de un radio cualquiera se calculan estas líneas para todos los arcos, y al lado de cada arco se pone el valor de las líneas trigonométricas que le corresponden, las tablas que las contengan servirán para hallar estas mismas líneas cuando correspondan á otro radio; y ademas, por medio de ellas cuando se dé un arco, se podrá determinar la magnitud de sus líneas trigonométricas; y dada una línea trigonométrica, se podrá hallar el valor del arco á que corresponde.

463 Las tablas que se formasen de este modo, esto es, que contuviesen el valor de las líneas trigonométricas en partes del radio, se llaman *tablas trigonométricas naturales*; pero como todos los cálculos se hacen por medio de proporciones, para hacer las operaciones con facilidad y prontitud, se ha tomado el medio de que las tablas contengan, no las líneas trigonométricas naturales, sino el logaritmo correspondiente á dicho número de partes del radio á que equivalgan; y en este caso que es como las usamos, se llaman *tablas trigonométricas artificiales*. Las de D. Tadeo López y Aguilar, que como ya hemos dicho en otra ocasion, son á las que nosotros nos referimos, están calculadas de 10 en 10 segundos; cuya construccion y uso omitimos por razones análogas á las espuestas (208), y pasaremos á la

### *Resolucion de los triángulos rectángulos.*

464 Para la resolucion de los triángulos rectángulos sólo se necesitan dos proporciones generales, que se llaman *analogías*.

1.<sup>a</sup> El radio de las tablas es al seno de uno de los ángulos agudos, como la hipotenusa es al cateto opuesto á dicho ángulo agudo; ó el radio de las ta-

X

T. I.



*blas es al coseno de un ángulo agudo, como la hipotenusa es al cateto adyacente á dicho ángulo agudo; que puestas en proporciones dan*

$$\left\{ \begin{array}{l} R:\text{sen.}\acute{\text{ang.}}\text{ag.}::\text{hipot.}::\text{catet.}\text{op.}, \\ R:\text{cos.}\acute{\text{ang.}}\text{ag.}::\text{hip.}::\text{cat.}\text{ady.} \end{array} \right.$$

*Dem.* En efecto, sea CDE un triángulo rectángulo cualquiera; si con una parte CA, igual al radio de las tablas, se traza el arco AB, y se tira la perpendicular AP, esta será el seno que se halle en las tablas, y CP el coseno; y los triángulos CAP, CDE, serán semejantes (328) y darán

$$\left\{ \begin{array}{l} CA:AP::CD:DE, \text{ ó } R:\text{sen.}\acute{\text{ang.}}\text{ag.}::\text{hip.}::\text{cat.}\text{op.}, \\ CA:CP::CD:CE, \text{ ó } R:\text{cos.}\acute{\text{ang.}}\text{ag.}::\text{hip.}::\text{cat.}\text{ady.}, \end{array} \right.$$

que es L. Q. D. D.

*Esc.* Como el radio de las tablas se considera igual con la unidad, resulta que hallando el cuarto término en las dos proporciones de arriba,

$$\text{será } \left\{ \begin{array}{l} DE=CD\times AP=\text{hip.}\times\text{sen.}\acute{\text{ang.}}\text{op.} \text{ á } DE, \\ CE=CD\times CP=\text{hip.}\times\text{cos.}\acute{\text{ang.}}\text{ady.} \text{ á } CE, \end{array} \right.$$

cuyas espresiones manifiestan que *un cateto de un triángulo rectángulo es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto, ó por el coseno del ángulo adyacente, tomados en las tablas.*

465 2.<sup>a</sup> *El radio de las tablas es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente á dicho ángulo es al cateto opuesto,*  
ó  $R:\text{tang.}\acute{\text{ang.}}\text{ag.}::\text{cat.}\text{ady.}::\text{cat.}\text{op.}$

*Dem.* Porque si despues de haber descrito el arco AB con el radio CA, igual al de las tablas, se tira la perpendicular BN, esta será la tangente trigonométrica del ángulo en C; y los triángulos semejantes

$$\text{CBN, CDE, darán } CB:BN::CE:DE, \\ \text{ó } R:\text{tang.}\acute{\text{ang.}}\text{ag.}::\text{cat.}\text{ady.}::\text{cat.}\text{op.} \text{ (A), L. Q. D. D.}$$

*Cor.* De donde tomando el radio por unidad, resulta  $DE=CE\times BN$ , ó  $\text{cat.}=\text{tang.}\acute{\text{ang.}}\text{op.}\times\text{cat.}$ ; que quiere decir, que *en un triángulo rectángulo cualquiera un cateto es igual á la tangente trigonométrica*



de su ángulo opuesto multiplicada por el otro cateto.

*Esc.* Se usará la primera analogía cuando la hipotenusa entre en los datos, y de la segunda cuando no.

466 Esto supuesto, para resolver el triángulo ABC (fig. 146) rectángulo en C, en que se da la hipotenusa  $AB=327$  varas, y el ángulo  $A=32^{\circ}25'15'',7$ ; se escriben los datos dentro de una llave como se ve en (M) y las partes que se buscan dentro de otra (N); se restará el ángulo  $A$  de  $90^{\circ}$  y se hallará el  $B$  de  $57^{\circ}34'44'',3$ .

$$\begin{array}{l} \text{(M)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Áng. } C=90^{\circ}. \\ AB=327 \text{ varas.} \\ \text{Áng. } A=32^{\circ}25'15'',7. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(N)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Áng. } B=57^{\circ}34'44'',3. \\ BC=175,317 \text{ varas.} \\ AC=276,031 \text{ varas.} \end{array} \right. \end{array}$$

Para hallar los lados BC, AC, nos servirá la primera analogía alternada que será

$$R:327::\text{sen. } 32^{\circ}25'15'',7:BC::\text{cos. } 32^{\circ}25'15'',7:AC.$$

Que hallando por logaritmos el cuarto y sexto término refiriéndonos á la primera razon, será

$$\begin{array}{l} \log. BC = \left\{ \begin{array}{l} \log. \text{sen. } 32^{\circ}25'10'' = 9,7292566 \\ \text{part. corresp. á } 5'',7 = 189 \\ \log. 327. \dots\dots\dots = 2,5145478 \\ \text{comp. log. } R \dots\dots\dots = 0 \end{array} \right. \\ \hline \text{suma ó log. } 175,317 = +2,2438233 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log. AC = \left\{ \begin{array}{l} \log. \text{cos. } 32^{\circ}25'10'' = 9,9264176 \\ \text{part. corresp. á } 5'',7 = -76 \\ \log. 327. \dots\dots\dots = 2,5145478 \\ \text{comp. log. } R \dots\dots\dots = 0 \end{array} \right. \\ \hline \text{suma ó log. } 276,031 = +2,4409578 \end{array}$$

cuyos valores se colocan en la llave (N) y se tiene resuelto el triángulo.

