JUNTA PARA AMPLIACIÓN DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

Anales: Tomo XVII Memoria 5.ª

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LAS REDES DE HOMOGRAFÍAS QUE CONTIENEN LA IDENTIDAD EN E_n. GENERALIZACIÓN DE UN TEOREMA DE WEIERSTRASS

POR

OLEGARIO FERNÁNDEZ BAÑOS

MADRID
1918

4193

JUNTA PARA AMPLIACIÓN DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

Anales: Tomo XVII Memoria 5.ª

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LAS REDES DE HOMOGRAFÍAS QUE CONTIENEN LA IDENTIDAD EN E_n. GENERALIZACIÓN DE UN TEOREMA DE WEIERSTRASS

POR

OLEGARIO FERNÁNDEZ BAÑOS

MADRID
1918

Establecimiento tipográfico de Fortanet, Libertad, 29.—Teléfono, 991.

Memoria que presenta a la Junta para ampliación de estudios e investigaciones científicas *D. Olegario Fernández Baños, pensionado por la misma para estudiar Geometria superior en Suiza e Italia.*

1. El presente estudio sobre las redes de homografías generales del tipo [1, *Ha*, *Hb*] en el espacio E_n, del que hicimos mención al terminar otro, titulado «Contribución al estudio de los sistemas lineales de homografías en E_n», puede considerarse como una continuación del mismo, si bien con un punto de vista diverso, por tratarse de llegar a resultados de otro orden de ideas en el caso concreto en que se trate de una red de homografías [1, *Ha*, *Hb*]. Como nuestro fin principal es la generalización del llamado *teorema de Weierstrass* sobre las homografías en E_n, creemos necesario indicar rápidamente algunos conceptos sobre el particular.

Weierstrass estudió la condición necesaria y suficiente para que dos formas bilineales puedan transformarse entre sí. Este teorema de carácter analítico, en el que, como es sabido (*), se consideran los divisores elementales de Weierstrass, ha sido estudiado por Segre, que le ha dado una traducción geométrica, puesto que el par de formas bilineales no es otra cosa que un par de homografías.

Este geómetra, pues, ha demostrado que una homografía general viene perfecta y unívocamente determinada por sus *espacios fundamentales* y sus *invariantes absolutos*, y, por tanto, que «la condición necesaria y suficiente para que dos homografías generales sean proyectivamente idénticas es que tengan la misma característica y los mismos invariantes absolutos». Continuación de tal estudio es la clasificación de las homografías dada por dicho geómetra, que considera completamente el caso en

---

(*) Bertini: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, capitulo 4.° Pisa.

que existan puntos o espacios *múltiples* en los espacios fundamentales.

Predella, partiendo del teorema enunciado, llega a la demostración del teorema de Weierstrass, y estudia el caso de puntos dobles infinitamente próximos.

Como nosotros sólo trataremos del caso general en que la característica de la homografía sea cero, o sea, del caso en que los puntos dobles sean los vértices de la pirámide fundamental del sistema, el teorema de Segre, «la condición necesaria y suficiente de transformabilidad de dos homografías de E_n es que sus espacios dobles tengan el mismo número de dimensiones y que posean los mismos invariantes absolutos», se simplifica grandemente, puesto que nos basta, para la *identidad proyectiva* de las homografías, que tengan los mismos puntos dobles con los mismos invariantes absolutos, y para la transformabilidad, que tengan los mismos invariantes absolutos y que se hagan corresponder biunívocamente los puntos dobles de ambas homografías.

Esto supuesto, consideremos un haz de homografías $[1, Ha]$ que contenga la identidad. Como ya sabemos (*) que el problema de hallar las homografías degeneradas de dicho haz equivale al de averiguar los puntos dobles, ya de una de sus homografías distinta de la idéntica, ya del haz en cuestión, resulta que en el haz $[1, Ha]$ existen $n + 1$ puntos dobles para todas sus homografías, los cuales pueden considerarse, para mayor sencillez, como vértices de la pirámide fundamental de referencia. Es claro, pues, que a un punto P de E_n corresponde en el haz $[1, Ha]$ una recta p que pasa por P, y, por tanto, fijada esta recta, queda determinado el haz $[1, Ha]$; mas como las rectas que pasan por P y están en E_n son ∞^{n-1}, resulta que, dados los $n + 1$ puntos dobles, nos bastan $n - 1$ parámetros arbitrarios para definir el haz $[1, Ha]$; y, por tanto, el número de invariantes absolutos del haz $[1, Ha]$ de homografías es $n - 1$ (uno menos que cuando se trata de una de sus homografías diversa de la idéntica).

(*) *Contribución al estudio de los sistemas lineales de homografías en* E_n.

2. Expuestas estas breves nociones, que utilizaremos más adelante, recordemos que el lugar de los puntos dobles de un haz $[Ha, Hb]$ de homografías generales en el espacio E_2 es una cúbica de género uno, C_3^1 (cúbica general), y la equivalencia de esta cuestión con la de las homografías degeneradas de la red $[1, Ha, Hb]$ (*). Dado un par de valores arbitrario a λ y μ (λ y μ son los parámetros del haz), queda definida una homografía cuyos puntos dobles son los vértices de un triángulo, y, por consiguiente, sobre dicha cúbica existe una serie simplemente infinita de ternas de puntos, las cuales constituyen una involución de primera especie g_3^1. Análogamente, sobre la cúbica de las homografías degeneradas de la red $[1, Ha, Hb]$ resulta la misma involución g_3^1, y, por tanto, tenemos el ente $[C_3^1, g_3^1]$.

Análogamente, considerando la cuestión en el espacio E_3, a la red $[1, Ha, Hb]$ corresponde una séxtica C_6^3 de género 3, y sobre ella una involución g_4^1, cuyos grupos de cuatro puntos corresponden a los puntos dobles de cada homografía, definida por un sistema de valores de λ, μ, o de cada haz del tipo $[1, Hm]$.