*Esc.* Si se conociese la hipotenusa y un cateto, se despejaría en la analogía general el segundo y cuarto término, y quedaria resuelto el triángulo.

467 Si se diesen en el mismo triángulo un cateto



AC y el ángulo *A* como se ve en (M); para hallar el ángulo *B* se restará el *A* de 90°, y se tendrá el *B* de 50°33'23",2 como se ve en (N).

$$\left. \begin{array}{l} \text{(M)} \\ AC=829 \text{ varas.} \\ \text{Áng. } A=39^{\circ}26'36'',8. \\ \text{Áng. } C=90^{\circ}. \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{(N)} \\ B=50^{\circ}33'23'',2. \\ BC=682,004 \text{ varas.} \\ AB=1073,485. \end{array} \right\}$$

Para hallar el lado BC nos servirá la segunda analogía, que dará  $R:\text{tang.}39^{\circ}26'36'',8::829:CB$ , que por logaritmos será:

$$\log.CB = \left\{ \begin{array}{l} \log.\text{tang.}39^{\circ}26'30'' = 9,9152034 \\ \text{par.cor. á} \dots\dots\dots 6'',8 = \quad \quad 292 \\ \log.829 \dots\dots\dots = 2,9185545 \\ \text{comp.log.}R \dots\dots\dots = 0, \\ \hline \text{suma ó } \log.682,004 = 2,8337871 \end{array} \right.$$

El lado AB le hallaremos por la primera analogía invertida, que dará  $\text{cos.}39^{\circ}26'36'',8:R::829:AB$ , que por logaritmos será:

$$\log.AB = \left\{ \begin{array}{l} \log.829 \dots\dots\dots = 2,9185545 \\ \log.R \dots\dots\dots = 10, \\ \text{com.log.cos.}39^{\circ}26'36'',8 = 0,1122416 \\ \hline \text{suma ó } \log.1073,485 = 3,0307961 \end{array} \right.$$

*Esc. 1.º* Si se diesen los dos catetos se despejaría el segundo término de la proporción (A, 465), y después se hallaría la hipotenusa; con lo cual quedaría resuelto el triángulo.

*Esc. 2.º* En los triángulos se pueden siempre conocer dos datos sin necesidad de analogías, á saber, un ángulo en conociendo los otros dos (lo cual conviene igualmente á los oblicuángulos); y uno cualquiera de los lados, cuando se conocen los otros dos (332 cor.). Aunque es mas sencillo en estos casos el cálculo logarítmico, sin embargo aquel puede servir de comprobación, como se ve en el primer caso, en que se tiene  $327^2 = 175,317^2 + 276,031^2$  con ménos de dos décimas de diferencia, que en nada influyen.



*Resolucion de los triángulos oblicuángulos.*

468 La resolucion de los triángulos oblicuángulos está fundada en esta proposicion general:

*Los senos de los ángulos son como sus lados opuestos.*

*Dem.* En efecto, si en el triángulo ABC (fig. 147) circunscribimos un círculo, y desde el centro O se tiran las OQ, OR, OS, perpendiculares á las AC, CB, AB, y se une tambien el centro O con los vértices de los ángulos, se tendrá que el ángulo ABC será igual al AON, porque ambos tienen por medida el arco AN; y como el seno de AON es  $AQ = \frac{1}{2}AC$ , este mismo será el seno del ángulo ABC, ó  $\text{sen.}ABC = \frac{1}{2}AC$ .

Asimismo será  $\text{sen.}BCA = \frac{1}{2}AB$ , y  $\text{sen.}BAC = \frac{1}{2}BC$ ; y formando tres razones de igualdad, será

$$\text{sen.}ABC : \frac{1}{2}AC :: \text{sen.}BCA : \frac{1}{2}AB :: \text{sen.}BAC : \frac{1}{2}BC.$$

Multiplicando por 2 los consecuentes, y escribiendo abreviadamente, será

$$\text{sen.}ABC : \text{sen.}BCA : \text{sen.}BAC :: AC : AB : BC,$$

ó (335 esc. 1.<sup>o</sup>) mas general

$$\text{sen.}A : \text{sen.}B : \text{sen.}C :: a : b : c, \text{ que es L. Q. D. D.}$$

469 Pasemos á resolver algunos ejemplos, y sea el primero, *dados dos lados y el ángulo comprendido, hallar el otro lado y los dos ángulos.*

Para poder aplicar á este caso la analogía general, es necesario demostrar que *la suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á dichos lados es á la tangente de su semidiferencia.*

Para lo cual, la proporcion general

$$\text{sen.}A : BC :: \text{sen.}B : AC, \text{ dará (§ 184, 6.<sup>a</sup>)}$$

$$\text{sen.}A + \text{sen.}B : \text{sen.}A - \text{sen.}B :: BC + AC : BC - AC \text{ (m).}$$

Sean ahora BS, CP (fig. 148) los senos de dos arcos AB, AC; si se tira el diámetro AM y se prolonga la BS, será (294) el arco AD = ACB; por consi-



guiente se tendrá  $DAC=AB+AC$ , y  $CB=AB-BC$ .

Tírese ahora la  $CF$  paralela al diámetro  $AM$ ,

$$\text{y será } \begin{cases} DE=DS+SE=BS+CP=\text{sen}.AB+\text{sen}.AC, \\ BE=SB-SE=SB-CP=\text{sen}.AB-\text{sen}.AC. \end{cases}$$

Si se tiran las cuerdas  $BF$ ,  $DF$ , y con un radio  $FG$  igual al del círculo, se describe un arco  $hGK$ , se tendrá  $GK=\frac{1}{2}CAD=\frac{1}{2}(DA+CA)=\frac{1}{2}(BA+AC)$ , por ser ambas espresiones medida del ángulo  $DFG$ ; por la misma razon será  $Gh=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB-AC)$ .

Luego si por el punto  $G$  se tira la tangente  $lGL$ , la parte  $GL$  será la tangente del arco  $GK=\frac{1}{2}(AB+AC)$ , y la parte  $Gl$  será la tangente del arco  $Gh=\frac{1}{2}(AB-AC)$ .

Pero los triángulos  $DEF$ ,  $FGL$ ,  $BEF$ ,  $FGl$

$$\text{dan } \begin{cases} FE:FG::DE:GL \\ FE:FG::BE:Gl \end{cases}$$

que dan  $DE:GL::BE:Gl$ , ó  $DE:BE::GL:Gl$ ;

y sustituyendo en vez de estas líneas los valores que hemos hallado ántes, se tendrá

$$\begin{aligned} &\text{sen}.AB+\text{sen}.AC:\text{sen}.AB-\text{sen}.AC:: \\ &\text{tang}.\frac{1}{2}(AB+AC):\text{tang}.\frac{1}{2}(AB-AC) \text{ (n)}, \end{aligned}$$

que quiere decir, que *la suma de los senos de dos arcos ó de dos ángulos es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de dichos arcos es á la tangente de la semidiferencia.*

Y como haciendo  $AB=A$ ,  $AC=B$ , las proporciones (m) y (n) tienen comun la primera razon, las otras darán

$$BC+AC:BC-AC::\text{tang}.\frac{1}{2}(A+B):\text{tang}.\frac{1}{2}(A-B),$$

que es la proporcion enunciada.

Pasemos ahora á la resolucion del triángulo  $ABC$  (fig. 149), en que se conocen los datos que se ven en M;

$$\begin{array}{l} \text{(M)} \\ \left\{ \begin{array}{l} BC=748 \text{ varas.} \\ AC=659 \text{ varas.} \\ \text{Áng. } C=77^{\circ}46'28'',5. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(N)} \\ \left\{ \begin{array}{l} A=55^{\circ}35'49'',73. \\ B=46^{\circ}37'41'',77. \\ AB=836,014 \text{ varas.} \end{array} \right. \end{array}$$

y observaremos que conocido el ángulo  $C$  la suma



de los otros dos  $A+B$  será también conocida, y será

$$180^\circ - 77^\circ 46' 28'',5 = 102^\circ 13' 31'',5$$

y  $\frac{1}{2}(A+B) = 51^\circ 6' 45'',75$ ;

luego la proporción anterior se convertirá en

$$748+659:748-659::\text{tang. } 51^\circ 6' 45'',75:\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B),$$

$$\text{ó } 1407:89::\text{tang. } 51^\circ 6' 45'',75:\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B);$$

de donde sale

$$\log.\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B) = \begin{cases} \log.\text{tan. } 51^\circ 6' 40'' = 10,0933536 \\ \text{par.cor. á...} 5'',75 = 247 \\ \log.89 \dots\dots\dots = 1,9493900 \\ \text{comp.log.} 1407 \dots = 6,8517059 \end{cases}$$

$$\text{suma ó } \log.\text{tang. } 4^\circ 29' 3'',98 = 18,8944742$$

Conocida la mitad de la suma y de la diferencia de los ángulos  $A$  y  $B$ , tendremos (§ 154)

$$A = 51^\circ 6' 45'',75 + 4^\circ 29' 3'',98 = 55^\circ 35' 49'',73,$$

y  $B = 51^\circ 6' 45'',75 - 4^\circ 29' 3'',98 = 46^\circ 37' 41'',77.$

Para hallar el lado  $AB$  tenemos esta proporción

$$\text{sen. } A:BC::\text{sen. } C:AB$$

$$\text{ó } \text{sen. } 55^\circ 35' 49'',73:748::\text{sen. } 77^\circ 46' 28'',5:AB,$$

que da

$$\log.AB = \begin{cases} \log.\text{sen.} \dots\dots\dots 77^\circ 46' 20'' = 9,9900338 \\ \text{par.cor. á} \dots\dots\dots 8'',5 = 39 \\ \log.748 \dots\dots\dots = 2,8739016 \\ \text{com.log.} \text{sen. } 55^\circ 35' 49'',73 = 0,0835011 \end{cases}$$

$$\text{suma ó } \log.886,014 = 12,9474404$$

Con lo cual queda resuelto el segundo caso y las partes buscadas son las que se ven en (N).

470 *Dados dos ángulos y un lado, hallar el otro ángulo y los dos lados.*

Si en el triángulo  $ABC$  (fig. 150) se tienen los datos (M), lo primero se hallará el tercer ángulo

$$\begin{array}{l} \text{(M)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Áng. } C = 74^\circ 5' 37'',6. \\ \text{Áng. } A = 63^\circ 23' 53'',7. \\ BC = 863 \text{ varas.} \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(N)} \\ \left\{ \begin{array}{l} B = 42^\circ 30' 28'',7. \\ AC = 652,16 \text{ varas.} \\ AB = 928,218 \text{ varas.} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{que será } B = 180^\circ - (74^\circ 5' 37'',6 + 63^\circ 23' 53'',7) = 180^\circ - 137^\circ 29' 31'',3 = 42^\circ 30' 28'',7.$$



La analogía jeneral  $\text{sen. } A:BC::\text{sen. } B:AC::\text{sen. } C:AB$ ,  
 será  $\text{sen. } 63^{\circ}23'53'',7:863::\text{sen. } 42^{\circ}30'28'',7:AC::$   
 $\text{sen. } 74^{\circ}5'37'',6:AB$ .

Despejando el cuarto y sexto término, se tiene

$$\log.AC = \left\{ \begin{array}{l} \log.\text{sen.} \dots\dots\dots 42^{\circ}30'20'' = 9,8297293 \\ \text{par.cor.} \acute{a} \dots\dots\dots 8'',7 = \quad \quad \quad 200 \\ \log.863 \dots\dots\dots = 2,9360108 \\ \text{com.log.sen. } 63^{\circ}23'53'',7 = \underline{0,0485942} \end{array} \right.$$

$$\text{suma } \acute{o} \log.652,16 = +2,8143543$$

$$\log.AB = \left\{ \begin{array}{l} \log.\text{sen.} \dots\dots\dots 74^{\circ}5'30'' = 9,9830403 \\ \text{par.cor.} \acute{a} \dots\dots\dots 7'',6 = \quad \quad \quad 46 \\ \log.863 \dots\dots\dots = 2,9360108 \\ \text{comp.log.sen. } 63^{\circ}23'53'',7 = \underline{0,0485942} \end{array} \right.$$

$$\text{suma } \acute{o} \log.928,218 = +2,9676499$$

Con lo cual queda resuelto el triángulo, y el valor de las partes buscadas es el que se ve en (N).