En general, dada la red de homografías $[1, Ha, Hb]$ en el espacio E_n, existe, y queda definida en el mismo, una curva de orden $\frac{n(n+1)}{2}$ y género $\frac{n(n-1)}{2}$, y sobre esta curva una involución g_{n+1}^1, o sea, *la red* [1, Ha, Hb] *define un ente*

$$\left[C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}},\ g^1_{n+1} \right],$$

utilizando para mayor brevedad este simbolismo.

Un resultado análogo se obtiene considerando la cuestión para los sistemas lineales ∞^k ($k > 2$) de homografías que contengan la identidad, problema mucho más complicado que el

(*) Considerar los puntos dobles de la red $[1, Ha, Hb]$ en E_2 no tiene sentido, porque a un punto cualquiera corresponde todo el plano.

que nos proponemos resolver, v. gr.: el complejo [1, *Ha*, *Hb*, *Hc*]; pero limitándonos por el momento al caso en que el lugar de puntos dobles es una curva, se presenta el problema inverso:

Dado en E_n *el ente* $\left[C_{\frac{(n+1)n}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}},\ g_{n+1}^{1}\right]$, *¿resulta definida una y sólo una red* [1, Ha, Hb] *de homografías? ¿Existe un número finito o infinito de dichas redes?* (*)

3. Presentado así el problema, veamos cómo lo resuelve Bonola (**) para los espacios E_2 y E_3, dando una buena prueba de ingenio en el segundo caso, del que indicaremos las líneas generales solamente, por razón de brevedad. Al aplicar el mismo procedimiento a E_4 se observa inmediatamente la gran dificultad inherente al método, y, por consiguiente, seguiremos otra vía indicada por el fecundó principio de la conservación del número, como hemos hecho en el problema de hallar el lugar de los puntos dobles de la red de homografías [1, *Ha*, *Hb*].

Es claro que las homografías inversas en E_2 de la red [1, *Ha*, *Hb*] constituyen otra red, que designaremos $[1, Ha, Hb]^{-1}$, de homografías entre planos constituídos por rectas, es decir, que en una homografía, v. gr.: Ha^{-1}, a una recta corresponde otra recta. Aplicando a esta nueva red las consideraciones corre-

---

(*) Obsérvese que la g_{n+1}^{1}, cuyo estudio general puede verse en Enriques, *Teoría geom.*, vol. 1, pág. 169, formada por los grupos de $n+1$ puntos dobles de las homografías del haz [*Ha*, *Hb*] o de la red [1, *Ha*, *Hb*], no es *general*, sino *especial*, porque está contenida en una g_{n+1}^{2}. En efecto; a los grupos de $n+1$ puntos situados sobre $C_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ corresponden en su curva (de homografías degeneradas) transformada birracionalmente, los grupos de $n+1$ puntos en que la encuentran las rectas de un haz; y estos grupos definen sobre esta curva plana una g_{n+1}^{1}, contenida en la g_{n+1}^{2} que sobre ella misma determinan las ∞^2 rectas de su plano. Sobre la cúbica C_3^1 no existen g_3^1 especiales, puesto que es de género 1.

(**) *Rend. Inst. Lombardo.* Milano, 1908. Ser. II, vol. XLI, pág. 560.

lativas de los §§ 2 y 6 (*) se obtienen inmediatamente otros tantos resultados correlativos, y en particular el siguiente

TEOREMA. *El lugar de las rectas dobles de una red de homografías* $[1, Ha, Hb]^{-1}$ *o de uno cualquiera de sus haces* $[Ha, Hb]^{-1}$ *es un haz general de tercera clase* Γ^1_3.

A un punto P de la cúbica C^1_3 (§ 6), corresponde en la red $[1, Ha, Hb]$ una recta p que lo contiene, y en las homografías Ha, Hb los puntos P_a, P_b situados sobre p. A la recta p corresponden en las homografías Ha^{-1}, Hb^{-1} dos rectas p_a, p_b, que pasan por P, y en la homografía idéntica se corresponde consigo misma; por consiguiente, a la recta p corresponde en la red $[1, Ha, Hb]^{-1}$ un haz de rectas que pasan por P; mas como las rectas cuyas correspondientes en la red $[1, Ha, Hb]^{-1}$ pasan por un punto, son dobles en dicha red, o sea, son rectas del haz Γ^1_3, resulta que *las rectas de* C^1_3 *pertenecen a* Γ^1_3, *y recíprocamente.*

Tenemos, pues, que por un punto cualquiera P de C^1_3 pasan tres rectas de Γ^1_3: una es la recta que le corresponde en la red $[1, Ha, Hb]$, y las otras dos son las que lo unen con los otros dos puntos P_1 y P_2 dobles en el haz del tipo $[1, Hm]$ que tiene P como doble; o sea, dada la involución g^1_3 sobre la curva C^1_3, se obtiene Γ^1_3, considerando cada terna de puntos P, P_1, P_2, de dicha involución g^1_3, uniendo estos puntos entre sí, y trazando por cada uno de ellos la recta que le corresponde en la red $[1, Ha, Hb]$.

TEOREMA DE BONOLA. *Si existe una red* $[1, Ha, Hb]$ *de homografías correspondientes al ente* $[C^1_3, g^1_3]$, *dicha red es única.*

Sean, en efecto, A_1, A_2, A_3 y B_1, B_2, B_3, dos grupos de la g^1_3; P_1, P_2, dos puntos pertenecientes a un tercer grupo, y P, la tercera intersección de la recta $p = P_1P_2$ con la cúbica determinada perfectamente por dichos nueve puntos. Una red que corresponda al ente $[C^1_3, g^1_3]$ debe contener el haz $[1, Ha]$ de homografías, para el cual los puntos A_1, A_2, A_3 son dobles, y al punto P corresponden los de la recta p; y debe contener tam-

(*) *Contribución al estudio de los sistemas lineales de homografías en* E_n

bién el haz $[1, Hb]$, en el cual son dobles B_1, B_2, B_3, y al punto P corresponde la recta p. Estos dos haces determinan, pues, la única red $[1, Ha, Hb]$ que corresponde, por consiguiente, al ente $[C_3^1, g_3^1]$.

A un ente $[C_3^1, g_3^1]$ *formado por una cúbica plana arbitraria* C_3^1 *y una involución* g_3^1, *también arbitraria sobre dicha curva, corresponde siempre una red de homografías que contiene la identidad.*

En efecto; la variedad de las redes del tipo $[1, Ha, Hb]$ es ∞^{12} (*); las cúbicas planas son ∞^9 y sobre cada una de ellas existen ∞^3 g_3^1; por tanto, la variedad de entes $[C_3^1, g_3^1]$ es ∞^{12}.

Por otra parte, a cada una de las ∞^{12} redes corresponde un $[C_3^1, g_3^1]$ y uno solo, mientras a dos redes diversas corresponden dos $[C_3^1, g_3^1]$ distintos. Esto prueba que existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de estas dos variedades, por lo cual, a un $[C_3^1, g_3^1]$ corresponderá siempre una red y sólo una.

Hemos dicho que sobre una cúbica plana general existen ∞^3 involuciones g_3^1, las cuales, como ya sabemos, no son especiales, puesto que sobre la cúbica plana de género 1 no existen tales involuciones. Tal afirmación se justifica recordando el siguiente teorema general:

Los grupos generales de n *puntos sobre una curva plana de género* 1 *son* ∞^{n-1}, *es decir, forman un sistema lineal con* $n - 1$ *parámetros independientes*. En nuestro caso, los grupos de tres puntos sobre la cúbica en cuestión son ∞^2. Por tanto, como la g_3^1 viene determinada por dos ternas distintas, resultan seis constantes; pero como las ternas son arbitrarias dentro de la g_3^1, tenemos dos constantes menos; y, por último, en virtud del teorema indicado disminuye en una unidad el número de las constantes arbitrarias, y quedan tres correspondientes a las ∞^3 involuciones g_3^1, como habíamos afirmado.

De lo dicho se infiere también que, dado arbitrariamente el ente $[C_3^1, g_3^1]$, para construir la red $[1, Ha, Hb]$ que le corres-

(*) Pues el número de planos de E_8 que pasan por un punto son $\infty^{(8-2)(2-0)} = \infty^{12}$. Bertini: op. cit., pág. 31.

ponde basta tomar dos ternas A_1, A_2, A_3 y B_1, B_2, B_3 de la g^1_3, y una recta p que una dos puntos P_1, P_2 de otra terna, y fijar las homografías Ha, Hb que tengan como dobles A_1, A_2, A_3 y B_1, B_2, B_3, respectivamente, y hagan corresponder al punto P (ulterior intersección de P_1P_2 con la cúbica) los puntos P_1 y P_2, respectivamente.

Puede añadirse que el teorema indicado es todavía mucho más general, y para recordarlo bien y aplicarlo con acierto, considérese en primer término una curva plana de género nulo, o sea *racional;* es claro que en virtud de la racionalidad, los grupos generales de n puntos sobre dicha curva son los mismos que sobre la recta, o sea, son completamente arbitrarios los puntos de un grupo equivalente cualquiera, y por tanto son ∞^n. Si la curva es de género 1, tenemos la suma de las n integrales abelianas, de que hablaremos más adelante, las cuales por ser de suma cero, determinan una constante, y, por tanto, quedan ∞^{n-1}; o sea, tomando un grupo general equivalente, pertenece a una involución g^{n-1}_n. Si el grado es 2, la suma de las integrales abelianas se toma dos veces, quedan así determinadas dos constantes, y nos resulta el sistema lineal de ∞^{n-2}, con tal que el grupo sea siempre general. El raciocinio se continúa hasta el género p, no siendo p mayor que n.

4. Procediendo análogamente en el espacio E_3 resulta el teorema correlativo del enunciado en el § 7 de nuestro citado estudio.

Teorema. *El lugar de los planos dobles de una red de homografías* $[1, \mathrm{Ha}, \mathrm{Hb}]^{-1}$ *o de uno cualquiera de sus haces del tipo* $[\mathrm{Ha}, \mathrm{Hb}]^{-1}$ *es un haz tangencial general de 6.ª clase y género* 3, K^3_6.

Los planos correspondientes a los puntos de una recta r, en la red $[1, Ha, Hb]$, pertenecen a una desarrollable cúbica, ψ_3, la cual se descompone solamente en el caso en que r encuentra a la séxtica C^3_6. En particular, si r es trisecante de C^3_6, la ψ_3 se reduce a tres haces de planos de aristas coplanarias, y el plano π de estas tres aristas corresponde a todos los puntos de la recta r. Resulta, pues, que π pertenece al haz K_6^3 y que r es la recta correspondiente a π; y que todo plano de K_6^3 contiene una trisecante de C_6^3, o sea, *las rectas correspondientes a los planos de* K_6^3 *son las trisecantes de* C_6^3, *y por las rectas correspondientes a los puntos de* C_6^3 *pasan tres planos de* K_6^3. Las trisecantes de C_6^3 forman una superficie reglada R_c^8, y las rectas por las cuales pasan tres planos de K_6^3 forman otra R_k^8 (*): ambas son de orden 8, y por cada punto de C_6^3 pasan tres rectas de R_c^8 y una de R_k^8; en cada plano de K_6^3 existen tres rectas de R_k^8 y una de R_c^8. Existe, pues, una correspondencia biunívoca y perspectiva entre R_k^8 y C_6^3; entre R_c^8 y la desarrollable K_6^3.