471 *Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, hallar el tercer lado y los dos ángulos.*

Este caso se resuelve como el anterior, y puede en algunos casos dar dos soluciones, porque los datos pueden convenir á dos triángulos (438).

472 Las construcciones preparatorias que hemos tenido que hacer, se podrian evitar si entre las seis cosas que entran en un triángulo se pudiesen encontrar tres ecuaciones; pues en este caso *dadas tres cosas se tendrían tres ecuaciones con tres incógnitas, que se despejarían inmediatamente.* Para esto observaremos, que (figs. 77 y 78) por lo dicho (335 esc. 1.<sup>o</sup>) se tiene  $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2b \times CD$ ;

y como (§ 464 esc.)  $CD = a \cos.BCD$ , y en la figura primera que es la que da el signo + del  $\pm$ , se tiene

$$\cos.BCD = -\cos.ECA = -\cos.C,$$

sustituyendo este valor y sacando los análogos para los demas, se tendrá  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos.C$ ,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos.B, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos.A,$$

que sirven para conocer un lado, cuando se conocen los otros dos y el ángulo que forman.



Despejando los cosenos de los ángulos se tendrá

$$\cos.C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \cos.B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos.A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

que sirven para conocer un ángulo cuando se conocen los tres lados.

*Esc.* Estas fórmulas se pueden poner bajo una forma á que se puede aplicar inmediatamente el cálculo logarítmico.

*Idea jeneral de la resolucion de los triángulos esféricos.*

473. Queda indicado, y ahora repetimos, que se llama *triángulo esférico* una porcion de la superficie de una esfera, comprendida por tres arcos de círculo máximo; tal es el ABC (fig. 151) que suponemos construido en la superficie de una esfera, cuyo centro está en O, y cuyos lados son los arcos de círculo máximo AB, AC, BC.

Para fijar bien las ideas, conviene saber que *todo triángulo esférico ABC determina en el centro O de la esfera un ángulo sólido, compuesto de tres planos AOB, AOC, BOC, que tienen por medida respectivamente los arcos ó lados del mismo triángulo AB, AC, BC.*

Ademas, *el ángulo esférico CAB es el mismo que el que forman las dos tangentes AE, AD, tiradas en el vértice A, respectivamente á cada arco AC, AB.*

Porque la inclinacion de estos arcos es la misma que la de los planos OAE, OAD en que se hallan, y cuya interseccion comun es el radio AO; pero la inclinacion de estos planos se mide (377) por el ángulo rectilíneo EAD formado por las dos perpendiculares AE, AD, á un mismo punto A de la comun interseccion; luego este ángulo será tambien el formado por los arcos AC, AB, ó el esférico BAC.



474 Esto supuesto, lo que nos proponemos es hallar la relacion que tienen entre sí los lados  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ , que llamaremos  $c$ ,  $b$ ,  $a$ , y los ángulos  $C$ ,  $B$ ,  $A$ , del triángulo esférico  $ABC$ .

Para esto, sea el radio  $OA=1$ , y prolonguense los  $OC$ ,  $OB$ , hasta que encuentren las tangentes en  $E$  y en  $D$ , y será  $AE$  la tangente trigonométrica del arco  $AC$ , y  $OE$  será la secante; y  $AD$ ,  $OD$  serán la tangente y secante del arco  $AB$ . Únanse los puntos  $D$  y  $E$ , y el triángulo rectilíneo  $ADE$  dará (§ 472)

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \times AD \times \cos.A;$$

ó haciendo  $DE=x$ , y sustituyendo en vez de estas líneas los valores que les hemos dado ántes, será

$$x^2 = \text{tang.}^2 b + \text{tang.}^2 c - 2 \text{tang.} b \text{tang.} c \cos.A;$$

el triángulo  $ODE$  dará igualmente

$$x^2 = \text{sec.}^2 b + \text{sec.}^2 c - 2 \text{sec.} b \text{sec.} c \cos.a.$$

Restando de esta ecuacion la anterior, se tendrá

$$0 = \text{sec.}^2 b + \text{sec.}^2 c - 2 \text{sec.} b \text{sec.} c \cos.a -$$

$$\text{tang.}^2 b - \text{tang.}^2 c + 2 \text{tang.} b \text{tang.} c \cos.A;$$

y teniendo presente (445 esc.) que  $\text{sec.}^2 b - \text{tang.}^2 b = 1$  y  $\text{sec.}^2 c - \text{tang.}^2 c = 1$ ,

Esta ecuacion despues de dividir por 2 se convertirá en  $1 + \text{tang.} b \text{tang.} c \cos.A - \text{sec.} b \text{sec.} c \cos.a = 0$ ; y sustituyendo en vez de  $\text{tang.}$  y  $\text{sec.}$  sus valores, se

$$\text{tendrá } 1 + \frac{\text{sen.} b}{\cos. b} \times \frac{\text{sen.} c}{\cos. c} \times \cos.A - \frac{1}{\cos. b} \times \frac{1}{\cos. c} \times \cos.a = 0:$$

ó haciendo las operaciones, reduciendo el entero á la especie del quebrado, suprimiendo el denominador, y despejando  $\cos.a$ , se tendrá

$$\cos.a = \cos. b \cos. c + \text{sen.} b \text{sen.} c \cos.A;$$

y haciendo una costruccion semejante en cada ángulo, se tendrá el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \cos.a = \cos. b \cos. c + \text{sen.} b \text{sen.} c \cos.A \\ \cos.b = \cos. a \cos. c + \text{sen.} a \text{sen.} c \cos.B \\ \cos.c = \cos. a \cos. b + \text{sen.} a \text{sen.} b \cos.C \end{array} \right\} (M);$$

que sirven para conocer un lado, cuando se conocen los otros dos y el ángulo que forman.