Sean r_1, r_2, r_3 las trisecantes de C_6^3 que parten de un punto P_1 de ella; p, la recta de R_k^8 correspondiente a P_1; P_2, P_3, P_4, los puntos que con P_1 son dobles en un haz de homografías del tipo [1, Hm] perteneciente a la red [1, Ha, Hb]. De los seis planos de K_6^3 que pasan por P_1, tres son los que proyectan desde P_1 las rectas P_2P_3, P_3P_4, P_4P_2: los otros tres pasan, respectivamente, por r_1, r_2 y r_3. Como, por otra parte, deben pasar por p tres planos de K_6^3, tendremos que los planos que pasan por r_1, r_2 y r_3, respectivamente, serán los planos pr_1, pr_2, pr_3. Por tanto:

La recta p *correspondiente al punto* P_1 *de* C_6^3 *es común a los tres planos de* K_6^3, *a los cuales corresponden las trisecantes de* C_9^3 *que pasan por* P_1. *Correlativamente; la recta* p *correspondiente a un plano* π *de* K_6^3 *pasa por los tres puntos de* C_6^3, *a los cuales corresponden las tres rectas de* R_c^8 *situadas en* π, lo cual nos da el procedimiento para construir la recta p correspondiente a un punto P_1 de C_6^3 en la red [1, Ha, Hb].

Esto supuesto, se demuestra inmediatamente otro análogo teorema de Bonola:

A todo ente [C_6^3, g_4^1] *corresponde siempre una red de homografías* [1, Ha, Hb]; *y esta red es única.*

Demostremos primero la segunda parte, o sea, que *si existe una*

(*) Bonola: loc. cit., 563.

tal red es única. En efecto; sean A_1, A_2, A_3, A_4 y B_1, B_2, B_3, B_4, dos grupos de la g^1_4, P un punto de C^3_6 y p la recta (única) de R^8_k que pasa por P. Con esto quedan perfectamente determinados dos haces [1, Ha], [1, Hb] que tienen como dobles A_1, A_2, A_3, A_4 y B_1, B_2, B_3, B_4, respectivamente, y que hacen corresponder al punto P la recta p. Por tanto, si existe una red correspondiente al ente [C^3_6, g^1_4], contendrá los haces [1, Ha] y [1, Hb], y, por consiguiente, será única, porque dichos haces sólo definen una.

Por otra parte, las redes [1, Ha, Hb] son ∞^{26}, como los planos de E_{15} que pasan por un punto. Las C^3_6 son ∞^{24}, y sobre cada una existen ∞^2 g^1_4 (porque estas g^1_4 son especiales): luego la variedad de las redes [1, Ha, Hb] y la variedad de los entes [C^3_6, g^1_4] tienen el mismo número de dimensiones. Pero como a toda red [1, Ha, Hb] corresponde un solo [C^3_6, g^1_4] y a dos redes diversas corresponden dos [C^3_6, g^1_4] distintos, queda demostrado el teorema.

5. Lo dicho patentiza la no pequeña dificultad de extender al espacio E_n el razonamiento de Bonola. Sigamos, pues, otro procedimiento. Consideremos, para fijar ideas, un espacio E_4, y en él una red de homografías [1, Ha, Hb] que contenga el E_3 del infinito como doble. Su expresión analítica será:

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= (\lambda a_{11} + \mu b_{11} - \rho)x_1 + \mu b_{12}x_2 + \mu b_{13}x_3 + \mu b_{14}x_4 + \mu b_{15}x_5 \\
y_2 &= \mu b_{21}x_1 + (\lambda a_{22} + \mu b_{22} - \rho)x_2 + \mu b_{23}x_3 + \mu b_{24}x_4 + \mu b_{25}x_5 \\
y_3 &= \mu b_{31}x_1 + \mu b_{32}x_2 + (\lambda a_{33} + \mu b_{33} - \rho)x_3 + \mu b_{34}x_4 + \mu b_{35}x_5 \\
y_4 &= \mu b_{41}x_1 + \mu b_{42}x_2 + \mu b_{43}x_3 + (\lambda a_{44} + \mu b_{44} - \rho)x_4 + \mu b_{45}x_5 \\
y_5 &= (\lambda a_{55} + \mu b_{55} - \rho)x_5
\end{aligned}\right\} \quad [1]$$

cuya línea de homografías degeneradas es

$$\begin{vmatrix}
\lambda a_{11} + \mu b_{11} - \rho & \mu b_{12} & \mu b_{13} & \mu b_{14} \\
\mu b_{21} & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mu b_{31} & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mu b_{41} & & & \lambda a_{44} + \mu b_{44} - \rho
\end{vmatrix} (\lambda a_{55} + \mu b_{55} - \rho) = 0 \quad [2]$$

Supongamos, por otra parte, que en el E_3 doble, a la red, $[1, Ha, Hb]_s$ subordinada sobre él, le corresponde una $[C_6^3, g_4^1]$ (*), y recíprocamente, que a la $[C_6^3, g_4^1]$ en cuestión le corresponde la red $[1, Ha, Hb]_s$ y ella sola.

Esto supuesto, otra red $[1, H_A, H_B]$ cualquiera que contenga la misma $[C_{10}^6, g_5^1]$ descompuesta en la forma dicha, conteniendo el mismo E_3 doble, tendrá la expresión analítica siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = (\lambda A_{11} + \mu B_{11} - \rho)x_1 + \mu B_{12} x_2 + \ldots\ldots + \mu B_{15} x_5 \\ y_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_5 = (\lambda A_{55} + \mu B_{55} - \rho)x_5 \end{array}\right\} \begin{array}{l}[3] \\ (**)\end{array}$$

donde las homografías Ha y Hb de coeficientes a y b de la red $[1, Ha, Hb]$ tienen los mismos elementos dobles que las H_A y H_B de coeficientes A y B en la red $[1, H_A, H^B]$.