475 Despejando en la primera  $\cos.A$ , se tendrá

$$\cos.A = \frac{\cos.a - \cos.b \cos.c}{\text{sen}.b \text{sen}.c};$$

y si en la ecuacion,  $\text{sen}.^2 A = 1 - \cos.^2 A$ , sustituimos este valor, será

$$\text{sen}.^2 A = 1 - \frac{\cos.^2 a + \cos.^2 b \cos.^2 c - 2 \cos.a \cos.b \cos.c}{\text{sen}.^2 b \text{sen}.^2 c}.$$

Reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, sustituyendo en el numerador  $1 - \cos.^2$  en vez de  $\text{sen}.^2$ , efectuando la multiplicacion y reduccion, multiplicando arriba y abajo por  $\text{sen}.^2 a$ , y estrayendo la raiz cuadrada se tendrá

$$\text{sen} A = \text{sen}.a \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos.a \cos.b \cos.c}}{\text{sen}.a \text{sen}.b \text{sen}.c}$$

Representando por  $F$  la fraccion que multiplica á  $\text{sen}.a$ , y haciendo operaciones análogas con las otras dos ecuaciones (M), se tendrá

$$\text{sen}.A = F \times \text{sen}.a, \text{sen}.B = F \times \text{sen}.b, \text{sen}.C = F \times \text{sen}.c,$$

que dan  $\text{sen}.A : \text{sen}.B : \text{sen}.C :: \text{sen}.a : \text{sen}.b : \text{sen}.c$ ;

que es la analogía jeneral de los triángulos esféricos y se enuncia: *los senos de los ángulos son como los senos de los lados opuestos.*

476 Despejando los cosenos de los ángulos en las ecuaciones (M), se tendrá  $\cos.A = \frac{\cos.a - \cos.b \cos.c}{\text{sen}.b \text{sen}.c}$ ,

$$\cos.B = \frac{\cos.b - \cos.a \cos.c}{\text{sen}.a \text{sen}.c}, \cos.C = \frac{\cos.c - \cos.a \cos.b}{\text{sen}.a \text{sen}.b};$$

que sirven para conocer un ángulo cuando se conocen los tres lados del triángulo. Pero para hallar el ángulo  $A$ , v. g. seria menester calcular separadamente por logaritmos los términos  $\cos.a$  y  $\cos.b \cos.c$ , hallar los números á que correspondian, restar estos, y despues hallar el logaritmo de la diferencia, y res-



tar de él el logaritmo de  $\text{sen.}b\text{sen.}c$ , y esta última diferencia sería el logaritmo de  $\text{cos.}A$ ; y como esta operación sería muy embarazosa en la práctica, se han dado á dichas ecuaciones varias trasformaciones, con las cuales quedan resueltos en factores los segundos miembros, en esta forma:

$$\text{sen.}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b-c)\text{sen.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}b\text{sen.}c}}$$

$$\text{sen.}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b-c)\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen.}a\text{sen.}c}}$$

$$\text{sen.}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)\text{sen.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}a\text{sen.}b}}$$

cuyas fórmulas sirven para el mismo objeto, y se les puede aplicar inmediatamente el cálculo logarítmico.

## GEOMETRÍA PRÁCTICA

É APLICACION DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL Á LAS DIFERENTES OPERACIONES QUE SE EJECUTAN EN EL TERRENO.

### *De la nivelacion.*

477 Se llama *nivelacion* la operación que enseña á determinar lo que un punto está mas ó ménos distante que otro del centro de la tierra. Para proceder con acierto en lo que vamos á esponer, debe saberse que la tierra que hasta estos últimos tiempos se habia tenido por esférica, se ha hallado que tiene la figura de una naranja, esto es, aplanada hácia los polos, y prolongada hácia el ecuador; este aplanamiento no influye nada en las operaciones ordinarias, y por lo mismo supondrémos que la tierra es esférica como se ve (fig. 152). Los puntos A, B, son los *polos*, la línea AB, se llama el *eje* de la tierra;



y la línea CD el *diámetro*; todo círculo máximo que pasa por los polos, se llama *meridiano* de la tierra; y el círculo máximo perpendicular al meridiano, se llama *ecuador*. El *horizonte* de un lugar es el plano tangente á la superficie de la tierra, cuyo punto de contacto es el lugar mismo del observador; *línea horizontal* es cualquier recta que se halla en este plano; *línea vertical* es la prolongacion del radio terrestre perpendicular al horizonte; un hilo de cuyo extremo cuelga un cuerpo cualquiera, señala la direccion vertical.

478 Esto supuesto, todos los puntos de la superficie de las aguas, cuando se hallan en quietud, ó en jeneral dos ó mas puntos equidistantes del centro de la tierra, están á un *mismo nivel*, ó están en el *nivel verdadero*; tales son los A, R, D, &c.; y tambien lo están los P, Q y M, N, equidistantes del punto de contacto A de la horizontal MN. Los puntos que como A, Q, N, &c. distan desigualmente del centro O, se dice que están en el *nivel aparente*; por lo cual la línea horizontal AN, se llama *línea de nivel aparente*; y la circunferencia terrestre ADBC, ó cualquiera otra concéntrica con ella, se llama *línea de nivel verdadero*. Asi, los puntos A, Q, están en el nivel aparente; los A, R, en el verdadero; y la parte QR del radio OR prolongado hasta Q, es lo que se llama *diferencia del nivel aparente al verdadero*. Cuando se hacen nivelaciones grandes y de importancia conviene tener en consideracion esta diferencia.

479 En este compendio omitimos la descripcion de los instrumentos con que se ejecutan las operaciones, tanto porque con sola la esplicacion sin tenerlos á la vista, es imposible formar una idea de ellos, como porque su presencia y cuatro palabras del profesor aprovechan mas que diez hojas de esplicacion. No ostante en el tratado elemental se halla la esplicacion de cada uno y la figura que le representa; y así, suponiendo que se tienen, decimos que para nivelar una piedra, una mesa, un plano de cualquier ins-



trumento, se emplea el *nivel de albañil* ó el *de aire*.

480 Para nivelar puntos que no disten demasiado, se emplea el *nivel de agua*; y si la nivelacion ha de ser muy grande, se usan *niveles de aire* con pínulas ó anteojo.

Cuando para averiguar la diferencia de nivel entre dos puntos, sólo se coloca el nivel en un paraje, se llama *nivelacion simple*; y cuando en dos ó mas, *nivelacion compuesta*.

Si se quiere hallar la diferencia de nivel entre los dos puntos C y D (fig. 153), se colocará el nivel en B, sobre poco mas ó ménos á igual distancia de C y D, y en línea recta con ellos; se echará agua en el nivel, y clavando dos miras verticalmente en C y D, se mirará por los puntos M, N de la superficie del agua, haciendo que otro suba ó baje la tablilla de la mira, hasta que la visual tirada por M y N, vaya á parar á la línea que separa lo blanco de lo negro, con lo cual los puntos E, F serán dos puntos de nivel verdadero. Ahora, midiendo con una vara dividida en pulgadas y líneas, ó mejor en pies y decimales de pie, las alturas CE, DF, y restándolas, el residuo será la diferencia de nivel entre C y D, estando mas alto el punto C, cuya altura CE se ha encontrado menor.

*Esc.* Para asegurar mejor la direccion de las visuales, suelen tener las tablillas de las miras la forma que representa la (fig. 153 \*); esto es, que suelen ser cuadradas ó circulares, con dos líneas ó diámetros que se crucen á ángulos rectos; y entónces el punto de interseccion de dichas líneas es el punto donde se debe dirigir la visual.

481 Si la distancia entre los puntos es muy considerable, se emplea la nivelacion compuesta, del modo siguiente. Supongo que se quiere hallar la diferencia de nivel entre los dos puntos A y D (fig. 154); lo primero se clava una mira en A, y se coloca el nivel en E; y (para no tener que atender á la diferencia del nivel aparente al verdadero) á igual distancia



sobre poco mas ó ménos, si se puede, v. g. en B, se clava otra mira ó estadal; se señalan los puntos  $a$  y  $b$  de nivel, se averiguan las alturas  $Aa$  y  $Bb$ , y se apuntan en un papel. Despues se pasa el nivel á otro punto F, dejando clavada la mira en B, y á igual distancia sobre poco mas ó ménos se coloca otra mira en C, se señalan los puntos de nivel  $e$ ,  $c$ , y se apuntan las alturas  $Be$ ,  $Cc$ . Se pasa el nivel á G, y con las mismas circunstancias que ántes, se averigua el valor de  $Cf$ ,  $Dd$ . Se suman los valores de  $Aa$ ,  $Be$ ,  $Cf$ , que representan las alturas de los primeros términos, se suman igualmente los valores de  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , que representan las de los segundos; se restan estas dos sumas, y el exceso espresará la diferencia de nivel: estando mas alto el primer término, si la suma de los primeros términos es menor; y el segundo, si la de estos lo es.

*De la medicion de las líneas.*

482 Para ejecutar cualquier operacion, es necesario primero medir una línea auxiliar, que se llama *base*. Los instrumentos que ordinariamente se emplean, son: una *cadena* ó *cuerda* de 100 pies (ó ménos), *jalones*, *piquetes* y un *mazo*.

Así, si se quiere medir la distancia de A á E (fig. 155), se colocarán los jalones B, C, D, en los puntos intermedios, de manera que mirando desde A á E queden todos cubiertos; despues de estar alineada ya la recta, se empieza la medicion con la cadena ó cuerda, procurando que esté bien tirante; y segun las veces que se coloque se deducirá el número de pies de que consta la línea dada.

483 Con sólo la cadena y los jalones se pueden resolver varios problemas.

1.º *Formar un ángulo recto, ó tirar una perpendicular á una línea dada.*

*Res. y Dem.* Tómense 12 pies ó unidades en la cadena; con los lados 3, 4 y 5, en que se descompo-



ne el 12, fórmese un triángulo, y el ángulo comprendido por los lados 3 y 4 será el ángulo recto pedido, y por consiguiente el un lado perpendicular al otro. Porque valiendo los lados del triángulo 3, 4 y 5, se tiene  $3^2+4^2=5^2$ ; luego el triángulo que se ha construido (335 esc. 2.<sup>o</sup>) es rectángulo.

*Esc.* Si se pidiese un ángulo de sesenta grados se formaría un triángulo equilátero.

484 Cuando se han de tirar muchas perpendiculares, como sucede cuando hay que medir algun terreno, ó se va á trazar un campamento, se lleva el aparato que se llama *cuerda de perpendiculares*, y consiste en un triángulo isósceles (fig. 156) ó equilátero con el cordel CE que divide en dos partes iguales la base AB y señala la direccion de la perpendicular.

Para hacer uso de ella se aplica la base AB sobre la línea á que se ha de tirar la perpendicular de modo que el punto E caiga sobre el punto de la línea en que se ha de levantar; y tirando del extremo M la cuerda EM, se tendrá la perpendicular pedida.

Si este aparato se hiciese de madera fuerte, se podria llamar *escuadra doble*, y serviria con mucha utilidad para tirar perpendiculares en puntos de líneas dadas, como para tirarlas desde puntos dados fuera de ellas.

485 2.<sup>o</sup> *Medir una línea inaccesible.*

*Res. y Dem.* Sea AB (fig. 157) la línea inaccesible, á causa del rio que la atraviesa; levántese en su extremo B una perpendicular BL; divídase en dos partes iguales en H, y clávese en este punto un piquete; levántese en L la perpendicular indefinida LD; búsquese el punto D, desde el cual tirando una visual por H vaya á parar al punto A, y la línea LD será igual á la distancia AB que se pedia.

Porque los triángulos ABH, HLD, son rectángulos en B y L, y tienen BH=HL por construcción, y los ángulos en H iguales por opuestos al vértice; luego estos triángulos son iguales, y dan AB=LD.



486 También se pueden medir las alturas accesibles é inaccesibles por su pie. Así, si se quiere medir la torre AB (fig. 158), se plantará bien verticalmente un jalon EC; á alguna distancia de este jalon, se plantará otro DF, de manera que se pueda ver el extremo A de la torre por un rayo visual FEA que rase con el extremo del piquete. Mírese también un punto de la torre tal como G por un rayo visual FG que pase por H, de manera que  $CH=DF$ .

Hecho esto, si se concibe la FG, será paralela é igual á la DB, y se tendrán los dos triángulos semejantes AGF, EHF, que dan  $FH:HE::FG:AG$ ; y como los tres primeros términos de esta proporción son conocidos, porque se pueden medir, se sigue que si al cuarto AG se añade la parte GB que está debajo de la línea GF, que también se puede medir, se tendrá la altura AB de la torre ó de cualquier otro objeto.

*Esc.* Si la torre fuese inaccesible por su pie, se mediria primero por el método anterior la distancia inaccesible BC ó BD, y se ejecutaria lo demás como se acaba de manifestar.

#### *De la medicion de los ángulos.*

487 Para medir los ángulos sirven muchos instrumentos, á saber, la *plancheta*, *grafómetro*, *brújula*, *teodolito*, *cuadrantes de círculo*, *círculos repetidores*, y *recipiángulos*. En el papel se trazan y miden los ángulos con un semicírculo ACB graduado (fig. 159), que se coloca de modo que el centro O caiga en el vértice del ángulo, y sobre uno de los lados el diámetro del mismo círculo. De manera que si colocado sobre el ángulo BOD, hallamos que OD cae sobre la línea que señala  $45^\circ$ , diremos que este es el valor de dicho ángulo. Para que en uno de estos semicírculos se pudiesen trazar medios grados, se necesitaria que fuese de un radio bastante grande; y si se quisiesen trazar hasta minutos, seria muy embarazoso el uso del instrumento. Para evitar esto se ha ideado un medio

Y T. I.



sencillo, para obtener los ángulos con instrumentos de una regular magnitud.