La línea de las homografías degeneradas de $[1, H_A, H_B]$ representada por la ecuación

$$\begin{vmatrix} \lambda A_{11} + \mu B_{11} - \rho & \mu B_{12} & \mu B_{13} & \mu B_{14} \\ \mu B_{21} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu B_{31} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu B_{41} & & & \lambda A_{44} + \mu B_{44} - \rho \end{vmatrix} (\lambda A_{55} + \mu B_{55} - \rho) = 0 \quad [4]$$

será la misma que la [2].

Las ecuaciones [1] y [3] serán tales que, prescindiendo de los términos en que entra x_5, tendrán los mismos coeficientes; es decir, que los coeficientes A y B son los mismos que los a y b, respectivamente (donde no entra el subíndice 5).

(*) La cual será, por consiguiente, subordinada de la $[C_{10}^6, g_5^1]$ correspondiente a $[1, Ha, Hb]$ en E_4; es decir, que la C_6^3 forma parte de la C_{10}^6 y la g_4^1 nos da cuatro puntos de cada grupo de los de g_5^1.

(**) Esta expresión es de la misma forma que la [1].

Los segundos factores de las [2] y [4], igualados a cero, dan ecuaciones equivalentes, y, por tanto, $\frac{A_{55}}{a_{55}} = \frac{B_{55}}{b_{55}} = 1$.

Por último, por tener el mismo grupo de puntos dobles la Hb y la H_B, en las cuales son respectivamente iguales los coeficientes b y B en que no entra el subíndice 5, se verificará

$$\frac{B_{15}}{b_{15}} = \frac{B_{25}}{b_{25}} = \frac{B_{35}}{b_{35}} = \frac{B_{45}}{b_{45}} = \frac{B_{55} - \rho}{b_{55} - \rho} = 1.$$

Queda, pues, demostrada la identidad de las redes $[1, Ha, Hb]$ y $[1, H_A, H_B]$ en el caso particular en que tienen un mismo E_3 doble.

Aplicando el razonamiento expuesto al espacio E_n, previa la demostración para el E_{n-1}, resulta que en el caso particular de una red $[1, Ha, Hb]$ en E_n con un E_{n-1} unido, se verifica que:

Dada en el espacio $\mathrm{E_n}$ *una red de homografías* $[1, \mathrm{Ha}, \mathrm{Hb}]$ *con un* $\mathrm{E_{n-1}}$ *doble, le corresponde un ente* $\left[\mathrm{C}_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}}, \mathrm{g}_{n+1}^{1}\right]$ *perfectamente determinado; y recíprocamente, si dos redes* $[1, \mathrm{Ha}, \mathrm{Hb}]$, $[1, \mathrm{H_A}, \mathrm{H_B}]$ *corresponden a un tal ente* $\left[\mathrm{C}_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}}, \mathrm{g}_{n+1}^{1}\right]$, *dichas redes de homografías son proyectivamente idénticas.*

Ahora bien; en virtud del principio de la conservación del número, la correspondencia biunívoca entre las variedades de homografías $[1, Ha, Hb]$ y los entes $\left[C_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}}, g_{n+1}^{1}\right]$, en el caso particular considerado, en el cual el espacio E_n contiene un E_{n-1} doble, se extenderá al caso en que la red $[1, Ha, Hb]$ sea general. Para justificar esta extensión es preciso demostrar en primer término que, dado el ente $\left[C_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}}, g_{n+1}^{1}\right]$, le corresponde un número finito de redes $[1, Ha, Hb]$ de homografías. Esto se prueba fácilmente mediante el siguiente cómputo de constantes.

Las redes de homografías $[1, Ha, Hb]$ generales en el espacio E_n son las mismas que los planos que pasan por un punto en el espacio de $(n+1)^2 - 1$ dimensiones (como indica la representación de Stefano generalizada), o sea,

$$\infty^{[(n+1)^2-1-2][2-0]} = \infty^{2[(n+1)^2-3]}.$$

Las curvas planas de orden $n+1$ y género $\frac{n(n-1)}{2}$ son $\infty^{\frac{(n+2)(n+3)}{2}-1}$, de las cuales es preciso disminuir el número de las homografías planas (porque transforman el plano en sí mismo y una de estas curvas en otra), que son ∞^8, con lo cual quedan $\frac{(n+2)(n+3)}{2} - 9$ constantes arbitrarias. La g^1_{n+1}, por fijar un punto en el plano dicho (o sea en el de las homografías degeneradas), equivale a otras dos constantes (*). La $g^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}}$ definida sobre la línea de las homografías degeneradas, la cual corresponde a las secciones hiperplanas de la $C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}}$ en el espacio E_n, nos da otras $\frac{n(n-1)}{2}$ constantes.

Por último, las homografías del espacio E_n son $\infty^{(n+1)^2-1}$ que suministran otras $[n+1]^2 - 1$ constantes. En total,

$$\frac{(n+2)(n+3)}{2} - 9 + 2 + \frac{n(n-1)}{2} + (n+1)^2 - 1 =$$
$$= 2[n^2 + 2n - 2] = 2[(n+1)^2 - 3],$$

que es precisamente el número de los parámetros arbitrarios de las redes $[1, Ha, Hb]$.

(*) Esto equivale a decir que la G^1_{n+1} es especial, o sea, contenida en una G^2_{n+1}, y que, por tanto, fija un punto del plano.

Resta todavía la duda de si la correspondencia biunívoca entre las redes y los entes $\left[C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}}, g^{1}_{n+1}\right]$, en el caso particular en que existía un E_{n-1} doble, será debida a la pérdida de soluciones en el paso a través de la continuidad, del caso general de una red $[1, Ha, Hb]$ al caso particular dicho, pues entonces, dado un ente $\left[C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}}, g^{1}_{n+1}\right]$, le correspondería un número finito de redes generales $[1, Ha, Hb]$ de homografías. Tal duda desaparece observando el paso dicho en el plano, y en el espacio, donde no ha resultado tal excepción, además de que, por otra parte, el mismo procedimiento de *degeneración* o *descomposición* empleado indica que no se pierden soluciones. Por último, los términos mismos en que se plantea el problema, que nos hemos propuesto, en el caso general en que las homografías sean simplemente degeneradas excluye la duda de la posibilidad de las soluciones múltiples.

Tenemos, pues, que la correspondencia biunívoca entre las redes generales $[1, Ha, Hb]$ y los entes $\left[C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}}, g^{1}_{n+1}\right]$ dichos, nos conduce a saber un modo de determinar unívocamente una red de homografías que contenga la identidad, y, por tanto, a enunciar el siguiente

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos redes de homografías generales en* E_n, *que contengan la identidad, sean proyectivamente idénticas, es que tengan la misma línea de elementos dobles, y la misma involución* g^{1}_{n+1} *especial sobre ella, o sea, el mismo ente* $\left[C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}}, g^{1}_{n+1}\right]$.

6. Como este teorema no viene enunciado de modo que se ponga en evidencia la condición necesaria y suficiente de transformabilidad de dos redes de homografías que contengan la identidad, veamos cómo puede dársele forma en cierto modo análoga

a la traducción geométrica dada por Segre para el caso de dos homografías.

A este fin, considérese en primer término que el ente

$$\left[C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}},\ g^{1}_{n+1} \right]$$

equivale al ente constituído: 1.°, por la curva $C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{n+1}$ plana general, llamada de las homografías degeneradas, que es la transformada birracionalmente de la $C^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}}$; 2.°, por la g^{1}_{n+1} especial sobre esta curva plana, y 3.°, por la $g^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}}$ ya indicada anteriormente.

La transformación proyectiva de una curva plana general C_{n+1}, (correspondiente a una red determinada, v. gr.: $[1, Ha, Hb]$), en otra curva C'_{n+1}, también plana general (que se considere como correspondiente a otra red $[1, H_A, H_B]$), implica un cierto número de invariantes determinados. Teniendo en cuenta el número de parámetros esenciales de una *curva plana general* de orden $n + 1$, el número de las homografías planas y el de las homografías del espacio E_n, sin necesidad de repetir el cálculo de constantes hecho al final del párrafo anterior, resulta que para la transformación proyectiva el número de invariantes de la curva plana general C_{n+1} es el número

$$\frac{(n+2)(n+3)}{2} - 9 = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 8.$$

Por otra parte, la involución especial g^{1}_{n+1} aporta otros dos invariantes, porque fija un punto del plano de dicha curva (vértice del haz de rectas que la corta en la involución g^{1}_{n+1}), el cual debe transformarse en el punto que representa el mismo papel respecto a la curva de las homografías degeneradas de la segunda red $[1, H_A, H_B]$, en la que debe transformarse la $[1, Ha, Hb]$ dada.

Consideremos, finalmente, las involuciones $g_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sobre dichas curvas de las homografías degeneradas. Para esto recuérdese de la teoría general de las involuciones sobre las curvas planas, que si se tiene una g_h cualquiera sobre una curva plana de género 1, dicha g_h (que no es mas que un cierto sistema lineal de grupos de h puntos sobre una curva dada, v. gr.: $f=0$), puede considerarse como obtenida mediante la intersección de la curva $f=0$ con un sistema de curvas, todas de un cierto grado. A estos grupos de puntos (que se llaman *grupos de equivalencia* de la g_h) se refiere el teorema de Abel. «*La suma de las* m n *integrales abelianas de primera especie del sistema de puntos de intersección de una curva* f $=0$ *con las de un haz* $\varphi+\lambda\psi=0$ *de curvas de orden* m, *es siempre nula*» (*).

Según este importante teorema, cuyo inverso demostró Jacobi (**), una g_n^1 sobre una curva algébrica general plana viene unívocamente determinada por la suma de n integrales abelianas de primera especie. Si los grupos de n puntos son ∞^2, o sea, si se trata de una g_n^2, basta considerar dos veces la suma de dichas n integrales, cambiando los límites de la integración cada vez que se considera la suma de las n integrales, porque ya no se trata de uno solo, sino de dos parámetros para asignar los límites de la integración. Siguiendo este razonamiento resulta que, cuando la involución sea, v. gr.: de especie $n-k$, la operación de sumar las integrales se hará $n-k$ veces, cambiando otras tantas los límites de la integración, puesto que los parámetros son ahora $n-k$, ya que en tal caso el sistema de líneas que da los grupos de intersección con la $f=0$ es de la forma $\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\dots\dots+\lambda_{n-k}\varphi_{n-k}=0$.

(*) Véase Clebsch-Lindemann: *Vorlesungen über Geometrie*, cap. XVI. Leipzig, 1876. Se supone en el teorema que en el sistema de puntos dichos no existen puntos dobles, y que los límites de la integración son desde el grupo correspondiente a $\lambda=0$ hasta el grupo que resulta cuando $\lambda=\infty$.

(**) En la obra citada puede verse la bibliografía correspondiente.