488 Para esplicarle, sea ACB (fig. 160) el borde ó el *limbo* de un instrumento, que esté dividido en partes que se distingan bien, v. g. en grados; tómese un número cualquiera de grados en el limbo, v. g.  $9^{\circ}$ ; tómese ahora otra pieza del mismo metal que el instrumento, y de una magnitud igual á la de los  $9^{\circ}$  que se tomaron, la cual se dividirá en 10 partes iguales, esto es, en una mas que las que se tomaron en el instrumento; de consiguiente, cada espacio de esta pieza (que es lo que se llama *núñez*) vale  $\frac{9}{10}$  de grado ó 54 minutos; y la diferencia de una division del *núñez* á una del *limbo*, ó á un grado, valdrá 6'. La pieza donde está el *núñez* se aplica sobre el limbo, y jira al rededor del centro del instrumento (ó al contrario permanece fijo el *núñez* y jira el limbo); la primera division del *núñez*, tiene por lo regular una *flor de lis*, y se llama *línea de fe*; esta se hace que coincida con la division  $0^{\circ}$  ó  $180^{\circ}$  en jeneral, ó sobre otra graduacion cualquiera del limbo; y la magnitud de un ángulo se aprecia por lo que se separa la *línea de fe* de dicha graduacion. Ahora, si la *línea de fe* coincide exactamente con una division del limbo, el valor del ángulo será el número de grados comprendido desde cero hasta dicha *línea*; pero si la *línea de fe* cae entre dos divisiones del limbo, el ángulo pedido valdrá un cierto número de grados, y una parte de grado que se valúa por la regla siguiente: véase la division del *núñez* que mas coincide con una del limbo; cuéntense los espacios del *núñez* desde la *línea de fe* hasta la que coincide con la del limbo; multiplíquese el número de espacios hallado por la diferencia 6' (en nuestro caso, ó por lo que valga segun otra division) que hay entre el espacio del limbo al del *núñez*; y el producto serán los minutos que se deberán añadir al número de grados hallado.

Con un ejemplo se entenderá bien esta regla y su demostracion. En efecto, si se quiere averiguar



el valor del ángulo AOG, este valdrá el número de grados del limbo comprendido desde A hasta  $m$  (que aquí son 3), y además la parte  $mG$ ; ahora, la línea del núñez que mas concurre con la del limbo, es la que pasa por B; y multiplicando los seis espacios del núñez que hay desde OG hasta B por  $6'$ , el producto  $36'$  serán los que se deben añadir á los  $3^\circ$  hallados; por lo que, el ángulo AOG vale  $3^\circ 36'$ . Porque si la línea del núñez que coincide con la del limbo fuese la primera de aquel, el espacio  $mG$  valdria una vez la diferencia de los espacios del limbo y del núñez, esto es,  $6'$ ; si fuese la segunda, el dicho espacio valdria  $12'$  ó  $2 \times 6'$ ; si fuese la tercera valdria  $18'$  ó  $3 \times 6'$ , y así sucesivamente; luego siendo la sexta, el espacio  $mG$  valdrá  $6 \times 6' = 36'$ , L. Q. D. D.

489 Para averiguar los ángulos que forman entre sí tres puntos que se hallan sobre el terreno, se emplea jeneralmente la plancheta (fig. 161); sobre el tablero se estiende un pliego de papel, se señala el punto A adonde corresponde el vértice Q del ángulo del terreno; por las cerdas  $t$ , de la regla FG que se llama *alidada*, se dirijen visuales á los otros puntos C y B, y estas visuales se señalan con un lapicero sobre el papel, donde queda formado el ángulo  $bAc$ , igual al que forman los tres puntos B, Q, C, del terreno; y midiendo este ángulo con el semicírculo, se tendrá el que se deseaba sobre el terreno.

490 Por lo regular, lo que se intenta buscar es el ángulo que forman dichos objetos, suponiéndolos proyectados en un plano horizontal que pase por el vértice; entónces es esencial que se coloque el tablero en una situacion horizontal por medio de los niveles; y como en este caso puede ocurrir el que los objetos B y C no se vean por el espacio que ocupan las cerdas, es preferible á la alidada un anteojo A (fig. 162), el cual además de tener la circunstancia de poder bajar y subir la puntería cuanto se necesite, reúne la ventaja de distinguir los objetos con claridad y á mayor distancia.



491 Otro de los instrumentos que sirven para medir los ángulos es la brújula (fig. 163).

Su construcción y uso estriban en que las agujas tocadas á la piedra iman, se dirijen hácia el norte; y si colocada en un paraje se mira á un objeto cualquiera, y se ve el ángulo que forma la aguja NS con la línea AB; y luego se mira á otro objeto y se determina el mismo ángulo, la diferencia entre estos dos ángulos observados, será el ángulo que forman dichos objetos, si la aguja ha permanecido en ambos casos á un mismo lado de la línea AB.

Si al enfilar el otro objeto, la aguja pasase al otro lado de la línea AB, el ángulo buscado estaria representado por la suma de los dos observados.

492 De todos los instrumentos que se han inventado para las operaciones jeodésicas, los mas á propósito son el teodolito, y el círculo repetidor de Bordá.

La primera operacion que se practica es nivelar el teodolito, y tiene la ventaja de dar á un mismo tiempo y con un solo anteojo (aunque algunos tienen dos), los ángulos horizontales y de elevacion.

493 Como la division de los instrumentos no puede llegar al grado de exactitud del cálculo y que se requiere en algunas ocasiones, se ha ideado el círculo repetidor, el cual tiene la propiedad de que en vez del ángulo que se quiere averiguar, se puede tomar el duplo, el triplo, el cuádruplo, &c. y dividiendo despues por 2, por 3, por 4, &c., se tendrá el ángulo pedido con la mitad, tercera, cuarta, &c. parte del error que se debe sospechar en el instrumento.

*Medir alturas y distancias accesibles é inaccesibles, y modo de levantar los planos topográficos.*

494 Cuando se puede uno acercarse al pie de una altura AB (fig. 164), y en su plano se puede medir una base, se elije esta de manera que sea sobre poco mas ó ménos igual con la altura por medir; se coloca el instrumento en su extremo, y con él se mide el



ángulo de elevacion AFG; con lo cual el rayo visual AF, el horizontal GF, y la parte AG de la altura, formarán un triángulo rectángulo, en que se conoce ademas del ángulo recto en G, uno de los ángulos agudos, y el cateto FG que es igual con la base medida BD; luego (465) hallaremos el lado AG, diciendo

$$R:\text{tang. AFG}::GF=BD:AG;$$

y añadiendo á esto la parte BG, se tendrá toda la altura AB.