Esto supuesto, decir que dos curvas planas generales de orden $n+1$ tienen la misma $g_{\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, equivale a decir que las $\frac{n(n-1)}{2}$ sumas de las $\frac{n(n+1)}{2}$ integrales abelianas de primera especie son las mismas; y por consiguiente, se ve claro que el problema de dar una expresión geométrica a nuestro teorema del final del párrafo anterior, para enunciarlo en forma análoga a lo hecho por Segre con el teorema de Weierstrass, tiene una solución elegante empleando el teorema citado de Abel. Podemos, pues, enunciar el teorema relativo a la condición necesaria y suficiente para que dos redes de homografías generales que contengan la identidad sean entre sí proyectivamente idénticas, o sea, transformables proyectivamente. Obsérvese que la frase *que tengan los mismos invariantes*, hemos visto que no significa otra cosa que tener la misma curva de puntos dobles con la misma involución especial g_{n+1}^{1} sobre ella (*).

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que dos redes generales de homografías en* E_n, *que contengan la identidad, sean proyectivamente idénticas, es que tengan los mismos invariantes y que las* $\frac{n(n-1)}{2}$ *sumas de las* $\frac{n(n+1)}{2}$ *integrales abelianas correspondientes sean las mismas.*

Para que este nuestro teorema adquiera la generalidad que Segre y Predella han dado al teorema analítico de índole análoga (en las homografías del espacio E_n), es preciso estudiar los distintos casos particulares a que pueda dar lugar la particularización de la línea de los elementos dobles, cuando las homografías sean no las generales por nosotros consideradas, sino cualesquiera.

También puede continuarse nuestro estudio en el sentido de

(*) No es necesario indicar que la frase *tener la misma curva de puntos dobles* no quiere decir identidad objetiva de las curvas (en tal caso tendríamos la identidad de las redes), sino que éstas son de la misma naturaleza.

considerar los sistemas lineales del tipo [1, *Ha*, *Hb*, *Hc*], problema que, como ya dijimos, es de mucha mayor dificultad.

Por el momento damos fin a nuestra labor, esperando que los procedimientos que hemos empleado adquieran algún desarrollo en nuestra patria, a fin de aportar algún progreso a la geometría algébrica moderna.

Bolonia, 15 diciembre, 1917.

OBRAS PUBLICADAS

	Pesetas.
SANZ Y ESCARTÍN (E.).—La educación moral	1
BARNÉS (D.).—Escuelas al aire libre (Open-air Schools.)	0,50
CEBRIÁN Y FERNÁNDEZ-VILLEGAS (D.).—Métodos y prácticas para la enseñanza de las Ciencias Naturales	0,50
GARCÍA DEL REAL (M.).—La educación popnlar en Inglaterra	1
GARCÍA Y GARCÍA (E.).—La Exposición franco-británica y las Escuelas de Londres	1
GONZÁLEZ RIVAS (A.).—La organización escolar y la enseñanza graduada	0,50
LOZANO (E.).—La enseñanza elemental de la Física y de la Química en Inglaterra	0,50
MAEZTU (M. de).—La Pedagogía en Londres y las Escuelas de párvulos	0,50
NAVARRO FLORES (M.).—La educación moral	1
SÁIZ (C.).—La enseñanza de la lengua materna	0,50
LEAL (T.).—La enseñanza primaria en Londres y el estudio de la Naturaleza	1
LÁZARO E IBIZA (B.).—Estudio de los laboratorios y de los métodos de observación y reconocimiento de las criptógamas susceptibles de aplicaciones médicas, agrícolas e industriales	1,50
PRATS Y AYMERICH (J.).—Síntesis química	0,50
BARRAS DE ARAGÓN (F. de las).—Noticias acerca de Kew Gardens y otros establecimientos botánicos de Europa	2,50
BARRAS DE ARAGÓN (F. de las).—Noticias sobre los cultivos alpinos	0,50
BARRAS DE ARAGÓN (F. de las).—Datos acerca del cultivo de las plantas acuáticas, crasas, bulbosas, epifitas y parásitas	0,50
CAMPO Y CERDÁN (A. del).—Métodos de análisis de alimentos	2,50
RÍO URRUTI (F. del).—El fundamento científico de la Pedagogía social en Natorp	1,50
IBARRA Y RODRÍGUEZ (E.)—Documentos aragoneses en los archivos de Italia	1,50
BALLESTEROS (A.).—Las Cortes de 1252	0,50
MIRALLES Y SOLBES (L.).—Estudio crítico de los métodos para la enseñanza de las primeras nociones de las ciencias experimentales en la escuela	2
POSADA (A.).—Relaciones científicas con América	2
CUELLO CALÓN (E.).—Los procedimientos experimentales para el estudio de la psicología de los niños anormales	0,50
BOSCÁ Y CASANOVA (E.).—Los Museos de París, Londres, Amsterdam y Bruselas	2,50
MOLES (E.).—Un curso teórico y práctico de Química-Física	1
MOLES (E.).—Solubilidad de gases en soluciones acuosas de glicerina y ácido isobutírico	0,50
GÓMEZ OCAÑA (J.).—Estudio de los aparatos autográficos en el Instituto Marey, y comparación de las gráficas por ellos obtenidas	1,50
TELLO (J. F.).—Conferencia internacional contra la lepra	0,50
GÓMEZ OCAÑA J. y A. PI Y SUÑER.—Memoria sobre el VIII Congreso internacional de fisiólogos	1
MASSÓ Y LLORENS (M.).—Tecnología textil	0,50
BESCANSA CASARES (F.).—Memoria sobre el estudio de las algas	0,50
FERNÁNDEZ NAVARRO (L.).—Erupción volcánica de Chinyero (Tenerife) en Noviembre de 1909	2
BARRAS DE ARAGÓN (F. de las).—Notas botánicas	0,50
MÁRQUEZ (M.).—Las modernas aplicaciones de la óptica a la terapéutica	1
LÁZARO E IBIZA (R. de) y J. MADRID MORENO.—Memoria sobre el tercer Congreso internacioual de Botánica	1
BUEN Y LOZANO (R de).—El Museo oceanográfico de Mónaco y los trabajos en él realizados en 1910	1,50
GOGORZA Y GONZÁLEZ (J.).—Estudios de Anatomía comparada y de Embriología	1
CODERQUE NAVARRO (R.).—La reacción Wassermann en el cáncer	1
ELORRIETA Y ARTAZA (T.).—La función legislativa en Inglaterra	2
CASTEJÓN Y MARTÍNEZ DE ARIZALA (F.).—Estudio de las nuevas direcciones del Derecho civil en Italia	4
SOLANA (E.)—La enseñanza primaria en la Exposición de Bruselas	2
DELEITO Y PIÑUELA (J.).—Fernando VII en Valencia el año 1814	7
SERRANO Y SANZ (M.).—El Archivo de las Indias y las exploraciones del istmo de Panamá en los años 1527 a 1534	1
BOSCÁ Y CASANOVES (E.) y A. BOSCÁ Y SEYTRE—Los Museos nacionales de Buenos Aires y de La Plata	2,50
MEDINA (A.).—Algunos medios de exploración de la motilidad y del quimismo gástricos	1

Plá y Janini (J. M.ª).—Determinación cuantitativa del tungsteno 0,50
González Fragoso (R.).—Los Uredináceos 1,50
Barras de Aragón (F. de las).—Notas para un estudio preliminar histórico-natural de la Sierra de Guadarrama . . . . [illegible]
Bernaldo de Quirós y Pérez (C.).—Bandolerismo y delincuencia subversiva en la baja Andalucía. . . . . [illegible]
Ballvé (E.).—Las últimas investigaciones estadísticas de la criminalidad en Alemania. 0,50
González Revilla (L.).—El Congreso internaaional de enseñanza mercantil de Viena en 1910. 1
Ballvé (F.).—La teoría jurídica del delito, según Beling 1,50
Guichot (J.).—Algo sobre la evolución de las doctrinas penales. 2,50
Rivera Pastor (F.).—Lógica de la libertad. 1
Allué Salvador (M.).—Cómo se enseña la sociología en Francia 2
Estelrich (J. L.).—Influencia de la lengua y la literatura italiana en la lengua y la literatura castellana 2
Rucabado (R.).—Apuntes sobre geografía económica de Bélgica 4
Gómez Ocaña (J.).—Estudios fisiológicos. 1
Correa (M.).—Aplicaciones de la Geometría proyectiva a la Cinemática. 2
Muela Alarcón (J. de la).—Algunas notas acerca de la tracción de los ferrocarriles alemanes. 2
Torroja (J. M.).—Levantamiento de planos por medio de la fotografía estereoscópica. 3
Excursiones pedagógicas al extranjero 8
Salmerón y García (N.).—El contrato colectivo del trabajo 2
Algarra (J.).—El crédito de los pequeños municipios y la Sociedad del crédito comunal del reino de Bélgica 2
Candil y Calvo (F.).—Naturaleza jurídica de la promesa de recompensa a persona indeterminada 1
Reventós (M.).—Notas sobre algunas íormas típicas de la imposición real de productos de la propiedad inmueble 3
Nuviala y Falcón (M.).—Lo que es y lo que debc ser el Colegio nacional de Ciegos de Madrid. 1,25
Pontes Lillo (A.).—Las Escuelas profesionales femeninas en Francia, Bélgica y Suiza 1,25
Utray Jáuregui (N.).—La inspección de primera enseñanza en Francia, Bélgica y Suiza. 1
Cebrián y F. Villegas (A.).—La Escuela de párvulos. 0,75
Liz y Díaz (M.).—Observación de las Escuelas de párvulos en Suiza e Italia. . . . 0,75
Mancho y Alastuey (R.).—Organización y sistema de la enseüanza de las Ciencias en las Escuelas normales de Francia, Bélgica y Suiza. 1,50
Excursiones pedagógicas al extranjero.. 1,50
Jiménez de Cisneros (D.).—Resumen de los datos paleontológicos recogidos en algunos Museos de Italia, Suiza, y Francia durante el mes de agosto de 1913 1
F. Ascarza (V.).—Eclipse total de sol de 21 de agosto de 1914. 1
Martín Lecumberri (N. E.).—Algas microscópicas marinas y procedimientos oceanográficos 1
Casadesús Castells (F.).—Impresiones oto-rino-laringológicas de Londres, París y Berlín 1
Otero (A.).—Diagnóstico serobiológico del embarazo. 1
Martínez-Risco y Macías (M.).—La Asimetría de los tripletes de Zeeman 1
Fernández Galiano (E.).—La quimotaxis de los infusorios. 1
Dantín Cereceda (J.).—Evolución y concepto actual de la Geografía moderna . . . 1
Viqueira (V.).—La enseñanza de la psicología en las universidades alemanas. . . . 1
Lecha Marzo (A.).—Los dibujos papilares de la palma de la mano como medio de identificación 0,50
Viqueira (V.).—Un nuevo factor de la memoria de identificación. 0.50
Azcárate y Flórez (P. de).—La intervención administrativa del Estado en los ferrocarriles 1,50
López Valencia (F.).—Instituciones patronales de previsión en los Estados Unidos. 2
Fernádez Baños (O.).—Contribución al estudio de los sistemas lineales de homografías en E_n 1
Fernandez Baños (O.).—Contribución al estudio de las redes de homografías que contienen la identidad en E_n generalización de un teorema de Weierstrass . . . 1
Hueso (V.).—La educación moral en la Escuela primaria, según Durkheim 1

El Catálogo completo de las publicaciones de la Junta para ampliación de estudios puede pedirse a la Secretaría de la misma: Moreto, 1, Madrid.