495 Cuando hay algun obstáculo que impida el acercarse al pie como en la (fig. 165), y se puede medir sin embargo una base AB en el plano de su pie, se procede del modo siguiente: colocado el instrumento en A, se toma el ángulo de elevacion CAD; y colocado en B el ángulo CBA; con lo cual tenemos en primer lugar un triángulo CAB, en que conocemos el ángulo en B y el lado AB, porque los hemos medido, y el ángulo CAB por ser suplemento del medido CAD, y en virtud de lo dicho (470) hallaremos el lado CA. Conocido este, queda determinado en el triángulo rectángulo CAD la hipotenusa y un ángulo, y podremos hallar (466) el cateto CD que es la altura que deseamos.

496 Muchas veces no se sabe si la base está ó no en el mismo plano del pie de la altura, y aun el que no se vea el pie de la altura por medir: en este caso es un poco mas complicada la operacion.

Supongamos que se quiera medir la altura inaccesible CD (fig. 166); mediremos donde el terreno lo permita una base AB; en el extremo A se colocará el instrumento, y se tomará el ángulo horizontal BAD y el vertical CAD; colocando en el otro extremo B el instrumento, se tomará el ángulo horizontal DBA, y el vertical CBD. Hecho esto, el triángulo DAB nos dará (470) el valor de uno cualquiera de los lados, tal como AD; con lo cual en el triángulo rectángulo CAD se conocerá el cateto AD, y el ángulo CAD; luego (465) nos dará el valor de CD, que es lo que se pedia.



497 Cuando la distancia que se intenta medir es accesible, se ejecuta conforme hemos dicho se mide una base; cuando sólo es accesible por uno de sus extremos, se procederá del modo siguiente.

Supongamos que sea la BC (fig. 167) la línea que se quiera medir; en este caso se medirá una base CA desde el extremo accesible C, y en sus extremos mediremos los ángulos BCA, CAB, y la Trigonometría (470) nos dará el lado BC. Para hacer esta operación con la plancheta, se coloca este instrumento de manera que su centro corresponda sobre el punto C del terreno; después se tira en el papel una línea *ca* en la dirección de la base, de una magnitud tal que contenga tantas partes de una escala cualquiera, como veces está contenida la unidad de medida en la base CA; después se dirige la visual por C al punto B, y se tira la *cb* indefinida; después se pone el instrumento en A, y colocado el tablero de modo que la base *ca* se halle en la dirección AC de la base medida, se dirige la visual al punto B, se tira la *ab*, y el número de partes que *cb* contenga en la misma escala, será el número de unidades que contenga la BC de la medida con que se midió la base CA.

498 Si la distancia CD (fig. 168) es de todo punto inaccesible, mediremos una base AB que sea próximamente paralela é igual con la distancia por medir CD. En A tomaremos los ángulos CAB, DAB, y pasando el instrumento á B tomaremos los ángulos CBA, DBA, y tendremos conocido en el triángulo CAB el lado AB y los ángulos adyacentes; luego la Trigonometría (470) dará el valor del lado AC. En el triángulo DAB se conoce igualmente el lado AB y los ángulos adyacentes; luego podremos hallar el valor del lado AD. Ahora, en el triángulo CAD tenemos conocidos los lados CA, AD, por lo que acabamos de decir, y el ángulo CAD que forman, por ser la diferencia entre los dos ángulos observados CAB, DAB; luego la Trigonometría (469) dará la distancia CD que buscábamos.



499 Para hacer esta operacion con la plancheta, se coloca el instrumento en uno de los extremos de la base, tal como A, y despues de tirada la  $ab$  en la direccion de ella, se dirijen las visuales á los puntos C, D, y se tiran en el papel las  $ac$ ,  $ad$ ; despues se pasa el instrumento á B y se tiran las  $bc$ ,  $bd$ , en la direccion de las visuales dirigidas á los puntos C y D; y tomando con un compas la distancia  $cd$ , y averiguando su valor en la misma escala en que se tomaron las partes de  $ab$ , que espresaban las unidades de medida de AB, se tendrá el número de unidades que contiene la CD.

500 Se llama *mapa ó plano topográfico* el dibujo en que están representados todos los objetos de un pais de corta estension. Para manifestar cómo se consigue esto, supondrémos que se nos dé un terreno, en el que se hallan los objetos C, D, E, F, G, H, K, L (fig. 169), y que se quiere sacar un dibujo en que los objetos guarden la misma posicion que tienen en el terreno.

Para esto, lo primero que se ejecuta es medir una base AB, desde cuyos extremos se vea el mayor número de objetos posible; se colocará el instrumento en A, y se dirijirán visuales á los puntos C, D, E, F, &c. que se ven desde ambos extremos de la base; se pasará el instrumento á B, y se dirijirán visuales á los mismos objetos; y tendrémos que si el instrumento era la plancheta, el concurso de las visuales en el papel determinará los objetos; y sino lo es, en los extremos  $a$  y  $b$  de una línea  $ab$ , de la misma magnitud que la base medida, se forman con un semicírculo, los ángulos  $cab$ ,  $dab$ , &c. del mismo número de grados que los ángulos observados CAB, DAB, &c. con lo cual los lados de estos ángulos prolongados, determinarán por su concurso los puntos  $c$ ,  $d$ , &c. Tambien se pudieron calcular por Trigonometría los lados  $ac$ ,  $ad$ , &c., pero esto es mas complicado.

Para fijar la posicion de los puntos K, H, L, que no se ven desde ambos extremos de la base AB, se



elige una nueva base que se procura tenga sus extremos en dos puntos fijos ya, y con relacion á esta base se fijan los demas. Aquí, para fijar el K elejiremos por nueva base la distancia FG, y colocando en sus extremos el instrumento, mediremos los ángulos KFG, KG $\hat{F}$ , que nos fijarán la posicion del punto K. Para fijar los puntos H, L, elejiremos por base la EF, y así se continuaria si quedasen mas puntos por determinar.

FIN DEL TOMO PRIMERO.









Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.













VANDELI



COMPENDIO

DE

MATEMATICAS



I



51 (035)  
MAR  
COM

